Kann ich das noch? – Lösungen zu den Seiten 6 und 7

1. a) $T_1(x) = (x - 1)^2 + (2 + x)^2 + 1 =$
$= x^2 - 2x + 1 + 4 + 4x + x^2 + 1 =$
$= 2x^2 + 2x + 6$

b) $T_2(x) = (x + a)^2 - a(a + 2x) =$
$= x^2 + 2ax + a^2 - a^2 - 2ax =$
$= x^2$

c) $T_3(x) = (2 - 3x)^2 - 2(3x^2 + 2) - (\sqrt{3}x)^2 =$
$= 4 - 12x + 9x^2 - 6x^2 - 4 - 3x^2 =$
$= -12x$

d) $T_4(x) = x^2 - 2(x - 3)(x + 1) - x(1 - x) =$
$= x^2 - 2(x^2 - 2x - 3) - x + x^2 =$
$= x^2 - 2x^2 + 4x + 6 - x + x^2 =$
$= 3x + 6$

e) $T_5(x) = (x - 1)^3 + x^2 - (x + 1)^3 - x(x^2 - 1) + x^3 =$
$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x^2 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 - x^3 + x + x^3 =$
$= -5x^2 + x - 2$

2. a) $11 - 9 = 2 \neq \sqrt{8}$, also falsch

b) $3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 8\sqrt{3} = 2 \cdot 4\sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{16 \cdot 3} = 2\sqrt{48}$, also wahr

c) $\sqrt{15 \cdot 60} = \sqrt{900} = 30$;
$(\sqrt{6 \cdot 5})^2 = 6 \cdot 5 = 30$, also wahr

d) $2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$, also wahr

e) $\frac{3 + 1}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$;
$\frac{\sqrt{25 - 9}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$, also wahr

f) $(\sqrt{2} - 1)^4 = (2 - 2\sqrt{2} + 1)^2 = (3 - 2\sqrt{2})^2 =$
$= 9 - 12\sqrt{2} + 8 = 17 - 12\sqrt{2} \neq 17 - 6\sqrt{2}$, also falsch

3. a) $2 + 3 + 2\sqrt{6} - 2 - 3 + 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

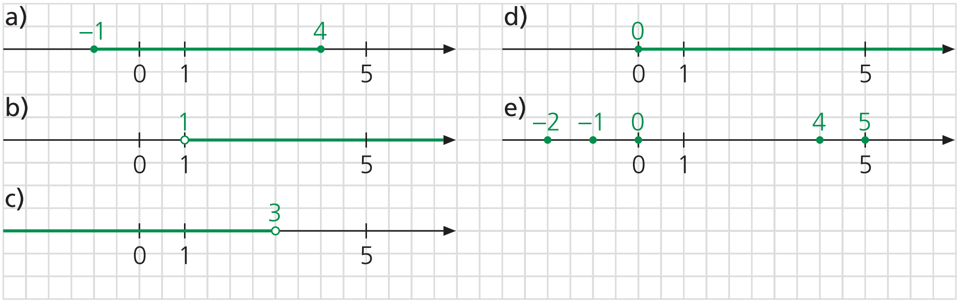
b) $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$

c) $\frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} + \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{3 - 2} - \frac{3(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 - 3} =$
$= \sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 6 - 3\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} = 4\sqrt{2} - 5$

d) $\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6} - \sqrt{3} = -\frac{3}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3}$

e) $18\sqrt{30} + 2\sqrt{15 \cdot 30} - 36\sqrt{3} - 4\sqrt{45} - 18\sqrt{30} - 18\sqrt{2} + 36\sqrt{3} + 12\sqrt{5} =$
$= 18\sqrt{30} + 30\sqrt{2} - 36\sqrt{3} - 12\sqrt{5} - 18\sqrt{30} - 18\sqrt{2} + 36\sqrt{3} + 12\sqrt{5} = 12\sqrt{2}$

4.



5. a) $-1{,}1x + 1 = 9 - 1{,}9x;\ | +1{,}9x - 1$
$0{,}8x = 8;\ | : 0{,}8$
$x = 10 \in G;\quad L = \{10\}$

b) $6x - 4 + 4x = 4x - 4x - 32;$
$10x - 4 = -32;\ | +4$
$10x = -2{,}8;\ | : 10$
$x = -2{,}8 \in G;\quad L = \{-2{,}8\}$

c) $x^2 - 6x - 9x + 54 - (60 - 5x - 12x + x^2) + 100 = 0;$
$x^2 - 15x + 54 - 60 + 17x - x^2 + 100 = 0;$
$2x + 94 = 0;\ | -94$
$2x = -94;\ | : 2$
$x = -47 \notin G;\quad L = \{\,\}$

d) $7x^2 - 42x - 3(1 - 2x + x^2) - 4(x^2 + 10x + 25) + 76x = 0;$
$7x^2 - 42x - 3 + 6x - 3x^2 - 4x^2 - 40x - 100 + 76x = 0;$
$-103 = 0$: falsch; also ist $L = \{\,\}$.

e) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 - (12 - 2\sqrt{12}x + x^2) = 12\sqrt{3} - 9;$
$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 - 12 + 4\sqrt{3}x - x^2 = 12\sqrt{3} - 9;$
$6\sqrt{3}x - 9 = 12\sqrt{3} - 9;\ | +9$
$6\sqrt{3}x = 12\sqrt{3};\ | : (6\sqrt{3})$
$x = 2 \in G;\quad L = \{2\}$

f) $x^2 - 8x + 16 - (x^2 + 10x + 25) + 63 = 0;$
$x^2 - 8x + 16 - x^2 - 10x - 25 + 63 = 0;$
$-18x + 54 = 0;\ | -54$
$-18x = -54;\ | : (-18)$
$x = 3 \in G;\quad L = \{3\}$

g) $6x^2 - 18x - x^2 = 5x^2;$
$5x^2 - 18x = 5x^2;\ | -5x^2$
$-18x = 0;\ | : (-18)$
$x = 0 \in G;\quad L = \{0\}$

h) $\frac{5x + 6}{3} - \frac{9x - 3}{4} = 1;\ | \cdot 12$
$4(5x + 6) - 3(9x - 3) = 12;$
$20x + 24 - 27x + 9 = 12;$
$-7x + 33 = 12;\ | -33$
$-7x = -21;\ | : (-7)$
$x = 3 \in G;\quad L = \{3\}$

i) $3\sqrt{x} - 12 = \sqrt{x};\ | +12 - \sqrt{x}$
$2\sqrt{x} = 12;\ | : 2$
$\sqrt{x} = 6;$
$x = 36 \in G;\quad L = \{36\}$

6. **a)** $L = \{-4; 2\}$
b) $L = \{0; 5\}$
c) $L = \{3\}$
d) $(x + 5)(x + 1) = 0; \quad L = \{-5; -1\}$
e) $(x - 1)(x - 16) = 0; \quad L = \{1; 16\}$
f) $L = \{0\}$, da $\frac{2}{3} \notin G$ ist
g) $(x + 1)(x - 8) = 0; \quad L = \{-1; 8\}$
h) $(x + 11)(x + 1) = 0; \quad L = \{-11; -1\}$
i) $(x - 6)^2 = 0; \quad L = \{6\}$

7. **a)** $x_{1,2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3}}{2 \cdot 8} = \frac{10 \pm 2}{16}$;
$x_1 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$; $x_2 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$;
$L = \{\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\}$

b) $x_{1,2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 + 24}}{2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm 4\sqrt{2}}{2}$;
$x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -3\sqrt{2}$;
$L = \{-3\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

c) $(x + 0{,}7)(x - 0{,}2) = 0$;
$L = \{-0{,}7; 0{,}2\}$

d) $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 56}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{-31}}{4} \notin G$;
$L = \{\,\}$ $\quad [D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 25 - 56 = -31 < 0]$

e) $(x + \sqrt{12})(x - \sqrt{12}) = 0$; $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;
$L = \{-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\}$

f) $4x^2 - 8x + 4 = 4 - 8x + 4x^2$ ist für jeden Wert von $x \in G$ wahr: $L = G = \mathbb{R}$

