K4/5 **1 a)** $f(x) = g(x)$

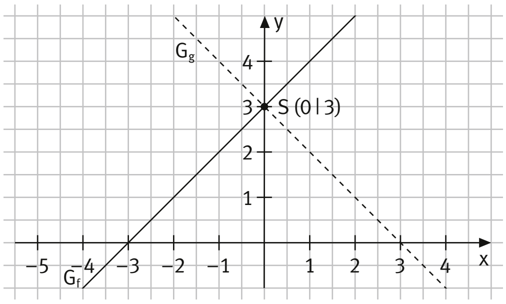
$x + 3 = 3 - x \quad | + x - 3$

$2x = 0 \quad | : 2$

$x = 0$

$x = 0$ in einen Funktionsterm eingesetzt:
$f(0) = 3 \Rightarrow S(0|3)$

Probe: $g(0) = 3$



b) $f(x) = g(x)$

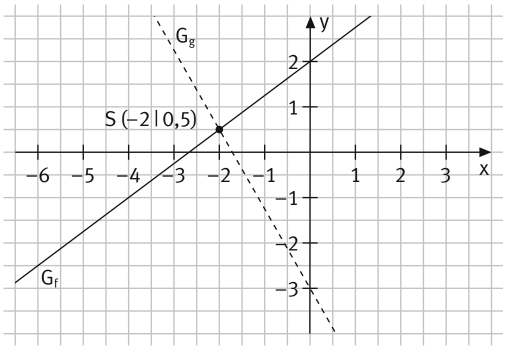
$\frac{3}{4}x + 2 = -\frac{7}{4}x - 3 \quad | + \frac{7}{4}x - 2$

$\frac{10}{4}x = -5 \quad | : \frac{10}{4}$

$x = -2$

$x = -2$ in einen Funktionsterm eingesetzt:
$f(-2) = \frac{3}{4} \cdot (-2) + 2 = -0{,}5$
$\Rightarrow S(-2|0{,}5)$

Probe: $g(-2) = 0{,}5$



c) $f(x) = g(x)$

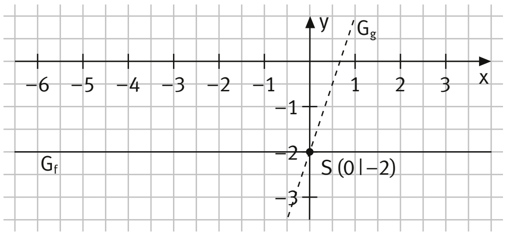
$-2 = 3x - 2 \quad | + 2$

$0 = 3x \quad | : 3$

$x = 0$

$x = 0$ in einen Funktionsterm eingesetzt: $f(0) = -2 \Rightarrow S(0|-2)$

Probe: $g(0) = -2$



K5 **2 a)** ① I: $x + 4y = 2$
II: $2x = 3 - 4y \Rightarrow$ II': $2x + 4y = 3$
II' − I: $x = 1$
in I: $1 + 4y = 2 \Rightarrow y = 0{,}25$
$L = \{(1|0{,}25)\}$

② I: $2x + y = 2 - 4x \Rightarrow$ I': $y = 2 - 6x$
II: $3x - 2y = 5$
I' in II:
$3x - 2(2 - 6x) = 5$
$3x - 4 + 12x = 5$
$15x = 9$
$x = 0{,}6$
in I': $y = 2 - 6 \cdot 0{,}6 = -1{,}6$
$L = \{(0{,}6|-1{,}6)\}$

③ I: $-2x = 2 + 4y$
II: $x - 2y = 4 \Rightarrow$ II': $x = 4 + 2y$
II' in I:
$-2(4 + 2y) = 2 + 4y$
$-8 - 4y = 2 + 4y$
$-10 = 8y$
$y = -1{,}25$
in II': $x = 4 + 2 \cdot (-1{,}25) = 1{,}5$
$L = \{(1{,}5|-1{,}25)\}$

④ I: $2(3x - 2y) = -5 \Rightarrow$ I': $6x - 4y = -5$
II: $4x = 3 + y \Rightarrow$ II': $y = 4x - 3$
II' in I':
$6x - 4(4x - 3) = -5$
$6x - 16x + 12 = -5$
$10x = 17$
$x = 1{,}7$
in II': $y = 4 \cdot 1{,}7 - 3 = 3{,}8$
$L = \{(1{,}7|3{,}8)\}$

5 I: $1{,}5x - 2{,}5y = 3$
II: $x - y = 1 \Rightarrow$ II': $x = 1 + y$
II' in I: $1{,}5(1 + y) - 2{,}5y = 3$
$1{,}5 + 1{,}5y - 2{,}5y = 3$
$-1{,}5 = y$
in II': $x = 1 - 1{,}5 = -0{,}5$
$L = \{(-0{,}5 \mid -1{,}5)\}$

6 I: $2{,}5x - 3y = 5 \Rightarrow$ I': $5x - 6y = 10$
II: $2x = 2{,}4y + 4 \Rightarrow$ II': $5x - 6y = 10$
$L = \left\{(x \mid y) \,\middle|\, y = \frac{5}{6}x - \frac{5}{3}\right\}$

7 I: $2x = 3 - y \Rightarrow$ I': $y = 3 - 2x$
II: $5x + 1 = 2{,}5y$
I' in II: $5x + 1 = 2{,}5(3 - 2x)$
$5x + 1 = 7{,}5 - 5x$
$10x = 6{,}5$
$x = 0{,}65$
in I': $y = 3 - 2 \cdot 0{,}65 = 3 - 1{,}3 = 1{,}7$
$L = \{(0{,}65 \mid 1{,}7)\}$

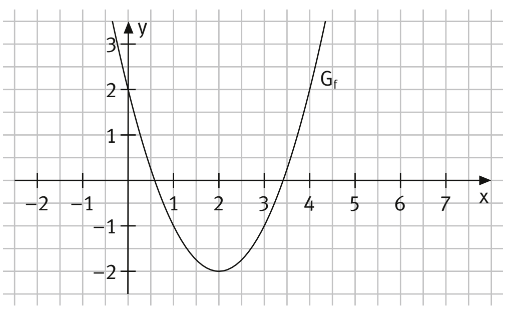
8 I: $2{,}2y + 3 = 1{,}6x \Rightarrow$ I': $11y + 15 = 8x$
$2{,}4x - 1{,}2y = 4{,}5 \Rightarrow$ II': $y = 2x - 3{,}75$
II' in I': $11(2x - 3{,}75) + 15 = 8x$
$22x - 41{,}25 + 15 = 8x$
$14x = 26{,}25$
$x = \frac{15}{8}$
in II': $y = 2 \cdot \frac{15}{8} - 3{,}75 = 0$
$L = \left\{\left(\frac{15}{8} \,\middle|\, 0\right)\right\}$

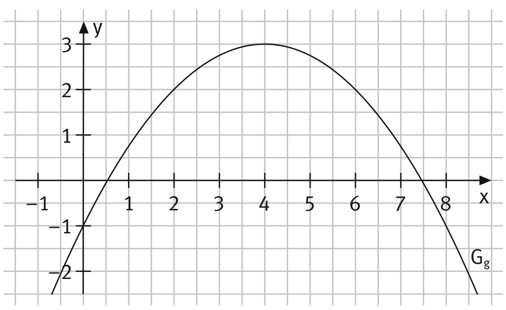
b) 1 Die Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.
2 Die Geraden verlaufen parallel zueinander.
3 Die Geraden sind identisch.

K4/5 **3 a)** **$f: x \mapsto x^2 - 4x + 2$**
$f(x) = 0$
$x^2 - 4x + 2 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} \Rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{2}$ und $x_2 = 2 + \sqrt{2}$
Der Scheitel ist der tiefste Punkt, da $a = 1 > 0$ gilt.
$g: x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$
$g(x) = 0$
$-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-1)}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 1}}{-\frac{1}{2}} = -2 \cdot \left(-2 \pm \sqrt{3}\right)$
$x_1 = 4 - 2\sqrt{3}$ und $x_2 = 4 + 2\sqrt{3}$
Der Scheitel ist der höchste Punkt, da $a = -\frac{1}{4} < 0$ gilt.

b) $f(x) = x^2 - 4x + 2 = x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 2$
$= (x - 2)^2 - 4 + 2 = (x - 2)^2 - 2$
$\Rightarrow S(2 \mid -2)$

$g(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 8x) - 1 = -\frac{1}{4}\left[x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2\right] - 1$
$= -\frac{1}{4}\left[(x - 4)^2 - 4^2\right] - 1 = -\frac{1}{4}(x - 4)^2 + 4 - 1$
$= -\frac{1}{4}(x - 4)^2 + 3 \Rightarrow S(4 \mid 3)$

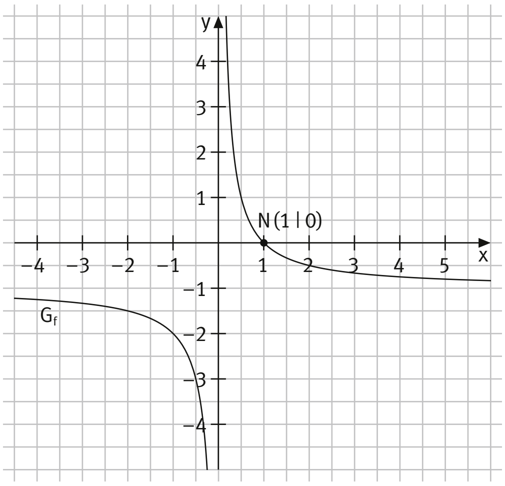




K 4/5 **4** **a)** f: $x \mapsto \frac{1}{x} - 1$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

G_f besitzt keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

$$f(x) = 0$$
$$\frac{1}{x} - 1 = 0 \quad | + 1$$
$$\frac{1}{x} = 1 \quad | \cdot x$$
$$1 = x \;\Rightarrow\; N(1|0)$$

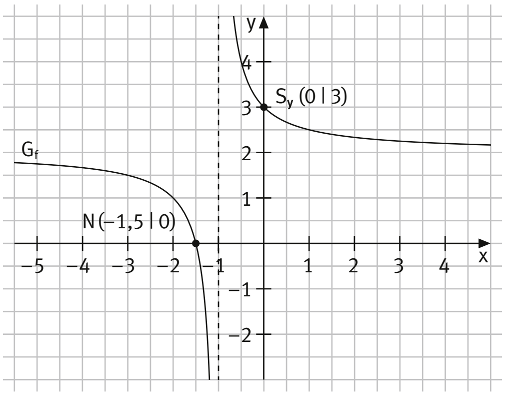


b) f: $x \mapsto \frac{1}{x+1} + 2$

$x + 1 = 0$ für $x = -1 \;\Rightarrow\; D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$f(0) = \frac{1}{0+1} + 2 = \frac{1}{1} + 2 = 1 + 2 = 3 \;\Rightarrow\; S_y(0|3)$

$$f(x) = 0$$
$$\frac{1}{x+1} + 2 = 0$$
$$\frac{1}{x+1} + \frac{2\cdot(x+1)}{x+1} = 0 \quad | \cdot (x+1)$$
$$1 + 2x + 2 = 0$$
$$2x + 3 = 0 \quad | - 3$$
$$2x = -3 \quad | : 2$$
$$x = -\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; N(-1{,}5|0)$$

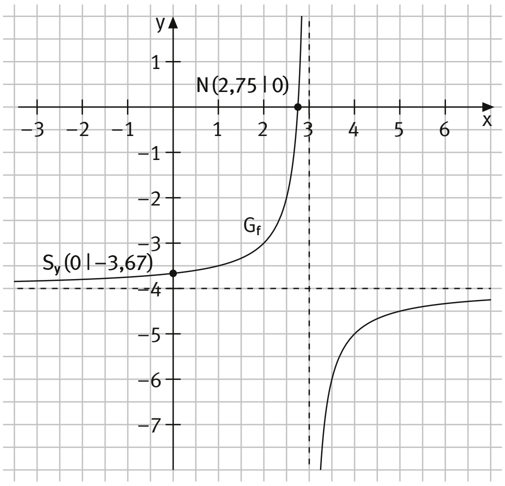


c) f: $x \mapsto \frac{1}{3-x} - 4$

$3 - x = 0$ für $x = 3 \;\Rightarrow\; D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

$f(0) = \frac{1}{3-0} - 4 = \frac{1}{3} - 4 = -3\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; S_y\left(0\middle|-3\frac{2}{3}\right)$

$$f(x) = 0$$
$$\frac{1}{3-x} - 4 = 0 \quad | + 4$$
$$\frac{1}{3-x} = 4 \quad | \cdot (3-x)$$
$$1 = 4\cdot(3-x)$$
$$1 = 12 - 4x \quad | + 4x - 1$$
$$4x = 11 \quad | : 4$$
$$x = \frac{11}{4} \;\Rightarrow\; N(2{,}75|0)$$

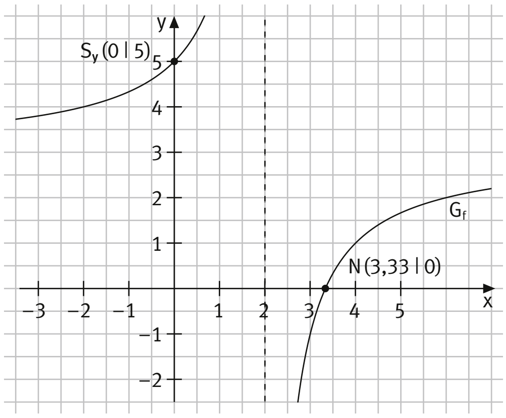


d) $f\colon x \mapsto -\frac{4}{x-2} + 3$

$x - 2 = 0$ für $x = 2 \;\Rightarrow\; D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$f(0) \;= -\frac{4}{0-2} + 3 = 2 + 3 = 5 \;\Rightarrow\; S_y(0|5)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
-\frac{4}{x-2} + 3 &= 0 && \Big| + \frac{4}{x-2} \\
3 &= \frac{4}{x-2} && |\cdot(x-2) \\
3(x-2) &= 4 \\
3x - 6 &= 4 && |+6 \\
3x &= 10 && |:3 \\
x &= \frac{10}{3} \;\Rightarrow\; N\left(3\tfrac{1}{3}\middle|0\right)
\end{aligned}
$$

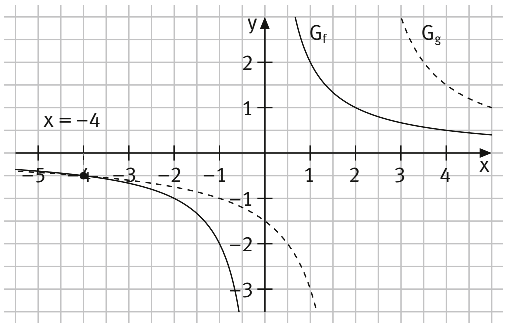


K4/5 **5** **a)** $\frac{6}{3x} = \frac{3}{x-2}$

$3x = 0$ für $x = 0$ und $x - 2 = 0$ für $x = 2$

$\Rightarrow \; D = \mathbb{R}\setminus\{0;\,2\}$

$$
\begin{aligned}
6(x-2) &= 3\cdot 3x \\
6x - 12 &= 9x && |-6x \\
-12 &= 3x && |:3 \\
-4 &= x \\
L &= \{-4\}
\end{aligned}
$$

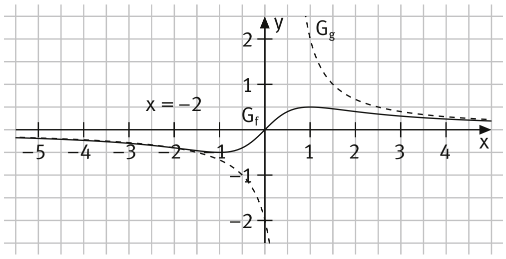


b) $\frac{x}{x^2+1} = \frac{2}{2x-1}$

$x^2 + 1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

und $2x - 1 = 0$ für $x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; D = \mathbb{R}\setminus\{0{,}5\}$

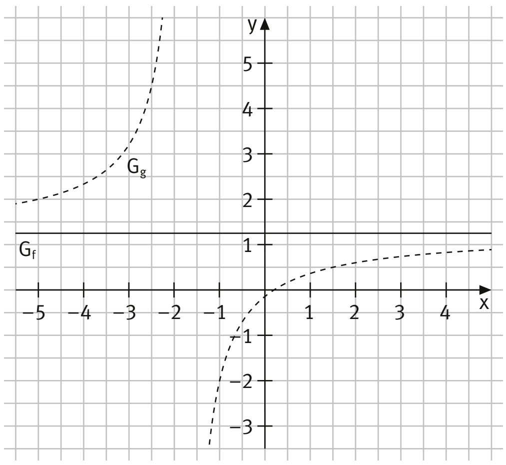
$$
\begin{aligned}
x(2x-1) &= 2(x^2+1) \\
2x^2 - x &= 2x^2 + 2 && |-2x^2 \\
-x &= 2 \\
L &= \{-2\}
\end{aligned}
$$



c) $2{,}5 = \frac{5x-2}{7+2x}$

$7 + 2x = 0$ für $x = -3{,}5 \;\Rightarrow\; D = \mathbb{R}\setminus\{-3{,}5\}$

$$
\begin{aligned}
2{,}5(7+2x) &= 5x - 2 \\
17{,}5 + 5x &= 5x - 2 && |-5x \\
17{,}5 &= -2 \\
L &= \{\,\}
\end{aligned}
$$



d) $x\left(4-\frac{8}{4x+1}\right)=0$

$4x+1=0$ für $x=-\frac{1}{4} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{4}\right\}$

Ein Produkt hat den Wert null, wenn einer der Faktoren den Wert null besitzt.

1 $x_1 = 0$

2 $4-\frac{8}{4x+1}=0 \quad \left| +\frac{8}{4x+1}\right.$

$4=\frac{8}{4x+1} \quad |:4$

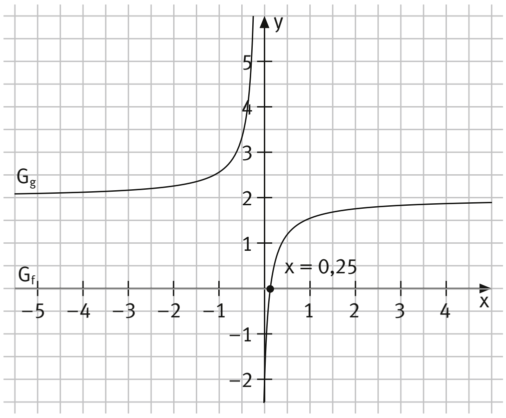
$1=\frac{2}{4x+1} \quad |\cdot(4x+1)$

$4x+1=2 \quad |-1$

$4x=1$

$x_2=\frac{1}{4}$

$L=\left\{0;\frac{1}{4}\right\}$



K 1/6 **6** **a)** Die Aussage ist falsch, denn z. B. schneiden sich die Geraden $g_1: x \mapsto x$ und $g_2: x \mapsto -x$ im Punkt $S(0|0)$.

b) Die Aussage ist falsch. Wenn die Parabel nach unten geöffnet ist ($a < 0$), besitzt die Funktion keine Nullstelle. Beispiel: $f: x \mapsto -(x-1)^2-1$.

c) Die Aussage ist richtig, denn $\sqrt{D}$ (D: Diskriminante) ist nicht definiert und $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ ist nicht lösbar.

d) Die Aussage ist richtig, denn die Gleichung $\frac{1}{x^2+1}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 1=0$ besitzt eine leere Lösungsmenge.

3 Quadratische Funktionen in Anwendungen

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:

Zunächst werden die Schülerinnen und Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülerinnen und Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schülerinnen und Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K6
- Wenn für die Flugbahn des Delfins ein quadratischer Funktionsterm gegeben ist, kann man die Nullstellen berechnen. Deren Abstand ist die Sprungweite, wenn die x-Achse auf Höhe des Wasserspiegels verläuft.

K6
- Der Scheitelpunkt der nach unten geöffneten Parabel markiert den höchsten Punkt, den der Delfin erreicht. Die y-Koordinate des Scheitels ist die Sprunghöhe.

K6
- Um den Term einer quadratischen Funktion angeben zu können, muss man drei Punkte auf ihrem Graphen kennen. Sofern der Scheitelpunkt der Funktion gegeben ist, genügt ein weiterer Punkt.

Ausblick

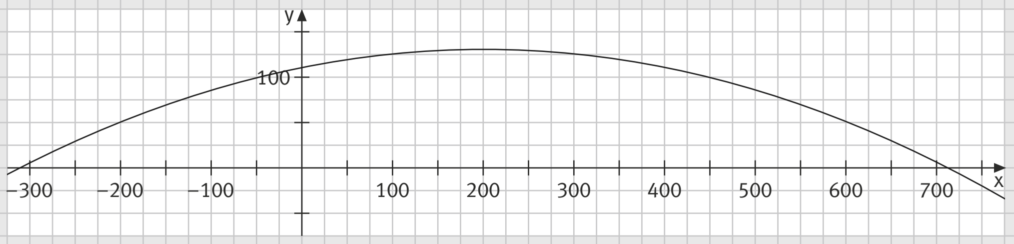
Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schülerinnen und Schüler sowie Lehrkräfte. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schülerinnen und Schüler sowie Lehrkräfte auf das Kommende einstellen.

Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Kap. 3.1

Gold im Weitsprung

K3/5
- Aus den Angaben im Text entnommene Koordinaten dreier Punkte auf der Flugbahn:
  A (0 | 110), B (100 | 125), C (702 | 4)
  Funktionsgleichung: $y = ax^2 + bx + c$
  Einsetzen der Koordinaten der Punkte A, B und C ergibt das lineare Gleichungssystem:
  I: $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 110 \;\Rightarrow\; c = 110$
  II: $a \cdot 100^2 + b \cdot 100 + c = 125 \;\Rightarrow\; 10\,000a + 100b = 15$ $\qquad b = 0{,}15 - 100a$
  III: $a \cdot 702^2 + b \cdot 702 + c = 4 \;\Rightarrow\; 492\,804a + 702b = -106$ $\qquad 422\,604a = -106 - 105{,}3$
  $a \approx -0{,}0005$
  Die Lösungen sind $a \approx -0{,}0005$, $b = 0{,}2$ und $c = 110$. Damit erhält man die Funktionsgleichung der Flugbahn: $y = -0{,}0005x^2 + 0{,}2x + 110$.

K4
- 

  Sinnvolle Definitionsmenge: D = [0; 702]

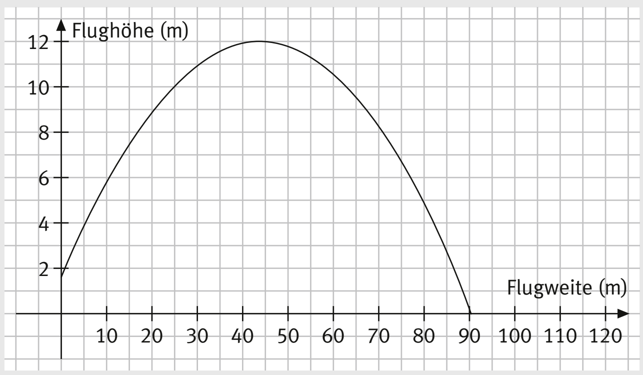
K3/5
- Der Körperschwerpunkt erreicht seinen höchsten Punkt am Scheitelpunkt der Parabel, die die Flugbahn beschreibt. Umwandlung des Funktionsterms in die Scheitelpunktform:
  $y = -0{,}0005\,(x - 200)^2 + 130 \;\Rightarrow\;$ Scheitelpunkt S (200 | 130)
  In 2 m Entfernung vom Absprungpunkt erreicht der Schwerpunkt seine größte Höhe von 1,3 m.

K3/5
- $-0{,}0005x^2 + 0{,}2x + 110 = 50$ hat zwei Lösungen: $x_1 = -200$, $x_2 = 600$. Die negative Lösung kommt wegen D = [0; 702] nicht in Frage. Der Körperschwerpunkt befand sich also 6 m vom Absprung entfernt in 50 cm Höhe über dem Boden.

K1/2
- Mit der Gleichung $-0{,}0005x^2 + 0{,}2x + 110 = 120$ berechnet man $x_1 = 200 + 100\sqrt{2} \approx 341{,}42$ und $x_2 = 200 - 100\sqrt{2} \approx 58{,}58$. Das heißt, dass sich der Schwerpunkt über eine Länge von 2,82 m weit höher als 1,2 m befand. Brittney hätte das 2 m lange Hindernis also überspringen können.

Kap. 3.1 und 3.2

Speerwurf – Lernen von Profisportlern



K3/4
- Abwurfhöhe a = Schulterhöhe:
  $a = 0{,}85 \cdot 1{,}91\text{ m} = 1{,}62\text{ m}$

K3/6
- Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse: Abwurfpunkt
  Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse: Landeort des Speers

K3/4
- Mithilfe des Graphen der Flugbahn ergibt sich eine maximale Flughöhe (am Scheitelpunkt) von ungefähr 12 m.

K5/6
- Um die Wurfhöhe am Scheitelpunkt zu berechnen, bräuchte man den Funktionsterm der Wurfparabel. Diesen könnte man ermitteln, wenn neben dem Abwurfpunkt und Landeort noch ein weiterer Punkt auf der Flugbahn des Speers bekannt wäre. Mithilfe der drei Punkte kann ein lineares Gleichungssystem aufgestellt und eine Funktionsgleichung ermittelt werden.

Kap. 3.1 und 3.2

Kann man rechtzeitig bremsen?

K6
- Individuelle Ergebnisse. Die (vereinfacht als konstant angenommene) Bremsverzögerung hängt von vielen Faktoren ab, z. B. den technischen Gegebenheiten des Fahrzeugs (Masse, Bremsen, Zustand der Reifen u. a.), der Art und Beschaffenheit des Straßenbelags und den Witterungsbedingungen (trocken, nass, Schnee, Eis).
  Die Reaktionszeit t_R hängt von der Situation und der Fahrerin oder dem Fahrer ab. Dabei können z. B. Müdigkeit, Ablenkung, Umgebung und die Sichtverhältnisse eine Rolle spielen.

K4/6
- „Der Anhalteweg ist umso länger, je größer v und je kleiner der Betrag von a ist.“

K5/6
- In diesem Fall genügen zwei Wertepaare zur eindeutigen Bestimmung der Funktionsgleichung, da nur die beiden Variablen t_R und a ermittelt werden müssen.

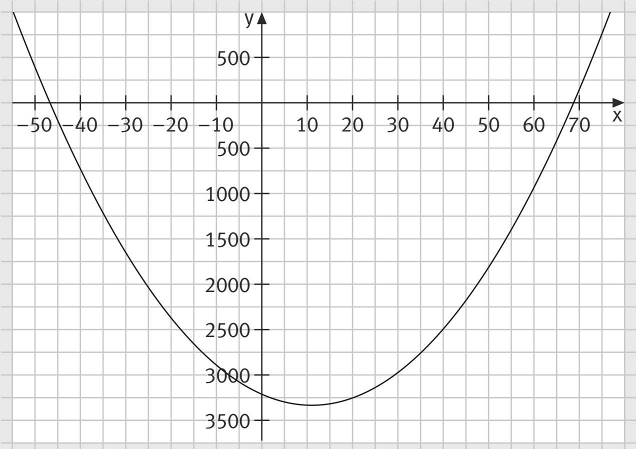
K3/5
- Beachte, dass der Betrag von a in der Rechnung verwendet wird:
  $$x_A = t_R \cdot v + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{a} = 2\,\text{s} \cdot \frac{90\,\text{m}}{3{,}6\,\text{s}} + \frac{1}{2 \cdot 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot \left(\frac{90\,\text{m}}{3{,}6\,\text{s}}\right)^2 = 154{,}1\overline{6}\,\text{m}$$
  Das Reh müsste mehr als 154,2 m vom Auto entfernt sein, wenn das Auto noch vor dem Reh zum Stehen kommen soll.

Kap. 3.3

Angepasste Geschwindigkeiten

K2/3
- Angaben: $s = 73$ km, $t_H + \frac{1}{2}\,\text{h} = t_R$, $v_H - 22$ km/h $= v_R$
  Allgemein: $v = \frac{s}{t}$, $t = \frac{s}{v}$, also gilt ohne Einheiten und mit $v = v_H$:
  $\frac{s}{v} + 0{,}5 = \frac{s}{v - 22}$

K3/4
- Umgeformte Gleichung: $v^2 - 22v - 44 \cdot 73 = 0 \;\Leftrightarrow\; v^2 - 22v - 3212 = 0$



  Lösungen: ≈ −47 (nicht sinnvoll) und ≈ 69
  Die Durchschnittsgeschwindigkeit auf der Hinfahrt beträgt ungefähr 69 km/h.

