

4 Daten und Zufall

EINSTIEG

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente: Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

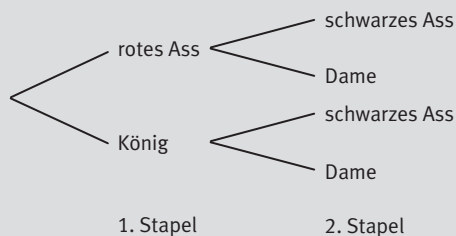
K4

- **Bilde jeweils zwei kleine Stapel von Spielkarten: einen Stapel aus einem roten Ass und einem König und einen anderen aus einem schwarzen Ass und einer Dame.**

Die Schüler bereiten das Experiment vor.

K4

- **Stell dir vor, dass gleichzeitig von jedem Stapel eine Spielkarte verdeckt gezogen wird. Zeichne ein passendes Baumdiagramm zu diesem Zufallsexperiment.**



K6

- **Wie viele verschiedene Ergebnisse sind insgesamt möglich?**

Insgesamt sind vier verschiedene Ergebnisse möglich.

K6

- **Wie groß schätzt du die Wahrscheinlichkeit ein, dass unter den beiden gezogenen Karten genau ein Ass ist? Erläutere.**

Bei zwei Ergebnissen kommt „genau ein Ass“ vor; alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich. Somit ist die Wahrscheinlichkeit für „genau ein Ass“ 50%.

K5

- **Angenommen, dieses Zufallsexperiment würde ganz oft durchgeführt. Mit wie vielen Assen rechnest du „im Mittel“ pro Durchführung? Überprüfe deine Vermutung, indem du das Zufallsexperiment selbst 50-mal durchführst.**

Es sind individuelle Ergebnisse des Zufallsexperiments möglich.

KX

- **Evi und Jana haben bei der 10-maligen Durchführung folgende Anzahlen an Assen erhalten: 0, 2, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 2 bzw. 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.**

Worin gleichen bzw. unterscheiden sich die Ergebnisse der beiden? Erläutere.

Evi und Jana haben jeweils insgesamt genau 10 Assen gezogen, jedoch hat Evi bei jedem Zug entweder zwei Assen oder kein Ass gezogen, während Jana bei jedem Zug genau ein Ass gezogen hat.

AUSBLICK

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen. Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

VERSTÄNDNIS

K6 ■ Ein Zufallsexperiment heißt „zusammengesetzt“, wenn es aus mehreren Telexperimenten besteht. Die Telexperimente laufen dabei entweder zur gleichen Zeit oder nacheinander ab.

K6 ■ Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:
Einmaliges Werfen einer Münze oder eines Würfels; Ziehen einer Spielkarte von einem Stapel.

K6 1 a) Das Zufallsexperiment setzt sich aus den vier nacheinander ablaufenden Telexperimenten „Ziehen einer Karte vom Stapel ohne Zurücklegen“ zusammen, es ist ein mehrstufiges Zufallsexperiment. Insbesondere verringert sich im Laufe des Experiments die Anzahl der Karten im Stapel von anfangs 52 Pokerkarten um jeweils eine Karte.

b) Das Zufallsexperiment setzt sich aus den fünf gleichzeitig ablaufenden Telexperimenten „Werfen eines Würfels“ zusammen.

c) Das Zufallsexperiment setzt sich aus den drei gleichzeitig ablaufenden Telexperimenten „Drehen einer Münze“ zusammen.

K6 2 Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.: „Drehe Glücksrad 1 oder Glücksrad 2 zweimal nacheinander.“ Oder „Drehe beide Glücksräder gleichzeitig.“

K3 3 Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:

- Einmaliges Ziehen einer Spielkarte aus einem Stapel mit 24 Karten.
- Zufälliges Auswählen eines Schülers aus einer Klasse mit 24 Schülern.
- Zufälliges Auswählen eines Mädchens und eines Jungens aus einer Gruppe mit acht Mädchen und drei Jungen.
- Werfen eines Tetraeders mit vier verschieden farbigen Seitenflächen und eines Spielwürfels.



Entweder landen beide Briefmarken auf der Vorderseite bzw. beide auf der Rückseite oder sie landen auf verschiedenen Seiten. Es sind also insgesamt drei unterscheidbare Ergebnisse möglich: zweimal Vorderseite; zweimal Rückseite; einmal Vorder- und einmal Rückseite.

b) $P(\text{zweimal Vorderseite}) = 25\%$
 $P(\text{zweimal Rückseite}) = 25\%$
 $P(\text{einmal Vorder-, einmal Rückseite}) = 50\%$

IDEE

K1 • Es sind individuelle Ergebnisse der Versuche beim Drehen der verschiedenen Münzen möglich. Hinweis: Obwohl die €-Münzen erst 2002 in Umlauf gebracht wurden, gibt es Münzen aus dem Jahr 1999, da die Münzen seit 1998/1999 mit der Jahreszahl 1999 geprägt wurden.

VERSTÄNDNIS

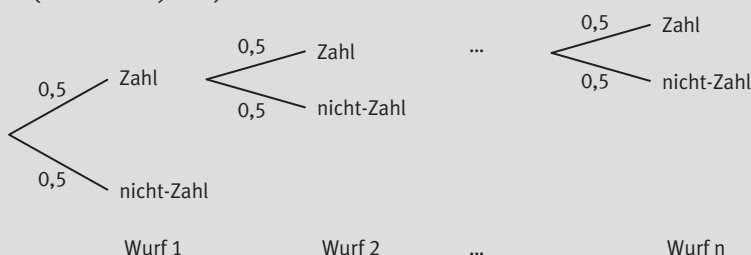
K6

- Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:
Mithilfe der Pfadmultiplikationsregel berechnet man die Wahrscheinlichkeit eines Pfades, der zu einem bestimmten Ergebnis führt, indem man alle Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades miteinander multipliziert.
Mithilfe der Pfadadditionsregel berechnet man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das sich aus mehreren Ergebnissen zusammensetzt, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Pfade addiert.

K6

- Wenn man eine Münze n-mal nacheinander wirft, gibt es im zugehörigen Baumdiagramm genau einen Pfad, der bei jedem Wurf Zahl anzeigt. Da die Wahrscheinlichkeit für Zahl bei jedem einzelnen Wurf immer 0,5 ist, kann man die Wahrscheinlichkeiten auf diesem Pfad miteinander multiplizieren und erhält die Wahrscheinlichkeit für n-mal Zahl:

$$P(n\text{-mal Zahl}) = 0,5^n$$



$$P(n\text{-mal Zahl}) = 0,5^n$$

$$P(2\text{-mal Zahl}) = 0,5^2 = 25\%$$

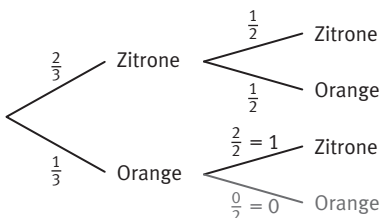
$$P(4\text{-mal Zahl}) = 0,5^4 = 6,25\%$$

$$P(3\text{-mal Zahl}) = 0,5^3 = 12,5\%$$

$$P(n\text{-mal Zahl}) = 0,5^n$$

K5

1



$$\text{a) } P(2\text{-mal Zitrone}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } P(2\text{-mal Orange}) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$P(\text{mindestens 1-mal Zitrone}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{6}{6} = 1$$

K5

2

$$\text{a) } P(E_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = 6,25\%$$

$$P(E_2) = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = 25\%$$

- b) Es sind individuelle Lösungen möglich, z. B.:

