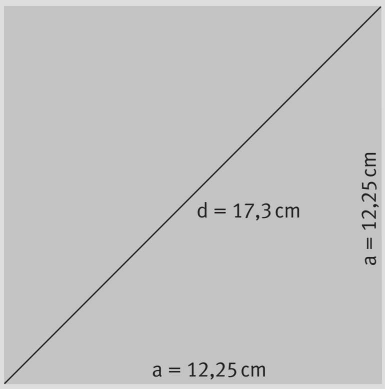
3 Reelle Zahlen

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K6
- **Der Pariser Platz in Berlin ist ein rund 1,5 ha großer quadratischer Platz, an dem das Brandenburger Tor liegt. Du läufst einmal um den Pariser Platz herum. Ermittle die Länge des Weges, den du dabei zurücklegst. Beschreibe deinen Lösungsweg.**
  $1{,}5\,\text{ha} = 150\,\text{a} = 15\,000\,\text{m}^2$
  Gesucht ist diejenige Zahl, die mit sich selbst multipliziert 15 000 ergibt.
  Lösungsmöglichkeit: Man kann in einem ersten Schritt das sogenannte Intervallhalbierungsverfahren durchführen; Intervallhalbierung ist ein Näherungsverfahren, das oft beim systematischen Probieren angewendet wird.
  $100^2 = 10\,000$ $\quad 110^2 = 12\,100$ $\quad 120^2 = 14\,400$ $\quad 130^2 = 16\,900$
  Die Zahl muss zwischen 120 und 130 liegen: $125^2 = 15\,625$
  Die Zahl muss kleiner als 125, aber größer als 120 sein. $122{,}5^2 = 15\,006{,}25$
  Der Wert 122,5 m ist als erste Näherung für die vorliegende Fragestellung bereits genügend genau.
  Umfang des Pariser Platzes: $u = 4 \cdot 122{,}5\,\text{m} = 490\,\text{m}$
  Die Streckenlänge beträgt ungefähr 490 m.

K3
- **Wie lang ist die Strecke, wenn man einmal quer über den Pariser Platz läuft? Bestimme zeichnerisch die Länge der zurückgelegten Strecke.**
  Für die Zeichnung bietet sich ein Maßstab 1 : 1000 an, die Seiten des Quadrats sind also 12,25 cm lang. Die Diagonale ist 17,3 cm, in Wirklichkeit also gut 173 m lang.



K6
- **Auf dem Pariser Platz sind rechteckige Gartenanlagen. Welche Seitenlänge hat ein Quadrat mit demselben Flächeninhalt? Beschreibe dein Vorgehen.**
  Eine Schätzung kann ergeben, dass ca. ein Viertel der Fläche des Pariser Platzes durch beide Gartenanlagen bedeckt ist. Folglich haben die Gartenanlagen zusammen eine Fläche von $3750\,\text{m}^2$.
  Diese Fläche soll gedanklich durch ein Quadrat ersetzt werden.
  Man kann die Seitenlänge dieses Quadrats entweder durch Intervallhalbierung (vgl. oben) ermitteln. Die einfachere Lösung ist aber folgende: Der Pariser Platz lässt sich in vier Quadrate mit je $3750\,\text{m}^2$ Flächeninhalt aufteilen. Daher hat jedes dieser Quadrate die halbe Seitenlänge des Pariser Platzes, also $122{,}5\,\text{m} : 2 = 61{,}25\,\text{m}$.

Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.
Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Verständnis

K1 ■ Es kann keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl geben, denn wenn man eine Zahl (ungleich 0) quadriert, ist das Ergebnis immer positiv.

K1 ■ Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $\sqrt{4} = 2$ und $\sqrt{40} \neq 20$, denn $20 \cdot 20 = 400$.

K5 **1** $A_{Rechteck} = 64\,m \cdot 25\,m = 1600\,m^2$
$A_{Quadrat} = \sqrt{1600\,m^2} = 40\,m$, da $40\,m \cdot 40\,m = 1600\,m^2$
Die Seitenlänge des quadratischen Grundstücks beträgt 40 m.

K3 **2** **a)** neuer Flächeninhalt: $A = 2 \cdot 16\,cm^2 = 32\,cm^2$ $(A = 2 \cdot 25\,m^2 = 50\,cm^2)$
b) Seitenlänge des Quadrats: $a = \sqrt{32}\,cm \approx 5{,}7\,cm$ $(a = \sqrt{50}\,cm \approx 7{,}1\,cm)$

K6 **3** **a)** Wird ein Radikand mit 100 multipliziert oder durch 100 dividiert, so ist die Wurzel aus dieser Zahl das 10-Fache bzw. der 10. Teil des Wurzelwerts des Radikanden; z. B. sei der Radikand 0,04:
$\sqrt{0{,}04 \cdot 100} = \sqrt{4} = 2 = 0{,}2 \cdot 10 = \sqrt{0{,}04} \cdot 10$
$\sqrt{0{,}04 : 100} = \sqrt{0{,}0004} = 0{,}02 = \sqrt{0{,}04} : 10$

b)

1	$\sqrt{62\,500} = 250$	$\sqrt{0{,}0625} = 0{,}25$	$\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$	$\sqrt{625\,000\,000} = 25\,000$
2	$\sqrt{3\,610\,000} = 1900$	$\sqrt{0{,}000361} = 0{,}019$	$\sqrt{361} = 19$	$\sqrt{36\,100} = 190$
3	$\sqrt{4{,}84} = 2{,}2$	$\sqrt{0{,}0484} = 0{,}22$	$\sqrt{484\,000\,000} = 22\,000$	$\sqrt{484} = 22$

K5 **4**

a)	6	7	9	10	11	13	15	20	25	30	100
b)	1	0,8	0,5	0,3	0,9	1,1	1,2	0,1	0,01	0,04	

K5 **5** **a)** $\sqrt{121} = 11$, $\sqrt{64} = 8$ **b)** $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{400} = 20$ **c)** $\sqrt{144} = 12$, $\sqrt{256} = 16$ **d)** $\sqrt{625} = 25$ oder $\sqrt{225} = 15$, $\sqrt{576} = 24$ oder $\sqrt{676} = 26$

K5 **6** (Die Einheiten der Seitenlängen und Flächeninhalte wurden passend vereinheitlicht.)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
A	$324\,cm^2$	$576\,m^2$	$1225\,cm^2$	$134{,}56\,cm^2$	$16\,900\,m^2$	$49\,dm^2$
a	18 cm	24 m	35 cm	11,6 cm	130 m	7 dm
b	27 cm	40 m	25 cm	2,9 cm	100 m	3,5 dm
c	12 cm	14,4 m	49 cm	46,4 cm	169 m	14 dm

Wissen

K5
- 9; 3844; 60 025; 13,69; 0,0729; 0,002916
- **a)** 8; 19; 0,8; 1,1; 0,7 **b)** 1,3; 0,5; 0,19; 0,17
- 5; 2; 0,5; 9; 15; 1

Verständnis

K1 ■ Die Aussage ist falsch. Es gibt reelle Zahlen, die nicht rational sind, z. B. $\sqrt{2}$.

K1 ■ Durch Anhängen weiterer Nachkommastellen lassen sich beliebig viele Zahlen, die größer als 1,6 und kleiner als 1,7 sind erzeugen, z. B.: 1,601, 1,6001; 1,60001; …

K1	**1**	**a)** rational	**b)** irrational	**c)** irrational	**d)** rational
		e) irrational	**f)** rational	**g)** rational	**h)** rational
K5	**2**	**a)** $\approx 3{,}87$	**b)** 6	**c)** 0,5	**d)** $\approx 0{,}41$
		e) $\approx 6{,}32$	**f)** 1,5	**g)** $\approx 0{,}87$	**h)** 0
K5	**3**	**a)** $\approx 2{,}2361$	**b)** $\approx 4{,}7958$	**c)** $\approx 6{,}4807$	**d)** $\approx 0{,}9608$
		e) $\approx 0{,}3780$	**f)** $\approx 11{,}5055$	**g)** $\approx 6{,}9282$	**h)** $\approx 0{,}6934$
K5	**4**	**a)** $\sqrt{5}\ \boxed{<}\ \sqrt{6}$	**b)** $1{,}5\ \boxed{<}\ \sqrt{3}$	**c)** $\sqrt{10}\ \boxed{<}\ \left(\sqrt{10}\right)^2$	**d)** $\sqrt{25{,}25}\ \boxed{>}\ 5$
		e) $\frac{12}{7}\ \boxed{<}\ \sqrt{3}$	**f)** $3\frac{1}{3}\ \boxed{>}\ \sqrt{11}$	**g)** $\sqrt{27{,}04}\ \boxed{=}\ 5{,}2$	**h)** $\sqrt{\frac{1}{9}}\ \boxed{<}\ \sqrt{\frac{1}{3}}$

Wissen

K6

- Es sind individuelle Lösungen möglich.
- Wenn $\sqrt{3}$ eine rationale Zahl ist, so kann man sie als vollständig gekürzten Bruch schreiben ($p, q \in \mathbb{N}$). Es gilt: $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ mit $q \neq 0$

  Man quadriert beide Seiten: $3 = \frac{p^2}{q^2}$

  Durch Umformung erhält man: $3q^2 = p^2$

  p und q lassen sich eindeutig in Primfaktoren zerlegen: $p = p_1 \cdot p_2 \cdot … \cdot p_n$

  $q = q_1 \cdot q_2 \cdot … \cdot q_m$

  Die Umformung von $p^2 = 3q^2$ ergibt: $p_1{}^2 \cdot\ p_2{}^2 \cdot\ … \cdot\ p_n{}^2 = 3 \cdot q_1{}^2 \cdot\ q_2{}^2 \cdot\ … \cdot q_m{}^2$

  Dies ist äquivalent zu: $p_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_2 \cdot … p_n \cdot p_n = 3 \cdot q_1 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_2 \cdot … \cdot q_m \cdot q_m$

  Betrachte die Anzahl der Primfaktoren dieser Gleichung:

  Der Linksterm hat durch das Quadrieren eine gerade Anzahl an Primfaktoren, der Rechtsterm hat jedoch wegen des Faktors 3 eine ungerade Anzahl an Primfaktoren. Dies ist ein Widerspruch, da die Primfaktorzerlegung einer Zahl stets eindeutig ist. Somit kann die Annahme, dass $\sqrt{3}$ eine rationale Zahl ist, nicht stimmen: $\sqrt{3}$ ist irrational.