K3/5
- $\frac{s}{v_R} = \frac{s}{v_R + 22} + 0{,}5$ bzw. (mit s = 73 [km]) $\frac{73}{v_R} = \frac{73}{v_R + 22} + 0{,}5$. Dies führt auf die quadratische Gleichung $v_R^2 + 22v_R - 3212 = 0$ mit den Lösungen $v_{R1} \approx -68{,}7$ (nicht sinnvoll) und $v_{R2} \approx 46{,}7$.
  Die Durchschnittsgeschwindigkeit auf der Rückfahrt beträgt ungefähr 46,7 km/h.

Alternativer Einstieg: Schulbuch Seite 76 und 77

Entdecken

K2/5
- Aus dem Text ergibt sich, dass die Punkte A (0| 0), B (24|84) und C (72|180) auf dem Parabelbogen liegen, sofern man den Ursprung des Koordinatensystems in den linken Fußpunkt des Bogens legt.
  Allgemeine Form der Parabelgleichung: $y = ax^2 + bx + c$
  A (0|0) $\Rightarrow$ I: $0 = 0^2 \cdot a + 0 \cdot b + c \Rightarrow c = 0$
  B (24|84) $\Rightarrow$ II: $84 = 24^2 \cdot a + 24 \cdot b + c$
  C (72|180) $\Rightarrow$ III: $180 = 72^2 \cdot a + 72 \cdot b + c$
  II': $84 = 576a + 24b \Rightarrow b = 3{,}5 - 24a$
  III': $180 = 5184a + 72b$
  II' in III' einsetzen: $180 = 5184a + 72 \cdot (3{,}5 - 24a)$
  $180 = 5184a + 252 - 1728a \quad | -252$
  $-72 = 3456a \quad | : 3456$
  $a = -\frac{1}{48}$
  in II' einsetzen: $b = 3{,}5 - 24 \cdot \left(-\frac{1}{48}\right) = 4$
  $\Rightarrow y = -\frac{1}{48}x^2 + 4x$

K3/5
- $y = -\frac{1}{48}x(x - 192) \Rightarrow$ Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 192$
  $\Rightarrow x_S = \frac{0 + 192}{2} = 96$
  $\Rightarrow y_S = -\frac{1}{48} \cdot 96^2 + 4 \cdot 96 = 192$
  Die Aussichtsplattform befindet sich einer Höhe von 192 m.

Nachgefragt

K5/6
- Man betrachtet die Koeffizienten und eliminiert dann zunächst diejenige Variable, die die „einfachsten“ Koeffizienten besitzt (z. B. gleiche oder betragsgleiche Koeffizienten bzw. Koeffizient mit einem kleinen Wert für das kgV).

K1/6
- Ja; z. B. I: $x + y + z = 0$ II: $2x + 2y + 2z = 6$ III: $x + 3y + 4z = 10$

Aufgaben

K5
1 **a)** $x = 1$; $y = 2 \cdot 1 = 2$; $z = 5 \cdot 1 = 5$; $L = \{(1; 2; 5)\}$
b) $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $y_1 = y_2 = 0{,}5 \cdot 4 = 2$; $z_1 = 2 + 2 = 4$; $z_2 = -2 + 2 = 0$; $L = \{(2; 2; 4); (-2; 2; 0)\}$
c) $y = 144 : 9 = 16$; $x = 16 + 2 = 18$; $z = 18 + 3 \cdot 16 = 66$; $L = \{(18; 16; 66)\}$
d) $x = -2$; $y = 2$; $z = 0$; $L = \{(-2; 2; 0)\}$
e) $y = z = 4$; $x = 5 - 4 = 1$; $L = \{(1; 4; 4)\}$
f) $x = 5$; $y = 7 - 10 = -3$; $z = (5 - 3) : 2 = 1$; $L = \{(5; -3; 1)\}$
g) $z = -12 : 3 = -4$; $y = 0{,}75 \cdot (-4) = -3$; $x = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-4) = -6 - 12 = -18$; $L = \{(-18; -3; -4)\}$
h) $x = 1$; $y = 4$; $z = 4$; $L = \{(1; 4; 4)\}$

K5/6

2 **a)** I: $6x + y - 3z = 9$
II: $2x + 2y - z = 3$
III: $5x - 4y - 4z = 0$

II': $z = 2x + 2y - 3$
I': $6x + y - 3(2x + 2y - 3) = 9 \Rightarrow y = 0$
III': $5x - 4y - 4(2x + 2y - 3) = 0$
$\Rightarrow -3x - 12y + 12 = 0$

I' in III': $-3x + 12 = 0 \Rightarrow x = 4$
in II': $z = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0 - 3 = 5$

$L = \{(4; 0; 5)\}$

Probe:
I: $24 + 0 - 15 = 9$ ✓
II: $8 + 0 - 5 = 3$ ✓
III: $20 - 0 - 20 = 0$ ✓

b) I: $x + y + z = 12$
II: $x - y + z = 4$
III: $x - y - z = -6$

II': $y = x + z - 4$
I': $x + (x + z - 4) + z = 12 \Rightarrow x = 8 - z$
III': $x - (x + z - 4) - z = -6 \Rightarrow z = 5$

III' in I': $x = 8 - 5 = 3$
in II': $y = 3 + 5 - 4 = 4$
$L = \{(3; 4; 5)\}$

Probe:
I: $3 + 4 + 5 = 12$ ✓
II: $3 - 4 + 5 = 4$ ✓
III: $3 - 4 - 5 = -6$ ✓

c) I: $2x - 2y + 3z = 18$
II: $5x - y - z = 3$
III: $12x + 4y - 2z = -4$

II': $z = 5x - y - 3$
I': $2x - 2y + 3(5x - y - 3) = 18$
$\Rightarrow 17x - 5y = 27$
III': $12x + 4y - 2(5x - y - 3) = -4$
$\Rightarrow x = -5 - 3y$

III' in I': $17(-5 - 3y) - 5y = 27 \Leftrightarrow y = -2$
in III': $x = -5 - 3 \cdot (-2) = 1$
in II': $z = 5 \cdot 1 - (-2) - 3 = 4$

$L = \{(1; -2; 4)\}$

Probe:
I: $2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 = 2 + 4 + 12 = 18$ ✓
II: $5 \cdot 1 - (-2) - 4 = 5 + 2 - 4 = 3$ ✓
III: $12 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) - 2 \cdot 4 = 12 - 8 - 8 = -4$ ✓

Erläuterung individuell nach Lösungsweg

d) I: $3x - 2y + 3z = -13$
II: $x - 3y - 4z = 13$
III: $x - 2y + z = -3$

III': $x = 2y - z - 3$
I': $3(2y - z - 3) - 2y + 3z = -13 \Rightarrow y = -1$
II': $2y - z - 3 - 3y = 13 + 4z \Rightarrow y + 5z + 16 = 0$

I' in II': $-1 + 5z + 16 = 0 \Rightarrow z = -3$
in III': $x = 2 \cdot (-1) - (-3) - 3 = -2$

$L = \{(-2; -1; -3)\}$

Probe:
I: $3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) = -6 + 2 - 9$
$= -13$ ✓
II: $-2 - 3 \cdot (-1) - 4 \cdot (-3) = -2 + 3 + 12 = 13$ ✓
III: $-2 - 2 \cdot (-1) - 3 = -2 + 2 - 3 = -3$ ✓

Erläuterung individuell nach Lösungsweg

e) I: $7x - 6y + 4z = 5$
II: $4x + 3y = 7$
III: $2x - 3z = -1$

II': $y = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}x$
III': $z = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
in I: $7x - 6\left(\frac{7}{3} - \frac{4}{3}x\right) + 4\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 5$
$\Leftrightarrow\ 7x - 14 + 8x + \frac{8}{3}x + \frac{4}{3} = 5$
$\Leftrightarrow\ 17\frac{2}{3}x = 17\frac{2}{3} \ \Rightarrow\ x = 1$
in II': $y = \frac{7}{3} - \frac{4}{3} \cdot 1 = 1$
in III': $z = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} = 1$
$L = \{(1; 1; 1)\}$

Probe:
I: $7 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 5$ ✓
II: $4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 7$ ✓
III: $2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -1$ ✓

f) I: $-6x + 4y - 3z = -2$
II: $1{,}5x - 3y + 1{,}5z = -1$
III: $x - 2y + 2z = 0 \ \Rightarrow\ x = 2y - 2z$

I': $-6(2y - 2z) + 4y - 3z = -2 \ \Rightarrow\ -8y + 9z = -2$
II': $1{,}5(2y - 2z) - 3y + 1{,}5z = -1 \ \Rightarrow\ z = \frac{2}{3}$
in I': $-8y + 9 \cdot \frac{2}{3} = -2 \ \Rightarrow\ y = 1$
in III: $x = 2 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{2}{3} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$
$L = \left\{\left(\frac{2}{3}; 1; \frac{2}{3}\right)\right\}$

Probe:
I: $-6 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{2}{3} = -4 + 4 - 2 = -2$ ✓
II: $1{,}5 \cdot \frac{2}{3} - 3 \cdot 1 + 1{,}5 \cdot \frac{2}{3} = 1 - 3 + 1 = -1$ ✓
III: $\frac{2}{3} - 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - 2 + \frac{4}{3} = 0$ ✓

g) I: $x + 2y = 1$
II: $y + 3z = 6$
III: $2x + z = 4$

I': $x = 1 - 2y$
II': $y = 6 - 3z$
III': $2 \cdot (1 - 2y) + z = 4 \ \Rightarrow\ z = 2 + 4y$
in II': $y = 6 - 3(2 + 4y) \ \Rightarrow\ y = 0$
in III': $z = 2 + 4 \cdot 0 = 2$
in I': $x = 1 - 2 \cdot 0 = 1$
$L = \{(1; 0; 2)\}$

Probe:
I: $1 + 2 \cdot 0 = 1$ ✓
II: $0 + 3 \cdot 2 = 6$ ✓
III: $2 \cdot 1 + 2 = 4$ ✓

h) I: $-3x - 4y - 5z = 1$
II: $3x - 4y + 4z = 1$
III: $-3x - 2z = -3$

III': $z = 1{,}5 - 1{,}5x$
I': $-3x - 4y - 5(1{,}5 - 1{,}5x) = 1$
$\Rightarrow\ 4{,}5x - 4y = 8{,}5$
II': $3x - 4y + 4(1{,}5 - 1{,}5x) = 1 \ \Rightarrow\ x = \frac{5}{3} - \frac{4}{3}y$
in I': $4{,}5\left(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}y\right) - 4y = 8{,}5 \ \Rightarrow\ y = -0{,}1$
in II': $x = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} \cdot (-0{,}1) = 1{,}8$
in III': $z = 1{,}5 - 1{,}5 \cdot 1{,}8 = -1{,}2$
$L = \{(1{,}8; -0{,}1; -1{,}2)\}$

Probe:
I: $-3 \cdot 1{,}8 - 4 \cdot (-0{,}1) - 5 \cdot (-1{,}2) = 1$ ✓
II: $3 \cdot 1{,}8 - 4 \cdot (-0{,}1) + 4 \cdot (-1{,}2) = 1$ ✓
III: $-3 \cdot 1{,}8 - 2 \cdot (-1{,}2) = -3$ ✓

i) I: $x + y + z = 2$
II: $x - y + z = 2$
III: $x - y - z = 2$

III': $x = y + z + 2$
I': $y + z + 2 + y + z = 2 \ \Rightarrow\ y = -z$
II': $y + z + 2 - y + z = 2 \ \Rightarrow\ z = 0$
in I': $y = 0$
in III': $x = 0 + 0 + 2 = 2$
$L = \{(2; 0; 0)\}$

Probe:
I: $2 + 0 + 0 = 2$ ✓
II: $2 - 0 + 0 = 2$ ✓
III: $2 - 0 - 0 = 2$ ✓

K 4/5 **3** **a)** Individuelle Skizzen.

b) 1 P: $y = ax^2 + bx + c$

$A \in P$: I: $2 = c$

$B \in P$: II: $18 = 16a + 4b + c$

$C \in P$: III: $8 = a - b + c$

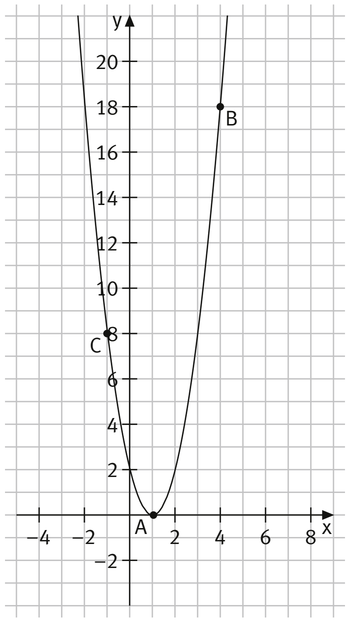
$c = 2$ eingesetzt in II: $16a + 4b = 16 \;\Rightarrow\; 4a + b = 4$ (II')

$c = 2$ eingesetzt in III: $a - b = 0 \;\Rightarrow\; b = a - 6$ (III')

III' einsetzen in II': $4a + a - 6 = 4 \;\Rightarrow\; a = 2$

$a = 2$ einsetzen in III': $b = 2 - 6 = -4$

P: $y = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1)$



2 P: $y = ax^2 + bx + c$

$A \in P$: I: $3 = a + b + c$

$B \in P$: II: $0 = 4a - 2b + c \;\Rightarrow\; c = 2b - 4a$

$C \in P$: III: $-5 = 9a + 3b + c$

II einsetzen in I: $3 = a + b + 2b - 4a \;\Rightarrow\; b = 1 + a$ (I')

II einsetzen in III: $-5 = 9a + 3b + 2b - 4a$

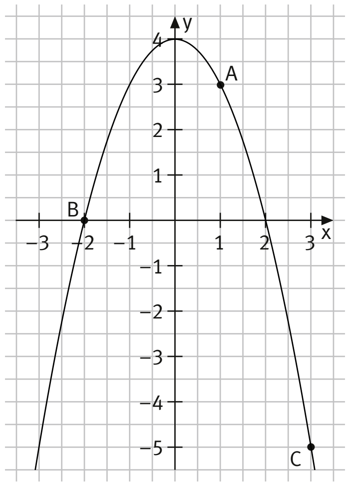
$\Rightarrow\; -1 = a + b$ (III')

I' einsetzen in III': $-1 = a + 1 + a \;\Rightarrow\; a = -1$

$a = -1$ einsetzen in I': $b = 1 - 1 = 0$

$a = -1$ und $b = 0$ einsetzen in II: $c = 2 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) = 4$

P: $y = -x^2 + 4$



3 P: $y = ax^2 + bx + c$

$A \in P$: I: $0 = a + b + c$

$B \in P$: II: $-0{,}5 = 4a + 2b + c$

$C \in P$: III: $1 = c$

$c = 1$ eingesetzt in I: $a + b + 1 = 0 \;\Rightarrow\; a = -1 - b$ (I')

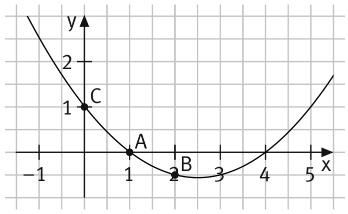
$c = 1$ eingesetzt in II: $4a + 2b + 1 = -0{,}5$ (II')

I' einsetzen in II': $4 \cdot (-1 - b) + 2b + 1 = -0{,}5$

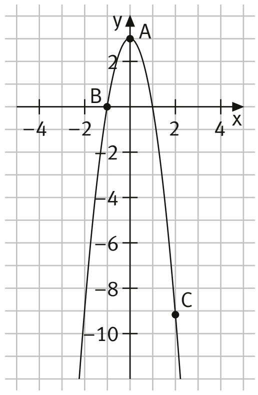
$\Rightarrow\; b = -1{,}25$

$b = -1{,}25$ einsetzen in I': $a = -1 - (-1{,}25) = 0{,}25$

P: $y = 0{,}25x^2 - 1{,}25x + 1$



4 P: $y = ax^2 + bx + c$
$A \in P$: I: $3 = c$
$B \in P$: II: $0 = a - b + c$
$C \in P$: III: $-9 = 4a + 2b + c$
$c = 3$ eingesetzt in II: $a - b + 3 = 0 \Rightarrow a = b - 3$ (II')
$c = 3$ eingesetzt in III: $4a + 2b + 3 = -9$
$\Rightarrow 2a + b = -6$ (III')
II' einsetzen in III': $2(b-3) + b = -6 \Rightarrow b = 0$
$b = 0$ einsetzen in II': $a = -3$
P: $y = -3x^2 + 3$



c) Die Parabeln 1 und 3 sind nach oben geöffnet. Scheitelpunktformen:
1 $y = 2(x-1)^2$
3 $y = 0{,}25(x^2 - 5x + 6{,}25) - 1{,}5625 + 1 = 0{,}25(x - 2{,}5)^2 - 0{,}5625$

d) Nur die Parabel 3 ist weiter als die Normalparabel.
Nullstellen (siehe Graph in b) 3): $N_1\,(1|0)$, $N_2\,(4|0)$

e) Beispiele:

1 Wenn die Punkte A, B und C* auf einer Geraden liegen, wird durch sie keine Parabel festgelegt.
AB: $y = \frac{18-2}{4-0}x + 2$; $y = 4x + 2$; $C^* \in AB$: $y_{C^*} = 4 \cdot (-1) + 2 = -2 \Rightarrow C^*(-1|-2)$

2 Wenn die Punkte A, B und C* auf einer Geraden liegen, wird durch sie keine Parabel festgelegt.
AB: $y = \frac{0-3}{-2-1}x + t$; $y = x + t$; $A \in AB$: $3 = 1 + t \Rightarrow t = 2$
AB: $y = x + 2$; $C^* \in AB$: $y_{C^*} = 3 + 2 = 5 \Rightarrow C^*(3|5)$

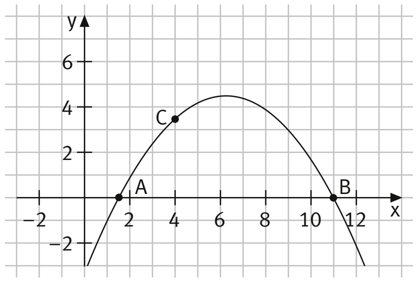
3 Wenn die Punkte A, B und C* auf einer Geraden liegen, wird durch sie keine Parabel festgelegt.
AB: $y = \frac{-0{,}5-0}{2-1}x + t$; $y = -0{,}5x + t$; $A \in AB$: $0 = -0{,}5 + t \Rightarrow t = 0{,}5$
AB: $y = -0{,}5x + 0{,}5$; $C^* \in AB$: $y_{C^*} = -0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 = 0{,}5 \Rightarrow C^*(0|0{,}5)$

4 Wenn die Punkte A, B und C* auf einer Geraden liegen, wird durch sie keine Parabel festgelegt.
AB: $y = \frac{0-3}{-1-0}x + 3$; $y = 3x + 3$; $C^* \in AB$: $y_{C^*} = 3 \cdot 2 + 3 = 9 \Rightarrow C^*(2|9)$

K3/5 **4** Preise (in €): Käsesemmel: x; Müsliriegel: y; Cola: z
I: $x + y + z = 4{,}15$ II: $2x + z = 5{,}45$ III: $3y + z = 3{,}75$
II – I: $x - y = 1{,}30$ (1) III – I: $-x + 2y = -0{,}40$ (2)
(1) + (2): $y = 0{,}90$; in (1) und in III eingesetzt:
$x - 0{,}90 = 1{,}30$; $| + 0{,}90$ $3 \cdot 0{,}90 + z = 3{,}75$; $| -2{,}7$
$x = 2{,}20$ $z = 1{,}05$
Eine Käsesemmel kostet 2,20 €, ein Müsli-Riegel 0,90 € und eine Cola 1,05 €.

K3/5 **5** Britta ist b Jahre, Merlin m Jahre und Tina t Jahre alt.
I: $b + m + t = 50$ II: $m + t = b + 20$ III: $b + t = m + 14$
I – II: $b = 50 - (b + 20) = 50 - b - 20 = 30 - b$; $| + b$ $2b = 30$; $| : 2$ $b = 15$
I – III: $m = 50 - (m + 14) = 36 - m$; $| + m$ $2m = 36$; $| : 2$ $m = 18$
$b = 15$ und $m = 18$ in (1)
$15 + 18 + t = 50$; $33 + t = 50$; $| -33$ $t = 17$
Wegen $b < 16$, $m \geq 16$ und $t \geq 16$ darf nur Britta nicht in die Disko.

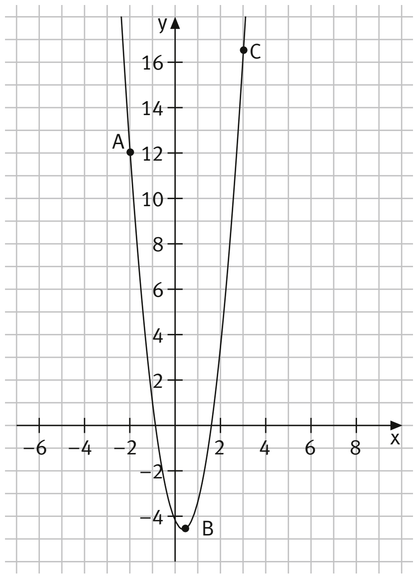
K 2/5 **6** **a)** A und B sind Nullstellen $\Rightarrow$ Nullstellenform:
$y = a\,(x - 1{,}5)\,(x - 11)$
C einsetzen: $3{,}5 = a\,(4 - 1{,}5)\,(4 - 11) \;\Rightarrow\; a = -0{,}2$
P: $y = -0{,}2\,(x - 1{,}5)\,(x - 11) = -0{,}2\,(x^2 - 12{,}5x + 16{,}5)$
$= -0{,}2x^2 + 2{,}5 - 3{,}3$



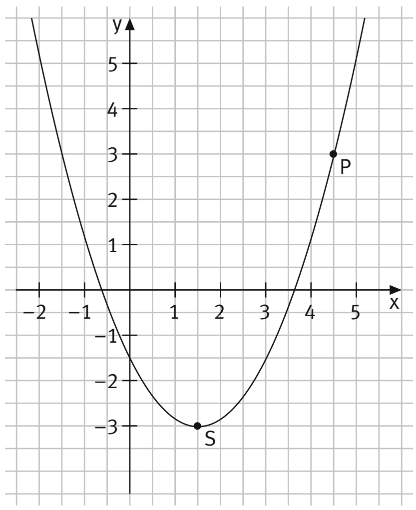
b) $A \in P$: I: $4a - 2b + c = 12 \;\Rightarrow\; c = 12 - 4a + 2b$
$B \in P$: II: $0{,}25a + 0{,}5b + c = -4{,}5$
$C \in P$: III: $9a + 3b + c = 16{,}5$

I einsetzen in II: $0{,}25a + 0{,}5b + 12 - 4a + 2b = -4{,}5$
$\Rightarrow\; -3{,}75a + 2{,}5b = -16{,}5$ (IV)
I einsetzen in III: $9a + 3b + 12 - 4a + 2b = 16{,}5$
$\Rightarrow\; a = 0{,}9 - b$ (V)
V einsetzen in IV: $-3{,}75\,(0{,}9 - b) + 2{,}5b = -16{,}5$
$\Rightarrow\; b = -2{,}1$
$b = -2{,}1$ einsetzen in V: $a = 0{,}9 - (-2{,}1) = 3$
$a = 3$ und $b = 2{,}1$ einsetzen in I:
$c = 12 - 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-2{,}1) = -4{,}2$

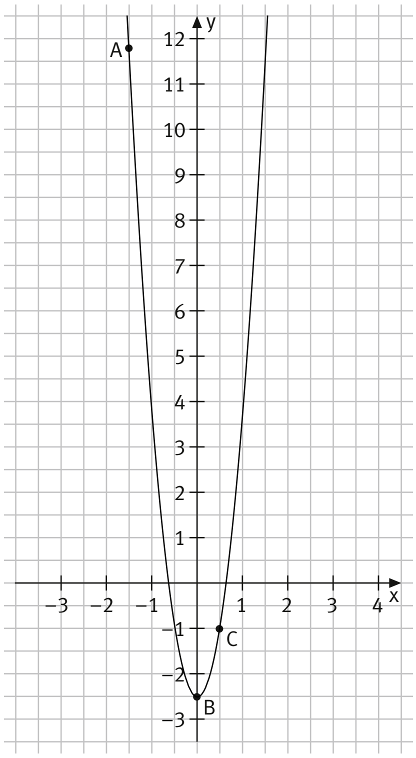
P: $y = 3x^2 - 2{,}1x - 4{,}2$



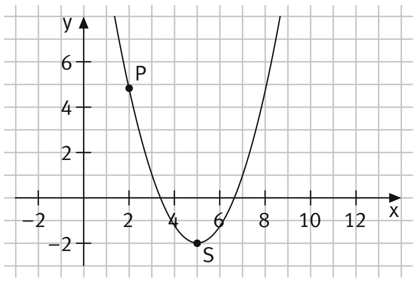
c) $S\,(1{,}5\,|\,-3) \;\Rightarrow\;$ Scheitelpunktform $y = a\,(x - 1{,}5)^2 - 3$
P einsetzen: $3 = a\,(4{,}5 - 1{,}5)^2 - 3 \;\Rightarrow\; a = \frac{2}{3}$
P: $y = \frac{2}{3}\,(x - 1{,}5)^2 - 3 = \frac{2}{3}x^2 - 2x - 1{,}5$



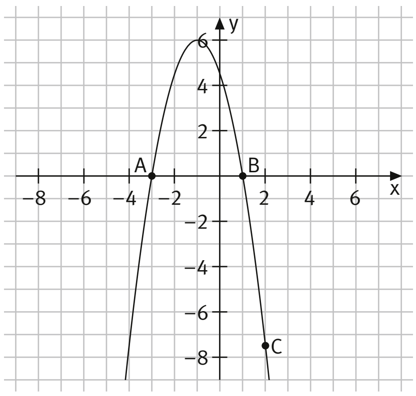
d) $A \in P$: I: $9a - 3b + c = 23{,}6$
$B \in P$: II: $c = -5$
$C \in P$: III: $a + b + c = -2$
$c = -5$ einsetzen in I: $9a - 3b = 28{,}6$ (I')
$c = -5$ einsetzen in III: $a + b = 3 \;\Rightarrow\; a = 3 - b$ (III')
III' einsetzen in I': $9(3 - b) - 3b = 28{,}6 \;\Rightarrow\; b = -\frac{2}{15}$
$b = -\frac{2}{15}$ einsetzen in III': $a = 3 - \left(-\frac{2}{15}\right) = 3\frac{2}{15}$
P: $y = 3\frac{2}{15}x^2 - \frac{2}{15}x - 5$



e) $S(5\,|\,-2) \;\Rightarrow\;$ Scheitelpunktform $y = a(x - 5)^2 - 2$
P einsetzen: $4{,}75 = a(2 - 5)^2 - 2 \;\Rightarrow\; a = \frac{3}{4}$
P: $y = \frac{3}{4}(x - 5)^2 - 2 = \frac{3}{4}x^2 - 7{,}5x + 16\frac{3}{4}$



f) A und B sind Nullstellen $\Rightarrow$ Nullstellenform:
$y = a(x + 3)(x - 1)$
C einsetzen: $-7{,}5 = a(2 + 3)(2 - 1) \;\Rightarrow\; a = -1{,}5$
P: $y = -1{,}5(x + 3)(x - 1) = -1{,}5(x^2 + 2x - 3)$
$= -1{,}5x^2 - 3x + 4{,}5$



K3/5 **7** **a)** Alter von Marie Curie im Jahr 1888: x Jahre
Alter von Sofia Kowalewskaja im Jahr 1888: y Jahre
Alter von Emmy Noether im Jahr 1888: z Jahre
I: $x + y = 59 \Rightarrow x = 59 - y$
II: $y + z = 44 \Rightarrow z = 44 - y$
III: $x + z = 27$
I und II einsetzen in III: $59 - y + 44 - y = 27 \Rightarrow y = 38$
$y = 38$ einsetzen in I: $x = 59 - 38 = 21$
$y = 38$ einsetzen in II: $z = 44 - 38 = 6$
Im Jahr 1888 war Marie Curie 21 Jahre, Sophia Kowalewskaja 38 Jahre und Emmy Noether 6 Jahre alt.

b) Ursprüngliche Zahl: $100x + 10y + z$ (Hunderterziffer: x; Zehnerziffer: y; Einerziffer: z)
Neue Zahl: $100z + 10y + x$ (Hunderterziffer: z; Zehnerziffer: y; Einerziffer: x)
I: $x + y + z = 14$
II: $100z + 10y + x = 100x + 10y + z - 495 \Rightarrow z - x = -5$
III: $x - z = y$
III einsetzen in I: $x + x - z + z = 14 \Rightarrow x = 7$
$x = 7$ einsetzen in II: $z - 7 = -5 \Rightarrow z = 2$
$x = 7$ und $z = 2$ einsetzen in III: $7 - 2 = y \Rightarrow y = 5$
Die ursprüngliche Zahl ist 752.