Wenn man auf zwei Scheiben mit jeweils vier Symbolen je zwei Kleeblattsymbole aufmalt, gilt:

$$P(\text{zweimal Kleeblatt}) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Wenn man bei zwei Scheiben mit jeweils vier Symbolen auf der ersten Scheibe ein Kleeblattsymbol und auf der zweiten Scheibe zwei Kleeblattsymbole aufmalt, gilt:

$$P(\text{zweimal Kleeblatt}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{8} = 12,5\%$$

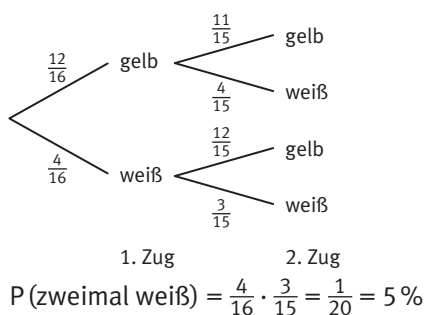
K5

3

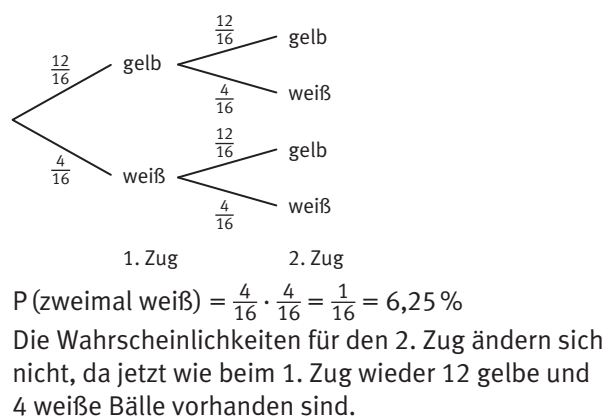
$$P(\text{zwei Einser}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2,8\%$$

$$P(\text{eine Eins und eine Zwei}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} \approx 5,6\%$$

K4 4 a)



b)



K5 5 a) Man verwendet die relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses:

$$P(\text{Pos. 1}) = \frac{717}{1000} = 71,7\% \quad P(\text{Pos. 2}) = \frac{283}{1000} = 28,3\%$$

$$\text{b) } P(1) = 0,717 \cdot 0,717 \cdot 0,283 \quad P(2) = 0,717 \cdot 0,283 \cdot 0,717 \quad P(3) = 0,283 \cdot 0,717 \cdot 0,717$$

$$P(1) = P(2) = P(3) \approx 0,145 = 14,5\%$$

c) Bei allen drei Ergebnissen kommt das Bonbon je zweimal in Pos. 1 und einmal in Pos. 2 zu liegen. Die Wahrscheinlichkeiten sind demnach alle gleich, da hier die Multiplikationsregel Anwendung findet und es keinen Unterschied macht, in welcher Reihenfolge die einzelnen Ereignisse stehen.

K5 6 a) $P(4 \text{ Asse aus } 24 \text{ Karten}) = \frac{4}{24} \cdot \frac{3}{23} \cdot \frac{2}{22} \cdot \frac{1}{21} \approx 0,0094\%$

b) $P(4 \text{ Asse aus } 32 \text{ Karten}) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{2}{30} \cdot \frac{1}{29} \approx 0,0028\%$

c) $P(4 \text{ Asse aus } 52 \text{ Karten}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} \approx 0,00037\%$

K6 7 $P(\text{zwei Treffer nacheinander}) = 0,925^2 \approx 85,6\%$

Da man bei jedem Wurf von derselben Trefferquote ausgehen kann, berechnet man die Wahrscheinlichkeit für zwei Treffer nacheinander mithilfe der Multiplikationsregel für den Pfad für „Treffer-Treffer“.

K3 8 Es gibt individuelle Ergebnisse des Experiments. Die rechnerische Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$P(\text{mindestens zweimal Zahl}) = P(ZZZ) + P(ZZK) + P(ZKZ) + P(KZZ) = 4 \cdot 0,5^3 = 0,5 = 50\%$$

K3 9 $P(\text{Jana gewinnt}) = P(Z \neq 1 \text{ und } J = 1) + P(Z \neq 1 \text{ und } J = Z)$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{18}$$

K6 10 Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:

In einer Urne befinden sich eine rote, eine gelbe und eine grüne Kugel. Man zieht zweimal nacheinander eine Kugel, ohne die gezogene Kugel zurückzulegen.

K1 11 Die Chance für eine der vier Abfolgen ist immer gleich, da die Wahrscheinlichkeit für Kopf oder für Zahl bei jedem Wurf gleich ist, nämlich 50%. Also ist es immer gleich wahrscheinlich, ob sich beim nächsten Wurf Kopf (oder Zahl) ergibt. Die Wahrscheinlichkeit beträgt jeweils $0,5^5 = 3,125\%$.

K6 12 $P(6\text{-mal eine Sechs}) = \left(\frac{1}{6}\right)^6 \approx 0,00002 = 0,002\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass man sechsmal hintereinander eine Sechs würfelt, beträgt 0,002%; das Ereignis ist nicht unmöglich, aber extrem unwahrscheinlich. Daher ist Annikas Vermutung, der Würfel könnte gezinkt sein, gerechtfertigt.

- K5** 13 $P(\text{grüner Würfel zeigt } 3) = \frac{1}{3}$ $P(\text{roter Würfel zeigt } 3) = \frac{1}{6}$ $P(\text{gelber Würfel zeigt } 3) = 1$
 $P(E_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{18} \approx 0,0556 = 5,56\%$ $P(E_2) = 0$ $P(E_3) = 1$
 $P(E_4) = P(\text{grüner Würfel und gelber Würfel zeigen keine } 3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 1 = \frac{10}{18} \approx 0,556 = 55,6\%$
- K3** 14 Die Wahrscheinlichkeit lässt sich berechnen, indem man die Wahrscheinlichkeiten der Pfade „Person lügt und hat eine rote Nase“ und „Person lügt nicht, aber hat eine rote Nase“ addiert.
 $P(\text{Person mit roter Nase}) = P(\text{Lügner mit roter Nase}) + P(\text{Nicht-Lügner mit roter Nase})$
 $= 0,1 \cdot 0,8 + 0,9 \cdot 0,1 = 0,08 + 0,09 = 0,17 = 17\%$
- K3** 15 $P(\text{Hauptgewinn}) = 0,25^3 \approx 0,0156 = 1,56\%$
- K3** 16 Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:
Wie wahrscheinlich ist es, auf einer Computertastatur mit 104 Tasten durch zufälliges Antippen einer Taste ein „a“ oder die Folge „abc“ zu tippen? (Es wird dabei angenommen, dass das Antippen der Tasten gleich wahrscheinlich ist; Fehltreffer werden nicht gezählt).
 $P(a) = \frac{1}{104} \approx 0,0096 = 0,96\%$
 $P(abc) = \left(\frac{1}{104}\right)^3 \approx 0,000000889 = 0,0000889\%$
- K6** 17 $P(\text{Eins-Eins}) = 0,25^2 = 6,25\%$
Die Wahrscheinlichkeit für das gewünschte Ergebnis beträgt 6,25 % je Wurf. Bei 16 Würfeln erwartet man einmal das Ergebnis „Eins-Eins“, bei 160 Würfeln erwartet man zehnmal das Ergebnis „Eins-Eins“.

KAPITEL 4

VERSTÄNDNIS

KX

- Vor der Durchführung eines Experiments kann man den Erwartungswert des Experiments bestimmen, d. h. den Wert, mit dem man „im Durchschnitt“ rechnen kann (auch wenn dieser Wert selbst nicht erzielt werden kann). Nach der tatsächlichen Durchführung erhält man Werte, die vom Erwartungswert abweichen können, sich aber im Mittel am Erwartungswert orientieren.