8. **a)** $2x - 7 > 4x + 13; \mid -4x + 7$
$-2x > 20; \mid : (-2)$
$x < -10$; $G = \mathbb{R}$:
$L =]-\infty; -10[$

b) $7x + 1 < x + 19; \mid -x - 1$
$6x < 18; \mid : 6$
$x < 3$; $G = \mathbb{N}$:
$L = \{0; 1; 2\}$

c) $2 \leqq |x| < 6$; $G = \mathbb{Z}$:
$L = \{-5; -4; -3; -2; 2; 3; 4; 5\}$

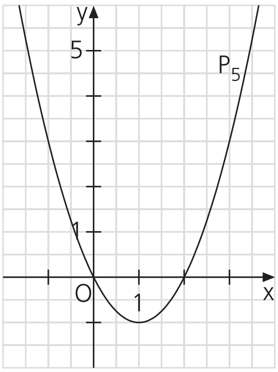
d) $L = \{\,\}$

e) $2 \leqq |x - 1| < 6$; $G = \mathbb{Z}$:
$L = \{-4; -3; -2; -1; 3; 4; 5; 6\}$

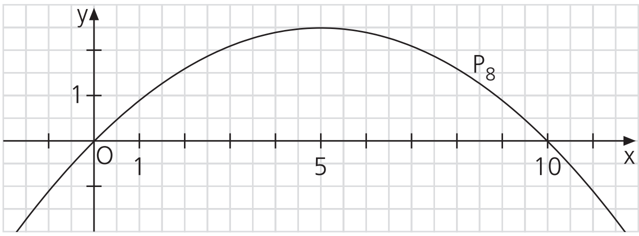
f) $x^2 - 2x + 1 < 16 - 8x + x^2; \mid -x^2 + 8x - 1$
$6x < 15; \mid : 6$
$x < 2{,}5$; $G = \mathbb{R}$:
$L =]-\infty; 2{,}5[$

9. **a)** Kongruent zur Normalparabel sind P_1, P_4, P_5, P_7, P_9 und P_{10}, also $\frac{6}{10} = 60\%$.
b) Nach oben geöffnet sind P_1, P_2, P_4, P_5 und P_9, also 50%.
c) Durch den Ursprung verlaufen P_5 und P_8, also 20%.
d) Weiter als die Normalparabel sind P_3 und P_8, also 20%.
e) Keinen Punkt mit der x-Achse gemeinsam hat nur eine der Parabeln, nämlich P_7; also 10%.
f) Durch alle vier Quadranten verlaufen P_1, P_2 und P_3, also 30%.
g) Diese Eigenschaft besitzt nur P_6; also 10%.

Gleichungen in Scheitelform und Graphen:
P_5: $y = x(x - 2) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x - 1)^2 - 1$;



P_8: $y = -0{,}1(x^2 - 10x + 25) + 2{,}5 = -0{,}1(x - 5)^2 + 2{,}5$



10. a) g: $y = -1{,}5x + 6$;
$A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$; $\tan\varphi = 1{,}5$; $\varphi \approx 56°$

b) g: $y = 3x + 6$; S $(-2 \mid 0)$; T $(0 \mid 6)$;
$A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$; $\tan\varphi = 3$; $\varphi \approx 72°$

c) g: $y = -2x + 4$; S $(2 \mid 0)$; T $(0 \mid 4)$;
$A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$; $\tan\varphi = 2$; $\varphi \approx 63°$

d) g: $y = x - 1$; A $(1 \mid 0)$; T $(0 \mid -1)$;
$A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5$; $\tan\varphi = 1$; $\varphi = 45°$

11. a) $L = \{(-4; 6)\}$
b) $L = \{(5; -1)\}$
c) $L = \{(2; -1)\}$
d) $L = \{(x; y) \mid y = -x + 5\}$
e) $L = \{(1; 2; -1)\}$
f) $L = \{(1; -2; 3)\}$
g) $L = \{(-1; 2; -3)\}$
h) $L = \{(4; 4; 4)\}$

12. (1) **a)** $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$;
$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$
(Satz von Pythagoras)

b) $\cos\beta = \frac{a}{c}$; $\tan\beta = \frac{b}{a}$; $\cos\beta \cdot \tan\beta = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{c} = \sin\beta$

c) $\tan\alpha = \frac{a}{b}$; $\tan\beta = \frac{b}{a}$; $\frac{1}{\tan\beta} = \frac{a}{b} = \tan\alpha$

d) $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$; $h_c = a \cdot \sin\beta$;
$A_{ABC} = \frac{1}{2}\, c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\, ac \cdot \sin\beta$

e) $\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$; $h_c = b \cdot \sin\alpha$;
$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \sin\alpha = \frac{1}{2}\, bc \cdot \sin\alpha$

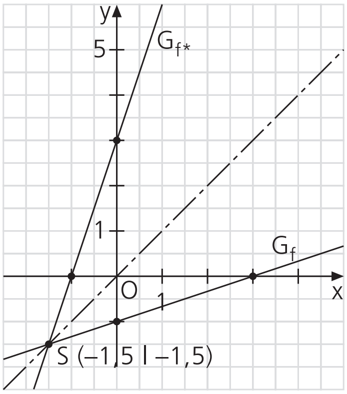
f) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $a = c \cdot \sin\alpha$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $b = c \cdot \cos\alpha$;
$U_{ABC} = c + a + b = c + c \cdot \sin\alpha + c \cdot \cos\alpha =$
$= c(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)$

(2) **a)** $\cos 45° = \sin 45°$
b) $\cos 0°\ (= 1) = 2 \cdot \sin 30° = \tan 45°$
c) $\cos 67° - \sin 23° = 0$
d) $\sin 30° + \cos 60° \left(= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\right) = \sin 90°$
e) $\tan 0° + \sin 0° + \cos 0°\ (= 0 + 0 + 1) = 1$
f) $\sin 45° - \cos 45° + \tan 45° \left(= \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 = 1\right) = \sin 90°$
g) $(\sin 22°)^2 + (\cos 22°)^2\ (= 1) = \cos 0°$
h) $\sin 90°\ (= 1) < 3 \cdot \sin 30° \left(= 3 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}5\right)$
i) $\cos 90°\ (= 0) < 2 \cdot \cos 45°\ (= \sqrt{2})$

Kann ich das? – Lösungen zu Seite 30

1. **a)** $y = f(x) = \frac{1}{3}x - 1$

b) Zeichnung:



c) Umkehrfunktion f*:

$x = \frac{1}{3}y - 1; \mid \cdot 3 \quad 3x = y - 3; \mid + 3 \quad y = 3x + 3; D_{f*} = W_f$:

f*: $f^*(x) = 3x + 3$; $D_{f*} = \mathbb{R}$

Schnittpunkt von G_f und G_{f*}:

$\frac{1}{3}x_S - 1 = 3x_S + 3; \mid -3x_S + 1$

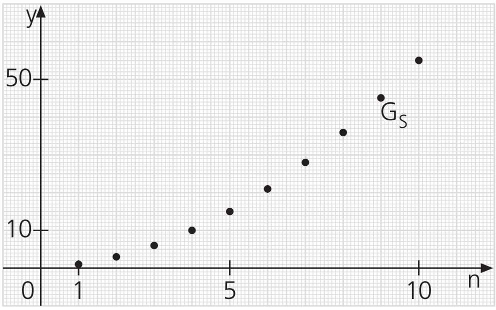
$-\frac{8}{3}x_S = 4; \mid : \left(-\frac{8}{3}\right)$

$x_S = -\frac{12}{8} = -1{,}5; \quad y_S = -4{,}5 + 3 = -1{,}5;$

S (–1,5 | –1,5)

2. **a)**

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s(n)	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55



b) Die Funktion s ist umkehrbar, da jedem Wert von $y \in W_S$ genau ein Wert von $n \in D_S$ zugeordnet wird.