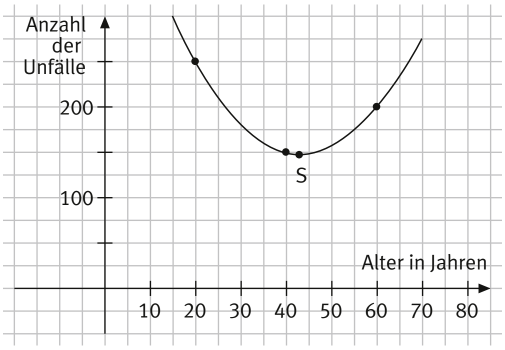
K3/5 **8** **a)** $f(x) = ax^2 + bx + c$
I: $a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c = 250 \Rightarrow 400a + 20b + c = 250$
II: $a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c = 150 \Rightarrow 1600a + 40b + c = 150$
III: $a \cdot 60^2 + b \cdot 60 + c = 200 \Rightarrow 3600a + 60b + c = 200$

II – I: $1200a + 20b = -100$ (IV)
III – II: $2000a + 20b = 50$ (V)
V – IV: $800a = 150 \Rightarrow a = \frac{3}{16} = 0{,}1875$

$a = \frac{3}{16}$ einsetzen in V:
$2000 \cdot \frac{3}{16} + 20b = 50 \Rightarrow b = -16{,}25$

$a = \frac{3}{16}$ und $b = -16{,}25$ einsetzen in I:
$400 \cdot \frac{3}{16} + 20 \cdot (-16{,}25) + c = 250 \Rightarrow c = 500$

$f(x) = \frac{3}{16}x^2 - 16\frac{1}{4}x + 500$



b) $f(18) = \frac{3}{16} \cdot 18^2 - 16\frac{1}{4} \cdot 18 + 500 \approx 268$
$f(50) = \frac{3}{16} \cdot 50^2 - 16\frac{1}{4} \cdot 50 + 500 \approx 156$

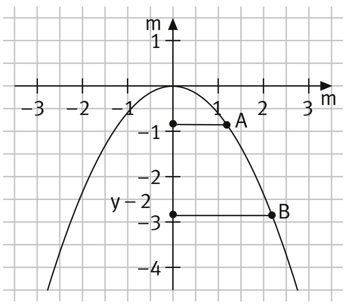
c) $f(x) = \frac{3}{16}x^2 - 16\frac{1}{4}x + 500 = \frac{3}{16}\left[x^2 - 86\frac{2}{3}x + \left(43\frac{1}{3}\right)^2\right] - 352\frac{1}{12} + 500 = \frac{3}{16}\left(x - 43\frac{1}{3}\right)^2 + 147\frac{11}{12}$
In einem Alter von ungefähr 43 Jahren werden die wenigsten Unfälle verursacht (≈ 148).

K4/6 **9** Masse jedes der lila Würfel: x g
Masse jeder der grünen Kugeln: y g
Masse jeder der blauen Pyramiden: z g

I: $2x + 2y = 1000 \Rightarrow x = 500 - y$
II: $x + y = 5z \Rightarrow x + y - 5z = 0$
III: $y + z = x \Rightarrow -x + y + z = 0$

I einsetzen in II: $500 - y + y - 5z = 0 \Rightarrow z = 100$ (IV)
I einsetzen in III: $y - 500 + y + z = 0 \Rightarrow 2y + z - 500 = 0$ (V)
IV einsetzen in V: $2y + 100 - 500 = 0 \Rightarrow y = 200$
$y = 200$ einsetzen in I: $x = 500 - 200 = 300$
Jeder der lila Würfel hat 300 g, jede der grünen Kugeln 200 g und jede der blauen Pyramiden 100 g.

K2/3 **10** **a)**



Wenn man das Koordinatensystem so wählt, dass sich der Scheitelpunkt im Ursprung befindet, liegt der Punkt A (1,2 | y) auf der Parabel. Somit liegt auch B (2,2 | y − 2) auf der Parabel und beide Punkte in die Funktionsgleichung $y = ax^2$ eingesetzt ergibt:
I: $y = a \cdot 1{,}2^2$
II: $y - 2 = a \cdot 2{,}2^2$
II − I: $-2 = 3{,}4a \Rightarrow a = -\frac{10}{17}$
Die Funktionsgleichung des parabelförmigen Eingangs lautet also $y = -\frac{10}{17}x$.

b) Für $x = 2{,}2$ ist $y = -2{,}86$. Der Keller sollte mindestens 2,86 m hoch sein.

K1/5 **11** **a)** Der Schwerpunkt des Springers bewegt sich auf einer (annähernd) parabelförmigen Bahn und befindet sich im Moment des Absprungs etwa einen halben Meter über dem Felsen.

b) Der Scheitelpunkt sei S (0 | 35,5). Für die Funktionsgleichung der Flugparabel gilt:
$f(x) = ax^2 + 35{,}5$
Einsetzen des Punktes P (−14 | 0) ergibt: $a \approx -0{,}181$
Die Funktionsgleichung der Flugparabel ist: $f(x) = -0{,}181x^2 + 35{,}5$

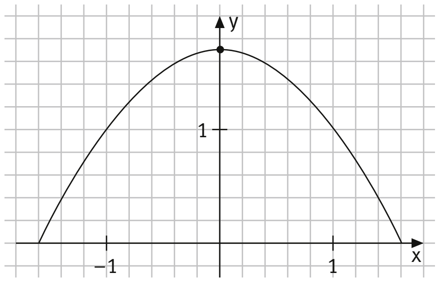
c) Der Sprungturm ist 10 m hoch, der Schwerpunkt des Springers liegt 0,5 m über dem Sprungturm, also bei 10,5 m über dem Boden bzw. über der Wasseroberfläche. Der Scheitelpunkt der Parabel ist damit S (0 | 10,5). Mit der in a) berechneten Formvariablen $a \approx -0{,}181$ lautet die Funktionsgleichung somit $g(x) = -0{,}181x^2 + 10{,}5$.

d) $g(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}181x^2 + 10{,}5 = 0 \Rightarrow x \approx \pm 7{,}6$ m
Der Springer taucht in einer horizontalen Entfernung von 7,6 m vom Absprungpunkt ins Wasser ein.

K1/3 **12** Aufstellen der quadratischen Funktionsgleichung für x: Durchmesser (in cm), f(x): Preis (in €):
I: $400a + 20b + c = 3$
II: $900a + 30b + c = 4{,}25$
III: $1600a + 40b + c = 5{,}75$
$\Rightarrow f(x) = 0{,}00125x^2 + 0{,}0625x + 1{,}25$
$f(15) \approx 2{,}47$, $f(45) \approx 6{,}59 \Rightarrow$ Marco hat Recht.

K 3/5

13 Lage des Koordinatensystems: $N_1\,(-1{,}6|0)$, $N_2\,(1{,}6|0)$, Scheitelpunkt $S\,(0|1{,}7)$
Ansatz (x und f(x) in Metern): $f(x) = a\,(x - 1{,}6)\,(x + 1{,}6)$
S einsetzen: $1{,}7 = a \cdot (0^2 - 1{,}6^2) \;\Rightarrow\; a = -\frac{85}{128} \approx -0{,}664$
Funktionsgleichung der Wasserparabel:
$y = -\frac{85}{128}x^2 + 1{,}7$



K 5

14 a) Einsetzen der Koordinaten von A und B in den Funktionsterm $f(x) = 0{,}2x^2 - bx + c$ ergibt ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten b und c.
Man erhält $b = 2$, $c = 4$ und somit $f(x) = 0{,}2x^2 - 2x + 4$.

b) $S\,(-3|4)$; an der x-Achse gespiegelte Normalparabel $\Rightarrow$ $a = -1$, also $y = -1\,(x + 3)^2 + 4$.
allgemeine Form: $y = -x^2 - 6x - 5$

c) $A\,(3|-1)$ $\quad B\,(2|-7)$ $\quad S\,(4|y_S)$ sind gegeben.
Scheitel: $y_S = 16a + 4b + c$; allgemein gilt: $x_S = -\frac{b}{2a}$; hier ist $x_S = 4 \;\Rightarrow\; b = -8a$
$A \in G_f$: $9a + 3b + c = -1 \;\Rightarrow\; 9a - 24a + c = -1 \;\Rightarrow\; c = 15a - 1$
$B \in G_f$: $4a + 2b + c = -7 \;\Rightarrow\; 4a - 16a + c = -7 \;\Rightarrow\; c = 12a - 7$;
gleichsetzen: $a = -2 \;\Rightarrow\; b = 16$; $c = -31$
allgemeine Form der Parabelgleichung: $y = -2x^2 + 16x - 31$

K 3/5

15

	T-Shirt	Jeans	Badetasche	Versandkosten
Preis in €	x	y	z	5,50

$x + y = 34{,}90 - 5{,}50$	I: $x + y = 29{,}40$
$x + y + z = 40{,}40 - 5{,}50$	II: $x + y + z = 34{,}90$
$y + z = 29{,}45 - 5{,}50$	III: $y + z = 23{,}95$
II – I: $z = 5{,}50$ eingesetzt in	III: $y + 5{,}50 = 23{,}95$; $\;|-5{,}50$ $y = 18{,}45$

II – III: $x = 10{,}95$
Ein T-Shirt koset 10,95 €, eine Jeans 18,45 € und eine Badetasche 5,50 €.
Probe bei Sophies Bestellung: 10,95 € + 5,50 € + 5,50 € = 21,95 € ✓

K 1/6

16 a) Henry setzt nacheinander die Koordinaten der drei Punkte in die allgemeine quadratische Funktionsgleichung ein, dann löst er das lineare Gleichungssystem für die Variablen a, b und c.

b) Erster Fehler: in Gleichung II. muss es $-2b$ heißen, nicht $+2b$.
Zweiter Fehler: in der letzten Zeile muss es $-3 \cdot 10$ heißen, nicht $+3 \cdot 10$.
Verbessert: I – II: $5 = 5a + 5b \;\Rightarrow\; a + b = 1 \;\Rightarrow\; b = 1 - a$
III – II: $0 = 60a + 10b$
b eingesetzt: $0 = 60a + 10 - 10a \;\Rightarrow\; a = -0{,}2$
$b = 1 + 0{,}2 = 1{,}2 \;\Rightarrow\; c = 1 - 9a - 3b = -0{,}8$

c) Charlotte hat erkannt, dass $y_B = y_C$, was bedeutet, dass S in der Mitte zwischen B und C liegt,
also $x_S = \frac{x_B + x_C}{2} = 3 = d \;\Rightarrow\;$ Scheitelform $y = a\,(x - 3)^2 + e$.
Nach Einsetzen der Koordinaten von A und C erhält man $e = 1$ und $a = -0{,}2 \;\Rightarrow\; y = -0{,}2\,(x - 3)^2 + 1$ bzw. in allgemeiner Form $y = -0{,}2x^2 + 1{,}2x - 0{,}8$.

K 5/6

Werkzeug

Lineare Gleichungssysteme mit einer DGS lösen

Die Schülerinnen und Schüler machen sich mit dem Einsatz eines CAS zur Bestimmung der Funktionsgleichung einer durch drei ihrer Punkte gegebenen Parabel vertraut.

K3/5

17 a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$P_1 \in G_f$: I: $c = 2{,}24$

$P_2 \in G_f$: II: $a + b + c = 2{,}92$

$P_3 \in G_f$: III: $4a + 2b + c = 3{,}52$

$c = 2{,}24$ einsetzen in II: $a + b = 0{,}68 \Rightarrow b = 0{,}68 - a$ (IV)

$c = 2{,}24$ einsetzen in III: $4a + 2b = 1{,}28 \Rightarrow 2a + b = 0{,}64$ (V)

IV einsetzen in V: $2a + 0{,}68 - a = 0{,}64 \Rightarrow a = -0{,}04$

$a = -0{,}04$ einsetzen in IV: $b = 0{,}72$

$f(x) = -0{,}04x^2 + 0{,}72x + 2{,}24$

$f(x) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-0{,}72 \pm \sqrt{0{,}72^2 - 4 \cdot (-0{,}04) \cdot 2{,}24}}{2 \cdot (-0{,}04)}$

$\Rightarrow x_1 = 9 - \sqrt{137} \approx -2{,}70 \ (\notin D_f)$; $x_2 = 9 + \sqrt{137} \approx 20{,}70$

$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{18}{2} = 9 \Rightarrow y_S = -0{,}04 \cdot 9^2 + 0{,}72 \cdot 9 + 2{,}24 = 5{,}48$

Der Stoß erreicht eine Höhe von ca. 5,48 m und eine Weite von ca. 20,7 m. Damit ist der Stoß ungefähr einen Meter kürzer als der weiteste Versuch bei der Weltmeisterschaft 2011.

b) $b = 1 \Rightarrow f(x) = ax^2 + x + c$

$P_1 \in G_f$: I: $c = 1{,}92$

$P_2 \in G_f$: II: $0 = a \cdot 18{,}54^2 + 18{,}54 + c$

$c = 1{,}92$ einsetzen in I: $a = -\frac{1{,}92 + 18{,}54}{18{,}54^2} \approx -0{,}0595$

$f(x) = -0{,}0595x^2 + x + 1{,}92$

K2/3

18 a) $A(0|0)$, $B(100|20)$, $C(20|y_C)$

$C \in G_f$: $y = a(x - 20)^2 + e$

$A \in G_f$: I: $0 = a(0 - 20)^2 + e \Rightarrow e = -400a$

$B \in G_f$: II: $20 = a(100 - 20)^2 + e \Rightarrow 20 = 6400a + e$

I einsetzen in II: $20 = 6400a - 400a \Rightarrow a = \frac{1}{300}$

$a = \frac{1}{300}$ einsetzen in I: $e = -\frac{4}{3}$

$f(x) = \frac{1}{300}(x - 20)^2 - \frac{4}{3}$

b) $f(x) = \frac{1}{300}(x - 20)^2 - \frac{4}{3} = \frac{1}{300}(x^2 - 40x + 400) - \frac{4}{3} = \frac{1}{300}x^2 - \frac{2}{15}x = \frac{1}{300}x(x - 40)$

allgemeine Form: $f(x) = \frac{1}{300}x^2 - \frac{2}{15}x$ Nullstellenform: $f(x) = \frac{1}{300}x(x - 40)$

c) AB: $y = \frac{20}{100}x$; $y = \frac{1}{5}x$

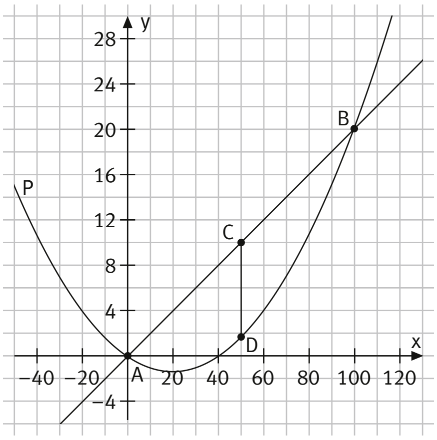
$h(x) = \frac{1}{5}x - \left(\frac{1}{300}x^2 - \frac{2}{15}x\right) = -\frac{1}{300}x^2 + \frac{2}{15}x + \frac{1}{5}x = -\frac{1}{300}x^2 + \frac{1}{3}x$

$= -\frac{1}{300}(x^2 - 100x + 2500) + \frac{1}{300} \cdot 2\,500$;

$h(x) = -\frac{1}{300}(x - 50)^2 + 8\frac{1}{3}$; $h_{max} = h(50) = 8\frac{1}{3}$

In einer Entfernung von 50 m von A in horizontaler Richtung ist der Durchhang am größten; er beträgt an dieser Stelle etwa 8,3 m.

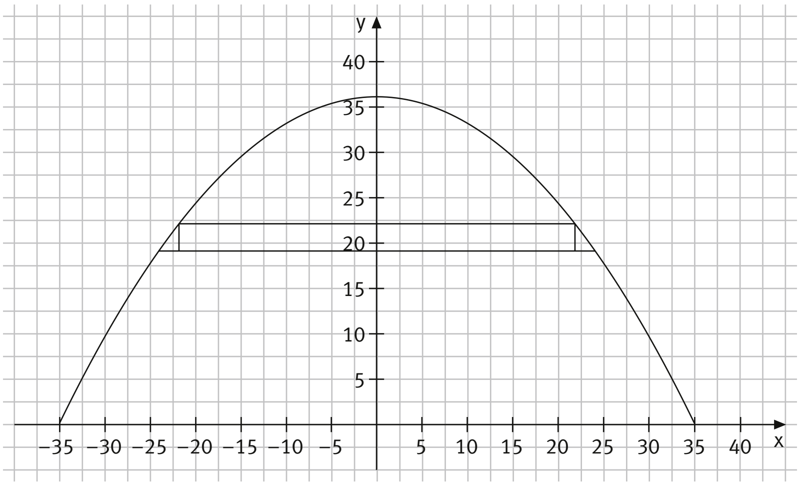
d)



K2/3

19 a) Der Scheitelpunkt des Parabelbogens soll in S (0|36) liegen.
Mit y = 0 und x = 35 folgt für $y = ax^2 + 36$: $a \approx -0{,}029$. Für die Funktionsgleichung gilt also:
$y = -0{,}029x^2 + 36$

b) Für die Spannweite auf Höhe der 6. Etage gilt mit y = 19:
$19 = -0{,}029x^2 + 36$
$x \approx \pm 24{,}2$
Für die Gesamtfläche in der 6. Etage gilt somit: $A_6 = 48{,}4\,\text{m} \cdot 140\,\text{m} = 6776\,\text{m}^2$
Die tatsächlich zu vermietende Fläche ist aber kleiner, man kann beispielweise von einer Raumhöhe von 3 m ausgehen und deshalb die Fläche in 22 m Höhe bestimmen (vgl. Zeichnung):
Für die Spannweite in 22 m Höhe gilt mit y = 22:
$22 = -0{,}029x^2 + 36$
$x \approx 22{,}0$
Für die gesamte zu vermietende Fläche in der 6. Etage gilt somit näherungsweise:
$A_{6\text{ zu vermieten}} = 44{,}0\,\text{m} \cdot 140\,\text{m} = 6160\,\text{m}^2$
Kalkuliert man noch Zwischenwände und Flure mit 15 % ein:
$6160\,\text{m}^2 \cdot 0{,}85 = 5236\,\text{m}^2$



c) Individuelle Rechercheergebnisse. Beispiele: Kongresshalle Berlin; Lanxess-Arena in Köln („Köln-Arena“).
Zur Modellierung benötigte Größen: Breite und Höhe der Parabel oder drei Punkte auf der Parabel.

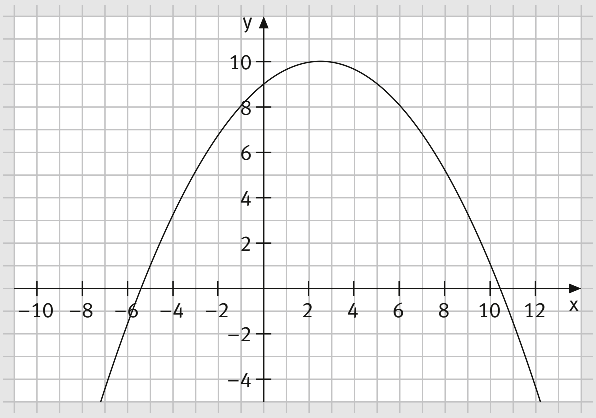
Physik

Parabelflüge

K6
- Der Buchstabe g bezeichnet die Erdbeschleunigung bzw. Fallbeschleunigung auf der Erde (auch „Ortsfaktor“ genannt). Auf der Erdoberfläche gilt $g \approx 9{,}81\ \text{m/s}^2$.

  Die Gewichtskraft F_G eines Körpers ist das Produkt aus seiner Masse m und der Erdbeschleunigung g (des Ortes, wo er sich befindet): $F_G = m \cdot g$.
  In der Skizze: Beim waagrechten Flug wirkt die übliche Erdbeschleunigung 1 g, während des Hochziehens und Abfangens erhöht sich der Wert bis auf 1,8 g, wenn das Flugzeug die Parabelbahn beschreibt, beträgt der Wert 0 g („Schwerelosigkeit“).

K3/5
- Die Parabelgleichung wird bestimmt durch den Scheitelpunkt S (2,5 | 10), den Anfangspunkt A (0 | 9) und den Endpunkt E (5 | 9) der Parabelflugbahn (Daten in km). Aus dem daraus aufgestellten Gleichungssystem ergibt sich als Funktionsgleichung der Parabel $y = -0{,}16x^2 + 0{,}8x + 9$.

K4
- 

  Maßstab im Heft z. B. 1 cm ≙ 1 km, d. h. 1 : 100 000

K3/5
- **Möglichkeit 1:** Einsetzen der drei Parabelpunkte in die allgemeine Form der quadratischen Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ ergibt ein Gleichungssystem mit der Lösung $c = 8{,}5$, $b = 0$, $a = -0{,}311$, also $y = -0{,}311x^2 + 8{,}5$.
  Möglichkeit 2: Scheitelpunktform (Scheitel M): $y = a(x - 0)^2 + 8{,}5$; Einsetzen von B oder E ergibt $a = -0{,}311$ und damit $y = -0{,}311x^2 + 8{,}5$.

K6
- Individuelle Ergebnisse z. B. aus dem Internet.

K6
- Parabelflüge werden zu wissenschaftlichen Zwecken (Experimente z. B. im Bereich von Medizin, Physik, Biologie, Chemie, Materialwissenschaften u. a.) oder im Rahmen eines Astronautentrainings durchgeführt. Daneben werden auch kommerzielle Flüge für Privatpersonen angeboten.

Mondparabeln

K3/5
- Wegen $x_B = \frac{x_A + x_C}{2} = 11{,}5$ ist B (11,5 | 8,0) der Scheitelpunkt der Parabel.

  Das Flugzeug erreicht somit die maximale Höhe 8,0 km.

K3/5
- Funktionsgleichung in Scheitelpunktform: $y = a(x - 11{,}5)^2 + 8$

  Einsetzen von A (0 | 7,2): $7{,}2 = a(0 - 11{,}5)^2 + 8 \Rightarrow a = -\frac{0{,}8}{11{,}5^2} = -0{,}00605 \approx -0{,}006$
  $y = -0{,}006(x - 11{,}5)^2 + 8$

K6
- In einem Flugzeug, das eine „Mondparabel“ fliegt, ist g nicht gleich null, sondern nur auf den Wert reduziert, der auf der Mondoberfläche herrscht, also etwa $1{,}6\ \text{m/s}^2$, d. h. ungefähr ein Sechstel des Werts auf der Erde.

Alternativer Einstieg: Schulbuch Seite 76 und 77

Entdecken

K3/6
- Der tiefste Punkt der Brücke liegt 30 m über dem Meeresspiegel, da $f(0) = 30$.

K3/6
- Individuelle Erläuterungen. Beispiele: Man könnte den Ursprung des Koordinatensystems in einen Anfangspunkt der Brücke legen.

Nachgefragt

K6
- Um einen minimalen Wert ermitteln zu können, muss die Parabel nach oben geöffnet sein. Ihr tiefster Punkt ist dann ihr Scheitel; dessen y-Koordinate ist der gesuchte Minimalwert. Um einen maximalen Wert ermitteln zu können, muss die Parabel nach unten geöffnet sein. Ihr höchster Punkt ist dann ihr Scheitel; dessen y-Koordinate ist der gesuchte Maximalwert.

K1/6
- Individuelle Erläuterungen. Man kann einen Sachverhalt aus dem Alltag nicht immer exakt modellieren, weil es sich oft nur annähernd, aber nicht genau um einen quadratischen Zusammenhang handelt und weil Messwerte immer mit Ungenauigkeiten behaftet sind.

Aufgaben

K1/6 **1**

	Funktionsterm	größter / kleinster Funktionswert?	Wertemenge
a)	$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$	kleinster Funktionswert, da $a > 0$	$[-4; \infty[$
b)	$f(x) = x^2 + x = (x+0{,}5)^2 - 0{,}25$	kleinster Funktionswert, da $a > 0$	$[-0{,}25; \infty[$
c)	$f(x) = -x^2 - 4x + 3 = -(x+2)^2 + 7$	größter Funktionswert, da $a < 0$	$]-\infty; 7]$
d)	$f(x) = 9x - x^2 = -(x-4{,}5)^2 + 20{,}25$	größter Funktionswert, da $a < 0$	$]-\infty; 20{,}25]$
e)	$f(x) = -2x^2 + 2x - 0{,}5 = -2(x-0{,}5)^2$	größter Funktionswert, da $a < 0$	$\mathbb{R}_0^-$
f)	$f(x) = -3x^2 - 24x - 50 = -3(x+4)^2 - 2$	größter Funktionswert, da $a < 0$	$]-\infty; -2]$

K1/5 **2**

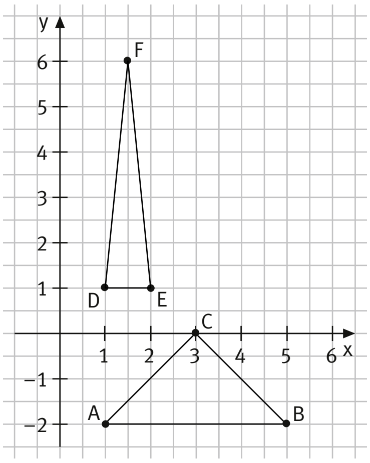
a) Die Parabeln, die die Querschnitte der Maare näherungsweise beschreiben, sind alle nach oben geöffnet. Es gilt somit $a > 0$.
Je weiter eine Parabel im Vergleich zur Normalparabel ist, umso kleiner ist der Faktor a. Somit ist der Faktor a für das Schalkenmehrener Maar am kleinsten.

b) $0{,}0016x^2 = 38 \Rightarrow x \approx \pm 154{,}1$
Der Durchmesser der Wasseroberfläche beträgt ungefähr 308,2 m.

c) $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 154{,}1^2 \approx 74\,602{,}8\ \text{m}^2 = 7{,}46028\ \text{ha} \approx 7{,}46\ \text{ha}$

d) Da der Scheitel der Parabel auch der tiefste Punkt des Sees ist, braucht man nur den Funktionswert $f(50)$ zu berechnen und das Ergebnis von der maximalen Wassertiefe 38 m zu subtrahieren:
$f(50) = 4$; $38\ \text{m} - 4\ \text{m} = 34\ \text{m}$.
50 m von der tiefsten Stelle entfernt ist das Gemündener Maar 34 m tief.

K4/5 **3** **a)** Individuelle Lösungen. Beispiel:



Dreieck ABC: b = 4, h = 2

$\Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$

Dreieck DEF: b = 1, h = 5

$\Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 = 2{,}5$

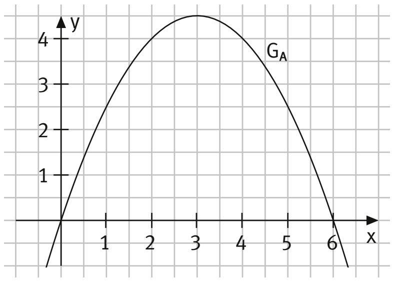
b) $b = x,\ h = 6 - x \Rightarrow$

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (6 - x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 4{,}5$

Scheitelpunkt S (3|4,5) maximaler Flächeninhalt A = 4,5 cm^2 (Parabel nach unten geöffnet)

Der maximale Flächeninhalt wird für x = 3, d. h. für b = 3 cm und für h = 6 cm – 3 cm = 3 cm angenommen.

c)



K2/3 **4** Anton legt das Kapital $K_0 = 700$ € zu p % an.

Nach einem Jahr hat seine Anlage den Wert $K_1 = K_0 \cdot (1 + p)$.

Nach n Jahren hat seine Anlage den Wert $K_n = K_0 \cdot (1 + p)^n$.

