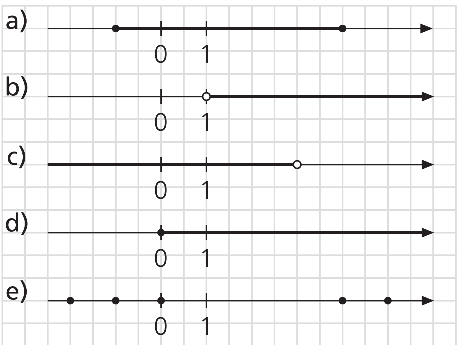
Kann ich das noch? – Lösungen zu den Seiten 6 und 7

1. **a)** $L = \{-4; 2\}$ **b)** $L = \{0; 5\}$ **c)** $L = \{3\}$ **d)** $(x + 1)(x + 5) = 0;\ L = \{-5; -1\}$
e) $(x - 16)(x - 1) = 0;\ L = \{1; 16\}$ **f)** $L = \{0\};\ 0{,}7 \notin G$ **g)** $(x - 8)(x + 1) = 0;\ L = \{-1; 8\}$
h) $(x + 11)(x + 1) = 0;\ L = \{-11; -1\}$ **i)** $(x - 6)^2 = 0;\ L = \{6\}$

2. **a)** $x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{16} = \frac{10 \pm 2}{16};$
$x_1 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4};\ x_2 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2};\ L = \{\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\}$
b) $x_{1,2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 + 24}}{2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm 4\sqrt{2}}{2};$
$x_1 = \sqrt{2};\ x_2 = -3\sqrt{2};$
$L = \{-3\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$
c) $(x + 0{,}7)(x - 0{,}2) = 0;$
$x_1 = -0{,}7;\ x_2 = 0{,}2;\ L = \{-0{,}7; 0{,}2\}$
d) $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 56}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{-31}}{4};\ L = \{\ \}$
e) $x_1 = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3};\ x_2 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3};$
$L = \{-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\}$
f) $4x^2 - 8x + 4 = 1 - 4x + 4x^2;\ | -4x^2 + 8x - 4$
$0 = 4x - 3;\ x = \frac{3}{4};\ L = \{\frac{3}{4}\}$
g) $\log_{10} y = \pm 1;\quad y_1 = 10 \in G;\quad y_2 = \frac{1}{10} \in G;\quad L = \{\frac{1}{10}; 10\}$
h) $2^x + 4 \cdot 2^{-x} = 5;\ | \cdot 2^x\quad (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0;\quad (2^x - 1) \cdot (2^x - 4) = 0;$
$x_1 = 0;\quad x_2 = 2;\quad L = \{0; 2\}$
i) $3^{x^2 - 5} = 3^{4x};\ x^2 - 5 = 4x;\ x^2 - 4x - 5 = 0;$
$(x - 5)(x + 1) = 0;\ L = \{-1; 5\}$
j) $4 + x = 4 - x;\ | -4 + x$
$2x = 0;\ x = 0 \in G;\quad L = \{0\}$
k) $\frac{x - 3}{2x} = 1;\ | \cdot 2x\quad x - 3 = 2x;\ | -2x + 3$
$-x = 3;\ x = -3;\quad L = \{-3\}$
l) $\log_{10}(2x_1) = 1;\quad \log_{10} x_2 = 0;\quad x_1 = 5 \in G;\quad x_2 = 1 \in G;\quad L = \{1; 5\}$
m) $\log_{10}(\log_{10} x) = 1;\quad \log_{10} x = 10;\quad x = 10^{10} \in G;\quad L = \{10^{10}\}$

3. **a)** $L = \left\{\left(-\frac{1}{12}; \frac{1}{2}\right)\right\}$ **b)** $L = \{(-3; 6)\}$ **c)** $L = \{(2; -3; 7)\}$

4. **a)** $P_1; P_4; P_5; P_7; P_9; P_{10}$: 60% **b)** $P_1; P_2; P_4; P_5; P_9$: 50% **c)** $P_5; P_8$: 20% **d)** $P_3; P_8$: 20%
e) P_7: 10% **f)** $P_1; P_2; P_3$: 30% **g)** P_6: 10%

5.


6. **a)** $1{,}036^x = 2$
$x = 19{,}598\ldots$:
Nach etwa 20 Jahren hat sich das Kapital verdoppelt.

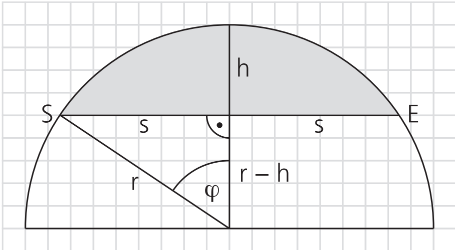
b) (1) $200\,000\,€ \cdot 1{,}05^{10} \approx 325\,779\,€$
(2) $200\,000\,€ + 10 \cdot 5\,000\,€ = 250\,000\,€$
(3) $200\,000\,€ \cdot 0{,}975^{10} \approx 155\,266\,€$
(4) $200\,000\,€ - 10 \cdot 2\,500\,€ = 175\,000\,€$
Wert (1) > Wert (2) > Wert (4) > Wert (3)

7. **a)** $B(1) = B(0 + 1) = B(0) + 0{,}5\,[120 - B(0)] = 100 + 0{,}5\,[120 - 100] = 110$
$B(2) = B(1 + 1) = B(1) + 0{,}5\,[120 - B(1)] = 110 + 0{,}5\,[120 - 110] = 110 + 5 = 115$
$B(3) = B(2 + 1) = B(2) + 0{,}5\,[120 - B(2)] = 115 + 0{,}5\,[120 - 115] = 115 + 2{,}5 = 117{,}5$
$B(4) = B(3 + 1) = B(3) + 0{,}5\,[120 - B(3)] = 117{,}5 + 0{,}5\,[120 - 117{,}5] = 117{,}5 + 1{,}25 = 118{,}75$

b) $B(5) = B(4) + 0{,}5\,[120 - B(4)] = 118{,}75 + 0{,}5 \cdot 1{,}25 = 119{,}375 > 119$:
Für $n \geqq 5$ gilt $B(n) > 119$.