K5 **5** **a)** $2 < \sqrt{6} < 3$ **b)** $3 < \sqrt{13} < 4$ **c)** $13 < \sqrt{170} < 14$ **d)** $25 < \sqrt{650} < 26$ **e)** $31 < \sqrt{990} < 32$

KX **6** Die prozentuale Abweichung des auf zwei bzw. drei Nachkommastellen gerundeten Wertes vom Ausgangswert a berechnet sich mittels des Abweichungsbetrags b mit der Formel:
$\frac{b}{a} \cdot 100$

a)

		Wurzelwert: zwei Nachkommastellen	quadriert	Betrag der Abweichung	Prozentuale Abweichung (gerundet)
1	$\sqrt{6}$	2,45	6,0025	0,0025	0,04167 %
2	$\sqrt{10}$	3,16	9,9856	0,0144	0,14400 %
3	$\sqrt{43}$	6,56	43,0336	0,0336	0,07814 %
4	$\sqrt{700}$	26,46	700,1316	0,1316	0,01880 %
5	$\sqrt{1000}$	31,62	999,8244	0,1756	0,01756 %

b)

		Wurzelwert: drei Nachkommastellen	quadriert	Betrag der Abweichung	Prozentuale Abweichung (gerundet)
1	$\sqrt{6}$	2,449	5,997601	0,002399	0,03998 %
2	$\sqrt{10}$	3,162	9,998244	0,001756	0,01756 %
3	$\sqrt{43}$	6,557	42,994249	0,005751	0,01337 %
4	$\sqrt{700}$	26,458	700,025764	0,025764	0,00368 %
5	$\sqrt{1000}$	31,623	1000,014129	0,014129	0,00141 %

KX **7** **a)** $\sqrt{7}$ muss zwischen 2 und 3 liegen, da $2^2 < 7 < 3^2$.

b) Ermittlung der Dezimalstellen von $\sqrt{7}$ zu den jeweils angegebenen Start- und Endwerten bei einer Schrittweite von 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001:

2 < 3	
x	x^2
2,0	4,00
2,1	4,41
2,2	4,84
2,3	5,29
2,4	5,76
2,5	6,25
2,6	6,76
2,7	7,29
2,8	7,84
2,9	8,41
3,0	9,00

2,6 < 2,7	
x	x^2
2,60	6,7600
2,61	6,8121
2,62	6,8644
2,63	6,9169
2,64	6,9696
2,65	7,0225
2,66	7,0756
2,67	7,1289
2,68	7,1824
2,69	7,2361
2,70	7,2900

2,64 < 2,65	
x	x^2
2,640	6,969600
2,641	6,974881
2,642	6,980164
2,643	6,985449
2,644	6,990736
2,645	6,996025
2,646	7,001316
2,647	7,006609
2,648	7,011904
2,649	7,017201
2,650	7,022500

2,645 < 2,646	
x	x^2
2,6450	6,99602500
2,6451	6,99655401
2,6452	6,99708304
2,6453	6,99761209
2,6454	6,99814116
2,6455	6,99867025
2,6456	6,99919936
2,6457	6,99972849
2,6458	7,00025764
2,6459	7,00078681
2,6460	7,00131600

Es folgt jeweils:
$\sqrt{7}$ muss zwischen 2,6 und 2,7 liegen, da $2{,}6^2 < 7 < 2{,}7^2$.
$\sqrt{7}$ muss zwischen 2,64 und 2,65 liegen, da $2{,}64^2 < 7 < 2{,}65^2$.
$\sqrt{7}$ muss zwischen 2,645 und 2,646 liegen, da $2{,}645^2 < 7 < 2{,}646^2$.
$\sqrt{7}$ muss zwischen 2,6457 und 2,6458 liegen, da $2{,}6457^2 < 7 < 2{,}6458^2$.
Taschenrechner: $\sqrt{7} = 2{,}645751311$

c) Es sind individuelle Antworten möglich.

K5 **8** **a)** Fortsetzung der im Schulbuch begonnenen Intervallhalbierung von $\sqrt{10}$:

	unterer Wert	oberer Wert	Mittelwert
4	3,125, denn $3{,}125^2 \approx 9{,}8 < 10$	3,500, denn $3{,}500^2 = 12{,}25 > 10$	$\frac{3{,}125 + 3{,}500}{2} = 3{,}3125$ $3{,}3125^2 \approx 11{,}0 > 10$ $\Rightarrow$ oberen Wert ersetzen
5	3,125, denn $3{,}125^2 \approx 9{,}8 < 10$	3,3125, denn $3{,}3125^2 = 10{,}7265625 > 10$	$\frac{3{,}125 + 3{,}3125}{2} = 3{,}21875$ $3{,}21875^2 \approx 10{,}36 > 10$ $\Rightarrow$ oberen Wert ersetzen
6	3,125, denn $3{,}125^2 \approx 9{,}8 < 10$	3,21875, denn $3{,}21875^2 = 10{,}36035156 > 10$	$\frac{3{,}125 + 3{,}21875}{2} = 3{,}171875$ $3{,}171875^2 \approx 10{,}06 > 10$ $\Rightarrow$ oberen Wert ersetzen

b) Bei der „Intervallhalbierung“ geht es darum, das Intervall um die gesuchte Zahl immer enger zu gestalten und sich so von beiden Seiten immer näher an die gesuchte Zahl hinzuarbeiten.

c) Berechnung von $\sqrt{2}$:

Schritt	unterer Wert	oberer Wert	Mittelwert	Mittelwert²
1	1	2	1,5	$1{,}5^2 = 2{,}25 > 2$, also oberen Wert ersetzen
2	1	1,5	1,25	$1{,}25^2 = 1{,}5625 < 2$, also unteren Wert ersetzen
3	1,25	1,5	1,375	$1{,}375^2 \approx 1{,}89 < 2$, also unteren Wert ersetzen
4	1,375	1,5	1,4375	$1{,}4375^2 \approx 2{,}07 > 2$, also oberen Wert ersetzen
5	1,375	1,4375	1,40625	$1{,}40625^2 \approx 1{,}98 < 2$, also unteren Wert ersetzen
6	1,40625	1,4375	1,421875	$1{,}421875^2 \approx 2{,}02 > 2$, also oberen Wert ersetzen
7	1,40625	1,421875	...	...

Berechnung von $\sqrt{8}$:

Schritt	unterer Wert	oberer Wert	Mittelwert	Mittelwert²
1	2	3	2,5	$2{,}5^2 = 6{,}25 < 8$, also unteren Wert ersetzen
2	2,5	3	2,75	$2{,}75^2 = 7{,}5625 < 8$, also unteren Wert ersetzen
3	2,75	3	2,875	$2{,}875^2 \approx 8{,}27 > 8$, also oberen Wert ersetzen
4	2,75	2,875	2,8125	$2{,}8125^2 \approx 7{,}91 < 8$, also unteren Wert ersetzen
5	2,8125	2,875	2,84375	$2{,}84375^2 \approx 8{,}09 > 8$, also oberen Wert ersetzen
6	2,8125	2,84375	2,828125	$2{,}828125^2 \approx 7{,}998 < 8$, also unteren Wert ersetzen
7	2,828125	2,84375	...	...

Berechnung von $\sqrt{500}$:

Schritt	unterer Wert	oberer Wert	Mittelwert	Mittelwert²
1	22	23	22,5	$22{,}5^2 = 506{,}25 > 500$, also oberen Wert ersetzen
2	22	22,5	22,25	$22{,}25^2 \approx 495{,}06 < 500$, also unteren Wert ersetzen
3	22,25	22,5	22,375	$22{,}375^2 \approx 500{,}64 > 500$, also oberen Wert ersetzen
4	22,25	22,375	22,3125	$22{,}3125^2 \approx 497{,}85 < 500$, also unteren Wert ersetzen
5	22,3125	22,375	22,34375	$22{,}34375^2 \approx 499{,}24 < 500$, also unteren Wert ersetzen
6	22,34375	22,375	22,359375	$22{,}359375^2 \approx 499{,}9 < 500$, also unteren Wert ersetzen
7	22,359375	22,375	...	...

d) Entscheidend ist, dass man beim Erstellen des Tabellenblattes eine Fallunterscheidung einbaut, etwa wie unten in den Zeilen B7 und B8 dargestellt.

	A	B	C	D	E
1	Intervallhalbierungsverfahren				
2					
3	Berechnung von Wurzel		2		
4					
5	Schritt	unterer Wert	oberer Wert	Mittelwert	Mittelwert²
6	0	0	2	1	1
7	1	1	2	1,5	2,25
8	2	1	1,5	1,25	1,5625
9	3	1,25	1,5	1,375	1,890625
10	4	1,375	1,5	1,4375	2,06640625
11	5	1,375	1,4375	1,40625	1,97753906
12	6	1,40625	1,4375	1,421875	2,02172852
13	7	1,40625	1,421875	1,4140625	1,99957275
14	8	1,4140625	1,421875	1,41796875	2,01063538
15	9	1,4140625	1,41796875	1,416015625	2,00510025
16	10	1,4140625	1,416015625	1,415039063	2,00233555
17	11	1,4140625	1,415039063	1,414550781	2,00095391

	A	B	C	D	E
1	Intervallhalbierungsverfahren				
2					
3	Berechnung von Wurzel		2		
4					
5	Schritt	unterer Wert	oberer Wert	Mittelwert	Mittelwert²
6	0	0	=C3	=MITTELWERT(B6:C6)	=D6^2
7	1	=WENN(E6<C3;D6;B6)	=WENN(E6>C3;D6;C6)	=MITTELWERT(B7:C7)	=D7^2
8	2	=WENN(E7<C3;D7;B7)	=WENN(E7>C3;D7;C7)	=MITTELWERT(B8:C8)	=D8^2

Erstellt man das Tabellenblatt wie angegeben, so genügt es, wenn man in Zelle C3 den neuen Quadratwert eingibt. Die Berechnung aktualisiert sich dann selbstständig. Für die Erstellung des eigentlichen Algorithmus wird man die Zeilen 6 und 7 komplett eingeben, anschließend die Matrix B7:E7 markieren und mit der Maus nach unten ziehen.

Ausblick

K2

Das Heronverfahren: Klassische Art

a) ① Bestimmung von $\sqrt{2}$:

$a = 2\,\text{cm}$ $\quad b = 1\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{2\,\text{cm} + 1\,\text{cm}}{2} = 1{,}5\,\text{cm}$ $\quad b_{neu} = \frac{2\,\text{cm}^2}{1{,}5\,\text{cm}} \approx 1{,}333\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{1{,}5\,\text{cm} + 1{,}333\,\text{cm}}{2} \approx 1{,}417\,\text{cm}$ $\quad b_{neu} = \frac{2\,\text{cm}^2}{1{,}417\,\text{cm}} \approx 1{,}411\,\text{cm}$ $\quad \sqrt{2} \approx 1{,}41$

② Bestimmung von $\sqrt{6}$:

$a = 3\,\text{cm}$ $\quad b = 2\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{3\,\text{cm} + 2\,\text{cm}}{2} = 2{,}5\,\text{cm}$ $\quad b_{neu} = \frac{6\,\text{cm}^2}{2{,}5\,\text{cm}} = 2{,}4\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{2{,}5\,\text{cm} + 2{,}4\,\text{cm}}{2} = 2{,}45\,\text{cm}$ $\quad b_{neu} = \frac{6\,\text{cm}^2}{2{,}45\,\text{cm}} \approx 2{,}449\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{2{,}45\,\text{cm} + 2{,}449\,\text{cm}}{2} \approx 2{,}450\,\text{cm}$ $\quad b_{neu} = \frac{6\,\text{cm}^2}{2{,}450\,\text{cm}} \approx 2{,}449\,\text{cm}$ $\quad \sqrt{6} \approx 2{,}45$

③ Bestimmung von $\sqrt{12}$:

$a = 4\,\text{cm}$ $\quad b = 3\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{4\,\text{cm} + 3\,\text{cm}}{2} = 3{,}5\,\text{cm}$ $\quad b_{neu} = \frac{12\,\text{cm}^2}{3{,}5\,\text{cm}} \approx 3{,}429\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{3{,}5\,\text{cm} + 3{,}429\,\text{cm}}{2} \approx 3{,}465\,\text{cm}$ $\quad b_{neu} = \frac{12\,\text{cm}^2}{3{,}465\,\text{cm}} \approx 3{,}463\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{3{,}465\,\text{cm} + 3{,}463\,\text{cm}}{2} = 3{,}464\,\text{cm}$ $\quad b_{neu} = \frac{12\,\text{cm}^2}{3{,}464\,\text{cm}} \approx 3{,}464\,\text{cm}$ $\quad \sqrt{12} \approx 3{,}46$

Ausblick (Forts.:)

④ Bestimmung von $\sqrt{20}$:

$a = 5\,\text{cm}$ $b = 4\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{5\,\text{cm} + 4\,\text{cm}}{2} = 4{,}5\,\text{cm}$ $b_{neu} = \frac{20\,\text{cm}^2}{4{,}5\,\text{cm}} \approx 4{,}444\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{4{,}5\,\text{cm} + 4{,}444\,\text{cm}}{2} = 4{,}472\,\text{cm}$ $b_{neu} = \frac{20\,\text{cm}^2}{4{,}472\,\text{cm}} \approx 4{,}472\,\text{cm}$ $\sqrt{20} \approx 4{,}47$

b) Die Wahl der Startwerte spielt eine entscheidende Rolle. Je weiter die Startwerte voneinander entfernt liegen, desto mehr Schritte im Heronverfahren werden benötigt.
Bestimmung von $\sqrt{50}$ mit „guten" Startwerten:

$a = 8\,\text{cm}$ $b = 6{,}25\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{8\,\text{cm} + 6{,}25\,\text{cm}}{2} = 7{,}125\,\text{cm}$ $b_{neu} = \frac{50\,\text{cm}^2}{7{,}125\,\text{cm}} \approx 7{,}018\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{7{,}125\,\text{cm} + 7{,}018\,\text{cm}}{2} \approx 7{,}072\,\text{cm}$ $b_{neu} = \frac{50\,\text{cm}^2}{7{,}072\,\text{cm}} \approx 7{,}070\,\text{cm}$ $\sqrt{50} \approx 7{,}07$

Bestimmung von $\sqrt{50}$ mit „schlechten" Startwerten:

$a = 50\,\text{cm}$ $b = 1\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{50\,\text{cm} + 1\,\text{cm}}{2} = 25{,}5\,\text{cm}$ $b_{neu} = \frac{50\,\text{cm}^2}{25{,}5\,\text{cm}} \approx 1{,}961\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{25{,}5\,\text{cm} + 1{,}961\,\text{cm}}{2} \approx 13{,}731\,\text{cm}$ $b_{neu} = \frac{50\,\text{cm}^2}{13{,}731\,\text{cm}} \approx 3{,}641\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{13{,}731\,\text{cm} + 3{,}641\,\text{cm}}{2} = 8{,}686\,\text{cm}$ $b_{neu} = \frac{50\,\text{cm}^2}{8{,}686\,\text{cm}} \approx 5{,}756\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{8{,}686\,\text{cm} + 5{,}756\,\text{cm}}{2} = 7{,}221\,\text{cm}$ $b_{neu} = \frac{50\,\text{cm}^2}{7{,}221\,\text{cm}} \approx 6{,}924\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{7{,}221\,\text{cm} + 6{,}924\,\text{cm}}{2} = 7{,}073\,\text{cm}$ $b_{neu} = \frac{50\,\text{cm}^2}{7{,}073\,\text{cm}} \approx 7{,}069\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{7{,}073\,\text{cm} + 7{,}069\,\text{cm}}{2} = 7{,}071\,\text{cm}$ $b_{neu} = \frac{50\,\text{cm}^2}{7{,}071\,\text{cm}} \approx 7{,}071\,\text{cm}$ $\sqrt{50} \approx 7{,}07$

Das Heronverfahren: Berechnung am Computer

a) Das Tabellenblatt zeigt das Verfahren für die Berechnung von $\sqrt{10}$. Die Tabelle hat vier Spalten: Anzahl der Schritte, Länge des Rechtecks, Breite des Recktecks, Flächeninhalt des Rechtecks. Zelle C3 enthält die Zahl, deren Wurzel berechnet werden soll. In den Zellen B6 und C6 stehen die Startwerte. Ab Zelle B7 steht in Spalte B jeweils das arithmetische Mittel aus der Länge und Breite des letzten Rechtecks. Ab Zelle C7 steht in Spalte C jeweils der Quotient aus der Ausgangszahl (Zelle C3) und dem Wert in Spalte B. Spalte D enthält das Produkt der Werte aus den Spalten B und C.

b)

	A	B	C	D
1	Heronverfahren			
2				
3	Berechnung von Wurzel		40	
4				
5	Schritt	Länge	Breite	Kontrolle
6	1	8	5	40
7	2	6,5	6,15384615	40
8	3	6,32692308	6,32218845	40
9	4	6,32455576	6,32455488	40
10	5	6,32455532	6,32455532	40
11	6	6,32455532	6,32455532	40
12	7	6,32455532	6,32455532	40

$\sqrt{40} = 6{,}3245...$

	A	B	C	D
1	Heronverfahren			
2				
3	Berechnung von Wurzel		99	
4				
5	Schritt	Länge	Breite	Kontrolle
6	1	10	9,9	99
7	2	9,95	9,94974874	99
8	3	9,94987437	9,94987437	99
9	4	9,94987437	9,94987437	99
10	5	9,94987437	9,94987437	99
11	6	9,94987437	9,94987437	99
12	7	9,94987437	9,94987437	99

$\sqrt{99} = 9{,}9498...$

Verständnis

K1 ■ Diese Rechnung gilt, da $\sqrt{0} + \sqrt{0} = 0 + 0 = 0 = \sqrt{0} = \sqrt{0 + 0} = 0$ ergibt.

K1 ■ Ja, die Umformung ist richtig. Begründung: Auch bei der Addition von Wurzeln gilt das Kommutativgesetz.

K5 **1** **a)** 6 **b)** 2 **c)** 14 **d)** 36 **e)** 9 **f)** 2
g) 15 **h)** 52 **i)** 15 **j)** $\frac{6}{7}$ **k)** $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ **l)** 3

K5 **2** **a)** 10 **b)** 10 **c)** 18 **d)** 10 **e)** 1,5 **f)** 0,8
g) 15 **h)** 0 **i)** 8 **j)** 54 **k)** $\frac{1}{7}$ **l)** 120

K5 **3** **a)** $\sqrt{4 \cdot 12{,}5} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5 \cdot \sqrt{2} \approx 7{,}07$
b) $\frac{\sqrt{112}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{112}{14}} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2{,}83$
c) $\sqrt{\frac{2 \cdot 91}{7}} = \sqrt{2 \cdot 13} = \sqrt{26} \approx 5{,}10$
d) $\sqrt{\frac{0{,}0045}{0{,}0003}} = \sqrt{15} \approx 3{,}87$
e) $\sqrt{2 \cdot 3{,}6 \cdot 50} = \sqrt{36 \cdot 10} = 6 \cdot \sqrt{10} \approx 18{,}97$
f) $\sqrt{12{,}5 \cdot 21 \cdot 8} = \sqrt{100 \cdot 21} = 10 \cdot \sqrt{21} \approx 45{,}83$
g) $\sqrt{\frac{3 \cdot 49}{7 \cdot 9}} = \sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1{,}53$
h) $\sqrt{\frac{0{,}75 \cdot 8 \cdot 15}{5}} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3 \cdot \sqrt{2} \approx 4{,}24$
i) $\sqrt{\frac{31 \cdot 32}{6{,}4}} = \sqrt{31 \cdot 5} = \sqrt{155} \approx 12{,}45$

KX **4** **a)** $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
b) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
c) $\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$
d) $\sqrt{343} = 7\sqrt{7}$
e) $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$
f) $\sqrt{18} + \sqrt{45} = 3(\sqrt{2} + \sqrt{5})$
g) $\sqrt{80} - \sqrt{112} = 4(\sqrt{5} - \sqrt{7})$
h) $\sqrt{99} + \sqrt{44} = 5\sqrt{11}$
i) $\frac{\sqrt{60} + \sqrt{15}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{5}$
j) $\frac{\sqrt{25} - \sqrt{175}}{\sqrt{63}} = \frac{5 - 5\sqrt{7}}{3\sqrt{7}}$
k) $\frac{\sqrt{700} - \sqrt{112}}{\sqrt{175} + \sqrt{63}} = \frac{10\sqrt{7} - 4\sqrt{7}}{5\sqrt{7} + 3\sqrt{7}} = \frac{3}{4}$
l) $\frac{\sqrt{1331}}{\sqrt{176}} = \frac{11\sqrt{11}}{4\sqrt{11}} = 2\frac{3}{4}$

K5 **5**

20	$\sqrt{1125} : \sqrt{5}$	→	15	$\sqrt{32} \cdot \sqrt{8}$	→	16	$\sqrt{324} : \sqrt{4}$	→		
9	$\sqrt{1690} : \sqrt{10}$	→	13	$\sqrt{6} \cdot \sqrt{54}$	→	18	$\sqrt{36} \cdot \sqrt{16}$	→		
24	$\frac{\sqrt{432}}{\sqrt{27}}$	→	4	$\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}$	→	12	$\frac{\sqrt{2000}}{\sqrt{5}}$	→	20	

K1 **6** ① $\sqrt{0{,}729} \approx 0{,}8538$ $\sqrt{7{,}29} \approx 2{,}7$
$\sqrt{72{,}9} \approx 8{,}538$ $\sqrt{729} \approx 27$
$\sqrt{7290} \approx 85{,}38$ $\sqrt{72\,900} \approx 270$

② $\sqrt{1258} \approx 35{,}47$ $\sqrt{125{,}8} \approx 11{,}22$
$\sqrt{12{,}58} \approx 3{,}547$ $\sqrt{1{,}258} \approx 1{,}122$
$\sqrt{0{,}1258} \approx 0{,}3547$ $\sqrt{0{,}01258} \approx 0{,}1122$

Haben Radikanden die gleiche Ziffernfolge, z. B. 1258; 125,8; 12,58; ..., dann hat die Wurzel des jeweils 10-Fache eines Radikanden eine andere Ziffernfolge als die Wurzel des Radikanden. Die Wurzel des jeweils 100-Fachen eines Radikanden hat jedoch die gleiche Ziffernfolge wie die Wurzel des betrachteten Radikanden, im Beispiel die Radikanten 1258; 12,58; 0,1258 mit 35,47; 3,547; 0,3547 bzw. die Radikanten 125,8; 1,258; 0,01258 mit 11,22; 1,122; 0,1122.
Begründung: $\sqrt{a \cdot 100} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{100} = 10 \cdot \sqrt{a}$ und $\sqrt{a \cdot 10} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{a} \approx 3{,}16 \cdot \sqrt{a}$ und mit $a \geq 0$

K5 **7** **a)**

$$\begin{tikzcd}
\sqrt{5} \arrow[r, "\cdot\sqrt{4}"] \arrow[d, "\cdot\sqrt{5}"] & 2\cdot\sqrt{5} \arrow[r] \arrow[d] & 4\cdot\sqrt{5} \arrow[d] \\
5 \arrow[r] \arrow[d] & 10 \arrow[r] \arrow[d] & 20 \arrow[d] \\
5\cdot\sqrt{5} \arrow[r] & 10\cdot\sqrt{5} \arrow[r] & 20\cdot\sqrt{5}
\end{tikzcd}$$

b)

$$\begin{tikzcd}
\sqrt{504} \arrow[r, ":\sqrt{2}"] \arrow[d, ":\sqrt{3}"] & \sqrt{252} \arrow[r] \arrow[d] & \sqrt{126} \arrow[d] \\
\sqrt{168} \arrow[r] \arrow[d] & \sqrt{84} \arrow[r] \arrow[d] & \sqrt{42} \arrow[d] \\
\sqrt{56} \arrow[r] & \sqrt{28} \arrow[r] & \sqrt{14}
\end{tikzcd}$$

K6 **8** **a)** 1 Anwenden des Wurzelgesetzes $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$, dann Radikanden zusammenfassen, schließlich radizieren

2 Anwenden des Wurzelgesetzes $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, dann Radikanden zusammenfassen; schließlich radizieren

b) 1 $\sqrt{\frac{xy^5}{x^3y^3}} = \sqrt{\frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x}$