KX

- Aus Kathrins Sicht ergibt sich: Erwartungswert: $\frac{1}{2} \cdot (+1) + \frac{1}{2} \cdot (-0,50) = 0,25$
Kathrin kann auf lange Sicht mit einem Gewinn von 0,25€ rechnen.

KX

- a) Der Ergebnisraum umfasst alle Kartenwerte von 1 bis 20; jede dieser Karten wird mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen: $P(1) = P(2) = P(3) = \dots = P(19) = P(20) = \frac{1}{20}$
 - b) Erwartungswert: $\frac{1}{20} \cdot 1 + \frac{1}{20} \cdot 2 + \frac{1}{20} \cdot 3 + \dots + \frac{1}{20} \cdot 19 + \frac{1}{20} \cdot 20$

$$= \frac{1}{20} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 19 + 20) = \frac{210}{20} = 10,5$$
Im Mittel kann man einen Zahlenwert von 10,5 erwarten.

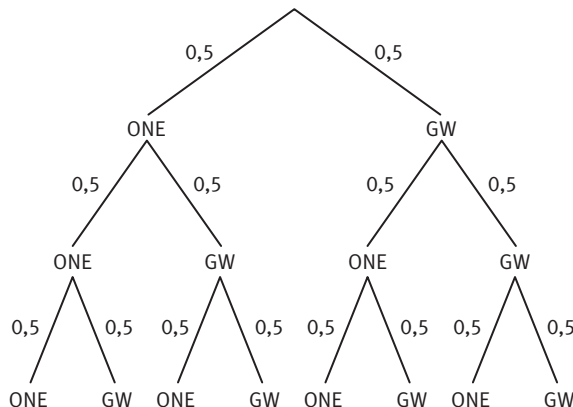
KX

- a) Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:
Man unterscheidet die Ergebnisse nach den Farben der Sektoren.
 - b) Erwartungswert: $\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 10 + \frac{1}{6} \cdot 20 + \frac{1}{6} \cdot 50 + \frac{1}{6} \cdot 100$

$$= \frac{1}{6} \cdot (0 + 5 + 10 + 20 + 50 + 100) = \frac{185}{6} = 30,83$$
 - c) $30,83 \cdot 10 = 308,3$
Man kann mit einem Wert von 308,3 rechnen.

KX

- a) Auf der Vorderseite der amerikanischen 1-Dollar-Note ist der erste Präsident der United States, George Washington, abgebildet (im Baumdiagramm „GW“). Auf der Rückseite ist in der Mitte in großer Schrift das Wort „ONE“ abgebildet.



Ergebnisraum: {ONE-ONE-ONE; ONE-ONE-GW; ONE-GW-ONE; ONE-GW-GW;
 GW-ONE-ONE; GW-ONE-GW; GW-GW-ONE; GW-GW-GW}
 bzw. {(3 ONE); (2 ONE, 1 GW); (1 ONE, 2 GW); (3 GW)}
 kurz: {3; 2; 1; 0}

- b) Erwartungswert (beim Ergebnisraum {3; 2; 1; 0}):

$$\frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 0 = \frac{1}{8} \cdot (3 + 6 + 3 + 0) = \frac{1}{8} \cdot 12 = 1,5$$

Der Mitspieler kann mit einem Gewinn von 1,5 Dollar rechnen. Damit das Spiel fair ist, muss Beth einen Einsatz von 1,50 Dollar verlangen, da ein Spieler im Schnitt 1,50 Dollar pro Spiel bekommt.

- KX** 4 a) Anzahl der Buchstaben des gezogenen Wortes: 7; 3; 11.
 Erwartungswert: $\frac{1}{3} \cdot 7 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 11 = 7$ Man kann im Schnitt mit 7 Buchstaben rechnen.
- b) Anzahl der Vokale des gezogenen Wortes: 3; 1; 5.
 Erwartungswert: $\frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 5 = 3$ Man kann im Schnitt mit 3 Vokalen rechnen.
- KX** 5 Aus Sicht des Spielers gilt: Erwartungswert: $\frac{19}{20} \cdot (-1) + \frac{1}{20} \cdot (20 - 1) = \frac{-19}{20} + \frac{19}{20} = 0$
 Lenas Aussage ist richtig: Das Spiel ist fair, da sich langfristig weder ein Gewinn noch ein Verlust einstellt. Samis Aussage ist falsch, weil er bei seiner Überlegung den Einsatz und die Gewinn- bzw. Verlustwahrscheinlichkeit vernachlässigt.

- KX** 6 Es gibt insgesamt 36 mögliche Ergebnisse.

Wert	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl der Möglichkeiten	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ergebnisraum: $\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$

$$\begin{aligned} \text{Erwartungswert: } & \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{2}{36} \cdot 3 + \frac{3}{36} \cdot 4 + \frac{4}{36} \cdot 5 + \frac{5}{36} \cdot 6 + \frac{6}{36} \cdot 7 + \frac{5}{36} \cdot 8 + \frac{4}{36} \cdot 9 + \frac{3}{36} \cdot 10 + \frac{2}{36} \cdot 11 + \frac{1}{36} \cdot 12 \\ & = \frac{1}{36} \cdot (2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12) = \frac{252}{36} = 7 \end{aligned}$$

KAPITEL 4

VERSTÄNDNIS

KX

- Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:

Von einer gegebenen Datenreihe wird zunächst das arithmetische Mittel berechnet und anschließend die einzelnen Abweichungen vom Mittelwert. Die Abweichungen werden quadriert, anschließend wird die Summe dieser „quadrierten Abweichungen“ gebildet und durch die Anzahl der Daten geteilt. Der ermittelte Quotient ergibt die Varianz. Die Wurzel aus der Varianz liefert die Standardabweichung der Datenreihe.

KX

- Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:

Wichtig ist der Betrag der Abweichung, nicht jedoch die Richtung, in die die einzelnen Werte vom Mittelwert abweichen („nach oben“ oder „nach unten“), bzw. der positive oder negative Wert der Abweichung. Daher quadriert man zunächst die Werte der einzelnen Abweichungen und addiert diese. Die Summe ist somit nicht negativ. Größere Schwankungen führen so zu einer starken Zunahme der Varianz bzw. der Standardabweichung.

KX

1

a)

Daten	17	24	22	16	19	23	16	20	18	25
arith. Mittel $\bar{x}$	$\frac{17+24+22+16+19+23+16+20+18+25}{10} = \frac{200}{10} = 20$									
Abweichungen	-3	4	2	-4	-1	3	-4	0	-2	5
quadriert	9	16	4	16	1	9	16	0	4	25
Varianz	$\frac{9+16+4+16+1+9+16+0+4+25}{10} = \frac{100}{10} = 10$									
Standardabw.:	$\sqrt{10} \approx 3,16$									

b)

Daten	0,75	0,80	0,81	...	0,78	0,66
arith. Mittel $\bar{x}$	$\frac{0,75+0,80+0,81+...+0,78+0,66}{12} = \frac{9,6}{12} = 0,8$					
Abweichungen	-0,05	0	0,01	...	-0,02	0,14
quadriert	0,0025	0	0,0001	...	0,0004	0,0196
Varianz	$\frac{0,0025+0+0,0001+...+0,0004+0,0196}{12} = \frac{0,0642}{12} = 0,00535$					
Standardabw.:	$\sqrt{0,00535} \approx 0,073$					

c)

Daten (in min)	130	122	147	131	130	177
arith. Mittel $\bar{x}$	$\frac{130+122+147+131+130+177}{6} = \frac{837}{6} = 139,5$					
Abweichungen	-9,5	-17,5	7,5	-8,5	-9,5	37,5
quadriert	90,25	306,25	56,25	72,25	90,25	1406,25
Varianz	$\frac{90,25+306,25+56,25+72,25+90,25+1406,25}{6} = \frac{2021,5}{6} = 336,917$					
Standardabw.:	$\sqrt{336,917} \approx 18,36$					

KX

- 2 Es sind individuelle Lösungen möglich.