8. **a)** exponentielles Wachstum: $y = 2^x$
b) exponentielles Wachstum: $y = \frac{4}{3} \cdot 1{,}5^x$
c) lineares Wachstum: $y = 1 + x$
d) andere Art des Wachstums: $y = 2^{\frac{1}{x}}$ (bei x = 3 Druckfehler)

9. $r^2 = s^2 + (r - h)^2$ (Satz von Pythagoras)
$r^2 = (4\text{ cm})^2 + r^2 - 2r \cdot 3\text{ cm} + 9\text{ cm}^2;\ \mid -r^2 + 2r \cdot 3\text{ cm}$
$2r \cdot 3\text{ cm} = 25\text{ cm}^2;\ \mid : (6\text{ cm})$
$r = \frac{25}{6}\text{ cm} \approx 4{,}2\text{ cm}$
$\sin\varphi = \frac{s}{r} = \frac{4\text{ cm}}{\frac{25}{6}\text{ cm}};\ \varphi \approx 73{,}7°$
$b = \frac{r\pi \cdot 2\varphi}{180°} \approx \frac{\frac{25}{6}\text{ cm} \cdot \pi \cdot 2 \cdot 73{,}7°}{180°} \approx 10{,}7\text{ cm}$



$A_{\text{Segment}} = A_{\text{Sektor}} - A_{\text{Dreieck}} = \frac{r^2\pi \cdot 2\varphi}{360°} - \frac{1}{2} \cdot 2s \cdot (r - s) \approx 22{,}3\text{ cm}^2 - 0{,}67\text{ cm}^2 \approx 21{,}7\text{ cm}^2$

10. (1)**a)** $\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c};$
$a = c\sin\alpha;\ b = c\cos\alpha$
$a^2 + b^2 = c^2$ (Satz von Pythagoras)
$c^2(\sin\alpha)^2 + c^2(\cos\alpha)^2 = c^2\,[(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2] = c^2;$
$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ ✓

b) $\cos\beta = \frac{a}{c};\ \tan\beta = \frac{b}{a};\ \sin\beta = \frac{b}{c}$
$\cos\beta \cdot \tan\beta = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{c} = \sin\beta$ ✓

c) $\tan\alpha = \frac{a}{b};\ \tan\beta = \frac{b}{a}$
$\tan\alpha = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\tan\beta}$ ✓

d) $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c;\ \frac{h_c}{a} = \sin\beta;\ h_c = a\sin\beta$
also $A_{ABC} = \frac{1}{2}\,c \cdot a \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\,ac\sin\beta$ ✓

e) $A_{ABC} = \frac{1}{2}\,c\,h_c;\ \frac{h_c}{b} = \sin\alpha;\ h_c = b\sin\beta$
also $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b\sin\beta = \frac{1}{2}\,bc\sin\alpha$ ✓

f) $\frac{a}{c} = \sin\alpha;\ a = c\sin\alpha;$
$\frac{b}{c} = \cos\alpha;\ b = c\cos\alpha;$
$U = c + a + b = c(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)$ ✓

10. (2) **a)** $\cos 45° = \sin 45°$

b) $\cos 0° = 2 \cdot \sin 30° = \tan 45°$

c) $\cos 67° - \sin 23° = 0$

d) $\sin 30° + \cos 60° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \sin 90°$

e) $\tan 0° + \sin 0° + \cos 0° = 0 + 0 + 1 = 1$

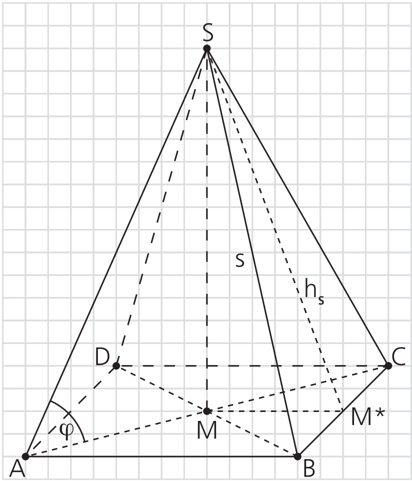
f) $\sin 45° - \cos 45° + \tan 45° = 0 + 1 = 1 = \sin 90°$

g) $(\sin 22°)^2 + (\cos 22°)^2 = 1 = \cos 0°$

h) $1 = 2 \cdot \frac{1}{2}$; $\sin 90° = 2 \cdot \sin 30°$

i) $0 < 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\cos 90° < 2 \cdot \cos 45°$

11.



Oberflächeninhalt der Pyramide:

$\overline{M^*S}^2 = h_s^2 = (8\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2$; $h_s = \sqrt{73}\text{ cm}$;

$A_P = (6\text{ cm})^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6\text{ cm} \cdot h_s = 36\text{ cm}^2 + 12 \cdot \sqrt{73}\text{ cm}^2 \approx 138{,}5\text{ cm}^2$

Pyramidenvolumen:

$V_P = \frac{1}{3} \cdot (6\text{ cm})^2 \cdot 8\text{ cm} = 96\text{ cm}^3$

Winkelgröße:

$\tan\varphi = \frac{8\text{ cm}}{3\sqrt{2}\text{ cm}}$; $\varphi \approx 62{,}1°$

Kreiskegel:

$V_K = \frac{1}{3}(3\sqrt{2}\text{ cm})^2\,\pi \cdot 8\text{ cm} = 48\,\pi\text{ cm}^3 \approx 150{,}8\text{ cm}^3$;

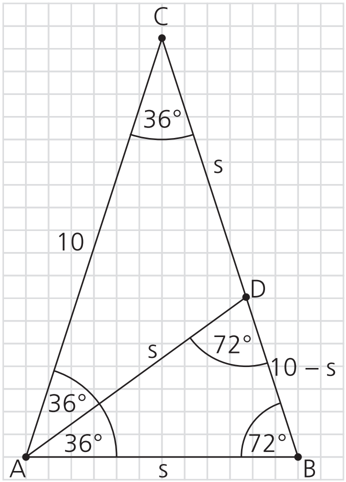
$s = \sqrt{82}\text{ cm}$; $A_K = (3\sqrt{2}\text{ cm})^2\pi + 3\sqrt{2}\text{ cm} \cdot \pi \cdot \sqrt{82}\text{ cm} = 6(3 + \sqrt{41})\pi\text{ cm}^2 \approx 177{,}2\text{ cm}^2$

Prozentsatz:

$\frac{V_P}{V_K} = \frac{96\text{ cm}^3}{48\,\pi\text{ cm}^3} = \frac{2}{\pi} \approx 64\%$

12.

	$\overline{AB} = c$	$\overline{BC} = a$	$\overline{CA} = b$	Größenvergleich	Das Dreieck ist	und hat
a)	5 LE	5 LE	$2\sqrt{5}$ LE	$5^2 < 5^2 + (2\sqrt{5})^2$	spitzwinklig	A = 10 FE
b)	9 LE	$4\sqrt{5}$ LE	$\sqrt{17}$ LE	$9^2 < (4\sqrt{5})^2 + \sqrt{17}^2$	spitzwinklig	A = 18 FE
c)	20 LE	$\sqrt{194}$ LE	$\sqrt{74}$ LE	$20^2 > \sqrt{194}^2 + \sqrt{74}^2$	stumpfwinklig	U ≈ 42,5 LE
d)	10 LE	$\sqrt{10}$ LE	$3\sqrt{10}$ LE	$10^2 = \sqrt{10}^2 + (3\sqrt{10})^2$	rechtwinklig	$\gamma = 90°$; $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$; $\alpha \approx 18{,}4°$; $\beta \approx 71{,}6°$