3. **a)** Man substituiert $x^2 = u$ und erhält $2u^2 - 5u - 12 = 0$; $u_1 = 4$; $u_2 = -1{,}5 < 0$.
$x_{1,2}^2 = 4$; $x_1 = 2$; $x_2 = -2$ $x_{3,4}^2 = -1{,}5$: keine reellen Lösungen
Lösungsmenge: $L = \{-2; 2\}$

b) Man substituiert $x^2 = u$; $u^2 - 109u + 900 = 0$; $(u - 100)(u - 9) = 0$.
$u_1 = 100$; $x_1^2 = 100$; $x_{11} = 10$; $x_{12} = -10$; $u_2 = 9$; $x_2^2 = 9$; $x_{21} = 3$; $x_{22} = -3$
Lösungsmenge: $L = \{-10; -3; 3; 10\}$

4. **a)** $0{,}5(x + 5)(x + 2)(x - 2) = 0$; $L = \{-5; -2; 2\}$
b) $x^2(x + 2)(x - 1) = 0$; $L = \{-2; 0; 1\}$
c) $(x + 2)(x^2 - 4x + 5) = 0$; $L = \{-2\}$ $(x^2 - 4x + 5 \geqq 1$ für $x \in \mathbb{R})$

5.

Bedingung wird erfüllt von	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
f_1	x	x	x	x	x
f_2	x		x	x	x
f_3	x	x	x	x	
f_4	x	x	x		x

Von den vier Funktionen f_1 bis f_4 erfüllt nur f_1 alle fünf Bedingungen.

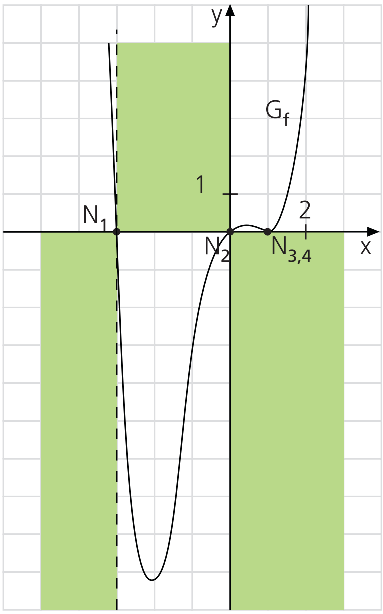
6. $f(0) = f(0) \cdot f(0)$; $f(0) = [f(0)]^2$, also [wegen $f(0) > 0$] $f(0) = 1$
$f(2) = f(1 + 1) = f(1) \cdot f(1) = [f(1)]^2$; $[f(1)]^2 = 9$, also [wegen $f(1) > 0$] $f(1) = 3$
$f(3) = f(2 + 1) = f(2) \cdot f(1) = 9 \cdot 3 = 27$
$f(4) = f(2 + 2) = f(2) \cdot f(2) = 9 \cdot 9 = 81$
oder $f(4) = f(3 + 1) = f(3) \cdot f(1) = 27 \cdot 3 = 81$

7. **a)** $f(x) \approx 4x^4$ **b)** $f(x) \approx 0{,}2x^6$ **c)** $f(x) \approx 2x^3$ **d)** $f(x) \approx -2x^3$

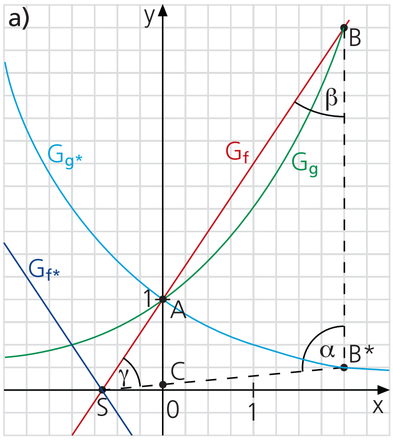
8. Nullstellen der Funktion f: $f(x) = 0{,}5(x + 3)x(x - 1)^2$; $D_f = \mathbb{R}$:
einfache Nullstellen: $x_1 = -3$; $x_2 = 0$;
doppelte Nullstelle: $x_{3,4} = 1$.

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$x + 3$	< 0	0	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0
x	< 0	< 0	< 0	0	> 0	> 0	> 0
$(x - 1)^2$	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	0	> 0
$f(x)$	> 0	0	< 0	0	> 0	0	> 0

Der Graph G_f kann also *nicht* durch die drei getönten „Felder“ verlaufen:



Kann ich das? – Lösungen zu Seite 64



1. Funktionsterme: $f(x) = 1{,}5x + 1$; $g(x) = 1 \cdot 2^x$

b) Funktionen: f^*: $f^*(x) = -1{,}5x - 1$; $D_{f^*} = \mathbb{R}$; g^*: $g^*(x) = 2^{-x}$; $D_{g^*} = \mathbb{R}$

c) Koordinaten: $S\,(-\frac{2}{3} \mid 0)$; $B^*\,(2 \mid 0{,}25)$

Flächeninhalte: $A_{BSB^*} = \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(4 - \frac{1}{4}\right)\text{ cm}^2 = 5\text{ cm}^2$

$\overline{CA} : \overline{B^*B} = \frac{2}{3} : 2\frac{2}{3} = 1 : 4$; $\overline{CA} = \frac{1}{4} \cdot 3\frac{3}{4}\text{ cm} = \frac{15}{16}\text{ cm}$

(2. Strahlensatz; V-Figur mit Scheitel S);

$A_{\text{II. Quadrant}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16}\text{ cm}^2 = \frac{5}{16}\text{ cm}^2$

Bruchteil: $\frac{\frac{5}{16}}{5} = \frac{1}{16} \approx 6{,}3\%$

Umfangslänge: $\overline{BS} = \sqrt{\left(2 + \frac{2}{3}\right)^2 + 4^2}\text{ cm} = \sqrt{23\frac{1}{9}}\text{ cm} = \frac{4}{3}\sqrt{13}\text{ cm}$

$\approx 4{,}81\text{ cm}$;

$\overline{SB^*} = \sqrt{\left(2 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}\text{ cm} = \sqrt{7\frac{25}{144}}\text{ cm} = \frac{1}{12}\sqrt{1\,033}\text{ cm} \approx 2{,}68\text{ cm}$;

$U_{BSB^*} \approx 4{,}81\text{ cm} + 2{,}68\text{ cm} + 3{,}75\text{ cm} = 11{,}24\text{ cm}$

Winkelgrößen: $A_{BSB^*} = \frac{1}{2} \cdot \overline{B^*B} \cdot \overline{SB^*} \cdot \sin\alpha$; $\sin\alpha \approx 0{,}996$; $\alpha \approx 95{,}4°$;

$A_{BSB^*} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BS} \cdot \overline{B^*B} \cdot \sin\beta$; $\sin\beta \approx 0{,}555$; $\beta \approx 33{,}7°$; $\gamma \approx 50{,}9°$

2. a) $3^{x+5} = 3^4$;

$x + 5 = 4$; $\mid -5$

$x = -1 \in G$; $L = \{-1\}$

b) $2^y + 2^2 \cdot 2^y = 20$;

$2^y + 4 \cdot 2^y = 20$;

$5 \cdot 2^y = 20$; $\mid :5$

$2^y = 4$;

$2^y = 2^2$;

$y = 2 \in G$; $L = \{2\}$

c) $\log 3 + \log (5^x) = \log (16^x)$;

$\log 3 + x \cdot \log 5 = x \cdot \log 16$;

$x \cdot (\log 16 - \log 5) = \log 3$; $\mid :(\log 16 - \log 5)$

$x = \frac{\log 3}{\log 16 - \log 5} = \frac{\log 3}{\log 3{,}2} \in G$; $L = \left\{\frac{\log 3}{\log 3{,}2}\right\}$

d) $3^{-y} + 3 > 3$ für jeden Wert von $y \in G$; also ist $L = \{\,\}$.

