2 Flächeninhalt ebener Vielecke

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K6
- **Welche Formen sind auf dem Bild zu sehen?**
  Auf dem Bild kann man Dreiecke, Rechtecke und Trapeze erkennen.

K6
- **Wie viel Segeltuch braucht man, um solche Segel herzustellen? Schätze ab.**
  Man muss die Flächeninhalte der einzelnen Segel abschätzen und addieren.
  Beispiel: Zur Abschätzung kann man die Größe der Person auf dem Schiff wählen: Die geschätzt 1,80 m große Person ist im Bild etwa 0,5 cm groß. Das untere Großsegel ist etwa 4-mal so hoch und 13-mal so breit wie die Person (Krümmungen nicht betrachtet). Also ist die Fläche des großen Segels mindestens: $A_{Segel} = 4 \cdot 1{,}80\,\text{m} \cdot 13 \cdot 1{,}80\,\text{m} \approx 170\,\text{m}^2$ groß. Dieses Vorgehen kann man weiter fortsetzen.

K2
- **Wie könnte man vorgehen, um die Größe der Segelfläche zu bestimmen?**
  Für die Bestimmung der Segelfläche könnte man die großen Segel in Drei- und Vierecke zerlegen und deren Fläche addieren.

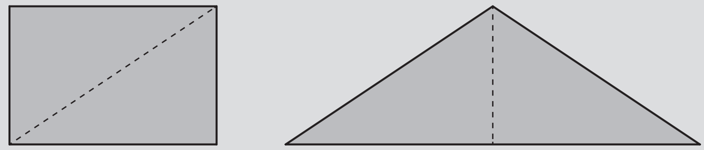
Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.
Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

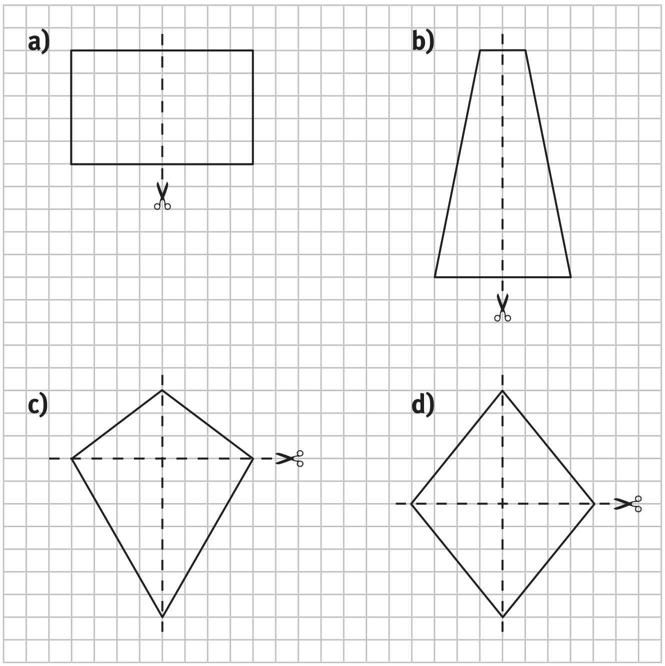
Verständnis

K1
- Hakans Aussage ist falsch. Flächengleiche Figuren lassen sich in zerlegungsgleiche Teilfiguren zerlegen. Die Teilfiguren können so unterschiedlich zusammengesetzt werden, dass der Flächeninhalt derselbe bleibt, aber die Umfänge verschieden sind.

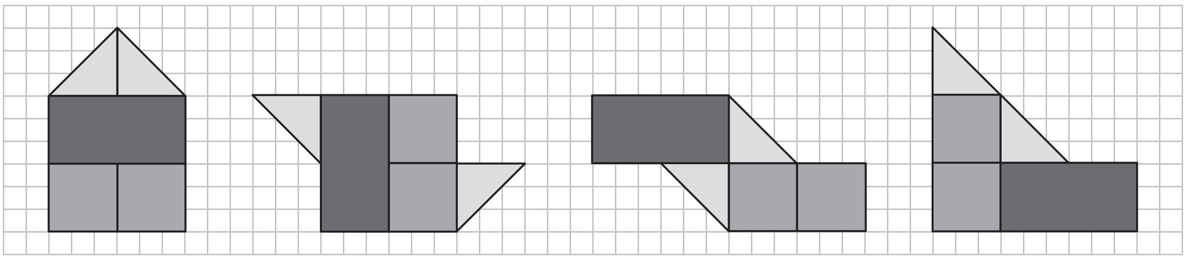
K1
- Die Aussage ist falsch. Das Beispiel zeigt, dass es zerlegungsgleiche Rechtecke und Dreiecke gibt.



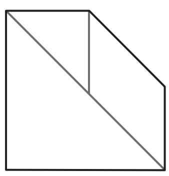
K4 **1**



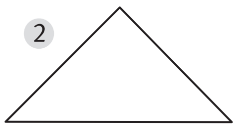
K4 **2**



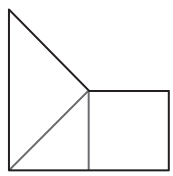
K2 **3** **a)** 1



2



3



b) 1 $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$ 2 $\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$ 3 $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$

Die erste Figur hat die größte Fläche. Man sieht es leicht, wenn man sich überlegt, welchen Bruchteil der Fläche die einzelnen Teilstücke einnehmen.

c) Es sind individuelle Lösungen möglich.

K3 **4** Dreiecke mit gleicher Höhe und gleicher Grundseite haben den gleichen Flächeninhalt.

Verständnis

K6 ■ Die Aussage ist falsch. Bei einem Rechteck mit den Seitenlängen a und b berechnet sich der Flächeninhalt als Produkt aus den Seitenlängen: $A_{Rechteck} = l \cdot b$. Bei einem Parallelogramm mit den Grundseitenlängen a und b berechnet sich der Flächeninhalt als Produkt aus einer Grundseitenlänge und der zugehörigen Höhe: $A_{Parallelogramm} = a \cdot h_a = b \cdot h_b$.

K1 ■ Jakobs Aussage trifft nur auf das Rechteck als Spezialfall des Parallelogramms zu, ansonsten wird der Flächeninhalt beim Parallelogramm als Produkt aus der Länge einer Grundseite und der zugehörigen Höhe berechnet.

K5 **1**

	a)	b)	c)	d)	e)
a	5 cm	13 dm	9,5 m	5 m	8 cm
b	10 cm	7,8 dm	4 m	10 m	12 cm
h_a	8 cm	3 dm	2 m	4,6 m	6 cm
h_b	4 cm	5 dm	4,75 m	2,3 m	4 cm
A	40 cm²	39 dm²	19 m²	23 m²	48 cm²

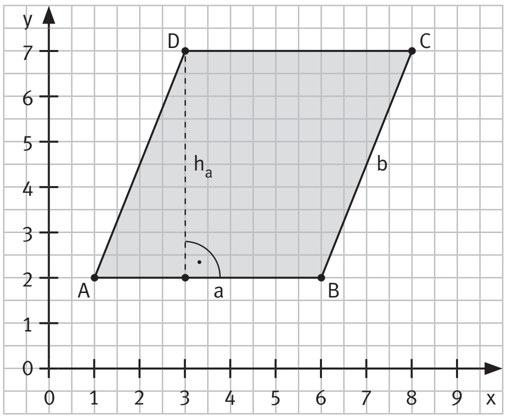
K4 **2** Berechnung der Längen von Grundseite und Höhe des Parallelogramms ABCD und seines Flächeninhalts (analog für die Parallelogramme EFGH, IJKL, MNOP):

$\overline{AB} = x_B - x_A$; $h_{[AB]} = y_D - y_A$; $A_{ABCD} = \overline{AB} \cdot h_{[AB]}$

a) $\overline{AB} = (6 - 1)\,\text{cm} = 5\,\text{cm}$

$h_{[AB]} = (7 - 2)\,\text{cm} = 5\,\text{cm}$

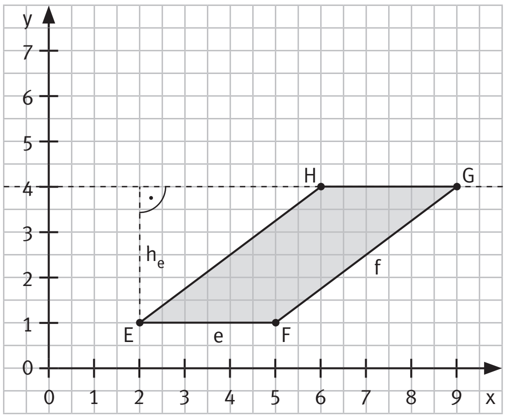
$A_{ABCD} = 5 \cdot 5\,\text{cm}^2 = 25\,\text{cm}^2$



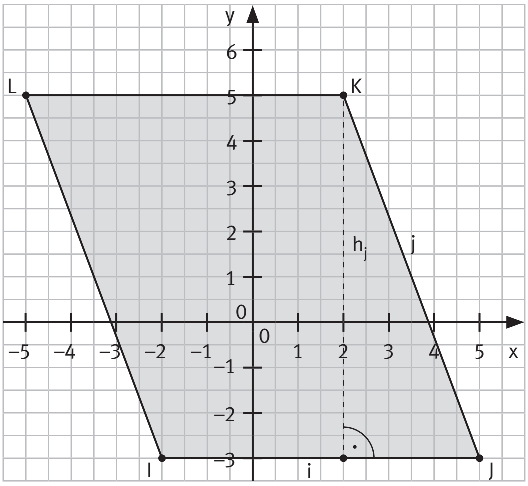
b) $\overline{EF} = (5 - 2)\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$

$h_{[EF]} = (4 - 1)\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$

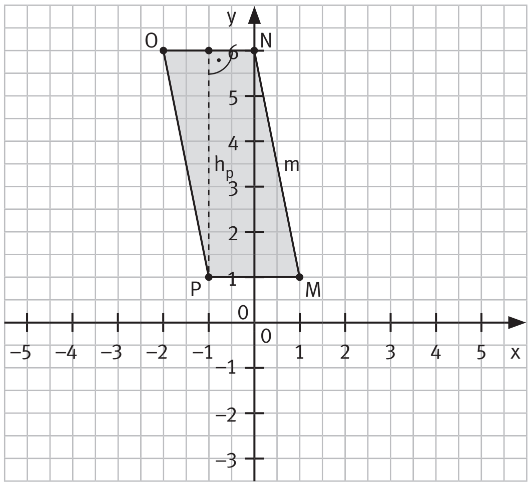
$A_{EFGH} = 3 \cdot 3\,\text{cm}^2 = 9\,\text{cm}^2$



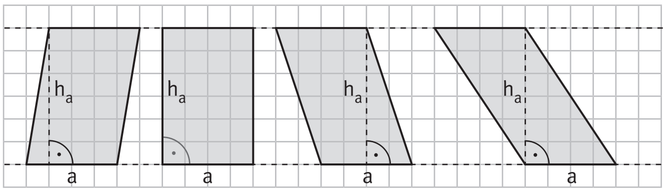
c) $\overline{IJ} = (5 + 2)\,cm = 7\,cm$
$h_{[IJ]} = (5 + 3)\,cm = 8\,cm$
$A_{IJKL} = 7 \cdot 8\,cm^2 = 56\,cm^2$



d) $\overline{PM} = (1 + 1)\,cm = 2\,cm$
$h_{[PM]} = (6 - 1)\,cm = 5\,cm$
$A_{MNOP} = 2 \cdot 5\,cm^2 = 10\,cm^2$

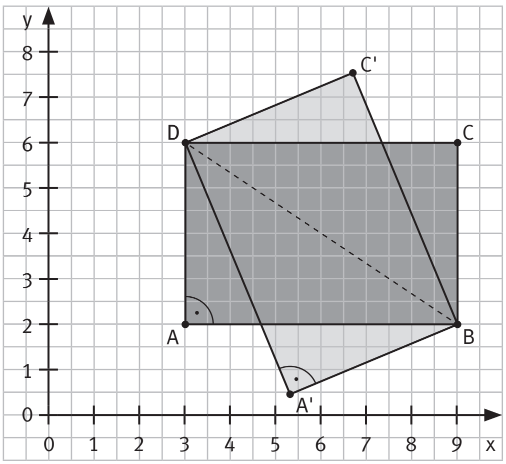


K4 **3** Es sind individuelle Lösungen möglich.
Für die einfache Lösung werden vier Parallelogramme mit gleicher Grundseitenlänge a und gleicher Höhe h_a gewählt. Alle Parallelogramme haben nun den Flächeninhalt $A = a \cdot h_a$.

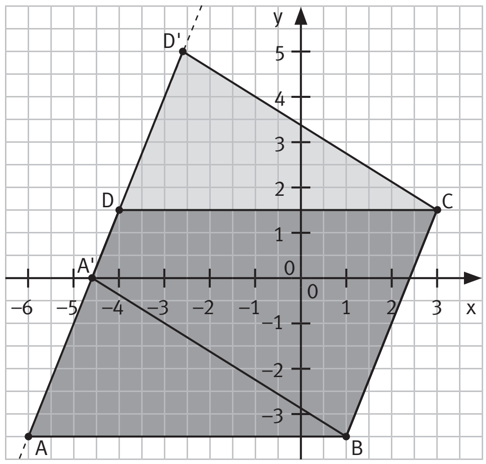


K4 **4** Ausgehend von der zuerst angegebenen Lösung gibt es weitere individuelle Lösungen.

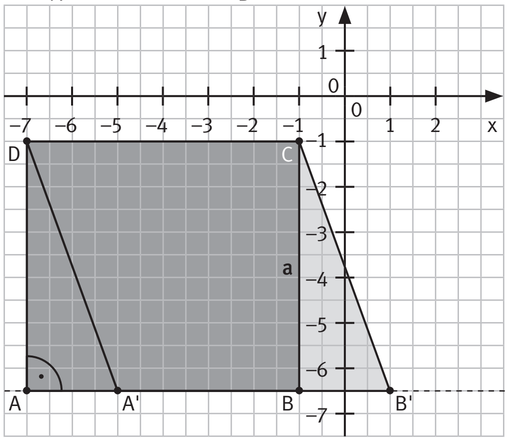
a) A (3|2) und C (9|6) mit
$A_{ABCD} = 6 \cdot 4\,cm^2 = 24\,cm^2$
Alternativ (A und C an BD gespiegelt):
A' (5,3|0,5) und C' (6,7|7,5)



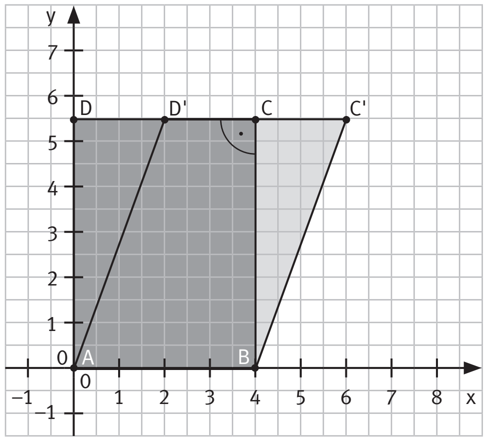
b) A (–6|–3,5) und D (–4|1,5) mit
$A_{ABCD} = 7 \cdot 5\,cm^2 = 35\,cm^2$
Alternativ:
A' und D' auf AD mit $\overline{A'D'} = \overline{BC}$



c) A (–7 | –6,5) und B (–1 | –6,5) mit
$A_{ABCD} = 6 \cdot 5{,}5\,cm^2 = 33\,cm^2$
Alternativ:
A' (x_A | –6,5) und B' (x_B | –6,5) mit $\overline{AB} = 6\,cm$



d) Nach Wahl von B, z. B. B (4 | 0), ergeben sich die Möglichkeiten für C und D, z. B.: C (4 | 5,5) und D (0 | 5,5) oder C' (6 | 5,5) und D' (2 | 5,5).
$A_{ABCD} = 4 \cdot 5{,}5\,cm^2 = 22\,cm^2$



K3 **5** Für die Berechnung der Fläche wurde anstelle der Länge der Höhe die Länge der Seitenlinie verwendet.
Korrektur mit a = 4,70 m, h_a = 2,10 m:
$A = a \cdot h_a = 4{,}70 \cdot 2{,}10\,m^2 = 9{,}87\,m^2$
Kosten: $9{,}87\,m^2 \cdot 43\,\frac{€}{m^2} = 424{,}41\,€$
Es wird Farbe für eine Fläche von 9,87 m² benötigt. Beim Preis von $43\,\frac{€}{m^2}$ betragen die Kosten für die Farbe 424,41 €.

K5 **6** Streifen (Rechteck) mit Höhe h = 2 cm und Länge $l = 3 \cdot 2\,cm + 3 \cdot 1\,cm = 9\,cm$:
$A_{Streifen} = 2\,cm \cdot 9\,cm = 18\,cm^2$
Parallelogramm (1 gelber Streifen) mit Grundseite p = 0,5 cm und Höhe h = 2 cm:
$A_{Parallelogramm} = 0{,}5\,cm \cdot 2\,cm = 1\,cm^2$
Gelbe Fläche insgesamt: $A_{gelbe\ Fläche} = 6 \cdot A_{Parallelogramm} = 6\,cm^2$
Grüne Fläche: $A_{grün} = A_{Streifen} - A_{gelbe\ Fläche} = 18\,cm^2 - 6\,cm^2 = 12\,cm^2$
Anteil der grünen Fläche am gesamten Streifen: $12\,cm^2 : 18\,cm^2 \approx 66{,}67\,\%$

K3 **7** Die Höhe h des „Dockland“ beträgt 25 m. Bei einer geschätzten Länge von 110 m beträgt die Glasfläche ungefähr 2750 m² = 27,5 a.

Verständnis

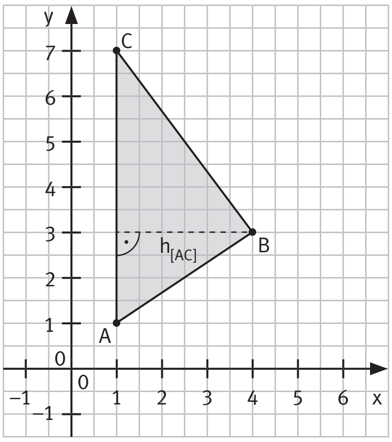
K1 ■ Die Aussage ist richtig. Ein beliebiges Rechteck ABCD kann in zwei Dreiecke, ABC und CDA (bzw. BCD und DAB), zerlegt werden, diese sind kongruent: Sie haben einen rechten Winkel in B und D (bzw. in C und A); die Diagonale [AC] (bzw. [BD]) ist Hypotenuse; es gibt je zwei gleich lange Seiten: $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = \overline{DA}$. Die beiden Dreiecke haben jeweils den halben Flächeninhalt des Rechtecks.