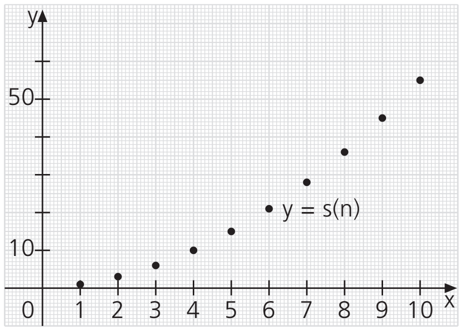


13. Die Dreiecke ABD und ADC sind gleichschenklig, da jedes von ihnen zwei gleich große Winkel besitzt.
Die Dreiecke ABC und ABD sind ähnlich, da sie in den drei Winkeln übereinstimmen.
Maßzahl s von $\overline{AB}$:
$\frac{s}{10} = \frac{10-s}{s}$; $s^2 = 100 - 10s$;
$s^2 + 10s - 100 = 0$;
$s_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100+400}}{2} = \frac{-10 \pm 10\sqrt{5}}{2} = -5 \pm 5\sqrt{5}$;
$s_1 = -5 + 5\sqrt{5} \approx 6{,}18$;
$s_2 = -5 - 5\sqrt{5} < 0$
Umfangslängen:
$U_{ABD} = 10 + s \approx 16{,}18$;
$U_{ADC} = 10 + 2 \cdot s \approx 10 + 10\sqrt{5} - 10 = 10\sqrt{5} \approx 22{,}36$:
Die Umfangslängen betragen 26,18 cm bzw. 22,36 cm.

Kann ich das? – Lösungen zu Seite 38

1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s(n)	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55



2. a) Nullstellen: $x_1 = -5$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$
b) Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = 4$

3. a) Nullstellen: $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = -\sqrt{2} \approx -1{,}41$; $x_3 = \sqrt{2} \approx 1{,}41$
b) Nullstellen: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$

4. a) $x^2 = u$; $2u^2 - 5u - 12 = 0$;
$u_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{5 \pm 11}{4}$;
$u_1 = 4$; $u_2 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$;
$x^2 = 4$; $x_1 = 2$; $x_2 = -2$;
$x^2 = -\frac{3}{2} < 0$: keine Lösung;
$L = \{-2; 2\}$

b) $x^4 + x^3 - 2x^2 = 0$; $x^2(x^2 + x - 2) = 0$;
$x^2\,(x+2)(x-1) = 0$;
$L = \{-2; 0; 1\}$

c) $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$; $(x+2)(x^2 - 4x + 5) = 0$;
$x_1 = -2$; $x^2 - 4x + 5 = 0$; $x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$: keine Lösung über $\mathbb{R}$;
$L = \{-2\}$

d) $3 \cdot 2^{x-2} = 12$; $2^{x-2} = 4 = 2^2$; $x - 2 = 2$; $x = 4$; $L = \{4\}$

5.

Bedingung wird erfüllt von	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
f_1	x	x	x	x	x
f_2	x		x	x	x
f_3	x	x	x	x	
f_4	x	x	x		x

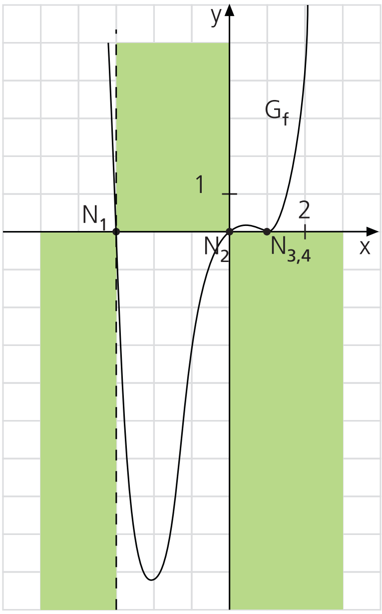
Von den vier Funktionen f_1 bis f_4 erfüllt nur f_1 alle fünf Bedingungen.

6. Funktionsterme: **a)** $f(x) \approx 4x^4$ **b)** $f(x) \approx 0{,}2x^6$ **c)** $f(x) \approx 2x^3$ **d)** $f(x) \approx -2x^3$

7. Nullstellen der Funktion f: $f(x) = 0{,}5(x + 3)x(x - 1)^2$; $D_f = \mathbb{R}$:
einfache Nullstellen: $x_1 = -3$; $x_2 = 0$;
doppelte Nullstelle: $x_{3,4} = 1$.

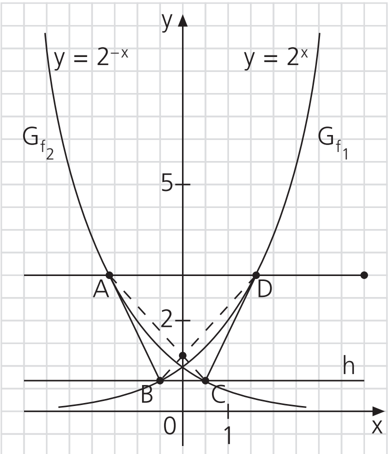
	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$x + 3$	< 0	0	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0
x	< 0	< 0	< 0	0	> 0	> 0	> 0
$(x-1)^2$	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	0	> 0
$f(x)$	> 0	0	< 0	0	> 0	0	> 0

Der Graph G_f kann also *nicht* durch die drei getönten „Felder" verlaufen:



8. $f(x) = 0$: $x_1 = b$; $x_2 = c$; also $b = 2$; $c = -2{,}5$:
$f(x) = a(x - 2)(x + 2{,}5)$;
$f(0) = 5$: $a \cdot (-2) \cdot 2{,}5 = 5$; $-5a = 5$; $a = -1$:
$f(x) = -(x - 2)(x + 2{,}5)$

9. a) und b)



b) $2^{-x_A} = 3$; $-x_A \log 2 = \log 3$; $x_A = -\dfrac{\log 3}{\log 2} \approx -1{,}58$;

$2^{x_D} = 3$; $x_D \log 2 = \log 3$; $x_D = \dfrac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}58$;

$\overline{AD} = 2 \cdot \dfrac{\log 3}{\log 2} \approx 3{,}17$

$2^{x_B} = a$; $x_B \log 2 = \log a$; $x_B = \dfrac{\log a}{\log 2} < 0$;

$2^{-x_C} = a$; $-x_C \log 2 = \log a$; $x_C = -\dfrac{\log a}{\log 2} > 0$;

$\overline{BC} = \overline{DA};\ -2 \cdot \frac{\log a^*}{\log 2} = 2 \cdot \frac{\log 3}{\log 2};$

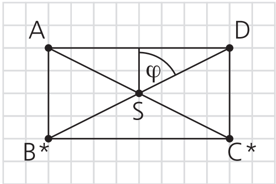
$-\log a^* = \log 3;$

$\log \frac{1}{a^*} = \log 3; \quad \frac{1}{a^*} = 3;\ a^* = \frac{1}{3};$

Das Viereck AB*C*D ist ein Rechteck.