- KX** 3 Anhand der Stichprobenwerte der Schraubenlängen werden die Spannweiten, die arithmetische Mittel und die Standardabweichungen von Maschine 1 (M-1) und Maschine 2 (M-2) ermittelt und miteinander verglichen.

M-1 (in mm)	2,98	3,00	3,00	3,01	3,00	3,01
Spannweite	$3,01 - 2,98 = 0,03$					
arith. Mittel $\bar{x}$	$\frac{2,98 + 3,00 + 3,00 + 3,01 + 3,00 + 3,01}{6} = \frac{18}{6} = 3$					
Abweichungen	-0,02	0	0	0,01	0	0,01
Varianz	$\frac{0,0004 + 0 + 0 + 0,0001 + 0 + 0,0001}{6} = \frac{0,0006}{6} = 0,0001$					
Standardabw.:	$\sqrt{0,0001} \approx 0,01$					

M-2 (in mm)	3,00	3,04	3,00	2,96	3,00	3,00
Spannweite	$3,04 - 2,96 = 0,08$					
arith. Mittel $\bar{x}$	$\frac{3,00 + 3,04 + 3,00 + 2,96 + 3,00 + 3,00}{6} = \frac{18}{6} = 3$					
Abweichungen	0	0,04	0	-0,04	0	0
Varianz	$\frac{0 + 0,0016 + 0 + 0,0016 + 0 + 0}{6} = \frac{0,0032}{6} = 0,000533$					
Standardabw.:	$\sqrt{0,000533} = 0,0231 \approx 0,02$					

Wenn man nur das arithmetische Mittel betrachten würde, könnte man annehmen, dass beide Maschinen gleich präzise arbeiten. Beim Vergleich der Standardabweichungen von 0,01 mm und 0,02 mm und der Spannweiten von 0,03 mm und 0,08 mm erkennt man: Maschine 1 arbeitet präziser als Maschine 2, da die Abweichungen vom Mittelwert weniger extrem sind als bei Maschine 2 und die Werte näher um den Mittelwert gestreut sind.

KX 4

Vergleich	Paul				Ted				
Reaktionslänge (in cm)	10,0	13,2	12,4	20,0	16,8	12,0	12,4	11,2	10,8
arith. Mittel $\bar{x}$	$\frac{55,6}{4} = 13,9$				$\frac{63,2}{5} = 12,64$				
Varianz	$\frac{55,16}{4} = 13,79$				$\frac{23,232}{5} = 4,6464$				
Standardabw.:	$\sqrt{13,79} = 3,71$				$\sqrt{4,6464} = 2,16$				

Je kürzer die gemessenen „Reaktionslängen“ sind, desto schneller war die Reaktion. Der Vergleich der arithmetischen Mittel und der Standardabweichungen ergibt, dass Ted die bessere Reaktion hat, da er im Mittel kürzere Reaktionslängen benötigt hat und das Lineal schneller gefangen hat als Paul.

- KX** 5 Das arithmetische Mittel der Masse der 20 Schultaschen beträgt 5,5 kg, die Varianz var_{20} beträgt $2,25 \text{ kg}^2$ mit $\text{var}_{20} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{18}^2 + a_{19}^2 + a_{20}^2}{20} \text{ kg}^2$, wobei a_i kg die Abweichung der i-ten Schultasche vom Mittelwert ist.

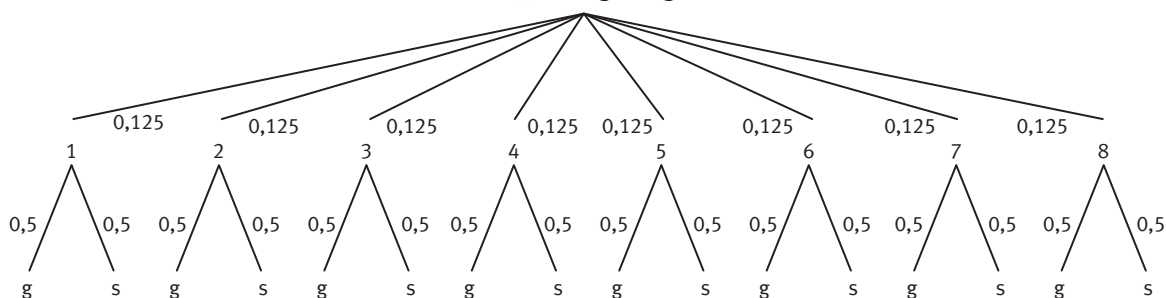
Mit der Abweichung a_5 kg für Sophies Tasche gilt nach der Definition der Varianz und nach der Vorgabe von $\text{var}_{21} = \frac{20}{21} \text{var}_{20}$:

$$\begin{aligned} \text{var}_{21} &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{18}^2 + a_{19}^2 + a_{20}^2 + a_5^2}{21} \text{ kg}^2 = \frac{20}{21} \cdot \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{18}^2 + a_{19}^2 + a_{20}^2}{20} \text{ kg}^2 \\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{18}^2 + a_{19}^2 + a_{20}^2}{21} \text{ kg}^2 \Rightarrow a_5^2 = 0 \end{aligned}$$

Die Abweichung der Masse von Sophies Schultasche beträgt 0 kg. Damit hat Sophies Schultasche eine Masse von 5,5 kg.

KAPITEL 4

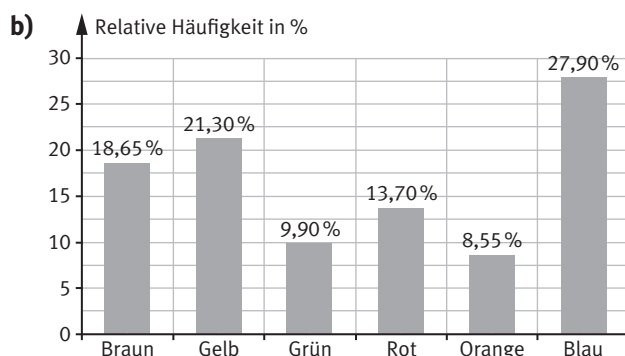
- K4** 1 a) Würfelzahl 1 bis 8 und Sternenfarbe schwarz (s) und gelb (g)



- b) Die Wahrscheinlichkeit ist für alle 16 möglichen Ergebnisse gleich: $P = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0,0625 = 6,25\%$

- K4** 2 a) Insgesamt wurden 2000 Erdnüsse untersucht.

Farbe	Braun	Gelb	Grün	Rot	Orange	Blau
Anzahl	373	426	198	274	171	558
Relative Häufigkeit	18,65%	21,30%	9,90%	13,70%	8,55%	27,90%



- c) $P(\text{zweimal Blau}) = 0,279^2 \approx 0,0778 = 7,78\%$
 Die Wahrscheinlichkeit für eine blaue Erdnuss beträgt 27,9%. Für die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit für zwei blaue Erdnüsse bei zweimaligem Ziehen betrachtet man den Pfad, der zweimal das Ergebnis „Blau“ enthält, und multipliziert die beiden zugehörigen Wahrscheinlichkeiten miteinander. (Eigentlich zieht man in diesem Fall ohne Zurücklegen, aber bei einer so großen Anzahl an Erdnüssen macht das im Ergebnis keinen Unterschied.)