K1 ■ Die Aussage ist falsch. Für den Umfang eines der beiden Dreiecke werden nicht nur die beiden Seitenlängen addiert, sondern auch die Länge der Diagonale. Deshalb ist der Umfang eines Dreiecks größer als die Hälfte des Parallelogrammumfangs.

K5 **1** **a)** $A_D = \frac{1}{2} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 16\,\text{cm}^2$ **b)** $A_D = \frac{1}{2} \cdot 7{,}5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 18{,}75\,\text{cm}^2$

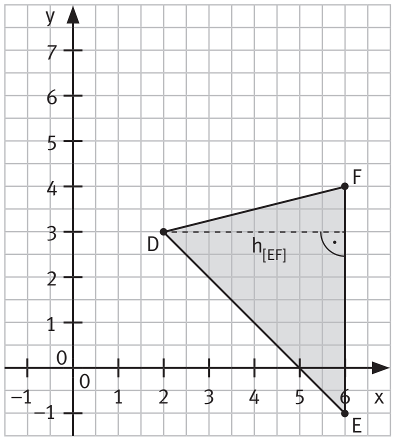
c) $A_D = \frac{1}{2} \cdot 6{,}3\,\text{cm} \cdot 3{,}7\,\text{cm} \approx 11{,}7\,\text{cm}^2$ **d)** $A_D = \frac{1}{2} \cdot 5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 12{,}5\,\text{cm}^2$

K4 **2** **a)**



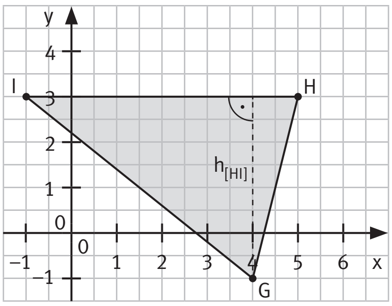
$A_D = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h_{[AC]} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 9\,\text{cm}^2$

b)



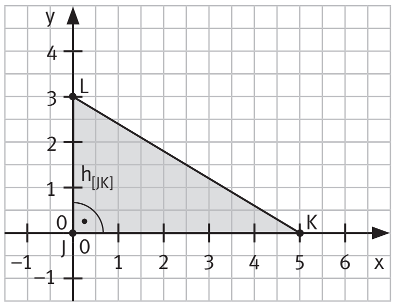
$A_D = \frac{1}{2} \cdot \overline{EF} \cdot h_{[EF]} = \frac{1}{2} \cdot 5\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 10\,\text{cm}^2$

c)



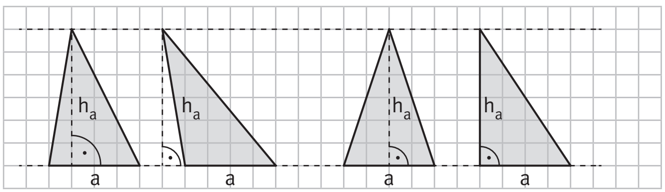
$A_D = \frac{1}{2} \cdot \overline{HI} \cdot h_{[HI]} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 12\,\text{cm}^2$

d)



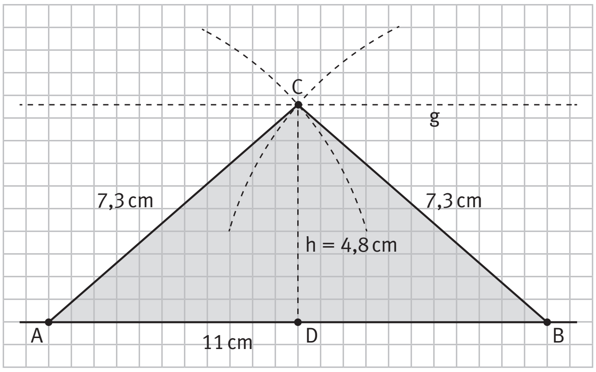
$A_D = \frac{1}{2} \cdot \overline{JK} \cdot h_{[JK]} = \frac{1}{2} \cdot 5\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 7{,}5\,\text{cm}^2$

K4 **3** Für eine geschickte Lösung werden Dreiecke mit gleicher Grundseitenlänge a und gleicher Höhe h_a gewählt. Alle Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt $A_D = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$.



K3 **4** Im Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 11\,cm$ und $\overline{BC} = \overline{AC} = 7{,}3\,cm$ hat die Höhe h zur Grundseite [AB] die Länge 4,8 cm, dies entspricht in Wirklichkeit einer Länge von 48 cm = 0,48 m.

Maßstab 1 : 10

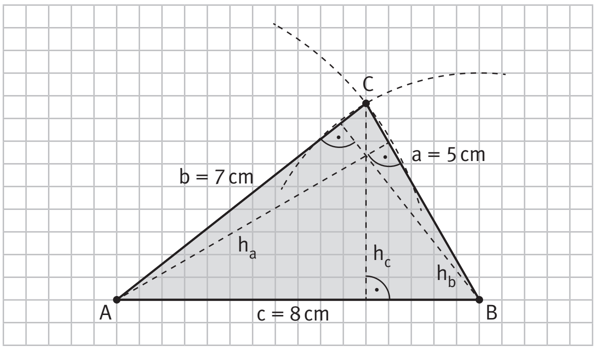


$A_D = \frac{1}{2} \cdot 1{,}10\,m \cdot 0{,}48\,m = 0{,}264\,m^2$

Kosten: $0{,}264\,m^2 \cdot 12{,}95\,\frac{€}{m^2} \approx 3{,}42\,€$

Wenn man nur die berechnete Fläche berücksichtig, kostet der Stoff 3,42 €. Tatsächlich wird Klaus den Stoff so kaufen, dass er daraus die benötigte Fläche passend ausschneiden kann. Die Kosten für den Stoffe werden daher voraussichtlich höher ausfallen.

K5 **5** Berechnung von $A = \frac{1}{2}\,g \cdot h$ mit gemessenen Höhen $h_a = 6{,}9\,cm$; $h_b = 4{,}9\,cm$; $h_c = 4{,}3\,cm$:



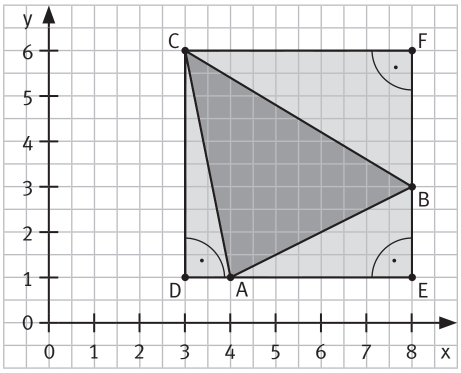
$A_a = 0{,}5 \cdot 5\,cm \cdot 6{,}9\,cm = 17{,}25\,cm^2$

$A_b = 0{,}5 \cdot 7\,cm \cdot 4{,}9\,cm = 17{,}15\,cm^2$

$A_c = 0{,}5 \cdot 8\,cm \cdot 4{,}3\,cm = 17{,}2\,cm^2$

Unter Berücksichtigung von Rundungs- bzw. Messfehlern erhält man einen Flächeninhalt von ca. $17{,}2\,cm^2$.

K4 **6** **a)**



Rechteck CDEF mit D (3 | 1), E (8 | 1), F (8 | 6) und $\overline{CD} = \overline{DE} = 5\,cm$

Dreieck AEB mit g = 2 cm, h = 4 cm
Dreieck BFC mit g = 5 cm, h = 3 cm
Dreieck CDA mit g = 1 cm und h = 5 cm

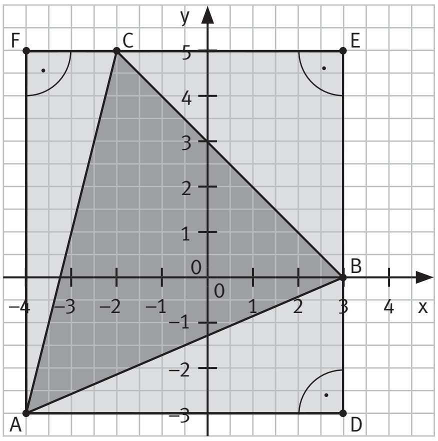
$A_{AEB} = 0{,}5 \cdot 2\,cm \cdot 4\,cm = 4{,}0\,cm^2$

$A_{BFC} = 0{,}5 \cdot 5\,cm \cdot 3\,cm = 7{,}5\,cm^2$

$A_{CDA} = 0{,}5 \cdot 1\,cm \cdot 5\,cm = 2{,}5\,cm^2$

$A_{ABC} = A_{CDEF} - A_{AEB} - A_{BFC} - A_{CDA}$
$= 25\,cm^2 - 4\,cm^2 - 7{,}5\,cm^2 - 2{,}5\,cm^2$
$= 11\,cm^2$

b)



Rechteck ADEF mit D (3|−3), E (3|5), F (−4|5)
und $\overline{AD}$ = 7 cm und $\overline{DE}$ = 8 cm
$A_{ADEF} = 56\,cm^2$

Dreieck ADB mit g = 3 cm, h = 7 cm
Dreieck BEC mit g = 5 cm, h = 5 cm
Dreieck CFA mit g = 8 cm und h = 2 cm

$A_{ADB} = 0{,}5 \cdot 3\,cm \cdot 7\,cm = 10{,}5\,cm^2$
$A_{BEC} = 0{,}5 \cdot 5\,cm \cdot 5\,cm = 12{,}5\,cm^2$
$A_{CFA} = 0{,}5 \cdot 8\,cm \cdot 2\,cm = 8{,}0\,cm^2$

$A_{ABC} = A_{ADEF} - A_{ADB} - A_{BEC} - A_{CFA}$
$= 56\,cm^2 - 10{,}5\,cm^2 - 12{,}5\,cm^2 - 8{,}0\,cm^2$
$= 25\,cm^2$

K1 **7** Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b und c und mit $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

a) Der Flächeninhalt des neuen Dreiecks A'B'C' verdoppelt (verdreifacht, halbiert) sich.

a' = 2a: $A_{A'B'C'} = 0{,}5 \cdot 2a \cdot h_a = 2 \cdot A_{ABC}$
a' = 3a: $A_{A'B'C'} = 0{,}5 \cdot 3a \cdot h_a = 3 \cdot A_{ABC}$
a' = $\frac{1}{2}$a: $A_{A'B'C'} = 0{,}5 \cdot \frac{1}{2}\,a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot A_{ABC}$

b) Der Flächeninhalt des neuen Dreiecks A'B'C' mit a' = 2a und $h_a' = \frac{1}{2}\,h_a$ bleibt gleich:

$A_{A'B'C'} = 0{,}5 \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot h_a = 0{,}5 \cdot a \cdot h_a = A_{ABC}$

c) Grundseite a und Höhe h_a werden nicht verändert, der Flächeninhalt bleibt gleich: $A_{A'B'C'} = A_{ABC}$

K3 **8** Die Fläche, die neu gedeckt werden muss, setzt sich aus vier gleich großen Dreiecken zusammen. Das einzelne Dreieck ist gleichschenklig mit der Grundseite g = 6,2 m und den Seiten a = b = 9 m.

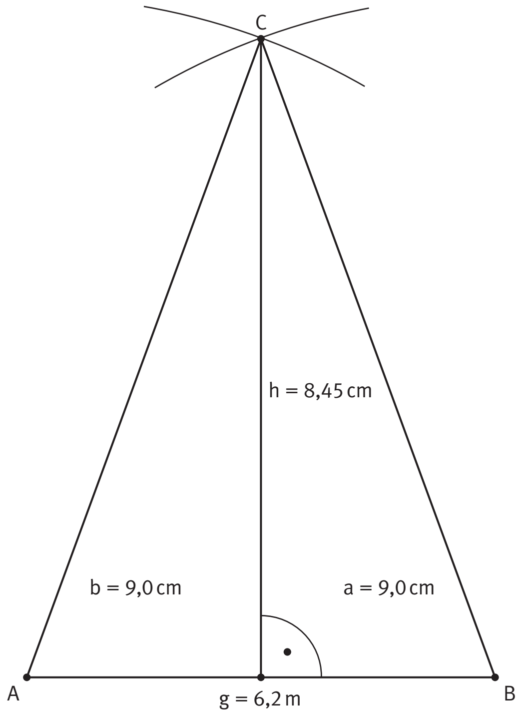
Beschreibung (mit cm statt m):

1. Zeichne die Grundseite [AB] mit g = 6,2 cm.
2. Zeichne um A und um B einen Kreis mit r = 9 cm.
3. Der Schnittpunkt der beiden Kreise ist C.
4. Zeichne die Höhe h in das Dreieck ein und miss ihre Länge: h = 8,45 cm.

Berechnung der Dachfläche (in m):

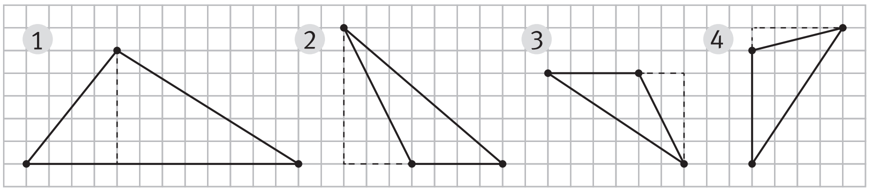
$A_{Dachfläche} = 4 \cdot A_{Dreieck} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
$= 2 \cdot 6{,}2\,m \cdot 8{,}45\,m = 104{,}78\,m^2 \approx 105\,m^2$

Kosten: $105\,m^2 \cdot 210\,€ = 22\,050\,€$



K1 **9** **a)** Der Flächeninhalt der Dreiecke 2 und 5 lässt sich direkt berechnen, da die Dreiecke rechtwinklig und die Längen der beiden Katheden direkt ablesbar sind: $A_D = \frac{1}{2} \cdot \text{Kathete}_1 \cdot \text{Kathete}_2$

b)



1 $A_D = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 2{,}5\,\text{cm} = 7{,}5\,\text{cm}^2$

2 $A_D = \frac{1}{2} \cdot 2\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 3\,\text{cm}^2$

3 $A_D = \frac{1}{2} \cdot 2\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} = 2\,\text{cm}^2$

4 $A_D = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} = 2{,}5\,\text{cm}^2$

K3 **10** **a)** Die beiden blau eingefärbten Dreiecke ergänzen sich zu einem Quadrat der Seitenlänge 4 cm und $A = 16\,\text{cm}^2$.

b) Bei dieser Figur kann man von der Rechtecksfläche mit $10\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 50\,\text{cm}^2$ alle gelben Teilflächen abziehen, um die Fläche der blauen Figur zu ermitteln:
$A = 50\,\text{cm}^2 - 12{,}5\,\text{cm}^2 - 18{,}75\,\text{cm}^2 - 3{,}125\,\text{cm}^2 = 15{,}625\,\text{cm}^2$

c) In dieser Figur kann man zunächst direkt die Fläche des großen blauen Dreiecks berechnen:
$A_{\text{großes Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 8\,\text{cm}^2$
Für die Flächenberechnung eines der beiden kleinen blauen Dreiecke verfährt man wie in b):
$A_{\text{kleines Dreieck}} = 16\,\text{cm}^2 - 4\,\text{cm}^2 - 4\,\text{cm}^2 - 2\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2$
Der gesamte Flächeninhalt der drei blauen Dreiecke beträgt somit:
$A_{\text{gesamt}} = 8\,\text{cm}^2 + 6\,\text{cm}^2 + 6\,\text{cm}^2 = 20\,\text{cm}^2$

K5 **11** **a)** $A_D = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{1}{2}a^2$ **b)** $A_D = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2$

c) $A_D = \frac{1}{2} \cdot (2a + a) \cdot a = \frac{3}{2}a^2$ **d)** $A_D = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{1}{2}a^2$

K6 **12** Richtig ist: $A_D = \frac{1}{2} \cdot 5{,}2\,\text{cm} \cdot 3{,}9\,\text{cm} = \frac{1}{2} \cdot 20{,}28\,\text{cm}^2 = 10{,}14\,\text{cm}^2$

- Steffi hat die Längen von zwei Seiten multipliziert, die nicht senkrecht aufeinander stehen.
- Yasemin hat im letzten Schritt nicht durch 2 dividiert, sondern mit 2 multipliziert. Das Ergebnis hätte bei einer Division kleiner werden müssen.
- Leon hat bei der Berechnung der Dreiecksfläche den Faktor $\frac{1}{2}$ vergessen.

K5 **13** Der Flächeninhalt des Parallelogramms EFGH wird berechnet, indem man vom Flächeninhalt des Rechtecks ABCD die Flächeninhalte der Dreiecke AEH, BFE, CGF und DHG subtrahiert:

a) $A_{EFGH} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{AEH} - 2 \cdot A_{BFE}$
$= 6\,\text{cm} \cdot 9\,\text{cm} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm}$
$= 54\,\text{cm}^2 - 14\,\text{cm}^2 - 8\,\text{cm}^2 = 32\,\text{cm}^2$

Prozentualer Anteil am Flächeninhalt des Rechtecks: $\frac{32\,\text{cm}^2}{54\,\text{cm}^2} \approx 0{,}5926 \approx 59{,}26\,\%$

Der Flächeninhalt des Parallelogramms nimmt 59,26 % der Gesamtfläche ein.

b) $A_{EFGH}(x) = 6\,\text{cm} \cdot 9\,\text{cm} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x\,\text{cm} \cdot (9 - x)\,\text{cm} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x\,\text{cm} \cdot (6 - x)\,\text{cm}$
$= 54\,\text{cm}^2 - 15x\,\text{cm}^2 + 2x^2\,\text{cm}^2$
$= (2x^2 - 15x + 54)\,\text{cm}^2$ für $x \in \,]0; 6[$

Probe: $A_{EFGH}(2) = 32\,\text{cm}^2$

K3 **14 a)** Die Glasscheibe hat eine Fläche von $6300\,cm^2 = 0{,}63\,m^2$.

b) Der Flächenaufschlag von 105 % ist berechtigt, da der Glaser Abfälle hat, die er nicht wiederverwenden kann.

c) 105 % von $0{,}63\,m^2$ sind $0{,}6615\,m^2$.
Der Preis für das Glas beträgt $0{,}6615\,m^2 \cdot 120\,\frac{€}{m^2} = 79{,}38\,€$; zuzüglich 19 % MwSt. 94,46 €.
Die Kosten für Material plus Einbau betragen 94,46 € + 56,00 € = 150,46 €.