e) $\log_3 \frac{x}{2-x} = \log_3 9$;

$\frac{x}{2-x} = 9$; $\mid \cdot (2 - x)$

$x = 18 - 9x$; $\mid +9x$

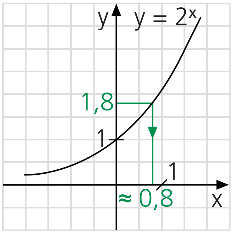
$10x = 18$; $\mid :10$

$x = 1{,}8 \in G$; $L = \{1{,}8\}$

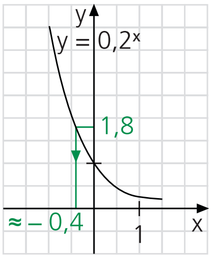
3. a) $\frac{\log 1{,}5}{\log 2} < x < \frac{\log 3{,}5}{\log 2}$; $0{,}59 < x < 1{,}80$ b) $\log 0{,}5 < x < \log 11$; $-0{,}30 < x < 1{,}04$

c) $0{,}01 < x < 100$

4. a) $x \approx 0{,}8$



b) $x \approx -0{,}4$



5. a) $\log_3(x+1) - \log_3[2(x+1)] = \log_3 \frac{x+1}{2(x+1)} = \log_3 0{,}5 \; (= -\frac{\log 2}{\log 3} \approx -0{,}63)$

b) $\log_2[\log_2(\log_2 256)] = \log_2[\log_2 8] = \log_2 3 \; (= \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}58)$

6. a) Das Kapital wächst auf (5 000 € · $1{,}045^5$ ≈) 6 230,91 € an.

b) 10 000 € = 5 000 € · $1{,}045^n$; | : (5 000 €)

$1{,}045^n = 2$; $n = \frac{\log 2}{\log 1{,}045} = 15{,}74\ldots$

Nach etwa 16 Jahren hat sich das Kapital verdoppelt.

c) $5000\text{ €} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{10} = 10\,000\text{ €}$; | : (5 000 €)

$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{10} = 2$; $1 + \frac{p}{100} = \sqrt[10]{2}$; $p = 100\,(\sqrt[10]{2} - 1) \approx 7{,}18$.

Herr Stein hätte das Kapital zu etwa 7,18% p. a. anlegen müssen.

7. a) Bevölkerungszahl im Jahr 2010: $(22{,}5 \cdot 10^6) \cdot 1{,}025^{15} \approx 32{,}6$ Millionen

Verdopplung der Bevölkerungszahl: $1{,}025^x = 2$; $x \approx 28{,}1$

Nach etwa 28 Jahren, also im Jahr 2023, hat sich die Bevölkerungszahl verdoppelt.

b) Bevölkerungszahl im Jahr 2010: $(22{,}5 \cdot 10^6) \cdot 0{,}9975^{15} \approx 21{,}7$ Millionen

Halbierung der Bevölkerungszahl: $0{,}9975^x = 0{,}5$; $x \approx 277$

Nach etwa 277 Jahren, also im Jahr 2272, hat sich die Bevölkerungszahl halbiert.

8. $1{,}1 = 1{,}5 \cdot 0{,}5^{\frac{x}{5\,730\text{ a}}}$; | : 1,5 $\quad 0{,}5^{\frac{x}{5\,730\text{ a}}} = \frac{1{,}1}{1{,}5}$; $\quad \frac{x}{5\,730\text{ a}} \log 0{,}5 = \log \frac{1{,}1}{1{,}5}$; $\quad x \approx 2\,564$ a:

Die Knochen waren etwa 2 600 Jahre alt.

9. Jeder Mitarbeiter erhält nach zehnjähriger Betriebszugehörigkeit 200 €; dieser Betrag soll mit weiterer Betriebszugehörigkeit steigen.

Vorschlag A: Nach weiteren n Jahren erhält jeder Mitarbeiter 200 € + n · 20 €.

Vorschlag B: Nach weiteren n Jahren erhält jeder Mitarbeiter 200 € · $1{,}075^n$.

Bei einer weiteren Betriebszugehörigkeit von 8 (oder weniger als 8) Jahren ist der Vorschlag A für die Arbeitnehmer günstiger: 200 € + 8 · 20 € = 360 €; 200 € · $1{,}075^8$ ≈ 356,70 €

Bei einer weiteren Betriebszugehörigkeit von 9 (oder mehr als 9) Jahren ist dagegen der Vorschlag B für die Arbeitnehmer günstiger: 200 € + 9 · 20 € = 380 €; 200 € · $1{,}075^9$ ≈ 383,45 €

Kann ich das? – Lösungen zu Seite 76

1. a) $\varphi_1 \approx 255°$; $\varphi_2 \approx 285°$; $\varphi_3 \approx 615°$
b) $\varphi_1 \approx 40°$; $\varphi_2 \approx 320°$; $\varphi_3 \approx 400°$
c) $\varphi_1 \approx 37°$; $\varphi_2 \approx 217°$; $\varphi_3 \approx 397°$

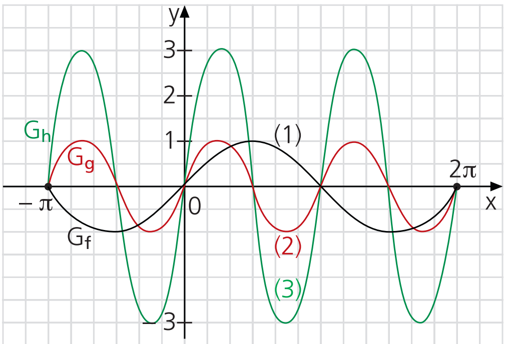
2. a) $x_1 \approx \frac{3}{4}\pi$; $x_2 \approx \frac{5}{4}\pi$; $x_3 \approx \frac{11}{4}\pi$
b) $x_1 \approx 2{,}16$; $x_2 \approx 5{,}30$; $x_3 \approx 8{,}44$
c) $x_1 \approx 0{,}85$; $x_2 \approx 2{,}29$; $x_3 \approx 7{,}14$

3. Abszissen der gemeinsamen Punkte der beiden Graphen:
$\sin x = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $|\cdot \cos x$ $\quad(\cos x \neq 0)$
$\sin x \cdot \cos x = \sin x$;
$\sin x \cdot (\cos x - 1) = 0$; d.h. entweder
$\sin x = 0$; $x_0 = 0$; $x_1 = \pi$; allgemein: $x_{k_1} = k_1\pi$; $k_1 \in \mathbb{Z}$, oder
$\cos x = 1$; $x_0^* = 0$; $x_1^* = 2\pi$; allgemein: $x_{k_2}^* = 2k_2\pi$; $k_2 \in \mathbb{Z}$, also
zusammengefasst: $x_k = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
Ordinaten der gemeinsamen Punkte: $y_k = \sin x_k = \sin(k\pi) = 0 = \tan x_k$
Alle gemeinsamen Punkte der Sinus- und der Tangenskurve (also sowohl die Schnitt- wie auch die Berührpunkte) liegen wegen $y_k = 0$ auf der x-Achse.

