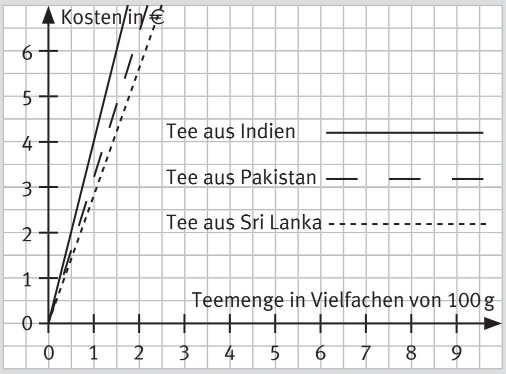
1 Lineare Gleichungssysteme

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K4

- **Tee gibt es in verschiedenen Sorten. Stelle jeweils in einem Schaubild dar, wie sich für jede Teesorte die Kosten in Abhängigkeit von der Teemenge ändern. Welche Art von Zuordnung liegt vor?**



Es liegt eine Zuordnung der direkten Proportionalität vor: Teemenge $\mapsto$ Preis.

K3

- **Tee wird oft aus verschiedenen Sorten gemischt, damit sich die Aromen oder die gesunden Wirkungen der Teesorten ergänzen.**
  Ein Teehändler mischt grünen Tee aus Indien und Sri Lanka miteinander. Wie viel Tee muss er von jeder Sorte nehmen, wenn er 2 kg der Teemischung zum Preis von 3,25 € pro 100 g herstellen möchte?
  Es sind individuelle Lösungsansätze möglich, z. B. mittels systematischen Probierens.
  Es müssen 750 g der Teesorte aus Indien und 1250 g der Teesorte aus Sri Lanka gemischt werden, um 2 kg zum Preis von 3,25 € pro 100 g zu erhalten.

Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.
Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Verständnis

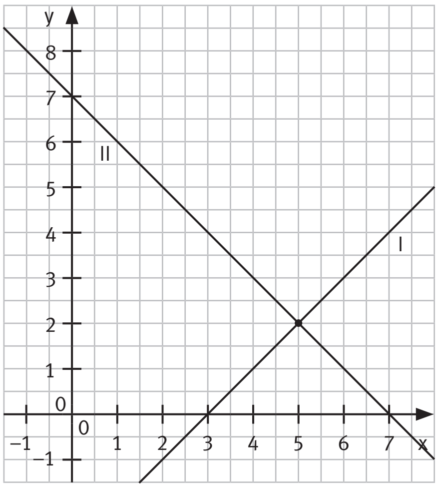
K 1
- Man benötigt zwei Zahlenpaare, denn durch sie wird die Gerade festgelegt, auf der alle weiteren Zahlenpaare liegen.

K 1
- Nein, die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems kann nicht aus genau zwei Zahlenpaaren bestehen. Durch zwei Zahlenpaare wird eindeutig eine Gerade festgelegt. Sind zwei Zahlenpaare Elemente der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, also Elemente der Lösungsmenge der ersten sowie der zweiten linearen Gleichung, dann sind auch alle anderen Zahlenpaare, die durch die Gerade festgelegt sind, Elemente der Lösungsmenge. Das lineare Gleichungssystem hat in diesem Fall unendlich viele Lösungen.

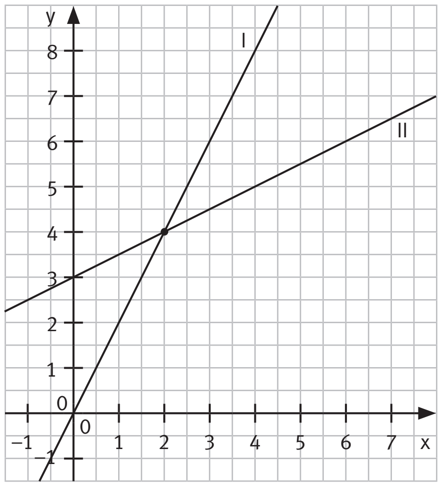
K 5 **1**

a)	$(2\|2) \in \mathbb{L}_I$ und $(2\|2) \in \mathbb{L}_{II}$ $(2\|2) \in \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$	$(6\|6) \in \mathbb{L}_I$ und $(6\|6) \notin \mathbb{L}_{II}$ $(6\|6) \notin \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$	$(8\|3) \notin \mathbb{L}_I$ und $(8\|3) \notin \mathbb{L}_{II}$ $(8\|3) \notin \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$
b)	$(6\|0) \in \mathbb{L}_I$ und $(6\|0) \in \mathbb{L}_{II}$ $(6\|0) \in \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$	$(4\|-1) \notin \mathbb{L}_I$ und $(4\|-1) \in \mathbb{L}_{II}$ $(4\|-1) \notin \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$	$(5\|1) \in \mathbb{L}_I$ und $(5\|1) \notin \mathbb{L}_{II}$ $(5\|1) \notin \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$
c)	$(3\|7) \in \mathbb{L}_I$ und $(3\|7) \in \mathbb{L}_{II}$ $(3\|7) \in \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$	$(-1\|-1) \in \mathbb{L}_I$ und $(-1\|-1) \in \mathbb{L}_{II}$ $(-1\|-1) \in \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$	$(0\|1) \in \mathbb{L}_I$ und $(0\|1) \in \mathbb{L}_{II}$ $(0\|1) \in \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$
d)	$(-6\|-8) \in \mathbb{L}_I$ und $(-6\|-8) \notin \mathbb{L}_{II}$ $(-6\|-8) \notin \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$	$(1\|2{,}5) \in \mathbb{L}_I$ und $(1\|2{,}5) \in \mathbb{L}_{II}$ $(1\|2{,}5) \in \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$	$(4\|-2) \notin \mathbb{L}_I$ und $(4\|-2) \in \mathbb{L}_{II}$ $(4\|-2) \notin \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$
e)	$(4\|-2) \notin \mathbb{L}_I$ und $(4\|-2) \in \mathbb{L}_{II}$ $(4\|-2) \notin \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$	$(-5\|7) \notin \mathbb{L}_I$ und $(-5\|7) \in \mathbb{L}_{II}$ $(-5\|7) \notin \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$	$(3\|0) \in \mathbb{L}_I$ und $(3\|0) \notin \mathbb{L}_{II}$ $(3\|0) \notin \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$
f)	$(10{,}5\|-12) \in \mathbb{L}_I$ und $(10{,}5\|-12) \in \mathbb{L}_{II}$ $(10{,}5\|-12) \in \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$	$(-7{,}5\|24) \in \mathbb{L}_I$ und $(-7{,}5\|24) \notin \mathbb{L}_{II}$ $(-7{,}5\|24) \notin \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$	$(6\|-6) \notin \mathbb{L}_I$ und $(6\|-6) \in \mathbb{L}_{II}$ $(6\|-6) \notin \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$

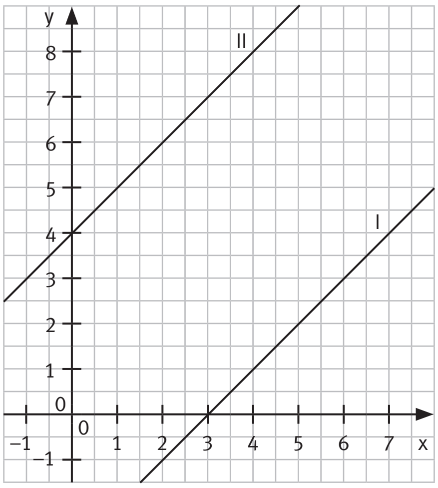
K 5 **2** **a)** $\mathbb{L} = \{(5|2)\}$



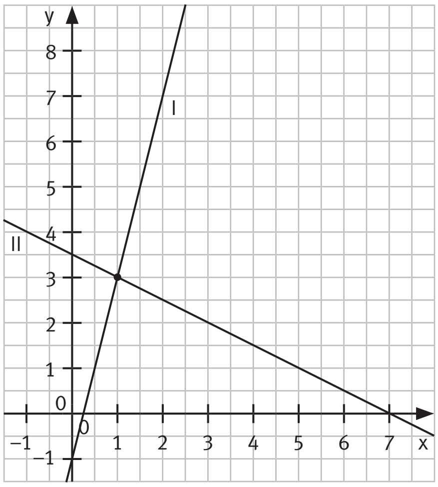
b) $\mathbb{L} = \{(2|4)\}$



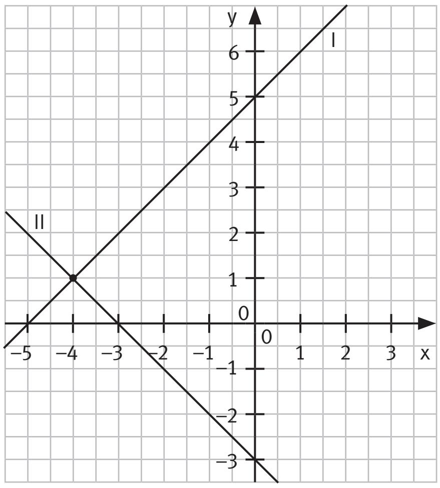
c) $\mathbb{L} = \emptyset$



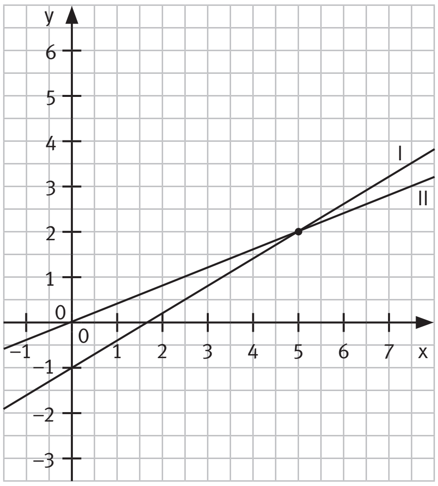
d) $\mathbb{L} = \{(1|3)\}$



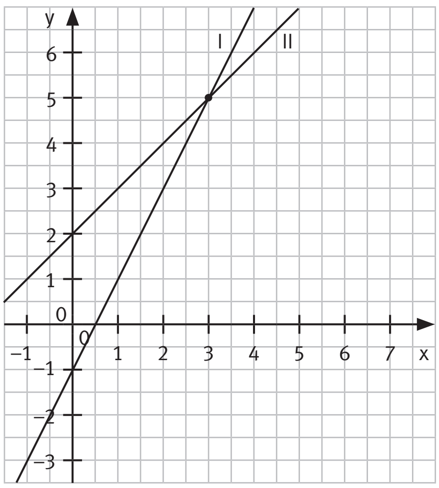
e) $\mathbb{L} = \{(-4|1)\}$



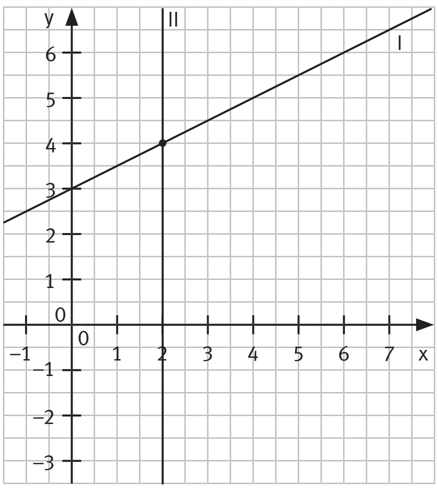
f) $\mathbb{L} = \{(5|2)\}$



g) $\mathbb{L} = \{(3|5)\}$



h) $\mathbb{L} = \{(2|4)\}$



K3 **3** **a)** 1

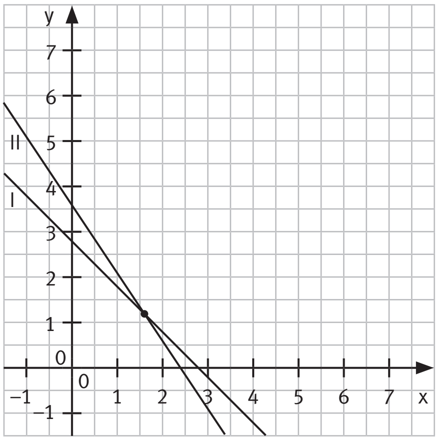
x: Preis für eine Currywurst (in €)

y: Preis für eine Portion Pommes (in €)

$\text{I} \quad x + y = 2{,}80$

$\wedge \text{ II} \quad 3x + 2y = 7{,}20$

b)



$\mathbb{L} = \{(1{,}60 \mid 1{,}20)\}$

Das Zahlenpaar (1,60 | 1,20) erfüllt die Gleichungen I und II.

Eine Currywurst kostet 1,60 € und eine Portion Pommes kostet 1,20 €.

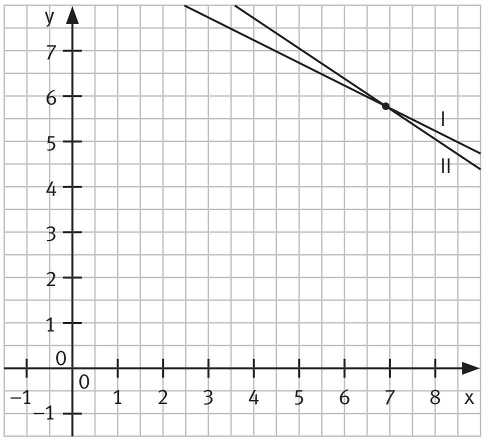
2

x: Eintrittspreis für einen Erwachsenen (in €)

y: Eintrittspreis für einen Jugendlichen (in €)

$\text{I} \quad x + 2y = 18{,}50$

$\wedge \text{ II} \quad 2x + 3y = 31{,}20$

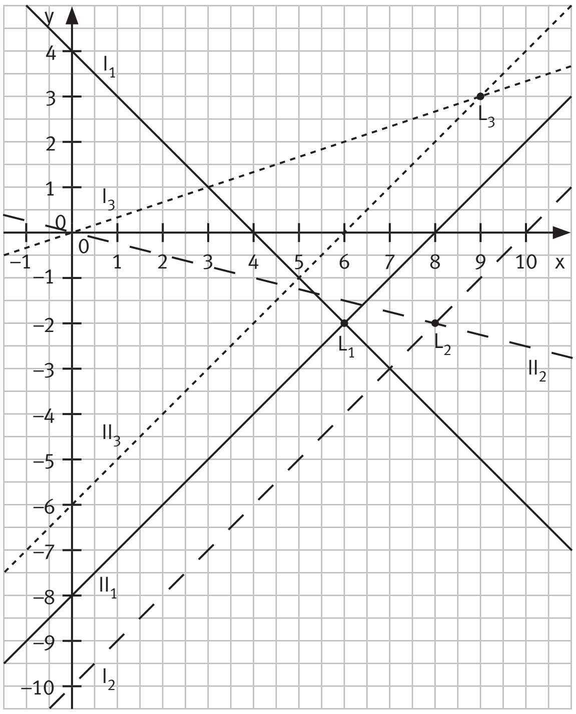


$\mathbb{L} = \{(6{,}90 \mid 5{,}80)\}$

Das Zahlenpaar (6,9 | 5,8) erfüllt die Gleichungen I und II.