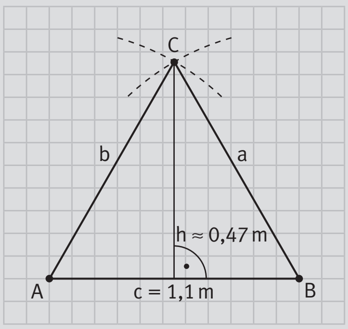
K2 **15 a)** $A_{Mauer} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1{,}50\,m \cdot 2{,}26\,m\right) + \frac{1}{2} \cdot 2{,}00\,m \cdot 1{,}51\,m = 4{,}9\,m^2$
$V_{Bauschutt} = 49\,m^2 \cdot 0{,}30\,m = 1{,}47\,m^3$
$V_{Bauschutt\text{-}Aufschlag} = 1{,}47\,m^3 \cdot 1{,}3 = 1{,}911\,m^3$
Der Container sollte ein Volumen von rund $2\,m^3$ haben.

b) $A_{Glasfläche} = \frac{1}{2} \cdot 5\,m \cdot 3{,}77\,m = 9{,}425\,m^2$

c) Nettopreis: $9{,}425\,m^2 \cdot 150\,\frac{€}{m^2} = 1413{,}75\,€$
Bruttopreis: 1682,36 €

Anwendung

K3 **a)**



(Maßstab 1 : 20) $A = 0{,}52\,m^2$

b) Die Masse der Blumenseide pro Quadratmeter beträgt 20 g; zuzüglich 10 % Zuschlag beträgt sie 22 g. Ein Dreieck hat eine Fläche von $0{,}52\,m^2$. 20 Dreiecke haben eine Fläche von $10{,}4\,m^2$.
Die Masse der Hülle beträgt somit $10{,}4 \cdot 22 = 228{,}8\,g$.

Verständnis

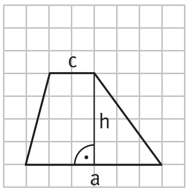
K6 ■ Alle Vierecke mit zwei parallelen Seiten sind Trapeze: Parallelogramm, Raute, Rechteck, Quadrat.

K1 ■ Die Aussage ist falsch: Beim Anlegen eines zweiten kongruenten Trapezes fallen zwei Seiten aufeinander, deren Längen beim Umfang des neu entstandenen Parallelogramms nicht berücksichtigt werden.

K5 **1**

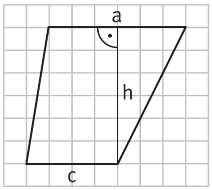
	Seitenlänge a	Seitenlänge c	Höhe h	Flächeninhalt A_{Tr}
a)	7,5 cm	3,5 cm	5 cm	27,5 cm^2
b)	1,1 dm	1,9 dm	10 dm	15 dm^2
c)	4,5 cm	1,5 cm	8 cm	24 cm^2
d)	5,4 cm	1 cm	1,25 cm	4 cm^2

K5 **2 a)** ①



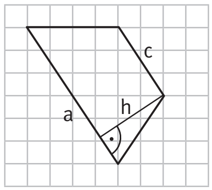
$A = 4\,cm^2 \quad u = 8{,}6\,cm$

②



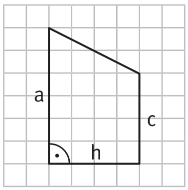
$A = 7{,}5\,cm^2 \quad u = 11{,}4\,cm$

③



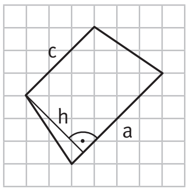
$A = 4{,}5\,cm^2 \quad u = 9{,}2\,cm$

④



$A = 5\,cm^2 \quad u = 9{,}2\,cm$

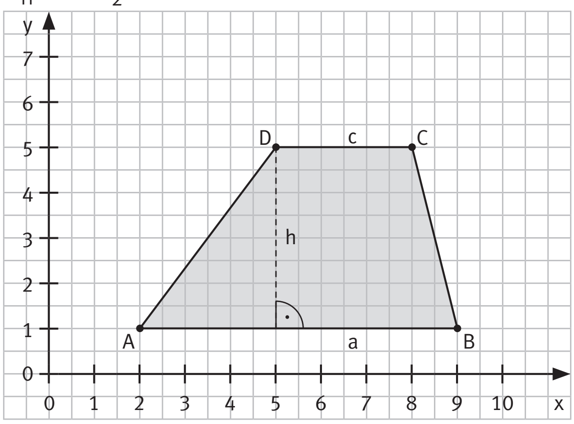
⑤



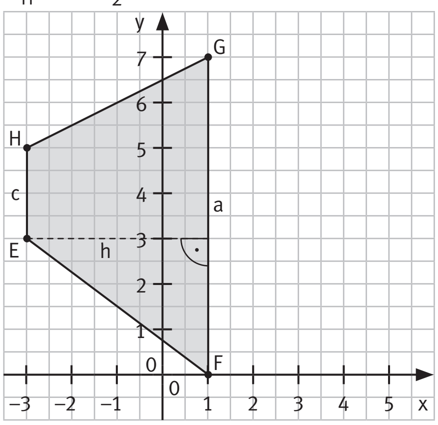
$A = 4{,}4\,cm^2 \quad u = 8{,}6\,cm$

b) Man kann den Flächeninhalt des Trapezes auch bestimmen, indem man das Trapez in ein Rechteck und zwei Dreiecke zerlegt, deren Flächeninhalte man addiert.

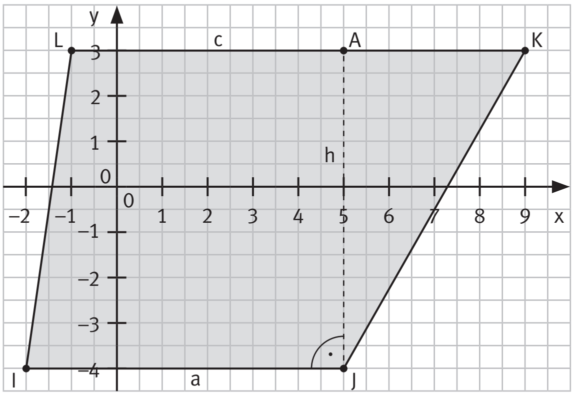
K4 **3 a)** $A_{Tr} = \frac{7\,cm + 3\,cm}{2} \cdot 4\,cm = 20\,cm^2$



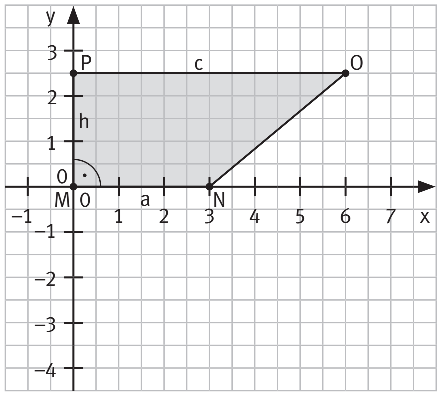
b) $A_{Tr} = \frac{7\,cm + 2\,cm}{2} \cdot 4\,cm = 18\,cm^2$



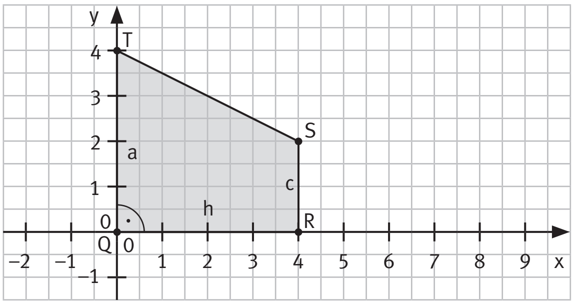
c) $A_{Tr} = \frac{7\,\text{cm} + 10\,\text{cm}}{2} \cdot 7\,\text{cm} = 59{,}5\,\text{cm}^2$



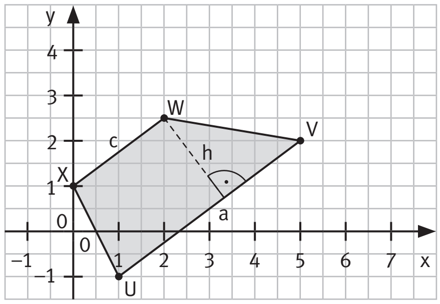
d) $A_{Tr} = \frac{3\,\text{cm} + 6\,\text{cm}}{2} \cdot 2{,}5\,\text{cm} = 11{,}25\,\text{cm}^2$



e) $A_{Tr} = \frac{4\,\text{cm} + 2\,\text{cm}}{2} \cdot 4\,\text{cm} = 12\,\text{cm}^2$

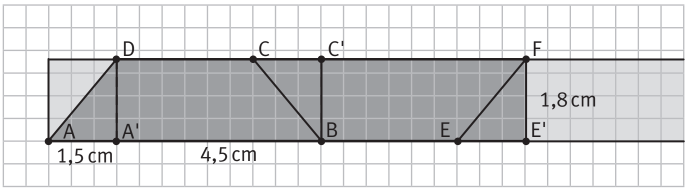


f) $A_{Tr} = \frac{5\,\text{cm} + 2{,}5\,\text{cm}}{2} \cdot 2{,}2\,\text{cm} = 8{,}25\,\text{cm}^2$



K3 **4** **a)** Sabines Vorgehen führt nicht zum richtigen Ergebnis, da bei diesem Lösungsansatz der Verschnitt nicht berücksichtigt wird.

b) 198 cm : 1,8 cm = 110. Es gibt 110 Blechstreifen mit jeweils 1,8 cm Breite.
Aus jedem dieser 110 Blechstreifen werden x Stück Klingen ausgestanzt. Man beginnt am Rand des Streifens mit der ersten Klinge (Trapez ABCD in der Skizze) und fügt daran die zweite Klinge (Trapez FCBE) so an, dass hierbei kein weiterer Abfall entsteht (gemeinsame Seite [BC]). Man erhält bei diesem Vorgehen ein erstes Stück Abfall (Dreieck mit Seitenlänge 1,5 cm und Höhe 1,8 cm), kann nun aber die Klingen bis zum Ende des Streifens ohne weiteren Abfall aneinandersetzen. Erst am Ende des Streifens kann bei ungünstiger Länge des Streifens nochmals Abfall entstehen.



Die Anzahl der aneinander platzierten Klingen sei x mit $x \in \mathbb{N}$. Für x gilt:

$1{,}5\,\text{cm} + x \cdot 4{,}5\,\text{cm} \leq 253{,}5\,\text{cm}$

$x \cdot 4{,}5\,\text{cm} \leq 252\,\text{cm}$

$x \leq 56$

Je Reihe können 56 Klingen ausgestanzt werden; insgesamt sind dies:

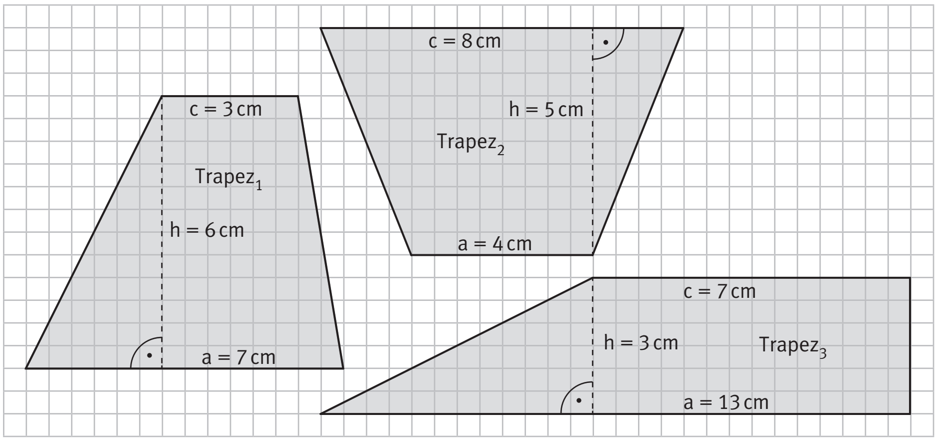
$56\,\frac{\text{Klingen}}{\text{Reihen}} \cdot 110\,\text{Reihen} = 6160\,\text{Klingen}$

K4 **5** **a)** Es sind individuelle Lösungen möglich, z. B.:

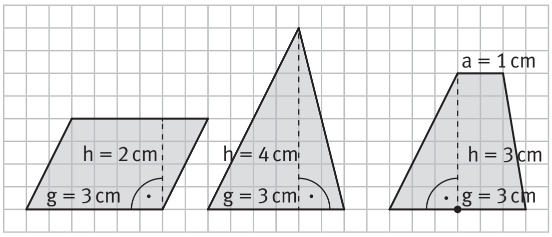
Trapez$_1$: $A_{Tr} = \frac{7\,cm + 3\,cm}{2} \cdot 6\,cm = 5\,cm \cdot 6\,cm = 30\,cm^2$

Trapez$_2$: $A_{Tr} = \frac{4\,cm + 8\,cm}{2} \cdot 5\,cm = 6\,cm \cdot 5\,cm = 30\,cm^2$

Trapez$_3$: $A_{Tr} = \frac{13\,cm + 7\,cm}{2} \cdot 3\,cm = 10\,cm \cdot 3\,cm = 30\,cm^2$



b) Es sind individuelle Lösungen möglich, z. B. mit g = 3 cm und A = 6 cm^2:



K3 **6** **a)** Die Trapez- und die Dreieckfläche werden jeweils zweimal benötigt.

$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (12\,m + 8\,m) \cdot 9\,m = 90\,m^2$

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 10\,m \cdot 7{,}7\,m = 38{,}5\,m^2$

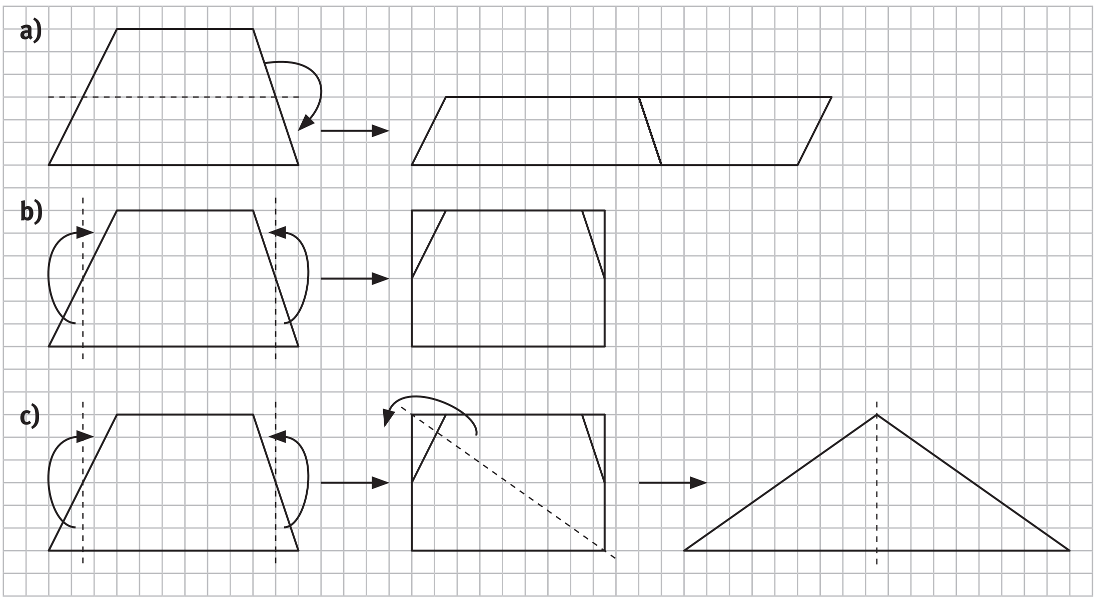
$A_{gesamt} = 2 \cdot 90\,m^2 + 2 \cdot 38{,}5\,m^2 = 257\,m^2$

b) Kosten: $257\,m^2 \cdot 75\,\frac{€}{m^2} \cdot 1{,}19 = 22\,937{,}25\,€$

Das Neudecken des Daches würde 22 937,25 € kosten.

c) Mit $257 \cdot 35 \cdot 1{,}8\,kg = 16\,191\,kg$ kann der Lkw nicht alle Dachziegel auf einmal transportieren.

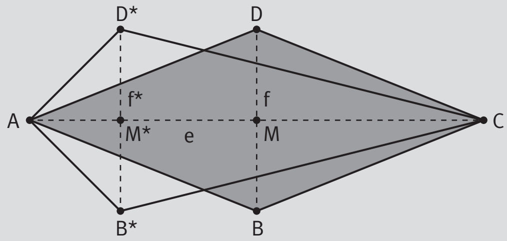
K4 **7** Lösungsmöglichkeiten:



Verständnis

K1 ■ Das Drachenviereck AB*CD* muss keine Raute sein. Selbst bei gleich langen Diagonalen e und f = f* ist das flächeninhaltsgleiche Drachenviereck keine Raute, wenn der Diagonalenschnittpunkt nicht der Mittelpunkt beider Diagonalen ist.

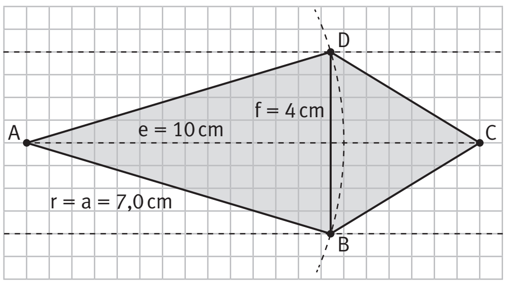
K6 ■ Die Aussage ist richtig. Bei einem Drachenviereck sind jeweils zwei nebeneinanderliegende Seiten gleich lang. Zusammen mit der Diagonale ergibt das zwei gleichschenklige Dreiecke.