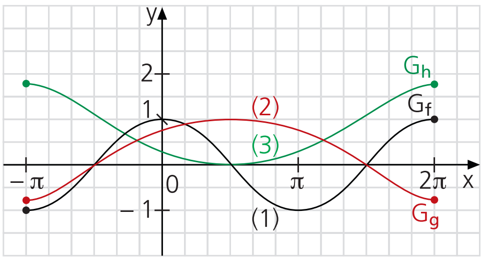
4. a) blau: $a = 2$
grün: $a = 1{,}5$
rot: $a = -0{,}5$
Periode: 2π

b) blau: $b = 2$; $p = \pi$
grün: $b = 4$; $p = \frac{1}{2}\pi$
rot: $b = 0{,}5$; $p = 4\pi$
Amplitude: 1

5. a)



b)



	sin x	sin (2x)	3 sin (2x)	cos x	$\cos\left[0{,}5\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$	$1 - \cos\left[0{,}5\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$
Amplitude	1	1	3	1	1	1
Wertemenge	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$[-3; 3]$	$[-1; 1]$	$[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1]$	$[0; 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}]$

6. a) $y = -2 \cos x$ $\qquad$ b) $y = 0{,}5 \sin(0{,}5x) + 1$

7. $\overline{OP} = 4\text{ cm} \cdot \sin\varphi$; $\overline{PT} = 4\text{ cm} \cdot \cos\varphi$; $A_{TOP} = \frac{1}{2}\,\overline{OP} \cdot \overline{PT} = 8\text{ cm}^2 \cdot \sin\varphi \cos\varphi$

8. Koordinaten der Zeigerspitzen um 16 Uhr (Ursprung: Mittelpunkt des Zifferblatts; positive x-Achse: „3-Uhr-Stellung“ des Stundenzeigers; Einheit: m): $S_1\,(0 \mid 1{,}4)$; $S_2\,(0{,}84 \cdot \cos 30° \mid -0{,}84 \cdot \sin 30°) = (0{,}42\sqrt{3} \mid -0{,}42)$
Entfernung: $\overline{S_1S_2}^2 = (0{,}42\sqrt{3} - 0)^2 + (-0{,}42 - 1{,}4)^2 = 0{,}5292 + 3{,}3124 = 3{,}8416$; $\overline{S_1S_2} = 1{,}96$: die Zeigerspitzen sind um 16 Uhr 1,96 m weit voneinander entfernt.

Kann ich das? – Lösungen zu Seite 104

1. (1) $m(x) = \frac{(x^2-1)-(2^2-1)}{x-2} = \frac{x^2-1-3}{x-2} = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2;\ x > 2$

$\lim\limits_{x \to 2+} (x+2) = 4$

(2) $m(x) = \frac{(2^2-1)-(x^2-1)}{2-x} = \frac{3-x^2+1}{2-x} = \frac{4-x^2}{2-x} = \frac{(2+x)(2-x)}{2-x} = 2+x;\ x < 2$

$\lim\limits_{x \to 2-} (x+2) = 4$

Wegen $\lim\limits_{x \to 2+} m(x) = \lim\limits_{x \to 2-} m(x) = 4$ ist $\lim\limits_{x \to 2} m(x) = 4$.

2. Der Term $\frac{V(r+h)-V(r)}{h}$ $(h > 0)$ bedeutet die mittlere Volumenzunahmerate, wenn die Radiuslänge um h zunimmt.

$\frac{V(r+h)-V(r)}{h} = \frac{\frac{4}{3}(r+h)^3\pi - \frac{4}{3}r^3\pi}{h} = \frac{\frac{4}{3}\pi(r^3+3r^2h+3rh^2+h^3-r^3)}{h} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot h\,(3r^2+3rh+h^2)}{h} = \frac{4}{3}\pi\,(3r^2+3rh+h^2)$;

$V'(r) = \lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{4}{3}\pi\,(3r^2+3rh+h^2)\right] = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4r^2\pi$: Dies ist der Kugeloberflächeninhalt.

3. a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-2(x+h)^2-(-2x^2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-2x^2-4hx-2h^2+2x^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{-h(4x+2h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} [-(4x+2h)] = -4x$

Ableitungsfunktion: f': $f'(x) = -4x$; $D_{f'} = \mathbb{R}$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2(x+h)} - \frac{1}{2x}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{2x(x+h)}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-h}{h \cdot 2x(x+h)} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-1}{2x(x+h)} = -\frac{1}{2x^2}$

Ableitungsfunktion: f': $f'(x) = -\frac{1}{2x^2}$; $D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

4. a) $f(x) = 2x^4 + x^3$; $f'(x) = 8x^3 + 3x^2$; $f''(x) = 24x^2 + 6x$

$f(1) = 3$; $f'(1) = 11$; t_P: $y = 11x + t$; da $P\,(1 \mid 3) \in t_P$ ist, gilt

$3 = 11 + t$; $t = -8$; t_P: $y = 11x - 8$

b) $f(x) = -x^2 + 4$; $f'(x) = -2x$; $f''(x) = -2$

$f(1) = 3$; $f'(1) = -2$; t_P: $y = -2x + t$; da $P\,(1 \mid 3) \in t_P$ ist, gilt $3 = -2 + t$; $t = 5$; t_P: $y = -2x + 5$

Schnittpunkt von t_P mit der x-Achse: $y = 0$; $0 = -2x + 5$; $\mid +2x$ $\quad 2x = 5$; $\mid : 2$

$x_1 = 2{,}5$; $S_1\,(2{,}5 \mid 0)$

Steigung von n_P: $-\frac{1}{-2} = 0{,}5$; Gleichung von n_P: $y = 0{,}5x + t^*$; da $P\,(1 \mid 3) \in n_P$ ist, gilt $3 = 0{,}5 + t^*$;

$t^* = 2{,}5$; n_P: $y = 0{,}5x + 2{,}5$

Schnittpunkt von n_P mit der x-Achse: $y = 0$; $0{,}5x + 2{,}5 = 0$; $\mid -2{,}5$

$0{,}5x = -2{,}5$; $\mid : 0{,}5$

$x_2 = -5$; $S_2\,(-5 \mid 0)$

Dreiecksinhalt: $A_{S_2S_1P} = \frac{1}{2} \cdot (5 + 2{,}5) \cdot 3 = 11{,}25$

Umkreis: $r_{\text{Umkreis}} = \frac{1}{2} \cdot (5 + 2{,}5) = 3{,}75$; $A_{\text{Umkreis}} = 3{,}75^2 \cdot \pi \approx 44{,}2$

Prozentsatz: etwa $\frac{11{,}25}{44{,}2} \approx 25\%$

c) $f(x) = x(3x - 1) = 3x^2 - x$; $f'(x) = 6x - 1$; $f''(x) = 6$

oder (Produktregel) $f(x) = x(3x - 1)$; $f''(x) = 1 \cdot (3x - 1) + x(3 - 0) = 3x - 1 + 3x = 6x - 1$

$f(1) = 2$; $f'(1) = 5$; t_P: $y = 5x + t$; da $P\,(1 \mid 2) \in t_P$ ist, gilt $2 = 5 + t$; $t = -3$; t_P: $y = 5x - 3$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$; $f''(x) = \frac{6}{x^4}$

$f(1) = 1$; $f'(1) = -2$; t_P: $y = -2x + t$; da $P \in t_P$ ist, gilt $1 = -2 + t$; $t = 3$; t_P: $y = -2x + 3$

5. Bei beiden Abbildungen ist einer der beiden Graphen G_f und der andere $G_{f'}$.

a) Die rote Kurve ② ist G_f; die grüne Kurve ① ist $G_{f'}$. Begründung: Die Abszissen der Punkte von ②, in denen ② eine horizontale Tangente besitzt, stimmen mit den Nullstellen der durch ① dargestellten Funktion überein, aber nicht umgekehrt.

b) Die grüne Kurve ① ist G_f; die rote Kurve ② ist $G_{f'}$. Begründung: Die Tangentensteigung von ① nimmt zu, demgemäß ist ② steigend; umgekehrt ist dies nicht der Fall.

6. Für $x > 0$ gilt $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^4 - 0}{x - 0} = \frac{x^4}{x} = x^3$; $\lim\limits_{x \to 0+} x^3 = 0$;

für $x < 0$ gilt $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^4 - 0}{x - 0} = \frac{x^4}{x} = x^3$; $\lim\limits_{x \to 0-} x^3 = 0 = \lim\limits_{x \to 0+} x^3$:

Die Funktion f: $f(x) = |x^4|$; $D_f = \mathbb{R}$, ist also an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar, und es ist $f'(0) = 0$.