$A_{Rechteck} = 2 \cdot \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3} \frac{\log 3}{\log 2} \approx 8{,}45$

Skizze:



$\frac{1}{2}(3 + a^*) = \frac{5}{3}; \qquad S\left(0 \mid \frac{5}{3}\right);$

$\tan \varphi = \frac{\frac{\log 3}{\log 2}}{\frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3}\right)} = \frac{3 \cdot \log 3}{4 \cdot \log 2} = 1{,}18872\ \ldots;$

$\varphi = 49{,}928\ \ldots°; \quad \sphericalangle\, DSA = 2\varphi \approx 99{,}9°$

Kann ich das? – Lösungen zu Seite 60

1. a) $\varphi_1 \approx 285°;$ $\quad \varphi_2 \approx 255°;$ $\quad \varphi_3 \approx -75°$

b) $\varphi_1 \approx 40°;$ $\quad \varphi_2 \approx 320°;$ $\quad \varphi_3 \approx 400°$

c) $\varphi_1 \approx 37°;$ $\quad \varphi_2 \approx 217°;$ $\quad \varphi_3 \approx 397°$

2. a) $x_1 \approx \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi;$ $\quad x_2 \approx \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$ $\quad x_3 \approx \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$

b) $x_1 \approx -0{,}9828;$ $\quad x_2 \approx -0{,}9828 + \pi \approx 2{,}1588;$ $\quad x_3 \approx -0{,}9828 + 2\pi \approx 5{,}3004$

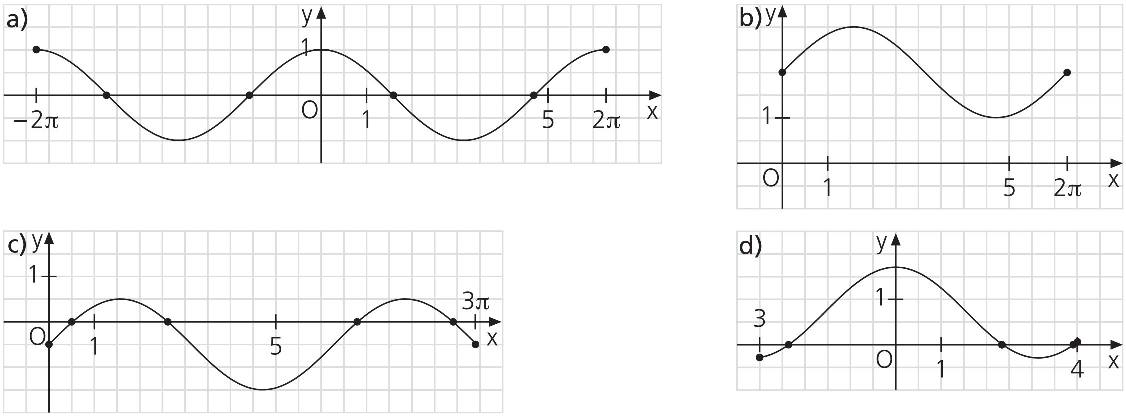
c) $x_1 \approx 0{,}8535;$ $\quad x_2 \approx \pi - 0{,}8535 \approx 2{,}2881;$ $\quad x_3 \approx 2\pi + 0{,}8535 \approx 7{,}1367$

3. a) $\cos x = 0;\ x_1 = \frac{\pi}{2};$ $\quad x_2 = -\frac{\pi}{2};$ $\quad x_3 = \frac{3}{2}\pi;$ $\quad x_4 = -\frac{3}{2}\pi$

b) $2 + \sin x = 0;\ \sin x = -2;$ keine Lösungen: f besitzt keine Nullstellen.

c) $\sin x = \frac{1}{2};\ x_1 = \frac{\pi}{6};$ $\quad x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6};$ $\quad x_3 = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13}{6}\pi;$ $\quad x_4 = 2\pi + \frac{5}{6}\pi = \frac{17}{6}\pi$

d) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2};$ $\quad x_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$ $\quad x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi;$ $\quad x_3 = -\frac{3}{4}\pi$



4. a) blau: $a = 2;$ Amplitude: 2

grün: $a = 1{,}5;$ Amplitude: 1,5

rot: $a = -\frac{1}{2};$ Amplitude: $\frac{1}{2}$

Periode: 2π

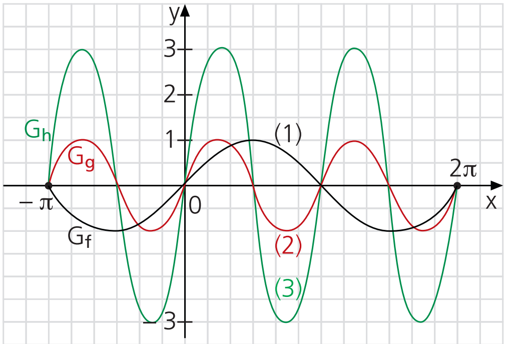
b) blau: $b = 2;$ Periode: $\frac{2\pi}{2} = \pi$

grün: $b = 4;$ Periode: $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

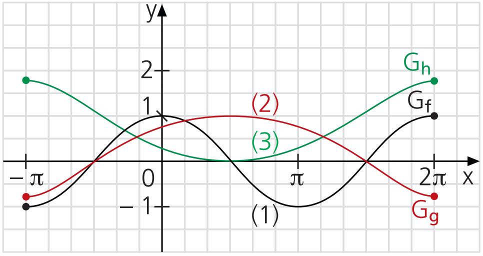
rot: $b = \frac{1}{2};$ Periode: $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

Amplitude: 1

5. a)



b)



	sin x	sin (2x)	3 sin (2x)	cos x	$\cos\left[0{,}5\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$	$1 - \cos\left[0{,}5\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$
Amplitude	1	1	3	1	1	1
Wertemenge	[–1; 1]	[–1; 1]	[–3; 3]	[–1; 1]	$[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1]$	$[0; 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}]$

6. a) $y = -2 \cos x$ b) $y = 0{,}5 \sin (0{,}5x) + 1$

7. $\overline{OP} = 4\text{ cm} \cdot \sin \varphi$; $\overline{PT} = 4\text{ cm} \cdot \cos \varphi$; $A_{TOP} = \frac{1}{2}\,\overline{OP} \cdot \overline{PT} = 8\text{ cm}^2 \cdot \sin \varphi \cos \varphi$

8. Koordinaten der Zeigerspitzen um 16 Uhr (Ursprung: Mittelpunkt des Zifferblatts; positive x-Achse: „3-Uhr-Stellung" des Stundenzeigers; Einheit: m): $S_1\,(0 \mid 1{,}4)$; $S_2\,(0{,}84 \cdot \cos 30° \mid -0{,}84 \cdot \sin 30°) = (0{,}42\sqrt{3} \mid -0{,}42)$
Entfernung: $\overline{S_1S_2}^{\,2} = (0{,}42\sqrt{3} - 0)^2 + (-0{,}42 - 1{,}4)^2 = 0{,}5292 + 3{,}3124 = 3{,}8416$; $\overline{S_1S_2} = 1{,}96$: die Zeigerspitzen sind um 16 Uhr 1,96 m weit voneinander entfernt.