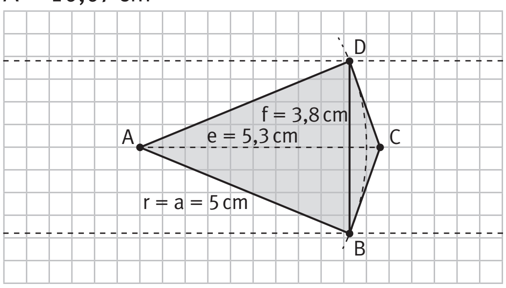
K5 **1** $A_{Dr} = 0{,}5 \cdot e \cdot f$ $e = 2 \cdot A_{Dr} : f$ $f = 2 \cdot A_{Dr} : e$ $e \cdot f = 2 \cdot A_{Dr}$

a) $A_{Dr} = 0{,}5 \cdot 13\,\text{cm} \cdot 5{,}5\,\text{cm} = 35{,}75\,\text{cm}^2$
b) $f = 2 \cdot 30{,}6\,\text{dm}^2 : 9\,\text{dm} = 6{,}8\,\text{dm}$
c) $e = 2 \cdot 95\,\text{cm}^2 : 10\,\text{cm} = 19\,\text{cm}$
d) $e \cdot f = 100\,\text{cm}^2 \Rightarrow e = f = 10\,\text{cm}$
e) $f \cdot f = 121\,\text{cm}^2 \Rightarrow f = 11\,\text{cm};\ e = 22\,\text{cm}$
f) $f \cdot f = 36\,\text{cm}^2 \Rightarrow f = 6\,\text{cm};\ e = 12\,\text{cm}$

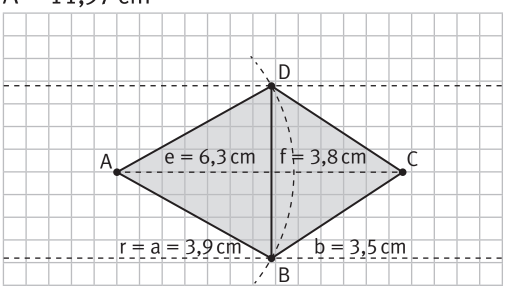
K4 **2** **a)** $A = 20\,\text{cm}^2$



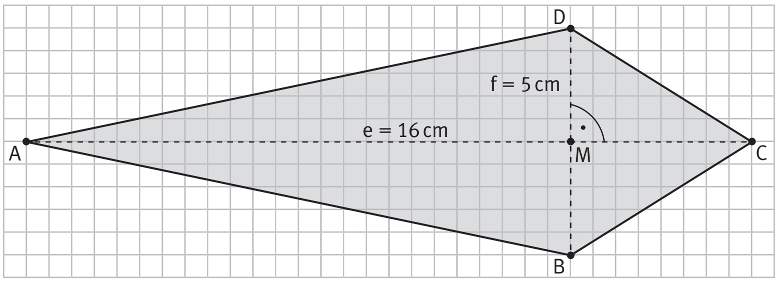
b) $A = 10{,}07\,\text{cm}^2$



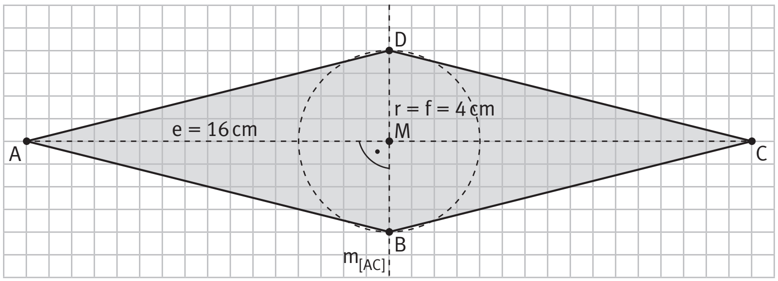
c) $A = 11{,}97\,\text{cm}^2$



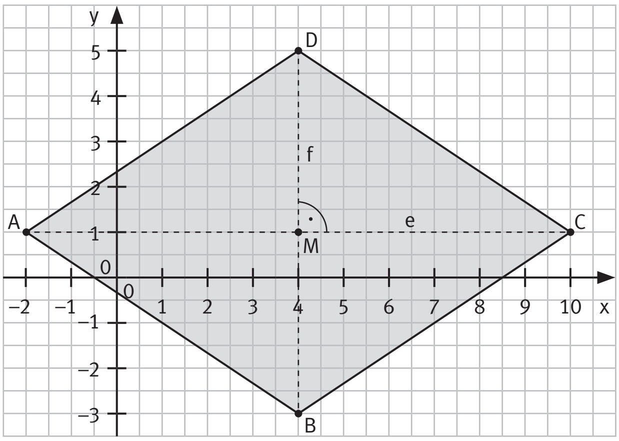
K4 **3** **a)** Es sind individuelle Lösungen möglich mit Diagonalen e und f und $e \cdot f = 80\,\text{cm}^2$; z. B.:
$e = 10\,\text{cm}$ und $f = 8\,\text{cm}$; $e = 16\,\text{cm}$ und $f = 5\,\text{cm}$; $e = 20\,\text{cm}$ und $f = 4\,\text{cm}$.
Der Diagonalenschnittpunkt M ist frei wählbar auf einer der beiden Diagonalen.



b) Es sind individuelle Lösungen möglich mit Diagonalen e und f und $e \cdot f = 64\,\text{cm}^2$; z. B.:
$e = f = 8\,\text{cm}$ (Spezialfall Quadrat); $e = 16\,\text{cm}$ und $f = 4\,\text{cm}$; $e = 32\,\text{cm}$ und $f = 2\,\text{cm}$.
Der Diagonalenschnittpunkt M ist Mittelpunkt beider Diagonalen.



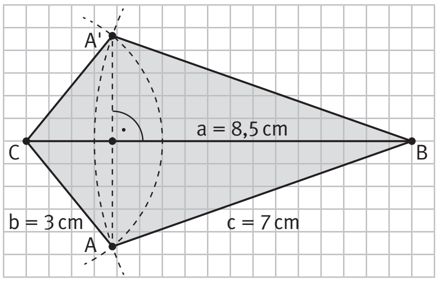
K1 **4**



Es sind individuelle Lösungswege möglich, z. B.:

- Beweis mithilfe der Achsensymmetrie:
  Die Punkte A und C haben dieselbe y-Koordinate und B und D dieselbe x-Koordinate. Daher stehen die Strecken [AC] und [BD] senkrecht aufeinander. Zugleich gilt:
  $M_{[AC]}(4\,|\,1) = M_{[BD]}(4\,|\,1) = M$ mit $[AC] \cap [BD] = \{M\}$, d. h., die Diagonalen halbieren sich, das Viereck ABCD ist achsensymmetrisch bzgl. [AC] und [BD], es ist eine Raute.
- Beweis mithilfe von Vektoren:
  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, d. h., die einander gegenüberliegenden Seiten AD und BC bzw. AB und CD sind parallel und gleich lang, das Viereck ist ein Parallelogramm.
  Weiterhin gilt: Die Punkte A und C haben dieselbe y-Koordinate und B und D dieselbe x-Koordinate, die Strecken [AC] und [BD] stehen senkrecht aufeinander. Das Parallelogramm ABCD mit senkrecht aufeinander stehenden Diagonalen ist eine Raute.

K5 **5**



In der Figur ABA'C ist die Strecke [BC] mit $\overline{BC}$ = a = 8,5 cm Symmetrieachse, daher ist die Figur ABA'C ein Drachenviereck.

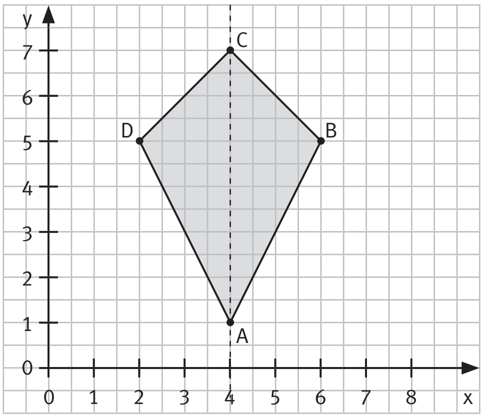
Für die Länge der Diagonale [AA'] gilt:

$\overline{AA'} = 2 \cdot A_{Dr} : \overline{BC}$

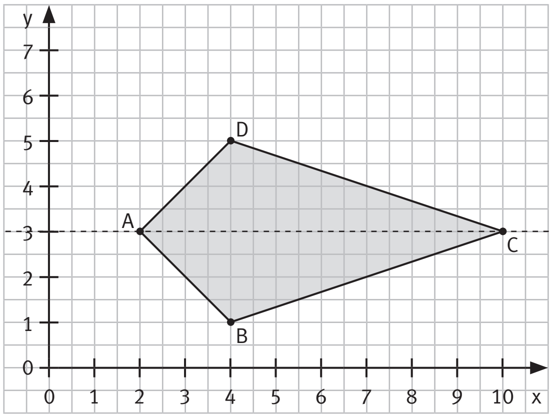
$= 2 \cdot 19{,}76\,\text{cm}^2 : 8{,}5\,\text{cm}$

$\approx 4{,}65\,\text{cm}$

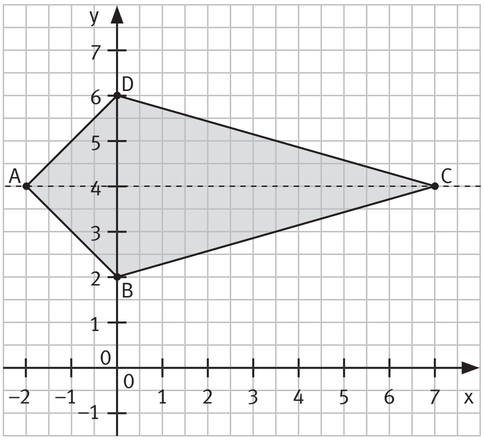
K4 **6** **a)** D (2|5); $A = 0{,}5 \cdot 6\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 12\,\text{cm}^2$



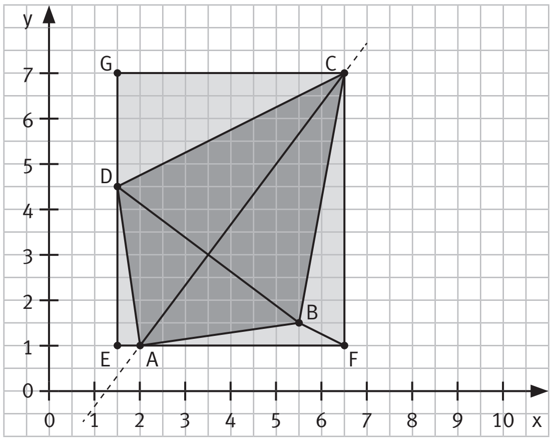
b) B (4|1); $A = 0{,}5 \cdot 8\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 16\,\text{cm}^2$



c) D (0|6); $A = 0{,}5 \cdot 9\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 18\,\text{cm}^2$



d) D (1,5|4,5); $A = 0{,}5 \cdot 7{,}5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 18{,}75\,\text{cm}^2$



Zu **d)**:

Die Fläche des Drachenvierecks kann mithilfe abgelesener Längen der Diagonalen berechnet werden:
$\overline{AC} = 7{,}5\,\text{cm}$; $\overline{BD} = 5\,\text{cm}$; $A = 0{,}5 \cdot 7{,}5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 18{,}75\,\text{cm}^2$.

Alternative kann man ein Rechteck EFCG um das Drachenviereck legen und die Flächeninhalte des Rechtecks EFCG sowie der Dreiecke ADE, BAF, CBF und DCG berechnen; man erhält mit diesen Werten den Flächeninhalt des Drachenvierecks:

$A_{EFCD} = 5\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = 30\,\text{cm}^2$

$A_{ADE} = 0{,}5 \cdot 3{,}5\,\text{cm} \cdot 0{,}5\,\text{cm} = 0{,}875\,\text{cm}^2$

$A_{BAF} = 0{,}5 \cdot 4{,}5\,\text{cm} \cdot 0{,}5\,\text{cm} = 1{,}125\,\text{cm}^2$

$A_{CBF} = 0{,}5 \cdot 6{,}0\,\text{cm} \cdot 1{,}0\,\text{cm} = 3{,}000\,\text{cm}^2$

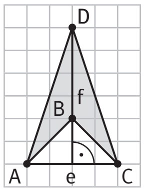
$A_{DCG} = 0{,}5 \cdot 5{,}0\,\text{cm} \cdot 2{,}5\,\text{cm} = 6{,}250\,\text{cm}^2$

$A_{ABCD} = A_{EFCD} - A_{ADE} - A_{BAF} - A_{CBF} - A_{DCG}$

$= 30\,\text{cm}^2 - 0{,}875\,\text{cm}^2 - 1{,}125\,\text{cm}^2 - 3\,\text{cm}^2 - 6{,}25\,\text{cm}^2$

$= 18{,}75\,\text{cm}^2$

K4 **7** **a)**

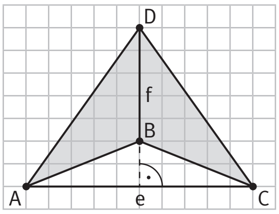


$\overline{AC} = e = 2\,cm$

$\overline{BD} = f = 2\,cm$

$A = 0{,}5 \cdot e \cdot f = 2\,cm^2$

b)



$\overline{AC} = e = 5\,cm$

$\overline{BD} = f = 2{,}5\,cm$

$A = 0{,}5 \cdot e \cdot f = 6{,}25\,cm^2$

K3 **8** **a)** Die gesamte Dachfläche setzt sich aus vier drachenförmigen Flächen zusammen mit Diagonalen, die 11 m bzw. 5,5 m lang sind.

$A_{Dach} = 4 \cdot A_{Drachenviereck} = 4 \cdot (0{,}5 \cdot 11\,m \cdot 5{,}50\,m) = 121\,m^2$

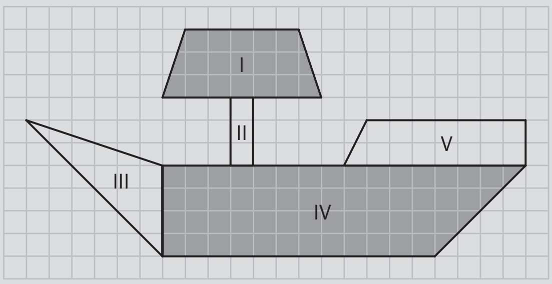
b) Kosten: $150\,\frac{€}{m^2} \cdot 121\,m^2 = 18\,150{,}00\,€$ ohne MwSt.

$18\,150{,}00\,€ \cdot 1{,}19 = 21\,598{,}50\,€$ mit MwSt.

K4

Wissen

Es sind individuelle Zerlegungen des Vielecks möglich, z. B.:



Trapez I: $a = 3{,}5\,cm$; $c = 2{,}5\,cm$; $h = 1{,}5\,cm$.	$A_I = \frac{3{,}5\,cm + 2{,}5\,cm}{2} \cdot 1{,}5\,cm = 4{,}50\,cm^2$
Rechteck II: $a = 1{,}5\,cm$; $b = 0{,}5\,cm$.	$A_{II} = 1{,}5\,cm \cdot 0{,}5\,cm = 0{,}75\,cm^2$
Dreieck III: $g = 2{,}0\,cm$; $h = 3{,}0\,cm$.	$A_{III} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}0\,cm^2 \cdot 3{,}0\,cm = 3{,}00\,cm^2$
Trapez IV: $a = 8{,}0\,cm$; $c = 6{,}0\,cm$; $h = 2{,}0\,cm$.	$A_{IV} = \frac{8{,}0\,cm + 6{,}0\,cm}{2} \cdot 2{,}0\,cm = 14{,}00\,cm^2$
Trapez V: $a = 4{,}0\,cm$; $c = 3{,}5\,cm$, $h = 1{,}0\,cm$.	$A_V = \frac{4{,}0\,cm + 3{,}5\,cm}{2} \cdot 1{,}0\,cm = 3{,}75\,cm^2$

$A = A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV} + A_V = 26\,cm^2$

Das Vieleck hat einen Flächeninhalt von $26\,cm^2$.

Verständnis

K 1 ■ $a = \frac{2}{3}b$, denn die Länge a berechnet sich im vorliegenden Fall aus der Länge b, das bedeutet, dass a vom Parameter b abhängig ist.