7. $Q\,(2 \mid 3)$; Gleichung der Parabel P_1: $y = a(x - 1)^2 + 2$; $Q \in P_1$:
$3 = a \cdot (2 - 1)^2 + 2$; $|-2$ $\quad a = 1$
P_1: $y = (x - 1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 1 + 2 = x^2 - 2x + 3$
Steigung von P_1 (und von P_2) im Punkt Q:
1. Ableitung: $y' = 2x - 2$; an der Stelle $x = 2$: $m_{t_Q} = 4 - 2 = 2$
Gleichung der Tangente t_Q: $y = 2x + t$; $Q \in t_Q$: $3 = 2 \cdot 2 + t$; $3 = 4 + t$; $|-4$ $\quad t = -1$
t_Q: $y = 2x - 1$
Parabel P_2: $y = f(x) = -x^2 + bx + c$
$Q \in P_2$: $3 = -2^2 + 2b + c$; $|+4$ $\quad 2b + c = 7$ (I)
$f'(x) = -2x + b$; $f'(2) = -4 + b = m_{t_Q} = 2$; $b = 6$; eingesetzt in (I)
$2 \cdot 6 + c = 7$; $|-12$ $\quad c = -5$
Gleichung von P_2: $y = -x^2 + 6x - 5 = -(x - 3)^2 + 9 - 5 = -(x - 3)^2 + 4$

a) Der Teil der Parabel P_1 links oberhalb des Punkts $R_1\,(1 - \sqrt{2} \mid 4)$

b) Der Teil der Parabel P_2 links unterhalb des Punkts $R_2\,(1 \mid 0)$.

Kann ich das? – Lösungen zu Seite 132

1. a) x-Achsenpunkte: $f(x) = 0$;

$\frac{1}{6}(x + 2)^2(5 - 2x) = 0$;

$x_1 = -2$; $x_2 = 2{,}5$;

$N_1\ (-2 \mid 0)$; $N_2\ (2{,}5 \mid 0)$

y-Achsenpunkt:

$f(0) = \frac{1}{6} \cdot 2^2 \cdot 5 = \frac{10}{3}$; $P\ (0 \mid \frac{10}{3})$

b) $f(x) = \frac{1}{6}(x^2 + 4x + 4)(5 - 2x) =$

$= \frac{1}{6}(5x^2 - 2x^3 + 20x - 8x^2 + 20 - 8x) =$

$= \frac{1}{6}(-2x^3 - 3x^2 + 12x + 20)$;

$f'(x) = \frac{1}{6}(-6x^2 - 6x + 12) = -x^2 - x + 2 =$

$= -(x^2 + x - 2) =$

$= -(x + 2)(x - 1)$;

$f''(x) = -2x - 1$;

$f'''(x) = -2 \neq 0$;

$f'(x) = 0$: $x_1 = -2$; $x_3 = 1$;

$f(-2) = 0$; $f''(-2) = 3 > 0$: Tiefpunkt $T\ (-2 \mid 0)$

$f(1) = 4{,}5$; $f''(1) = -3 < 0$: Hochpunkt $H\ (1 \mid 4{,}5)$

[*oder*: Argumentation mit Vorzeichenwechsel von $f'(x)$; s. Tabelle]

$f''(x) = 0$: $x_4 = -\frac{1}{2}$; $f(-\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$; $f'''(-\frac{1}{2}) = -2 \neq 0$: Wendepunkt $(-\frac{1}{2} \mid \frac{9}{4})$

[*oder*: Argumentation mit Vorzeichenwechsel von $f''(x)$; s. Tabelle]

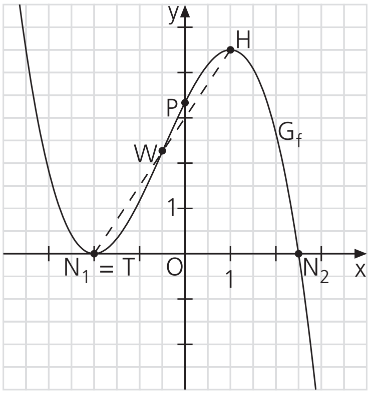
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty < x < -2$</td><td>$x = -2$</td><td>$-2 < x < -\frac{1}{2}$</td><td>$x = -\frac{1}{2}$</td><td>$-\frac{1}{2} < x < 1$</td><td>$x = 1$</td><td>$1 < x < \infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$f'(x) < 0$</td><td>$f'(x) = 0$</td><td colspan="3">$f'(x) > 0$</td><td>$f'(x) = 0$</td><td>$f'(x) < 0$</td></tr>
<tr><td>Vorzeichen-wechsel von $f'(x)$</td><td></td><td>von – nach +</td><td colspan="3"></td><td>von + nach –</td><td></td></tr>
<tr><td>G_f</td><td>ist streng monoton fallend</td><td>hat den Tiefpunkt $T\ (-2 \mid 0)$</td><td colspan="3">ist streng monoton steigend</td><td>hat den Hochpunkt $H\ (1 \mid 4{,}5)$</td><td>ist streng monoton fallend</td></tr>
<tr><td>$f''(x)$</td><td colspan="3">$f''(x) > 0$</td><td>$f''(x) = 0$</td><td colspan="3">$f''(x) < 0$</td></tr>
<tr><td>Vorzeichen-wechsel von $f''(x)$</td><td colspan="3"></td><td>von + nach –</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>G_f</td><td colspan="3">ist linksgekrümmt</td><td>hat den Wendepunkt $W\ (-\frac{1}{2} \mid \frac{9}{4})$</td><td colspan="3">ist rechtsgekrümmt</td></tr>
</table>

c) $\frac{x_H + x_T}{2} = \frac{1 - 2}{2} = -\frac{1}{2} = x_W$;

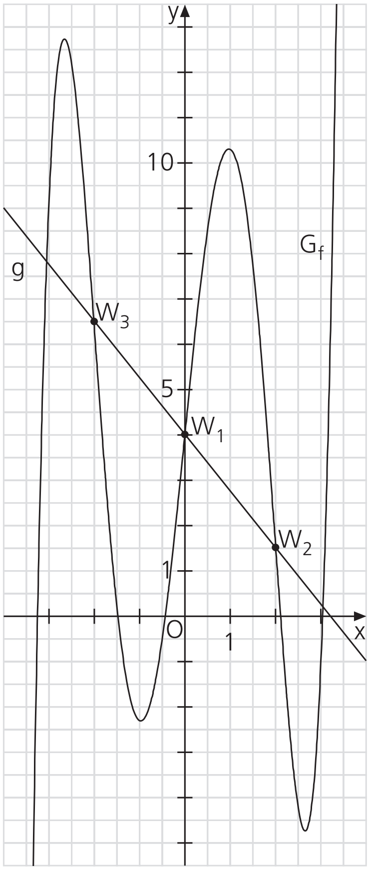
$\frac{y_H + y_T}{2} = \frac{4{,}5 + 0}{2} = \frac{9}{4} = y_W$;

W ist der Mittelpunkt der Strecke [TH].

d)



2. $f'(x) = 1{,}5x^4 - 12x^2 + 10;$
$f''(x) = 6x^3 - 24x;$ $f'''(x) = 18x^2 - 24;$
$f''(x) = 0:$ $6x(x^2 - 4) = 0;$ $x_1 = 0;$ $x_2 = 2;$ $x_3 = -2;$
$f'''(0) = -24 \neq 0;$
$f'''(2) = 48 \neq 0;$
$f'''(-2) = 48 \neq 0:$ G_f hat drei Wendepunkte:
$f(0) = 4;\ W_1\ (0 \mid 4)$
$f(2) = 9{,}6 - 32 + 20 + 4 = 1{,}6;\ \ W_2\ (2 \mid 1{,}6)$
$f(-2) = -9{,}6 + 32 - 20 + 4 = 6{,}4;\ \ W_3\ (-2 \mid 6{,}4)$
Geradengleichung:
$W_1W_2 = g:\ \ m_g = \frac{1{,}6 - 4}{2 - 0} = -1{,}2;\ \ g: y = -1{,}2x + t;$
$W_1 \in g:\ \ 4 = -1{,}2 \cdot 0 + t;\ \ t = 4;\ \ g: y = -1{,}2x + 4$
Liegt W_3 auf $g = W_1W_2$?
L.S.: 6,4; R.S.: $-\ 1{,}2 \cdot (-2) + 4 = 6{,}4$; L.S. = R.S.
Ergebnis: W_1, W_2 und W_3 liegen auf einer Geraden;
sie hat die Gleichung $y = -1{,}2x + 4$.