2 $\sqrt{64x^2} = 8x$

3 $\sqrt{\frac{0{,}4a^2}{0{,}625}} = \sqrt{\frac{400a^2}{625}} = \frac{20a}{25} = \frac{4}{5}a$

4 $\sqrt{3a\cdot 12ab^2} = \sqrt{36a^2\cdot b^2} = 6ab$

5 $\sqrt{\frac{12a}{3a^3}} = \sqrt{\frac{4}{a^2}} = \frac{2}{a}$

6 $\sqrt{\frac{18a^3b^3}{2ab}} = \sqrt{9a^2b^2} = 3ab$

7 $\sqrt{\frac{150x^3}{216x}} = \sqrt{\frac{25x^2}{36}} = \frac{5}{6}x$

8 $\sqrt{8x^2y\cdot 18y} = \sqrt{144x^2y^2} = 12xy$

9 $\sqrt{\frac{45a^2}{245a^4}} = \sqrt{\frac{9}{49a^2}} = \frac{3}{7a}$

10 $\sqrt{\frac{48a^5x^3}{3a^3x}} = \sqrt{16a^2x^2} = 4ax$

K5 **9** **a)** $\mathbb{L} = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$ **b)** $\mathbb{L} = \{-6; 6\}$ **c)** $\mathbb{L} = \varnothing$ **d)** $\mathbb{L} = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$

e) $\mathbb{L} = \{-\sqrt{0{,}5}; \sqrt{0{,}5}\}$ **f)** $\mathbb{L} = \{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$ **g)** $\mathbb{L} = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$ **h)** $\mathbb{L} = \{-2\cdot\sqrt{3}; 2\cdot\sqrt{3}\}$

i) $\mathbb{L} = \{-2{,}5; 2{,}5\}$ **j)** $\mathbb{L} = \varnothing$ **k)** $\mathbb{L} = \{-\sqrt{11}; \sqrt{11}\}$ **l)** $\mathbb{L} = \{-\sqrt{\frac{2}{5}}; \sqrt{\frac{2}{5}}\}$

KX **10**

Start	$\sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$	→	$a\sqrt{5}$	$\sqrt{27a^3} = 3a\sqrt{3a}$	→
$3a\sqrt{3a}$	$\sqrt{175a^5b^2c^3} = 5a^2bc\sqrt{7ac}$	→	$5a^2bc\sqrt{7ac}$	$\frac{\sqrt{18a^3b}}{\sqrt{27b^6}} = \frac{a}{b^2}\cdot\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3b}}$	→
$\frac{a}{b^2}\sqrt{\frac{2a}{3b}}$	$\sqrt{21a^7 + 29a^7} = 5a^3\sqrt{2a}$	→	$5a^3\sqrt{2a}$	$\frac{\sqrt{80a^5 + 9a^5}}{\sqrt{2b^2\cdot 14b^3}} = \frac{a}{b^2}\sqrt{\frac{89a}{7b}}$	→
$\frac{a^2}{2b^2}\sqrt{\frac{89a}{7b}}$	$\frac{\sqrt{3a^3\cdot 2b^4}}{\sqrt{4a^3\cdot 3b^4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	→	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	Ziel	

KX **11** **a)** Bei den ersten beiden binomischen Formeln entsteht neben den beiden Quadraten immer auch das doppelt gemischte Produkt, das weiterhin eine Wurzel enthalten würde. Bei der dritten binomischen Formel dagegen kommen nur Quadrate und somit keine Wurzeln vor.

b) 1 $\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$ 2 $\frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5}\sqrt{5}$ 3 $\frac{12}{\sqrt{15}} = \frac{4}{5}\sqrt{15}$ 4 $\frac{5}{\sqrt{15}} = \frac{1}{3}\sqrt{15}$

5 $\frac{24}{\sqrt{32}} = \frac{24}{4\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ 6 $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}-\sqrt{7}} = \frac{2(2+\sqrt{7})}{4-7} = \frac{4+2\sqrt{7}}{-3}$

7 $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}-\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+\sqrt{11})}{3-11} = \frac{6+2\sqrt{33}}{-8} = \frac{3+\sqrt{33}}{-4}$

8 $\frac{9}{2+\sqrt{7}} = \frac{9\cdot(2-\sqrt{7})}{4-7} = \frac{9\cdot(2-\sqrt{7})}{-3} = -3\cdot(2-\sqrt{7})$

9 $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{13}}{\sqrt{7}-\sqrt{13}} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{13})^2}{7-13} = \frac{7+2\sqrt{7\cdot 13}+13}{-6} = -\frac{10+\sqrt{91}}{3}$

10 $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

KX

12 a) $\frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3}{x}\sqrt{x}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6-c}} = \frac{\sqrt{5}}{6-c} \cdot \sqrt{6-c}$

c) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{a-b} \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b}) = \sqrt{a}-\sqrt{b}$

d) $\frac{a}{\sqrt{3a}-\sqrt{2a}} = \frac{a}{3a-2a} \cdot (\sqrt{3a}+\sqrt{2a}) = \sqrt{3a}+\sqrt{2a}$

e) $\frac{24}{\sqrt{32}} = \frac{24}{4\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

f) $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}-\sqrt{7}} = \frac{2}{4-7} \cdot (2+\sqrt{7}) = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{7}$

g) $\frac{8b}{\sqrt{11b}-\sqrt{7b}} = \frac{8b}{4b} \cdot (\sqrt{11b}+\sqrt{7b}) = 2 \cdot (\sqrt{11b}+\sqrt{7b})$

h) $\frac{\sqrt{5x}-3\sqrt{2y}}{\sqrt{20x}+4\sqrt{8y}} = \frac{(\sqrt{5x}-3\sqrt{2y}) \cdot (2\sqrt{5x}-8\sqrt{2y})}{20x-128y} = \frac{10x-6\sqrt{10xy}-8\sqrt{10xy}+48y}{20x-128y} = \frac{5x+24y-7\sqrt{10xy}}{10x-64y}$

i) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{4x}+\sqrt{5y}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y}) \cdot (\sqrt{4x}-\sqrt{5y})}{4x-5y} = \frac{2x-2\sqrt{xy}-\sqrt{5xy}+y\sqrt{5}}{4x-5y}$

j) $\frac{3x-4\sqrt{y}}{3x+4\sqrt{y}} = \frac{(3x-4\sqrt{y})^2}{9x^2-16y}$

K5

13 a) $(4x+1)^2 - (5x-2)^2 = 13x - 15 \cdot (2-x)$

$16x^2 + 8x + 1 - 25x^2 + 20x - 4 = 13x - 30 + 15x$

$-9x^2 + 28x - 3 = 28x - 30 \qquad | + 9x^2 - 28x + 30$

$27 = 9x^2 \qquad | : 9$

$3 = x^2; \mathbb{L} = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

b) $(5x-3) \cdot (2x-1) - 16x^2 + 1 = x - (x+6)^2$

$10x^2 - 11x + 3 - 16x^2 + 1 = x - x^2 - 12x - 36$

$-6x^2 - 11x + 4 = -x^2 - 11x - 36 \qquad | + 6x^2 + 11x + 36$

$40 = 5x^2 \qquad | : 5$

$8 = x^2; \mathbb{L} = \{-2\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

c) $(3x-4)^2 + (2x-5)^2 = (7-3x) \cdot (8-6x) + 22x$

$9x^2 - 24x + 16 + 4x^2 - 20x + 25 = 56 - 66x + 18x^2 + 22x$

$13x^2 - 44x + 41 = 18x^2 - 44x + 56 \qquad | - 13x^2 + 44x - 56$

$-15 = 5x^2 \qquad | : 5$

$-3 = x^2; \mathbb{L} = \varnothing$

d) $(x+3)^2 + (x-3)^2 = (x+3) \cdot (x-3) + 31$

$x^2 + 6x + 9 + x^2 - 6x + 9 = x^2 - 9 + 31$

$2x^2 + 18 = x^2 + 22 \qquad | - x^2 - 18$

$x^2 = 4; \mathbb{L} = \{-2; 2\}$

e) $(x+3) \cdot (x-4) + (x+4) \cdot (x-3) = 8$

$x^2 - x - 12 + x^2 + x - 12 = 8$

$2x^2 - 24 = 8 \qquad | + 24$

$2x^2 = 32 \qquad | : 2$

$x^2 = 16; \mathbb{L} = \{-4; 4\}$

f) $(x+3)^2 - (x-3)^2 + 45 = (2x+3)^2$

$x^2 + 6x + 9 - x^2 + 6x - 9 + 45 = 4x^2 + 12x + 9$

$12x + 45 = 4x^2 + 12x + 9 \qquad | - 12x - 9$

$36 = 4x^2 \qquad | : 4$

$9 = x^2; \mathbb{L} = \{-3; 3\}$

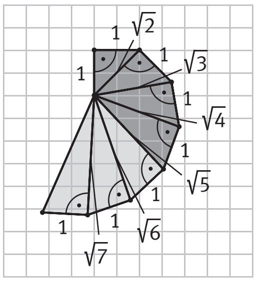
g) $(2x-3) \cdot (x+4) - (x-0{,}5)^2 = 6x + 8$

$2x^2 + 5x - 12 - x^2 + x - 0{,}25 = 6x + 8$

$x^2 + 6x - 12{,}25 = 6x + 8 \qquad | - 6x + 12{,}25$

$x^2 = 20{,}25; \mathbb{L} = \{-4{,}5; 4{,}5\}$

KX **14 a)**



b) Flächeninhalt der im Schulbuch abgebildeten Wurzelschnecke (4 Schritte):

$A_4 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\,\text{FE} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2}\,\text{FE} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3}\,\text{FE} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{4}\,\text{FE}$

$= \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})\,\text{FE} \approx 3{,}07\,\text{FE}$

Flächeninhalt der fortgesetzten Wurzelschnecke (insgesamt 7 Schritte):

$A_7 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})\,\text{FE} \approx 6{,}74\,\text{FE}$

K6 **1** Der Taschenrechner liefert ein auf neun Stellen gerundetes Ergebnis. Die neunte Nachkommastelle der Zahl auf dem Taschenrechner ist eine 8. Multipliziert man die Zahl mit sich selbst, steht wegen $8^2 = 64$ auf der 18. Nachkommastelle eine 4.