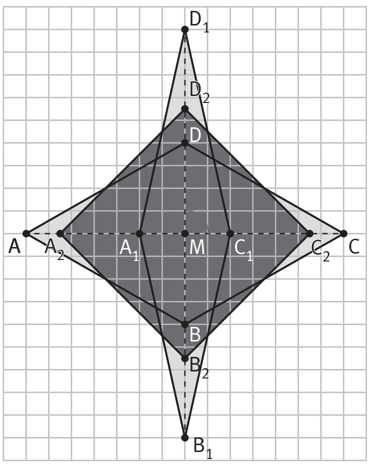
K 5 **1** **a)** Der Parameter ist die Länge der Grundseite g bzw. deren Maßzahl x: $g = x$ cm.
Der Term für die Länge der Dreieckshöhe h in Abhängigkeit des Parameters lautet:
$h = 4 \cdot g = 4 \cdot x$ cm mit $x \in \mathbb{Q}^+$

b) Parameter sind die Basis g und die Höhe h bzw. deren Maßzahlen y und z: $g = y$ cm; $h = z$ cm.
Die Terme für die Längen der neuen Basis und Höhe in Abhängigkeit von g und h lauten:
$g_{neu} = g + 2 \cdot 1{,}5x\,\text{cm} = y\,\text{cm} + 3x\,\text{cm} = (y + 3x)\,\text{cm}$ mit $y \in \mathbb{Q}^+$
$h_{neu} = h - 2x\,\text{cm} = z\,\text{cm} - 2x\,\text{cm} = (z - 2x)\,\text{cm}$ mit $z \in \mathbb{Q}^+$

c) Die Längen der ursprünglichen Katheten a und b sind fest vorgegeben mit $a = 6$ cm, $b = 13$ cm, daher sind zur Angabe der neuen Kathetenlängen keine Parameter nötig:
$a_{neu} = (6 + 2x)$ cm; $b_{neu} = (13 - 2{,}5x)$ cm

K 3 **2** Parameter ist die Anzahl x der abzugebenden Meter an der langen Grundstückseite.
Die Terme für die neuen Grundstückseiten und den neuen Flächeninhalt in Abhängigkeit von x lauten:
$a_{neu} = 90\,\text{m} - x\,\text{m} = (90 - x)\,\text{m}$; $b_{neu} = 60\,\text{m} + x \cdot 2\,\text{m} = (60 + 2x)\,\text{m}$
$A_{neu} = (90 - x)\,\text{m} \cdot (60 + 2x)\,\text{m}$
$= (5400 + 120x - 2x^2)\,\text{m}^2$
$= -2 \cdot (x - 30)^2\,\text{m}^2 + 7200\,\text{m}^2$
A_{neu} ist maximal bei $x = 30$ m mit $7200\,\text{m}^2$.
Wenn der Eigentümer 30 m der langen Grundstückseite abgibt, verlängert sich die Breite um 60 m, die Grundstückfläche vergrößert sich von $5400\,\text{m}^2$ auf $7200\,\text{m}^2$.
Hinweis: Zur Berechnung des größtmöglichen Flächeninhalts wurde quadratisch ergänzt:
$-2x^2 + 120x + 5400 = -2 \cdot (x^2 - 60x - 2700) = -2 \cdot (x^2 - 60x + 900 - 900 - 2700) = -2 \cdot (x - 30)^2 + 7200$

K 5 **3** **a)** und **b)**



b) Raute ABCD mit $\overline{AC} = 7$ cm; $\overline{BD} = 4$ cm:
$A_{ABCD} = 14\,\text{cm}^2$
Raute $A_1B_1C_1D_1$ mit $\overline{A_1C_1} = 2$ cm; $\overline{B_1D_1} = 9$ cm:
$A_{A_1B_1C_1D_1} = 9\,\text{cm}^2$

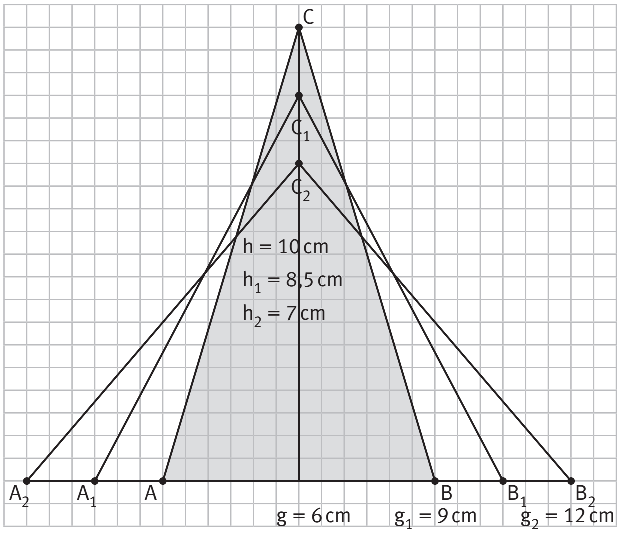
c) $x \in [0; 3{,}5[$

d) Für das Quadrat $A_2B_2C_2D_2$ muss gelten:
$\overline{A_2C_2} = \overline{B_2D_2}$, d. h.:
$7 - 2x = 4 + 2x \Leftrightarrow x = 0{,}75$
Für $x = 0{,}75$ ist die Raute ein Quadrat mit Diagonalen $e_2 = f_2 = 5{,}5$ cm und $A_{A_2B_2C_2D_2} = 15{,}125\,\text{cm}^2$.

e) $A(x) = \frac{1}{2} \cdot (7 - 2x)\,\text{cm} \cdot (4 + 2x)\,\text{cm}$
$= (-2x^2 + 3x + 14)\,\text{cm}^2$ für $x \in [0; 3{,}5[$

f) Quadratisches Ergänzen ergibt:
$-2 \cdot (x^2 - 1{,}5x - 7)\,\text{cm}^2$
$= -2 \cdot (x^2 - 1{,}5x + 0{,}75^2 - 0{,}75^2 - 7)\,\text{cm}^2$
$= -2 \cdot (x - 0{,}75)^2\,\text{cm}^2 + 15{,}125\,\text{cm}^2$
$\Rightarrow A_{max} = 15{,}125\,\text{cm}^2$ bei $x = 0{,}75$

K5 **4 a)**



b) $x \in [0; 10[$

c) $\overline{A_nB_n} = (6 + 2x)$ cm

$h_n = (10 - x)$ cm

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (6 + 2x)\,\text{cm} \cdot (10 - x)\,\text{cm}$

$= (-x^2 + 7x + 30)\,\text{cm}^2$

d) Quadratisches Ergänzen ergibt:

$-(x^2 - 7x - 30)\,\text{cm}^2$

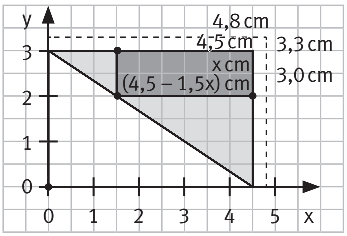
$= -(x^2 - 7x + 3{,}5^2 - 3{,}5^2 - 30)\,\text{cm}^2$

$= -(x - 3{,}5)^2\,\text{cm}^2 + 42{,}25\,\text{cm}^2$

$\Rightarrow A_{max} = 42{,}25\,\text{cm}^2$ bei $x = 3{,}5$ mit einer Grundseite von 13 cm und einer Höhe von 6,5 cm.

K3 **5** Maßstab 1 : 1000

Wegen der gesetzlichen Abstandsbestimmungen ist nur ein Dreieck mit 45 m und 30 m langen Seiten zu betrachten.



Die Länge von b in Abhängigkeit von a = x m lässt sich mithilfe eines Steigungsdreiecks berechnen:

Wenn a = x m von 30 m subtrahiert wird, gilt für b:

$b = 45\,\text{m} - \frac{45}{30} \cdot x\,\text{m} = (45 - 1{,}5x)\,\text{m}$ mit $x \in [0; 30[$

(z. B.: a = 10 m und b = 30 m; a = 20 m und b = 15 m).

$A_{Rechteck} = a \cdot b = x\,\text{m} \cdot (45 - 1{,}5x)\,\text{m} = (45x - 1{,}5x^2)\,\text{m}^2$

Quadratisches Ergänzen ergibt:

$-1{,}5 \cdot (x^2 - 30x)\,\text{m}^2$

$= -1{,}5 \cdot (x^2 - 30x + 15^2 - 15^2)\,\text{m}^2$

$= [-1{,}5 \cdot (x - 15)^2 + 337{,}5]\,\text{m}^2$

$\Rightarrow A_{max} = 337{,}5\,\text{m}^2$ bei $x = 15$, $a = 15$ m, $b = 22{,}5$ m

Verständnis

Betrachtung anhand des Beispiels mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ bzw. $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$:

K6

- Bei falscher Reihenfolge der Vektoren in der Determinante erhält man ein falsches Ergebnis, es unterscheidet sich vom Ergebnis mit der richtigen Reihenfolge um den Faktor –1, der Flächeninhalt hätte damit einen negativen Wert.

  $A_{\text{richtige-Reihenfolge}} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1,5 & 5 \end{vmatrix} \text{FE} = \frac{1}{2} \cdot (15 - 3)\ \text{FE} = 6\ \text{FE}$

  $A_{\text{falsche-Reihenfolge}} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1,5 \end{vmatrix} \text{FE} = \frac{1}{2} \cdot (3 - 15)\ \text{FE} = -6\ \text{FE}$

K6

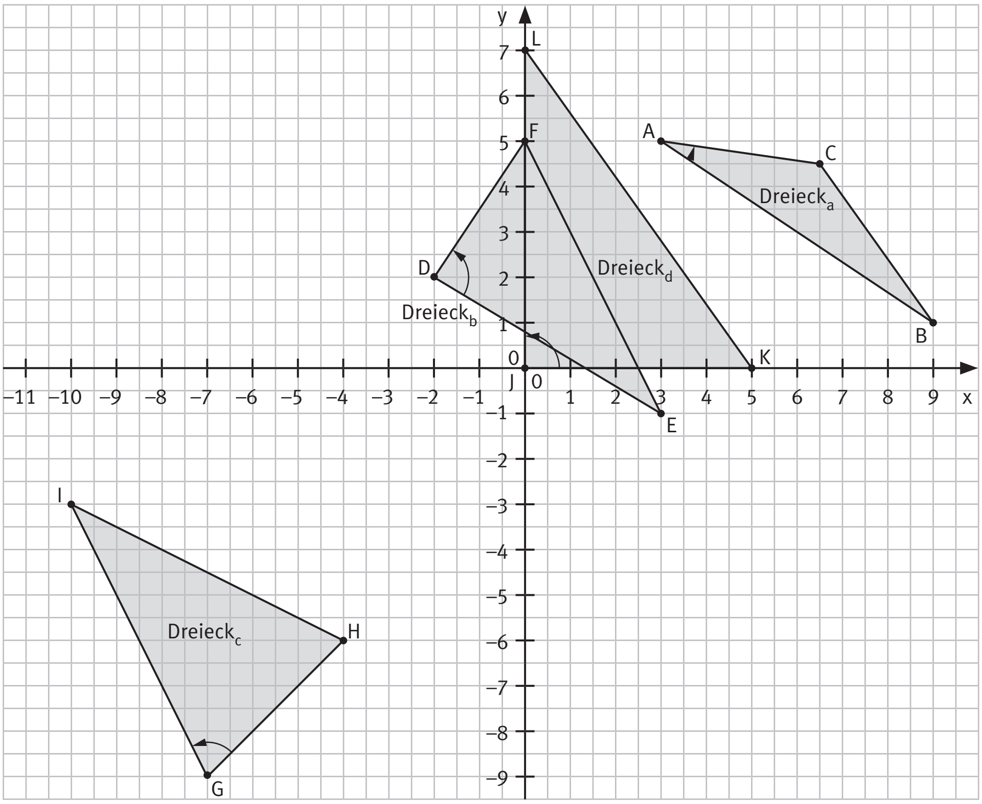
- Bei „falscher" Orientierung der Vektoren (mit gemeinsamer Spitze anstelle eines gemeinsamen Ausgangspunkt) gibt es keinen Unterschied im Ergebnis, man erhält das richtige Ergebnis:

  $A_{\text{richtige-Orientierung}} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1,5 & 5 \end{vmatrix} \text{FE} = \frac{1}{2} \cdot (15 - 3)\ \text{FE} = 6\ \text{FE}$

  $A_{\text{falsche-Orientierung}} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1,5 & -5 \end{vmatrix} \text{FE} = \frac{1}{2} \cdot (15 - 3)\ \text{FE} = 6\ \text{FE}$

K4

1 **a)** bis **d)**



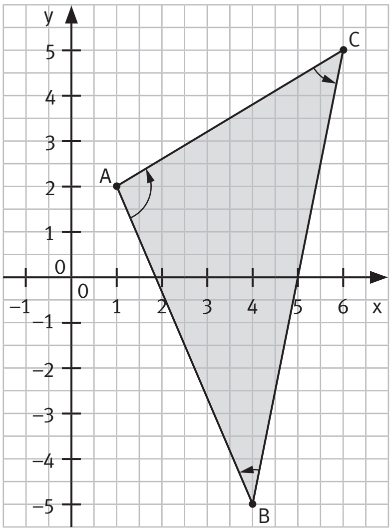
a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3,5 \\ -4 & -0,5 \end{vmatrix} \text{FE} = \frac{1}{2} \cdot (-3 - (-14))\ \text{FE} = 5,5\ \text{FE}$

b) $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $A_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \text{FE} = \frac{1}{2} \cdot (15 - (-6))\ \text{FE} = 10,5\ \text{FE}$

c) $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{GI} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $A_{GHI} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \text{FE} = \frac{1}{2} \cdot (18 - (-9))\ \text{FE} = 13,5\ \text{FE}$

d) $\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{JL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ $A_{JKL} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \text{FE} = \frac{1}{2} \cdot (35 - 0)\ \text{FE} = 17,5\ \text{FE}$

K5 **2**



$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

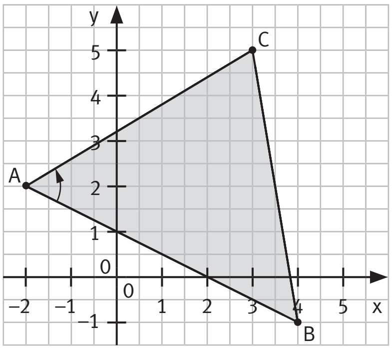
$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \end{pmatrix}$

$A_A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$ FE $= \frac{1}{2} \cdot (9 - (-35))$ FE $= 22$ FE

$A_B = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 10 & 7 \end{vmatrix}$ FE $= \frac{1}{2} \cdot (14 - (-30))$ FE $= 22$ FE

$A_C = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -10 \end{vmatrix}$ FE $= \frac{1}{2} \cdot (50 - 6)$ FE $= 22$ FE

K6 **3**

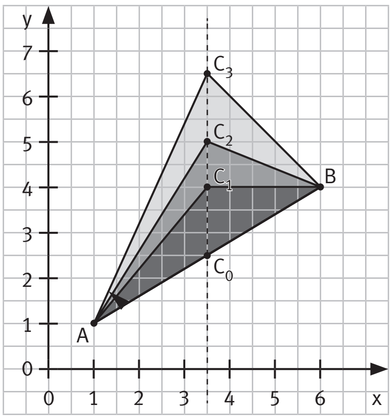


Beide haben A (–2 | 2) als Anfangspunkt festgelegt:
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Felix hat die Determinante zwar passend angegeben, danach aber bei der Berechnung ein Minuszeichen vergessen und so ein falsches Ergebnis erhalten.
Eva hat mit 16,5 FE (zufällig) das korrekte Ergebnis erhalten, dabei aber zwei Fehler gemacht: Sie hat die Determinante nicht passend zur Winkelpfeilrichtung angegeben; außerdem hat sie bei ihrem Ergebnis das Minuszeichen unterschlagen. Bei korrekter Auflösung der Klammer wäre Evas Wert negativ und damit falsch.

Korrekte Berechnung:

$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}$ FE $= \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot 3 - (-3) \cdot 5) = \frac{1}{2} \cdot (18 + 15) = 16{,}5$ FE

K5 **4**



a) Für y muss gelten: $y > 2{,}5$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ y - 1 \end{pmatrix}$

$A(y) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2{,}5 \\ 3 & y-1 \end{vmatrix}$ FE

$= \frac{1}{2} \cdot (5y - 5 - 7{,}5)$ FE

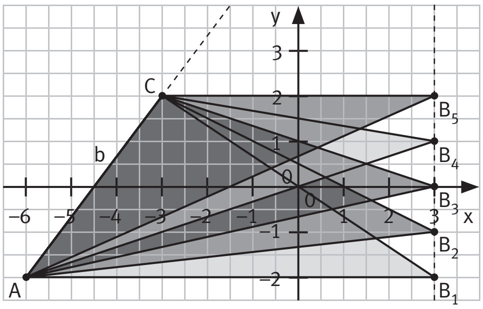
$= (2{,}5y - 6{,}25)$ FE

$(2{,}5y - 6{,}25)$ FE $= 7{,}5$ FE $\Leftrightarrow 2{,}5y = 13{,}75 \Leftrightarrow y = 5{,}5$

$(2{,}5y - 6{,}25)$ FE $= 10$ FE $\Leftrightarrow 2{,}5y = 16{,}25 \Leftrightarrow y = 6{,}5$

Bei $y = 5{,}5$ ($y = 6{,}5$) beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks 7,5 FE (10 FE).

K5 **5** **a)** und **c)**



a) Die Punkte B_n (3 | y) liegen auf der Parallele zur y-Achse durch x = 3.

b) Es gibt kein Dreieck AB_0C mit einem kleinsten Flächeninhalt:

Das Dreieck AB_nC mit Grundseite $b = \overline{AC}$ und Höhe h_n hat den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} b \cdot h_n$.
Je stärker B_n sich B_0 (3 | 10) nähert, desto kürzer wird h_n und desto kleiner wird der Flächeninhalt.
Der Flächeninhalt mit B_0 (3 | 10) beträgt 0 FE, die Figur ist kein Dreieck.

d) $\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} 9 \\ y+2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

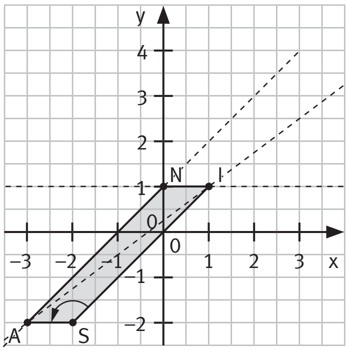
$A(y) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ y+2 & 4 \end{vmatrix} \text{ FE} = \frac{1}{2} \cdot (30 - 3y) \text{ FE}$

$= (-1{,}5y + 15) \text{ FE}$

e) $A(10) = (-1{,}5 \cdot 10 + 15) \text{ FE} = 0 \text{ FE}$
$\Rightarrow$ Mit B_0 (3 | 10) ist der Flächeninhalt minimal.