Ein Erwachsener muss 6,90 € für den Eintritt bezahlen, ein Jugendlicher nur 5,80 €.

K3 **4** 1 bis 3



1 $\mathbb{G} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

I_1: $x + y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + 4$

II_1: $x - y = 8 \quad \Leftrightarrow \quad y = x - 8$

$\mathbb{L}_1 = \{(6 \mid -2)\}$; Lösung D

Die gesuchten Zahlen sind 6 und –2.

2 $\mathbb{G} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$; $x > y$

I_2: $x - y = 10 \quad \Leftrightarrow \quad y = x - 10$

II_2: $x : y = -4 \quad \Leftrightarrow \quad y = -0{,}25x$

$\mathbb{L}_2 = \{(8 \mid -2)\}$; Lösung A

Die gesuchten Zahlen sind 8 und –2.

3 $\mathbb{G} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

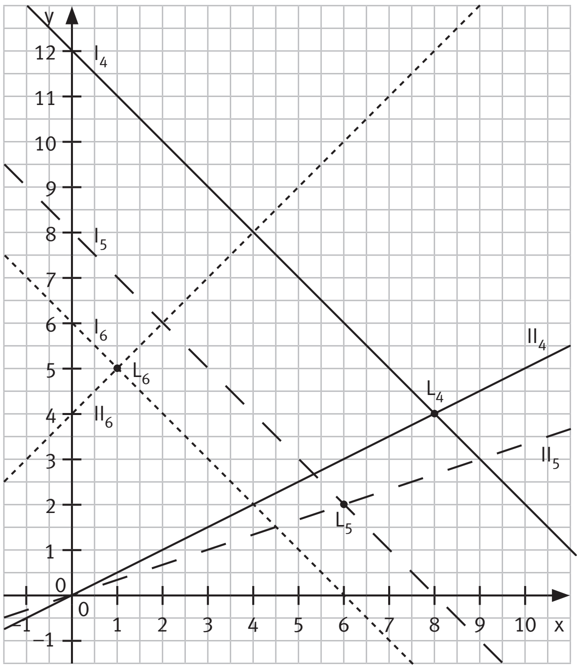
I_3: $x = 3y \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{3}x$

II_3: $x - y = 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = x - 6$

$\mathbb{L}_3 = \{(9 \mid 3)\}$; Lösung C

Die gesuchten Zahlen sind 9 und 3.

4 bis 6



Lösungswort: DACHAU

4 $\mathbb{G} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$

$0 < x < 10;\ 0 \leq y < 10$

I_4: $x + y = 12 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + 12$

II_4: $x = 2y \quad \Leftrightarrow \quad y = 0{,}5x$

$\mathbb{L}_4 = \{(8|4)\}$; Lösung H

Die gesuchte Zahl ist 84.

5 $\mathbb{G} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$

$0 < x < 10;\ 0 \leq y < 10$

I_5: $x + y = 8 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + 8$

II_5: $x = 3y \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{3}x$

$\mathbb{L}_5 = \{(6|2)\}$; Lösung A

Die gesuchte Zahl ist 62.

6 $\mathbb{G} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$

$0 < x < 10;\ 0 \leq y < 10$

I_6: $x + y = 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + 6$

II_6: $x = y - 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = x + 4$

$\mathbb{L}_6 = \{(1|5)\}$; Lösung U

Die gesuchte Zahl ist 15.

K6 **5** **a)** Markus, Svenja und Sarah lösen ihr Gleichungssystem jeweils zeichnerisch, indem sie die Schnittmengen der beiden Geraden, die durch die Gleichungen I und II bestimmt sind, untersuchen. Bei Markus schneiden sich die beiden Geraden in (2|0); das zugehörige lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung: $\mathbb{L} = \{(2|0)\}$. Bei Svenja verlaufen die beiden Geraden parallel; das zugehörige lineare Gleichungssystem hat keine Lösung: $\mathbb{L} = \emptyset$. Bei Sarah sind die beiden Geraden identisch; das zugehörige lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen: $\mathbb{L} = \{(x|y) \mid 3x + 3y = 4\}$.

b)

Markus	Svenja	Sarah
I $y = -x + 2$ II $y = x - 2$ $\mathbb{L} = \{(2\|0)\}$	I $y = -x - 1$ II $y = -x + 1{,}5$ $\mathbb{L} = \emptyset$	I $y = -x + 1\frac{1}{3}$ II $y = -x + 1\frac{1}{3}$ $\mathbb{L} = \{(x\|y) \mid 3x + 3y = 4\}$

Es sind individuelle Formulierungen für den Merksatz möglich, z. B.:
Ein lineares Gleichungssystem hat …

- … genau eine Lösung, wenn die Steigung der zugehörigen linearen Funktionen unterschiedlich sind: $m_I \neq m_{II}$.
- … keine Lösung, wenn die Steigungen der zugehörigen linearen Funktionen gleich sind, aber die y-Achsenabschnitte unterschiedlich sind: $m_I = m_{II}$ und $t_I \neq t_{II}$.
- … unendlich viele Lösungen, wenn die Steigungen und die y-Achsenabschnitte der zugehörigen linearen Funktion gleich sind: $m_I = m_{II}$ und $t_I = t_{II}$.

K5 **6** Die Gleichungen I und II werden nach y aufgelöst und anschließend die Steigungen m_I und m_{II} und die y-Achsenabschnitte t_I und t_{II} miteinander verglichen.

a) I $y = -0{,}5x + 1{,}5$
II $y = 2x - 4$
genau eine Lösung, da $m_I \neq m_{II}$

b) I $y = 4x - 6$
II $y = 4x - 6$
unendliche viele Lösungen, da $m_I = m_{II}$ und $t_I = t_{II}$

c) I $y = -x + 5$
II $y = -x - 5$
keine Lösung, da $m_I = m_{II}$ und $t_I \neq t_{II}$

d) I $y = 1{,}5x + 1{,}5$
II $y = -2x + 1{,}5$
genau eine Lösung, da $m_I \neq m_{II}$

e) I $y = \frac{1}{8}x + 1\frac{1}{2}$
II $y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$
genau eine Lösung, da $m_I \neq m_{II}$

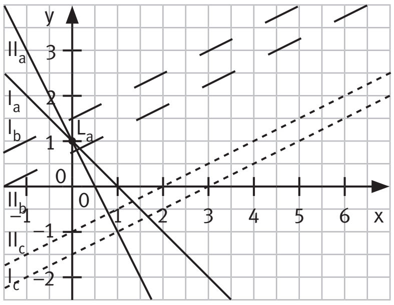
f) I $y = \frac{2}{9}x + 2\frac{2}{3}$
II $y = 9x + 36$
genau eine Lösung, da $m_I \neq m_{II}$

g) I $y = 0{,}6x - 1$
II $y = 0{,}6x + 2$
keine Lösung, da $m_I = m_{II}$ und $t_I \neq t_{II}$

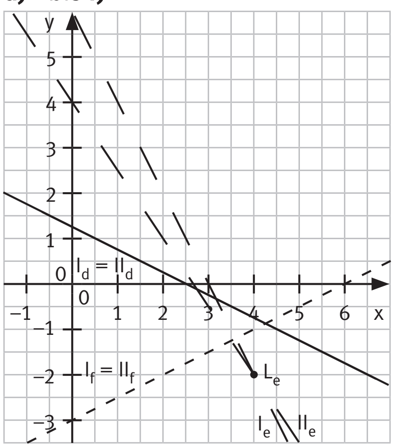
h) I $y = -3x + 2$
II $y = -3x + 2$
unendliche viele Lösungen, da $m_I = m_{II}$ und $t_I = t_{II}$

i) I $y = -0{,}25x + 3$
II $y = x - 2$
genau eine Lösung, da $m_I \neq m_{II}$

K5 **7** **a)** bis **c)**



d) bis **f)**



a) I_a $3x + 3y = 3 \Leftrightarrow y = -x + 1$
II_a $2y + 4x = 2 \Leftrightarrow y = -2x + 1$
$\mathbb{L}_a = \{(0|1)\}$

b) I_b $-3x + 6y = 9 \Leftrightarrow y = 0{,}5x + 1{,}5$
II_b $-8y + 4x = -6 \Leftrightarrow y = 0{,}5x + 0{,}75$
$\mathbb{L}_b = \varnothing$, da $m_I = m_{II}$ und $t_I \neq t_{II}$

c) I_c $-x + 2y = -3 \Leftrightarrow y = 0{,}5x - 1{,}5$
II_c $-2x + 4y = -4 \Leftrightarrow y = 0{,}5x - 1$
$\mathbb{L}_c = \varnothing$, da $m_I = m_{II}$ und $t_I \neq t_{II}$

d) I_d $2x + 4y = 5 \Leftrightarrow y = -0{,}5x + 1{,}25$
II_d $-x - 2y + 2{,}5 = 0 \Leftrightarrow y = -0{,}5x + 1{,}25$
$\mathbb{L}_d = \{(x|y) \mid y = -0{,}5\,x + 1{,}25\}$, da $m_I = m_{II}$ und $t_I = t_{II}$

e) I_e $2x + y = 6 \Leftrightarrow y = -2x + 6$
II_e $2y + 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow y = -1{,}5x + 4$
$\mathbb{L}_e = \{(4|-2)\}$

f) I_f $2x - 4y = 12 \Leftrightarrow y = 0{,}5x - 3$
II_f $2y + 6 = x \Leftrightarrow y = 0{,}5x - 3$
$\mathbb{L}_f = \{(x|y) \mid y = 0{,}5x - 3\}$, da $m_I = m_{II}$ und $t_I = t_{II}$

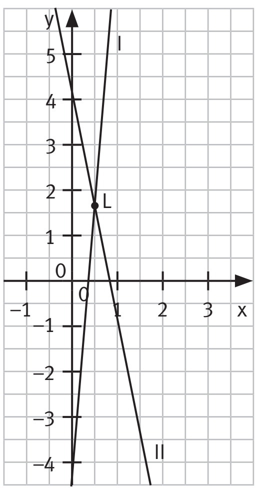
K4 **8**

	1	2	3
a)	I $y = -0{,}5x + 0{,}5$ II $y = 2x - 1$	I $y = -2x - 1{,}5$ II $y = -2x - 1{,}5$	I $y = -0{,}5\,x - 0{,}5$ II $y = -0{,}5\,x + 1$
b)	$\mathbb{L} = \{(0{,}6|0{,}2)\}$	$\mathbb{L} = \{(x|y) \mid y = -2x - 1{,}5\}$	$\mathbb{L} = \varnothing$

K2 **9**

	1	2	3	4
a)	II $y = 5x + 6$ Es gibt unendlich viele Möglichkeiten: alle Zahlen aus $\mathbb{Q}\backslash\{7\}$	II $y = 3x - 4$ Es gibt genau eine Möglichkeit: $m = 3$	II $-0{,}5y = 2x - 1$ Es gibt genau eine Möglichkeit: $m = -0{,}5$	II $y = -\frac{2}{3}x - 4$ Es gibt unendlich viele Möglichkeiten: $-\frac{2}{3}x - a$ mit $a \in \mathbb{Q}\backslash\{5\}$
b)	II $y = -3x + 2$ Es gibt genau eine Möglichkeit: $t = 2$	II $y = 1x - 5$ Es gibt genau eine Möglichkeit: $m = 1$	II $y = -3x + (-1)$ Es gibt genau eine Möglichkeit: $t = -1$	II $3y = -\frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$ Es gibt genau eine Möglichkeit: $-\frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$
c)	II $y = 2x - 4$ Es gibt unendlich viele Möglichkeiten: alle Zahlen aus $\mathbb{Q}\backslash\left\{\frac{1}{5}\right\}$	II $y = 3x - 5$ Es gibt unendlich viele Möglichkeiten: alle Zahlen aus $\mathbb{Q}\backslash\{2\}$	II $4y = 2x + 4$ Es gibt unendlich viele Möglichkeiten: alle Zahlen aus $\mathbb{Q}\backslash\{-1\}$ bzw. aus $\mathbb{Q}$	II $2y = 4x + 5$ Es gibt unendlich viele Möglichkeiten: $ax + b$ mit $a \in \mathbb{Q}\backslash\{2{,}5\}$

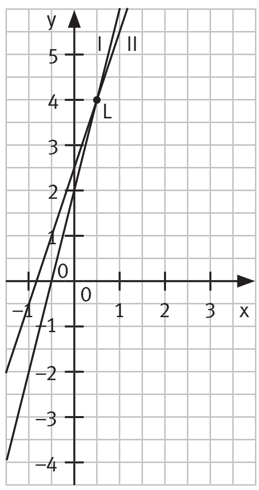
K6 **10** **a)** 1



I $-3x + 0{,}25y = -1 \Leftrightarrow y = 12x - 4$

II $5x + y = 4 \Leftrightarrow y = -5x + 4$

2



I $-2x + 0{,}5y = 1 \Leftrightarrow y = 4x + 2$

II $3x - y + 2{,}5 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + 2{,}5$

b) 1: $\mathbb{L} = \{(0{,}5 \mid 1{,}7)\}$

Die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden können nur ungenau abgelesen werden, weil der Schnittpunkt außerhalb des Rechengitters liegt.

2: $\mathbb{L} = \{(0{,}5 \mid 4)\}$

Die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden können nur ungenau abgelesen werden, weil der Winkel zwischen den beiden Geraden so klein ist, dass der Schnittpunkt im Rahmen der Zeichengenauigkeit in einem größeren Bereich liegen kann.

c) Es sind unterschiedliche Antworten möglich, z. B.:

Zeichnerisches Lösen eines linearen Gleichungssystems	
Vorteile	Nachteile
• Man erkennt den Verlauf der zugehörigen Geraden. • Die Lösung ist ohne großen Rechenaufwand zu ermitteln. • Mit einem GTR lassen sich Probleme beim Ablesen vermeiden.	• Ableseungenauigkeiten und Zeichenungenauigkeiten können zu fehlerhaften Lösungen führen. • Es kann Probleme geben, den richtigen Ausschnitt zu bestimmen, in denen die Lösungen liegen.