K1 **2** Um die benachbarten Zahlen herauszufinden, müssen diejenigen Zahlen bestimmt werden, deren Quadrat „ein bisschen kleiner" bzw. „ein bisschen größer" als der Radikand ist.

a) $6 < \sqrt{40} < 7$; $3 < \sqrt{10} < 4$; $2 < \sqrt{5} < 3$

b) $4 < \sqrt{18} < 5$; $5 < \sqrt{32} < 6$; $7 < \sqrt{60} < 8$

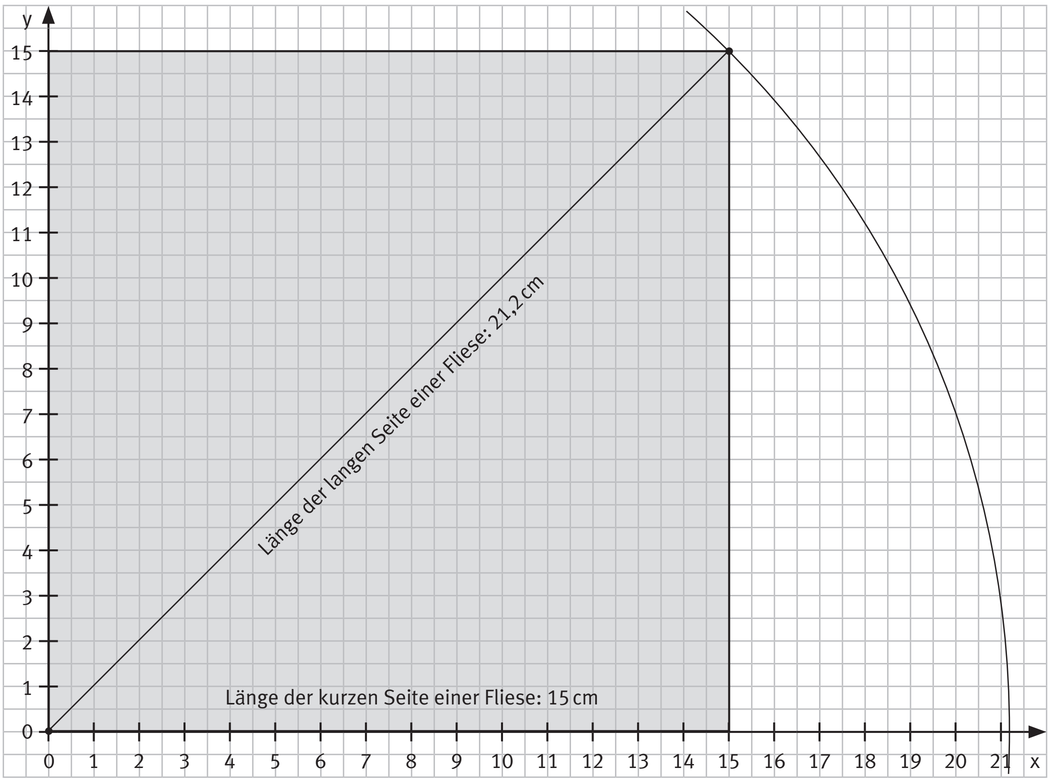
c) $17 < \sqrt{316} < 18$; $12 < \sqrt{145} < 13$; $14 < \sqrt{200} < 15$

d) $9 < \sqrt{88} < 10$; $8 < \sqrt{77} < 9$; $9 < \sqrt{99} < 10$

e) $10 < \sqrt{112} < 11$; $13 < \sqrt{170} < 14$; $12 < \sqrt{168} < 13$

f) $18 < \sqrt{360} < 19$; $20 < \sqrt{420} < 21$; $22 < \sqrt{501} < 23$

K4 **3** **a)** Die Fliesen sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, deren kurze Seiten 60 cm : 4 = 15 cm lang sind. Um die Länge der langen Seite zeichnerisch zu bestimmen, zeichnet man ein Quadrat der Seitenlänge 15 cm und misst die Länge der Diagonale: ≈ 21,2 cm.



b) Die gesamte, von den Fliesen bedeckte Fläche ist $60\,\text{cm} \cdot 30\,\text{cm} = 1800\,\text{cm}^2$ groß. Ein rotes Quadrat bedeckt genau ein Viertel dieser Fläche, also $450\,\text{cm}^2$. Die Seitenlänge dieses Quadrats und damit die lange Seite einer Fliese ist also: $\sqrt{450}\,\text{cm} \approx 21{,}2\,\text{cm}$.

K1 **4** **a)** Die Aussage ist wahr, denn $\left(\sqrt{16}\right)^2 = 16$, nach Definition der Quadratwurzel.

b) Die Aussage ist falsch, denn die Quadratwurzel aus einer nichtnegativen Zahl ist – nach Definition der Quadratwurzel – eine nichtnegative Zahl. Es gilt: $\sqrt{81} = +9$.

c) Die Aussage ist falsch, denn $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$ und $5 < 6$.

d) Die Aussage ist wahr. Für a und $b \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$a = \sqrt{a}^2$ und $a + b = \sqrt{a+b}^2 = \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a+b} = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$

Vergrößert sich a um den Wert b, dann vergrößert sich der Radikand a^2 um $2ab + b^2$.
Da a und $b \in \mathbb{R}_0^+$ sind, ist der Term $2ab + b^2$ positiv und die Wurzel wird auch größer.

e) Die Aussage ist wahr, da die natürlichen Zahlen eine Teilmenge der reellen Zahlen sind.

f) Die Aussage ist wahr.
Beispiele für irrationale Zahlen zwischen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ sind: $\sqrt{2{,}1}$; $\sqrt{2{,}01}$; $\sqrt{2{,}001}$; $\sqrt{2{,}0001}$; …
Beispiele für rationale Zahlen zwischen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ sind: 1,5; 1,51; 1,501; 1,5001; …
Beispiele für reelle Zahlen zwischen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ sind sowohl die Beispiele für irrationale Zahlen als auch die Beispiele für rationale Zahlen: $\sqrt{2{,}1}$; $\sqrt{2{,}01}$; $\sqrt{2{,}001}$; … und 1,5; 1,51; 1,501; …

K5 **5** **a)** $\sqrt{401} \approx 20{,}025$ Abweichung: 0,025 **b)** $\sqrt{626} = 25{,}020$ Abweichung: 0,020
c) $\sqrt{10\,001} = 100{,}0050$ Abweichung: 0,0050 **d)** $\sqrt{250\,001} = 500{,}001$ Abweichung: 0,001

K1 **6** **a)** Ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 9 (FE) hat die Seitenlänge $\sqrt{9}$ (LE) = 3 (LE), ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 16 (FE) hat entsprechend die Seitenlänge $\sqrt{16}$ (LE) = 4 (LE). Beide Quadrate zusammen haben den Flächeninhalt 25 (FE). Zeichnet man jedoch ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 25 (FE), so hat es die Seitenlänge $\sqrt{9+16}$ (LE) = $\sqrt{25}$ (LE) = 5 (LE). Obwohl die Flächeninhalte jeweils gleich sind, gilt dieses nicht für die Summe der Seitenlängen, sodass eine entsprechende Additionsregel für Wurzeln nicht gilt.

b) Es sind individuelle Lösungen möglich, die jedoch nicht immer zu natürlichen Zahlen führen, z. B. $\sqrt{16} + \sqrt{25} \neq \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$.

K5 **7** **a)** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10}$ **b)** $\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{21}$ **c)** $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{4}} = \sqrt{3}$
d) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2{,}5} = \sqrt{20}$ **e)** $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{1}} = \sqrt{30}$ **f)** $\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$
g) $\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$ **h)** $\sqrt{12} \cdot \sqrt{48} = \sqrt{576}$ **i)** $\sqrt{9} \cdot \sqrt{36} = 18$
j) $\sqrt{336} : \sqrt{21} = 4$ **k)** $\sqrt{121} \cdot \sqrt{0} = 0$ **l)** $\sqrt{169} : \sqrt{13} = \sqrt{13}$

K5 **8** **a)** $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ **b)** $3 \cdot \left(\sqrt{8}\right)^2 = 24$ **c)** $1{,}5 \cdot \left(\sqrt{6}\right)^2 = 9$ **d)** $\left(0{,}5 \cdot \sqrt{10}\right)^2 = 2{,}5$ **e)** $\frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{12^2}\right) = 8$

KX **9** **a)** $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{250} = 5\sqrt{10}$
c) $\sqrt{49x^5} = 7x^2\sqrt{x}$ **d)** $\sqrt{275} - \sqrt{99} = 5\sqrt{11} - 3\sqrt{11} = 2\sqrt{11}$
e) $\sqrt{288x^3y} = 12x\sqrt{2xy}$ **f)** $\sqrt{10a^3 + 22a^3} = \sqrt{32a^3} = 4a\sqrt{2a}$
g) $\frac{\sqrt{45} + \sqrt{80}}{\sqrt{147}} = \frac{3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{7\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{15}$ **h)** $\frac{\sqrt{363a^2b^7c^9}}{ab^2c} = \frac{11ab^3c^4\sqrt{3bc}}{ab^2c} = 11bc^3\sqrt{3bc}$

KX **10** **a)** $\frac{1}{\sqrt{32}} = \frac{1}{8}\sqrt{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{288}} = \frac{1}{8}\sqrt{14}$
c) $\frac{6}{\sqrt{3} - \sqrt{15}} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{15})$ **d)** $\frac{a}{7 - \sqrt{a}} = \frac{7a + a\sqrt{a}}{49 - a}$
e) $\frac{\sqrt{6a} - \sqrt{3b}}{\sqrt{3b} - \sqrt{6a}} = \frac{-(\sqrt{3b} - \sqrt{6a})}{\sqrt{3b} - \sqrt{6a}} = -1$ **f)** $\frac{\sqrt{3x} + \sqrt{3y}}{\sqrt{9x} - \sqrt{9y}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{3 \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{3 \cdot (x - y)}$
g) $\frac{x - 5}{\sqrt{x - 5}} = \sqrt{x - 5}$ **h)** $\frac{9}{3 - \sqrt{7}} - \frac{7}{3 - \sqrt{7}} = \frac{2 \cdot (3 + \sqrt{7})}{9 - 7} = 3 + \sqrt{7}$

K5 **11** $\sqrt{100+44} = 12$ $\quad\left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8}$

$2^2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{32}$ $\quad 2^2 = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$

Übrig bleibt:

$\sqrt{100} + \sqrt{44}$

K5 **12** **a)** 3; 10; 0,1; 0,5; 10^3; 0,13; 1,8
b) $\frac{1}{6}$; $\frac{4}{5}$; 240; 10^4; $\frac{2}{3}$; 0,012; $\frac{2}{3}$
c) 3; 5; 0,1; 0,5; 10
d) 4; 6; 6; 10; 0,4

K5 **13** **a)** $0{,}45 < \sqrt{\frac{48}{147}} < \sqrt{\frac{121}{324}} < \sqrt{1{,}2}$
b) $-\sqrt{2{,}45} < -\sqrt{2{,}25} < -\sqrt{2} < -\sqrt{\frac{3}{7}}$
c) $0{,}\overline{3} < \sqrt{\frac{3}{7}} < \sqrt{1{,}1} < \sqrt{45{,}3}$
d) $\sqrt{\frac{162}{128}} < \sqrt{\frac{64}{49}} < \sqrt{1{,}3225} < \sqrt{1{,}4} < \frac{6}{5}$

K5 **14** **a)** $(x+4)^2 = 19 + 8x$
$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = 19 + 8x$
$\Leftrightarrow x^2 = 3;\ \mathbb{L} = \left\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right\}$

b) $(x+3)\cdot(x+9) = 2\cdot(x+3)^2$
$\Leftrightarrow x^2 + 12x + 27 = 2x^2 + 12x + 18$
$\Leftrightarrow x^2 = 9;\ \mathbb{L} = \{-3; 3\}$

c) $2x^2 - 16x + 24 = (x-8)^2$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 16x + 24 = x^2 - 16x + 64$
$\Leftrightarrow x^2 = 40;\ \mathbb{L} = \left\{-2\sqrt{10}; 2\sqrt{10}\right\}$

d) $(x+4{,}5)\cdot(x-8) = -0{,}2\cdot(17{,}5x - 65)$
$\Leftrightarrow x^2 - 3{,}5x - 36 = -3{,}5x + 13$
$\Leftrightarrow x^2 = 49;\ \mathbb{L} = \{-7; 7\}$