- K5** 3 $P(\text{„Schwarzer Schatten“})$
 $= P(\text{„Schwarzer Schatten“ mit „Grauer Schatten“}) + P(\text{„Schwarzer Schatten“ ohne „Grauer Schatten“})$
 $= 0,77 \cdot 0,82 + 0,23 \cdot 0,07 = 0,6314 + 0,0161 = 0,6475 = 64,75\%$
 Mit einer Wahrscheinlichkeit von 64,75 % hat ein zufällig ausgewählter Kunde „Schwarzer Schatten“ ausgeliehen.

- K5** 4 a) $P(\text{pink}) = \frac{3}{20} = 15\%$ $P(\text{gelb}) = \frac{7}{20} = 35\%$ $P(\text{blau}) = \frac{4}{20} = 20\%$ $P(\text{grün}) = \frac{6}{20} = 30\%$
 b) Da die vier gleichfarbigen Lockenwickler entweder gelb, blau oder grün sind (pink entfällt, da es nur 3 pinke Lockenwickler gibt), betrachtet man die drei Pfade, die jeweils genau viermal die Farben gelb, blau oder grün enthalten, berechnet deren Wahrscheinlichkeiten und addiert diese.
 $P(4\text{-mal gleichfarbig}) = P(4\text{-mal gelb}) + P(4\text{-mal blau}) + P(4\text{-mal grün})$
 $= \frac{7}{20} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{4}{17} + \frac{4}{20} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{2}{18} \cdot \frac{1}{17} + \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{4}{18} \cdot \frac{3}{17}$
 $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{1224}{116280} \approx 0,0105 = 1,05\%$
 Mit rund 1 % Wahrscheinlichkeit sind vier gleichfarbige Lockenwickler auf Charlottes Kopf.

- K6** 5 Der Schlüsselanhänger ist mit einer Münze vergleichbar, die Wahrscheinlichkeit für eine der beiden Seiten beträgt bei jedem Wurf jeweils 0,5. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei drei Würfen die blanke Seite mindestens zweimal oben liegt und somit José die Koffer tragen muss, ist:
 $P(\text{José ist Kofferträger}) = 4 \cdot 0,5^3 = 0,5 = 50\%$
 Dolores muss also mit 50 % Wahrscheinlichkeit die Koffer tragen. Sie könnte das Angebot annehmen, da beide Möglichkeiten – José trägt oder Dolores trägt – gleichwahrscheinlich sind. Dolores kann sich aber auch überlegen, wie wichtig es ihr ist, im günstigen Fall keinen Koffer, im ungünstigen Fall jedoch zwei Koffer zu tragen, oder ob sie lieber die Sicherheit wählt und genau einen Koffer trägt.
- K5** 6 $P(1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{56} \approx 0,018 = 1,8\%$
 $P(2) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{28} \approx 0,036 = 3,6\%$
 $P(3) = \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{7} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{8} = 0,25 = 25\%$
- K6** 7 Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:
 Man braucht drei verschiedene Münzen gleicher Größe, beispielsweise drei 1-€-Münzen aus verschiedenen Ländern und legt fest, welche der sechs Seiten welcher Zahl von Eins bis Sechs entspricht (beispielsweise ist die Zahl der deutschen Münze eine Eins und der Kopf die Zwei, die Zahl der französischen Münze ist die Drei, der Kopf die Vier, und die Zahl der österreichischen Münze ist die Fünf, der Kopf die Sechs). Dann legt man die Münzen in eine Urne und simuliert das Werfen eines Spielwürfels, indem man eine Münze aus der Urne zieht und sie ohne hinzusehen auf den Tisch legt. Das nach oben zeigende Symbol entspricht genau einer der sechs Zahlen eines Spielwürfels.
- K5** 8 Insgesamt gibt es 30 verschiedene Möglichkeiten für die Wahl der Zahlenpaare.
 Der Produktwert ist positiv, wenn zwei negative („neg-neg“) oder zwei positive („pos-pos“) Karten gezogen werden:
 $P(\text{Produktwert positiv}) = P(\text{neg-neg}) + P(\text{pos-pos}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15} \approx 0,267 = 26,7\%$
 Der Produktwert ist negativ, wenn zuerst eine negative, dann eine positive („neg-pos“) oder wenn zuerst eine positive, dann eine negative („pos-neg“) Karte gezogen werden:
 $P(\text{Produktwert negativ}) = P(\text{neg-pos}) + P(\text{pos-neg}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$
 Der Produktwert ist null, wenn man zuerst die Null-Karte, danach eine beliebige andere Karte zieht oder wenn man zuerst eine positive oder negative Karte und anschließend die Null-Karte zieht:
 $P(\text{Produktwert null}) = P(\text{null-nichtnull}) + P(\text{nichtnull-null}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3} \approx 0,333 = 33,3\%$
- K6** 9 Es sind individuelle Lösungen möglich, z. B.:
 In einer Urne befinden sich drei Billardkugeln: eine rote 2, eine schwarze 3 und eine gelbweiße 12. Du darfst zweimal nacheinander ziehen, wobei die zuerst gezogene Kugel vor dem zweiten Zug zurückgelegt wird. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass du zweimal die schwarze 3 ziehst.
- K5** 10 Es sind individuelle Lösungen möglich, z. B.:
 a) E E E N S T mit $P(\text{„EN“}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = 0,10 = 10\%$
 b) A A A S S M M M M M M M M M M mit $P(\text{„AS“ oder „SA“}) = \frac{3}{16} \cdot \frac{2}{15} + \frac{2}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{20} = 0,05 = 5\%$
- K6** 11 Für die als erstes ausgespielte Gewinnzahl gibt es 49 Möglichkeiten, wovon sechs für mich günstig sind. Angenommen, die erste Gewinnzahl entspricht einem meiner Kreuze, so gibt es für die als zweites ausgespielte Gewinnzahl noch 48 Möglichkeiten, wovon ...
 ... fünf für mich günstig sind, usw.
 $P(\text{Sechs Richtige}) = \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44} = \frac{1}{13\,983\,816} \approx 7,2 \cdot 10^{-8}$
 Die Gewinnchance für „Sechs Richtige“ lautet 1 : 13 983 816.
- KX** 12 $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^{n-1}}{6^n}$.

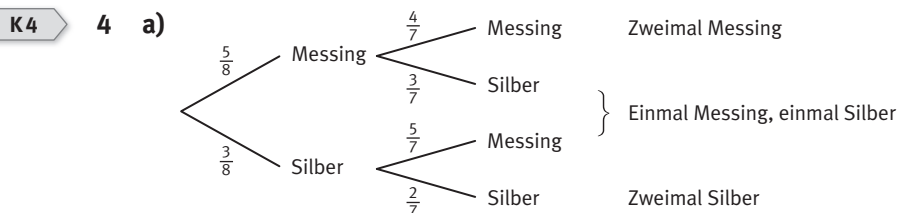
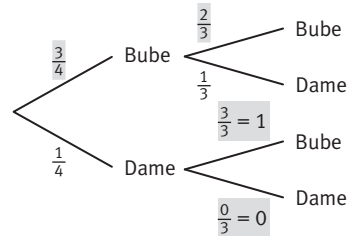
KAPITEL 4