Zur Beantwortung der Frage muss die Gleichung für $K_0 = 700$, $K_2 = 728{,}28$ und n = 2 nach p aufgelöst werden.

$700 \cdot (1 + p)^2 = 728{,}28 \quad | : 700$

$(1 + p)^2 = 1{,}0404$

$1 + p = \pm 1{,}02$ Die negative Lösung entfällt im Sachzusammenhang.

$\Rightarrow p = 0{,}02 = 2\,\%$

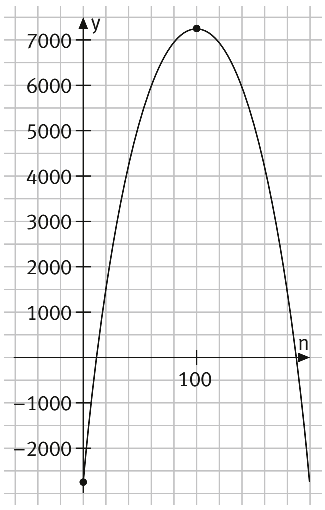
Der Zinssatz p beträgt 2 %.

K3/6 **5** **a)** fixe Kosten: fester Betrag, unabhängig von der produzierten Menge oder Stückzahl

Beispiele für fixe Kosten: Miete, Gehälter, Abschreibungen für Maschinen

variable Kosten: Betrag, der abhängig ist von der Produktionsmenge

Beispiele für variable Kosten: Materialkosten, Transportkosten, Kosten für Energie, Kosten für Werbung



b) Funktionsterm für den Gewinn (in €) beim Verkauf von n Leuchten:

$f(n) = n \cdot 250 - (2775 + 50n + n^2) = -n^2 + 200n - 2775$

$\quad = -(n^2 - 200n + 100^2) + 10\,000 - 2775 = -(n - 100)^2 + 7225$

Wöchentlicher Gewinn (in €) beim Verkauf von 150 Leuchten:

$f(150) = 4725$

c) Der Gewinn ist beim Verkauf von 100 Leuchten am größten, nämlich 7225 €.

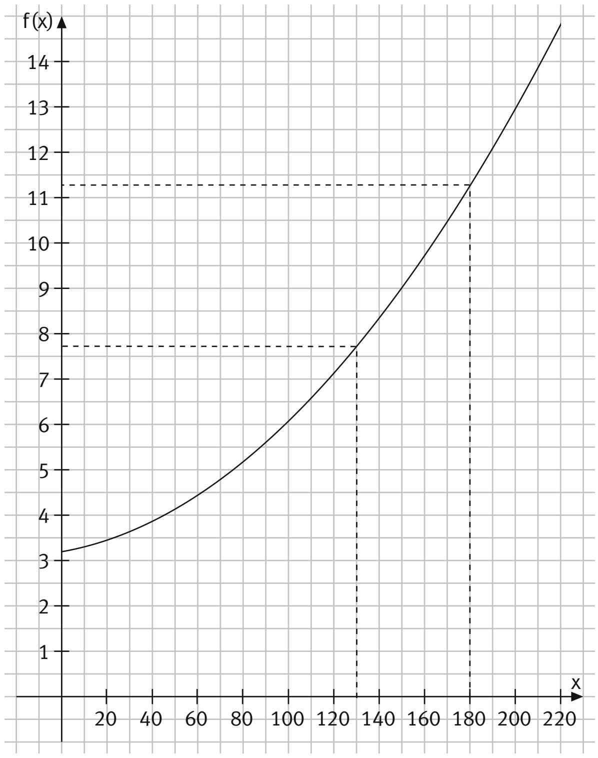
Es wird Gewinn erzielt, wenn $-(n - 100)^2 + 7225 > 0$, d. h. wenn $(n - 100)^2 < 85^2$, somit wenn $15 < n < 185$ ist, wenn also die Firma pro Woche zwischen 15 und 185 Leuchten verkauft.

K3/5 **6** **a)** Man verwendet z. B. ein Koordinatensystem, bei dem die x-Achse den Erdboden beschreibt und die y-Achse durch den höchsten Punkt des Sprungs verläuft. Dann entnimmt man dem Text die Koordinaten dreier Punkte der Parabel:
$S(0|205)$, $A(-90|103)$
$y = a(x - x_S)^2 + y_S$
A und S eingesetzt ergeben $y = -\frac{17}{1350}x^2 + 205$.
b) Die angegebene Flugbahn hat ihren Scheitel in 2,36 m Höhe, der Springer reißt also die Latte, die 2,40 m hoch liegt.
c) Es kommt auf seine Körperhaltung an, ob der Springer auch dann noch über die Latte kommt, aber es wird umso unwahrscheinlicher, je weiter er den optimalen Absprungpunkt verfehlt.

K2/3 **7** **a)** Gleichung von s: $y = \frac{4}{5}x + 120$ (Koordinatenursprung in der Kreuzung unten rechts, Einheit Meter)
b) Flächeninhalt des Fußballfelds: $A(l) = l \cdot b$, wobei $b = s(-l) = -\frac{4}{5} \cdot l + 120$
$A(l) = -\frac{4}{5} \cdot l^2 + 120 \cdot l$
c) Gesucht ist der Scheitel der Funktion $A(l)$:
$A(l) = -\frac{4}{5} \cdot l \cdot (l - 150)$. Nullstellen: $l_1 = 0$; $l_2 = 150$
Mittelwert der Nullstellen: $l_S = 75 \;\Rightarrow\; A(l_S) = -\frac{4}{5} \cdot 75^2 + 120 \cdot 75 = 4500$; $b = s(-75) = 60$
Das Fußballfeld hat beim größtmöglichen Flächeninhalt von 4500 m² eine Länge von 75 m und eine Breite von 60 m. Darauf dürfen keine offiziellen Spiele ausgetragen werden, denn in Deutschland gilt: Die Seitenlinie muss mindestens 90 m lang sein (und höchstens 120 m), die Torauslinie muss zwischen 45 m und 90 m lang sein, aber kürzer als die Seitenlinie.

K1/3 **8** **a)** Für die Gewinnfunktion G gilt $G(x) = 180x - K(x) = 180x - 0{,}1x^2 + 28x - 40\,920$
$= -0{,}1x^2 + 208x - 40\,920$.
Nullstellen der Gewinnfunktion:
$G(x)=0$: $\quad -0{,}1x^2 + 208x - 40\,920 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{-208 \pm \sqrt{208^2 - 4 \cdot (-0{,}1)(-40\,920)}}{2 \cdot (-0{,}1)} = \frac{-208 \pm \sqrt{26\,896}}{-0{,}2} = \frac{-208 \pm 164}{-0{,}2}$$
$x_1 = \frac{208 - 164}{0{,}2} = 220$ und $x_2 = \frac{208 + 164}{0{,}2} = 1860$
Das Unternehmen macht Gewinn, wenn es mehr als 220 Jacken und weniger als 1860 Jacken verkauft, d. h. es müssen mindestens 220 Jacken verkauft werden.
b) $G(x) = -0{,}1x^2 + 208x - 40\,920$
$= -0{,}1(x^2 - 2080x) - 40\,920$
$= -0{,}1(x^2 - 2080x + 1040^2 - 1040^2) - 40\,920$
$= -0{,}1[(x - 1040)^2 - 1\,081\,600] - 40\,920$
$= -0{,}1(x - 1040)^2 + 108\,160 - 40\,920$
$= -0{,}1(x - 1040)^2 + 67\,240$
Das Unternehmen erzielt einen maximalen Gewinn von 67 240 €, wenn es 1040 Jacken verkauft.
c) Gründe für ein Sinken des Gewinns bei steigenden Absatzzahlen sind z. B. steigende variable Kosten für das Material, Arbeitsentgelte oder weitere benötigte Maschinen und Produktionsstätten.
d) Wenn das Unternehmen die Jacke für 150 € verkauft, gilt für die Gewinnfunktion
$G_1: x \mapsto 150x - 0{,}1x^2 + 28x - 40\,920 = -0{,}1x^2 + 178x - 40\,920$
$G_1(x) = -0{,}1(x^2 - 1780x) - 40\,920$
$= -0{,}1(x^2 - 1780x + 890^2 - 890^2) - 40\,920$
$= -0{,}1[(x - 890)^2 - 792\,100] - 40\,920$
$= -0{,}1(x - 890)^2 + 79\,210 - 40\,920$
$= -0{,}1(x - 890)^2 + 38\,290$
Es wäre für das Unternehmen nicht wirtschaftlicher, da der erzielte Gewinn geringer wäre.

K3/5 **9** **a)** Durchschnittlicher Verbrauch bei 130 km/h ist etwa 7,6 l/100 km, bei 180 km/h sind es etwa 11,3 l/100 km.



b) Einsetzen in die Funktionsgleichung ergibt:
f(130) = 7,75 [l/100 km] und
f(180) = 11,3 [l/100 km]
prozentualer Unterschied: (11,3 – 7,75): 7,75 = 0,458 = 45,8 %
Bei 180 km/h verbraucht Herr Linde 45,8 % mehr Kraftstoff als bei 130 km/h.

c) Individuelle Ergebnisse je nach aktuell recherchiertem Benzinpreis. Beispiel:
aktueller Benzinpreis p = 1,459 €/l
Differenz pro Jahr in € bei 500 Autobahnkilometern pro Woche:
$d = 47 \cdot 5 \cdot (11{,}3\,l - 7{,}75\,l) \cdot p \approx 1217{,}17$ €
Herr Linde würde ungefähr 1217 € im Jahr sparen, wenn der Benzinpreis 1,459 €/l beträgt.

d) Individuelle Ergebnisse je nach aktuell recherchierten Zahlen.
Zahlenwerte aus dem Zeitungsartikel:
$\frac{0{,}016 \cdot 39{,}1}{755} = 0{,}000828 \approx 0{,}083\,\%$ des CO_2-Ausstoßes in Deutschland.

e) f(0) = 3,2. Das bedeutet, dass das Auto im Stand 3,2 l/100 km verbraucht. Allerdings ist diese Angabe sinnlos, da das Auto bei der Geschwindigkeit 0 km/h steht und der Bezug auf eine zurückgelegte Strecke von 100 km nicht hergestellt werden kann.

f)

x	10	50	80	100
f(x)	3,3	4,2	5,2	6,1

Für kleine Geschwindigkeiten passt das Modell offenbar nicht gut, erst ab etwa 80 km/h liefert es plausible Werte. Auch für Geschwindigkeiten, die höher sind als sie ein Auto erreichen kann, ist das Modell nicht anwendbar.

K2/5 **10** **a)** Torbogen: $f(x) = a(x-6)(x+6) = a(x^2-36)$
$S \in G_f$: $5 = a[(-4)^2 - 36] \Rightarrow a = -0{,}25$
$f(x) = -0{,}25x^2 + 9$; $D_f = [-6; 6]$

Gerade ST: $m = \frac{0-5}{6-(-4)} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$
$y = -0{,}5x + t$; da T (6|0) ∈ ST ist, gilt $0 = -3 + t$, also $t = 3$.
ST: $y = -0{,}5x + 3$

b) Länge eines Stabs:
$$\begin{aligned} l(x) &= -0{,}25(x^2-36) - (-0{,}5x+3) \\ &= -0{,}25x^2 + 9 + 0{,}5x - 3 = -0{,}25x^2 + 0{,}5x + 6 \\ &= -0{,}25(x^2 - 2x + 1) + 0{,}25 + 6 \\ &= -0{,}25(x-1)^2 + 6{,}25 \end{aligned}$$
Der Stab an der Stelle x = 1 ist am längsten; seine Länge beträgt 6,25 LE.

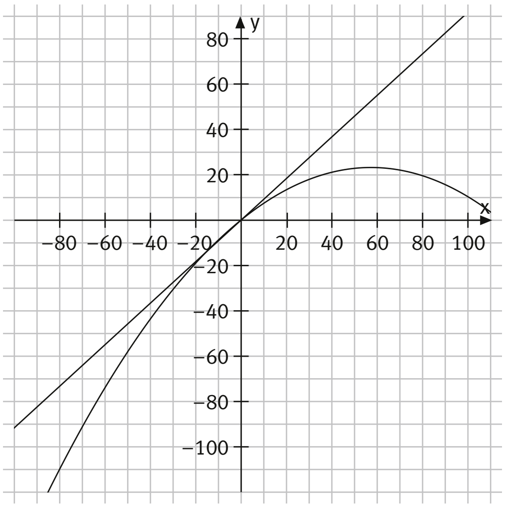
K3/5 **11** Scheitelpunktform der Funktionsgleichung:
$f(x) = -0{,}4(x^2 - 40x + 400) + 160 + 1 = -0{,}4(x-20)^2 + 161$
Scheitelpunkt: S (20|161) ⇒ Die maximale Flughöhe ist 161 m.
Die Raketenteile treffen in der doppelten x-Koordinate des Scheitels, also in etwa 40 m Entfernung vom Abschusspunkt auf den Boden.

K 4/6 **12** Victor könnte wie in der Abbildung den Scheitelpunkt des Brückenbogens als Koordinatenursprung wählen und dann die Koordinaten von zwei weiteren Punkten des Bogens näherungsweise ablesen. Einsetzen der Koordinaten dieser drei Punkte in die allgemeine Parabelgleichung ergibt ein Gleichungssystem für die Koeffizienten der Parabelgleichung. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

1 Das Gleichungssystem hat keine Lösung. Das bedeutet, dass bereits diese drei Punkte nicht auf einer Parabel liegen. Der Brückenbogen kann nicht durch eine Parabel modelliert werden.

2 Das Gleichungssystem hat eine Lösung und liefert damit die Gleichung der Parabel, auf der die drei Punkte liegen. Um zu überprüfen, ob auch weitere Punkte des Brückenbogens auf dieser Parabel liegen, liest Victor deren Koordinaten ab und setzt sie in die Parabelgleichung ein. Erfüllen diese die Gleichung (näherungsweise), modelliert die gefundene Parabel den Brückenbogen, andernfalls nicht.

K 4/6 **13 a)**



b) Der lineare Graph G_g passt recht gut im Intervall $x \in [-40; 0]$, der quadratische Graph G_f passt näherungsweise für $x \in [-20; 20]$.

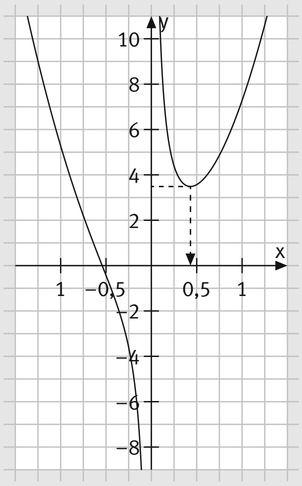
c) Die lineare und die quadratische Modellierung haben ihre Grenzen dort, wo der abzubildende Vorgang nicht solchen einfachen Zusammenhängen folgt.

Alltag

Optimierung und Umweltschutz

K 6
- Justus löst die Formel für das Zylindervolumen nach der Höhe h auf: $h = \frac{V}{r^2\pi}$.
  Dann setzt er das Zylindervolumen in die Formel zur Berechnung des Oberflächeninhalts für Zylinder ein. Sein Term O (r) gilt, wenn der Radius in der Einheit dm eingesetzt wird und ergibt den Oberflächeninhalt in dm^2.

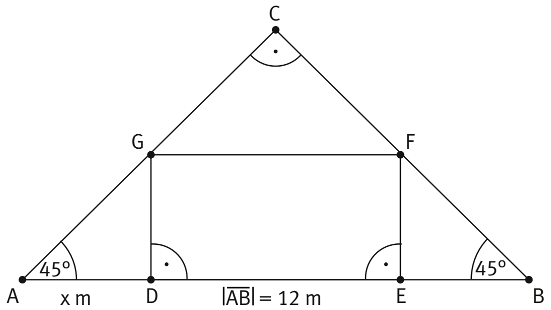
K 6
- Justus kann die Aufgabe mit seinem bisherigen Wissen nicht lösen, weil der Funktionsterm O (r) nicht quadratisch ist.



K 4
- Der geringste Oberflächeninhalt 3,5 dm^2 ergibt sich für r = 0,43 dm.
  Mit $h = \frac{0{,}5\ dm^3}{r^2\pi}$ errechnet man die zugehörige Höhe der Dose:
  h = 0,86 dm.
  Die verpackungsoptimierte Halbliterdose hat also 8,6 cm Durchmesser und 8,6 cm Höhe, ihr Querschnitt ist ein Quadrat.

K 6
- Individuelle Ergebnisse. Beispiele: Recycling-Karton, Verpackungen aus nachwachsenden Rohstoffen (z. B. Holz, Stroh, Gras, Stärke, Hanf).

K2/5 **14 a)**



Das Dreieck ADG hat zwei 45°-Winkel und einen rechten Winkel und ist somit gleichschenklig: $|\overline{AD}| = |\overline{DG}| = x\,m$. Für den Flächeninhalt A (x) der Glasfront gilt somit:
$A(x) = (12 - 2x) \cdot x = -2x^2 + 12x,\ x \in\ ]0;\,6[$.

b) $A(0) = 0,\ A(6) = 0 \Rightarrow A(3)$ ist maximal. Für x = 3 hat die Glasfront den größtmöglichen Flächeninhalt $A(3) = 18\ m^2$.

c)

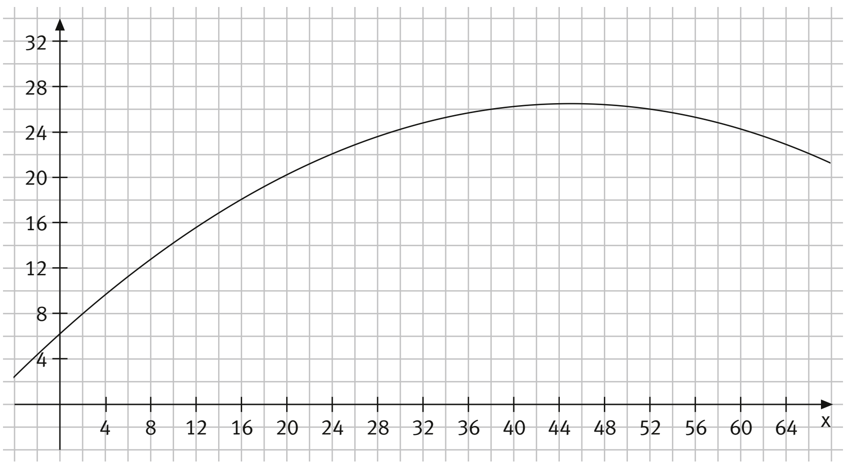
x	0	1	2	3	**4**	5	6
l = 12 – 2x	12	10	8	6	**4**	2	0

Die quadratische Glasfront hat die Seitenlängen 4 m.

Prozentualer Unterschied: $\frac{A(3) - A(4)}{A(3)} = \frac{1}{9} \approx 11\,\%$.

Der Flächeninhalt der quadratischen Glasfront ist um etwa 11 % kleiner als der größtmögliche Flächeninhalt.

K3/4 **15 a)**



Um den Anteil erneuerbarer Energien am Energieverbrauch in den Jahren 2010 und 2018 zu ermitteln, nimmt man jeweils die Anzahl der seit 2004 vergangenen Jahre, also 6 und 14 als x-Wert und sucht den zughörigen y-Wert.

graphisch durch Ablesen am Funktionsgraphen von f: $f(6) \approx 11{,}2;\ f(14) \approx 16{,}8$

rechnerisch durch Einsetzen von x = 6 bzw. x = 14 in die Funktionsgleichung von f: $f(6) = 11{,}2;\ f(14) = 16{,}8$

b) Im Jahr 2025 ist x = 21: $f(21) = 20{,}69 < 40$

Wenn die Modellierung auch die Entwicklung bis 2025 beschreibt, ist das Ziel unrealistisch.

c) Gesucht ist der Scheitelpunkt S der Funktion f. Quadratische Ergänzung zur Scheitelpunktform ergibt $S(45\,|\,26{,}45)$, also den Anteil von 26,45 % im Jahr 2049.

d) Individuelle Beurteilungen.

Pariser Abkommen vom 12.12.2015, in Kraft seit 4.11.2016: Die Klimaerwärmung soll auf deutlich unter 2°, besser 1,5° begrenzt werden.

K1/4 **16 a)** Dem Diagramm ist zu entnehmen: Der Ausstoß von CO_2 in Deutschland hat vom Wert im Jahr 1990 (≙ 100 %) kontinuierlich auf etwa 78 % im Jahr 2017 abgenommen, mit einmalig etwa 77 % in den Jahren 2009 und 2014.

b)

Die Werte z. B. der Jahre 2001 bis 2006 werden nicht gut abgebildet.

c) Quadratische Ergänzung zur Scheitelpunktform ergibt S (37,5 | 71,85). Somit wäre der Tiefpunkt im Jahr 2027 erreicht.

d) In den ersten zehn Jahren des betrachteten Zeitraums ist eine stärkere jährliche Abnahme des CO_2-Ausstoßes zu erkennen als danach, deshalb ist die lineare Funktion zur Modellierung nicht geeignet.

e) Mittelfristige Klimaziele der Bundesregierung:

x	30	40	50	60
Jahr	2020	2030	2040	2050
Abnahme der Emissionen	42,3 %	55 %	70 %	100 %

Eigenschaften der Modellierungsfunktion: x: Anzahl der Jahre seit 1990,
g (x): Abnahme der Emissionen in %, nach unten geöffnet, Definitionsmenge D = [0; 60],
Anfangspunkt A (0 | 0), Scheitel S (60 | 100)

Funktionsgleichung mithilfe einer DGS experimentell bestimmen

Vertiefung

K6
- Jarne zeichnet in ein Koordinatensystem die aus dem Foto entnommenen Punkte der Brücke ein und bringt mithilfe von drei Schiebereglern für die Koeffizienten den Graphen einer quadratischen Funktion damit zur Deckung.
  Die Brücke ist 360 m lang. Im Koordinatensystem gilt $x_A = -15$ und $x_B = 15$. Lässt man den Durchhang unberücksichtigt, so kann man folgern, dass 1 LE im Koordinatensystem einer Länge von 12 m in Wirklichkeit entspricht.
  Da $y_A = y_B \approx 3{,}1$ gilt, besitzt die Brücke einen Durchhang von ungefähr 37 m.

K6
- Geeignete Fotos sind Seitenansichten von Brücken aus gleicher Höhe. Bei hohen Brücken sind solche Aufnahmen schwierig zu bekommen und daher selten.
  Die rechnerische Lösung von Modellierungsaufgaben ist gegenüber der graphischen Lösung schneller und genauer.

K4/6
- Individuelle Ergebnisse.

K6
- Die Tragseile einer Brücke verlaufen in Parabelform, wenn ihre Masse gegenüber der Masse der daran hängenden Last (Brücke) vernachlässigt werden kann.
  In der Realität nehmen die Seile die Form einer sogenannten Kettenlinie an. Das ist eine mathematische Kurve der cosh-Funktion („cosinus hyperbolicus"). Ihr Verlauf ist dem Verlauf einer Parabel ziemlich ähnlich.

Alternativer Einstieg: Schulbuch Seite 76 und 77

Entdecken

K 1/3

- Aus der Information, dass Smilla mit dem neuen Elektroroller länger braucht als vorher mit dem Fahrrad, lässt sich nicht eindeutig schließen, ob ihr Schulweg bergauf oder bergab geht.
  Eine Begründung für „bergab" könnte sein, dass sie mit dem Fahrrad sehr schnell hinunter fahren kann. E-Scooter sind in Deutschland auf eine Geschwindigkeit von 20 km/h begrenzt oder sie traut sich nicht, so schnell wie mit dem Fahrrad bergab zu fahren, weil der Roller kleine Räder hat oder weil sie noch keine Übung damit hat.
  Weniger wahrscheinlich könnte die Antwort auch „bergauf" lauten, vielleicht weil Smilla schon jahrelang mit dem Fahrrad zur Schule fährt und deshalb sehr gut trainiert ist, so dass sie mit dem Rad schneller sein kann als es die Rollerdrosselung erlaubt.

K 5/6

- Um die Gleichung $\frac{12}{x} = \frac{12}{x-4} - \frac{1}{10}$ mit $D = \mathbb{R}\setminus\{0; 4\}$ zu lösen, wird man sie mit dem Hauptnenner multiplizieren und dann mit der Lösungsformel bearbeiten:
  $12 \cdot 10 \cdot (x-4) = 10x \cdot 12 - x(x-4)$
  $x^2 - 4x - 480 = 0$
  $x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(4 \pm \sqrt{16 + 1920}\right) \Rightarrow x_1 = 24 \in D; x_2 = -20 \in D \Rightarrow L = \{24; -20\}$
  Bedeutung im Sachzusammenhang: Die negative Lösung kommt hier nicht in Frage; $x_1 = 24$ bedeutet, dass Smillas durchschnittliche Geschwindigkeit mit dem Fahrrad 24 km/h betrug, so dass sie für den 12 km langen Schulweg eine halbe Stunde brauchte. Mit dem Roller ist ihre Durchschnittsgeschwindigkeit 20 km/h, und sie braucht 36 Minuten.

Nachgefragt

K 6

- Berührung von Funktionsgraphen bedeutet: Die Graphen haben in einer Umgebung genau einen gemeinsamen Punkt, sie schneiden sich jedoch nicht.

K 1/6

- Philipp hat Recht, wenn er mit „Lagemöglichkeiten" die Anzahl gemeinsamer Punkte zweier verschiedener Parabeln meint. Parabeln können zwei, einen oder keinen Punkt gemeinsam haben.
  Beispiele:

Anzahl der gemeinsamen Punkte	**keiner**	**einer**	**zwei**
gleiche Art der Öffnung	ineinander liegend, äußere weiter, innere enger	ineinander liegend, gemeinsamer Scheitel	ineinander liegend, äußere enger, innere weiter
verschiedene Arten der Öffnung	getrennt „nebeneinander"/„übereinander"	ein Berührpunkt, z. B. gleicher Scheitelpunkt	jeweils der Scheitel innerhalb der anderen Parabel

Anmerkung: Streng genommen könnte man sagen, dass Philipp nicht Recht hat, wenn man den vierten Fall dazu nimmt, bei dem zwei Parabeln alle Punkte gemeinsam haben, weil sie „zusammenfallen", also gleich sind.