K5 **15** **a)** $\frac{x}{6} = \frac{3}{2x};\ \mathbb{G} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
$x^2 = 9;\ \mathbb{L} = \left\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right\}$

b) $\frac{0{,}4x}{15} = \frac{0{,}8}{5x};\ \mathbb{G} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
$x^2 = 6;\ \mathbb{L} = \left\{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\right\}$

c) $\frac{x-2}{x} = \frac{6}{x+8};\ \mathbb{G} = \mathbb{R}\setminus\{-8; 0\}$
$x^2 + 6x - 16 = 6x$
$\Leftrightarrow x^2 = 16;\ \mathbb{L} = \{-4; 4\}$

d) $\frac{6x}{5} = \frac{15}{2x};\ \mathbb{G} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
$12x^2 = 75$
$\Leftrightarrow x^2 = 6{,}25;\ \mathbb{L} = \{-2{,}5; 2{,}5\}$

e) $\frac{x-2}{x+2} = \frac{1-2x}{2x+1};\ \mathbb{G} = \mathbb{R}\setminus\{-2; -0{,}5\}$
$2x^2 - 3x - 2 = -2x^2 - 3x + 2$
$\Leftrightarrow 4x^2 = 4$
$\Leftrightarrow x^2 = 1;\ \mathbb{L} = \{-1; 1\}$

f) $\frac{x+9}{x-9} = \frac{x+4}{4-x};\ \mathbb{G} = \mathbb{R}\setminus\{4; 9\}$
$-x^2 - 5x + 36 = x^2 - 5x - 36$
$\Leftrightarrow 72 = 2x^2$
$\Leftrightarrow x^2 = 36;\ \mathbb{L} = \{-6; 6\}$

g) $\frac{3x+8}{3x+2} = \frac{8-3x}{3x-2};\ \mathbb{G} = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$
$9x^2 + 18x - 16 = -9x^2 + 18x + 16$
$\Leftrightarrow 18x^2 = 32;\ x^2 = \frac{16}{9};\ \mathbb{L} = \left\{-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right\}$

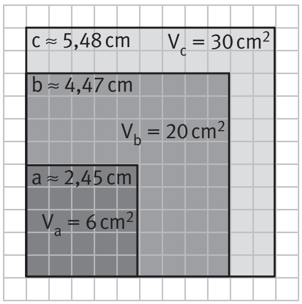
h) $\frac{2x-9}{x-4} = \frac{x+7}{x+6};\ \mathbb{G} = \mathbb{R}\setminus\{-6; 4\}$
$2x^2 + 3x - 54 = x^2 + 3x - 28$
$x^2 = 26;\ \mathbb{L} = \left\{-\sqrt{26}; \sqrt{26}\right\}$

K3 **16** **a)** $A_{\text{Grundstück}} = \frac{333{,}3 + 243{,}3}{2}\cdot 120\,\text{m}^2 = 34\,596\,\text{m}^2$
b) $a_{\text{Quadrat}} = \sqrt{34596}\,\text{m} = 186\,\text{m};\ u_{\text{Quadrat}} = 4\cdot 186\,\text{m} = 744\,\text{m}$
$u_{\text{Trapez}} = 333{,}3\,\text{m} + 150\,\text{m} + 243{,}3\,\text{m} + 120\,\text{m} = 846{,}6\,\text{m};\ u_{\text{Quadrat}} < u_{\text{Trapez}}$
Das flächengleiche Quadrat hat eine Seitenlänge von 186 m und einen Umfang von 744 m.
Der Umfang des Trapezes mit 846,6 m ist länger als der Umfang des Quadrats.
c) Jassin hat Recht. Von allen flächengleichen Vierecken hat das Quadrat den kleinsten Umfang.

K5 **1** **a)** 5; 9; 11; 12; 25; 100 **b)** 0,2; 0,4; $\frac{1}{2}$; 0,5; $\frac{6}{7}$; 0,03

K5 **2** **a)** $\sqrt{3} \approx 1{,}73$; $\sqrt{5} \approx 2{,}24$; $\sqrt{6} \approx 2{,}45$; $\sqrt{10} \approx 3{,}16$; $\sqrt{50} \approx 7{,}07$; $\sqrt{80} \approx 8{,}94$; $\sqrt{111} \approx 10{,}54$; $\sqrt{300} \approx 17{,}32$
b) $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$; $\sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71$; $\sqrt{2{,}5} \approx 1{,}58$; $\sqrt{1{,}44} \approx 1{,}2$; $\sqrt{17{,}6} \approx 4{,}20$; $\sqrt{35{,}8} \approx 5{,}98$; $\sqrt{\frac{4}{8}} \approx 0{,}71$

K5 **3** **a)** $\sqrt{6}\,\text{cm} \approx 2{,}45\,\text{cm}$ **b)** $\sqrt{20}\,\text{cm} \approx 4{,}47\,\text{cm}$ **c)** $\sqrt{30}\,\text{cm} \approx 5{,}48\,\text{cm}$



K5 **4** **a)** ① $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{400} = 20$; $\sqrt{40\,000} = 200$; $\sqrt{4\,000\,000} = 2000$
$\sqrt{40} \approx 6{,}3246$; $\sqrt{4000} \approx 63{,}246$; $\sqrt{400\,000} \approx 632{,}46$; $\sqrt{40\,000\,000} \approx 6324{,}6$
② $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{900} = 30$; $\sqrt{90\,000} = 300$; $\sqrt{9\,000\,000} = 3000$
$\sqrt{90} \approx 9{,}4868$; $\sqrt{9000} \approx 94{,}868$; $\sqrt{900\,000} \approx 948{,}68$; $\sqrt{90\,000\,000} \approx 9486{,}8$

b) Es sind individuelle Formulierungen möglich, z. B.: Multipliziert man eine beliebige natürliche Zahl mit 100, so ist die Wurzel daraus das Zehnfache der Wurzel der ursprünglichen Zahl.

K5 **5**

A in cm²	a in cm	b in cm	c in cm
144	4,5	32	12
625	12,5	50	25
133	7	19	11,53
7	1,4	5	$\sqrt{7}$
150	13	11,54	12,25
462,25	10,75	43	21,5

K5 **6**

a = …	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
𝕃 = { …}	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9	±10	±11

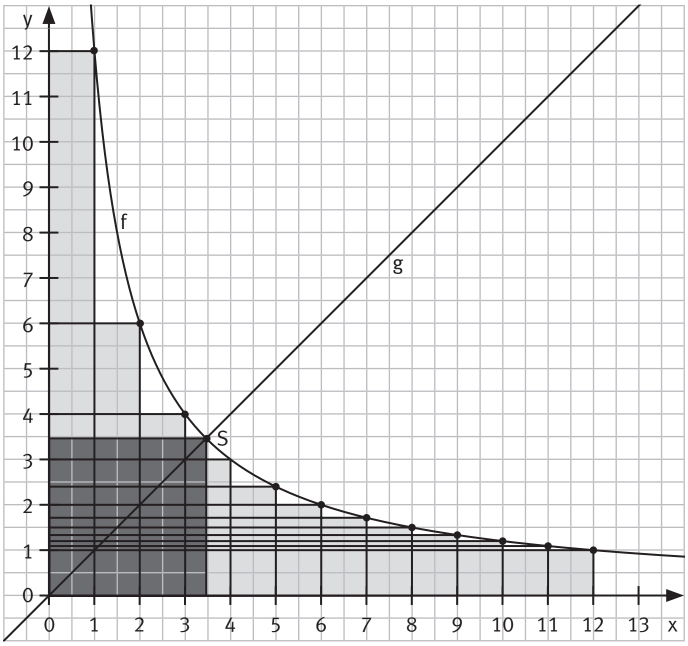
a = …	144	169	196	225	256	289	324	361	400	441
𝕃 = { …}	±12	±13	±14	±15	±16	±17	±18	±19	±20	±21

a = …	484	529	576	625	676	729	784	841	900	961
𝕃 = { …}	±22	±23	±24	±25	±26	±27	±28	±29	±30	±31

K5 **7**

	(Gleichungen umgeformt)	$\mathbb{G} = \mathbb{N}_0$	$\mathbb{G} = \mathbb{Q}$	$\mathbb{G} = \mathbb{R}$
a)	$x^2 = 196$	$\mathbb{L} = \{14\}$	$\mathbb{L} = \{-14; 14\}$	$\mathbb{L} = \{-14; 14\}$
b)	$x^2 = 7{,}29$	$\mathbb{L} = \varnothing$	$\mathbb{L} = \{-2{,}7; 2{,}7\}$	$\mathbb{L} = \{-2{,}7; 2{,}7\}$
c)	$x^2 = -169$	$\mathbb{L} = \varnothing$	$\mathbb{L} = \varnothing$	$\mathbb{L} = \varnothing$
d)	$x^2 = \frac{9}{16}$	$\mathbb{L} = \varnothing$	$\mathbb{L} = \{-0{,}75; 0{,}75\}$	$\mathbb{L} = \{-0{,}75; 0{,}75\}$
e)	$x^2 = 11$	$\mathbb{L} = \varnothing$	$\mathbb{L} = \varnothing$	$\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{11}; \sqrt{11}\right\}$

K4 **8 a)**



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	12	6	4	3	2,4	2	1,71	1,5	1,33	1,2	1,09	1

b) Durch Einzeichnen der Gerade g: $y = x$ lässt sich der Schnittpunkt von g mit dem Funktionsgraphen f: $xy = 12$ ermitteln: $S\,(\sqrt{12}\,|\,\sqrt{12})$ mit $\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$.
Das Quadrat mit der Seitenlänge $x = 3{,}46$ LE hat einen Flächeninhalt von 12 FE.

K5 **9** Korrekturen: **a)** $\sqrt{1600} = 40$ **c)** $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$ **e)** $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$ **f)** $\sqrt{0{,}5^2} = 0{,}5$

K5 **10 a)** 2 **b)** 6 **c)** 9 **d)** 12 **e)** 15 **f)** 20 **g)** $\frac{2}{3}$ **h)** 1,2 **i)** $\frac{1}{3}$

K5 **11 a)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt{8} = 2\sqrt{6}$ $\sqrt{3} + \sqrt{8} = \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{2}$ $\sqrt{3} : \sqrt{8} = 0{,}5\sqrt{1{,}5}$
b) $\sqrt{27} : \sqrt{18} = \sqrt{1{,}5}$ $\sqrt{27} - \sqrt{18} = 3\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$ $\sqrt{27} \cdot \sqrt{18} = 9 \cdot \sqrt{6}$
c) $\sqrt{99} - \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$ $\sqrt{99} + \sqrt{11} = 4\sqrt{11}$ $\sqrt{99} : \sqrt{11} = 3$
d) $\sqrt{2{,}5} \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot \sqrt{2{,}5}$ $\sqrt{2{,}5} + \sqrt{4} = \sqrt{2{,}5} + 2$ $\sqrt{2{,}5} - \sqrt{4} = \sqrt{2{,}5} - 2$

KX **12 a)** $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{96a^3} = 4a\sqrt{6a}$ **c)** $\sqrt{320xy^2} = 8y\sqrt{5x}$ **d)** $\sqrt{1000a^4b^3c^2} = 10a^2bc\sqrt{10b}$

K5 **13 a)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{50}$ **b)** $\sqrt{49} \cdot \sqrt{4} = 2\sqrt{196}$ **c)** $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{100}$ oder $\sqrt{30} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{150}$
d) $\sqrt{432} : \sqrt{12} = 6$ **e)** $\frac{\sqrt{1083}}{\sqrt{3}} = 19$ **f)** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{57{,}8} = 17$

K6 **14 a)** rational: $\sqrt{4}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt{400}$ irrational: $\sqrt{6}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{104}$; $\sqrt{1000}$
b) rational: 0; 1; $\sqrt{0}$; $\sqrt{1}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\sqrt{\frac{1}{9}}$ irrational: $\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{\frac{12}{7}}$

K5 **15 a)** $x^2 = 5{,}67$; $\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{5{,}67}; \sqrt{5{,}67}\right\}$ **b)** $x^2 = -0{,}36$; $\mathbb{L} = \varnothing$ **c)** $x^2 = 0{,}04$; $\mathbb{L} = \{-0{,}2; 0{,}2\}$

Kx **16 a)** $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{100}} = \frac{3}{10}\sqrt{7}$ **b)** $\frac{5}{2 + \sqrt{3}} = 10 - 5\sqrt{3}$ **c)** $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x} - \sqrt{5}} = \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{5x}}{2x - 5}$

K1/6 **17** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $-2 < 1$, aber $(-2)^2 > 1$.