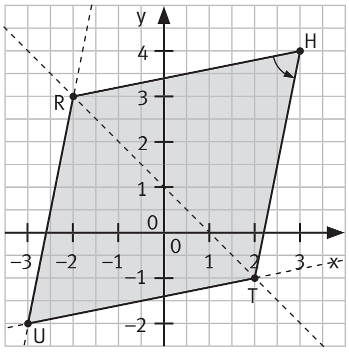
K4 **6** Es sind individuelle Zerlegungen und Lösungsweg möglich.

a) N (0 | 1); $\overrightarrow{SI} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$



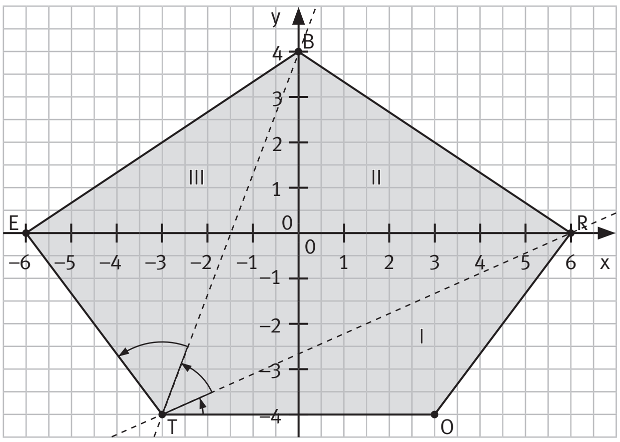
$A_{SINA} = 2 \cdot A_{SIA} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \text{ FE} = 3 \text{ FE}$

b) U (−3 | −2); $\overrightarrow{HR} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{HT} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$



$A_{RUTH} = 2 \cdot A_{HRT} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \text{ FE} = 24 \text{ FE}$

c) $\overrightarrow{TO} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{TR} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{TB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{TE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$



$A_{TOR} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \text{ FE} = 12 \text{ FE}$

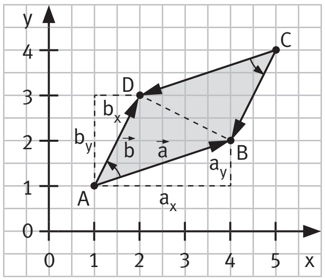
$A_{TRB} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \text{ FE} = 30 \text{ FE}$

$A_{TBE} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} \text{ FE} = 18 \text{ FE}$

$A_{TORBE} = A_{TOR} + A_{TRB} + A_{TBE}$
$= 12 \text{ FE} + 30 \text{ FE} + 18 \text{ FE} = 60 \text{ FE}$

Hinweis: Bei a) ist auch die einfache Flächenberechnung des Parallelogramms mit Grundseite [AS] und Höhe $h_{[AS]}$ möglich. Bei c) ist auch die Zerlegung in ein Trapez TORE und ein Dreieck RBE möglich.

K1 **7** **a)**



Jedes Parallelogramm kann in zwei kongruente Teildreiecke zerlegt werden. Sein Flächeninhalt berechnet sich aus dem Doppelten des Flächeninhalts eines Teildreiecks:

$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \text{ FE} = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \text{ FE}$

Beispiel mit A (1 | 1), B (4 | 2), C (5 | 4), D (2 | 3):

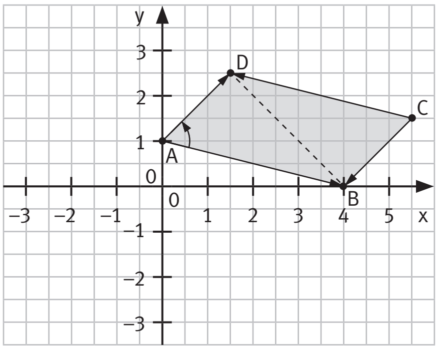
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A_{ABCD} = A_{ABD} + A_{CDB}$

$= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ FE} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \text{ FE} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ FE} = 5 \text{ FE}$

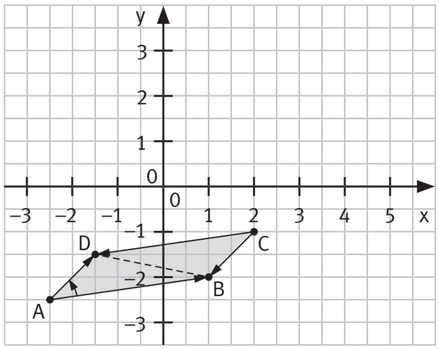
b) ① D (1,5 | 2,5); $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

$A = \begin{vmatrix} 4 & 1{,}5 \\ -1 & 1{,}5 \end{vmatrix} \text{ FE} = (6 + 1{,}5) \text{ FE} = 7{,}5 \text{ FE}$



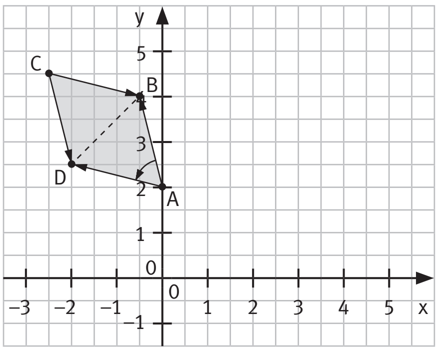
② C (2 | –1); $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{vmatrix} 3{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & 1 \end{vmatrix} \text{ FE} = (3{,}5 - 0{,}5) \text{ FE} = 3 \text{ FE}$



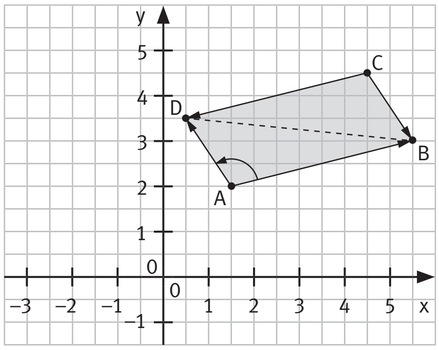
③ D (–2 | 2,5); $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

$A = \begin{vmatrix} -0{,}5 & -2 \\ 2 & 0{,}5 \end{vmatrix} \text{ FE} = (-0{,}25 + 4) \text{ FE} = 3{,}75 \text{ FE}$

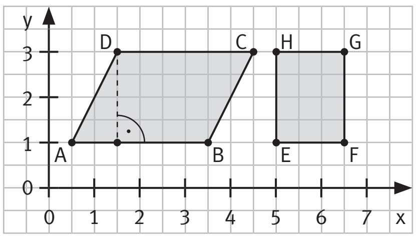


④ A (1,5 | 2); $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

$A = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1{,}5 \end{vmatrix} \text{ FE} = (6 + 1) \text{ FE} = 7 \text{ FE}$



c) Es sind individuelle Abbildungen und Werte der Berechnungen möglich, z. B.:



Parallelogramm mit A (0,5 | 1), B (3,5 | 1), C (4,5 | 3), D (1,5 | 3); g = 3 LE; h = 2 LE:

$A_{ABCD} = g \cdot h = 3 \text{ LE} \cdot 2 \text{ LE} = 6 \text{ FE}$ bzw.

$A_{ABCD} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ FE} = 6 \text{ FE}$

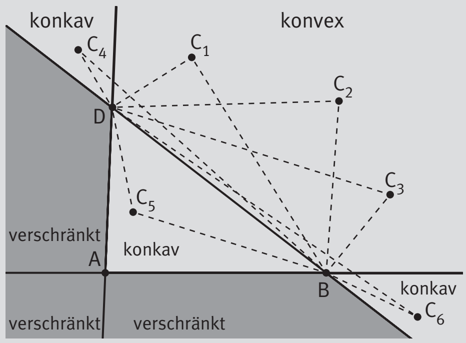
Rechteck mit E (5 | 1), F (6,5 | 1), G (6,5 | 3), H (5 | 3); a = 1,5 LE; b = 2 LE:

$A_{EFGH} = a \cdot b = 1{,}5 \text{ LE} \cdot 2 \text{ LE} = 3 \text{ FE}$ bzw.

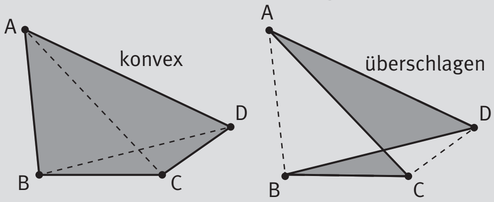
$A_{EFGH} = \begin{vmatrix} 1{,}5 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ FE} = 3 \text{ FE}$

Verständnis

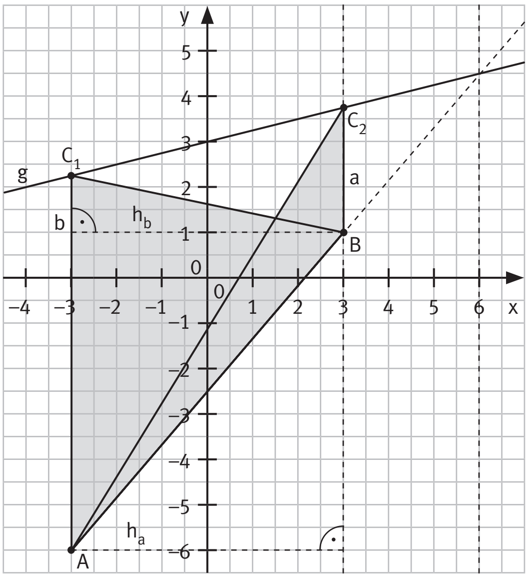
K1
- Das Viereck ABC_nD darf konvex oder konkav sein, aber nicht verschränkt, daher gilt: C_n muss im Inneren des Dreiecks ABD liegen oder in der durch BD festgelegten Halbebene, die A nicht enthält. C_n darf nicht auf den Geraden AB, AD und BD liegen, da die Figur in diesem Fall kein Viereck ergibt.



K6
- Wenn ABCD ein konvexes Viereck ist, dann ist ACBD ein überschlagenes Viereck.



K5 **1** **a)** Es sind individuelle Lösungen möglich, z. B.:



$C_1(-3\,|\,2{,}25)$ mit $b = 8{,}25$ LE, $h_b = 6$ LE:
$A_{ABC_1} = 24{,}75$ FE
$C_2(3\,|\,3{,}75)$ mit $a = 2{,}75$ LE, $h_a = 6$ LE:
$A_{ABC_2} = 8{,}25$ FE

b) $C_n(x\,|\,0{,}25x + 3)$

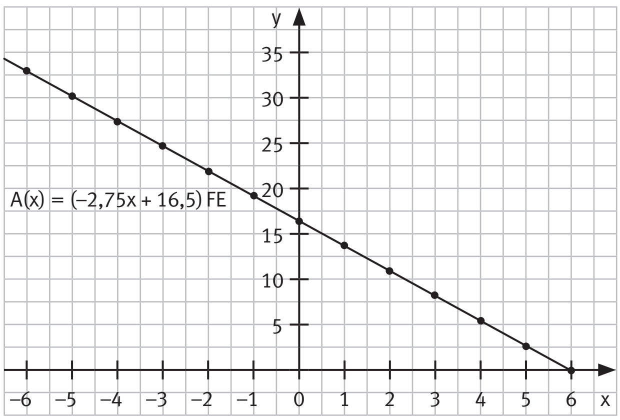
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x + 3 \\ 0{,}25x + 9 \end{pmatrix}$

$$A_{ABC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & x + 3 \\ 7 & 0{,}25x + 9 \end{vmatrix} \text{ FE}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (1{,}5x + 54 - 7x - 21) \text{ FE}$$
$$= (-2{,}75x + 16{,}5) \text{ FE}$$

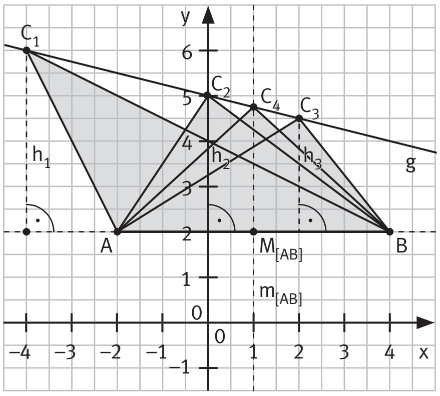
Damit A (x) positiv ist, muss gelten:
$-2{,}75x + 16{,}5 > 0 \Leftrightarrow x < 6$

c)

x	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
y	33	30,25	27,5	24,75	22	19,25	16,5	13,75	11	8,25	5,5	2,75	0



K5 **2 a)** bis **c)**



c) $A = \frac{1}{2} \cdot 6\ \text{LE} \cdot 4\ \text{LE} = 12\ \text{FE}$

d) $h(x) = (-\frac{1}{4}x + 5)\ \text{LE} - 2\ \text{LE} = (-\frac{1}{4}x + 3)\ \text{LE}$

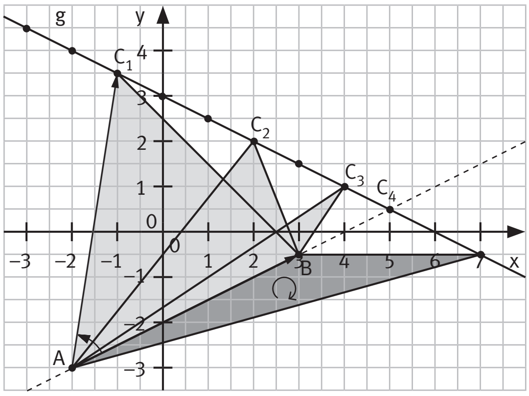
e) Es gibt kein Dreieck ABC_n, wenn gilt:
$h(x) \leq 0\ \text{LE} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 12$

f) $A(x) = \frac{1}{2} \cdot 6\ \text{LE} \cdot h(x)$
$= 3 \cdot (-\frac{1}{4}x + 3)\ \text{FE} = (-0{,}75x + 9)\ \text{FE}$

g) $-0{,}75x + 9 = 7{,}5 \Leftrightarrow x = 2$
Für $x = 2$ beträgt $A(x) = 7{,}5$ FE.

h) $M_{[AB]}(1|2) \Rightarrow x_4 = 1;\ y_4 = 4{,}75 \Rightarrow C_4(1|4{,}75)$
Es gibt kein weiteres gleichschenkliges Dreieck ABC_n, da es nur einen Punkt gibt, der gleichzeitig auf $m_{[AB]}$ und auf g liegt.

K5 **3 a)** bis **e)** (Ausschnitt)



a) Die Punkte $C_n(x|-0{,}5x + 3)$ liegen auf der Gerade g: $y = -0{,}5x + 3$.

b) $A_{ABC_1} = 15$ FE; $A_{ABC_2} = 7{,}5$ FE
Nur für $x < 5$ erhält man positiv orientierte Dreiecke:
Für $x = 5$ liegt C_n auf AB, es existiert kein Dreieck ABC_n; für $x > 5$ liegt C_n unterhalb von AB, das Dreieck ABC_n ist nicht positiv orientiert.

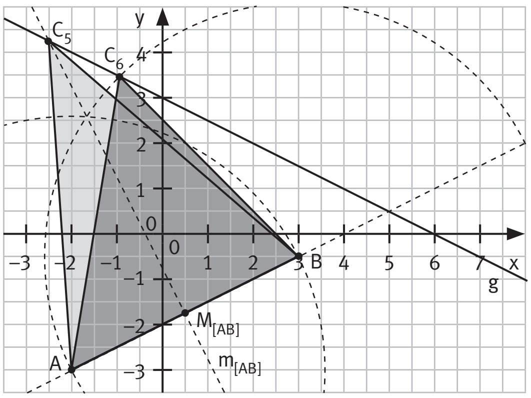
c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x_c - x_A \\ y_c - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ -0{,}5x + 6 \end{pmatrix}$

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & x + 2 \\ 2{,}5 & -0{,}5x + 6 \end{vmatrix}$ FE
$= \frac{1}{2} \cdot (-2{,}5x + 30 - 2{,}5x - 5)$ FE
$= (-2{,}5x + 12{,}5)$ FE für $x > 5$

d) $(-2{,}5x + 12{,}5) = 2{,}5 \Leftrightarrow x = 4;\ C_3(4|1)$

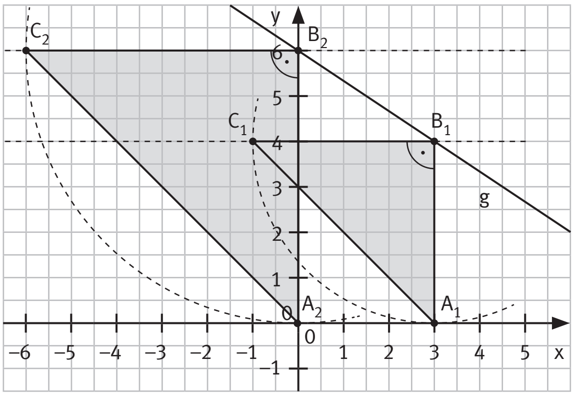
e) ABC_4 ist kein Dreieck, wenn $C_4 \in AB$:
$AB \cap g = \{C_4\}$ mit AB: $y = 0{,}5x - 2$
$0{,}5x - 2 = -0{,}5x + 3 \Leftrightarrow x = 5;\ C_4(5|0{,}5)$

f)



f) Das Dreieck ABC_n ist gleichschenklig, falls:
$\overline{AB} = \overline{AC_n}$ oder $\overline{AC_n} = \overline{BC_n}$ oder $\overline{AB} = \overline{BC_n}$.
Die Konstruktion ergibt:
$\overline{AB} = \overline{AC_n}$: $k(A;\ r = \overline{AB}) \cap g = \{\ \}$
$\overline{AC_n} = \overline{BC_n}$: $m_{[AB]} \cap g = \{C_5\}$
$\overline{AB} = \overline{BC_n}$: $k(B;\ r = \overline{AB}) \cap g = \{C_6;\ C_7\}$
Da der x-Wert von $C_7(8{,}5|-1{,}3)$ größer als 5 ist, entfällt C_7. Es verbleiben für das gleichschenklige Dreieck ABC_n die Punkte $C_5(-2{,}5|4{,}25)$ und $C_6(-0{,}9|3{,}5)$.

K5 **4** **a)**



b) Es gilt mit $B_n\,(x\,|\,-\frac{2}{3}x + 6)$:

$\overline{A_nB_n} = \overline{B_nC_n}$ und $\overline{A_nB_n} = (-\frac{2}{3}x + 6)$ LE

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_nB_n} \cdot \overline{B_nC_n}$

$= \frac{1}{2} \cdot (-\frac{2}{3}x + 6)^2$ FE

$= \left(\frac{2}{9}x^2 - 4x + 18\right)$ FE mit $x < 9$

(Für $x \geq 9$ wäre $A(x) \leq 0$.)