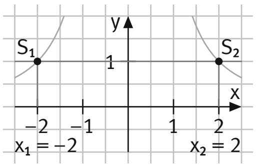
Aufgaben

K 4/5 **1** **a)** $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\frac{4}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow x_{1/2} = \pm 2 \in D$

$\Rightarrow L = \{-2; 2\}$

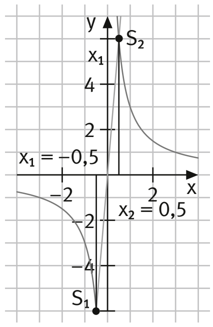


b) $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\frac{3}{x} = 12x \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\frac{1}{2} \in D$

$\Rightarrow L = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$



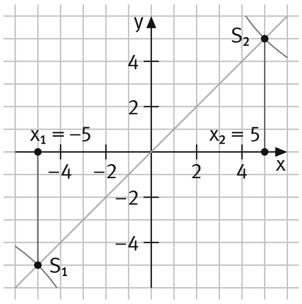
c) $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$25x^{-1} = x$

$\Leftrightarrow x^2 = 25$

$\Rightarrow x_{1/2} = \pm 5 \in D$

$\Rightarrow L = \{-5; 5\}$

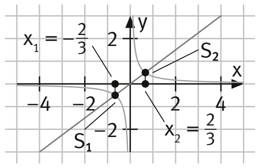


d) $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\frac{1}{3}x = \frac{3x}{4} \Leftrightarrow 9x^2 = 4$

$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\frac{2}{3} \in D$

$\Rightarrow L = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$



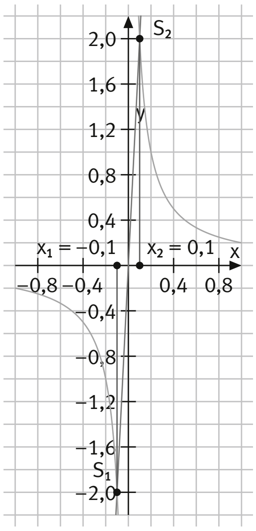
e) $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$20x = (5x)^{-1}$

$\Leftrightarrow 100x^2 = 1$

$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\frac{1}{10} \in D$

$\Rightarrow L = \left\{-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right\}$



f) $D = \mathbb{R}\setminus\{0,5\}$

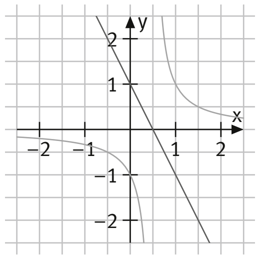
$\frac{1}{2x-1} = 1 - 2x$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2 = -1$

nicht möglich,

da $(2x-1)^2 > 0$

$\Rightarrow L = \{\}$



g) $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

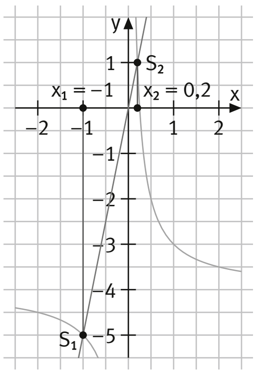
$\frac{1}{x-4} = 5x$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 4x - 1 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0{,}2 \in D;$

$\quad x_2 = -1 \in D$

$\Rightarrow L = \{0{,}2; -1\}$



h) $D = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

$\frac{1}{x^2-1} = 2$

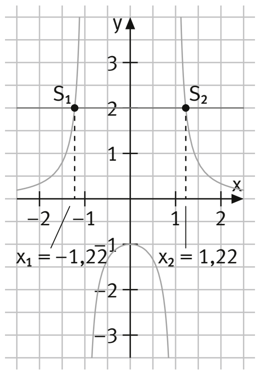
$\Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 1$

$\Rightarrow 2x^2 = 3$

$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{1{,}5}$

$\quad = \pm\frac{1}{2}\sqrt{6} \in D$

$\Rightarrow L = \left\{-\frac{1}{2}\sqrt{6}; \frac{1}{2}\sqrt{6}\right\}$



K 4/5 **2** **a)** $g_1(x) = -2x - 1$; $g_2(x) = x - 1{,}75$; $g_3(x) = x - 4$

$f_1(x) = (x-2)^2 - 4$; $f_2(x) = -(x-3)^2 + 1$;

$f_3(x) = -(x-8)^2 + 6$

b) $g_3 \cap f_1 = \{P_1(1|-3); P_2(4|0)\}$

$g_3 \cap f_3 = \{P_3(6|2); P_4(9|5)\}$

$g_1 \cap f_1 = \{P_5(1|-3)\}$

$g_2 \cap f_3 = \{P_6(7{,}5|5{,}75)\}$

c) 1 $g_3 \cap f_2$: $x - 4 = -(x-3)^2 + 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_1 = 1;\ x_2 = 4 \;\Rightarrow\; y_1 = -3;\ y_2 = 0 \quad L = \{(1|-3);\ (4|0)\}$

$f_1 \cap f_2$: $(x-2)^2 - 4 = -(x-3)^2 + 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_1 = 1;\ x_2 = 4 \;\Rightarrow\; y_1 = g(1) = -3;\ y_2 = g(4) = 0 \;\Rightarrow\; S_1(1|-3);\ S_2(4|0)$

$f_1(x) = f_2(x)$ führt zur gleichen quadratischen Gleichung, d. h. die Schnittpunkte stimmen überein.

2 $g_1 \cap f_1$: $-2x - 1 = (x-2)^2 - 4 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow\; x_1 = 1 \;\Rightarrow\; y_1 = g(1) = -3 \;\Rightarrow\; S_1(1|-3)$

$f_1 \cap f_2$: Aus 1 ist bekannt $S_1(1|-3);\ S_2(4|0)$. Damit ist die Behauptung nachgewiesen.

K4/6 **3** **a)** Gisem hat die Graphen von $g_1: x \mapsto x + 1$ und $f_1: x \mapsto -x^2 + 3$ gemeinsam in ein Koordinatensystem gezeichnet und ihre Schnittstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ abgelesen.

Tom hat die gegebene Gleichung umgeformt: $x - 2 = -x^2$. Er zeichnet die Graphen von $g_2: x \mapsto x - 2$ und $f_2: x \mapsto -x^2$ findet die gleichen Schnittstellen wie Gisem.

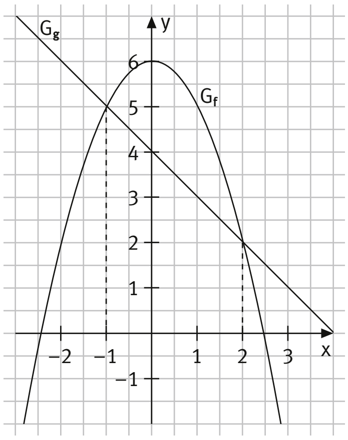
Raphael hat die gegebene Gleichung zu $x^2 + x - 2 = 0$ umgeformt, quadratisch ergänzt und die Scheitelform $y = (x + 0{,}5)^2 - 2{,}25$ erhalten. Damit zeichnet er die verschobene Normalparabel mit dem Scheitel $S(-0{,}5|-2{,}25)$ und kann deren Nullstellen als Lösungen der ursprünglichen Gleichung ablesen.

b) $x^2 + x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 8}\right) \;\Rightarrow\; x_1 = -2;\ x_2 = 1 \;\Rightarrow\; L = \{-2;\ 1\}$

c) Individuelle Lösungen und Begründungen. Beispiele:

1 graphische Lösung mit Gisems Methode:

$f(x) = -x^2 + 6,\ g(x) = -x + 4$



$L = \{-1;\ 2\}$

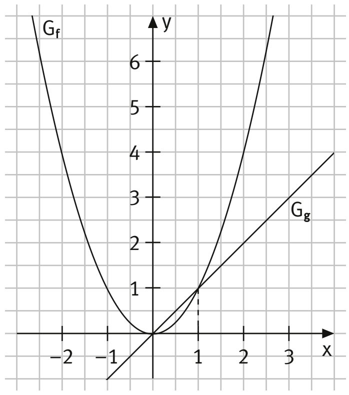
rechnerisch: $x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow\; (x+1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow\; x_1 = -1;\ x_2 = 2 \;\Rightarrow\; L = \{-1;\ 2\}$

2 graphische Lösung nach Toms Methode:

$f(x) = x^2,\ g(x) = x$



$L = \{0;\ 1\}$

rechnerisch: $x^2 - x = 0$

$\Rightarrow\; x \cdot (x - 1) = 0$

$\Rightarrow\; x_1 = 0;\ x_2 = 1 \;\Rightarrow\; L = \{0;\ 1\}$

K4/5 **4** **a)** $\frac{3}{x^2 + 2} = \frac{1}{x} \quad | \cdot x(x^2 + 2) \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

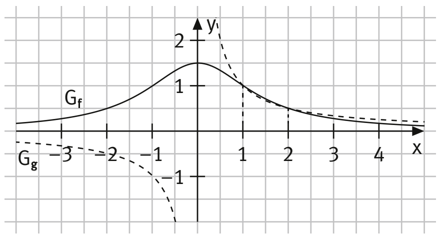
$3x = x^2 + 2 \quad | -x^2 - 2$

$-x^2 + 3x - 2 = 0 \quad | \cdot (-1)$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-1)(x-2) = 0$

$x_1 = 1 \in D;\ x_2 = 2 \in D \;\Rightarrow\; L = \{1;\ 2\}$



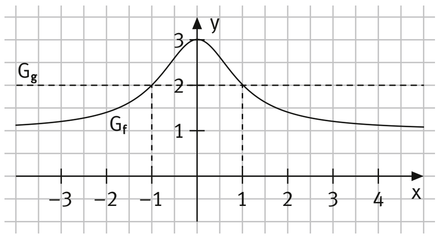
b) $\frac{x^2+3}{x^2+1} = 2 \quad |\cdot(x^2+1) \qquad D = \mathbb{R}$

$x^2 + 3 = 2x^2 + 2 \quad |-3-2x^2$

$-x^2 = -1 \quad |\cdot(-1)$

$x^2 = 1$

$x_1 = 1 \in D;\ x_2 = -1 \in D \;\Rightarrow\; L = \{-1;\ 1\}$



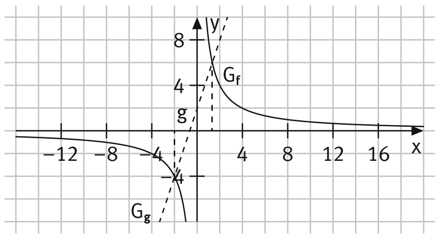
c) $\frac{8}{x} = 3x + 2 \quad |\cdot x \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$8 = 3x^2 + 2x \quad |-8$

$3x^2 + 2x - 8 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6}$

$x_1 = \frac{4}{3} \in D;\ x_2 = -2 \in D \;\Rightarrow\; L = \left\{-2;\ \frac{4}{3}\right\}$



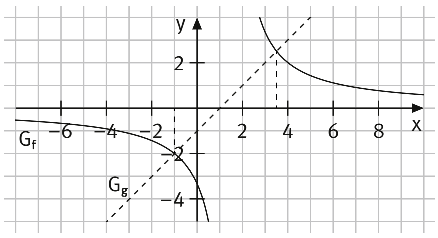
d) $\frac{10}{2x-3} = x - 1 \quad |\cdot(2x-3) \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{1{,}5\}$

$10 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 \quad |-10$

$2x^2 - 5x - 7 = 0$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+56}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{5 \pm 9}{4}$

$x_1 = 3{,}5 \in D;\ x_2 = -1 \in D \;\Rightarrow\; L = \{-1;\ 3{,}5\}$



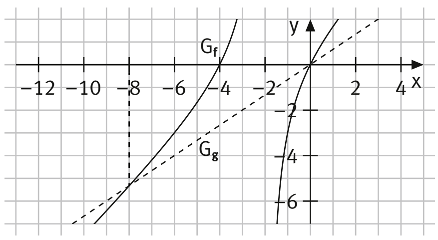
e) $\frac{x^2+4x}{x+2} = \frac{2x}{3} \quad |\cdot 3(x+2) \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$3x^2 + 12x = 2x^2 + 4x \quad |-2x^2 - 4x$

$x^2 + 8x = 0$

$x(x+8) = 0$

$x_1 = 0 \in D;\ x_2 = -8 \in D \;\Rightarrow\; L = \{-8;\ 0\}$



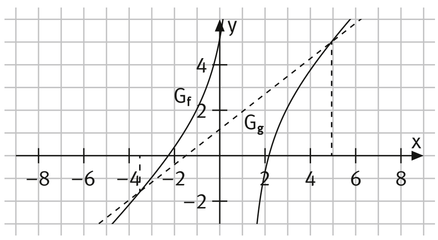
f) $\frac{x^2-5}{x-1} = \frac{7x+10}{9} \quad |\cdot 9(x-1) \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$9x^2 - 45 = 7x^2 + 10x - 7x - 10 \quad |-7x^2 - 3x + 10$

$2x^2 - 3x - 35 = 0$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+280}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{289}}{4} = \frac{3 \pm 17}{4}$

$x_1 = 5 \in D;\ x_2 = -3{,}5 \in D \;\Rightarrow\; L = \{-3{,}5;\ 5\}$



g) $\frac{2x-2}{x+3} + \frac{x+3}{x-3} = 5 \quad |\cdot(x+3)(x-3) \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{-3;\ 3\}$

$(2x-2)(x-3) + (x+3)^2 = 5(x+3)(x-3)$

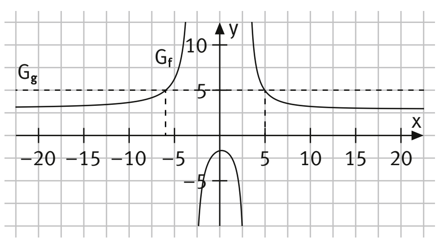
$2x^2 - 6x - 2x + 6 + x^2 + 6x + 9 = 5x^2 - 45 \quad |-5x^2 + 45$

$-2x^2 - 2x + 60 = 0 \quad |:(-2)$

$x^2 + x - 30 = 0$

$(x+6)(x-5) = 0$

$x_1 = -6 \in D;\ x_2 = 5 \in D \;\Rightarrow\; L = \{-6;\ 5\}$



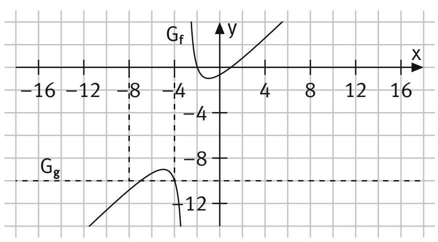
h) $\frac{x^2+x-2}{x+3} = -10 \quad |\cdot(x+3) \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$x^2 + x - 2 = -10x - 30 \quad |+10x + 30$

$x^2 + 11x + 28 = 0$

$(x+7)(x+4) = 0$

$x_1 = -7 \in D;\ x_2 = -4 \in D \;\Rightarrow\; L = \{-7;\ -4\}$



i) $\frac{8x-5}{x} = \frac{9x}{x+2} \quad | \cdot x(x+2) \quad D = \mathbb{R}\backslash\{-2; 0\}$

$(8x-5)(x+2) = 9x^2 \quad | -9x^2$

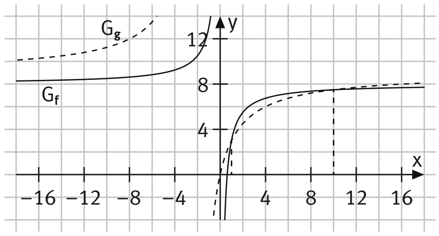
$8x^2 + 16x - 5x - 10 - 9x^2 = 0$

$-x^2 + 11x - 10 = 0 \quad | \cdot (-1)$

$x^2 - 11x + 10 = 0$

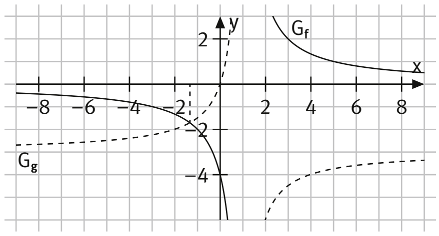
$(x-1)(x-10) = 0$

$x_1 = \in D;\ x_2 = 10 \in D \ \Rightarrow\ L = \{1; 10\}$



j) $4\,(x-1)^{-1} = \frac{3x}{1-x} \quad | \cdot (1-x) \quad D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$-4 = 3x \ \Rightarrow\ x = -\frac{4}{3} \in D \ \Rightarrow\ L = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$



k) $\frac{2x-6}{x-2} = \frac{4}{2x-1} \quad | \cdot (x-2)(2x-1) \quad D = \mathbb{R}\backslash\{0{,}5;2\}$

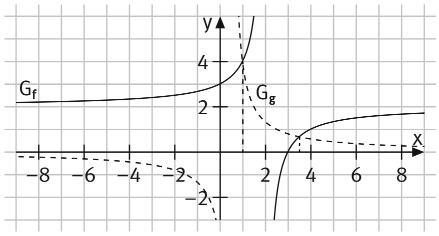
$4x^2 - 12x - 2x + 6 = 4x - 8$

$4x^2 - 18x + 14 = 0$

$2x^2 - 9x + 7 = 0$

$x_{1/2} = \frac{1}{4}\,(9 \pm \sqrt{81-56} = \frac{1}{4}\,(9 \pm 5)$

$x_1 = 3{,}5 \in D;\ x_2 = 1 \in D \ \Rightarrow\ L = \{1; 3{,}5\}$



l) $\frac{1}{3}\,(3+x) = \frac{x^2-1}{x-4} \quad | \cdot 3\,(x-4) \quad D = \mathbb{R}\backslash\{4\}$

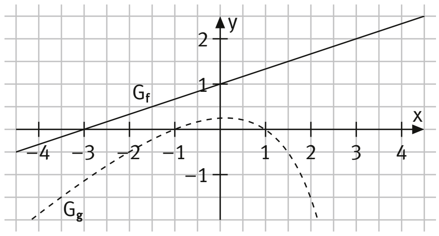
$(3+x)(x-4) = (x^2-1) \cdot 3$

$3x + x^2 - 12 - 4x = 3x^2 - 3$

$2x^2 + x + 9 = 0$

$x_{1/2} = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{1-72})$

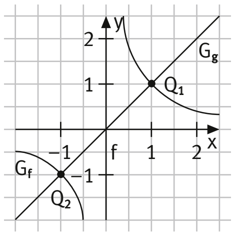
$x_{1/2} = \frac{1}{4}\,(-1 \pm \sqrt{-71}\,);\ D < 0 \ \Rightarrow\ L = \{\}$



K 4/5 **5** **a)** $x = \frac{1}{x} \ \Leftrightarrow\ x^2 = 1 \ \Rightarrow\ x_{1/2} = \pm 1$

$\Rightarrow\ y_1 = g\,(1) = 1;\ y_2 = g\,(-1) = -1$

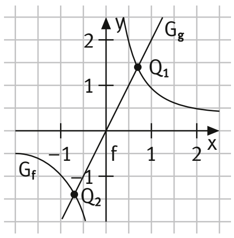
$\Rightarrow\ Q_1\,(1\,|\,1);\ Q_2\,(-1\,|\,-1)$



b) $2x = \frac{1}{x} \ \Leftrightarrow\ x^2 = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ x_{1/2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow\ y_1 = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,;\ y_2 = g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$

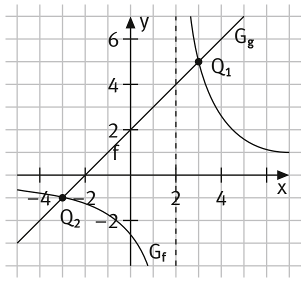
$\Rightarrow\ Q_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\middle|\sqrt{2}\right);\ Q_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\middle|-\sqrt{2}\right)$



c) $x + 2 = \frac{5}{x-2} \Leftrightarrow x^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3$

$\Rightarrow y_1 = g(3) = 5;\ y_2 = g(-3) = -1$

$\Rightarrow Q_1\,(3|5);\ Q_2\,(-3|-1)$

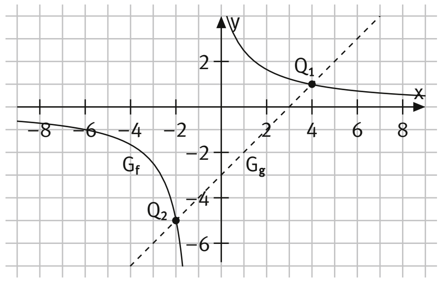


d) $x - 3 = \frac{5}{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(2 \pm \sqrt{4 + 32}\right) = 1 \pm 3 \Rightarrow x_1 = 4;\ x_2 = -2$

$\Rightarrow y_1 = g(4) = 1;\ y_2 = g(-2) = -5$

$\Rightarrow Q_1\,(4|1);\ Q_2\,(-2|-5)$



e) $2x + 1 = \frac{x+8}{x+2} \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = x + 8$

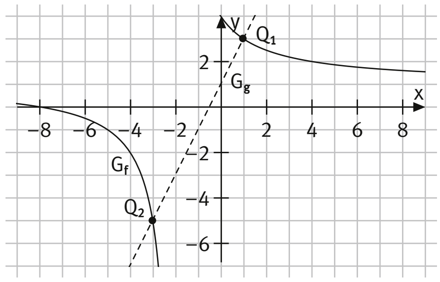
$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -3$

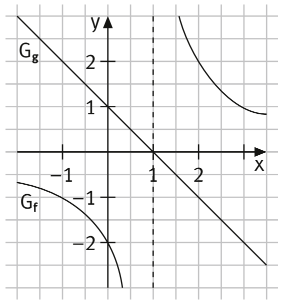
$\Rightarrow y_1 = g(1) = 3;\ y_2 = g(-3) = -5$

$\Rightarrow Q_1\,(1|3);\ Q_2\,(-3|-5)$



f) $1 - x = \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Rightarrow D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 < 0 \Rightarrow G_g$ und G_f besitzen keine gemeinsamen Punkte.

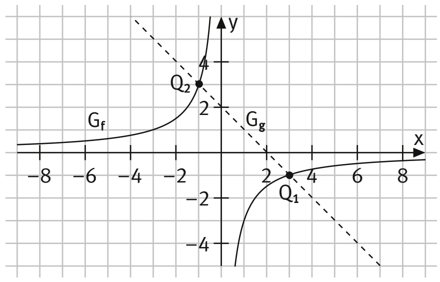


g) $2 - x = -\frac{3}{x} \Leftrightarrow 2x - x^2 = -3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 3;\ x_2 = -1$

$\Rightarrow y_1 = g(3) = -1;\ y_2 = g(-1) = 3$

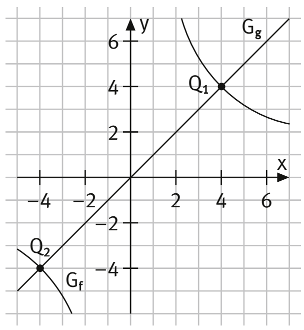
$\Rightarrow Q_1\,(3|-1);\ Q_2\,(-1|3)$



h) $x = \frac{16}{x} \Leftrightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 4$

$\Rightarrow y_1 = g(4) = 4;\ y_2 = g(-4) = -4$

$\Rightarrow Q_1\,(4|4);\ Q_2\,(-4|-4)$



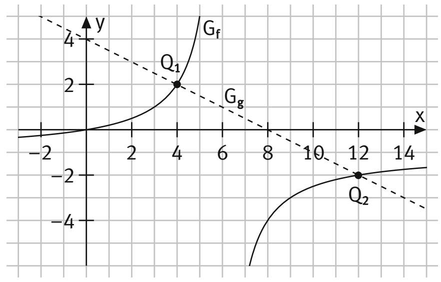
i) $4 - 0{,}5x = \frac{x}{6 - x}$

$24 - 7x + 0{,}5x^2 = x \Leftrightarrow 0{,}5x^2 - 8x + 24 = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2 \cdot 0{,}5} = 8 \pm 4 \Rightarrow x_1 = 4;\ x_2 = 12$

$\Rightarrow y_1 = g(4) = 2;\ y_2 = g(12) = -2$

$\Rightarrow Q_1(4|2);\ Q_2(12|-2)$



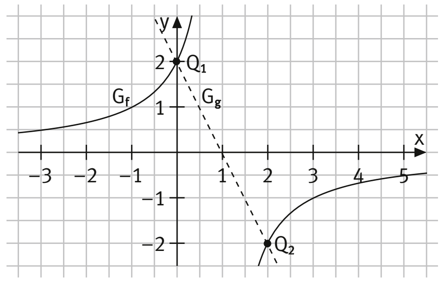
j) $-2x + 2 = -\frac{-2}{x - 1} \Leftrightarrow -2x^2 + 4x - 2 = -2$

$\Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2$

$\Rightarrow y_1 = g(0) = 2;\ y_2 = g(2) = -2$

$\Rightarrow Q_1(0|2);\ Q_2(2|-2)$



K4/6 **6 a)** In der ersten Zeile sind in der Definitionsmenge die Vorzeichen vertauscht, es muss heißen $D = \mathbb{R}\setminus\{-3; 1\}$.

In der zweiten Zeile sind die ersten beiden Klammern vertauscht, es muss lauten:

$2x(x - 1) - 3(x + 3) = 0{,}5(x + 3)(x - 1)$

$2x^2 - 5x - 9 = 0{,}5x^2 + x - 1{,}5$

In der vierten Zeile wurden die Konstanten falsch addiert.

$1{,}5x^2 - 6x - 7{,}5 = 0 \quad |:1{,}5$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

In der Lösungsformel muss die letzte Zahl im Radikanden −3 lauten, nicht −4. Mit dem Faktor −4 ist auch die Lösungsmenge falsch.

Hier aber einfacher mit dem Satz von Vieta:

$(x - 5)(x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 5;\ x_2 = -1 \quad L = \{-1; 5\}$

b) In der ersten Zeile muss die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$ lauten. Die zweite Zeile ist richtig.

In der dritten Zeile wurde die Minusklammer falsch aufgelöst, sie muss lauten:

$3x - x^2 + 4 = 2(x + 2)$

Die richtige Lösung lautet: $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 1 \Rightarrow L = \{0; 1\}$

K5 **7 a)** $\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} = -1{,}5 \quad | \cdot (x - 1)(x - 2) \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{1; 2\}$

$x - 2 + x - 1 = -1{,}5 \cdot (x - 1)(x - 2)$

$2x - 3 = -1{,}5x^2 + 4{,}5x - 3$

$1{,}5x^2 - 2{,}5x = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = \frac{5}{3}$

Probe für x_1: $LS = -1 - 0{,}5 = -1{,}5 = RS$

Probe für x_2: $LS = \frac{3}{2} - 3 = -1{,}5 = RS$

$L = \left\{0; \frac{5}{3}\right\}$

b) $\frac{1}{x - 1} - 2 = \frac{1}{x + 1}; \quad | \cdot (x - 1)(x + 1) \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$

$x + 1 - 2(x - 1)(x + 1) = x - 1$

$1 - 2x^2 + 2 = -1$

$2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$

Probe für x_1: $LS = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} - 2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{1} - 2 = \sqrt{2} - 1;\ RS = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{1} = \sqrt{2} - 1 = LS$

Probe für x_2: $LS = \frac{1}{-\sqrt{2} - 1} - 2 = \frac{-1(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1} - 2 = -\sqrt{2} - 1;\ RS = \frac{1}{-\sqrt{2} + 1} = \frac{1 + \sqrt{2}}{-2 + 1} = -1 - \sqrt{2} = LS$

$L = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

c) $\frac{8}{x-2} + \frac{1}{x+5} = 3 \mid \cdot (x-2)(x+5) \quad D = \mathbb{R}\setminus\{-5; 2\}$

$8(x+5) + x - 2 = 3 \cdot (x-2)(x+5)$

$8x + 40 + x - 2 = 3x^2 + 9x - 30$

$9x + 38 - 3x^2 - 9x + 30 = 0$

$-3x^2 + 68 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 68 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{68}{3}} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{51}$

Probe für x_1: LS $= \frac{8}{\frac{2}{3}\sqrt{51}-2} = 3 =$ RS

Probe für x_2: LS $= \frac{8}{-\frac{2}{3}\sqrt{51}-2} = 3 =$ RS

$L = \left\{-\frac{2}{3}\sqrt{51}; \frac{2}{3}\sqrt{51}\right\}$

d) $\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x} = 3 \mid \cdot x(x+1) \quad D = \mathbb{R}\setminus\{-1; 0\}$

$x^2 - 2(x+1) = 3x \cdot (x+1)$

$x^2 - 2x - 2 = 3x^2 + 3x$

$2x^2 + 5x + 2 = 0$

$x_{1/2} = \frac{1}{4}(-5 \pm \sqrt{25-16}) \Rightarrow x_1 = -0{,}5; x_2 = -2$

Probe für x_1: LS $= \frac{-0{,}5}{-0{,}5+1} - \frac{2}{-0{,}5} = -1 + 4 = 3 =$ RS

Probe für x_2: LS $= \frac{-2}{-2+1} - \frac{2}{-2} = 2 + 1 = 3 =$ RS $\qquad L = \{-2; -0{,}5\}$

e) $\frac{1}{x+3} - \frac{2}{x+1} = 3 \mid \cdot (x+3)(x+1) \quad D = \mathbb{R}\setminus\{-3; -1\}$

$(x+1) - 2(x+3) = 3(x+3) \cdot (x+1)$

$x + 1 - 2x - 6 = 3x^2 + 12x + 9$

$3x^2 + 13x + 14 = 0$

$x_{1/2} = \frac{1}{6}(-13 \pm \sqrt{169-168}) = \frac{1}{6}(-13 \pm 1) \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = -\frac{7}{3}$

Probe für x_1: LS $= \frac{1}{-2+3} - \frac{2}{-2+1} = 1 + 2 = 3 =$ RS

Probe für x_2: LS $= \frac{1}{-\frac{7}{3}+3} - \frac{2}{-\frac{7}{3}+1} = \frac{3}{2} + 1{,}5 = 3 =$ RS

$L = \{-\frac{7}{3}; -2\}$

f) $\frac{3}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = -1 \mid \cdot (x^2-1) \quad D = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$

$3 - 2(x+1) = -1 \cdot (x^2-1)$

$3 - 2x - 2 = -x^2 + 1$

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$

Probe für x_1: LS $= \frac{3}{-1} - \frac{2}{-1} = -3 + 2 = -1 =$ RS

Probe für x_2: LS $= \frac{3}{4-1} - \frac{2}{2-1} = \frac{3}{3} - \frac{2}{1} = -1 =$ RS

$L = \{0; 2\}$

g) $\frac{4}{x-3} + \frac{1}{x+3} = \frac{4}{7} \mid \cdot 7(x-3)(x+3) \quad D = \mathbb{R}\setminus\{-3; 3\}$