Kann ich das? – Lösungen zu Seite 102

1. Der Term $\frac{V(r+h) - V(r)}{h}$ $(h > 0)$ bedeutet die mittlere Volumenzunahmerate, wenn die Radiuslänge um h zunimmt.

$$\frac{V(r+h) - V(r)}{h} = \frac{\frac{4}{3}(r+h)^3\pi - \frac{4}{3}r^3\pi}{h} = \frac{\frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2h + 3rh^2 + h^3 - r^3)}{h} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot h\,(3r^2 + 3rh + h^2)}{h} = \frac{4}{3}\pi\,(3r^2 + 3rh + h^2);$$

$V'(r) = \lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{4}{3}\pi\,(3r^2 + 3rh + h^2)\right] = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4r^2\pi$: Dies ist der Kugeloberflächeninhalt.

2. a) $f(x) = 2x^4 + x^3$; $f'(x) = 8x^3 + 3x^2$;
$f(1) = 3$; $f'(1) = 11$; t_P: $y = 11x + t$; da $P\,(1 \mid 3) \in t_P$ ist, gilt
$3 = 11 + t$; $t = -8$; t_P: $y = 11x - 8$

b) $f(x) = -x^2 + 4$; $f'(x) = -2x$;
$f(1) = 3$; $f'(1) = -2$; t_P: $y = -2x + t$; da $P\,(1 \mid 3) \in t_P$ ist, gilt $3 = -2 + t$; $t = 5$; t_P: $y = -2x + 5$
Schnittpunkt von t_P mit der x-Achse: $y = 0$; $0 = -2x + 5$; $\mid + 2x$ $2x = 5$; $\mid : 2$
$x_1 = 2{,}5$; $S_1\,(2{,}5 \mid 0)$
Steigung von n_P: 0,5; n_P: $y = 0{,}5x + t^*$; da $P\,(1 \mid 3) \in n_P$ ist, gilt $3 = 0{,}5 + t^*$; $\mid -0{,}5$
$t^* = 2{,}5$; n_P: $y = 0{,}5x + 2{,}5$
Schnittpunkt von n_P mit der x-Achse: $y = 0$; $0{,}5x + 2{,}5 = 0$; $\mid -2{,}5$
$0{,}5x = -2{,}5$; $\mid : 0{,}5$
$x_2 = -5$; $S_2\,(-5 \mid 0)$
$A_{S_2S_1P} = \frac{1}{2} \cdot (5 + 2{,}5) \cdot 3 = 11{,}25$
$r_{\text{Umkreis}} = \frac{1}{2} \cdot (5 + 2{,}5) = 3{,}75$; $A_{\text{Umkreis}} = 3{,}75^2 \cdot \pi \approx 44{,}2$;
Prozentsatz: etwa $\frac{11{,}25}{44{,}2} \approx 25\,\%$

c) $f(x) = x(3x - 1) = 3x^2 - x$; $f'(x) = 6x - 1$;
oder (Produktregel) $f(x) = x(3x - 1)$; $f'(x) = 1 \cdot (3x - 1) + x(3 - 0) = 3x - 1 + 3x = 6x - 1$;
$f(1) = 2$; $f'(1) = 5$; t_P: $y = 5x + t$; da $P\,(1 \mid 2) \in t_P$ ist, gilt $2 = 5 + t$; $t = -3$; t_P: $y = 5x - 3$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$; $f(1) = 1$; $f'(1) = -2$; t_P: $y = -2x + t$; da $P\,(1 \mid 1) \in t_P$ ist, gilt $1 = -2 + t$; $t = 3$; t_P: $y = -2x + 3$

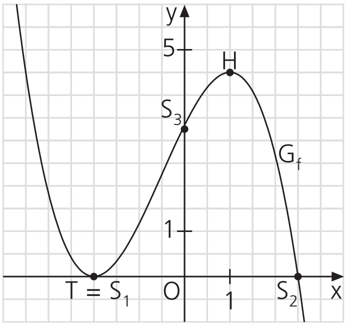
3. f: $f(x) = \frac{1}{6}(x + 2)^2\,(5 - 2x)$; $D_f = \mathbb{R}$.

a) Achsenpunkte von G_f:
$f(x) = 0$: $x_1 = -2$; $x_2 = 2{,}5$; $S_1\,(-2 \mid 0)$; $S_2\,(2{,}5 \mid 0)$
$f(0) = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 5 = \frac{10}{3}$; $S_3\,(0 \mid \frac{10}{3})$

b) Monotonietabelle für G_f:
$f'(x) = \frac{1}{3}(x + 2)(5 - 2x) + \frac{1}{6}(x + 2)^2 \cdot (-2) = \frac{1}{3}(x + 2)(5 - 2x - x - 2) = \frac{1}{3}(x + 2)(3 - 3x) = (x + 2)(1 - x)$

x	$-\infty < x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < \infty$
$f'(x)$	< 0	0	> 0	0	< 0
Vorzeichenwechsel von $f'(x)$		von – nach +		von + nach –	
G_f	streng monoton fallend	Tiefpunkt $T\,(-2 \mid 0)$	streng monoton steigend	Hochpunkt $H\,(1 \mid 4{,}5)$	streng monoton fallend

c) Graph von f:



4. Bei beiden Abbildungen ist einer der beiden Graphen G_f und der andere $G_{f'}$.

a) Die rote Kurve ② ist G_f; die grüne Kurve ① ist $G_{f'}$. Begründung: Die Abszissen der Punkte von ②, in denen ② eine horizontale Tangente besitzt, stimmen mit den Nullstellen der durch ① dargestellten Funktion überein, aber nicht umgekehrt.

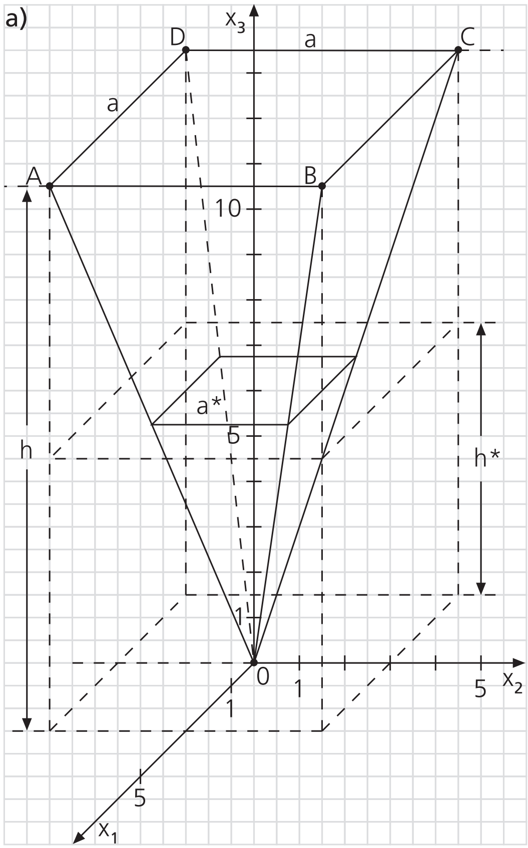
b) Die grüne Kurve ① ist G_f; die rote Kurve ② ist $G_{f'}$. Begründung: Die Tangentensteigung von ① nimmt zu, demgemäß ist ② steigend; umgekehrt ist dies nicht der Fall.