Verständnis

K1
- Beim Einsetzungsverfahren wird eine Gleichung nach einer Variablen aufgelöst und der entstandene Term für die Variable in der anderen Gleichung eingesetzt. Beim Gleichsetzungsverfahren löst man beide Gleichungen zuerst nach einer der beiden Variablen auf. Die anschließende Gleichsetzung kann man so verstehen, dass man den einen Term für die Variable im anderen Term einsetzt. In diesem Sinne ist das Gleichsetzungsverfahren ein Sonderfall des Einsetzungsverfahrens.

K6
- Werden beim Gleichsetzungsverfahren beide Gleichungen nach y aufgelöst, dann erhält man die Funktionsgleichungen, die man für das grafische Lösen benötigt. Die Lösungen dieser beiden linearen Gleichungen lassen sich als zwei Geraden darstellen. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist Element der Lösungsmengen beider Gleichungen und Lösung des Gleichungssystems.

K6 **1**

		Vorgehen:
$\text{I} \quad 3x + 4y = 12$		
$\wedge\,\text{II} \quad x + 3y = 4$	$\mid$ nach x auflösen	• Löse beide Gleichungen nach derselben Variablen (hier: x) auf.
$\text{I} \quad x = -\frac{4}{3}y + 4$		
$\wedge\,\text{II} \quad x = -3y + 4$	$\mid$ Terme gleichsetzen	• Setze die beiden Terme für x gleich.
$-\frac{4}{3}y + 4 = -3y + 4$	$\mid +3y - 4$	• Berechne y durch Äquivalenzumformungen.
$-\frac{5}{3}y = 0$	$\mid : \left(-\frac{5}{3}\right)$	
$y = 0$		
$x + 3 \cdot 0 = 4$		• Setze den Wert für y in eine der beiden Gleichungen (hier: Gleichung II) ein.
$x = 4$		• Berechne den Wert für x.
Probe:		
$\text{I} \quad 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 = 12$	wahr	• Führe die Probe durch.
$\text{II} \quad 4 + 3 \cdot 0 = 4$	wahr	
$\mathbb{L} = \{(4\mid0)\}$		• Gib die Lösungsmenge an.

K5 **2** Es sind individuelle Lösungswege möglich (hier a) bis d) ausführlich, e) und f) nur das Ergebnis).

a)
$\text{I} \quad y = -0{,}4x + 0{,}8$ (umgeformt)
$\wedge\,\text{II} \quad y = 2x + 8$ | y-Term in I einsetzen
$2x + 8 = -0{,}4x + 0{,}8$ | $+0{,}4x - 8$
$2{,}4x = -7{,}2$ | $: 2{,}4$
$x = -3$ | x in II einsetzen
$y = 2 \cdot (-3) + 8 = 2$
Probe:
$\text{I} \quad 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 4$ wahr
$\text{II} \quad 2 = 2 \cdot (-3) + 8$ wahr
$\mathbb{L} = \{(-3\mid2)\}$

b)
$\text{I} \quad y = -3x + 15$ (umgeformt)
$\wedge\,\text{II} \quad y = 5x - 11$ | y-Term in I einsetzen
$5x - 11 = -3x + 15$ | $+3x + 11$
$8x = 26$ | $: 8$
$x = 3{,}25$ | x in II einsetzen
$y = 5 \cdot 3{,}25 - 11 = 5{,}25$
Probe:
$\text{I} \quad 3 \cdot 3{,}25 + 5{,}25 = 15$ wahr
$\text{II} \quad 5{,}25 = 5 \cdot 3{,}25 - 11$ wahr
$\mathbb{L} = \{(3{,}25\mid5{,}25)\}$

c)
$\text{I} \quad x - y = 5$
$\wedge\,\text{II} \quad x = 2y - 4$ | x in I einsetzen
$2y - 4 - y = 5$ | $+4$
$y = 9$ | y in II einsetzen
$x = 2 \cdot 9 - 4 = 14$
Probe:
$\text{I} \quad 14 - 9 = 5$ wahr
$\text{II} \quad 14 = 2 \cdot 9 - 4$ wahr
$\mathbb{L} = \{(14\mid9)\}$

d)
$\text{I} \quad y = -4x + 9{,}6$
$\wedge\,\text{II} \quad 3x + y = 9{,}2$ | y in II einsetzen
$3x - 4x + 9{,}6 = 9{,}2$ | $+x - 9{,}2$
$0{,}4 = x$ | x in I einsetzen
$y = -4 \cdot 0{,}4 + 9{,}6 = 8$
Probe:
$\text{I} \quad 4 \cdot 0{,}4 + 8 = 9{,}6$ wahr
$\text{II} \quad 3 \cdot 0{,}4 + 8 = 9{,}2$ wahr
$\mathbb{L} = \{(0{,}4\mid8)\}$

e) I nach x auflösen und in II einsetzen:
$\text{I} \quad x = 3{,}5y + 7{,}5$ (umgeformt)
$\wedge\,\text{II} \quad 21y + 45 = 3y + 9 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(0{,}5\mid-2)\}$

f) I nach x auflösen und in II einsetzen:
$\text{I} \quad x = 3y + 5$ (umgeformt)
$\wedge\,\text{II} \quad 9y + 15 - 15 = 10y + 2 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(-1\mid-2)\}$

K5 **3** (Hier a) bis d) ausführlich, e) bis i) nur das Ergebnis)

a) Gleichungen nach y auflösen:

$$\begin{array}{ll} \text{I}\quad y = 2x - 4 & \\ \wedge\,\text{II}\quad y = -\frac{2}{3}x + 4 & \mid \text{I und II gleichsetzen} \\ 2x - 4 = -\frac{2}{3}x + 4 & \mid +\frac{2}{3}x + 4 \\ \frac{8}{3}x = 8 & \mid :\frac{8}{3} \\ x = 3 & \mid x \text{ in I einsetzen} \\ y = 2 \cdot 3 - 4 = 2 & \\ \text{Probe:} & \\ \text{I}\quad 2 = 2 \cdot 3 - 4 & \text{wahr} \\ \text{II}\quad 3 \cdot 2 = -2 \cdot 3 + 12 & \text{wahr} \\ \mathbb{L} = \{(3 \mid 2)\} & \end{array}$$

b) Gleichungen nach y auflösen:

$$\begin{array}{ll} \text{I}\quad y = x - 65 & \\ \wedge\,\text{II}\quad y = -x + 107 & \mid \text{I und II gleichsetzen} \\ x - 65 = -x + 107 & \mid +x + 65 \\ 2x = 172 & \mid :2 \\ x = 86 & \mid x \text{ in II einsetzen} \\ y = 86 - 65 = 21 & \\ \text{Probe:} & \\ \text{I}\quad 86 - 21 = 65 & \text{wahr} \\ \text{II}\quad 21 = -86 + 107 & \text{wahr} \\ \mathbb{L} = \{(86 \mid 21)\} & \end{array}$$

c) Gleichungen nach y auflösen:

$$\begin{array}{ll} \text{I}\quad y = -3x - 5 & \\ \wedge\,\text{II}\quad y = -0{,}5x + 2{,}5 & \mid \text{I und II gleichsetzen} \\ -3x - 5 = -0{,}5x + 2{,}5 & \mid +3x - 2{,}5 \\ -7{,}5 = 2{,}5x & \mid :2{,}5 \\ -3 = x & \mid x \text{ in I einsetzen} \\ y = -3 \cdot (-3) - 5 = 4 & \\ \text{Probe:} & \\ \text{I}\quad 6 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 = -10 & \text{wahr} \\ \text{II}\quad -3 + 2 \cdot 4 = 5 & \text{wahr} \\ \mathbb{L} = \{(-3 \mid 4)\} & \end{array}$$

d) Gleichungen nach x auflösen:

$$\begin{array}{ll} \text{I}\quad x = 3y - 1 & \\ \wedge\,\text{II}\quad x = -5y - 7 & \mid \text{I und II gleichsetzen} \\ 3y - 1 = -5y - 7 & \mid +5y + 1 \\ 8y = -6 & \mid :8 \\ y = -0{,}75 & \mid y \text{ in I einsetzen} \\ x = 3 \cdot (-0{,}75) - 1 = -3{,}25 & \\ \text{Probe:} & \\ \text{I}\quad -3{,}25 = 3 \cdot (-0{,}75) - 1 & \text{wahr} \\ \text{II}\quad -3{,}25 + 5 \cdot (-0{,}75) = -7 & \text{wahr} \\ \mathbb{L} = \left\{-\frac{13}{4} \mid -\frac{3}{4}\right\} & \end{array}$$

e) Gleichungen nach x auflösen und gleichsetzen: $1{,}5y + 1{,}5 = 1{,}5$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \{(1{,}5 \mid 0)\}$

f) Gleichungen nach x auflösen und gleichsetzen: $\frac{2}{3}y - \frac{7}{3} = \frac{11}{3}$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{\left(\frac{11}{3} \mid 9\right)\right\}$

g) Gleichungen nach y auflösen und gleichsetzen: $-\frac{5}{3}x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{\left(-\frac{11}{7} \mid \frac{16}{7}\right)\right\}$

h) Gleichungen nach x auflösen und gleichsetzen: $-\frac{32}{7}y + \frac{13}{7} = -\frac{8}{9}y + \frac{83}{9}$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \{(11 \mid -2)\}$

i) Gleichungen nach x auflösen und gleichsetzen: $\frac{5}{2}y - \frac{9}{2} = -\frac{7}{3}y + \frac{1}{3}$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \{(-2 \mid 1)\}$

K6 **4** **a)** Sofie (Lösungsweg fortgesetzt)

$$\begin{array}{ll} -4x + 5 = -5x + 3 & \mid +5x - 5 \\ x = -2 & \mid x \text{ in I einsetzen} \\ 2y = -4 \cdot (-2) + 5 & \\ 2y = 13 & \mid :2 \\ y = 6{,}5 & \\ \text{Probe:} & \\ \text{I}\quad 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 6{,}5 = 5 & \text{wahr} \\ \text{II}\quad 10 \cdot (-2) + 4 \cdot 6{,}5 = 6 & \text{wahr} \\ \mathbb{L} = \{(-2 \mid 6{,}5)\} & \end{array}$$

Jenny (Lösungsweg fortgesetzt)

$$\begin{array}{ll} -2x + \frac{5}{2} = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2} & \mid +\frac{5}{2}x - \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}x = -1 & \mid \cdot 2 \\ x = -2 & \mid x \text{ in I einsetzen} \\ y = -2 \cdot (-2) + \frac{5}{2} & \\ y = 6{,}5 & \\ \text{Probe:} & \\ \text{I}\quad 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 6{,}5 = 5 & \text{wahr} \\ \text{II}\quad 10 \cdot (-2) + 4 \cdot 6{,}5 = 6 & \text{wahr} \\ \mathbb{L} = \{(-2 \mid 6{,}5)\} & \end{array}$$

b) Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:
Beide Rechenwege führen zum Ziel. Im vorliegenden Fall scheint Sofies Vorgehen etwas geschickter zu sein, bei dem Sofie die beiden Gleichungen nicht nach y, sondern nach 2y auflöst. Hierdurch kann sie möglichst lange mit ganzen Zahlen in den Termen rechnen kann.

c) Es sind individuelle Lösungswege möglich, z. B.:

1 Gleichungen nach 2y auflösen und gleichsetzen:
$3x + 2 = -6x + 5 \Leftrightarrow 9x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3};\ y = 1\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{\left(\frac{1}{3} \mid 1\frac{1}{2}\right)\right\}$

2 Gleichung II nach x auflösen und den Term für x in I einsetzen:
$5 \cdot (22 - 7y) + 4y = 16 \Leftrightarrow 3\frac{1}{31} = y;\ x = \frac{24}{31}$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{\left(\frac{24}{31} \mid 3\frac{1}{31}\right)\right\}$

3 Gleichungen nach 2x auflösen und gleichsetzen:
$10 - 2y = 38 - 16y \Leftrightarrow y = 2;\ x = 3$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \{(3 \mid 2)\}$

K5 **5** Es sind individuelle Lösungswege möglich.

a) I $y = 1{,}5x - 4$
II $y = 1{,}5x + 2{,}5$
$\mathbb{L} = \emptyset$

b) I $y = -0{,}4x + 2{,}4$
II $y = -0{,}4x + 2{,}4$
$\mathbb{L} = \{(x|y) \mid y = -0{,}4x + 2{,}4\}$

c) I $y = 3x + 2{,}5$
II $y = 3x - 2{,}5$
$\mathbb{L} = \emptyset$

Es fällt auf, dass die jeweilige Lösungsmenge direkt bestimmt werden kann, sobald die Gleichungen nach y aufgelöst sind, da die x-Koeffizienten gleich sind und die Lösungsmenge damit entweder leer ist oder unendlich viele Lösungen enthält.

K5 **6** Es sind individuelle Lösungswege möglich.

a) $\mathbb{L} = \{(1{,}5|2)\}$ **b)** $\mathbb{L} = \left\{\left(3\frac{2}{3}\middle|6\right)\right\}$ **c)** $\mathbb{L} = \left\{(x|y) \mid y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right\}$

d) $\mathbb{L} = \emptyset$ **e)** $\mathbb{L} = \{(5|-2)\}$ **f)** $\mathbb{L} = \left\{\left(-2\frac{5}{12}\middle|\frac{5}{6}\right)\right\}$

K5 **7** Lösung des linearen Gleichungssystems mithilfe des Additionsverfahrens

a)
$$\begin{array}{lll} \text{I} & x + 5y = -14{,}5 & \\ \wedge\ \text{II} & -x - y = 2{,}5 & |\ \text{I und II addieren} \\ \hline \text{I + II} & 4y = -12 & |:4 \\ & y = -3 & |\ y \text{ in II einsetzen} \end{array}$$
$x = -(-3) - 2{,}5 = 0{,}5$
$\mathbb{L} = \{(0{,}5|-3)\}$

b)
$$\begin{array}{lll} \text{I} & 2x + y = 10{,}3 & \\ \wedge\ \text{II} & 3x - y = 1{,}2 & |\ \text{I und II addieren} \\ \hline \text{I + II} & 5x = 11{,}5 & |:5 \\ & x = 2{,}3 & |\ x \text{ in I einsetzen} \end{array}$$
$y = 10{,}3 - 2 \cdot 2{,}3 = 5{,}7$
$\mathbb{L} = \{(2{,}3|5{,}7)\}$

c)
$$\begin{array}{lll} \text{I} & 8x - 5y - 3 = 0 & \\ \wedge\ \text{II} & -15x + 5y = -10 & |\ \text{I und II addieren} \\ \hline \text{I + II} & -7x = -7 & |:(-7) \\ & x = 1 & |\ x \text{ in I einsetzen} \end{array}$$
$y = (8 - 3) : 5 = 1$
$\mathbb{L} = \{(1|1)\}$

d)
$$\begin{array}{lll} \text{I} & 3x - 5y = 14 & \\ \wedge\ \text{II} & 5x + 5y = 50 & |\ \text{I und II addieren} \\ \hline \text{I + II} & 8x = 64 & |:8 \\ & x = 8 & |\ x \text{ in II einsetzen} \end{array}$$
$y = 10 - 8 = 2$
$\mathbb{L} = \{(8|2)\}$

K1 **8** Es sind individuelle Antworten möglich.

a) Bei 1 erscheint das Gleichsetzungsverfahren am geschicktesten, da beide Gleichungen bereits nach y aufgelöst sind.