$7 \cdot 4 \cdot (x+3) + 7(x-3) = 4(x+3) \cdot (x-3)$

$28x + 84 + 7x - 21 = 4x^2 - 36$

$4x^2 - 35x - 99 = 0$

$x_{1/2} = \frac{1}{8}\left(35 \pm \sqrt{35^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-99)}\right) = \frac{1}{8}(35 \pm \sqrt{2809}) = \frac{1}{8}(35 \pm 53)$

$\Rightarrow x_1 = 11; x_2 = -2{,}25$

Probe für x_1: LS $= \frac{4}{11-3} + \frac{1}{11+3} = 0{,}5 + \frac{1}{14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} =$ RS

Probe für x_2: LS $= \frac{4}{-2{,}25-3} + \frac{1}{-2{,}25+3} = \frac{4}{7} =$ RS

$L = \{-2{,}25; 11\}$

h) $\frac{4}{x-2} + 6 = \frac{8}{x-3} \quad | \cdot (x-2)(x-3) \quad D = \mathbb{R}\setminus\{2; 3\}$

$4(x-3) + 6(x-2)(x-3) = 8(x-2)$

$4x - 12 + 6x^2 - 30x + 36 = 8x - 16$

$6x^2 - 34x + 40 = 0$

$x_{1/2} = \frac{1}{12}\left(34 \pm \sqrt{34^2 - 4 \cdot 6 \cdot 40}\right) = \frac{1}{12}\left(34 \pm \sqrt{196}\right) = \frac{1}{12}(34 \pm 14)$

$\Rightarrow\ x_1 = 4;\ x_2 = \frac{5}{3}$

Probe für x_1: $\quad LS = \frac{4}{4-2} + 6 = 2 + 6 = 8$; $RS = \frac{8}{4-3} = 8 = LS$

Probe für x_2: $\quad LS = \frac{4}{\frac{5}{3}-2} + 6 = -6$; $RS = \frac{8}{\frac{5}{3}-3} = -6 = LS$

$L = \left\{\frac{5}{3}; 4\right\}$

i) $\frac{5}{x+2} + \frac{x-1}{x-3} = 2 \,|\cdot (x+2)(x-3) \quad D = \mathbb{R}\setminus\{-2; 3\}$

$5(x-3) + (x-1)(x+2) = 2(x+2)\cdot(x-3)$

$5x - 15 + x^2 + x - 2 = 2x^2 - 2x - 12$

$x^2 - 8x + 5 = 0$

$x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(8 \pm \sqrt{64-20}\right) = \frac{1}{2}\left(8 \pm \sqrt{44}\right)$

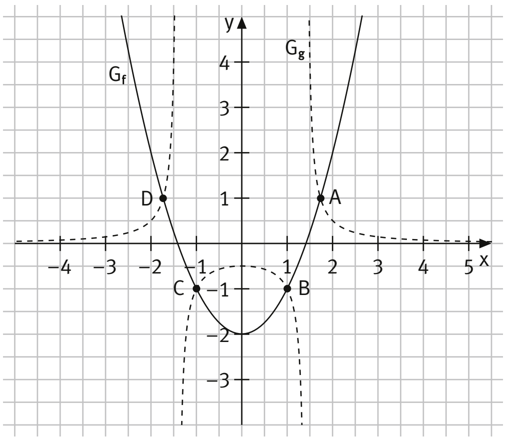
$\Rightarrow\ x_1 = 4 + \sqrt{11};\ x_2 = 4 - \sqrt{11}$

Probe für x_1: $\quad LS = \frac{5}{4+\sqrt{11}+2} + \frac{4+\sqrt{11}-1}{4+\sqrt{11}-3} = 2 = RS$

Probe für x_2: $\quad LS = \frac{5}{4-\sqrt{11}+2} + \frac{4-\sqrt{11}-1}{4-\sqrt{11}-3} = 2 = RS$

$L = \{4 - \sqrt{11}; 4 + \sqrt{11}\}$

K 4/5 **8**



$f(x) = x^2 - 2;\ f^*(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2-2};\ D_f = \mathbb{R};\ D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right\}$

Gemeinsame Punkte der Graphen G_f und G_{f^*}:

$f(x) = f^*(x) \ \Leftrightarrow\ x^2 - 2 = \frac{1}{x^2-2} \ \Rightarrow\ (x^2-2)^2 = 1 \ \Rightarrow\ x^2 - 2 = \pm 1$

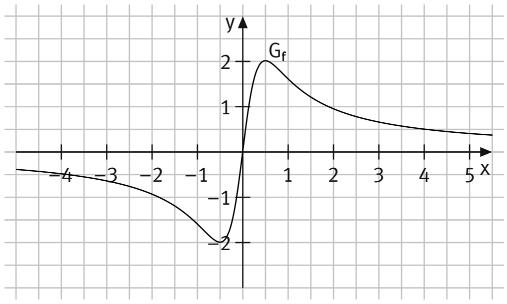
$x^2 - 2 = -1$: $\quad x^2 = 1 \ \Rightarrow\ x_1 = -1;\ x_2 = 1$

$x^2 - 2 = 1$: $\quad x^2 = 3 \ \Rightarrow\ x_3 = -\sqrt{3};\ x_4 = \sqrt{3}$

Einsetzen von $x_1, \ldots, x_4$ z. B. in die Funktionsgleichung von f ergibt die y-Koordinaten der gemeinsamen Punkte: $A(\sqrt{3}\,|\,1)$; $B(1\,|\,-1)$; $C(-1\,|\,-1)$; $D(-\sqrt{3}\,|\,1)$.

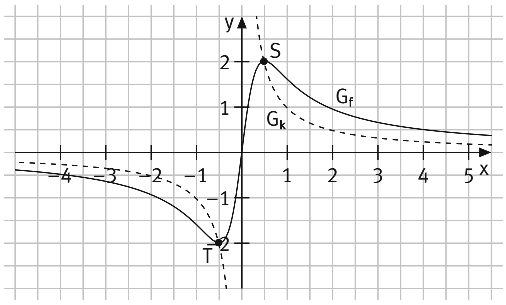
K4/6 **9** Wertetabelle für $f(x) = \frac{8x}{4x^2+1}$ z. B. (Näherungswerte):

x	−4	−3	−2	−1	−0,5	0	0,5	1	2	3	4
f(x)	−0,49	−0,64	−0,94	−1,6	−2	0	2	1,6	0,94	0,64	0,49



a) $f(-x) = \frac{8(-x)}{4(-x)^2+1} = -\frac{8x}{4x^2+1} = -f(x)$
Geometrische Deutung: Der Graph ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs.

b)



Gemeinsame Punkte von G_f und G_k:
$f(x) = k(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{8x}{4x^2+1} = \frac{1}{x} \;\Leftrightarrow\; 8x^2 = 4x^2 + 1 \;\Leftrightarrow\; 4x^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \pm 0{,}5$
Einsetzen von x_1 und x_2 z. B. in die Funktionsgleichung von k ergibt die y-Koordinaten der gemeinsamen Punkte: $S(0{,}5\,|\,2)$, $T(-0{,}5\,|\,-2)$.
Untersuchung, ob G_f für x = 2 oberhalb oder unterhalb von G_k verläuft:
$f(2) = \frac{8 \cdot 2}{4 \cdot 4 + 1} = \frac{16}{17} \approx 0{,}94$; $k(2) = 0{,}5$
Da $f(2) > k(2)$ ist, verläuft G_f für x = 2 oberhalb von G_k.

K2/5 **10** Der gesuchte Zähler wird jeweils mit x bezeichnet.

a) $\frac{x}{2x-1} = \frac{2x-1}{x}$; $D = \mathbb{N}$
$\frac{x}{2x-1} = \frac{2x-1}{x} \;\Leftrightarrow\; x^2 = (2x-1)^2 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 4x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 1 \in D;\; x_2 = \frac{1}{3} \notin D$
Der gesuchte Zähler ist 1.

b) $\frac{x}{x+2} - 1 = \frac{x+2}{x}$; $D = \mathbb{N}$
$\frac{x}{x+2} - 1 = \frac{x+2}{x} \;\Leftrightarrow\; x^2 - (x+2) \cdot x = (x+2)^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 6x + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{5} \notin D$
Es existiert keine natürliche Zahl, die das Zahlenrätsel löst.

c) $\frac{x}{2x-2+1} \cdot 3 = 1 + \frac{2x-2}{x}$; $D = \mathbb{N}$
$\frac{3x}{2x-1} = \frac{3x-2}{x} \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 7x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 2 \in D;\; x_2 = \frac{1}{3} \notin D$
Der gesuchte Zähler ist 2.

d) $\frac{x+2}{(x+1)+2} + 0{,}5 = \frac{x+1}{x} \;\Leftrightarrow\; \frac{1{,}5x+3{,}5}{x+3} = \frac{x+1}{x}$; $D = \mathbb{N}$
$\frac{1{,}5x+3{,}5}{x+3} = \frac{x+1}{x} \;\Leftrightarrow\; 0{,}5x^2 - 0{,}5x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 3 \in D;\; x_2 = -2 \notin D$
Der gesuchte Zähler ist 3.

K 1/5

11 a) Folgende Parabelpaare haben keine gemeinsamen Punkte:

③ G_{f1} hat den Scheitel $S_1(0|0)$ und verläuft nur durch die Quadranten I und II;
G_{f2} hat den Scheitel $S_2(2|-4)$ und verläuft nur durch die Quadranten III und IV.

④ G_{f1} hat den Scheitel $S_1(1|0)$ und verläuft nur durch die Quadranten I und II;
G_{f2} hat den Scheitel $S_2(-1|0)$ und verläuft nur durch die Quadranten III und IV.

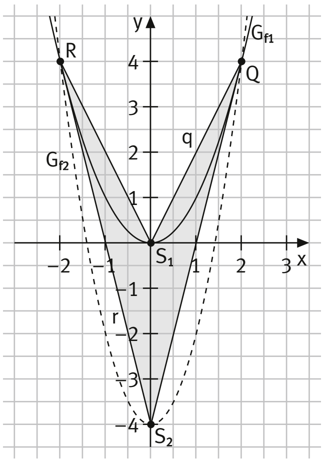
⑤ G_{f1} hat den Scheitel $S_1(0|0)$ und verläuft nur durch die Quadranten I und II;
G_{f2} hat den Scheitel $S_2(0|1)$, verläuft ebenfalls nur durch die Quadranten I und II und ist enger als G_{f1}, verläuft also stets „oberhalb" der Normalparabel G_{f1}.

b) ① $2x^2 - 4 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$
$\Rightarrow y_1 = f_1(-2) = 4;\ y_2 = f_1(2) = 4$
$\Rightarrow R(-2|4);\ Q(2|4)$

② $x^2 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$
$y_1 = f_1(-\sqrt{2}) = 2;\ y_2 = f_1(\sqrt{2}) = 2$
$Q(-\sqrt{2}|2);\ R(\sqrt{2}|2)$

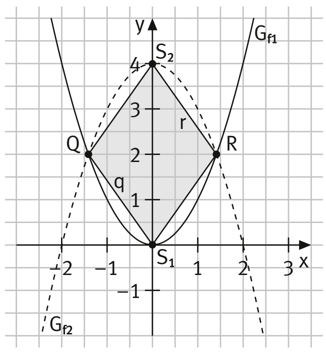
⑥ $-\frac{1}{4}x^2 + 1 = x^2 - 4 \Leftrightarrow 5 = \frac{5}{4}x^2 \Leftrightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$
$\Rightarrow y_1 = f_2(-2) = 0;\ y_2 = f_2(2) = 0$
$\Rightarrow R(-2|0);\ Q(2|0)$

c), d) ①



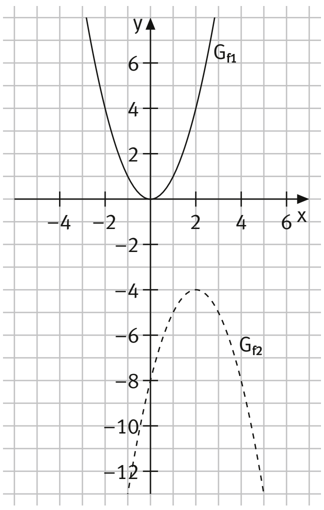
Das Drachenviereck S_1RS_2Q besitzt nur eine Symmetrieachse (die y-Achse).

②

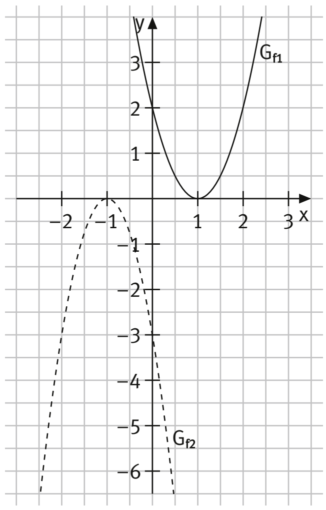


Das Viereck S_1RS_2Q ist eine Raute (Seitenlänge $\sqrt{6}$), besitzt also (mindestens) zwei Symmetrieachsen.
$A_{S1RS2Q} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 = 4\sqrt{2} \approx 5{,}7$

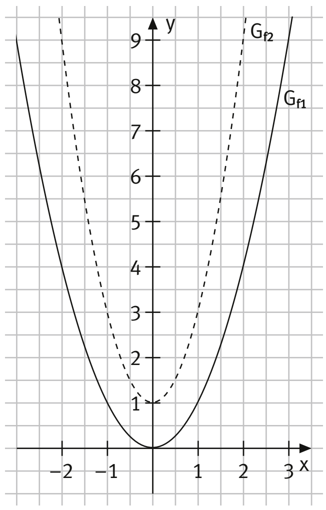
③



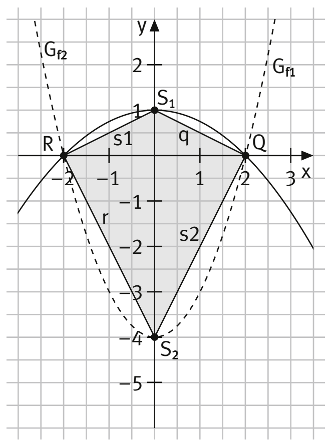
④



5



6

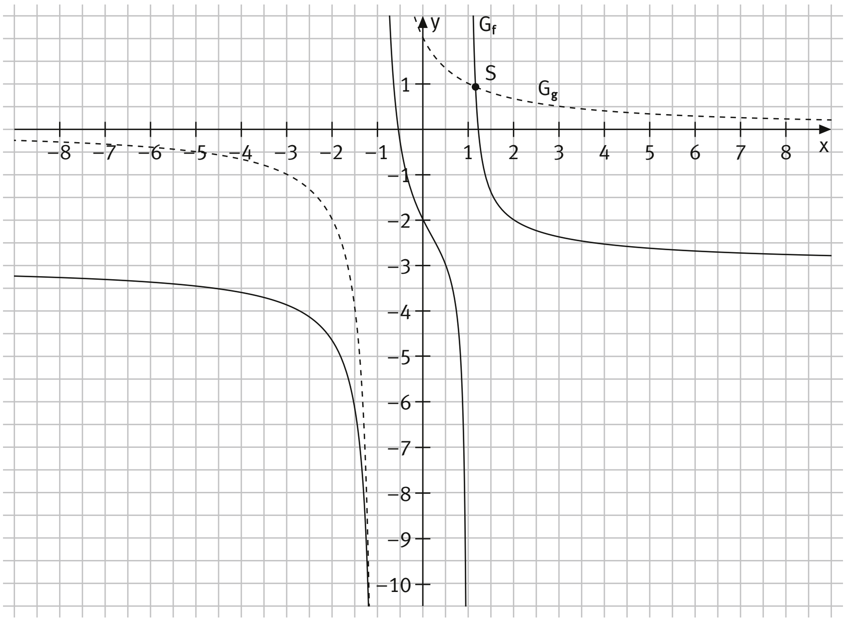


Das Drachenviereck S_1RS_2Q besitzt nur eine Symmetrieachse (die y-Achse).

K 1/6

12 a) Für die Definitionsmenge der Bruchterme gilt $D = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$. Da 1 kein Element der Definitionsmenge ist, kann x = 1 keine Lösung der Gleichung sein (man kann x = 1 nicht in die Gleichung einsetzen, da für x = 1 der Nenner des Bruchterms auf der linken Seite null wird).

b) Mit $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-1} - 3$ und $g(x) = \frac{2}{x+1}$ erhält man folgende Funktionsgraphen:



Aus der Zeichnung entnimmt man als Schnittpunkt näherungsweise S (1,2 | 0,9).

c) Man bevorzugt die rechnerische Lösung, da eine graphische Lösung oft nicht exakt abgelesen werden kann und deshalb im Allgemeinen ungenau ist. Nur in solchen Fällen, in denen eine rechnerische Lösung nicht möglich ist, greift man auf die graphische Lösung zurück.

Rechnerische Lösung der Gleichung (3. binomische Formel: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$):

$$\frac{2x-1}{x^2-1} - 3 = \frac{2}{x+1} \quad | \cdot (x-1)(x+1)$$

$$2x - 1 - 3(x^2 - 1) = 2(x-1)$$

$$-3x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3} \approx \pm 1{,}15$$

Die positive Lösung konnte in b) graphisch näherungsweise bestimmt werden. Die negative Lösung ist aber war wegen des sehr ähnlichen Verlaufs der beiden Funktionsgraphen in diesem Bereich nicht zu erkennen („schleifender Schnitt“); anhand der Graphen lässt sich noch nicht einmal mit Sicherheit sagen, ob es auch einen Schnittpunkt für x < 0 gibt.

K2/6

13 a) allgemein: $v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v}$

Hier muss man unterscheiden: $t_1 = \frac{s}{v_1}$, $t_2 = \frac{s}{v_2}$, wobei $v_2 = v_1 + 50$ ist, also $t_2 = \frac{s}{v_1 + 50}$.

Der ICE braucht mit der höheren Geschwindigkeit 24 Minuten weniger:

$t_2 = t_1 - \frac{24}{60} = \frac{s}{v_1} - \frac{24}{60}$.

Setzt man x für die Geschwindigkeit v_1, so lautet der Ansatz:

$\frac{630}{x + 50} = \frac{630}{x} - \frac{24}{60} \quad | \cdot x(x + 50)$

$630x = 630(x + 50) - 0{,}4x^2 - 20x$

$0{,}4x^2 + 20x - 31\,500 = 0$

$x^2 + 50x - 78\,750 = 0$

$x_{1/2} = -25 \pm 282 \Rightarrow x_1 = 257; x_2 < 0$ entfällt

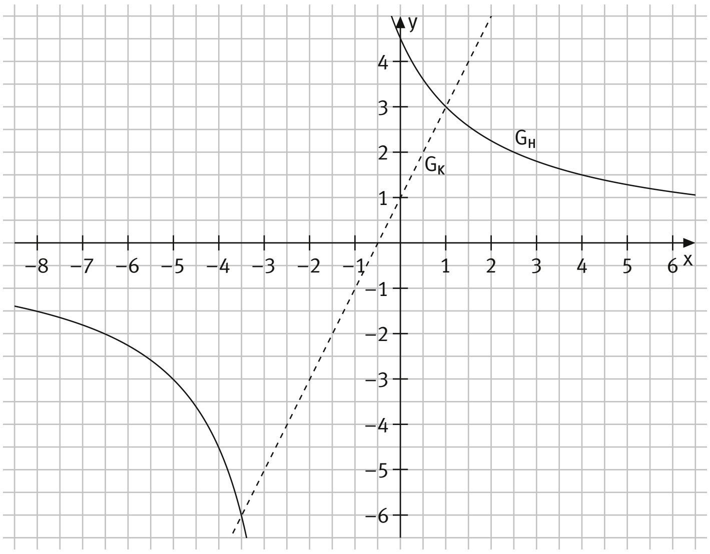
Der ICE 1 fuhr im Jahr 2018 mit etwa 257 km/h.

b) Mit dem ICE fährt man in 4 bis 5 Stunden von München nach Berlin.

c) Hochgeschwindigkeitszüge zwischen großen Städten ermöglichen fast ebenso schnelle Reisen wie Flugzeuge auf solchen Strecken, sie machen also viele kurze Inlandsflüge überflüssig.

K4/6

14 a)



Dicke d cm der Dämmung	0	≈ 2	≈ 4	≈ 6
Heizkosten H € pro m² Wand	4,5 H_o ohne Dämmung	2,25 halbes H_o	1,5 Drittel von H_o	1,125 Viertel von H_o

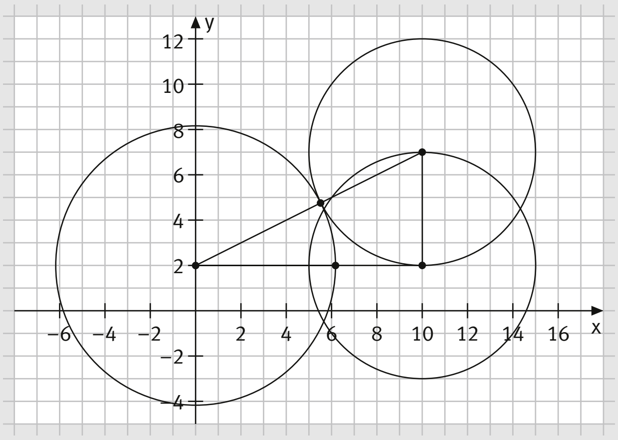
b) $D_H = [0; 20]$

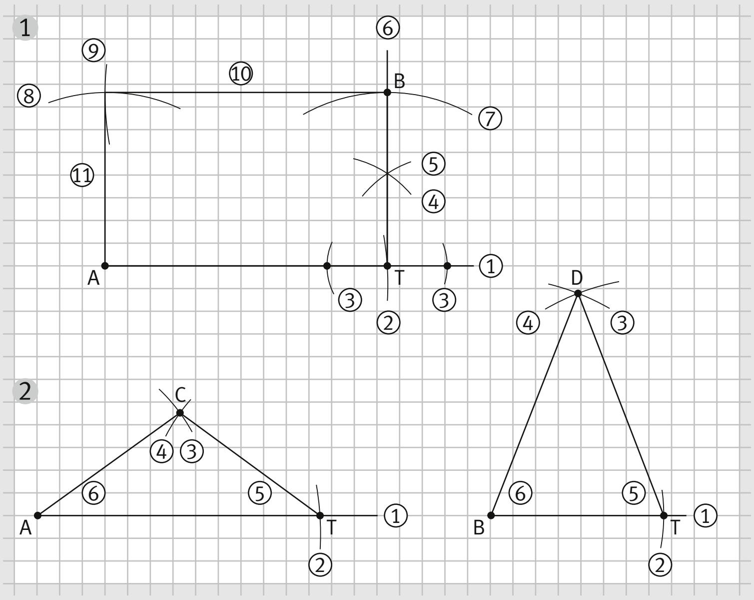
c) Bedeutung der Schnittpunkte der Graphen von H und K: Bei dieser Dicke sind die jährlichen Heizkosten und die Kosten der Dämmung gerade ausgeglichen.

Vertiefung

Der goldene Schnitt

K4 ■





K6 ■ Individuelle Diskussionsergebnisse.

K6 ■ Silberner Schnitt: Teilungsverhältnis z. B. einer Strecke, bei dem das Verhältnis der Summe des verdoppelten größeren und des kleineren Teils zum größeren Teil gleich dem Verhältnis des größeren zum kleineren Teil ist: $\frac{2a+b}{a} = \frac{a}{b}$, wobei a und b die Längen der Teilstrecken sind. Das Teilungsverhältnis des silbernen Schnitts ist $\sqrt{2} + 1$.

Der silberne Schnitt kommt z. B. (näherungsweise) bei einigen Fernsehgeräten mit besonders breitem Bildschirm zum Einsatz. Mit solchen Geräten wird eine Darstellung erreicht, der jener auf einer Kinoleinwand nahekommt.

K 5 **1** III*: $x = 4y - 3z + 11$ in I und II
ergibt $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$.
$L = \{(1; -1; 2)\}$

I*: $z = 3x + 2y + 5$ in II und III
ergibt $x = -2$, $y = 2{,}5$, $z = 4$.
$L = \{(-2; 2{,}5; 4)\}$

K 5 **2** **a)** Scheitelform: $y = -(x+1)^2 + 4$
allgemeine Form: $y = -x^2 - 2x + 3$

b) $A(0|2) \Rightarrow c = 2$
$B(-2|6) \Rightarrow 4a - 2b + 2 = 6 \Rightarrow b = 2a - 2$
$C(6|14) \Rightarrow 36a + 6b + 2 = 14$
ergibt $a = 0{,}5$; $b = -1$; $c = 2$
allgemeine Form: $y = 0{,}5x^2 - x + 2$

c) Nullstellenform: $y = -(x+2)(x-3)$
allgemeine Form: $y = -x^2 + x + 6$

a) $N_1(-3|0)$, $N_2(5|0)$, $T(0|3) \Rightarrow c = 3$
Nullstellenform: $y = a(x+3)(x-5)$
$T(0|3)$ einsetzen: $3 = a \cdot 3 \cdot (-5) \Rightarrow a = -0{,}2$
$y = -0{,}2(x+3)(x-5) = -0{,}2x^2 + 0{,}4x + 3$

b) $A(-6|7) \Rightarrow 36a - 6b + c = 7$
$B\left(-2\,\middle|\,5\tfrac{2}{3}\right) \Rightarrow 4a - 2b + c = 5\tfrac{2}{3}$
$C(3|-11) \Rightarrow 9a + 3b + c = -11$
ergibt $a = -\frac{1}{3}$, $b = -3$, $c = 1$
allgemeine Form: $y = -\frac{1}{3}x^2 - 3x + 1$

c) $A(-2|6)$: $4a - 2b + c = 6$
$B(-1|8)$: $a - b + c = 8$
$C(0|6)$: $c = 6$
ergibt $a = -2$, $b = -4$, $c = 6$
allgemeine Form: $y = -2x^2 - 4x + 6$

K 1/3 **3** **a)** Bei Vorschlag 2 braucht man nur für zwei Seiten des Beetes einen Zaun, bei Vorschlag 1 aber für drei Seiten. Deshalb wird das Beet 2 größer als Beet 1.

b) Länge des Beetes in m: x
Breite des Beetes in m: $y = (12 - x) : 2$
Flächeninhalt: $A(x)$ in m^2
$A(x) = x \cdot \frac{12 - x}{2}$

c) Ein Rechteck mit vorgegebener Umfangslänge, und damit auch die Summe zweier aneinanderstoßender Seiten, hat den größten Flächeninhalt, wenn es quadratisch ist. Demnach müssen beide Seiten 6 m lang sein, d. h. die halbe Zaunlänge. Also ist $A = (6\text{ m})^2 = 36\text{ m}^2$.

a) $A(x) = x \cdot \frac{12 - x}{2} = 6x - \frac{1}{2}x^2$
$= -\frac{1}{2}(x^2 - 12x + 36) + \frac{36}{2}$
$A(x) = -\frac{1}{2}(x - 6)^2 + 18$
Bei dieser Anlage ist das größtmögliche Beet ein 6 m langes und 3 m breites Rechteck; sein Flächeninhalt beträgt 18 m^2.

b) Die beiden Terme für die Flächeninhalte sind:
Vorschlag 1: $A(x) = \frac{1}{2}x(12 - x)$
Vorschlag 2: $A(x) = x(12 - x)$
Der Wert des zweiten Terms ist für jedes x doppelt so groß wie der Wert des ersten Terms.

c) prozentualer Unterschied: $\frac{36 - 18}{18} = 1 = 100\,\%$
Das flächengrößte Beet 2 ist um 100 % größer als das flächengrößte Beet 1.

K 3/5 **4** Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die Wasseroberfläche auf der x-Achse liegt:
$S(0|6{,}5)$ und $N(7{,}8|0)$ liegen auf der Parabel:
$f(x) = a \cdot x^2 + 6{,}5$
N einsetzen:
$0 = a \cdot 7{,}8^2 + 6{,}5$
$\Rightarrow a = -\frac{25}{234} \approx 0{,}11$
$\Rightarrow f(x) = -0{,}11x^2 + 6{,}5$

Wählt man das linke Auflager der Brücke als Ursprung, liegen folgende Punkte auf der Parabel: $O(0|0)$, $S(39{,}5|69)$ und $R(79|0)$. Einsetzen der Punktkoordinaten in die allgemeine Form einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ liefert ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten a, b und c mit der Lösung
$a = -\frac{276}{6241} \approx 0{,}044$, $b = \frac{276}{79} \approx 3{,}494$ und $c = 0$. Damit lautet die Funktionsgleichung
$f(x) = -\frac{276}{6241}x^2 + \frac{276}{79}x$.