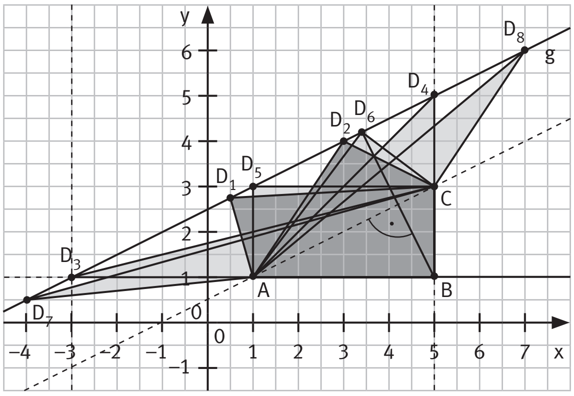
c) Dreieck $A_1B_1C_1$ mit $B_1\,(3\,|\,3)$:

$A(3) = 8$ FE

Dreieck $A_2B_2C_2$ mit $B_2\,(0\,|\,6)$:

$A(0) = 18$ FE

K5 **5** **a)** und **b)**



b) ① Für $x = -3$ und $x = 5$ erhält man Dreiecke mit $D_3\,(-3\,|\,1) \in AB$ und $D_4\,(5\,|\,5) \in BC$.

② $D_5\,(1\,|\,3)$ ist der Schnittpunkt von $x = 1$ und $y = 3$.
$D_6\,(3{,}4\,|\,4{,}2)$ ist das Bild der Achsenspiegelung von B an AC.
Für $x = 1$ erhält man ein Rechteck, für $x = 3{,}4$ ein Drachenviereck.

③ Mit $D_7\,(-4\,|\,0{,}5)$ und $D_8\,(7\,|\,6)$ liegen die Diagonalen BD_7 und BD_8 außerhalb des Vierecks. Für $x < -3$ und $x > 5$ ist das Viereck konkav.

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD_n}\begin{pmatrix} x-1 \\ 0{,}5x+1{,}5 \end{pmatrix}$

Dreieck ABC: $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ FE $= \frac{1}{2} \cdot (8 - 0)$ FE $= 4$ FE

Dreieck CD_nA: $A_{CD_nA} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & x-1 \\ 2 & 0{,}5x+1{,}5 \end{vmatrix}$ FE $= \frac{1}{2} \cdot (2x + 6 - 2x + 2)$ FE $= 4$ FE

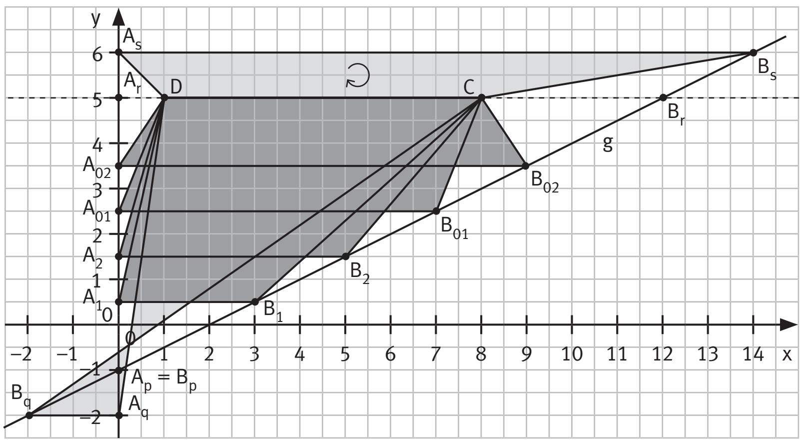
$A(x) = A_{ABC} + A_{CD_nA} = 8$ FE

Der Flächeninhalt hat stets den Wert 8 FE, er ist unabhängig vom x-Wert des Punktes D_n.

Grund: AC und g sind parallel, daher gilt für das Dreieck ACD_n:

$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h_{[AC]}$ bei stets gleichen Längen $\overline{AC}$ und $h_{[AC]}$.

K5 **6** **a)** bis **f)**



b) $A_1 = 0{,}5 \cdot (7 + 3) \cdot 4{,}5$ FE $= 22{,}5$ FE $\qquad A_2 = 0{,}5 \cdot (7 + 5) \cdot 3{,}5$ FE $= 21$ FE

c) Im Trapez A_nB_nCD gilt: $\overline{A_nB_n} = x$ LE; $\overline{CD} = 7$ LE; $h(x) = 5\text{ LE} - y_{B_n} = 6\text{ LE} - 0{,}5x$.
$A(x) = 0{,}5 \cdot (x + 7) \cdot h(x)\text{ FE} = (0{,}5x + 3{,}5) \cdot (-0{,}5x + 6)\text{ FE} = (-0{,}25x^2 + 1{,}25x + 21)\text{ FE}$

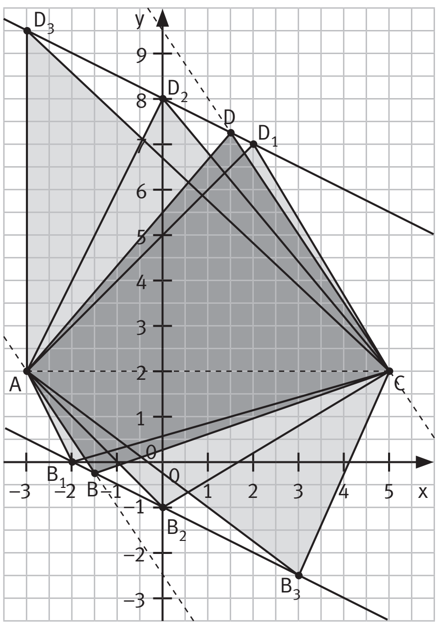
d) Damit das Trapez A_nB_nCD existiert, muss gelten: $0 < x < 12$.
Für $x < 0$ ist A_qB_qCD ein überschlagenes Viereck.
Für $x = 0$ fallen $A_p(0|-1)$ und $B_p(0|-1)$ zusammen, A_pB_pCD ist ein Dreieck.
Für $x = 12$ liegen A_r und B_r auf CD, A_rB_rCD ist die Strecke $[A_rB_r]$.
Für $x > 12$ ist A_sB_sCD ein Trapez, dessen Umlaufsinn nicht mathematisch positiv ist.

e) $(-0{,}25x^2 + 1{,}25x + 21)\text{ FE} = 22{,}5\text{ FE} \Leftrightarrow 0 = x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow 0 = (x-3) \cdot (x-2)$
Für $x = 3$ und $x = 2$ hat das Trapez einen Flächeninhalt von 22,5 FE. Es gibt zwei Trapeze mit einem Flächeninhalt von 22,5 FE.

f) Das Trapez $A_{01}B_{01}CD$ mit $A_{01}(0|2{,}5)$ und $B_{01}(7|2{,}5)$ ist ein Parallelogramm mit
$A = 7 \cdot 2{,}5\text{ FE} = 17{,}5\text{ FE}$.
Das Trapez $A_{02}B_{02}CD$ mit $A_{02}(0|3{,}5)$ und $B_{02}(9|3{,}5)$ ist ein gleichschenkliges Trapez mit
$A = 0{,}5 \cdot (9 + 7) \cdot 1{,}5\text{ FE} = 12\text{ FE}$.

g) Quadratisches Ergänzen ergibt:
$-0{,}25x^2 + 1{,}25x + 21 = -0{,}25 \cdot [(x^2 - 5x + 2{,}5^2) - 90{,}25] = -0{,}25 \cdot (x - 2{,}5)^2 + 22{,}5625$
Der Flächeninhalt ist maximal bei $x = 2{,}5$ mit $A_{max} = 22{,}5625$ FE.

K5 **7**



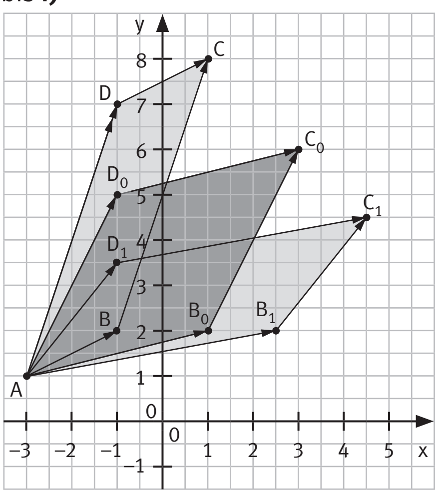
a) AB_1CD_1 mit $B_1(-2|0)$, $D_1(2|7)$
AB_2CD_2 mit $B_2(0|-1)$, $D_2(0|8)$
AB_3CD_3 mit $B_3(3|-2{,}5)$, $D_3(-3|9{,}5)$

b) $\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} x+3 \\ -0{,}5x-3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD_n} = \begin{pmatrix} -x+3 \\ 0{,}5x+6 \end{pmatrix}$
Dreieck AB_nC mit
$A_1(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x+3 & 8 \\ -0{,}5x-3 & 0 \end{vmatrix}\text{ FE} = (2x + 12)\text{ FE}$
Dreieck ACD_n mit
$A_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 8 & -x+3 \\ 0 & 0{,}5x+6 \end{vmatrix}\text{ FE} = (2x + 24)\text{ FE}$

c) $A(x) = A_1(x) + A_2(x) = (4x + 36)\text{ FE}$

d) ABCD mit $B(-1{,}5|-0{,}25)$, $D(1{,}5|7{,}25)$
$m_{AB} = \frac{-0{,}25-2}{-1{,}5-(-3)} = \frac{-2{,}25}{1{,}5} = -\frac{3}{2}$
$m_{CD} = \frac{7{,}25-2}{1{,}5-5} = \frac{5{,}25}{-3{,}5} = -\frac{3}{2}$
$m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow AB \parallel CD$
$\Rightarrow$ ABCD ist ein Trapez.

K5 **8** **a)** bis **f)**



c) $\overrightarrow{AB_1} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$
$A_1 = 11{,}75$ FE

d) $0 < a < 6$

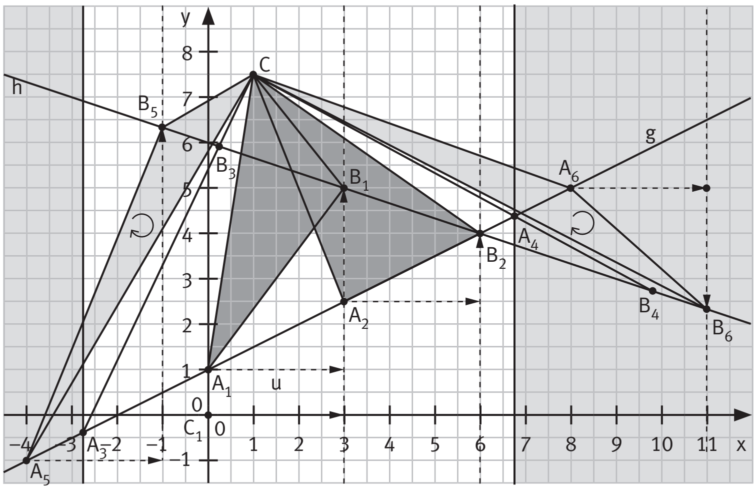
e) $\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} 2+a \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD_n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6-a \end{pmatrix}$
$A(a) = \begin{vmatrix} 2+a & 2 \\ 1 & 6-a \end{vmatrix}\text{ FE}$
$= (-a^2 + 4a + 10)\text{ FE}$

f) Quadratisches Ergänzen liefert:
$-a^2 + 4a + 10 = -(a-2)^2 + 14$
Das Parallelogramm $AB_0C_0D_0$ hat den maximalen Flächeninhalt $A_{max} = 14$ FE mit $a = 2$, $B_0(1|2)$, $C_0(3|6)$, $D_0(-1|5)$.

K5 **9** **a)** Ermittlung von B_n bei vorgegebenem A_n:

1. Die x-Koordinate x_B wird in Abhängigkeit von der Koordinate x_A bestimmt:
   $x_B = x_A + 2$
2. Die y-Koordinate y_B wird durch Einsetzen von x_B berechnet:
   $y_B = -\frac{1}{4}x_B + 7 = -\frac{1}{4}(x_A + 2) + 7 = -\frac{1}{4}x_A + 6{,}5$
3. Durch Festlegung der x-Koordinate von A_n werden die Koordinaten des Punktes B_n berechnet:
   $A_n\,(x_A \mid x_A + 1)$ und $B_n\,(x_A + 2 \mid -\frac{1}{4}x_A + 6{,}5)$

b)



① $A_n\,(x \mid \frac{1}{2}x + 1)$ und $B_n\,(x + 3 \mid -\frac{1}{3}x + 5)$; $A_1\,(0 \mid 1)$ und $B_1\,(3 \mid 5)$; $A_2\,(3 \mid 2{,}5)$ und $B_2\,(6 \mid 4)$.

② Das Intervall ist rechnerisch nicht zu bestimmen. Man kann mithilfe eines dynamischen Geometrieprogramms oder durch Probieren mit verschiedenen x-Werten feststellen, dass für $x < -2{,}75$ und für $x > 6{,}76$ das Dreieck nicht positiv orientiert ist und dass mit $x = -2{,}75$ und $x = 6{,}76$ die Punkte A_n, B_n und C kein Dreieck bilden, sondern eine Strecke ($[A_3C]$ bzw. $[B_4C]$).

③ $\overrightarrow{CA_n} = \begin{pmatrix} x-1 \\ \frac{1}{2}x + 1 - 7{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ \frac{1}{2}x - 6{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB_n} = \begin{pmatrix} x+3-1 \\ -\frac{1}{3}x + 5 - 7{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ -\frac{1}{3}x - 2{,}5 \end{pmatrix}$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x-1 & x+2 \\ \frac{1}{2}x - 6{,}5 & -\frac{1}{3}x - 2{,}5 \end{vmatrix} \text{ FE}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[(x-1) \cdot \left(-\frac{1}{3}x - 2{,}5\right) - \left(\frac{1}{2}x - 6{,}5\right) \cdot (x+2)\right] \text{ FE}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{-5}{6}x^2 + \frac{10}{3}x + 15{,}5\right] \text{ FE}$$

$$= \left(-\frac{5}{12}x^2 + \frac{5}{3}x + 7{,}75\right) \text{ FE}$$

K5 **10** **a)** (Ohne Abbildung, s. Darstellung im Schulbuch)

$A_{Raute} = 6\text{ LE} \cdot 5\text{ LE} = 30\text{ FE}$ $\qquad A_{Drache} = 10{,}5\text{ LE} \cdot 3{,}5\text{ LE} = 36{,}75\text{ FE}$

b) $x \in\,]0; 5[$ $\qquad \overline{A_nC_n} = (10 - 2x)\text{ LE}$ $\qquad \overline{DB_n} = (6 + 3x)\text{ LE}$

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (10 - 2x)\text{ LE} \cdot (6 + 3x)\text{ LE} = (-3x^2 + 9x + 30)\text{ FE}$

c) Quadratisches Ergänzen liefert:

$-3x^2 + 9x + 30 = -3 \cdot (x^2 - 3x - 10) = -3 \cdot [(x - 1{,}5)^2 - 12{,}25] = -3 \cdot (x - 1{,}5)^2 + 36{,}75\text{ FE}$

Für $x = 1{,}5$ ist der Flächeninhalt maximal mit $A_{max} = 36{,}75$ FE.

K3 **1** **a)** Die Fläche setzt sich zusammen aus den beiden Rechtecken mit den Seiten [AB] bzw. [CD]. Das doppelt berechnete Parallelogramm hat eine Grundseite von 9 m und eine Höhe von 6 m; seine Fläche muss einmal abgezogen werden.
$A = 6\,m \cdot 45\,m + 7\,m \cdot 50\,m - 9\,m \cdot 6\,m = 270\,m^2 + 350\,m^2 - 54\,m^2 = 566\,m^2$

b) Asphalt-Kubikmeter: $566\,m^2 \cdot 0{,}12\,m = 67{,}92\,m^3$

c) Schotter-Kubikmeter: $566\,m^2 \cdot 0{,}15\,m = 84{,}9\,m^3$
Schotter-Fahrten: $84{,}9\,m^3 : 7\,m^3 \approx 12{,}13 \Rightarrow$ Der Lkw muss 13 Schotter-Fahrten durchführen.

d) Schottermasse: $84{,}9\,m^3 \cdot 2{,}2\,\frac{t}{m^3} = 186{,}78\,t$

e) Kreuzungsbereich mit Flächeninhalt A: $9\,m \cdot 6\,m = 54\,m^2$
Prozentualer Anteil: $\frac{54\,m^2}{566\,m^2} \cdot 100 \approx 9{,}54\,\%$

f)

Kosten Asphalt:	$67{,}92\,m^3 \cdot 76{,}50\,\frac{€}{m^3} =$	5195,88 €
Kosten Schotter:	$186{,}78\,t \cdot 9{,}20\,\frac{€}{m^3} =$	1718,38 €
Kosten Lkw:	Anzahl an Asphalt-Fahrten: $67{,}92\,m^3 : 7\,m^3 = 9{,}70$	
	Anzahl an Schotter-Fahrten: $84{,}9\,m^3 : 7\,m^3 = 12{,}13$	
	Der LKW muss 10 + 13 = 23 Fuhren fahren.	
	$23\text{ Fahrten} \cdot 11{,}50\,\frac{€}{\text{Fahrt}} =$	264,50 €
Kosten insgesamt:	5195,88 € + 1718,38 € + 264,50 € =	7178,76 €

Falls es möglich ist, dass bei einer Fahrt der Lkw sowohl mit Asphalt als auch mit Schotter beladen ist, sind nur 22 Fahrten nötig (Anzahl an Fahrten insgesamt: 9,7 + 12,13 = 21,83). Die Lkw- Kosten betragen dann 253,00 €, die Kosten insgesamt 7167,26 €; dies würde die Gesamtkosten unter g) leicht verringern.