Bei 2 erscheint das Einsetzungsverfahren am geschicktesten, da die Gleichung I nach y aufgelöst ist und der Term für y aus I direkt in II eingesetzt werden kann.

Bei 3 erscheint das Additionsverfahren am geschicktesten, da in beiden Gleichung 3y mit unterschiedlichem Vorzeichen steht und bei der Addition der Gleichungen die Variable y entfällt.

b) 1: I und II gleichsetzen
$2x + 5 = -x + 3 \quad | + x - 5$
$3x = -2 \quad | : 3$
$x = -\frac{2}{3} \quad |\ x \text{ in II einsetzen}$
$y = -\left(-\frac{2}{3}\right) + 3 = 3\frac{2}{3}$
$\mathbb{L} = \left\{\left(-\frac{2}{3}\middle|3\frac{2}{3}\right)\right\}$

2: I in II einsetzen
$2x - 4 + x = 8$
$3x = 12 \quad | : 3$
$x = 4 \quad |\ x \text{ in I einsetzen}$
$y = 4 - 4 = 0$
$\mathbb{L} = \{(4|0)\}$

3: I und II addieren
$6x + 2x = 5 + 9$
$8x = 14 \quad | : 8$
$x = 1\frac{3}{4} \quad |\ x \text{ in II einsetzen}$
$y = 3 - \frac{7}{6} = 1\frac{5}{6}$
$\mathbb{L} = \left\{\left(1\frac{3}{4}\middle|1\frac{5}{6}\right)\right\}$

K5 **9** Es sind individuelle Lösungswege möglich.

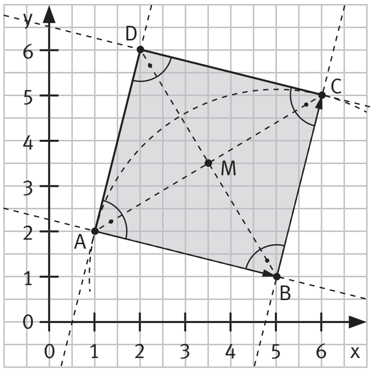
a) $\mathbb{L} = \{(-2|3)\}$ **b)** $\mathbb{L} = \{(4|-1)\}$ **c)** $\mathbb{L} = \{(-5|0{,}5)\}$
d) $\mathbb{L} = \{(11|-2)\}$ **e)** $\mathbb{L} = \{(5|-1)\}$ **f)** $\mathbb{L} = \{(13|-3)\}$

K5 **10** Zahlenpaare in alphabetischer Reihenfolge der Buchstaben: (a|b); (s|t); (v|w); (m|n); (u|v); (k|l).

a) $\mathbb{L} = \left\{\left(5\frac{2}{7}\middle|5\frac{1}{7}\right)\right\}$ **b)** $\mathbb{L} = \{(1|3)\}$ **c)** $\mathbb{L} = \{(5|0)\}$

d) $\mathbb{L} = \{(5|-2)\}$ **e)** $\mathbb{L} = \{(u|v) \mid v = -0{,}25u + 1\}$ **f)** $\mathbb{L} = \{(1|1)\}$

K5 **11**



a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist gleich lang und senkrecht zu $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AD}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Damit gilt für $C(x_C | y_C)$ und für $D(x_D | y_D)$:

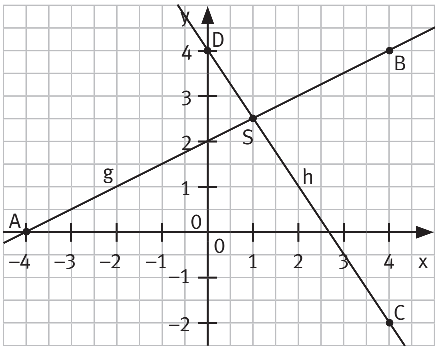
$x_C - 5 = 1$ und $y_C - 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_C = 6$ und $y_C = 5 \quad \Rightarrow C(6|5)$

$x_D - 1 = 1$ und $y_D - 2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_D = 2$ und $y_D = 6 \quad \Rightarrow D(2|6)$

b) $M\left(\frac{1+6}{2} \middle| \frac{2+5}{2}\right) = M(3{,}5|3{,}5)$

K5 **12** (Lösung zu a) ausführlich, Lösungen zu b) bis d) verkürzt)
Mit A, B ∈ g und C, D ∈ h kann man die Gleichungen der Geraden g und h bestimmen, man erhält so zwei linearen Gleichungen bzw. ein lineares Gleichungssystem mit den Gleichungen g und h. Der Schnittpunkt S erfüllt beide Gleichungen, er ist Lösung des linearen Gleichungssystems.

a)



$A \in g \Rightarrow 0 = -4m + t$
$B \in g \Rightarrow 4 = 4m + t$
Gleichungen addieren: $4 = 2t \Leftrightarrow t = 2$
$t = 2$ einsetzen: $0 = -4m + 2 \Leftrightarrow m = 0{,}5$
$\Rightarrow g\colon y = 0{,}5x + 2$
$C \in h \Rightarrow -2 = 4m + t$
$D \in h \Rightarrow 4 = t \Leftrightarrow t = 4$
$t = 4$ einsetzen: $-2 = 4m + 4 \Leftrightarrow m = -1{,}5$
$\Rightarrow h\colon y = -1{,}5x + 4$
$S \in g$ und $S \in h$: g und h gleichsetzen:
$0{,}5x + 2 = -1{,}5x + 4 \Leftrightarrow x = 1;\ y = 2{,}5 \Rightarrow S(1|2{,}5)$

b) Gleichung für A: $2 = m + t$ und Gleichung für B: $5 = 4m + t$. $\Rightarrow g\colon y = x + 1$
Gleichung für C: $3 = -m + t$ und Gleichung für D: $9 = m + t$. $\Rightarrow h\colon y = 3x + 6$
g und h gleichsetzen: $x + 1 = 3x + 6 \Leftrightarrow x = -2{,}5;\ y = -1{,}5$ $\Rightarrow S(-2{,}5|-1{,}5)$

c) Gleichung für A: $3 = 2m + t$ und Gleichung für B: $6 = -m + t$. $\Rightarrow g\colon y = -x + 5$
Gleichung für C: $4 = 2m + t$ und Gleichung für D: $2 = 8m + t$. $\Rightarrow h\colon y = -\frac{1}{3}x + 4\frac{2}{3}$
g und h gleichsetzen: $-x + 5 = -\frac{1}{3}x + 4\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 0{,}5;\ y = 4{,}5$ $\Rightarrow S(0{,}5|4{,}5)$

d) Gleichung für A: $1 = -3m + t$ und Gleichung für B: $3 = 4m + t$. $\Rightarrow g\colon y = \frac{2}{7}x + 1\frac{6}{7}$
Gleichung für C: $3 = -2m + t$ und Gleichung für D: $-1 = 4m + t$. $\Rightarrow h\colon y = -\frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3}$
g und h gleichsetzen: $\frac{2}{7}x + 1\frac{6}{7} = -\frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5};\ y = 1\frac{4}{5}$ $\Rightarrow S\left(-\frac{1}{5} \middle| 1\frac{4}{5}\right)$

K3 **13**

a) I $\quad 2 \cdot (x + y) = 24 \Leftrightarrow x + y = 12$
II $\quad 3 \cdot (x - y) = -6 \Leftrightarrow x - y = -2$
Additionsverfahren liefert:
$x = 5;\ y = 7;\ \mathbb{L} = \{(5|7)\}$
Die eine Zahl ist 5, die andere 7.

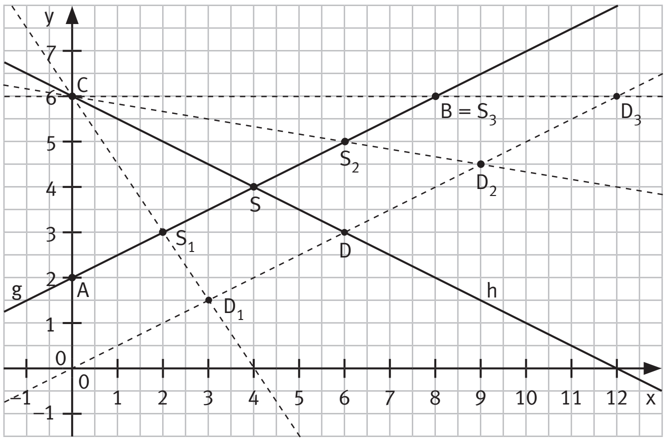
b) I $\quad x + 8 = y$ (y ist die größere Zahl)
II $\quad 3x - 10 = y$
Gleichsetzungsverfahren liefert:
$x = 9;\ y = 17;\ \mathbb{L} = \{(9|17)\}$
17 ist um 8 größer als 9 und um 10 kleiner als 27.

c) Es sei x die Zehnerziffer und y die Einerziffer der gesuchten Zahl.
I $\quad 10x + y = 2{,}5 \cdot (x + y) \Leftrightarrow y = 5x$
II $\quad 10y + x - 6 = 3 \cdot (10x + y)$
$\quad \Leftrightarrow 7y - 29x - 6 = 0$
Einsetzungsverfahren mit $y = 5x$ liefert:
$35x - 29x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
$\Rightarrow x = 1$ und $y = 5;\ \mathbb{L} = \{(1|5)\}$
Die gesuchte Zahl ist 15.

d) Es sei x die Hunderterziffer und y die Einerziffer der gesuchten Zahl.
I $\quad x + y = 8 \Leftrightarrow y = 8 - x$
II $\quad 100y + 50 + x + 396 = 100x + 50 + y$
$\quad \Leftrightarrow y = x - 4$
Gleichsetzungsverfahren liefert:
$8 - x = x - 4 \Leftrightarrow x = 6$
$\Rightarrow x = 6$ und $y = 2;\ \mathbb{L} = \{(6|2)\}$
Die gesuchte Zahl ist 652.

K 5

14 a) D (6|3); S (4|4)



b)

S (x_S | y_S)	(0|2)	(2|3)	(4|4)	(6|5)	(8|6)	(10|7)
D (x_d | 0,5x_d)	(0|0)	(3|1,5)	(6|3)	(9|4,5)	(12|6)	(15|7,5)

Da S (x_S | y_S) auf g liegt und g die Steigung 0,5 hat, muss x_S geradzahlig (und positiv) sein, damit (x_S | y_S) ein ganzzahliges Zahlenpaar ist. Möglichkeiten für x_S sind daher: 2; 4; 6; 8; 10; … ; zugehörige y_S sind: 3; 4; 5; 6; 7; … Die Koordinaten des Punktes D ändern sich bei Änderung von S linear, d. h., für die nächste Lösung von S nimmt die x-Koordinate von D um 3 Einheiten und die y-Koordinate um 1,5 Einheiten zu.

Verständnis

K1 ■ Wenn $D_N = 0$ ist, dann gilt: $a_1 b_2 = a_2 b_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$
Das bedeutet, dass das Verhältnis der Koeffizienten des linearen Gleichungssystems I $\wedge$ II vor den Variablen x und y gleich ist, also der linke Term in Gleichung I ein Vielfaches des linken Terms von Gleichung II ist.
Aus $D_x = D_y = 0$ folgt ebenso: $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ und $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$
Damit sind auch die Verhältnisse der konstanten Glieder des linearen Gleichungssystems gleich den Koeffizientenverhältnissen, d. h. Gleichung I ist ein Vielfaches von Gleichung II; es gibt unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems.

K1 ■ Mit der vorausgehenden Argumentation bei $D_N = 0$ ist der linke Term in Gleichung I ein Vielfaches des linken Terms von Gleichung II. Ist $D_x \neq 0$ oder $D_y \neq 0$, so bedeutet dies, dass die konstanten Glieder auf der rechten Seite kein Vielfaches voneinander sind mit demselben Koeffizientenverhältnis. Folglich sind die konstanten Glieder unterschiedlich für Gleichung I und II und es ergibt sich keine Lösung des linearen Gleichungssystems.