K3/4 **5** **a)** Der Golfball erreicht maximal 32 m Höhe.

b) Bei dieser Wahl des Koordinatensystems liegt der Parabelscheitel auf der y-Achse, die beiden Nullstellen haben den gleichen Betrag, was günstig ist für die weitere Bearbeitung.

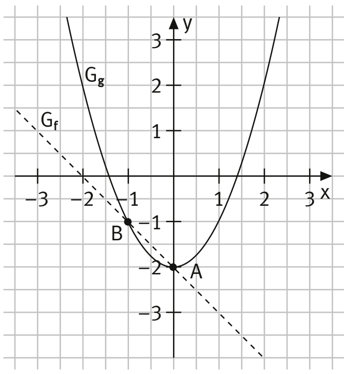
c) Der Bogen beschreibt eine Parabel mit dem Scheitelpunkt S $(0|32)$. Aus der Schlagweite von 144 m ergeben sich die beiden Schnittpunkte mit der x-Achse $N_1(-72|0)$ und $N_2(72|0)$. Einsetzen von N_1 in die Funktionsgleichung $y = ax^2 + 32$ liefert:
$0 = a \cdot 72^2 + 32 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{162}$; somit lautet die Funktionsgleichung der Parabel:
$y = -\frac{1}{162}x^2 + 32$

a) Patrick schlägt den Golfball 144 m weit.

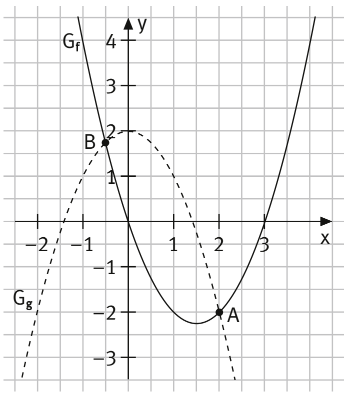
b) Nullstellenform: $y = a(x-72)(x+72)$. a wird bestimmt, indem man die Scheitelkoordinaten $(0|32)$ einsetzt. Man erhält $a = -\frac{1}{162}$.
Funktionsgleichung der Parabel:
$y = -\frac{1}{162}\ x^2 + 32 = -\frac{1}{16}(x-72)(x+72)$

c) Die Spitze des Baumes befindet sich bei P $(48|15)$. Patrick kann mit diesem Schlag den Baum überspielen, wenn bei x = 48 der y-Wert der Funktion größer als 15 ist:
$y = -\frac{1}{162} \cdot 48^2 + 32 \approx 17{,}8 > 15.$
Der Ball fliegt also über den Baum hinweg.

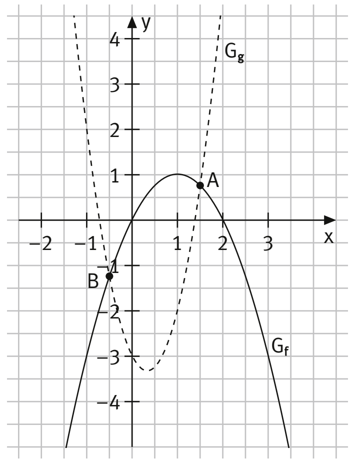
K4/5 **6** **a)** $x^2 - 2 = -x - 2$
$x^2 + x = 0$
$x(x+1) = 0$
$x_1 = 0;\ x_2 = -1$
$f(0) = -2;\ f(-1) = -1$
Schnittpunkte: A $(0|-2)$, B $(-1|-1)$



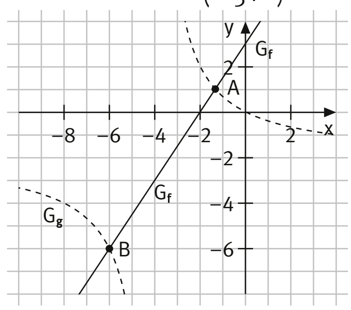
b) $x^2 - 3x = -x^2 + 2$
$2x^2 - 3x - 2 = 0$
$x_1 = 2;\ x_2 = -0{,}5;\ f(2) = -2;\ f(-0{,}5) = 1{,}75$
Schnittpunkte: A $(2|-2)$, B $(-0{,}5|1{,}75)$



a) $-x^2 + 2x = 3x^2 - 2x - 3$
$4x^2 - 4x - 3 = 0$
$x_1 = 1{,}5;\ x_2 = -0{,}5$
$f(1{,}5) = 0{,}75;\ f(-0{,}5) = -1{,}25$
Schnittpunkte: A $(1{,}5|0{,}75)$, B $(-0{,}5|-1{,}25)$



b) $1{,}5x + 3 = -\frac{2x}{x+4}$
$(1{,}5x + 3)(x + 4) = -2x$
$3x^2 + 22x + 24 = 0$
$x_1 = -\frac{4}{3};\ x_2 = -6;\ f\left(-\frac{4}{3}\right) = 1;\ f(-6) = -6$
Schnittpunkte: A $\left(-\frac{4}{3}\middle|1\right)$, B $(-6|-6)$



K 1/5 **7** Die Definitionsmenge der Bruchterme ist $D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$. Da 2 nicht zu D gehört, kann $x = 2$ keine Lösung der Gleichung sein (man kann $x = 2$ nicht in die Gleichung einsetzen, da die Nenner der Bruchterme für $x = 2$ den Wert null haben).

Bestimmung der Lösungsmenge:

$\frac{2x-1}{x-2} = \frac{x^2}{x-2} \quad | \cdot (x-2)$

$2x - 1 = x^2$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

$x = 1 \in D \Rightarrow L = \{1\}$

Die Definitionsmenge des Bruchterms auf der linken Seite ist $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, die des Bruchterms auf der rechten Seite ist $\mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$. Insgesamt lautet die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$.

Da -1 nicht zu D gehört, kann $x = -1$ keine Lösung der Gleichung sein (man kann $x = -1$ nicht in den Bruchterm auf der rechten Seite der Gleichung einsetzen, da der Nenner dieses Bruchterms für $x = -1$ den Wert null hat).

Bestimmung der Lösungsmenge:

$\frac{5}{x-1} = \frac{2x+3}{x^2-1} \quad | \cdot (x-1)(x+1)$

$5(x+1) = 2x + 3$

$5x + 5 = 2x + 3$

$3x = -2$

$x = -\frac{2}{3} \in D \Rightarrow L = \{-\frac{2}{3}\}$

K 5 **8** **a)** $D = \mathbb{R}\setminus\{-16; 1\}$

$\frac{9}{x-1} = \frac{x}{x+16} \quad | \cdot (x-1)(x+16)$

$9(x+16) = x(x-1)$

$9x + 144 = x^2 - x$

$x^2 - 10x - 144 = 0$

$x_1 = -8 \in D;\ x_2 = 18 \in D \Rightarrow L = \{-8; 18\}$

b) $D = \mathbb{R}\setminus\{-3; -0{,}5\}$

$\frac{-7+3x}{3+x} = \frac{2x-5}{1+2x} \quad | \cdot (3+x)(1+2x)$

$(-7+3x)(1+2x) = (2x-5)(3+x)$

$6x^2 - 14x + 3x - 7 = 2x^2 - 5x + 6x - 15$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_1 = 1 \in D;\ x_2 = 2 \in D \Rightarrow L = \{1; 2\}$

a) $D = \mathbb{R}$

$\frac{3x^2+5}{12} = 1 + \frac{2x^2-5}{6} \quad | \cdot 12$

$3x^2 + 5 = 12 + 4x^2 - 10$

$x^2 - 3 = 0$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{3} \Rightarrow L = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

b) $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1} - \frac{x-1}{x+1} = 2 \quad | \cdot (x+1)^2$

$x^2 - 2x + 1 - (x-1)(x+1) = 2(x+1)^2$

$x^2 - 2x + 1 - x^2 + 1 - 2x^2 - 4x - 2 = 0$

$-2x^2 - 6x = 0$

$-2x(x+3) = 0$

$x_1 = 0 \in D;\ x_2 = -3 \in D \Rightarrow L = \{-3; 0\}$

K 1/6 **9** **a)** Die Aussage ist falsch. Parallele Geraden besitzen keinen Schnittpunkt.

b) Die Aussage ist wahr. Es gibt quadratische Funktionen, deren Graphen sich nicht schneiden, z. B. $f(x) = x^2$ und $g(x) = -(x-1)^2$.

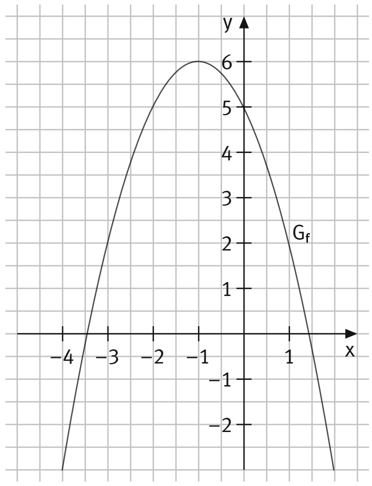
a) Die Aussage ist falsch. Die Graphen zweier quadratischer Funktionen können höchstens zwei Schnittpunkte besitzen, denn zu deren Bestimmung dient eine quadratische Gleichung und diese kann höchstens zwei Lösungen haben.

b) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Die Koordinatenachsen schneiden die Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{1}{x}$ nicht; die Achsen sind Asymptoten der Hyperbel.

K 5/6 **10** ① **a)** Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1 - \sqrt{6}; x_2 = -1 + \sqrt{6} \Rightarrow$
$N_1(-1 - \sqrt{6} \mid 0); N_2(-1 + \sqrt{6} \mid 0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 5 \Rightarrow T(0 \mid 5)$

b) $f(x)$ ist in Scheitelpunktform gegeben
$\Rightarrow$ Scheitel $S(-1 \mid 6)$
$a = -1 < 0 \Rightarrow$ Parabel nach unten geöffnet
$\Rightarrow$ größter Wert 6
Wertemenge $W =]-\infty; 6]$

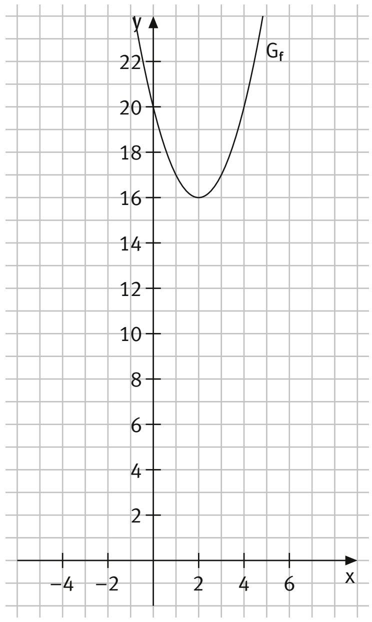
c) G_f ist für $x < -1$ monoton steigend und für $x > -1$ monoton fallend.

d)


② **a)** Keine Schnittpunkte mit der x-Achse, da $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 20 \Rightarrow T(0 \mid 20)$

b) $f(x)$ ist in Scheitelpunktform gegeben $\Rightarrow$ Scheitel $S(2 \mid 16)$
$a = 1 > 0 \Rightarrow$ Parabel nach oben geöffnet
$\Rightarrow$ kleinster Wert 16
Wertemenge $W = [16; +\infty[$

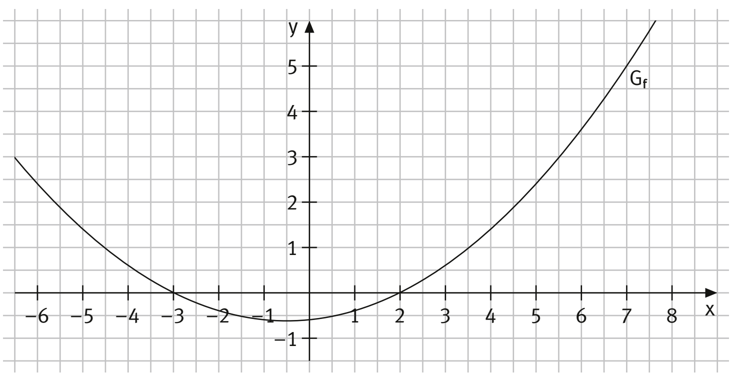
c) G_f ist für $x < 2$ monoton fallend und für $x > 2$ monoton steigend.

d)


③ **a)** Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -3 \Rightarrow N_1(2 \mid 0); N_2(-3 \mid 0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -0{,}6 \Rightarrow T(0 \mid -0{,}6)$

b) x-Koordinate des Scheitelpunkts: $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{1}{2}$
y-Koordinate des Scheitelpunkts: $y_S = f(x_S) = f(-0{,}5) = -\frac{5}{8} \Rightarrow$ Scheitel $S\left(-\frac{1}{2} \middle| -\frac{5}{8}\right)$
$a = 0{,}1 > 0 \Rightarrow$ Parabel nach oben geöffnet $\Rightarrow$ kleinster Wert $-\frac{5}{8}$
Wertemenge $W = \left[-\frac{5}{8}; +\infty\right[$

c) G_f ist für $x < -\frac{1}{2}$ monoton fallend und für $x > -\frac{1}{2}$ monoton steigend.

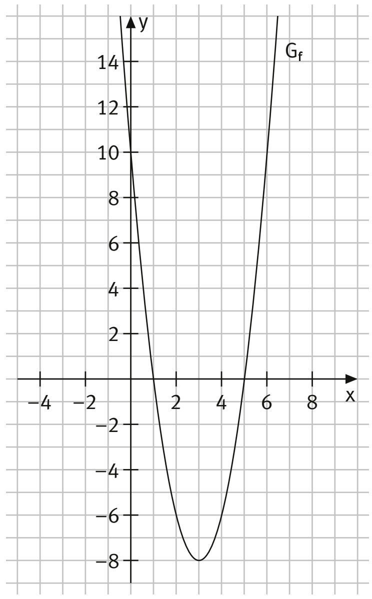
d)


4 **a)** Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 5 \Rightarrow N_1(1|0); N_2(5|0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 10 \Rightarrow T(0|10)$

b) x-Koordinate des Scheitelpunkts: $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = 3$
y-Koordinate des Scheitelpunkts: $y_S = f(x_S) = f(3) = -8$
$\Rightarrow$ Scheitel $S(3|-8)$
$a = 2 > 0 \Rightarrow$ Parabel nach oben geöffnet
$\Rightarrow$ kleinster Wert -8
Wertemenge $W = [-8; +\infty[$

c) G_f ist für $x < 3$ monoton fallend und für $x > 3$ monoton steigend.

d)

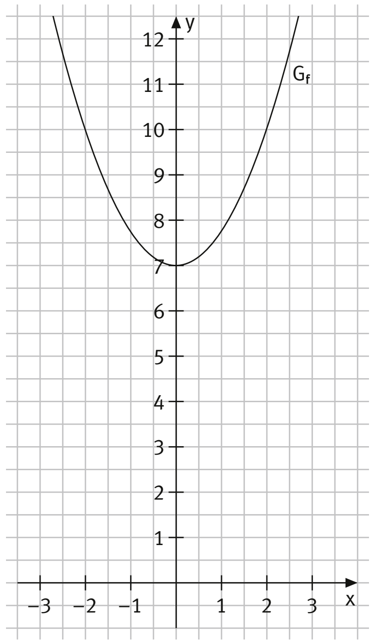


5 **a)** Keine Schnittpunkte mit der x-Achse, da $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 7 \Rightarrow T(0|7)$

b) $f(x)$ ist in Scheitelpunktform gegeben
$\Rightarrow$ Scheitel $S(0|7)$
$a = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow$ Parabel nach oben geöffnet
$\Rightarrow$ kleinster Wert 7
Wertemenge $W = [7; +\infty[$

c) G_f ist für $x < 0$ monoton fallend und für $x > 0$ monoton steigend.

d)

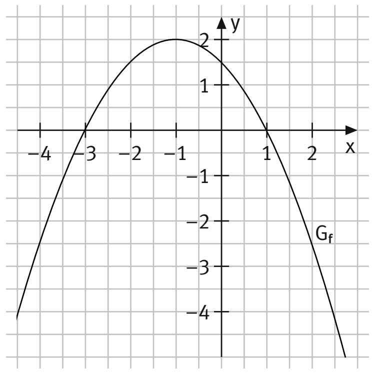


6 **a)** Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = 1 \Rightarrow N_1(-3|0); N_2(1|0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 1{,}5 \Rightarrow T(0|1{,}5)$

b) x-Koordinate des Scheitelpunkts: $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = -1$
y-Koordinate des Scheitelpunkts: $y_S = f(x_S) = f(-1) = 2$
$\Rightarrow$ Scheitel $S(-1|2)$
$a = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ Parabel nach unten geöffnet
$\Rightarrow$ größter Wert 2
Wertemenge $W =]-\infty; 2]$

c) G_f ist für $x < -1$ monoton steigend und für $x > -1$ monoton fallend.

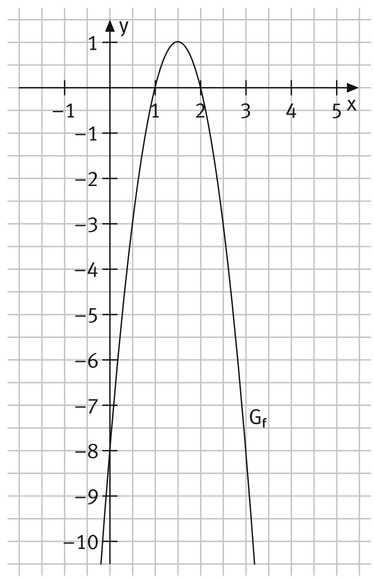
d)



7 **a)** Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 2 \Rightarrow N_1(1|0);\ N_2(2|0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -8 \Rightarrow T(0|-8)$

b) x-Koordinate des Scheitelpunkts: $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1{,}5$
y-Koordinate des Scheitelpunkts:
$y_S = f(x_S) = f(1{,}5) = 1$
$\Rightarrow$ Scheitel $S(1{,}5|1)$
$a = -4 < 0 \Rightarrow$ Parabel nach unten geöffnet
$\Rightarrow$ größter Wert 1
Wertemenge $W =]-\infty; 1]$

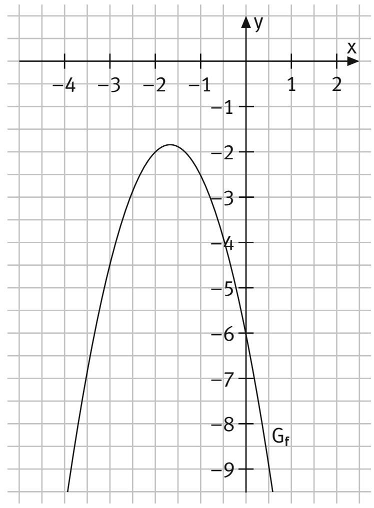
c) G_f ist für $x < 1{,}5$ monoton steigend und für $x > 1{,}5$ monoton fallend.

d)


8 **a)** Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow -1{,}5x^2 - 5x - 6 = 0$
Diskriminante $D = -9 < 0 \Rightarrow$ keine Nullstellen
$\Rightarrow$ keine Schnittpunkte mit der x-Achse
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -6 \Rightarrow T(0|-6)$

b) Umformung der Funktionsgleichung in die Scheitelpunktform durch quadratische Ergänzung:
$f(x) = -1{,}5\left(x^2 + \frac{10}{3}x + 4\right) = -1{,}5\left[\left(x + \left(\frac{5}{3}\right)\right)^2 - \frac{25}{9} + 4\right]$
$= -1{,}5\left[\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}\right] = -1{,}5\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{11}{6}$
Scheitel $S\left(-\frac{5}{3}\middle|-\frac{11}{6}\right)$
$a = -1{,}5 < 0 \Rightarrow$ Parabel nach unten geöffnet
$\Rightarrow$ größter Wert $-\frac{11}{6}$
Wertemenge $W = \left]-\infty; -\frac{11}{6}\right]$

c) G_f ist für $x < -\frac{5}{3}$ monoton steigend und für $x > -\frac{5}{3}$ monoton fallend.

d)


K4/5 **11** allgemeine Form einer quadratischen Funktion: $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) $a = 2{,}5 \Rightarrow y = 2{,}5x^2 + bx + c$
Einsetzen der Koordinaten der Punkte A und B in die Funktionsgleichung:
$A(2|10)$: I: $10 = 2{,}5 \cdot 2^2 + 2b + c \Leftrightarrow 10 = 10 + 2b + c \Leftrightarrow 2b + c = 0 \Rightarrow c = -2b$
$B(-3|12)$: II: $12 = 2{,}5 \cdot (-3)^2 - 3b + c \Leftrightarrow 12 = 22{,}5 - 3b + c \Leftrightarrow -3b + c = -10{,}5$
I einsetzen in II: $-3b - 2b = -10{,}5 \Rightarrow b = 2{,}1$
$b = 2{,}1$ einsetzen in I: $c = -4{,}2$
$\Rightarrow f(x) = 2{,}5x^2 + 2{,}1x - 4{,}2$

b) Einsetzen der Koordinaten der Punkte A, B und C in die Funktionsgleichung:
$A(4|0)$: I: $0 = a\ 4^2 + 4b + c \Leftrightarrow 16a + 4b + c = 0$
$B(0|-8)$: II: $-8 = a \cdot 0^2 + 0b + c \Rightarrow c = -8$
$C(-2|-36)$: III: $-36 = a \cdot (-2)^2 - 2b + c \Leftrightarrow 4a - 2b + c = -36$
$c = -8$ einsetzen in I: $16a + 4b - 8 = 0 \Rightarrow b = 2 - 4a$ (IV)
$c = -8$ einsetzen in III: $4a - 2b - 8 = -36 \Leftrightarrow 2a - b = -14$ (V)
IV einsetzen in V: $2a - (2 - 4a) = -14 \Leftrightarrow -2 + 6a = -14 \Rightarrow a = -2$
$a = -2$ einsetzen in IV: $b = 2 - 4 \cdot (-2) = 10 \Rightarrow f(x) = -2x^2 + 10x - 8$

c) Ablesen der Koordinaten der Punkte A, B und C: A (−1 | 1), B (2,5 | 0), C (3 | −1)
Einsetzen der Koordinaten der Punkte A, B und C in die Funktionsgleichung:

A (−1 | 1): I: $1 = a \cdot (-1)^2 - b + c \Leftrightarrow a - b + c = 1 \Rightarrow c = 1 - a + b$

B (2,5 | 0): II: $0 = a \cdot 2{,}5^2 + 2{,}5b + c \Leftrightarrow 6{,}25a + 2{,}5b + c = 0$

C (3 | −1): III: $-1 = a \cdot 3^2 + 3b + c \Leftrightarrow 9a + 3b + c = -1$

I einsetzen in II: $6{,}25a + 2{,}5b + 1 - a + b = 0 \Leftrightarrow 5{,}25a + 3{,}5b + 1 = 0$ (IV)

I einsetzen in III: $9a + 3b + 1 - a + b = -1 \Leftrightarrow 8a + 4b = -2 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} - 2a$ (V)

V einsetzen in IV: $5{,}25a - 1{,}75 - 7a + 1 = 0 \Leftrightarrow 1{,}75a = -0{,}75 \Rightarrow a = -\frac{3}{7}$

$a = -\frac{3}{7}$ einsetzen in V: $b = -\frac{1}{2} + \frac{6}{7} = \frac{5}{14}$

$a = -\frac{3}{7}$ und $b = \frac{5}{14}$ einsetzen in I: $c = 1 + \frac{3}{7} + \frac{5}{14} = \frac{25}{14}$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{3}{7}x^2 + \frac{5}{14}x + \frac{25}{14}$

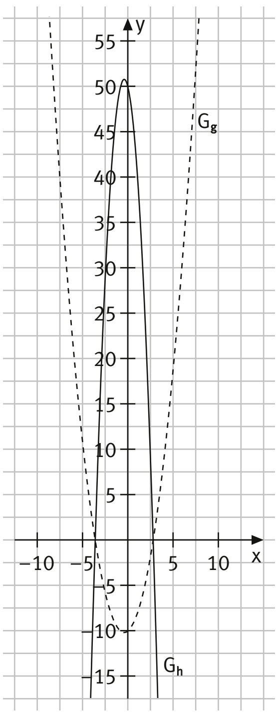
K 1/6

12 Emely löst die Aufgabe rechnerisch, indem sie die Funktionsgleichungen gleichsetzt. Dann ermittelt sie die Lösungen x_1 und x_2 der entstandenen Gleichung, berechnet die zugehörigen y-Werte y_1 und y_2 und gibt die Lösungsmenge $L = \{(x_1 | y_1); (x_2 | y_2)\}$ an.
Luca löst die Aufgabe zeichnerisch, indem er die Graphen der beiden quadratischen Gleichungen in ein Koordinatensystem zeichnet und der Zeichnung die Schnittpunkte $S_1 (x_1 | y_1)$ und $S_2 (x_2 | y_2)$ entnimmt und damit $L = \{(x_1 | y_1); (x_2 | y_2)\}$ angibt.
Das rechnerische Verfahren hat den Vorteil, dass es schnell durchgeführt ist und exakte Werte der Koordinaten ergibt, Nachteile hat es nicht.
Beim graphischen Lösen kann man nicht sicher sein, dass die abgelesenen Koordinaten genau sind, zudem erfordert es oft mehr Zeit als die Rechnung.

K 5/6

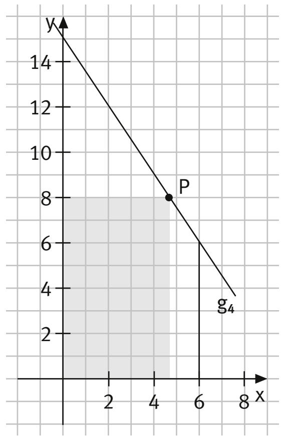
13 **a)** Gesucht ist die Zeit t, zu der der Stein auf den Boden auftrifft, wenn also h = 0 gilt.
$h = 0$: $50 - 5t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow 5t^2 + 4t - 50 = 0 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{1}{10}\left(-4 \pm \sqrt{1016}\right)$
$t_1 \approx 2{,}79$; die Lösung $t_2 < 0$ entfällt im Sachzusammenhang.
Der Stein trifft etwa 2,79 Sekunden nach dem Abwurf auf dem Boden auf.

b)



Zusammenhänge der Graphen und Funktionsgleichungen:
Die Funktionsgleichung von h ist die mit −5 multiplizierte Funktionsgleichung von g.
G_g ist nach oben geöffnet und kongruent zur Normalparabel, G_h ist nach unten geöffnet und enger als die Normalparabel. Die Scheitelpunkte von G_g und G_h haben die gleiche x-Koordinate −0,4; ihre Nullstellen stimmen überein.
Zusammenfassung: G_h geht aus G_g durch Streckung mit dem Faktor 5 und Spiegelung an der x-Achse hervor.

K2/5 **14 a)**

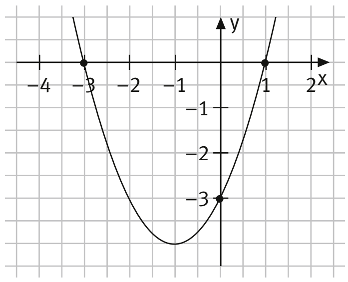


Die Seiten des Trapezes liegen auf den Geraden g_1, g_2, g_3 bzw. g_4:
(x-Achse) g_1: $y = 0$
(y-Achse) g_2: $x = 0$
(Parallele zur y Achse) g_3 : $x = 6$
g_4 : $y = -1{,}5x + 15$
Rechnung mit Maßzahlen zur Einheit cm.

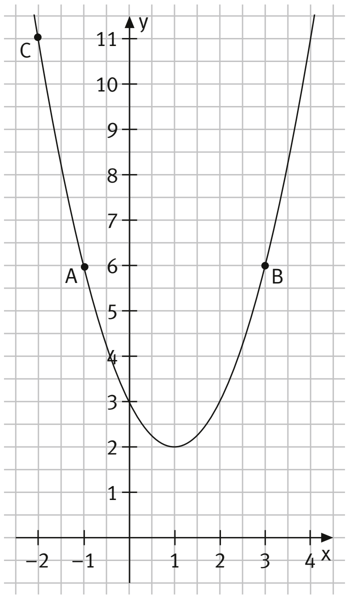
b) $P(x \mid -1{,}5x + 15)$
Flächeninhalt des Rechtecks:
$A(x) = x \cdot (-1{,}5x + 15) = -1{,}5x^2 + 15x = -1{,}5(x^2 - 10x + 5^2 - 5^2) = -1{,}5 \cdot (x-5)^2 - 1{,}5 \cdot (-25)$
$= -1{,}5(x-5)^2 + 37{,}5$
Der Flächeninhalt des Rechtecks ist am größten für x = 5, er beträgt dann 37,5 cm².
Anmerkung: Der Scheitelpunkt $S(x_S \mid y_S)$ der Parabel $A(x)$ kann auch mithilfe der leicht erkennbaren Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$ von $A(x)$ bestimmt werden:
$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = 5$, $y_S = A(x_S) = A(5) = 37{,}5$.