3. a) $f(-x) = 3(-x)^2 - |(-x)^3| = 3x^2 - |-x^3| = 3x^2 - |x^3| = f(x)$:
G_f ist symmetrisch zur y-Achse.

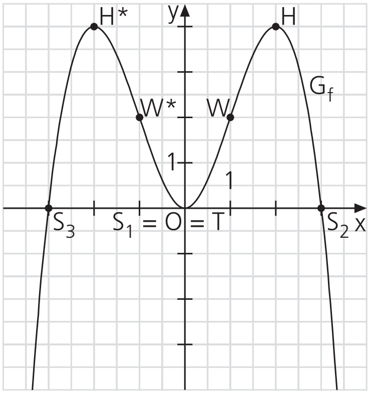
b) $f(x) = 0;$ $3x^2 - |x^3| = 0;$
$x \geqq 0:$ $3x^2 - x^3 = 0;\ \ x^2(3 - x) = 0;$
$x_1 = 0;\ x_2 = 3;$
$x < 0:$ $3x^2 + x^3 = 0;\ x^2(3 + x) = 0;\ x_3 = -3:$
G_f hat mit der x-Achse die Punkte $S_1 = O\ (0 \mid 0)$; $S_2\ (3 \mid 0)$ und $S_3\ (-3 \mid 0)$ gemeinsam.

c) Annäherung von rechts (mit $h > 0$):
$$\lim_{h \to 0+} \frac{3(0 + h)^2 - (0 + h)^3}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{3h^2 - h^3}{h} = \lim_{h \to 0+} (3h - h^2) = 0;$$
Annäherung von links (mit $h < 0$):
$$\lim_{h \to 0-} \frac{3(0 + h)^2 - |(0 + h)^3|}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{3h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0-} (3h + h^2) = 0 = \lim_{h \to 0+} (3h - h^2):$$
f ist an der Stelle $x = 0$ differenzierbar, und es ist $f'(0) = 0$.

d) Extrempunkte: $x > 0$: $f(x) = 3x^2 - x^3$; $f'(x) = 6x - 3x^2$; $f''(x) = 6 - 6x$
$f'(x) = 0$: $3x(2 - x) = 0$; $x_4 = 2$;
$f(2) = 12 - 8 = 4$; $f''(2) = -6 < 0$: Hochpunkt H (2 | 4);
dazu kommt aus Symmetriegründen der Hochpunkt H* (–2 | 4).
$x < 0$: $f(x) = 3x^2 + x^3$; $f'(x) = 6x + 3x^2 = 3x(2 + x)$

x	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(0) = 0$	$f'(x) > 0$

Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ an der Stelle $x = 0$ von – nach +:
G_f besitzt den Tiefpunkt T = O (0 | 0).
Wendepunkte:
$x > 0$: $f''(x) = 6 - 6x$; $f'''(x) = -6$; $f''(x) = 0$: $x_5 = 1$;
$f(1) = 2$; $f'''(1) = -6 \neq 0$:
G_f besitzt den Punkt W (1 | 2) und aus Symmetriegründen den Punkt W* (–1 | 2) als Wendepunkte.

e)


4. a) $f(x) = \frac{-4x + 8}{x^2} = \frac{4(2 - x)}{x^2}$
$f(2) = 0$: G_f kann nicht von Abbildung 2 dargestellt sein;
für jeden Wert von $x > 2$ ist $f(x) < 0$:
G_f kann auch nicht von Abbildung 1 dargestellt sein.
Somit wird G_f von Abbildung 3 dargestellt.

b) Für $x \to 0$ gilt $f(x) \to +\infty$: G_f besitzt eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 0$;
für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to 0$: G_f besitzt eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0$.

c) $f'(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{16}{x^3} = \frac{4(x - 4)}{x^3}$; $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$f''(x) = -\frac{8}{x^3} + \frac{48}{x^4} = \frac{8(6 - x)}{x^4}$; $D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $f'''(x) = \frac{24}{x^4} - \frac{192}{x^5}$; $D_{f'''} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Extrempunkt: $f'(x) = 0$; $x = 4$; $f''(4) = \frac{1}{16} > 0$; $f(4) = -\frac{1}{2}$: Tiefpunkt T $(4 \mid -\frac{1}{2})$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$; $x = 6$; $f'''(6) = -\frac{8}{6^4} \neq 0$; $f(6) = -\frac{4}{9}$: Wendepunkt W $(6 \mid -\frac{4}{9})$

Wendetangente: $m = f'(6) = \frac{1}{27}$; $y = \frac{1}{27}x + t$; $W \in t_W$: $-\frac{4}{9} = \frac{6}{27} + t$; $t = -\frac{2}{3}$;

t_W: $y = \frac{1}{27}x - \frac{2}{3}$

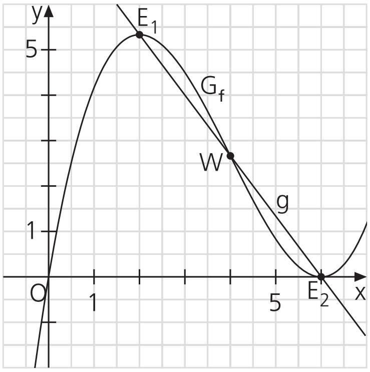
Kann ich das? – Lösungen zu Seite 150

1. a) $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 12x^2 + 36x)$;

$f'(x) = \frac{1}{6}(3x^2 - 24x + 36) = \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 12)$;

$f''(x) = \frac{1}{2}(2x - 8) = x - 4$;

$f'''(x) = 1$



Extrempunkte:

$f'(x) = 0$: $\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 12) = 0$; $| \cdot 2$

$x^2 - 8x + 12 = 0$;

$(x - 2)(x - 6) = 0$;

$x_1 = 2$; $f(2) = 5\frac{1}{3}$; $x_2 = 6$; $f(6) = 0$;

$f''(2) = 2 - 4 = -2 < 0$: G_f besitzt den Hochpunkt $E_1\ (2 \mid 5\frac{1}{3})$;

$f''(6) = 6 - 4 = 2 > 0$: G_f besitzt den Tiefpunkt $E_2\ (6 \mid 0)$

Wendepunkt:

$f''(x) = 0$: $x = 4$; $f(4) = 2\frac{2}{3}$;

$f'''(4) = 1 \neq 0$: G_f besitzt den Wendepunkt $W\ (4 \mid 2\frac{2}{3})$

Geradengleichung:

$E_1E_2 = g$: $m_g = \frac{5\frac{1}{3} - 0}{2 - 6} = \frac{\frac{16}{3}}{-4} = -\frac{4}{3}$;

g: $y = -\frac{4}{3}x + t$;

$E_2 \in g$: $0 = -\frac{4}{3} \cdot 6 + t$; $t = 8$;

$y = -\frac{4}{3}x + 8$

Liegt W auf $g = E_1E_2$?