K1/6 **18** Die Aussage ist falsch. Auch für 0 gilt: $0 = 0^2$.

K1/6 **19** Die Aussage ist richtig. Jede gerade Zahl a lässt sich als $a = 2b$, mit $b \in \mathbb{N}$ darstellen.
$a^2 = 2^2 \cdot b^2$. Das Quadrat der geraden Zahl a enthält auch den Primfaktor 2 und ist ebenfalls gerade.

K1/6 **20** Die Aussage ist richtig.

K1/6 **21** Die Aussage ist falsch: $\sqrt{5^2} = 5$.

K1/6 **22** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel mit $a = -1$; für die Gleichung $x^2 = -1$ gilt: $\mathbb{L} = \emptyset$.

K1/6 **23** Die Aussage ist richtig: Für $a = 0$ ist $\mathbb{L} = \{0\}$; damit ist die Gleichung $x^2 = 0$ die einzige Gleichung, die genau eine Lösung besitzt. Für alle anderen Gleichungen $x^2 = a$ und $a \in \mathbb{R}^+$ gilt:
$\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\right\}$, d. h., jede dieser Gleichungen hat zwei Lösungen.

K1/6 **24** Die Aussage ist falsch. Ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $5\,m^2$ hat die Seitenlänge $\sqrt{5}\,m \approx 2{,}24\,m$.

K1/6 **25** Die Aussage ist richtig. Der Flächeninhalt beträgt jeweils $12\,cm^2$.

K1/6 **26** Die Aussage ist falsch. Es gilt: $\sqrt{100} + \sqrt{49} = 10 + 7 = 17$ und $\sqrt{100 + 49} = \sqrt{149} \approx 12{,}21$; $17 \neq 12{,}21$

K1/6 **27** Die Aussage ist richtig.

K1/6 **28** Die Aussage ist richtig.

K1/6 **29** Die Aussage ist richtig.

K1/6 **30** Die Aussage ist falsch. Keine irrationale Zahl lässt sich als Bruch darstellen.

K1/6 **31** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $\frac{1}{3} = 0{,}33333...$

K1/6 **32** Die Aussage ist richtig.

K1/6 **33** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $\sqrt{4} = 2$

Kx **34** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $\frac{4}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$ wird nicht mit dem Nenner $(\sqrt{x} - \sqrt{5})$ erweitert, sondern mit $(\sqrt{x} + \sqrt{5})$.

Kx **35** Die Aussage ist richtig.

K4 **1** **a)** 1 Andreaskreuz: Dem Schienenverkehr Vorrang gewähren.
2 Kreisverkehr
3 Verbot für Fahrzeuge aller Art. Handfahrzeuge, Krafträder und Fahrräder dürfen geschoben werden.

b) 1 drehsymmetrisch mit Drehwinkel 180° (Punktsymmetrie)
2 drehsymmetrisch mit Drehwinkel 120°
3 drehsymmetrisch mit beliebigem Drehwinkel

c) Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.: Vorfahrt gewähren; Haltestelle; Einfahrt verboten; absolutes Halteverbot; eingeschränktes Halteverbot; Ende sämtlicher streckenbezogener Geschwindigkeitsbeschränkungen und Überholverbote.

K5 **2** **a)** $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BA'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} \oplus \overrightarrow{BA'} = \begin{pmatrix} 3+3 \\ 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ A' (6|8)

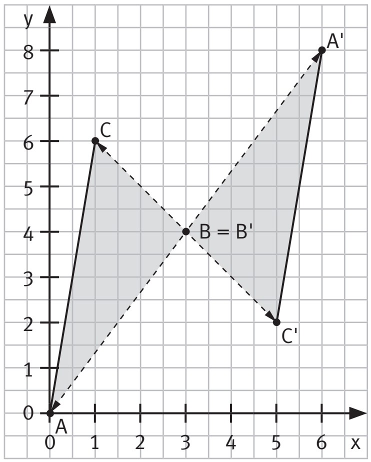
$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BC'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OB} \oplus \overrightarrow{BC'} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ C' (5|2)

Der Punkt B wird als Drehzentrum auf sich selbst abgebildet: B (3|4) = B' (3|4).

b)

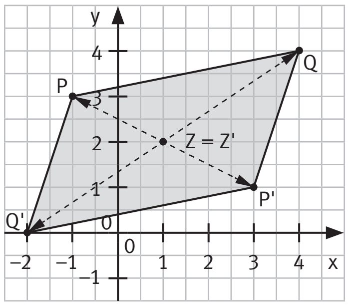


K5 **3** **a)** $\overrightarrow{ZP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{ZP'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OZ} \oplus \overrightarrow{ZP'} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ P' (3|1)

$\overrightarrow{ZQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{ZQ'} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OZ} \oplus \overrightarrow{ZQ'} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Q (–2|0)



b) Beim Viereck PQ'P'Q handelt sich um ein Parallelogramm, da die Punktspiegelung die Bildstrecke parallel und gleich lang zur Urstrecke abbildet.

K5 **4** $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

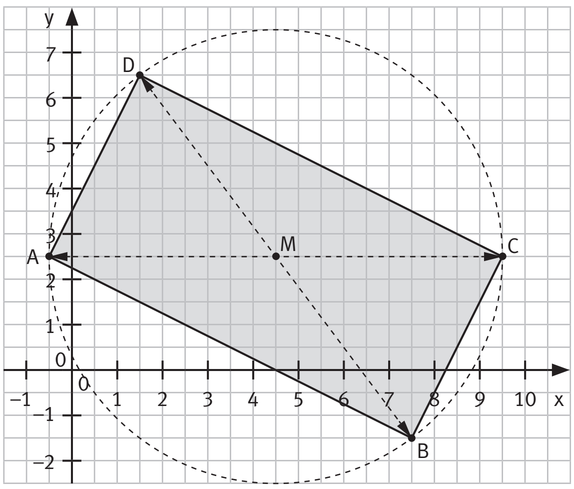
$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} \oplus \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 4{,}5+5 \\ 2{,}5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ C (9,5|2,5)

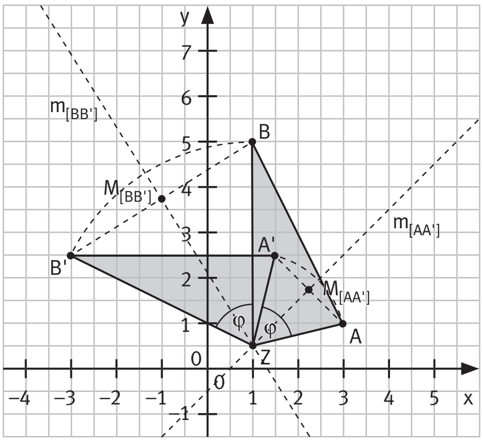
$\overrightarrow{MD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} \oplus \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 4{,}5+3 \\ 2{,}5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ B (7,5|–1,5)



K4 **5** $m_{[AA']} \cap m_{[BB']} = \{Z\}$; Z (1|0,5), Drehwinkelmaß $\varphi \approx 63°$



K5 **6** **a)** Die Behauptung des Schülers ist richtig: Bei $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$ (und auch bei $\mathbb{G} = \mathbb{R}$) muss man die Definitionsmenge nicht weiter einschränken, da der Nenner des Bruches niemals Null werden kann.

b) Bei $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$ ist die Aussage weiterhin korrekt, da auch in diesem Fall der Nenner des Bruches niemals Null werden kann: Es gibt keine rationale Zahl a mit $a^2 = 3$. Bei $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ jedoch ist die Aussage falsch, da mit $a = \sqrt{3}$ oder $a = -\sqrt{3}$ der Nenner des Bruches Null wird: $a^2 - 3 = 0$.

K5 **7** Theoretisch gibt es 24 Gleichungen, wenn man die Terme in der Form $\frac{T_1(x)}{T_2(x)} = \frac{T_3(x)}{T_4(x)}$ zusammensetzt. Da $\frac{T_1(x)}{T_2(x)} = \frac{T_3(x)}{T_4(x)}$ und $\frac{T_3(x)}{T_4(x)} = \frac{T_1(x)}{T_2(x)}$ äquivalent sind, reduziert sich die Anzahl der Gleichungen auf 12.

Nun gilt: Die Gleichungen $\frac{T_1(x)}{T_2(x)} = \frac{T_3(x)}{T_4(x)}$ und $\frac{T_2(x)}{T_1(x)} = \frac{T_4(x)}{T_3(x)}$ unterscheiden sich nur durch die Definitionsmenge, die Lösungsmenge ist identisch. Also gibt es nur sechs verschiedene Lösungsmengen.
Weiterhin gilt: $\frac{T_1(x)}{T_2(x)} = \frac{T_3(x)}{T_4(x)}$ und $\frac{T_1(x)}{T_3(x)} = \frac{T_2(x)}{T_4(x)}$ haben zwar unterschiedliche Definitionsmengen, aber identische Lösungsmengen.
Die Anzahl der unterschiedlichen Lösungsmengen reduziert sich somit auf drei Fälle:

$\frac{2x+4}{6-x} = \frac{0,5x+2}{x-1}$	$\frac{2x+4}{6-x} = \frac{x-1}{0,5x+2}$	$\frac{2x+4}{0,5x+2} = \frac{x-1}{6-x}$
$\Leftrightarrow x^2 + x - 16 = 0$	$\Leftrightarrow x^2 - 0,5x + 7 = 0$	$\Leftrightarrow x^2 - 2,6x - 10,4 = 0$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 6\}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4; 6\}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4; 6\}$
$\mathbb{L} = \{-2,74; 2,34\}$	$\mathbb{L} = \emptyset$	$\mathbb{L} = \{-2,18; 4,78\}$

K5 **8** **a)** $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{3; 4\}$; $\mathbb{L} = \{-8\}$ **b)** $\mathbb{D} = \mathbb{Q}$; $\mathbb{L} = \{-3\}$ **c)** $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 2\}$; $\mathbb{L} = \left\{\frac{5}{12}\right\}$ **d)** $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \left\{0; \frac{1}{6}\right\}$; $\mathbb{L} = \left\{\frac{5}{36}\right\}$

K3 **9** Es sei b die Anzahl der Buben und m die Anzahl der Mädchen; m, n $\in \mathbb{N}_0$.
I $\frac{m}{b} = \frac{2}{3}$ $\wedge$ II $\frac{m-2}{b+1} = \frac{1}{2}$ b = 15; m = 10; $\mathbb{L} = \{(15|10)\}$
Zu Beginn des Schuljahres waren 10 Mädchen und 15 Buben in der Klasse; während des Schuljahres sind nun 8 Mädchen und 16 Buben in der Klasse, insgesamt also 24 Schülerinnen und Schüler.

K5 **10** Will man nur den neuen Flächeninhalt ermitteln, so genügt eine Verhältnisgleichung:

$\frac{A_{neu}}{144\,cm^2} = \frac{5}{8} \Rightarrow A_{neu} = 90\,cm^2$

Will man die Seitenlängen explizit ermitteln, benötigt man ein lineares Gleichungssystem:

Es sei a die Länge und b die Breite des ursprünglichen Rechtecks (jeweils in cm).