K4/5 **15** Aus dem Text entnimmt man gemäß des in die Zeichnung der Brücke eingefügten Koordinatensystems die drei Parabelpunkte $S(0 \mid 67)$, $A(-640 \mid 189)$, $B(640 \mid 187)$.
Einsetzen von S in die Scheitelpunktform: $f(x) = ax^2 + 67$.
Einsetzen von B: $187 = a \cdot 640^2 + 67 \;\Rightarrow\; a = \frac{3}{10\,240} \approx 0{,}0003$
$f(x) = \frac{3}{10\,240}x^2 + 67$

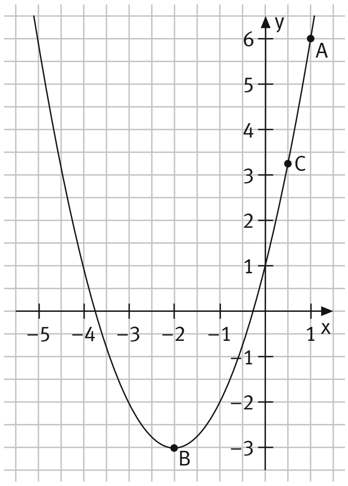
K2/5 **16 a)** P: $y = a(x+3)(x-1)$
Einsetzen von C: $-3 = a \cdot 3 \cdot (-1) \;\Rightarrow\; a = 1$
$\Rightarrow$ P: $y = (x+3)(x-1)$
Gerade AB: $y = 0 \;\Rightarrow\; C^*(0 \mid 0)$



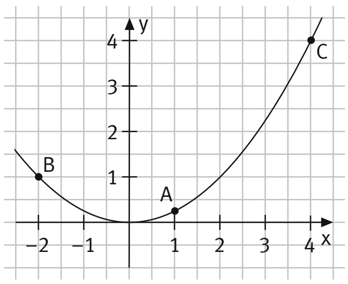
b) $y_A = y_B \Rightarrow x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$
P: $y = a(x-1)^2 + e$
$A \in P$: I: $6 = a(-1-1)^2 + e \Rightarrow e = 6 - 4a$
$C \in P$: II: $11 = a(-2-1)^2 + e \Leftrightarrow 11 = 9a + e$
I einsetzen in II: $11 = 9a + 6 - 4a \Rightarrow a = 1$
$a = 1$ einsetzen in I: $e = 6 - 4 = 2$
$\Rightarrow$ P: $y = (x-1)^2 + 2$
Gerade AB: $y = 6 \Rightarrow C^*(-2|6)$



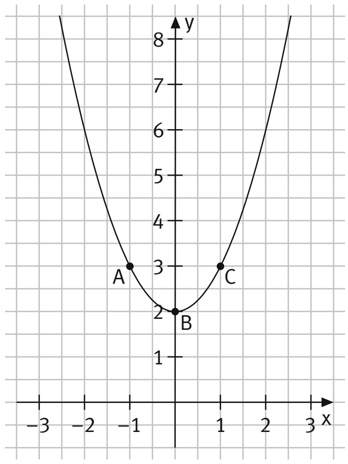
c) $A \in P$: I: $6 = a + b + c$
$B \in P$: II: $-3 = 4a - 2b + c$
$C \in P$: III: $3{,}25 = 0{,}25a + 0{,}5b + c$
II – I: $-9 = 3a - 3b \Rightarrow a = b - 3$ (IV)
I – III: $2{,}75 = 0{,}75a + 0{,}5b$ (V)
IV einsetzen in V: $2{,}75 = 0{,}75b - 2{,}25 + 0{,}5b \Rightarrow b = 4$
$b = 4$ einsetzen in IV: $a = 1$
$a = 1$ und $b = 4$ einsetzen in I: $c = 1$
$\Rightarrow$ P: $y = x^2 + 4x + 1$
Gerade AB: $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{9}{3} = 3$
Einsetzen von A in $y = 3x + t$: $t = 3 \Rightarrow y = 3x + 3$
$y_{C^*} = 3 \cdot 0{,}5 + 3 = 4{,}5 \Rightarrow C^*(0{,}5|4{,}5)$



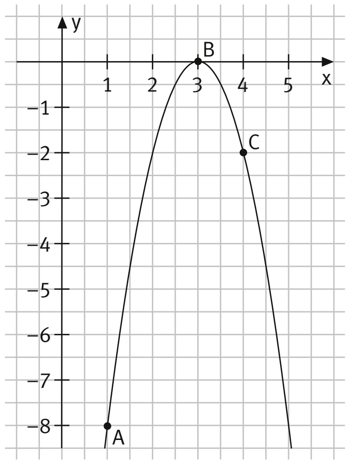
d) $A \in P$: I: $0{,}25 = a + b + c \Rightarrow c = 0{,}25 - a - b$
$B \in P$: II: $1 = 4a - 2b + c$
$C \in P$: III: $4 = 16a + 4b + c$
I einsetzen in II:
$1 = 4a - 2b + 0{,}25 - a - b \Leftrightarrow 0{,}75 = 3a + 3b \Rightarrow b = 0{,}25 - a$ (IV)
I einsetzen in III:
$4 = 16a + 4b + 0{,}25 - a - b \Leftrightarrow 3{,}75 = 15a + 3b$ (V)
IV einsetzen in V: $3{,}75 = 15a + 0{,}75 - 3a \Rightarrow a = \frac{1}{4}$
$a = \frac{1}{4}$ einsetzen in IV: $b = 0$
$a = \frac{1}{4}$ und $b = 0$ einsetzen in I: $c = 0$
$\Rightarrow$ P: $y = \frac{1}{4}x^2$
Gerade AB: $m = \frac{0{,}75}{-3} = -0{,}25$
Einsetzen von A in $y = -0{,}25x + t$: $t = 0{,}5 \Rightarrow y = -0{,}25x + 0{,}5$
$y_{C^*} = -0{,}25 \cdot 4 + 0{,}5 = -0{,}5 \Rightarrow C^*(4|-0{,}5)$



e) Da A und C symmetrisch bezüglich der y-Achse liegen, ist diese die Symmetrieachse der Parabel. $B \in P$ liegt auf der y-Achse, deshalb ist B der Scheitel der Parabel.
Scheitelpunktform: $y = ax^2 + 2$
Einsetzen von C: $3 = a \cdot 1 + 2 \Rightarrow a = 1$
$\Rightarrow$ P: $y = x^2 + 2$
Gerade AB: $y = -x + 2 \Rightarrow C^*(1|1)$



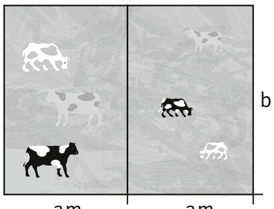
f) $A \in P$: I: $-8 = a + b + c$
$B \in P$: II: $0 = 9a + 3b + c \Rightarrow c = -9a - 3b$
$C \in P$: III: $-2 = 4a + 2b + c$
II einsetzen in I: $-8 = a + b - 9a - 3b \Rightarrow b = 4 - 4a$ (IV)
II einsetzen in III: $-2 = 4a + 2b - 9a - 3b \Leftrightarrow 2 = 5a + b$ (V)
IV einsetzen in V: $2 = 5a + 4 - 4a \Rightarrow a = -2$
$a = -2$ einsetzen in IV: $b = 4 + 8 = 12$
$a = -2$ und $b = 12$ einsetzen in II: $c = 18 - 36 = -18$
$\Rightarrow$ P: $y = -2x^2 + 12x - 18$
Gerade AB: $y = 4x - 12 \Rightarrow C^*(4|4)$



K 3/5 **17** $y = 2\,m - \frac{8x^2}{25\,m}$
$2\,m - \frac{8x^2}{25\,m} = 0 \quad | \cdot 25\,m$
$50\,m^2 - 8x^2 = 0 \quad | -50\,m^2$
$-8x^2 = -50\,m^2 \quad | : (-8)$
$x^2 = 6{,}25\,m^2 \Rightarrow x = \pm 2{,}5\,m$; $x < 0$ entfällt im Sachzusammenhang
$A = x^2 \cdot \pi = 6{,}25\,m^2 \cdot \pi \approx 19{,}6\,m^2$

K 2/3 **18** Ursprünglicher Preis pro Mitfahrer in €: x; ursprüngliche Anzahl der Mitfahrer: y
Gesamtkosten für den Bus: I: $x \cdot y = 1568 \Rightarrow$ I': $y = \frac{1568}{x}$
Nach der Änderung: II: $(x - 3{,}5)(y + 8) = 1568 \Rightarrow$ II': $xy + 8x - 3{,}5y - 28 = 1568$
I' in II' einsetzen:
$1568 + 8x - \frac{3{,}5 \cdot 1568}{x} - 28 = 1568 \quad | \cdot x$
$8x^2 - 28x - 5488 = 0 \quad |: 8$
$x^2 - 3{,}5x - 686 = 0$
$x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 + 2744}\right)$
$x_1 = 28$; $x_2 < 0$ entfällt $\Rightarrow y = \frac{1568}{28} = 56$
Die Anzahl der Mitfahrer stieg von 56 auf 64, der Fahrpreis pro Schüler sank von 28 € auf 24,50 €.

K2/3 **19**



I: $4a + 3b = 1000 \Rightarrow 2a = 500 - 1{,}5b$

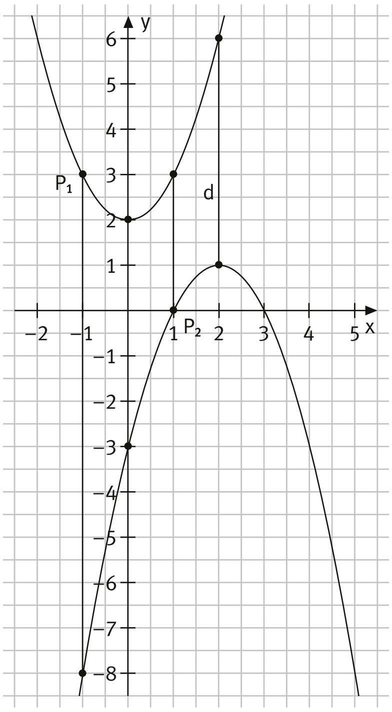
II: $A = 2a \cdot b$

I einsetzen in II: $A = (500 - 1{,}5b) \cdot b = -1{,}5b \cdot \left(b - 333\frac{1}{3}\right)$

$b_S = \frac{333\frac{1}{3}}{2} = 166\frac{2}{3} \Rightarrow y_S = -1{,}5 \cdot 166\frac{2}{3} \cdot \left(166\frac{2}{3} - 333\frac{1}{3}\right) = 41\,666\frac{2}{3}$

Für eine maximale Fläche von rund $41\,667\,\text{m}^2$ muss ein Rechteck 166,7 m lang und 125,0 m breit sein.

K2/5 **20 a)**



b)

x	B_1	B_2	$\overline{B_1B_2}$
−1	(−1|3)	(−1|−8)	11
0	(0|2)	(0|−3)	5
1	(1|3)	(1|0)	3
2	(2|6)	(2|1)	5

c) Funktionsterm für die Streckenlänge d:

$d = y_{B1} - y_{B2} = x^2 + 2 - [-(x-2)^2 + 1] = 2x^2 - 4x + 5$

d) $d(x) = x^2 + 2 - [-(x-2)^2 + 1]$

$= x^2 + 2 + x^2 - 4x + 4 - 1$

$= 2x^2 - 4x + 5$

$= 2\left(x^2 - 2x + 1\right) - 2 + 5$

$= 2\left(x - 1\right)^2 + 3$:

d ist am kleinsten, wenn x = 1 ist;

$d_{min} = 3$.

K 5 **21 a)** $\frac{x-1}{x+2} - \frac{4-x}{x-3} = \frac{x^2-x+1}{(x+2)(x-3)} \quad | \cdot (x+2)(x-3) \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$

$(x-1)(x-3) - (4-x)(x+2) = x^2 - x + 1$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$(x+1)(x-6) = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \in D; x_2 = 6 \in D$

Probe: $x_1 = -1$: LS: $\frac{-1-1}{-1+2} - \frac{4+1}{-1-3} = -2 + \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$

RS: $\frac{1+1+1}{(-1+2)(-1-3)} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$

$x_2 = 6$: LS: $\frac{6-1}{6+2} - \frac{4-6}{6-3} = \frac{5}{8} + \frac{2}{3} = \frac{31}{24}$

RS: $\frac{36-6+1}{(6+2)(6-3)} = \frac{31}{24}$

$L = \{-1; 6\}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$

Rechnung: $\frac{2x+1}{3x+2} + \frac{x-1}{2(3x-2)} = \frac{10x-12x^2}{8-18x^2} \quad | \cdot 2(3x+2)(3x-2)$

$(2x+1)(6x-4) + (x-1)(3x+2) = -(10x-12x^2)$

$3x^2 + 7x - 6 = 0$

$x_{1/2} = \frac{1}{6}\left(-7 \pm \sqrt{49+72}\right) \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3} \notin D; x_2 = -3 \in D$

Probe: LS: $\frac{-6+1}{-9+2} + \frac{-3-1}{2(-9-2)} = \frac{-5}{-7} + \frac{-4}{-22} = \frac{69}{77}$; RS: $\frac{-30-12 \cdot 9}{8-18 \cdot 9} = \frac{69}{77}$

$L = \{-3\}$

K 3/5 **22** Startort B $(5|6)$, Absprung C $(0|2)$, Flugbahn Flugbahn $y = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{12}{5}x + 2$

a) Der Startort B liegt 6 m über dem Boden.

b) Berechnung der Sprunghöhe h:

P in Scheitelform: $y = -\frac{3}{5}(x-2)^2 + 4{,}4 \Rightarrow S(2|4{,}4)$

$h = y_S - y_C = 2{,}4 \Rightarrow$ Die Sprunghöhe h beträgt 2,4 m.

c) Sei der Punkt $W \in P$ mit $x_W > 0$ und $y_W = 1$.

In die Parabelgleichung eingesetzt, erhält man W $(4{,}4|1)$.

Sprungweite $w = x_W - x_C = 4{,}4 - 0 = 4{,}4 \Rightarrow$ Der Sprung geht 4,4 m weit.

K 2/3 **23** Bedingungen: $R + h = 100$; $h = 100 - R$; $20 < R < 65$

Wasservolumen: $V = (100-R)^2 (90-R) \cdot \pi = \pi \cdot (-R^3 + 110R^2 - 1900R + 9000)$

Da dies ein Term dritten Grades ist, kann man den größten Wert nicht mit der bekannten Methode finden. Die Schüler könnten eine Wertetabelle erstellen und den Höchstwert graphisch ermitteln.

Das maximale Wasservolumen passt in das Becken, wenn $R \approx 63$ cm beträgt, h demnach etwa 37 cm. Im Becken sind dann etwa 238 Liter.

K 1/6 **1** **1 und B:** Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass der Abschlag im Ursprung liegt. Die zweite Nullstelle $x = 120$ gibt an, wie weit der Golfball geflogen ist. Der Scheitelpunkt beschreibt die maximale Höhe, die der Golfball bei Amys Schlag erzielt.

2 und D: Durch Einsetzen (und Runden auf eine Dezimalstelle) erhält man, dass der Punkt $P(80|6{,}7)$ auf dem Graphen der Parabel P: $y = 0{,}0003x^2 + 0{,}008x + 4{,}1$ liegt.
Der Scheitelpunkt ist ein Minimum, da $a = 0{,}0003x^2 > 0$ ist. Der Scheitelpunkt gibt an, bei welcher Geschwindigkeit der minimale Benzinverbrauch in Liter pro 100 km erzielt wird.

3 und A: Der Scheitelpunkt $S(6|869{,}5)$ beschreibt ein Maximum, da $a = -25$ ist. Juni ist der 6. Monat im Jahr. Der Scheitelpunkt $S(6|869{,}5)$ gibt an, dass die Solaranlage im Juni 869,5 kWh Strom produziert hat.

4 und C: Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass der tiefste Punkt im Ursprung liegt. Der Scheitelpunkt ist ein Minimum, da $a = 0{,}4 > 0$ ist. Die y-Koordinate des Scheitelpunkts $S(0|-6{,}4)$ beschreibt die maximale Tiefe des Sees von 6,4 m.

K 2/5 **2** **a)** Legt man den Koordinatenursprung in die linke untere Ecke der Marmorplatte und wählt den Maßstab 1:10, dann liegen die Punkte $P(6|5)$ und $Q(8{,}5|4)$ auf der Abbruchkante:

$m = \frac{5-4}{6-8{,}5} = \frac{1}{-2{,}5} = -\frac{2}{5}$

Durch Einsetzen der Koordinaten von P und von m in die Funktionsgleichung $y = mx + t$ ermittelt man den Wert des Parameters t und damit die Funktionsgleichung:

$5 = -0{,}4 \cdot 6 + t \quad \Rightarrow \quad t = 7{,}4$

$y = -0{,}4x + 7{,}4$

b) x: Länge der Marmorplatte in dm
y: Breite der Marmorplatte in dm
Es wird die Funktion $A = x \cdot y$ mit $y = -0{,}4x + 7{,}4$, $D_A =]0; 8{,}5[$ betrachtet.

$$A(x) = x \cdot (-0{,}4x + 7{,}4) = -0{,}4x^2 + 7{,}4x = -0{,}4(x^2 - 18{,}5x) = -0{,}4\left[x^2 - 18{,}5x + \left(\frac{18{,}5}{2}\right)^2 - \left(\frac{18{,}5}{2}\right)^2\right]$$

$$= -0{,}4[(x-9{,}25)^2 - 85{,}5625] = -0{,}4(x-9{,}25)^2 + 34{,}225 \Rightarrow S(9{,}25|34{,}225)$$

Die maximale Fläche einer rechteckigen Platte mit dieser Abbruchkante würde man für eine Länge von 92,5 cm erzielen. Die Platte ist jedoch nur 85 cm lang. Man muss somit den Randpunkt $R(8{,}5|4)$ auswählen.

Dann hat die Platte einen Flächeninhalt von $A = 85\text{ cm} \cdot 40\text{ cm} = 3400\text{ cm}^2$.

$$p = \frac{3400\text{ cm}^2}{85\text{ cm} \cdot 50\text{ cm}} = \frac{3400\text{ cm}^2}{4250\text{ cm}^2} = \frac{4}{5} = 80\,\%$$

Die Fläche der neuen Platte nimmt 80 % der Fläche der alten Platte ein.

K 5 **3**

I: $x - 2y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad$ I': $x = 2y - z$
II: $3x + 4y - 2z = 20$
III: $2x - y + 3z = 1$

I' in II und III eingesetzt:

II': $3(2y - z) + 4y - 2z = 20$
$6y - 3z + 4y - 2z = 20$
$10y - 5z = 20 \quad |:5$
$2y - z = 4$

III': $2(2y - z) - y + 3z = 1$
$4y - 2z - y + 3z = 1$
$3y + z = 1 \quad \Rightarrow \quad z = 1 - 3y$

III' in II' eingesetzt: $2y - (1 - 3y) = 4$
$2y - 1 + 3y = 4$
$5y = 5 \quad |:5$
$y = 1$

$y = 1$ in III' eingesetzt: $z = 1 - 3 \cdot 1 = -2$

$y = 1$ und $z = -2$ in I' eingesetzt: $x = 2 \cdot 1 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$L = \{(4|1|-2)\}$

Probe:

I: $4 - 2 \cdot 1 - 2 = 0$ ✓

II: $3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 12 + 4 + 4 = 20$ ✓

III: $2 \cdot 4 - 1 + 3 \cdot (-2) = 8 - 1 - 6 = 1$ ✓

K4/5 **4** I: $-4 = 10^2 \cdot a + 10b + c$

II: $-6{,}5 = 5^2 \cdot a + 5b + c$

III: $6 = 0^2 \cdot a + 0 \cdot b + c \quad \Rightarrow \quad 6 = c$

c = 6 in I und II eingesetzt:

I: $-4 = 100a + 10b + 6 \quad \Rightarrow \quad$ I': $b = -1 - 10a$

II: $-6{,}5 = 25a + 5b + 6$

I' in II eingesetzt:
$$\begin{aligned} -12{,}5 &= 25a + 5(-1 - 10a) \\ -12{,}5 &= 25a - 5 - 50a \quad &| + 5 \\ -7{,}5 &= -25a \quad &| : (-25) \\ 0{,}3 &= a \end{aligned}$$

a = 0,3 in II' eingesetzt:

$b = -1 - 10 \cdot 0{,}3 = -1 - 3 = -4$

$f\colon x \mapsto 0{,}3x^2 - 4x + 6$

Probe:

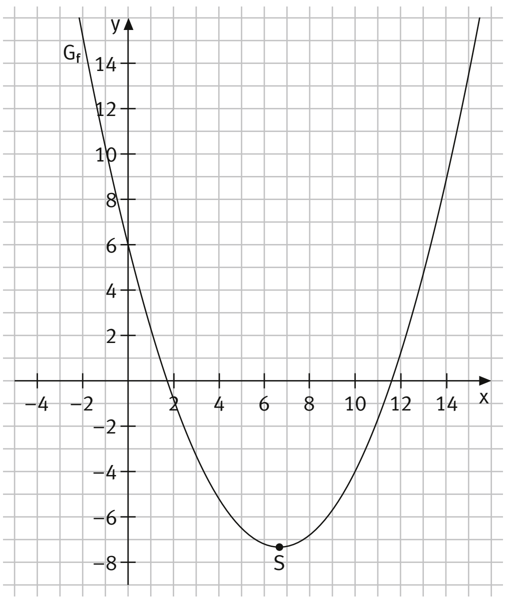
$f(10) = 0{,}3 \cdot 100 - 4 \cdot 10 + 6 = 30 - 40 + 6 = -4$ ✓

$f(5) = 0{,}3 \cdot 25 - 4 \cdot 5 + 6 = -6{,}5$ ✓

$f(0) = 6$ ✓

Zur Bestimmung der Wertemenge wird der Scheitelpunkt ermittelt:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}3\left(x^2 - \tfrac{40}{3}x\right) + 6 \\ &= 0{,}3\left[x^2 - \tfrac{40}{3}x + \left(\tfrac{40}{6}\right)^2 - \left(\tfrac{40}{6}\right)^2\right] + 6 \\ &= 0{,}3\left[\left(x - \tfrac{20}{3}\right)^2 - \left(\tfrac{20}{3}\right)^2\right] + 6 \\ &= 0{,}3\left(x - \tfrac{20}{3}\right)^2 - \tfrac{40}{3} + 6 = 0{,}3\left(x - \tfrac{20}{3}\right)^2 - \tfrac{22}{3} \\ &\Rightarrow \quad S\left(\tfrac{20}{3} \,\middle|\, -\tfrac{22}{3}\right) \\ &\Rightarrow \quad W = \left[-\tfrac{22}{3}; \infty\right[\end{aligned}$$



K3/5 **5** Legt man den Absprungpunkt in den Ursprung, erhält man folgende drei Punkte der parabelförmigen Flugbahn: A (0|0), B (4|3) und C (0|8).

Anhand der Nullstellenform erhält man: f: $x \mapsto ax(x-8)$.

Setze B in die Nullstellenform ein:

$3 = a \cdot 4 \cdot (4-8)$

$3 = -16a \qquad | : (-16)$

$a = -\frac{3}{16}$

Sunnys parabelförmige Flugbahn lässt sich durch die Funktion f: $x \mapsto -\frac{3}{16}x(x-8)$ beschreiben.

K3/6 **6** Man muss z. B. noch die Höhe der Wasserparabeln kennen. Dann kann man das Koordinatensystem so festlegen, dass der Start der Wasserparabel im Ursprung liegt. Man kennt beide Nullstellen und den Scheitelpunkt.

K5/6 **7** **a)** Rosalie hat die linke Seite der Gleichung als lineare Funktion g: $x \mapsto x - 0{,}5$ interpretiert und die rechte Seite als Funktionsterm der gebrochen-rationalen Funktion f: $x \mapsto \frac{x+1}{x}$. Sie zeichnet die zugehörigen Graphen G_g (grün) und G_f (rot). Dann liest sie die x-Stellen der Schnittpunkte ab und gibt diese als Lösungsmenge an.

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b)

$$
\begin{aligned}
x - 0{,}5 &= \frac{x+1}{x} && | \cdot x \\
x^2 - 0{,}5x &= x + 1 && | - x - 1 \\
x^2 - 1{,}5x - 1 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{1{,}5 \pm \sqrt{(-1{,}5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2} \\
&= \frac{1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 4}}{2} \\
&= \frac{1{,}5 \pm \sqrt{6{,}25}}{2} = \frac{1{,}5 \pm 2{,}5}{2} \\
x_1 &= \frac{1{,}5 + 2{,}5}{2} = 2 \\
x_2 &= \frac{1{,}5 - 2{,}5}{2} = -\frac{1}{2} \\
L &= \{-0{,}5;\ 2\}
\end{aligned}
$$

Rosalie hat die Lösungsmenge korrekt angegeben.

K5 **8** Individuelle Lösungen. Beispiel: f_1: $x \mapsto x^2$ und f_2: $x \mapsto -x^2$. Die beiden Graphen G_{f1} und G_{f2} besitzen O (0|0) als einzigen gemeinsamen Punkt.

$$
\begin{aligned}
x^2 &= -x^2 && | + x^2 \\
2x^2 &= 0 && | : 2 \\
x^2 &= 0 \\
x &= 0 \\
f_1(0) &= f_2(0) = 0
\end{aligned}
$$

Aufgaben für Lernpartner

K 1/5 **A** Die Aussage ist richtig. Bei einer nach unten geöffneten Parabel besitzt der Scheitelpunkt den größtmöglichen y-Wert.

K 1/3 **B** Die Aussage ist bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems richtig. Im Koordinatensystem muss der Scheitelpunkt $S(15|5)$ lauten. Wählt man das Koordinatensystem anders, so ist die Aussage falsch.

K 1/3 **C** Die Aussage ist richtig. Der Graph der Funktion, die zur Modellierung verwendet wird, muss eine nach unten geöffnete Parabel sein.

K 1/2 **D** Die Aussage ist richtig, wenn man vereinfacht annimmt, dass Martins Absprungstelle in $x = 0$ liegt und die Wasseroberfläche auf der Höhe $y = 0$. Die Nullstelle, die auf der positiven x-Achse liegt, beschreibt dann die Entfernung zum Sprungturm. Die Aussage wäre falsch, wenn der Absprungpunkt nicht bei $x = 0$ wäre.

K 1/5 **E** Die Aussage ist falsch. Man benötigt für die eindeutige Bestimmung der Funktionsgleichung einen weiteren Punkt, der auf der Parabel liegt, um den Wert des Parameters a bestimmen zu können.

K 1/5 **F** Die Aussage ist falsch.

$\frac{1}{x^2-4} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4 = 1 \quad \Rightarrow \quad L = \left\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right\}$

K 1/5 **G** Die Aussage ist falsch. Beim Einsetzen wurden die x- und die y-Koordinate des Punkts C vertauscht. Die Gleichung müsste lauten: $-4 = 49a + 7b + c$.

K 1/5 **H** Die Aussage ist richtig (siehe Strategiewissen auf den Seiten 78 und 79).

K 1/5 **I** Die Aussage ist richtig. Aus Gleichung III folgt $5 = x + y + z$. Dies steht im Widerspruch zu Gleichung I.

K 1/4 **J** Die Aussage ist falsch. Eine Parabel und eine Gerade können maximal zwei gemeinsame Punkte besitzen.

K 1/4 **K** Die Aussage ist richtig. Dies gilt z. B. für die Parabel $y = x^2$ und die lineare Funktion $y = -1$.

K 1/5 **L** Die Aussage ist richtig. Es gilt $5 = x^2 - 11$, d. h. $x^2 = 16$. Somit gilt $L = \{-4; 4\}$.

K 1/5 **M** Die Aussage ist richtig, wenn einer der Punkte der Scheitelpunkt der Parabel ist. Dann setzt man diesen in die Scheitelpunktform ein und ermittelt mithilfe des zweiten Punkts den Wert des Parameters a.