- KX** 13 a) Es sind individuelle Lösungen möglich.
 b) Ergebnisraum: $\{(1; 1; 1), (1; 1; 2), (1; 1; 3), \dots, (4; 4; 2), (4; 4; 3), (4; 4; 4)\}$.
 Es gibt $4^3 = 64$ unterschiedliche Ergebnisse, davon bestehen 40 aus Tupeln mit zwei oder drei gleichen Zahlen; 24 Ergebnisse bestehen aus Tupeln mit drei unterschiedlichen Zahlen.
 $P(E) = \frac{40}{64} = 0,625 = 62,5\%$
 c) Es sind individuelle Lösungen möglich, z. B.:
 Dreimaliges Werfen eines Tetraeder-Würfels mit den Augenzahlen 1, 2, 3 und 4.
- KX** 14 Jede der drei Karten wurde von etwa einem Drittel der insgesamt 540 gezogen Schüler. Damit stammen etwa 180 der 241 Ja-Antworten von Schülern, die einen gelben Punkt auf ihrer Karte hatten. Die verbleibenden 61 Ja-Antworten kamen demnach von den ungefähr 180 Schülern, die die Karte mit der Spickfrage gezogen haben. Ebenso kamen etwa $299 - 180 = 119$ Nein-Antworten von den ungefähr 180 Schülern mit der Spickfrage. Dies ergibt etwa ein Drittel Antworten mit „Spicken? Ja“ gegenüber zwei Drittel Antworten mit „Spicken? Nein!“.
- KX** 15 Erwartungswert: $\frac{1}{7} \cdot (5\text{€} + 10\text{€} + 20\text{€} + 50\text{€} + 100\text{€} + 200\text{€} + 500\text{€}) \approx 126,43\text{€}$
 Karsten kann pro Spiel einen durchschnittlichen Gewinn von 126,43€ erwarten. Für ein faires Spiel sollte er höchstens einen Einsatz von 126,43€ bezahlen.
- KX** 16 $P(2 \text{ Taler}) = 0,5$ $P(2^2 \text{ Taler}) = 0,5^2$ $P(2^3 \text{ Taler}) = 0,5^3$... $P(2^{10} \text{ Taler}) = 0,5^{10}$
 Erwartungswert: $2 \cdot 0,5 + 2^2 \cdot 0,5^2 + 2^3 \cdot 0,5^3 + \dots + 2^{10} \cdot 0,5^{10} = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 10$
 Bei höchstens 10-mal (20-; 30-; n-mal) Werfen kann Daisy mit 10 (20; 30; n) Taler Gewinn rechnen.
- KX** 17
- | Vergleich | Helena | Henriette |
|----------------------------------|---------|-----------|
| a) arith. Mittel (in ml) | 750 | 780 |
| b) Varianz (in ml ²) | 2228,57 | 228,57 |
| Standardabw. (in ml) | 47,21 | 15,12 |
- Henriettes Werte sind weniger weit gestreut, sie weichen weniger stark vom Mittelwert ab. Helenas Werte dagegen schwanken mehr und weichen stark vom Mittelwert ab.
- KX** 18
- | Vergleich der erzielten Punkte | Robin Hood | Sir Lancelot |
|--------------------------------|------------|--------------|
| arith. Mittel | 7,5 | 7,5 |
| Varianz | 0,25 | 3,25 |
| Standardabw. | 0,5 | 1,8 |
- Sir Lancelot hat zwar einmal die 10 getroffen, jedoch auch einen Schuss mit nur 5 Punkten erzielt. Im Mittel haben beide mit 7,5 gleich viele Punkte erzielt. Dabei sind die von Robin Hood erzielten Punkte weniger weit gestreut, während die Punkte von Sir Lancelot sehr schwanken. Robin Hoods Leistung ist konstant gut. Er erweist sich somit als der bessere Schütze.

AUSBLICK

- KX**
- Zuerst wurden die möglichen Ergebnisse (Verluste und Gewinne in €) mit ihren jeweiligen Wahrscheinlichkeiten ermittelt. Anschließend wurde der Erwartungswert berechnet, indem die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten mit ihrem Ergebniswert multipliziert und die Produkte addiert wurden. Daraufhin wurde die Varianz berechnet, indem die Abweichungen der einzelnen Werte vom Erwartungswert berechnet, quadriert, addiert und durch die Anzahl der möglichen Ergebnisse dividiert wurden. Die Standardabweichung ergab sich schließlich durch Wurzelziehen aus der Varianz.
 - Es sind individuelle Antworten möglich.

- K6** 1 a) 13 gleichzeitig ablaufende Teilexperimente „Werfen eines Buchstabenwürfels“.
b) 2 nacheinander ablaufende Teilexperimente „Aufdecken eines Kärtchens“ ohne Zurücklegen.
- K6** 2 Für den Schraubverschluss gibt es drei Möglichkeiten: „Öffnung nach oben“, „Öffnung nach unten“ und „Öffnung zur Seite“. Für die Karte gibt es zwei Möglichkeiten und für den Würfel sechs Möglichkeiten. Insgesamt sind $3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$ verschiedene Ergebnisse möglich.
- K4** 3 Von einem Kartenstapel mit drei Buben und einer Dame wird zweimal hintereinander ohne Zurücklegen eine Karte gezogen.



b) Drei Ergebnisse: „Zweimal Messing“; „Zweimal Silber“; „Einmal Messing, einmal Silber“.

c) $P(\text{Zweimal Messing}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} \approx 0,357 = 35,7\%$

$P(\text{Zweimal Silber}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} \approx 0,107 = 10,7\%$

$P(\text{Einmal Messing, einmal Silber}) = 2 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{30}{56} \approx 0,536 = 53,6\%$

- K5** 5 a) 1 $P(E) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \approx 0,0046 = 0,46\%$
2 $P(E) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,5787 = 57,87\%$
3 $P(E) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,4213 = 42,13\%$

b) Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:

E = „Bei allen drei Versuchen landet der Kreisel auf einem Vokal.“

$P(E) = \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27} \approx 0,0370 = 3,70\%$

K5 6 $P(\text{Produktwert ungerade}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0,3 = 30\%$

K3 7 $P(\text{positives Testergebnis}) = 0,8 \cdot 0,55 + 0,2 \cdot 0,2 = 0,44 + 0,04 = 0,48 = 48\%$

K3 8 $P(2 \text{ Biberix-Figuren bei 2 Zügen}) = \left(\frac{1}{7}\right)^2 \approx 0,0204 = 2,04\%$

- K6** 9 Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:
Ein Oktaeder hat acht Seiten mit den Werten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8. Man nimmt eine beliebige Münze und wirft diese dreimal hintereinander, die Ergebnisse sind (mit K = Kopf, Z = Zahl): KKK, KKZ, KZK, KZZ, ZKK, ZKZ, ZKZ, ZZZ. Nun legt man fest, welches Oktaeder-Ergebnis welchem Zahlenwert von 1 bis 8 entspricht. Da Kopf und Zahl beim Münzwurf jeweils die Wahrscheinlichkeit 50% haben, sind alle diese acht Ergebnisse des dreimaligen Münzwurfs gleich wahrscheinlich mit 12,5%, sie simulieren so das Werfen eines Oktaeder-Würfels.

- KX** 10 Erwartungswert: $\frac{1}{7} \cdot (5 \text{ €} + 10 \text{ €} + 20 \text{ €} + 50 \text{ €} + 100 \text{ €} + 200 \text{ €} + 500 \text{ €}) \approx 126,43 \text{ €}$
Im Mittel kann man einen Betrag von 126,43 € erwarten.

- KX** 11 Günters Einsatz sei G (in €). Es gibt folgende vier Ergebnisse:

Ergebnis	Gewinn	Wahrscheinlichkeit
Dreimal Augenzahl 1 oder 2	8G	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$
Zweimal Augenzahl 1 oder 2	2G	$3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$
Einmal Augenzahl 1 oder 2	$\frac{1}{2}G$	$3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$
Keinmal Augenzahl 1 oder 2	$\frac{1}{8}G$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$

Erwartungswert:

$$8G \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2G \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{2}G \cdot 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{8}G \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = (8G + 12G + 6G + 1G) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{27G}{27} = G$$

Günter kann damit rechnen, dass er seinen Einsatz in gleicher Höhe zurückbekommt, das Spiel ist fair.