K5 **1** **a)** −2 **b)** 2 **c)** −2 **d)** −9 **e)** 3,6

K5 **2** **a)** a = 4 **b)** a = 0,5 **c)** a = 3 **d)** a = −1,4 **e)** a = 2,2 **f)** a = 2,25

KX **3** Für das Determinantenverfahren sind bei d), e) und h) die Gleichungen in die passende Form zu bringen.

a) $D_x = \begin{vmatrix} 11{,}1 & 3 \\ -13 & -5 \end{vmatrix} = -55{,}5 + 39 = -16{,}5$ $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 11{,}1 \\ 2 & -13 \end{vmatrix} = -13 - 22{,}2 = -35{,}2$

$D_N = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 6 = -11$

$x = \frac{D_x}{D_N} = \frac{-16{,}5}{-11} = 1{,}5;\ y = \frac{D_y}{D_N} = \frac{-35{,}2}{-11} = 3{,}2$ $\mathbb{L} = \{(1{,}5|3{,}2)\}$

b) $D_x = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0{,}1 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 0{,}4 = -10{,}4$ $D_y = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 0{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}5 - 20 = -19{,}5$

$D_N = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 16 = -26$

$x = \frac{D_x}{D_N} = \frac{-10{,}4}{-26} = 0{,}4;\ y = \frac{D_y}{D_N} = \frac{-19{,}5}{-26} = 0{,}75$ $\mathbb{L} = \{(0{,}4|0{,}75)\}$

c) $D_x = \begin{vmatrix} 3 & -5{,}4 \\ 0{,}9 & 4{,}5 \end{vmatrix} = 13{,}5 + 4{,}86 = 18{,}36$ $D_y = \begin{vmatrix} 3{,}75 & 3 \\ -2{,}7 & 0{,}9 \end{vmatrix} = 3{,}375 + 8{,}1 = 11{,}475$

$D_N = \begin{vmatrix} 3{,}75 & -5{,}4 \\ -2{,}7 & 4{,}5 \end{vmatrix} = 16{,}875 - 14{,}58 = 2{,}295$

$x = \frac{D_x}{D_N} = \frac{18{,}36}{2{,}295} = 8;\ y = \frac{D_y}{D_N} = \frac{11{,}475}{2{,}295} = 5$ $\mathbb{L} = \{(8|5)\}$

d) I $-3x + 5y = -4$
II $4x + 5y = 52$

$D_x = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 52 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 260 = -280$ $D_y = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 52 \end{vmatrix} = -156 + 16 = -140$

$D_N = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -15 - 20 = -35$

$x = \frac{D_x}{D_N} = \frac{-280}{-35} = 8;\ y = \frac{D_y}{D_N} = \frac{-140}{-35} = 4$ $\mathbb{L} = \{(8|4)\}$

e) I $1{,}5x + y = 3$
II $3{,}75x + 2{,}5y = 7{,}5$
$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7{,}5 & 2{,}5 \end{vmatrix} = 7{,}5 - 7{,}5 = 0$ $D_y = \begin{vmatrix} 1{,}5 & 3 \\ 3{,}75 & 7{,}5 \end{vmatrix} = 11{,}25 - 11{,}25 = 0$
$D_N = \begin{vmatrix} 1{,}5 & 1 \\ 3{,}75 & 2{,}5 \end{vmatrix} = 3{,}75 - 3{,}75 = 0$
Es gibt unendlich viele Lösungen. $\mathbb{L} = \{(x|y) \mid y = -1{,}5x + 3)\}$

f) $D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 10{,}5 & 3{,}5 \end{vmatrix} = 3{,}5 + 21 = 24{,}5$ $D_y = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3{,}5 & 10{,}5 \end{vmatrix} = 52{,}5 - 3{,}5 = 49$
$D_N = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3{,}5 & 3{,}5 \end{vmatrix} = 17{,}5 + 7 = 24{,}5$
$x = \frac{D_x}{D_N} = \frac{24{,}5}{24{,}5} = 1$; $y = \frac{D_y}{D_N} = \frac{49}{24{,}5} = 2$ $\mathbb{L} = \{(1|2)\}$

g) $D_x = \begin{vmatrix} 13 & 2 \\ -18 & -3 \end{vmatrix} = -39 + 36 = -3$ $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 4 & -18 \end{vmatrix} = -54 - 52 = -106$
$D_N = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 8 = -17$
$x = \frac{D_x}{D_N} = \frac{-3}{-17} \approx 0{,}18$; $y = \frac{D_y}{D_N} = \frac{-106}{-17} \approx 6{,}24$ $\mathbb{L} = \{(0{,}18|6{,}24)\}$

h) I $-x + 3y = -63$
II $-x + 3y = -1$
$D_x = \begin{vmatrix} -63 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -189 + 3 = -186$ $D_y = \begin{vmatrix} -1 & -63 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 63 = -62$
$D_N = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$
Es gibt keine Lösung. $\mathbb{L} = \varnothing$

i) $D_x = \begin{vmatrix} -9{,}01 & 7{,}4 \\ -39{,}91 & 3{,}8 \end{vmatrix} = -34{,}238 + 295{,}334 = 261{,}096$ $D_y = \begin{vmatrix} 4{,}1 & -9{,}01 \\ -6{,}1 & -39{,}91 \end{vmatrix} -163{,}631 - 54{,}961 = -218{,}592$
$D_N = \begin{vmatrix} 4{,}1 & 7{,}4 \\ -6{,}1 & 3{,}8 \end{vmatrix} = 15{,}58 + 45{,}14 = 60{,}72$
$x = \frac{D_x}{D_N} = \frac{261{,}096}{60{,}72} = 4{,}3$; $y = \frac{D_y}{D_N} = \frac{-218{,}592}{60{,}72} = -3{,}6$ $\mathbb{L} = \{(4{,}3|-3{,}6)\}$

Kx **4** Es sind individuelle Lösungswege möglich.
a) I $x + 6 = 3y$ II $y + 9 = 4x$ $\mathbb{L} = \{(3|3)\}$
Die gesuchten Zahlen sind 3 (erste Zahl) und 3 (zweite Zahl).
b) I $x + y = 25$ II $2x = 3y$ $\mathbb{L} = \{(15|10)\}$
Die gesuchten Zahlen sind 15 (erste Zahl) und 10 (zweite Zahl).
c) I $10x + y - 18 = 10y + x$ II $x + y = 12$ $\mathbb{L} = \{(7|5)\}$
Die gesuchte Zahl ist 75.
d) I $10x + y + 4 \cdot (x + y) = 108$ II $(10x + y) : (x + y) = 8$ $\mathbb{L} = \{(7|2)\}$
Die gesuchte Zahl ist 72.

K3 **5** Es sei x die Anzahl der Tore, die Hansi geschossen hat, und y die Anzahl der Tore, die Thomas geschossen hat; $x, y \in \mathbb{N}_0$.
Lösung des linearen Gleichungssystems:
I $x + y = 13$ II $x - 2 = y + 3$ $\mathbb{L} = \{(9|4)\}$
Hansi hat 9 Tore geschossen und Thomas 4.

K5 **1** Es sind individuelle Lösungswege möglich, angezeigt wird daher nach der Benennung des empfohlenen (aber nicht einzig möglichen) Verfahrens nur die jeweilige Lösungsmenge.

a)	Einsetzungsverfahren mit $y = 2x - 3$	$\Rightarrow x = 14;\ y = 25$	$\mathbb{L} = \{(14 \mid 25)\}$
b)	Einsetzungsverfahren mit $x = y + 3$	$\Rightarrow y = y$	$\mathbb{L} = \{(x \mid y) \mid y = x - 3\}$
c)	Einsetzungsverfahren mit $x = 2y + 1{,}5$	$\Rightarrow y = y$	$\mathbb{L} = \{(x \mid y) \mid y = 0{,}5x - 0{,}75\}$
d)	Einsetzungsverfahren mit $x = 48 - y$	$\Rightarrow y = 148;\ x = -100$	$\mathbb{L} = \{(-100 \mid 148)\}$
e)	Einsetzungsverfahren mit $x = 2y - 5$	$\Rightarrow y = 5{,}75;\ x = 6{,}5$	$\mathbb{L} = \{(6{,}5 \mid 5{,}75)\}$
f)	Einsetzungsverfahren mit $x = \frac{7}{3} - \frac{5y}{3}$	$\Rightarrow y = 29;\ x = -46$	$\mathbb{L} = \{(-46 \mid 29)\}$
g)	Einsetzungsverfahren mit $x = \frac{8}{3} - 4y$	$\Rightarrow y = 0;\ x = \frac{8}{3}$	$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{8}{3} \mid 0\right)\right\}$
h)	Einsetzungsverfahren mit $x = 6 + \frac{3}{4}y$	$\Rightarrow 24 = -2$ (Widerspruch)	$\mathbb{L} = \varnothing$
i)	Einsetzungsverfahren mit $y = 1 - \frac{4}{7}x$	$\Rightarrow 2x = 2x$	$\mathbb{L} = \left\{(x \mid y) \mid y = -\frac{4}{7}x + 1\right\}$

K3 **2** **a)** $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ und $\alpha = 42°$. Es gilt:
Gleichung I: $\beta + \gamma = 138°$ und Gleichung II: $g = \beta + 24°$ $\Rightarrow \beta = 57°;\ \gamma = 81°$

b) In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß: $\alpha = \beta$
Gleichung I: $2\alpha + \gamma = 180°$ und Gleichung II: $\gamma = \alpha - 9°$ $\Rightarrow \alpha = \beta = 63°;\ \gamma = 54°$

c) Das Dreieck ABC sei rechtwinklig mit den Katheten a und b und $a < b$:

1 Gleichung I: $a : b = 28 : 33$ und Gleichung II: $a = b - 2\,\text{cm}$ $\Rightarrow b = 13{,}2\,\text{cm};\ a = 11{,}2\,\text{cm}$
Die Katheten sind 11,2 cm und 13,2 cm lang.

2 Die Katheten stehen rechtwinklig aufeinander, daher gilt:
$A_{\text{Dreieck}} = 0{,}5 \cdot a \cdot b = 0{,}5 \cdot 11{,}2\,\text{cm} \cdot 13{,}2\,\text{cm} = 73{,}92\,\text{cm}^2$
Das Dreieck hat einen Flächeninhalt von $73{,}92\,\text{cm}^2$.

K3 **3** **a)** ABCD sei das Rechteck mit den Seiten a und b, $a > b$.
Gleichung I: $(a - 2\,\text{cm}) \cdot (b + 1\,\text{cm}) = a \cdot b - 5\,\text{cm}^2 \Leftrightarrow a = 2b - 3\,\text{cm}$
Gleichung II: $(a - 2\,\text{cm}) \cdot (b + 3\,\text{cm}) = a \cdot b + 3\,\text{cm}^2 \Leftrightarrow 3a = 2b + 9\,\text{cm}$ $\Rightarrow b = 4{,}5\,\text{cm};\ a = 6\,\text{cm}$
Das ursprüngliche Rechteck hatte die Seitenlängen a = 6 cm und b = 4,5 cm.

b) ABCD sei das Rechteck mit den Seiten a und b.
Gleichung I: $2a + 2b = 45\,\text{cm} \Leftrightarrow a = 22{,}5\,\text{cm} - b$
Gleichung II: $(a + 3\,\text{cm}) \cdot (b - 3\,\text{cm}) = a \cdot b + 42\,\text{cm}^2$
$\Leftrightarrow a \cdot b - a \cdot 3\,\text{cm} + b \cdot 3\,\text{cm} - 9\,\text{cm}^2 = a \cdot b + 42\,\text{cm}^2$
$\Leftrightarrow a = b - 17\,\text{cm}$
Gleichsetzungsverfahren mit a ergibt: b = 19,75 cm; a = 2,75 cm
Das ursprüngliche Rechteck hatte die Seitenlängen a = 2,75 cm und b = 19,75 cm.

K5 **4**

a) I und II nach y auflösen:
I $y = ax - a^2 - 1$
II $y = -x + 2a$
I und II gleichsetzen und umformen:
$ax - a^2 - 1 = -x + 2a$
$\Leftrightarrow (a + 1)x = a^2 + 2a + 1$
$\Leftrightarrow (a + 1)x = (a + 1)^2$
$\Leftrightarrow x = a + 1$ (mit $a \neq -1$)
$y = a - 1$
$\mathbb{L} = \{(a + 1 \mid a - 1)\}$

b) I und II addieren:
$2ax = 4a^2$
$\Leftrightarrow x = 2a$ (mit $a \neq 0$)
$x = 2a$ in I einsetzen und umformen:
$a \cdot 2a + 3y = 2a^2 - 9$
$\Leftrightarrow 3y = -9$
$\Leftrightarrow y = -3$
$\mathbb{L} = \{(2a \mid -3)\}$

c) I und II nach y auflösen:
I $y = ax + a^2$
II $y = 2ax + 2a^2 + 2{,}25$
I und II gleichsetzen und umformen:
$ax + a^2 = 2ax + 2a^2 + 2{,}25$
$\Leftrightarrow ax = -a^2 - 2{,}25$
$\Leftrightarrow x = -a - \frac{2{,}25}{a}$ (mit $a \neq 0$)
$y = -2{,}25$
$\mathbb{L} = \left\{\left(-a - \frac{2{,}25}{a} \mid -2{,}25\right)\right\}$

K2 **5** I und II nach y auflösen und gleichsetzen liefert:
$-x + 4 = -kx + 2 \Leftrightarrow (k-1) \cdot x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{k-1}$ für $k \neq 1$
Für $k \neq 1$ gibt es genau eine Lösung: $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{-2}{k-1} \,\middle|\, \frac{2}{k-1} + 4\right)\right\}$
Für $k = 1$ besitzt das Gleichungssystem keine Lösung.

a) $x = -1 \Rightarrow \frac{-2}{k-1} = -1 \Leftrightarrow 3 = k$. Mit $k = 3$ ist $\mathbb{L} = \{(-1|5)\}$ Lösung des linearen Gleichungssystems.

b) Für $k = 1$ hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung:
Bei $k = 1$ erhält man $4 = 2$ (falsch).

c) Es gibt keinen Wert für k, sodass $\mathbb{L} = \{(2|-1)\}$ Lösung des linearen Gleichungssystems ist:
$(2|-1)$ ist keine Lösung der Gleichung I: $2 + (-1) = 4$ (falsch), unabhängig von k.

d) Es gibt keinen Wert für k, sodass $\mathbb{L} = \{(0|4)\}$ Lösung des linearen Gleichungssystems ist:
$(0|4)$ ist keine Lösung der Gleichung II: $0k + 4 = 2 \Leftrightarrow 4 = 2$ (falsch), unabhängig von k.

K5 **6** $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x < y$.
I $\quad x = \frac{1}{5}y$
II $\quad x + 76 = y$
$y = 5x$ in II einsetzen: $x + 76 = 5x \Leftrightarrow x = 19$; $y = 95$; $\mathbb{L} = \{(19|95)\}$
$19 + 95 = 114$
Die gesuchten ganzen Zahlen sind 19 und 95, ihre Summe hat den Wert 114.

KX **7** Es sei x der Einkaufspreis je T-Shirt (in €) und y der Einkaufspreis je Pulli (in €).
I $\quad 35x + 25y = 1844{,}50$ $\qquad$ II $\quad 1{,}2 \cdot 35x + 1{,}3 \cdot 25y = 2317{,}35$ $\quad \mathbb{L} = \{(23{,}00|41{,}58)\}$
Der Einkaufspreis eines T-Shirts beträgt 23,00 €, der eines Pullis beträgt 41,58 €.

K3 **8** Es sei x die Anzahl der Stimmen für Frau Schwab und y die Anzahl der Stimmen für Frau Beyer; $x, y \in \mathbb{N}_0$.
Lösung des linearen Gleichungssystems: I $x - y = 1236$ $\quad$ II $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$ $\quad \mathbb{L} = \{(6180|4944)\}$
Frau Schwab hat 6180 Stimmen bekommen und Frau Beyer 4944.