5. $Q\,(2 \mid 3)$; Gleichung der Parabel P_1: $y = a(x - 1)^2 + 2$; $Q \in P_1$: $3 = a \cdot (2 - 1)^2 + 2$; $\mid -2$ $a = 1$
P_1: $y = (x - 1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 1 + 2 = x^2 - 2x + 3$
Steigung von P_1 (und von P_2) im Punkt Q: 1. Ableitung: $y' = 2x - 2$; an der Stelle $x = 2$: $m_{t_Q} = 4 - 2 = 2$
Gleichung der Tangente t_Q: $y = 2x + t$; $Q \in t_Q$: $3 = 2 \cdot 2 + t$; $3 = 4 + t$; $\mid -4$ $t = -1$
t_Q: $y = 2x - 1$
Parabel P_2: $y = f(x) = -x^2 + bx + c$
$Q \in P_2$: $3 = -2^2 + 2b + c$; $\mid +4$ $2b + c = 7$ (I)
$f'(x) = -2x + b$; $f'(2) = -4 + b = m_{t_Q} = 2$; $b = 6$; eingesetzt in (I)
$2 \cdot 6 + c = 7$; $\mid -12$ $c = -5$
Gleichung von P_2: $y = -x^2 + 6x - 5 = -(x - 3)^2 + 9 - 5 = -(x - 3)^2 + 4$

a) Der Teil der Parabel P_1 links oberhalb des Punkts $R_1\,(1 - \sqrt{2} \mid 4)$

b) Der Teil der Parabel P_2 links unterhalb des Punkts $R_2\,(1 \mid 0)$.

Kann ich das? – Lösungen zu Seite 134



1. a) $V_P = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 12\ cm^3 = 144\ cm^3$

b) $h^* = \frac{1}{2}h = 6$ cm;

$a^* = \frac{1}{2}a = 3$ cm;

$V^* = V_{kleine\ Pyramide} = \frac{1}{3}a^{*2}h^* = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 6\ cm^3 = 18\ cm^3$;

$V_{Pyramidenstumpf} = V_P - V^* = 126\ cm^3$

2. a) Das Dreieck EBG ist gleichseitig mit der Seitenlänge $a = 4\sqrt{2}$;

Flächeninhalt: $A_{EBG} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{(4\sqrt{2})^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3} \approx 13{,}9$

b) Oberflächeninhalt:

$A_{Oberfläche} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2 + 8\sqrt{3} = 24 + 8\sqrt{3} = 8(3 + \sqrt{3}) \approx$

$\approx 37{,}9$

Pyramidenvolumen:

$V_{EBGF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot 4 = \frac{32}{3} \approx 10{,}7$

3. a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

4. a) (1) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

(2) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

(3) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-(-1) \\ -2-3 \end{pmatrix};\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

b) B (4 | 4 | 0); H (0 | 0 | 4)

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

$M_{[EH]}$ (2 | 0 | 4); $M_{[BC]}$ (2 | 4 | 0);

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$

Die beiden Geraden g und h schneiden einander im Punkt S (2 | 2 | 2); mit $r = -\frac{1}{2}$ und $s = \frac{1}{2}$ gilt nämlich

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, also $S \in g$, und $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, also $S \in h$.

5. PQ: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2-0 \\ 5-(-1) \\ -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

$R \in PQ$? (1) $-5 = -2 - 2r_1$; $2r_1 = 3$; $r_1 = 1{,}5$;
(2) $14 = 5 + 6r_2$; $6r_2 = 9$; $r_2 = 1{,}5 = r_1$;
(3) $-11 = -3 - 6r_3$; $6r_3 = 8$; $r_3 = \frac{4}{3} \neq r_1$;

R liegt nicht auf der Geraden PQ.

6. U: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6 \\ 0-6 \\ -4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$;

V: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ 0+4 \\ -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$;

U (−4 | −6 | −1); V (6 | 4 | −6);
$M_{[UV]}$ (1 | −1 | −3,5)

7. a) Die Geraden g und h sind nicht zueinander parallel, da $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, ist.
(1) $2 + 2r = 6 - 2s$;
(2) $2r = 2s$; (2′) $r = s$
(3) $1 - r = 0$; $r = 1$ eingesetzt in (2′) $s = 1$
Probe: (1) L.S.: $2 + 2 = 4$; R.S.: $6 - 2 = 4 =$ L.S.:
Die Geraden schneiden einander, und zwar im Punkt S (4 | 2 | 0).

b) Die Geraden g und h haben die gleiche Richtung, da $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist.
Liegt B (0 | 3 | 3) ∈ h auch auf g?
(1) $0 = -1 + 2r_1$; $\quad r_1 = \frac{1}{2}$;
(2) $3 = 0 - r_2$; $\quad r_2 = -3 \neq r_1$:
Die Geraden sind zueinander echt parallel.

c) Die Geraden g und h sind nicht zueinander parallel, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, ist.
(1) $4 + r = 2 - 2s$; $\quad$ (1′) $r + 2s = -2$;
(2) $9{,}5 + 4r = 0{,}5$; $\quad 4r = -9$; $\quad r_2 = -\frac{9}{4}$;
(3) $8 + 3r = 4 + 2s$; $\quad$ (3′) $3r - 2s = -4$;
Das Gleichungssystem (1′) $r + 2s = -2$
(3′) $3r - 2s = -4$
hat die Lösung $r = -1{,}5 \neq -\frac{9}{4}$ und $s = -0{,}25$:
Die Geraden sind zueinander windschief.

d) Die Geraden g und h haben die gleiche Richtung, da $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist.
Liegt B (6 | 0 | 0) ∈ h auch auf g?
(1) $10 - r_1 = 6$; $\quad r_1 = 4$;
(2) $-8 + 2r_2 = 0$; $\quad r_2 = 4 = r_1$;
(3) $4 - r_3 = 0$; $\quad r_3 = 4 = r_2 = r_1$; $\quad B \in g$:
Die Geraden sind identisch.