KX 12 a)

Vergleich	Packung 1	Packung 2
arith. Mittel (in g)	200	200
Varianz (in g ²)	63	4,33
Standardabw. (in g)	7,94	2,08

- b) Die Massen der Äpfel aus der ersten Packung sind weiter gestreut als die der zweiten Packung.

- K1/6** 13 Die Aussage ist richtig.

- K1/6** 14 Die Aussage ist richtig.

- K1/6** 15 Die Aussage ist falsch, man erhält die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses durch Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades.

- K1/6** 16 Die Aussage ist richtig.

- K1/6** 17 Die Aussage ist richtig.

- K1/6** 18 Die Aussage ist falsch. Für die Übersichtlichkeit und zum Überprüfen des erstellten Baumdiagramms kann es hilfreich sein, auch Äste mit der Wahrscheinlichkeit 1 zu zeichnen.

- K1/6** 19 Die Aussage ist richtig.

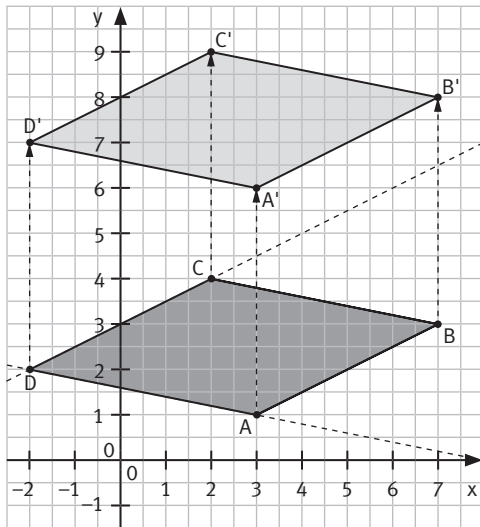
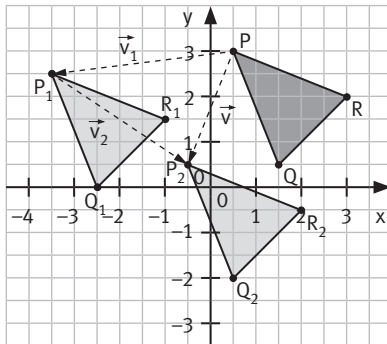
- KX** 20 Die Aussage ist richtig, das Spiel wird dann „fair“ genannt.

- KX** 21 Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel ist der Erwartungswert beim Werfen eines Spielwürfels: Man kann im Schnitt mit dem Erwartungswert 3,5 rechnen, auch wenn der Wert selbst nicht geworfen werden kann.

- KX** 22 Die Aussage ist falsch: Liegt die Varianz zwischen 0 und 1, so ist die Varianz (z. B. 0,64) kleiner als die Standardabweichung (im Beispiel: 0,8): $0,64 < 0,8$. Für Werte größer als 1 ist die Aussage richtig.

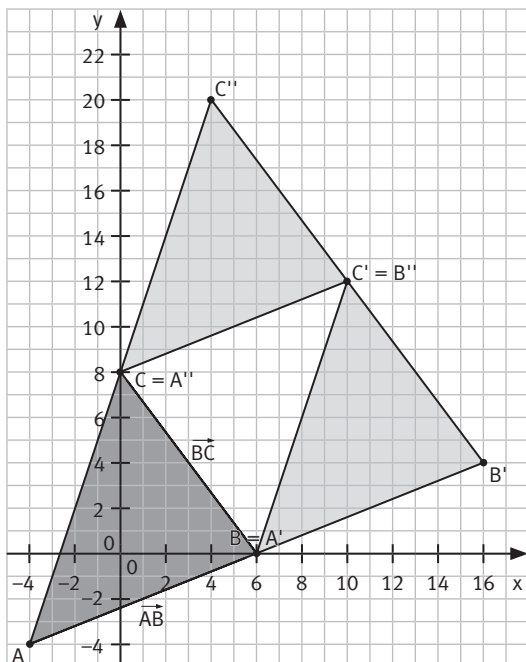
K4 1 a) und b)

Verschiebungspfeil $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit einer Länge von 5 cm


K4 2 a)


$$\begin{aligned} \text{b) } \overrightarrow{OP_1} &= \overrightarrow{OP} \oplus \vec{v}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -4 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} \\ P_1 &(-3,5 | 2,5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \vec{v} &= \vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2 \\ &= \begin{pmatrix} -4 \\ -0,5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2,5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

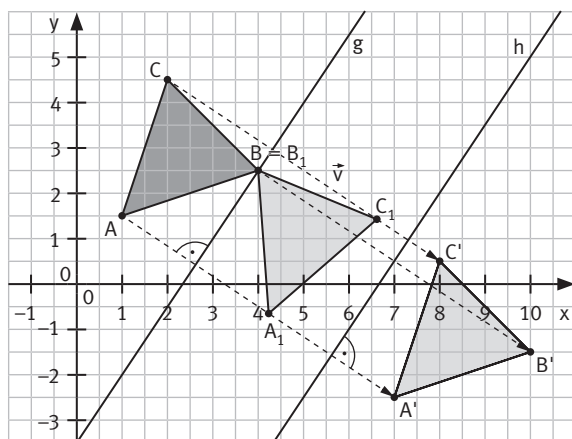
K5 3


$$\text{a) } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

b) Das Dreieck A'B'C' geht aus dem Dreieck ABC durch eine Parallelverschiebung um den Vektor $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ hervor.

K4 4

Verschiebungspfeil $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

Für die Lage der Spiegelachsen g und h sind verschiedene Lösungen möglich. Beide Geraden müssen senkrecht zum Verschiebungsvektor stehen, also gilt für die Steigung der zueinander parallelen Geraden:

$$m_g = m_h = 1,5$$

Die y-Achsenabschnitte der beiden Geraden müssen sich um 6,5 unterscheiden.

Man kann beispielsweise folgende beiden Geraden nehmen:

$$g: y = 1,5x - 3,5 \text{ und } h: y = 1,5x - 10 \text{ oder}$$

$$g: y = 1,5x - 2 \text{ und } h: y = 1,5x - 8,5$$

K5

- 5 a) 12 b) $2\frac{1}{7}$ c) $\frac{11}{14}$ d) $2\frac{7}{10}$ e) $\frac{6}{7}$
 f) $\frac{16}{81}$ g) $5\frac{1}{6}$ h) $3\frac{5}{18}$ i) $\frac{4}{9}$ j) 20,316

K5

- 6 Bruch links: $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ Bruch rechts: $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$
 Addition: $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ Subtraktion: $\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ Multiplikation: $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$ Division: $\frac{2}{5} : \frac{1}{5} = 2$

K3

- 7 Gesamtpreis bei 25 Einzelbestellung à 4,20€ beträgt: $25 \cdot 4,20\text{€} = 105,00\text{€}$
 Gesamtersparnis bei Sammelbestellung mit 64,50€: $105,00\text{€} - 64,50\text{€} = 40,50\text{€}$
 Ersparnis je Schüler: $40,50\text{€} : 25 = 1,62\text{€}$
 Jeder Schüler würde 1,62€ sparen und müsste statt 4,20€ nur 2,58€ zahlen.

K3

- 8 $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$
 Er muss noch $\frac{1}{3}$ des Platzes mähen.

K3

- 9 Berechnung der Geschwindigkeit „gehend auf dem Rollband“:
 $v_{\text{gehend}} = \frac{100\text{m}}{72\text{s}}$ $v_{\text{Rollband}} = \frac{100\text{m}}{20\text{s}}$ $v_{\text{gehend auf Rollband}} = \left(\frac{100}{72} + \frac{100}{20}\right) = 6\frac{7}{18} \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$ (mit Zeit t, Geschwindigkeit $v = 6\frac{7}{18} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{115}{18} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und Strecke $s = 100\text{m}$)
 $\Rightarrow t = \frac{100\text{m}}{\frac{115\text{m}}{18\text{s}}} \approx 15,7\text{s}$
 Auf dem Rollband gehend würde Lisa die 100m in 15,7s zurücklegen.