K3 **9** Es sei x die Anzahl der Pfennige des „Ersten“ und y die Anzahl der Pfennige des „Zweiten“; $x, y \in \mathbb{N}_0$.
Lösung des linearen Gleichungssystems: I $x + 1 = y - 1$ $\quad$ II $y + 1 = 2 \cdot (x - 1)$ $\quad \mathbb{L} = \{(5|7)\}$
Der „Erste“ hatte 5 Pfennige und der „Zweite“ 7 Pfennige.

K3 **10** **a)** ① Die Variablen x und y geben das aktuelle Alter von Sven und Paul an ($x, y \in \mathbb{N}_0$), entsprechend ist $x - 3$ bzw. $y - 3$ das Alter von Sven bzw. Paul vor 3 Jahren.
Gleichung I gibt das aktuelle Altersverhältnis an: $x = 4y$; Sven ist heute viermal so alt wie Paul.
Gleichung II gibt das Altersverhältnis von vor drei Jahren an: Sven war vor 3 Jahren siebenmal so alt wie Paul damals:
II $x - 3 = 7 \cdot (y - 3)$

② $\mathbb{L} = \{(24|6)\}$
Sven ist heute 24 Jahre alt, Paul ist 6 Jahre alt.
Vor drei Jahren war Sven mit 21 Jahren siebenmal so alt wie der damals 3-jährige Paul.

b) ①

Alter in Jahren	heute	vor 5 Jahren
... von Marcos Onkel	x	$x - 5$
... von Marco	y	$y - 5$
	I $x = 3y$	II $x - 5 = 4 \cdot (y - 5)$
	$\mathbb{L} = \{(45|15)\}$	

Marcos Onkel ist heute 45 Jahre alt, Marco ist 15 Jahre alt.
Vor fünf Jahren war Marcos Onkel mit 40 Jahren viermal so alt wie der damals 10-jährige Marco.

2

Alter in Jahren	heute	in 2 Jahren	vor 8 Jahren
... von Majas Mutter	x	x + 2	x – 8
... von Maja	y	y + 2	y – 8
		I $x + 2 = 2 \cdot (y + 2)$	II $x - 8 = 3 \cdot (y - 8)$
	$\mathbb{L} = \{(38 \mid 18)\}$		

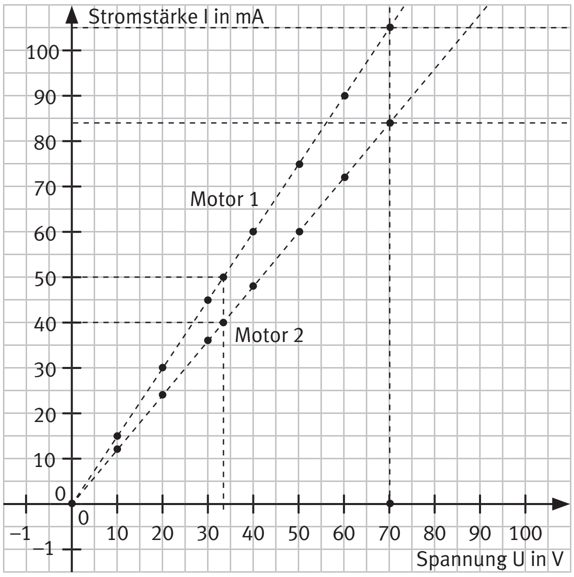
Majas Mutter ist heute 38 Jahre alt, Maja ist 18 Jahre alt.
In zwei Jahren ist Majas Mutter mit 40 Jahren doppelt so alt wie die dann 20-jährige Maja.
Vor acht Jahren war Majas Mutter mit 30 Jahren dreimal so alt wie die damals 10-jährige Maja.

K3

11 Es sei x die Kraft F_1 und y die Kraft F_2 (in N); $x, y \in \mathbb{Q}$.
Lösung des linearen Gleichungssystems: I $x + y = 7$ II $7{,}5x = 17{,}5y$ $\mathbb{L} = \{(4{,}9 \mid 2{,}1)\}$
Die Kraft F_1 beträgt 4,9 N, die Kraft F_2 beträgt 2,1 N.

K2

12 a)



b) Es liegt eine Funktion vor, da jedem Wert für die Spannung eindeutig ein Wert für die Stromstärke zugeordnet werden kann.

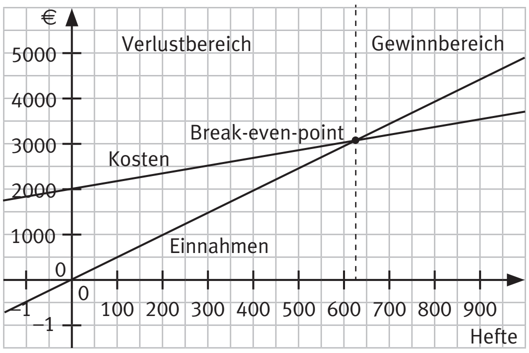
c) Es sei x die Spannung in V und y die Stromstärke in mA.
Motor 1: $10y = 15x \Leftrightarrow y = 1{,}5x$
Motor 2: $10y = 12x \Leftrightarrow y = 1{,}2x$

d) Motor 1 für x = 70 V: $y = 1{,}5 \cdot 70 = 105$
Motor 2 für x = 70 V: $y = 1{,}2 \cdot 70 = 84$
Bei einer Spannung von 70 V kann man an Motor 1 eine Stromstärke von 105 mA und an Motor 2 eine Stromstärke von 84 mA erwarten. Die prozentuale Abweichung zwischen erwarteter und gemessener Stromstärke bei Motor 1 beträgt $\frac{5}{105} \approx 0{,}048 = 4{,}8\,\%$; die Abweichung bei Motor 2 beträgt $\frac{2}{84} \approx 0{,}024 = 2{,}4\,\%$.

e) $1{,}5x - 10 = 1{,}2x \quad \Rightarrow x = 33\frac{1}{3}$; $y_{\text{Motor 1}} = 50$; $y_{\text{Motor 2}} = 40$.
Bei einer Spannung von $33\frac{1}{3}$ V fließt durch Motor 1 mit 50 mA eine um 10 mA höhere Stromstärke als durch Motor 2 mit 40 mA.

K3 **Break-even-point: Der Punkt zum Gewinn**

a)



Es sei x die Anzahl der Hefte und y die Geldmenge in €; $x \in \mathbb{N}_0$, $y \in \mathbb{Q}^+$.

Kosten (in €): I $y = 1{,}7x + 2000$

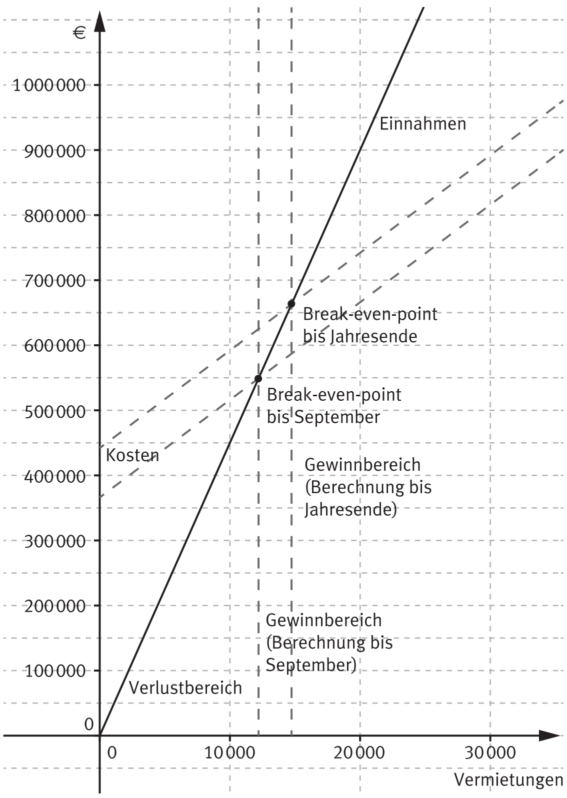
Einnahmen (in €): II $y = 4{,}9x$

$\mathbb{L} = \{(625 \mid 3062{,}5)\}$

Der Break-even-point liegt bei 625 Heften; die angefallenen Kosten in Höhe von 3062,50 € sind durch die Einnahmen gedeckt. Jedes weitere verkaufte Heft bedeutet einen Gewinn.

b) Es sei x die Anzahl der Vermietungen im Jahr und y die Geldmenge in €; $x \in \mathbb{N}_0$, $y \in \mathbb{Q}^+$.

Berechnung bis zum Jahresende (365 Tage)	Berechnung bis Ende September (270 Tage)
Bis zum Jahresende sind maximal $80 \cdot 365 = 29\,200$ Vermietungen möglich.	Bis Ende September sind maximal $80 \cdot 270 = 21\,600$ Vermietungen möglich.
Die Anzahl der leeren Zimmer bei x belegten Zimmern beträgt $29\,200 - x$.	Die Anzahl der leeren Zimmer bei x belegten Zimmern beträgt $21\,600 - x$.
Kosten bzw. Einnahmen in €:	Kosten bzw. Einnahmen in €:
I $y = 25x + 10 \cdot (29\,200 - x) + 150\,000$	I $y = 25x + 10 \cdot (21\,600 - x) + 150\,000$
$\Leftrightarrow y = 15x + 442\,000$	$\Leftrightarrow y = 15x + 366\,000$
II $y = 45x$	II $y = 45x$
Da x ganzzahlig sein muss, gilt: $\mathbb{L} = \{14\,734\}$	$\mathbb{L} = \{12\,200\}$
Bis Jahresende sind 14 734 Vermietungen (663 010 €) erforderlich. Dazu müssen am Tag durchschnittlich $14\,734 : 365 \approx 40$ Zimmer vermietet sein.	Bis Ende September sind 12 200 Vermietungen (549 000 €) erforderlich. Dazu müssen am Tag durchschnittlich $12\,200 : 270 \approx 45$ Zimmer vermietet sein.



Anmerkungen:
Es ist sicherlich sinnvoll, den Break-even-point innerhalb des Jahres zu legen, da viele Kosten vor Jahresende beglichen werden müssen. Bei der Berechnung des Break-even-points bis zum Jahresende fällt auf, dass für verschiedene Zeitpunkte des Break-even-points innerhalb des Jahres sich im Gleichungssystem nur der Wert der Übernachtungen bis zu dem bestimmten Zeitpunkt ändert, der Rest dagegen gleich bleibt. Dies könnte man für eine Vertiefung mit einem Tabellenkalkulationsprogramm nutzen.

K3 **Spare, spare, Häusle baue**

Es sei x der Geldbetrag (in €) für das Bauspardarlehen und y der Geldbetrag für den Bankkredit. $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

I $\quad x + y = 320\,000$

II $\quad 0{,}025x + 0{,}03y = 8600$

$\mathbb{L} = \{(200\,000 \mid 120\,000)\}$

Familie Meisel hat für den Hausbau 200 000 € als Bauspardarlehen und 120 000 € als Bankkredit aufgenommen.

K3 **Money, money, money ...**

a) Es sei x der Geldbetrag (in €), den Christopher im Global-Fonds angelegt hat, und y der Geldbetrag im Öko-Fonds. $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

I $\quad x + y = 20\,000$

II $\quad 0{,}045x + 0{,}055y = 1050$

$\mathbb{L} = \{(5000 \mid 15\,000)\}$

Christopher hat 5000 € im Global-Fonds und 15 000 € im Öko-Fonds angelegt.

b) $0{,}045 \cdot 5000 + 0{,}035 \cdot 15\,000 = 750$

Christopher hat im ersten Jahr wegen des schwankenden Öko-Fonds-Kurses statt den erwarteten 1050 € nur 750 € Zinsen bekommen.

K2 **Alles Theater**

a) Es sind individuelle Antworten möglich. In den Antworten sollte deutlich werden, dass für den Break-even-point die Einnahmen die festen Kosten von insgesamt 25 000 € sowie die 40 % Beteiligung decken sollten.

Beispiel:

Eine Karte für den 1. Rang sei doppelt so teuer wie eine Karte für den 2. Rang:
1. Rang 60 €, 2. Rang 30 €.
Es sei x die Anzahl der verkauften Karten für den 1. Rang und y die Anzahl der verkauften Karten für den 2. Rang; $x, y \in \mathbb{N}_0$.
Term für die Kosten (in €): $\quad T_1(x) = 25\,000 + 0{,}4 \cdot 60 \cdot x + 0{,}4 \cdot 30 \cdot y$
Term für die Einnahmen (in €): $T_2(x) = 60x + 30y$

Wenn für den 1. Rang 500 Karten verkauft werden, müssten für den 2. Rang folgende Anzahl an Karten verkauft werden, damit kein Verlust entsteht:

$25\,000 + 0{,}4 \cdot 60 \cdot 500 + 0{,}4 \cdot 30 \cdot y = 60 \cdot 500 + 30y \Leftrightarrow 7000 = 18y \Rightarrow y \approx 389$

Es müssten 389 Karten vom 2. Rang verkauft werden, damit kein Verlust entsteht.

b) 1 Die Kosten für den Künstler bestehen aus 10 000 € festen Kosten und 40 % aus den Einnahmen. Mit x als Anzahl der verkauften 1.-Rang-Karten à 40 € und y als Anzahl der verkauften 2.-Rang-Karten à 32 € betragen die Einnahmen (in €): $40x + 32y$.
Hiervon bekommt der Künstler zuzüglich zu den 10 000 € 40 %, also insgesamt (in €):
$10\,000 + 0{,}4 \cdot (40x + 32y)$.

2 Gleichung I gibt die Gesamtanzahl an Plätzen an: $x + y = 1400$.
In Gleichung II stehen im Linksterm die Kosten (in €) für den Künstler ($10\,000 + 0{,}4 \cdot (40x + 32y)$) und für Miete, Versicherungen etc. (15 000) sowie der erwartete Gewinn (5000) als „Kosten“ für das Theater. Im Rechtsterm von Gleichung II stehen die Einnahmen durch den Kartenverkauf.