L.S.: $2\frac{2}{3}$;

R.S.: $-\frac{4}{3} \cdot 4 + 8 = -\frac{16}{3} + 8 = 2\frac{2}{3}$;

L.S. = R.S:

E_1, E_2 und W liegen auf einer Geraden; sie hat die Gleichung $y = -\frac{4}{3}x + 8$.

b) $A(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot f(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{6}(a^2 - 12a + 36) =$

$= \frac{1}{12}(a^4 - 12a^3 + 36a^2)$;

$A'(a) = \frac{1}{12}(4a^3 - 36a^2 + 72a) = \frac{1}{3}(a^3 - 9a^2 + 18a)$;

$A''(a) = \frac{1}{3}(3a^2 - 18a + 18) = a^2 - 6a + 6$;

$A'(a) = 0$: $a(a^2 - 9a + 18) = a(a - 3)(a - 6) = 0$;

$a_1 = 0 \notin]0; 6[$: keine Lösung;

$a_2 = 3 \in]0; 6[$: $A(3) = 6\frac{3}{4}$; $A''(3) = -3 < 0$;

$a_3 = 6 \notin]0; 6[$: keine Lösung

Für $a = 3$ wird der Flächeninhalt des Dreiecks OLA maximal: $A_{max} = 6\frac{3}{4}$.

2. a) Ansatz: $f(x) = Kx(x+3)(x-3) = K(x^3 - 9x)$;

$f'(x) = K(3x^2 - 9)$;

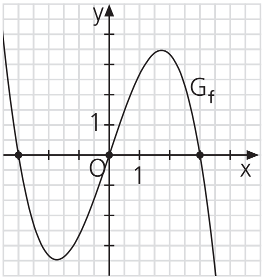
$f'(0) = -9K$;

$m_{to} = \frac{4{,}5}{1{,}5} = 3 = f'(0)$;

$-9K = 3$; $\quad K = -\frac{1}{3}$

Funktionsterm: $f(x) = -\frac{x}{3}(x^2 - 9) = -\frac{x^3}{3} + 3x$

b)



Eckpunkte:

V $(-a \mid f(-a))$, I $(a \mid f(-a))$, E $(a \mid f(a))$, R $(-a \mid f(a))$ mit $f(a) = -\frac{a^3}{3} + 3a$;

$f(-a) = \frac{a^3}{3} - 3a = -f(a)$

Flächeninhalt:

$A_{VIER} = A(a) = 2a \cdot 2f(a) = 2a \cdot 2\left(-\frac{a^3}{3} + 3a\right) = -\frac{4}{3}a^4 + 12a^2$;

$A'(a) = -\frac{16}{3}a^3 + 24a$; $\quad A''(a) = -16a^2 + 24$;

$A'(a) = 0$: $\quad -\frac{16}{3}a\left(a^2 - \frac{9}{2}\right) = 0$; $\quad 0 < a < 3$:

$a = \frac{3}{2}\sqrt{2}$;

$A''\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = -16 \cdot \frac{9}{2} + 24 = -48 < 0$:

$A\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{81}{4} + 12 \cdot \frac{9}{2} = -27 + 54 = 27$ ist das Maximum von A_{VIER}.

3. Rechnung in Maßzahlen (Einheit mm, mm² bzw mm³):

$A = 2r\pi h + 4r^2\pi$;

$4r^2\pi + 2r\pi h = 250$;

$h = \frac{250 - 4r^2\pi}{2r\pi}$

Volumen des Zylinders:

$V_Z = r^2\pi h$;

$V_Z(r) = \frac{(250 - 4r^2\pi)r^2\pi}{2r\pi} = \frac{r}{2}(250 - 4r^2\pi) = 125r - 2r^3\pi$;

$V_Z'(r) = 125 - 6r^2\pi$;

$V_Z''(r) = -12r\pi < 0$ wegen $r > 0$

$V_Z'(r) = 0$: $6r^2\pi = 125$;

$r^2 = \frac{125}{6\pi}$;

$r = \sqrt{\frac{125}{6\pi}} \approx 2{,}58$;

$$h = \frac{250 - 4 \cdot \frac{125}{6\pi} \cdot \pi}{2\pi\sqrt{\frac{125}{6\pi}}} = \frac{\frac{500}{3}}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{125}{6\pi}}} \approx 10{,}30$$

Gesamtvolumen der Kapsel:

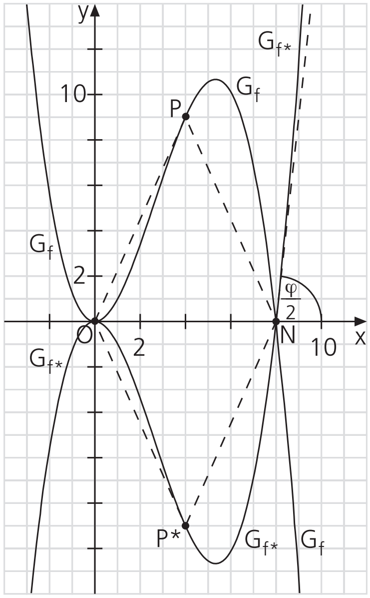
$V_K \approx 2{,}58^2\pi \cdot 10{,}30 + \frac{4}{3} \cdot 2{,}58^3 \cdot \pi \approx 286{,}1$:

Mit $r_0 \approx 2{,}58$ mm und $h_0 \approx 10{,}30$ mm (die optimale Kapsel ist also etwa $1\frac{1}{2}$ cm lang und $\frac{1}{2}$ cm breit) ergibt sich ein Kapselvolumen von etwa 286 mm³.

4. **a)** $f(x) = ax^2(x-8)$;
$f(4) = 9$; $16a \cdot (-4) = 9$; $a = -\frac{9}{64}$;
$f(x) = -\frac{9}{64}x^2(x-8) = -\frac{9}{64}(x^3 - 8x^2)$

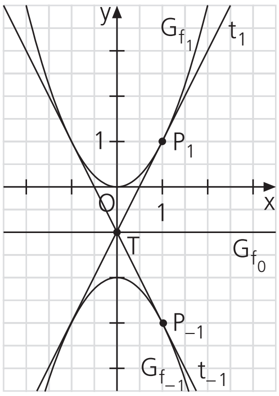
b) $f^*(x) = -f(x) = \frac{9}{64}x^2(x-8) = \frac{9}{64}(x^3 - 8x^2)$;
$f^{*\prime}(x) = \frac{9}{64}(3x^2 - 16x)$;
$f^{*\prime}(8) = \frac{9}{64}(3 \cdot 64 - 16 \cdot 8) = 9$;
$\tan\frac{\varphi}{2} = 9$; $\frac{\varphi}{2} = 83{,}65\ldots°$; $\varphi \approx 167°$

c) O (0 | 0), P (4 | 9), N (8 | 0), P* (4 | –9);
$\overline{PO} = \overline{OP^*} = \sqrt{97}$;
$\overline{NP} = \overline{P^*N} = \sqrt{(8-4)^2 + (0-9)^2} = \sqrt{97}$:
Das Viereck ist eine Raute.
Ihre Seiten haben alle die gleiche Länge $\sqrt{97} \approx 9{,}8$; sie besitzt die x-Achse sowie die Gerade mit der Gleichung x = 4 als Symmetrieachsen; zwei ihrer Innenwinkel haben etwa die Größe 132°, die anderen beiden etwa die Größe 48°.
$U = 4 \cdot \overline{PO} = 4 \cdot \sqrt{97} \approx 39{,}4$;
$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{ON} \cdot \overline{PP^*} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 18 = 72$



5. **a)** Die Graphen sind für $k \neq 0$ Parabeln mit dem Scheitel S (0 | k – 1); für k = 0 ergibt sich eine zur x-Achse parallele Gerade mit der Gleichung y = –1.

b)



c) P (1 | 2k – 1)
$f_k'(x) = 2kx$; $f_k'(1) = 2k$;
t_k: $y = 2kx + t$;
$P \in t_k$: $2k - 1 = 2k + t$; $t = -1$;
t_k: $y = 2kx - 1$; daraus folgt, dass t_k für jeden Wert von k den gleichen y-Achsenabschnitt –1 hat, also durch T (0 | –1) verläuft.

d) $kx^2 + k - 1 = 0$; $0 < k < 1$:
$x^2 = \frac{1-k}{k}$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1-k}{k}}$;
$\overline{N_1N_2} = 2\sqrt{\frac{1-k}{k}} = 2$; $\frac{1-k}{k} = 1$;
$1 - k = k$; $2k = 1$; $k = \frac{1}{2}$