K3

- 10 a) 25,50€ b) 225,00€ c) 367,50€ d) 15,00€

K3

- 11 $K \cdot 1,02 = 4182,00\text{€} \Rightarrow K = 4100,00\text{€}$ Das Startkapital betrug 4100,00€.

K3

12	a)	b)	c)	d)
Darlehen in €	8400	12 600	24 120	1800
Laufzeit in Tagen	36	18	50	200
Zinsen in €	49,56	29,61	214,40	85
Zinssatz p. a. in %	5,9	4,7	6,4	8,5

- K3** 13 Die Stückelung des Geldes spielt keine Rolle, es kommt nur auf den Zinssatz an, und der ist bei Bank A höher als bei Bank B. Daher sollte Oma Schwarz sich für das Angebot der Bank A entscheiden.

Bank A: $K_3 = 15\,000\text{€} \cdot 1,035^3 = 16\,630,77\text{€}$.

Die Zinsen bei Anlage von 15 000 € für 3 Jahre bei Bank A betragen 1630,77 €.

- K3** 14 a) $Z = 650\text{€} \cdot 0,0175 = 11,38\text{€}$

Die Zinsen nach 1 Jahr betragen 11,38 €.

b) $K_2 = 650\text{€} \cdot 1,0175^2 = 672,95\text{€}$

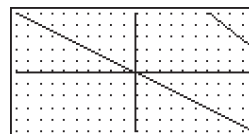
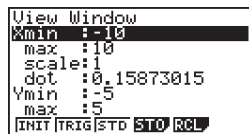
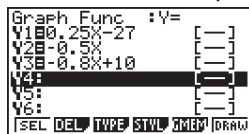
Nach 2 Jahren sind 672,95 € auf dem Sparbuch.

- K3** 15 $K_5 = 100\,000\text{€} \cdot 1,035^5 = 118\,768,63\text{€}$

Das Endkapital beträgt 118 768,63 €.

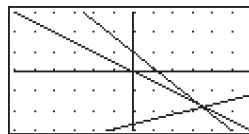
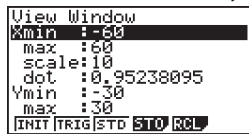
- K5** 16 a) Wenn man das Fenster auf einen „normalen“ Ausschnitt einstellt, sieht man die Graphen der drei Funktionen nicht oder nur teilweise; z. B.

$-10 \leq x \leq 10; -5 \leq y \leq 5$

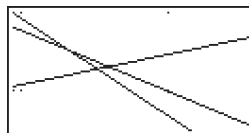
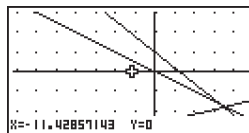


- b) Man wird zunächst einen besseren Ausschnitt zur Anzeige der Schnittpunkte suchen, z. B.

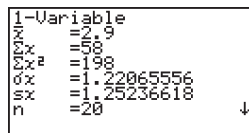
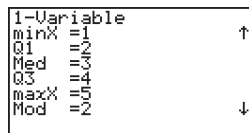
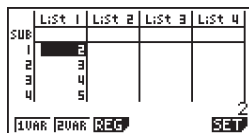
$-60 \leq x \leq 60; -30 \leq y \leq 30$



Führt der gewählte Ausschnitt noch nicht zum gewünschten Ergebnis, kann man beispielsweise mithilfe des Box-Zooms den Ausschnitt noch besser wählen. Man erkennt: Es gibt keinen gemeinsamen Schnittpunkt der drei Funktionen, sondern drei Schnittpunkte; diese bilden ein Dreieck.



- K5** 17 a)



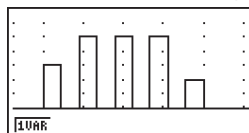
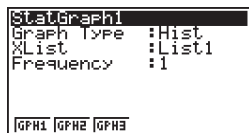
Rangliste der 20 Daten:

1 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5

Minimum: 1; unteres Quartil: 2; Median: 3; oberes Quartil: 4; Maximum: 5;

Modalwerte: 2, 3 und 4 (kommen jeweils 5-mal vor); $\bar{x} = 2,9$.

- b) Gibt man die Daten beispielsweise als „Histogramm“ aus, erhält man ein Säulendiagramm.




K5 18 a) Algebraische Lösung mithilfe des Menüs „Equation“ („Lin Gleichungssyst“):

```

Lin Gleichungssyst
Daten im
Speicher vorhanden
Unbekannte:2

Anzahl der
Unbekannten?
2 3 4 5 6
  
```

```

anX+bnY=Cn
I  8  6  8
II 10 -6 -8
-6
[SOLV][DEL][CLR][EDIT]
  
```

```

anX+bnY=Cn
X:1.1851
Y:1.1851
1.9
[REPT]
  
```

```

anX+bnY=Cn
X:0.1111
Y:1.1851
32.27
[REPT]
  
```

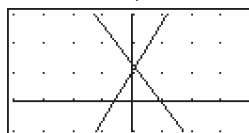
Grafische Lösung mithilfe des Menüs „Graph“ („Grafikfunkt“):

```

Grafikfunkt.:Y=
Y1=-4.3XX+4.3
Y2=5.3XX+1
Y3:
Y4:
Y5:
Y6:
[SEL][DEL][TYPE][STYL][GMRP][DRAW]
  
```

```

Betrachtungsfenster
Xmin:-4
Xmax:4
scale:1
dot:0.06349206
Ymin:-1
Ymax:3
[INIT][TRIG][STD][STO][RCL]
  
```



```

Y1=-4.3XX+4.3
Y2=5.3XX+1
X=0.111111111 Y=1.185185185
[ISECT]
  
```

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 32 \\ 27 \end{pmatrix} \right\}$$

b) $13x + 13 = 5,5y$

$$11x + y - 5 = 4y \Leftrightarrow 3y = x - 5$$

$$\mathbb{L} = \{(-19 \mid -8)\}$$

Die gesuchten Zahlen sind -19 und -8.

K5 19 Tabelleneinstell

```

X
Start:-10
End:10
Step:0.1
  
```

```

Tabellenfkt.:Y=
Y1:0X-27.7
Y2:0X-81
Y3:(X-2)^2+4
Y4:
Y5:
Y6:
[SEL][DEL][TYPE][STYL][SET][TABL]
  
```

X	Y1	Y2	Y3
-10	-97.7	19	-140
-9.9	-97.7	17.01	-137.6
-9.8	-96.3	15.04	-135.2
-9.7	-95.6	13.09	-132.8
			-10

a) $T(x) = 0$ für $x \approx 3,96$

$T_{\min} = -97,7$ für $x = -10$

$T_{\max} = 42,3$ für $x = 10$

b) $T(x) = 0$ für $x = -9$ und $x = 9$

$T_{\min} = -81$ für $x = 0$

$T_{\max} = 19$ für $x = -10$ und $x = 10$

c) $T(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = 4$

$T_{\min} = -140$ für $x = -10$

$T_{\max} = 4$ für $x = 2$

K5 20 Mithilfe der linearen Regression ergibt sich der Funktionsterm:

$$y = -\frac{2}{3}x - 3\frac{2}{3}$$

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	-4	-1		
2	2	-5		
3				
4				-4

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	-4	-1		
2	2	-5		
3				
4				-4

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	-4	-1		
2	2	-5		
3				
4				-4

```

Linear Reg.(ax+b)
a=-0.66666666
b=-3.66666666
r=-1
MSe=
y=ax+b
[COPY]
  
```