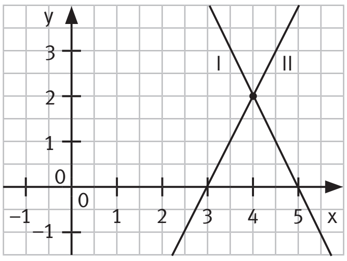
I $\quad x + y = 1400$

II $\quad 10\,000 + 0{,}4 \cdot (40x + 32y) + 15\,000 + 5000 = 40x + 32y \Leftrightarrow 30\,000 = 24x + 19{,}2y$

$\mathbb{L} = \{(650 \mid 750)\}$

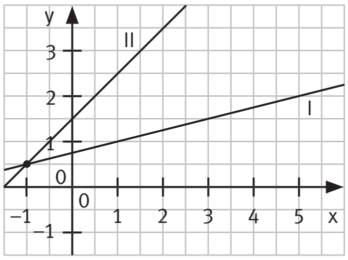
Es müssen 650 Karten à 40 €und 750 Karten à 32 € verkauft werden, dann ergibt sich bei 50 000 € Einnahmen gegenüber 45 000 € Ausgaben ein Gewinn von 5000 €.

K4 **1** **a)**



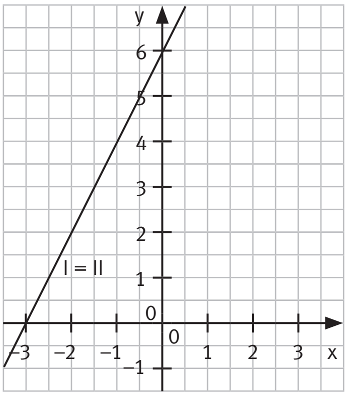
$\mathbb{L} = \{(4|2)\}$

b)



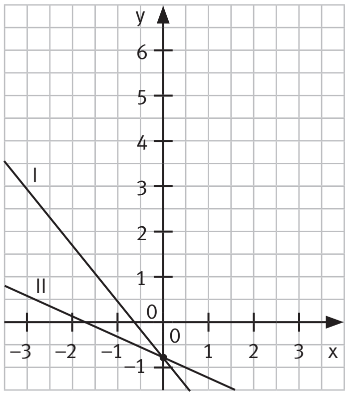
$\mathbb{L} = \{(-1|0{,}5)\}$

c)



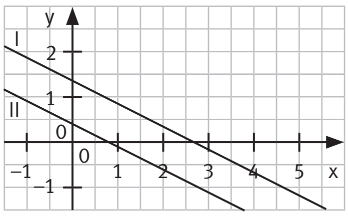
$\mathbb{L} = \{(x|y)\,|\,y = 2x + 6\}$

d)



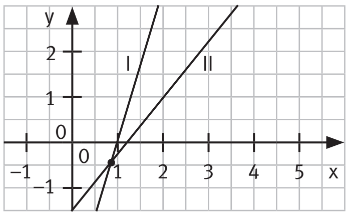
$\mathbb{L} = \{(0|-0{,}75)\}$

e)



$\mathbb{L} = \varnothing$

f)



$\mathbb{L} = \{(0{,}88|-0{,}4)\}$

K4 **2** Es sind individuelle Darstellungen für die Gleichungen des linearen Gleichungssystems möglich (I = blau; II = rot).

	①	②
a)	I $y = 3x - 1$	I $y = -x + 0{,}5$
	II $y = -0{,}5x + 1{,}5$	II $y = -x - 1$
b)	$\mathbb{L} = \{(0{,}7|1{,}1)\}$ (genau: $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{5}{7}\middle|\frac{8}{7}\right)\right\}$)	$\mathbb{L} = \varnothing$

K5 **3** (Lösungen zu a) und b) ausführlich, zu c) bis f) verkürzt)

a) I $y = 4x - 4$
II $x + y = 6$
$y = 4x - 4$ in II einsetzen:
$x + 4x - 4 = 6$
$5x = 10$
$x = 2;\ y = 4$
Probe:
I $4 = 4 \cdot 2 - 4$ wahr
II $2 + 4 = 6$ wahr
$\mathbb{L} = \{(2|4)\}$

b) I $x = 8 - 0{,}5y$
II $6x + y = 40 \Leftrightarrow y = 40 - 6x$
$y = 40 - 6x$ in I einsetzen:
$x = 8 - 20 + 3x$
$12 = 2x$
$6 = x;\ y = 4$
Probe:
I $6 = 8 - 2$ wahr
II $36 + 4 = 40$ wahr
$\mathbb{L} = \{(6|4)\}$

c) $\mathbb{L} = \left\{\left(1\frac{8}{15}\middle|-2{,}6\right)\right\}$ **d)** $\mathbb{L} = \{(6|0)\}$ **e)** $\mathbb{L} = \left\{\left(3\frac{1}{7}\middle|4\frac{5}{7}\right)\right\}$ **f)** $\mathbb{L} = \{(3|-2)\}$

K5 **4** (Lösungen zu a) und b) ausführlich, zu c) bis f) verkürzt)

a) I $y = 6x - 2$
II $y = 2x - 1$
I und II gleichsetzen:
$6x - 2 = 2x - 1$
$4x = 1$
$x = 0{,}25;\ y = -0{,}5$
Probe:
I $-0{,}5 = 1{,}5 - 2$ wahr
II $-0{,}5 = 0{,}5 - 1$ wahr
$\mathbb{L} = \{(0{,}25 \mid -0{,}5)\}$

b) I $2y = 4x - 14 \Leftrightarrow y = 2x - 7$
II $3y = 15 - 6x \Leftrightarrow y = 5 - 2x$
I und II (umgeformt) gleichsetzen:
$2x - 7 = 5 - 2x$
$4x = 12$
$x = 3;\ y = -1$
Probe:
I $-2 = 12 - 14$ wahr
II $-3 = 15 - 18$ wahr
$\mathbb{L} = \{(3 \mid -1)\}$

c) $\mathbb{L} = \{(4 \mid 4)\}$ **d)** $\mathbb{L} = \{(4 \mid -6)\}$ **e)** $\mathbb{L} = \{(6 \mid 11)\}$ **f)** $\mathbb{L} = \{(12 \mid 2)\}$

K5 **5** (Lösungen zu a) und b) ausführlich, zu c) bis f) verkürzt)

a) I $5x - 4y = -37$
II $x + 4y = 7$
I und II addieren:
$6x = -30$
$x = -5;\ y = 3$
Probe:
I $-25 - 12 = -37$ wahr
II $-5 + 12 = 7$ wahr
$\mathbb{L} = \{(-5 \mid 3)\}$

b) I $3x + 4y = 11$
II $3x + 3y = 9 \Leftrightarrow -3x - 3y = -9$
I und II (umgeformt) addieren:
$y = 2;\ x = 1$
Probe:
I $3 + 8 = 11$ wahr
II $3 + 6 = 9$ wahr
$\mathbb{L} = \{(1 \mid 2)\}$

c) $\mathbb{L} = \{(3 \mid 4)\}$ **d)** $\mathbb{L} = \{(-2 \mid 12)\}$ **e)** $\mathbb{L} = \{(11 \mid 4)\}$ **f)** $\mathbb{L} = \{(-4 \mid 2)\}$

K1 **6** Es sind individuelle Lösungswege und Argumente möglich; grundsätzlich kann ein lineares Gleichungssystem mit jedem Verfahren (Einsetzung, Gleichsetzung, Addition oder Zeichnung) gelöst werden.

	1	2	3	4	5	6
a)	Addition	Einsetzung	Einsetzung oder Gleichsetzung	Einsetzung	Gleichsetzung	Addition
b)	$\mathbb{L} = \{(10 \mid 6)\}$	$\mathbb{L} = \{(10 \mid 25)\}$	$\mathbb{L} = \{(x \mid y) \mid y = x + 18\}$	$\mathbb{L} = \{(6 \mid 8)\}$	$\mathbb{L} = \{(3 \mid 8)\}$	$\mathbb{L} = \{(3 \mid 5)\}$

Kx **7** **a)** $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 - 3 = -13$ **b)** $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4$ **c)** $\begin{vmatrix} 2{,}5 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 3 = 3$

Kx **8** **a)** $D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 8 = 4$ $D_y = \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -10 & 8 \end{vmatrix} = -40 + 60 = 20$

$D_N = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -10 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 10 = 0$ Es gibt keine Lösung. $\mathbb{L} = \varnothing$

b) $D_x = \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 14 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 5{,}5 - 14 = -8{,}5$ $D_y = \begin{vmatrix} -1 & 11 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = -14 - 11 = -25$

$D_N = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0{,}5 \end{vmatrix} = -0{,}5 - 1 = -1{,}5$ $x = \frac{D_x}{D_N} = 5\frac{2}{3};\ y = \frac{D_y}{D_N} = 16\frac{2}{3}$ $\mathbb{L} = \left\{\left(5\frac{2}{3} \mid 16\frac{2}{3}\right)\right\}$

K5 **9** Es sind individuelle Lösungswege möglich.
a) $\mathbb{L} = \{(x|y) \mid y = 0{,}75x - 0{,}3\}$ **b)** $\mathbb{L} = \left\{\left(-20\frac{2}{11} \mid -13\frac{8}{11}\right)\right\}$
c) $\mathbb{L} = \{(-1 \mid -12)\}$ **d)** $\mathbb{L} = \{(-10 \mid 3)\}$

K3 **10** Es sei x die Packungsanzahl der 3,5%-igen Milch und y die Packungsanzahl der 0,5%-igen Milch; $x, y \in \mathbb{N}_0$.
I $x + y = 8$ II $3{,}5 \cdot x + 0{,}5 \cdot y = 1{,}25 \cdot 8$ $\mathbb{L} = \{(2|6)\}$
Man muss zwei 1-Liter-Packungen der 3,5%-igen Milch und sechs 1-Liter-Packungen der 0,5%-igen Milch mischen, um acht Liter Milch mit einem Fettgehalt von 1,25 % zu erhalten.

K3 **11** Es sei x das Alter von Carmen und y das Alter von Saskia (in Jahren); $x, y \in \mathbb{N}_0$.
I $x + y = 24$ II $x = y + 4$ $\mathbb{L} = \{(14|10)\}$
Carmen ist 14 Jahre alt und Saskia 10 Jahre.

K3 **12** Es sei s die Seitenlänge und a die Kantenlänge (in cm); $a, s \in \mathbb{Q}^+$. Man beachte die Umrechnung in cm.
I $4a + 4s = 100$ II $s = a + 10$ $\mathbb{L} = \{(7{,}5|17{,}5)\}$
Die Kantenlänge a der Pyramide beträgt 7,5 cm, die Seitenlänge s beträgt 17,5 cm.

K3 **13** Es sei x der Preis für einen Rosenstock und y der Preis für einen Beutel Tulpenzwiebeln (in €); $x, y \in \mathbb{Q}^+$.
I $3x + 5y = 50{,}20$ II $4x + 3y = 49{,}70$ $\mathbb{L} = \{(8{,}9|4{,}7)\}$
Ein Rosenstock kostet 8,90 €, ein Beutel Tulpenzwiebeln kostet 4,70 €.

K3 **14** Es sei x die größere und y die kleinere Zahl; $x, y \in \mathbb{N}$.
I $x = y + 9$ II $x + y = 151$ $\mathbb{L} = \{(80|71)\}$
Die gesuchten natürlichen Zahlen sind 80 und 71.

K1/6 **15** Die Aussage ist falsch. Ein lineares Gleichungssystem kann keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen haben. Zwei, drei, vier, … Lösungen kann es jedoch nicht haben.

K1/6 **16** Die Aussage ist richtig. Man kann das Gleichsetzen auch als Einsetzen des Terms für die Variable aus der einen Gleichung in die andere Gleichung ansehen.

K1/6 **17** Die Aussage ist für die rechnerischen Verfahren richtig. Für das zeichnerischen Lösen ist die Aussage falsch, denn in diesem Fall betrachtet man jede lineare Gleichung als Gerade und sucht den Schnittpunkt der Geraden, d. h. das Zahlenpaar, das Lösung beider Gleichungen ist.

K1/6 **18** Die Aussage ist falsch. Wenn die Geraden der Funktionsgleichungen (echt) parallel zueinander verlaufen, dann hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung. Wenn ein lineares Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat, sind die zugehörigen Geraden identisch.

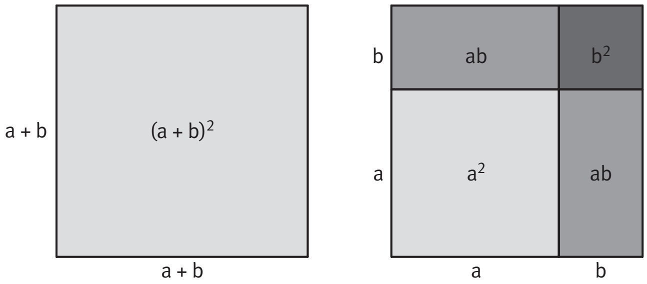
K1/6 **19** Die Aussage ist richtig, in der Regel ist die rechnerische Lösung genauer als die zeichnerische Lösung. Es gibt jedoch auch viele Fälle, in denen sich (insbesondere ganzzahlige) Lösungen beim zeichnerischen Lösen mit der gleichen Genauigkeit bestimmen lassen wie mit rechnerischen Verfahren.
Die Arbeit mit einem GTR hilft bei der exakteren Ermittlung der Lösung.

K1/6 **20** Die Aussage ist richtig.

K1/6 **21** Die Aussage ist falsch. Beim Additionsverfahren formt man beide Gleichungen zunächst so um, dass die Koeffizienten vor einer der beiden Variablen denselben Betrag, aber ein unterschiedliches Vorzeichen haben. Wenn man dann beide Gleichungen miteinander addiert, wird eine Variable eliminiert.

K1/6 **22** Die Aussage ist falsch. Die Determinante ist eine Funktion, die jedem Koeffizientenschema eindeutig einen Zahlenwert zuordnet. In einem linearen Gleichungssystem treten die Determinanten D_N, D_x und D_y auf, mit deren Hilfe man die Lösungsmenge des Gleichungssystems ermitteln kann.