I $\quad a \cdot b = 144 \quad \wedge \quad$ II $\quad \frac{(a+3)\cdot 0{,}5b}{144} = \frac{5}{8}$

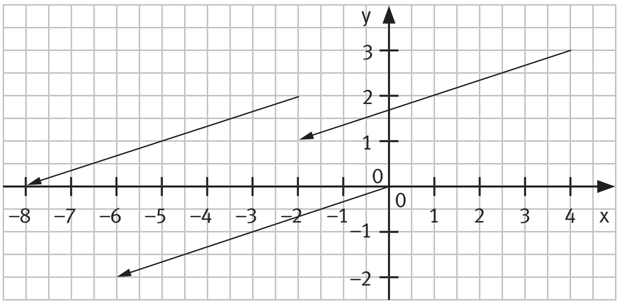
II umformen ergibt: $\quad (a+3)\cdot b = 180 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot b + 3b = 180$

I in II einsetzen ergibt: $3b = 36 \Leftrightarrow b = 12 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{12\,|\,12\}$

Das ursprüngliche Rechteck ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 12 cm, die Seitenlängen des neuen Rechtecks betragen 15 cm und 6 cm.

K4 **11** **a)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2-4 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

b)



K5 **12**

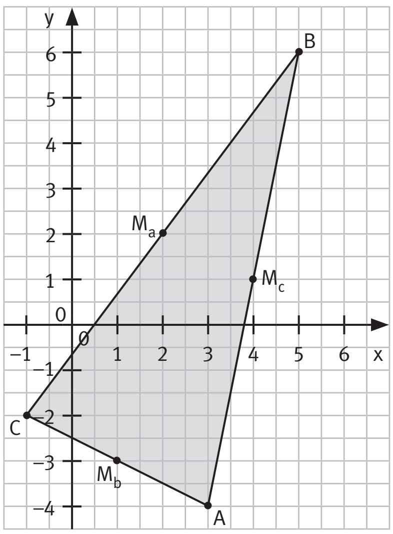
	a)	b)	c)
$\vec{v} = \overrightarrow{PP'}$	$\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 6{,}5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
Gegenvektor $\vec{v}^*$	$\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -6{,}5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$
P (x|y)	(–1,5|–2)	(2|1,5)	(1|0)
P' (x'|y')	(–3|4,5)	(–2|1,5)	(4|4)

K5 **13** x = –2 und y = 13

K5 **14** $M_a\left(\frac{5-1}{2}\,\Big|\,\frac{6-2}{2}\right) = M_a\,(2\,|\,2)$

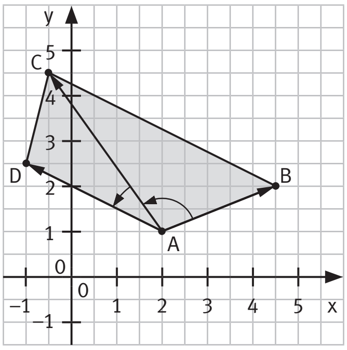
$M_b\left(\frac{-1+3}{2}\,\Big|\,\frac{-2-4}{2}\right) = M_b\,(1\,|\,-3)$

$M_c\left(\frac{3+5}{2}\,\Big|\,\frac{-4+6}{2}\right) = M_c\,(4\,|\,1)$



K1 **15** Die Aussagen 1, 2 und 4 sind richtig.

K6 **16**



Als Anfangspunkt der Vektoren werde A gewählt mit:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1,5 \end{pmatrix}$

Der Flächeninhalt des Vierecks ABCD berechnet sich als Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ABC und ACD:

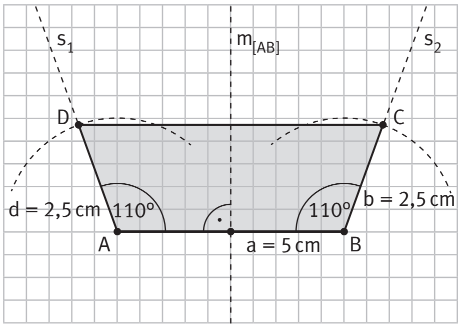
$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2,5 & -2,5 \\ 1 & 3,5 \end{vmatrix} \text{FE} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2,5 & -3 \\ 3,5 & 1,5 \end{vmatrix} \text{FE}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2,5 \cdot 3,5 + 2,5) \text{ FE} + \frac{1}{2} \cdot (-2,5 \cdot 1,5 + 3 \cdot 3,5) \text{ FE} = 9 \text{ FE}$$

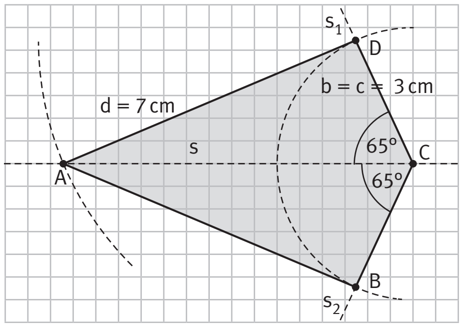
Das Viereck ABCD ist ein Trapez, da AD und BC parallel zueinander sind: $m_{AD} = m_{BC} = -0,5$

K5 **17** (Hier ohne Planfiguren und ohne Konstruktionsbeschreibungen)

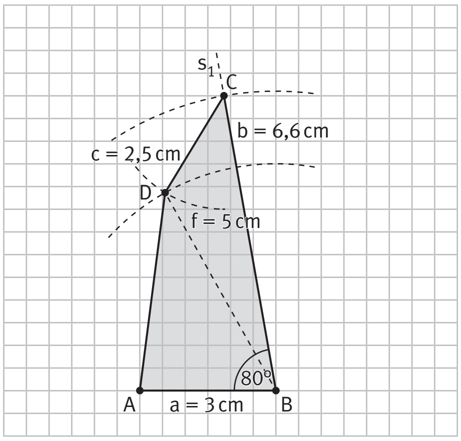
a)



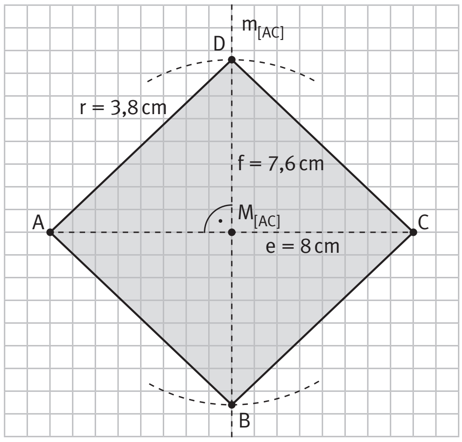
b)



c)



d)



K6 **18** **a)** Rechteck, Raute, Quadrat

b) Rechteck, Raute und Quadrat (achsen- und punktsym.)

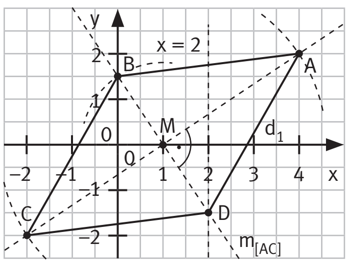
c) Raute, Drachenviereck, Quadrat

d) Parallelogramm, Raute, Rechteck, Quadrat

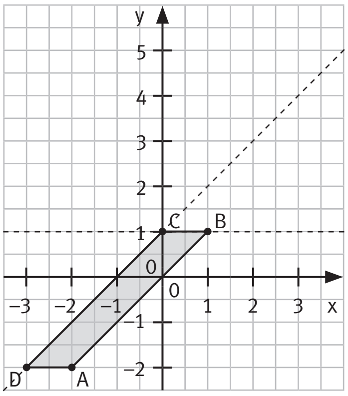
e) achsensym. Trapez, Rechteck, Quadrat

f) Raute, Quadrat

K4 **19**

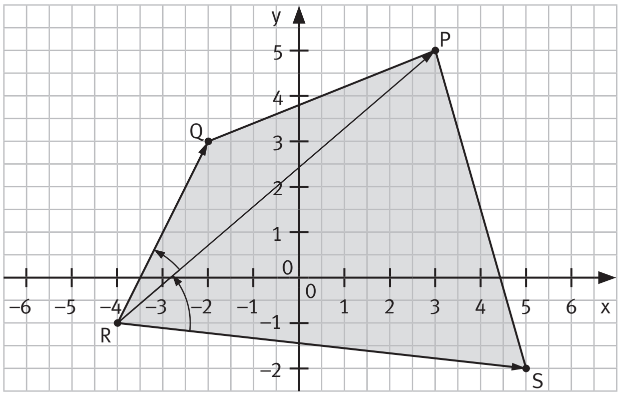


K4 **20** **a)** C (0 | 1)



$A_{ABCD} = 1\text{ LE} \cdot 3\text{ LE} = 3\text{ FE}$

c) Es sind individuelle Zerlegungen möglich, z. B. mit R als Anfangspunkt: $\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

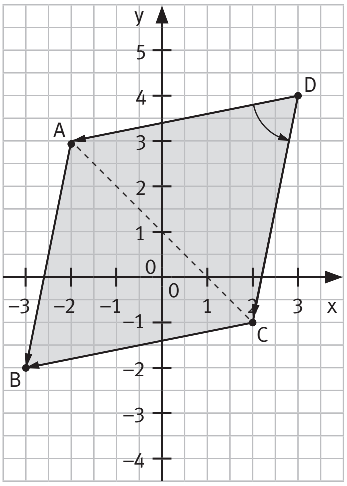


$A_{PRS} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \text{FE} = \frac{1}{2} \cdot 61\text{ FE} = 30{,}5\text{ FE}$

$A_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \text{FE} = \frac{1}{2} \cdot 16\text{ FE} = 8\text{ FE}$

$A_{PQRS} = A_{PRS} + A_{PQR} = 30{,}5\text{ FE} + 8\text{ FE} = 38{,}5\text{ FE}$

b) B (–3 | –2)

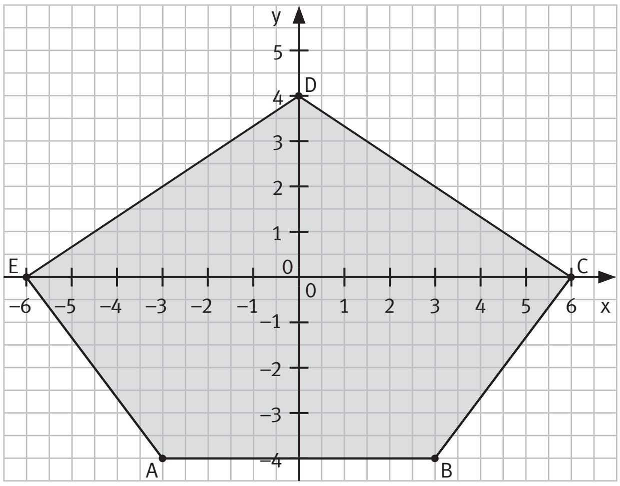


$\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$A_{ABCD} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \text{FE}$

$= 25\text{ FE} - 1\text{ FE} = 24\text{ FE}$

d) Es sind individuelle Zerlegungen möglich, z. B. mit dem Trapez ABCE und dem Dreieck CDE.



$A_{ABCE} = \frac{6 + 12}{2} \cdot 4\text{ FE} = 36\text{ FE}$

$A_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4\text{ FE} = 24\text{ FE}$

$A_{ABCDE} = A_{ABCE} + A_{CDE} = 36\text{ FE} + 24\text{ FE} = 60\text{ FE}$

K5 **21** Die Länge der kurzen Seite des Rechtecks sei x m, die Länge der langen Seite (x + 3) m.

$A_{alt}(x) = x \cdot (x + 3)\text{ m}^2 = (x^2 + 3x)\text{ m}^2$

$A_{neu}(x) = (x + 2) \cdot (x + 5)\text{ m}^2 = (x^2 + 7x + 10)\text{ m}^2$

$A_{alt}(x) + 26\text{ m}^2 = A_{neu}(x)$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 26 = x^2 + 7x + 10$

$\Leftrightarrow 16 = 4x$

$\Leftrightarrow x = 4$

Die Seitenlängen des alten Rechtecks betragen 4 m und 7 m, die des neuen Rechtecks 6 m und 9 m.