Kann ich das? – Lösungen zu Seite 166

1. a) $\Omega = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
A = {1; 3; 5; 7; 9}; P(A) = 0,5; B = {0; 3; 6; 9}; P(B) = 0,4;
C = {0; 1; 2; 3; 4}; P(C) = 0,5; D = {2; 3; 5; 7}; P(D) = 0,4;
E = {0; 1; 4; 9}; P(E) = 0,4; F = {9}; P(F) = 0,1

b) $A \cap B = \{3; 9\}$: „Die Nummer ist ungerade und durch 3 teilbar"
$A \cup B = \{0; 1; 3; 5; 6; 7; 9\}$: „Die Nummer ist ungerade und / oder durch 3 teilbar"
$\overline{A \cup C} = \{6; 8\}$: „Die Nummer ist gerade und mindestens gleich 5"
$\overline{D \cap E} = \Omega$: „Die Nummer ist nicht gleichzeitig Primzahl und Quadratzahl"

2.

	geimpft	nicht geimpft	
erkrankt	146	487	633
nicht erkrankt	361	206	567
	507	693	1 200

Anzahl der Geimpften: 507
P („geimpft und erkrankt“) = $\frac{146}{507} \approx 28{,}8\%$

Anzahl der Nichtgeimpften: 693
P („nicht geimpft und nicht erkrankt“) = $\frac{206}{693} \approx 29{,}7\%$

3. $0{,}40 + 2p + 0{,}10 = 1$; $2p = 0{,}50$; $p = 0{,}25$:

x	1	2	3	4
P(X = x)	0,40	0,25	0,25	0,10

$E(x) = 0{,}40 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 2 + 0{,}25 \cdot 3 + 0{,}10 \cdot 4 = 2{,}05$:
Nach sehr vielen Würfen ist als Mittelwert aller bis dahin geworfenen Zahlen etwa 2 zu erwarten.

4. **a)** $\binom{15}{7} = \frac{15!}{7!8!} = 6\,435$

b) $13! = 6\,227\,020\,800$

c) $\binom{75}{72} = \frac{75!}{72!3!} = \frac{75 \cdot 74 \cdot 73}{6} = 67\,525$

d) $\binom{11}{7} = \frac{11!}{7!4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{24} = 330$

e) $\frac{10!}{4!6!} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^6 \approx 0{,}08808 \approx 8{,}81\,\%$

5. **a)** $p = 0{,}03$; $n = 50$:
$P(X \geqq 4) = 1 - P(X \leqq 3) \approx 1 - 0{,}93724 \approx 6{,}3\%$

b) $p = 0{,}03$; $n = 100$:
$P(X \leqq 6) \approx 0{,}96877 \approx 96{,}9\%$

6. Wahrscheinlichkeitsverteilung;
Anzahl der Wappen: X

$P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$;

$P(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$;

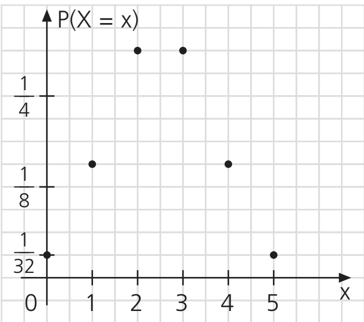
$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}$;

$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$;

$P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$;

$P(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}$

x	0	1	2	3	4	5
P(X = x)	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$



$E(X) = \frac{1}{32}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 1) = \frac{80}{32} = 2{,}5$

a) $P(X = 1) = \frac{5}{32} \approx 16\%$ **b)** $P(X \geqq 1) = 1 - P(X = 0) = \frac{31}{32} \approx 97\%$

c) $P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{6}{32} \approx 19\%$

d) $P(X \leqq 4) = 1 - P(X = 5) = \frac{31}{32} \approx 97\%$

Kann ich das? – Lösungen zu Seite 186

1. $f(x) = \frac{x}{6}(x-6)^2 = \frac{1}{6}(x^3 - 12x^2 + 36x)$

a) $f'(x) = \frac{1}{6}(3x^2 - 24x + 36) = \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 12) =$
$= \frac{1}{2}(x-2)(x-6);$

$f'(x) = 0$: $x_1 = 2; x_2 = 6$
$f(2) = \frac{16}{3}$; $f(6) = 0$

Monotonietabelle:

x	$-\infty < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 6$	$x = 6$	$6 < x < \infty$
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
Vorzeichenwechsel von $f'(x)$		von + nach –		von – nach +	
Funktion f	streng monoton zunehmend	lokales Maximum	streng monoton abnehmend	lokales Minimum	streng monoton zunehmend
Graph G_f	streng monoton steigend	Hochpunkt $H(2 \mid 5\frac{1}{3})$	streng monoton fallend	Tiefpunkt $T(6 \mid 0)$	streng monoton steigend

$E_1 = H(2 \mid 5\frac{1}{3})$; $E_2 = T(6 \mid 0)$;
$E_1E_2 = g$: $y = mx + t$; $\frac{16}{3} = 2m + t$ (1)
$0 = 6m + t$ (2)
(2) – (1): $\frac{16}{3} = -4m$; $m = -\frac{4}{3}$
in (2) $t = -6m = 8$
$E_1E_2 = g$: $y = -\frac{4}{3}x + 8$

$W \in g$? L.S.: $\frac{8}{3}$; R.S.: $-\frac{4}{3} \cdot 4 + 8 = \frac{8}{3}$;
L.S. = R.S., d.h. $W \in g = E_1E_2$.
Die Punkte E_1, E_2 und W liegen auf einer Geraden.

b) $A(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot f(a) =$
$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{6}(a^2 - 12a + 36) =$
$= \frac{1}{12}(a^4 - 12a^3 + 36a^2);$

$A'(a) = \frac{1}{12}(4a^3 - 36a^2 + 72a) =$
$= \frac{a}{3}(a^2 - 9a + 18) =$
$= \frac{a}{3}(a-3)(a-6);$

$A'(a) = 0$: $a_1 = 0 \notin\,]0; 6[$;
$a_2 = 3 \in\,]0; 6[$;
$a_3 = 6 \notin\,]0; 6[$

Da für $0 < a < 3$ stets $A'(a) > 0$ und für $3 < a < 6$ stets $A'(a) < 0$ gilt, ist $A(3) = 6{,}75$ ein lokales – und wegen $\lim\limits_{a \to 0+} A(a) = 0 < 6{,}75$ und $\lim\limits_{a \to 6-} A(a) = 0 < 6{,}75$ auch das globale – Maximum des Dreiecksflächeninhalts A(a).

2. **a)** Ansatz: $f(x) = Kx(x + 3)(x - 3) = K(x^3 - 9x)$;

$f'(x) = K(3x^2 - 9)$;

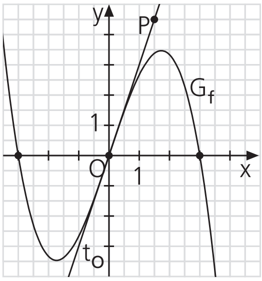
$f'(0) = -9K$;

$m_{t_0} = \frac{4{,}5}{1{,}5} = 3 = f'(0)$;

$-9K = 3$; $\quad K = -\frac{1}{3}$

Funktionsterm: $f(x) = -\frac{x}{3}(x^2 - 9) = -\frac{x^3}{3} + 3x$

b)



Eckpunkte:
V (–a | f(–a)), I (a | f(–a)),
E (a | f(a)), R (–a | f(a)) mit

$f(a) = -\frac{a^3}{3} + 3a$;

$f(-a) = \frac{a^3}{3} - 3a$

Flächeninhalt:

$A_{VIER} = A(a) = 2a \cdot 2f(a) = 2a \cdot 2\left(-\frac{a^3}{3} + 3a\right) = -\frac{4}{3}a^4 + 12a^2$;

$A'(a) = -\frac{16}{3}a^3 + 24a$;

$A'(a) = 0$: $\quad -\frac{16}{3}a\left(a^2 - \frac{9}{2}\right) = 0$; $\quad 0 < a < 3$:

$a = \frac{3}{2}\sqrt{2}$; $\quad A\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{81}{4} + 12 \cdot \frac{9}{2} = -27 + 54 = 27$

Da für $0 < a < \frac{3}{2}\sqrt{2}$ stets $A'(a) > 0$ und für $\frac{3}{2}\sqrt{2} < a < 3$ stets $A'(a) < 0$ gilt, ist $A\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = 27$ ein lokales – und wegen $\lim\limits_{a \to 0+} A(a) = 0 < 27$ und $\lim\limits_{a \to 3-} A(a) = 0 < 27$ auch das globale – Maximum (der Maßzahl) des Rechtecksflächeninhalts.

3. $A(r) = 2r\pi h + 4r^2\pi$; Rechnung in Maßzahlen (Einheit mm, mm² bzw mm³):
$4r^2\pi + 2r\pi h = 250$;
$h = \frac{250 - 4r^2\pi}{2r\pi}$;
Volumen des Zylinders:
$V_Z = r^2\pi h$;
$V_Z(r) = \frac{(250 - 4r^2\pi)r^2\pi}{2r\pi} =$
$= \frac{r}{2}(250 - 4r^2\pi) =$
$= 125r - 2r^3\pi$;
$V_Z'(r) = 125 - 6r^2\pi$;
$V_Z'(r) = 0$: $6r^2\pi = 125$;
$r^2 = \frac{125}{6\pi}$; $r_1 = -\sqrt{\frac{125}{6\pi}} \notin \mathbb{R}^+$;
$r_0 = \sqrt{\frac{125}{6\pi}} \approx 2{,}58$; $V_Z(r_0) = r_0(125 - 2\pi r_0^{\,2}) = \frac{250}{3}\sqrt{\frac{125}{6\pi}}$:

Da für $0 < r < r_0$ stets $V_Z'(r) > 0$ und für $r_0 < r < \infty$ stets $V_Z'(r) < 0$ gilt, ist $V_Z(r_0) = \frac{250}{3}\sqrt{\frac{125}{6\pi}} \approx 214{,}6$ ein lokales – und wegen $\lim\limits_{r \to 0+} V_Z(r) = 0 < V_Z(r_0)$ und $\lim\limits_{r \to \infty} V_Z(r) = -\infty$ auch das globale – Maximum (der Maßzahl) des Zylindervolumens.

$$h_0 = \frac{250 - 4 \cdot \frac{125}{6\pi} \cdot \pi}{2\pi\sqrt{\frac{125}{6\pi}}} = \frac{\frac{500}{3}}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{125}{6\pi}}} \approx 10{,}30$$

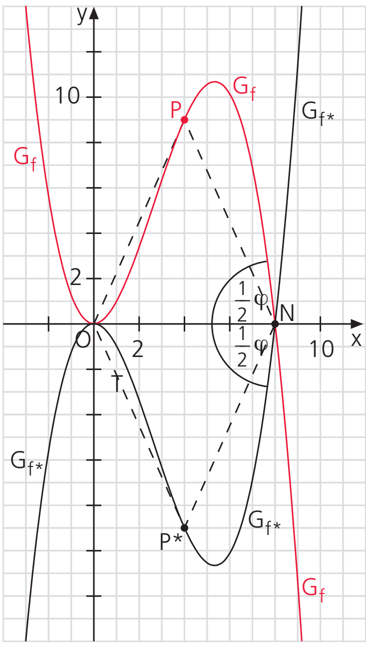
Gesamtvolumen der Kapsel:
$V_K \approx 2{,}58^2\pi \cdot 10{,}30 + \frac{4}{3} \cdot 2{,}58^3 \cdot \pi \approx 286{,}1$:
Mit $r_0 \approx 2{,}58$ mm und $h_0 \approx 10{,}30$ mm (die optimale Kapsel ist also etwa $1\frac{1}{2}$ cm lang und $\frac{1}{2}$ cm breit) ergibt sich ein Kapselvolumen von etwa 286 mm³.

4. a) Ansatz: $f(x) = ax^2(x - 8)$;
$f(4) = 9$; $16a \cdot (-4) = 9$; $a = -\frac{9}{64}$;
$f(x) = -\frac{9}{64}x^2(x - 8) = -\frac{9}{64}(x^3 - 8x^2)$

b) Term der „Spiegelfunktion" f*:
$f^*(x) = \frac{9}{64}x^2(x - 8)$
Schnittwinkel:
$f'(x) = -\frac{9}{64}(3x^2 - 16x)$;

$f'(8) = -\frac{9}{64}(192 - 128) = -\frac{9}{64} \cdot 64 = -9$;

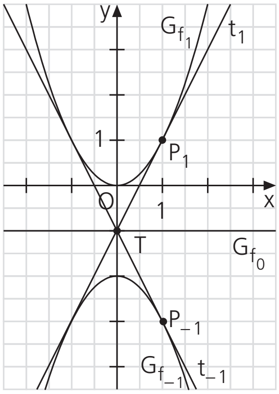
$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 9$; $\frac{\varphi}{2} \approx 83{,}66°$; $\varphi \approx 167°$



c) Das Viereck ist eine Raute, da seine beiden Diagonalen [ON] und [P*P] einander senkrecht halbieren.
Seine vier Seiten sind sämtlich gleich lang.
Seine Innenwinkel mit den Scheiteln P und P* sind gleich groß und seine anderen beiden Innenwinkel ebenfalls.
$U_{OP^*NP} = 4 \cdot \overline{PO} = 4\sqrt{4^2 + 9^2} = 4\sqrt{97} \approx 39{,}4$;
$A_{OP^*NP} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 = 72$

5. a) Die Graphen sind für $k \neq 0$ Parabeln mit dem Scheitel S (0 | k – 1); für k = 0 ergibt sich eine zur x-Achse parallele Gerade mit der Gleichung $y = -1$.

b)



c) P (1 | 2k – 1)
$f_k'(x) = 2kx$; $f_k'(1) = 2k$;
t_k: $y = 2kx + t$;
$P \in t_k$: $2k - 1 = 2k + t$; $t = -1$;
t_k: $y = 2kx - 1$; daraus folgt, dass t_k für jeden Wert von k den gleichen y-Achsenabschnitt –1 hat, also durch T (0 | –1) verläuft.

d) $0 < k < 1$: $f_k(x) = 0$; $kx^2 = 1 - k$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1-k}{k}}$;

$\overline{N_1N_2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1-k}{k}} = 2$: $\frac{1-k}{k} = 1$; $1 - k = k$; $1 = 2k$; $k = \frac{1}{2} \in \,]0; 1[$