K4 **1** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



K5 **2** **a)** $z^2 - 5z + 6{,}25$ **b)** $1{,}21 + 2{,}2x + x^2$ **c)** $m^2 - 9$ **d)** $p^2 + 1{,}6pq + 0{,}64q^2$
e) $2\frac{7}{9} - 6\frac{2}{3}x + 4x^2$ **f)** $9c^2 - 16d^2$ **g)** $1{,}96r^8 + 0{,}56r^4s + 0{,}04s^2$ **h)** $4{,}41 - 4{,}2c^3 + c^6$

K5 **3** **a)** $(a+2)^2$ **b)** $(6+r)\cdot(6-r)$ **c)** $(3x-4y)^2$ **d)** $(9a^2+1)\cdot(9a^2-1)$

K5 **4** **a)** $x^2 - 14xy^2 + 49y^4 = (x - 7y^2)^2$ **b)** $c^2 - 1\frac{5}{7}c + \frac{36}{49} = \left(c - \frac{6}{7}\right)^2$
c) $(3m - 2n)\cdot(3m + 2n) = 9m^2 - 4n^2$ **d)** $p^2 + 10op + 25o^2 = (p + 5o)^2$
e) $(v - 2w^2x)\cdot(v + 2w^2x) = v^2 - 4w^4x^2$

K1 **5** Folgende Terme sind Quadrate von Binomen:

$a^2 + b^2 + 2ab$ | $a^2 - 2ab + b^2$ | $a^2 - b^2$

Folgende Terme sind erst nach Änderung Quadrate von Binomen:

$a^2 + b^2$	Korrekturmöglichkeit: $a^2 - b^2$
$a^2 + b^3$	Korrekturmöglichkeit: $a^2 - b^2$
$a^2 + 3ab + b^2$	Korrekturmöglichkeit: $a^2 + 2ab + b^2$
$a^2 - 2ab - b^2$	Korrekturmöglichkeit: $a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 + 2ab - b^2$	Korrekturmöglichkeit: $a^2 + 2ab + b^2$

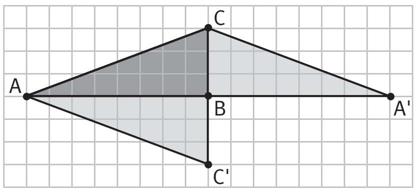
K5 **6** **a)** $a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - b^2) = 2b^2 + 2ab$
b) $16s^2 - 9u^2 - (9u^2 + 24us + 16s^2) = -18u^2 - 24su$
c) $36r^2 - 60r + 25 - (36r^2 - 25) = -60r + 50$
d) $64x^2 - 36y^2 - (36x^2 + 96xy + 64y^2) = 28x^2 - 96xy - 100y^2$

K3 **7** $A_{Quadrat}(x) = x^2\,cm^2$
$A_{Rechteck}(x) = (x-2)\,cm \cdot (x+2)\,cm = (x^2 - 4)\,cm^2$
Der Flächeninhalt des Rechtecks ist um $4\,cm^2$ kleiner als der des Quadrats.

K1 **8** $\gamma > \alpha > \beta$

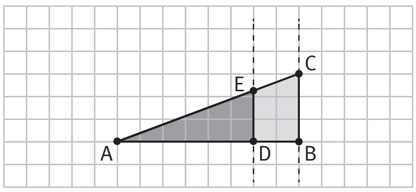
K6 **9** Gretas Aussage ist richtig, da die Dreiecksungleichung gilt: Je zwei Seiten eines Dreiecks müssen zusammen stets länger sein als die dritte Seite. Die beiden Seitenlängen 5,5 cm und 4,5 cm ergeben zusammen 10,0 cm, damit muss die dritte Seite kürzer als 10,0 cm sein.

K 1 **10 a)** Die Aussage ist falsch, wie man durch ein Gegenbeispiel zeigen kann:
Die beiden Dreiecke AA'C und AC'C setzen sich zusammen aus dem Dreieck ABC und einer Spiegelung des Dreiecks ABC an der Seite [BC] bzw. an der Seite [AB]. Damit haben sie den gleichen Flächeninhalt und sind gleichschenklig, da $\overline{AC} = \overline{A'C} = \overline{AC'}$; sie sind jedoch nicht kongruent.



b) Die Aussage ist wahr, es ist der Kongruenzsatz WSW.

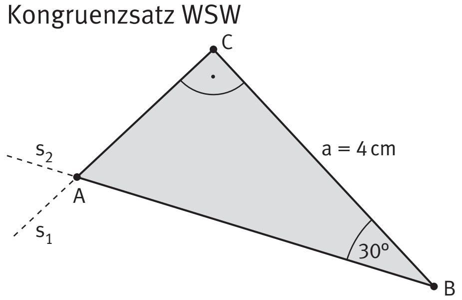
c) Die Aussage ist falsch: Die Dreiecke sind ähnlich, aber nicht zwingend kongruent zueinander. Gegenbeispiel sind zwei Dreiecke ABC und ADE, wobei D auf [AB] und E auf [AC] liegt und DE parallel zu BC ist: Die Winkel der beiden Dreiecke sind gleich groß, die Seitenlängen jedoch nicht – die Dreiecke sind nicht kongruent.



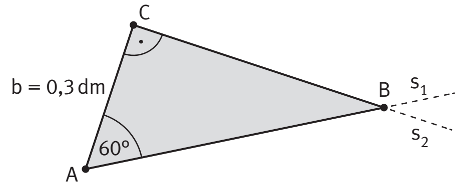
d) Die Aussage ist wahr, es ist der Kongruenzsatz SWS.

K 5 **11** (Hier ohne Planfiguren und ohne Konstruktionsbeschreibungen)

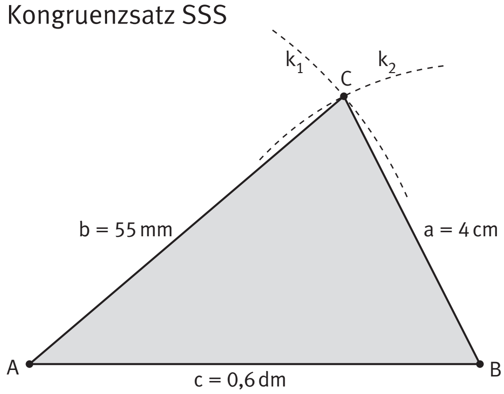
a) Kongruenzsatz WSW



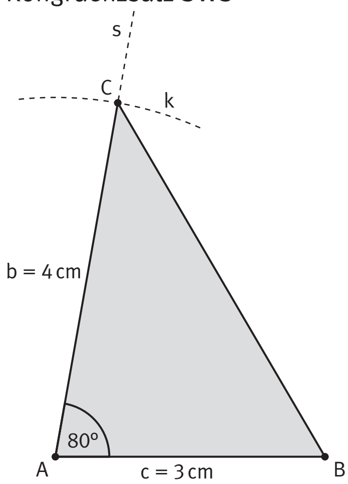
b) Kongruenzsatz WSW mit $\gamma = 90°$ (Winkelsumme im Dreieck)



c) Kongruenzsatz SSS



d) Kongruenzsatz SWS



K1 **12**

$a = 6\,cm$	$c = 9\,cm$	$\alpha = 40°$	$\gamma = 50°$	$h_a = 4{,}5\,cm$	
×	×	×			Es existieren zwei Dreiecke.
×	×		×		Das Dreieck ist eindeutig konstruierbar.
×	×			×	Es existieren zwei Dreiecke.
×		×	×		Das Dreieck ist eindeutig konstruierbar.
×		×		×	Es existieren zwei Dreiecke.
×			×	×	Das Dreieck ist eindeutig konstruierbar.
	×	×	×		Das Dreieck ist eindeutig konstruierbar.
	×	×		×	Das Dreieck ist eindeutig konstruierbar.
	×		×	×	Das Dreieck ist eindeutig konstruierbar.
		×	×	×	Das Dreieck ist eindeutig konstruierbar.

K1 **13** $\alpha = 70°$; $\beta = 60°$; $c = 7{,}5\,cm$ $\Rightarrow$ WSW — $a = 8{,}9\,cm$; $b = 8{,}9\,cm$; $\gamma = 60°$ $\Rightarrow$ SWS

$a = 4{,}6\,cm$; $b = 3{,}8\,cm$; $c = 5{,}1\,cm$ $\Rightarrow$ SSS — $a = 7{,}5\,cm$; $\beta = 70°$; $\gamma = 60°$ $\Rightarrow$ WSW

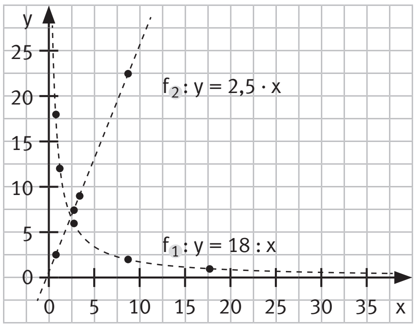
Zum Kongruenzsatz SsW liegt kein Beispiel vor.

K5 **14 a)** 1 Wegen der Produktgleichheit ($3 \cdot 6 = 9 \cdot 2 = 18$) liegt eine indirekte Proportionalität vor.

2 Wegen der Quotientengleichheit ($9 : 3{,}6 = 7{,}5 : 3 = 2{,}5$) liegt eine direkte Proportionalität vor.

1	x	1	1,5	3	9	18
	y	18	12	6	2	1
2	x	1	3,6	3	9	18
	y	2,5	9	7,5	22,5	45

b)



c) Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:

1 Ein Arbeiter braucht für eine bestimmte Aufgabe 18 Stunden. Drei Arbeiter erledigen die Aufgabe in 6 Stunden.

2 Ein Kilogramm Äpfel kostet 2,50 €, drei Kilogramm kosten 7,50 €.

K3 **15 a)** Indirekte Proportionalität, mögliche Arbeiter-Stunden-Zahlenpaare sind: (1|18); (2|9); (3|6).

b) Weder direkte noch indirekte Proportionalität. Nimmt man z. B. ein Becken mit $100\,m^3$ Wasser, aus dem pro Stunde $10\,m^3$ abfließen, dann sind die Stunden-m^3-Zahlenpaare: (0|100); (1|90); (2|80); (3|70); (4|60); …; (9|10); (10|0). Die Zuordnung ist linear.

c) Auch hier liegt weder eine direkte noch eine indirekte Proportionalität vor.

K3 **16** $15\,d \cdot 45\,km = x\,d \cdot 27\,km \quad \Leftrightarrow \quad x\,d = \frac{15\,d \cdot 45\,km}{27\,km} \Leftrightarrow x = 25$

Wenn täglich 27 km gefahren werden, reicht die Tankfüllung 25 Tage.

K 1 **17 a)** ① Die Rechtecke sind doppelt so lang wie breit. Verändert man die Länge eines Rechtecks um den Faktor k, dann ändert sich auch seine Breite um denselben Faktor. Der Flächeninhalt steigt entsprechend an: $2\,cm \cdot 1\,cm = 2\,cm^2$; $6\,cm \cdot 3\,cm = 18\,cm^2$; $8\,cm \cdot 4\,cm = 32\,cm^2$; …

② Alle Rechtecke haben denselben Flächeninhalt von $8\,cm^2$. Je länger das Rechteck ist, desto schmaler ist es.

b) ① 4 cm lang und 2 cm breit; 10 cm lang und 5 cm breit; 12 cm lang und 6 cm breit.

② 0,8 cm lang und 10 cm breit; 16 cm lang und 0,5 cm breit; 32 cm lang und 0,25 cm breit.

c) Das Rechteck mit der Länge 4 cm und der Breite 2 cm passt in beide Graphen.

d) ① Breite: 6 cm Flächeninhalt: $72\,cm^2$

② Breite: $\frac{2}{3}$ cm Flächeninhalt: $8\,cm^2$

K 1 **18** Es trifft zu: „Beide haben die gleichen Gewinnchancen".

Wahrscheinlichkeit für 5 oder 6: $\frac{2}{6}$. Wahrscheinlichkeit für 1, 2, 3 oder 4: $\frac{4}{6}$.

Lisas durchschnittlicher Gewinn: $\frac{2}{6} \cdot 2\,€ = \frac{2}{3}\,€$ Lisas durchschnittlicher Verlust: $\frac{4}{6} \cdot 1\,€ = \frac{2}{3}\,€$

Durchschnittlich erhält Lisa pro Spiel $\frac{2}{3}$ €. Durchschnittlich bezahlt Lisa pro Spiel $\frac{2}{3}$ €.

Der Vergleich zeigt: Lisa und Leon haben die gleichen Gewinnchancen. Da das Geld jeweils aus der eigenen Tasche stammt, ist auf lange Sicht zu erwarten, dass weder Gewinne noch Verluste entstehen.

K 5 **19 a)** W: Wappen; Z: Zahl; Ω = {WWWWW; WWWWZ; WWWZW; WWZWW; …; ZZZZZ}

b) Wenn man die Reihenfolge der einzelnen Ergebnisse nicht beachtet, gibt es 6 mögliche Ergebnisse: WWWWW; WWWWZ; WWWZZ; WWZZZ; WZZZZ; ZZZZZ.

Wenn man die Reihenfolge der einzelnen Ergebnisse beachtet, gibt es $2^5 = 32$ mögliche Ergebnisse.

K 1 **20 a)** Es handelt sich nicht um ein Laplace-Experiment, da die Wahrscheinlichkeit, eine blaue Kugel zu ziehen, zu Beginn doppelt so groß ist wie die, eine rote zu ziehen. Das Experiment wäre beispielsweise ein Laplace-Experiment, wenn man ein rote Kugel hinzufügen würde und zweimal mit Zurücklegen zieht.

b) Zwei von sechs Ergebnissen kommen in Frage, die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen von zwei blauen Kugeln beträgt also $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

c) Es liegt kein Laplace-Experiment vor, da mehr blaue als rote Kugeln im Gefäß sind. Vier von neun Ergebnissen kommen in Frage, die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen von zwei blauen Kugeln beträgt also $\frac{4}{9}$; sie ist größer als die Wahrscheinlichkeit ohne Zurücklegen $\left(\frac{2}{6} = \frac{3}{9}\right)$.

K 1 **21 a)** Aussage ① ist wahr, da 60 Mal gedreht wurde und 34 Nieten erzielt wurden.

Aussage ③ ist wahr. Dieses Ergebnis ist nicht sonderlich wahrscheinlich, aber durchaus möglich.

Die Aussagen ② und ④ sind falsch: Es liegen Zufallsexperimente vor, deren Ergebnisse nicht vorhersagbar sind.

b) Für das Glücksrad wird man am sinnvollsten Verhältnisgleichungen aufstellen und die Kreisfläche in entsprechende Kreisausschnitte zerlegen:

Gewinn: $\frac{10}{60} = \frac{\alpha}{360°}$ $\alpha = 60° = 5 \cdot 12° = 10 \cdot 6°$

Trostpreis: $\frac{16}{60} = \frac{\beta}{360°}$ $\beta = 96° = 8 \cdot 12° = 16 \cdot 6°$

Niete: $\frac{34}{60} = \frac{\gamma}{360°}$ $\gamma = 204° = 17 \cdot 12° = 34 \cdot 6°$