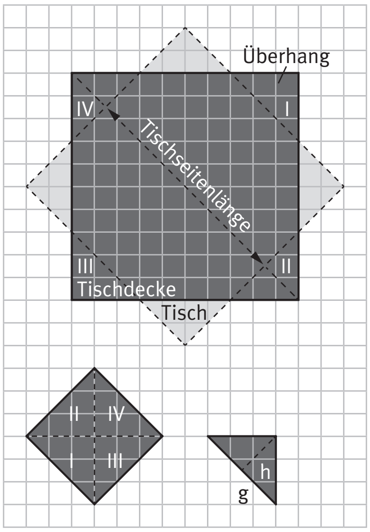
g)

Materialkosten für Asphalt und Schotter (18 % ≙ 7178,76 €):		7178,76 €
Maschinenkosten:	$\frac{11}{18} \cdot 7178{,}76\,€ =$	4387,02 €
Lohnkosten:	$\frac{50}{18} \cdot 7178{,}76\,€ =$	19941,00 €
Sonstige Nebenkosten:	$\frac{21}{18} \cdot 7178{,}76\,€ =$	8375,22 €
Gesamtkosten (netto):	$\frac{100}{18} \cdot 7178{,}76\,€ =$	39 882,00 €
19 % MwSt.:	39 882,00 € · 0,19 =	7577,58 €
Gesamtkosten inkl. 19 % MwSt.: 39 882,00 € · 1,19 =		47 459,58 €

K3 **2** **a)** Die Giebelwandfläche setzt sich zusammen aus einem Rechteck, einem Trapez und einem Dreieck:
$A_{Rechteck} = 10{,}8\,m \cdot 4{,}1\,m = 44{,}28\,m^2$
$A_{Trapez} = 0{,}5 \cdot (10{,}8\,m + 7{,}4\,m) \cdot 3{,}5\,m = 31{,}85\,m^2$
$A_{Dreieck} = 0{,}5 \cdot 7{,}4\,m \cdot 2{,}1\,m = 7{,}77\,m^2$
$A_{Giebelwand} = 44{,}28\,m^2 + 31{,}85\,m^2 + 7{,}77\,m^2 = 83{,}90\,m^2$
Anzahl an Farbdosen: $83{,}90\,m^2 : 12{,}5\,m^2 = 6{,}712$
Man benötigt 7 Dosen Farbe.

b) Rechteck mit Breite $b = 10{,}8\,m$ und Höhe $h = 83{,}90\,m^2 : 10{,}8\,m \approx 7{,}77\,m$

K3 **3**



$A_{Tischdecke} = (120\,cm)^2 = 14\,400\,cm^2$
$A_{Überhang} = 14\,400\,cm^2 : 9 = 1600\,cm^2$
$A_{Ecke} = 1600\,cm^2 : 4 = 400\,cm^2$
Die vier Überhangecken I, II, III und IV ergeben ein Quadrat der Fläche $A = 1600\,cm^2$; die Seitenlänge des Quadrats ist somit 40 cm lang.

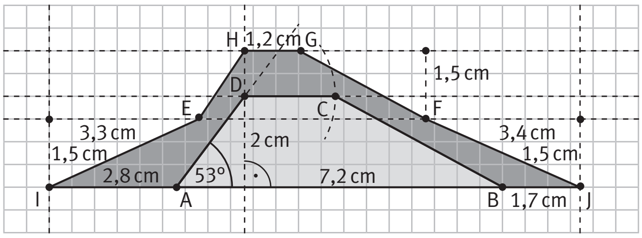
Eine einzelne dieser vier Ecken kann man auffassen als ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck mit einer Grundseite g der Länge 40 cm. Für die zugehörige Dreieckshöhe h gilt:
$h = \frac{2 \cdot A_{Ecke}}{g} = \frac{2 \cdot 400\,cm^2}{40\,cm} = 20\,cm$
Die Diagonale der Tischdecke ist beim Maßstab 1 : 10 abgemessen rund 17 cm lang, in Wirklichkeit also rund 170 cm lang.

Die Seitenlänge des Tisches ist so lange wie die Diagonale der Tischdecke abzüglich der Überhangs-Dreieckshöhe von zwei Ecken der Tischdecke aus: 170 cm – 20 cm – 20 cm = 130 cm

Die Seitenlänge des Tisches beträgt rund 130 cm.

K3 **4** Maßstab 1 : 500 (1 cm entspricht 5 m)

a) und **c)**



a) Querschnitt des bisherigen Dammes: 2 cm hohes Trapez ABCD mit $\overline{AB} = 7{,}2\,cm$, $\overline{CD} = 2\,cm$

b) $A_{alt} = \frac{36\,m + 10\,m}{2} \cdot 10\,m = 230\,m^2$
$V_{alt} = 230\,m^3 \cdot 1300\,m = 299\,000\,m^3$
Der Dammquerschnitt hat einen Flächeninhalt von $230\,m^2$; das Volumen des bisherigen Dammes beträgt $299\,000\,m^3$.

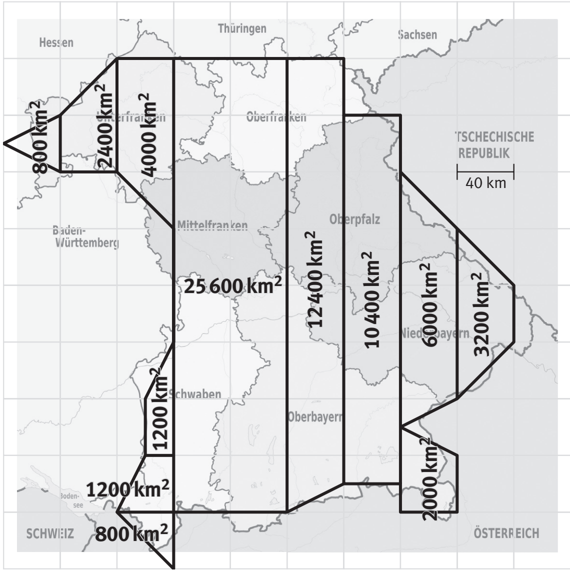
c) Die Figur für den Querschnitt des aufgestockten Dammes setzt sich zusammen aus zwei jeweils 1,5 cm hohen Trapezen, EFGH und IJFE (Höhe in Wirklichkeit jeweils 7,5 m), mit:
$\overline{IJ} = 2{,}8\,cm + 7{,}2\,cm + 1{,}7\,cm = 11{,}7\,cm$ (in Wirklichkeit: 14 m + 36 m + 8,5 m = 58,5 m)
$\overline{EF} = 11{,}7\,cm - 3{,}3\,cm - 3{,}4\,cm = 5\,cm$ (in Wirklichkeit: 58,5 m – 16,5 m – 17 m = 25 m)
$\overline{GH} = 1{,}2\,cm$ (in Wirklichkeit: 6 m)

d) $A_{IJFE} = \frac{58{,}5\,m + 25\,m}{2} \cdot 7{,}5\,m = 313{,}125\,m^2$
$A_{EFGH} = \frac{25\,m + 6\,m}{2} \cdot 7{,}5\,m = 116{,}25\,m^2$
$A_{neu} = 313{,}125\,m^2 + 116{,}25\,m^2 = 429{,}375\,m^2$
$V_{neu} = 429{,}375\,m^2 \cdot 1300\,m = 558\,187{,}5\,m^2$
$V_{neu} - V_{alt} = 558\,187{,}5\,m^3 - 299\,000\,m^3 = 259\,187{,}5\,m^3$
Es müssen $259187{,}5\,m^3$ Erde bewegt werden.

e) $\frac{429{,}375\,m^2}{230\,m^2} \cdot 100 = 186{,}68\,\%$
Der Querschnitt des Dammes ist um 86,68 % größer geworden.

K3 **5** **a)** Die Längen der Strecken kann man in den meisten Fällen direkt ablesen, denn die für die Flächenberechnung benötigten Streckenlängen liegen meist auf den Gitternetzlinien und sind damit Vielfache von 40 km.

b)



Fläche Bayerns (im Uhrzeigersinn von Unterfranken, Oberfranken und Mittelfranken, Oberpfalz, Niederbayern, Oberbayern, Schwaben):

$A = 800\,km^2 + 2400\,km^2 + 4000\,km^2 + 25\,600\,km^2 + 12\,400\,km^2 + 10\,400\,km^2$
$+ 6000\,km^2 + 3200\,km^2 + 2000\,km^2 + 1200\,km^2 + 1200\,km^2 + 800\,km^2$
$= 70\,000\,km^2$

c) Das Staatsgebiet Bayerns umfasst eine Fläche von $70\,550\,km^2$. Die Differenz zur Berechnung mithilfe der Unterteilung in Drei- und Vierecke beträgt $550\,km^2$, dies sind weniger als 1 % der tatsächlichen Fläche.

K2 **6** **a)** Durch Abschätzen kann man feststellen, dass immer zwei Gitter eine Achteckseite begrenzen.
Ein Gitter hat eine geschätzte Länge von 2,5 m. Insgesamt hat das Geländer um die Plattform eine geschätzte Länge von ca. 40 m.

b) Die Kanzel hat eine geschätzte Höhe von 5 m. Die Seitenlängen der Doppelfenster einer der Fronten sind zusammen geschätzt 3 m (an der Unterkante) und 4 m (an der Oberkante) lang. Eine der acht trapezförmigen Glasflächen hat eine Fläche von $A = \frac{3\,m + 4\,m}{2} \cdot 5\,m = 17{,}5\,m^2$. Die gesamte Glasfläche ist damit rund $8 \cdot 17{,}5\,m^2 = 140\,m^2$ groß.

K4 **7** **a)** $A = 8 \cdot A_{Trapez} = 8 \cdot \frac{4\,cm + 2\,cm}{2} \cdot 2{,}4\,cm = 57{,}6\,cm^2$

b) $A = 8 \cdot A_{Dreieck} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6{,}0\,cm \cdot 1{,}5\,cm = 36{,}0\,cm^2$

c) $A = 3 \cdot A_{Trapez} = 3 \cdot \frac{7{,}6\,cm + 5{,}3\,cm}{2} \cdot 2{,}0\,cm = 38{,}7\,cm^2$

K3 **8** Fläche des Stahlblechs:

$A_{gesamt} = 4 \cdot A_{Trapez} + A_{Quadrat}$
$= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1{,}5\,m + 0{,}4\,m) \cdot 0{,}75\,m + 0{,}4\,m \cdot 0{,}4\,m = 3{,}01\,m^2 \approx 3\,m^2$

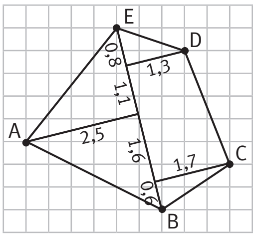
K3 **9** **a)** Da Lote auf die Standlinie gezogen werden, gibt es rechte Winkel, die die Berechnung vereinfachen.

$A = \frac{1}{2} \cdot (2{,}5\,m + 1{,}7\,m) \cdot 1{,}3\,m + \frac{1}{2} \cdot (1{,}3\,m + 4{,}1\,m) \cdot (2{,}2\,m + 1{,}3\,m) + \frac{1}{2} \cdot 3\,m \cdot 4{,}1\,m + \frac{1}{2} \cdot 2{,}5\,m \cdot 2{,}7\,m$

$+ \frac{1}{2} \cdot (2{,}7\,m + 3{,}3\,m) \cdot (1{,}7\,m + 2{,}2\,m) + \frac{1}{2} \cdot (1{,}3\,m + 3\,m) \cdot 3{,}3\,m$

$= 2{,}73\,m^2 + 9{,}45\,m^2 + 6{,}15\,m^2 + 3{,}375\,m^2 + 11{,}7\,m^2 + 7{,}095\,m^2 = 40{,}5\,m^2$

b)



$A = \frac{1}{2} \cdot (8\,m + 11\,m + 16\,m + 6\,m) \cdot 25\,m + \frac{1}{2} \cdot 8\,m \cdot 13\,m$

$+ \frac{1}{2} \cdot (13\,m + 17\,m) \cdot (11\,m + 16\,m) + \frac{1}{2} \cdot 6\,m \cdot 17\,m$

$= 512{,}5\,m^2 + 52\,m^2 + 405\,m^2 + 51\,m^2$

$= 1020{,}5\,m^2$

Abweichungen können durch Messunterschiede oder die Wahl verschiedener Standlinien entstehen.

K2 **10** **a)** Das gleichschenklige Dreieck kann auf unterschiedliche Weise konstruiert werden. Man kann zu einer gegebenen Strecke [AB] den Punkt C auf der Mittelsenkrechten von [AB] konstruieren. Alternativ bietet sich auch an, den Punkt A auf der (negativen) x-Achse zu definieren und den Punkt C auf der (positiven) y-Achse. Punkt B erhält man durch Spiegelung von A am Ursprung.

$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6\,cm \cdot 7\,cm = 21\,cm^2$

$\overline{AC} = \overline{BC} = 7{,}6\,cm$

$u_{ABC} = 2 \cdot 7{,}6\,cm + 6\,cm = 21{,}2\,cm$

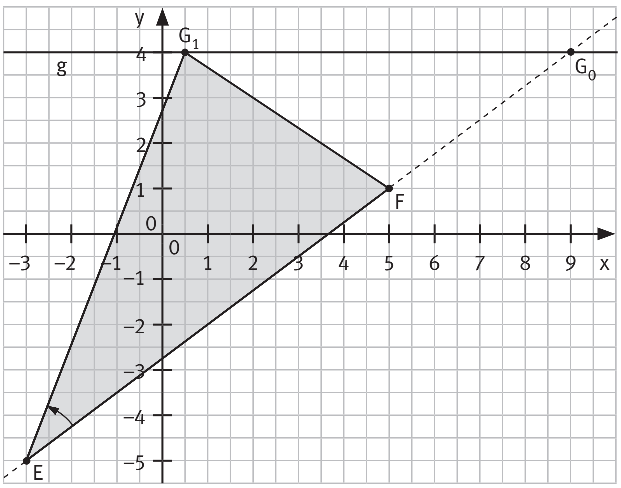
b) Das ursprüngliche Dreieck hat einen Umfang von 21,2 cm. Wenn die Höhe verdoppelt wird, dann ist der Umfang 34,6 cm, wenn die Höhe halbiert wird, ist der Umfang 15,2 cm. Beim Flächeninhalt verdoppelt sich die Fläche auf 42 cm², wenn die Höhe verdoppelt wird, und die Fläche wird halbiert auf 21 cm², wenn die Höhe halbiert wird.

c) Der Flächeninhalt verdoppelt sich bei Verdopplung der Grundseite, verdreifacht sich bei Verdreifachung der Grundseite und halbiert sich bei Halbierung der Grundseite.

d) Wenn die Grundseite und Höhe verdoppelt werden, vervierfacht sich der Flächeninhalt. Bei Verdreifachung der Grundseite und der Höhe verneunfacht sich der Flächeninhalt und bei Halbierung der zusammengehörigen Seiten wird der Flächeninhalt $\frac{1}{4}$ der ursprünglichen Fläche.

e) Ja, die Veränderungen bezüglich des Flächeninhalts gelten immer, unabhängig von der Form des Dreiecks. Man kann dies beispielsweise mit der Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks nachweisen.

K5 **11** **a)** und **c)**



a) $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EG_n} = \begin{pmatrix} x+3 \\ 9 \end{pmatrix}$

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 8 & x+3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}\,FE$

$= \frac{1}{2} \cdot (72 - 6x - 18)\,FE$

$= (-3x + 27)\,FE$

$(-3x + 27)\,FE = 25{,}5\,FE$

$\Leftrightarrow 1{,}5 = 3x$

$\Leftrightarrow x = 0{,}5$

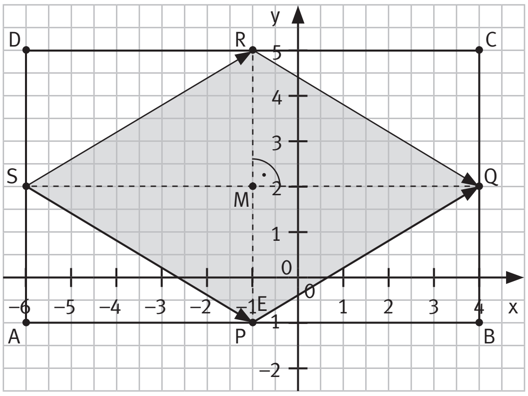
$\Rightarrow G_1\,(0{,}5 | 4)$

b) g: y = 4

c) Der Punkt G_0 muss der Schnittpunkt der Geraden EF und g: y = 4 sein.
Bestimmung von EF mit $m_{EF} = \frac{3}{4}$ durch Einsetzen von E oder F in $y = \frac{3}{4}x + b$ ergibt: $b = -2{,}75$.
Bestimmung von G_0 als Schnittpunkt von EF und g ergibt: $x = 9 \Rightarrow G_0\,(9|4)$.
Der Flächeninhalt von EFG_0 ist minimal mit A (9) = 0 FE, allerdings ist EFG_0 kein echtes Dreieck.

d) Der Flächeninhalt kann keinen größten Wert annehmen, da seine Gleichung linear ist und somit keinen Extremwert besitzt (je kleiner x wird, umso größer wird A (x)).

K 1 **12**



a) $P(-1|-1);\ Q(4|2);\ R(-1|5);\ S(-6|2)$

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

$\Rightarrow \overline{PQ} = \overline{SR}$ und $[PQ] \parallel [SR]$

$\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$

$\Rightarrow \overline{SP} = \overline{RQ}$ und $[SP] \parallel [RQ]$

$\Rightarrow$ PQRS ist ein Parallelogramm.

b) $M_{[SQ]} = M_{[PR]} = M\,(-1|2)$ und $[SQ] \perp [PR]$

c) $\overline{SQ} = 10$ LE und $\overline{PR} = 6$ LE. $A_{PQRS} = \frac{1}{2} \cdot 10\text{ LE} \cdot 6\text{ LE} = 30$ FE

d) Für ein beliebiges Rechteck ABCD gilt: $A_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$.
Das Viereck PQRS sei in ABCD so einbeschrieben, dass P, Q, R, S jeweils der Mittelpunkt einer Rechteckseite ist. Dann gilt mit $\overline{SQ} = \overline{AB}$ und $\overline{PR} = \overline{BC}$:
$A_{PQRS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SQ} \cdot \overline{PR} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD}$

K 5 **13** **a)** (Ohne Zeichnung)

b) $x \in [0; 6[$

c) Die beiden Dreiecke AE_nH_n und CG_nF_n bzw. die beiden Dreiecke BF_nE_n und DH_nG_n sind kongruent mit Flächeninhalt $A_A(x)$ und $A_B(x)$:

$A_A(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE_n} \cdot \overline{AH_n} = \frac{1}{2} \cdot x\,\text{cm} \cdot (6\,\text{cm} - x\,\text{cm})$

$A_B(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{BF_n} \cdot \overline{BE_n} = \frac{1}{2} \cdot x\,\text{cm} \cdot (10\,\text{cm} - x\,\text{cm})$

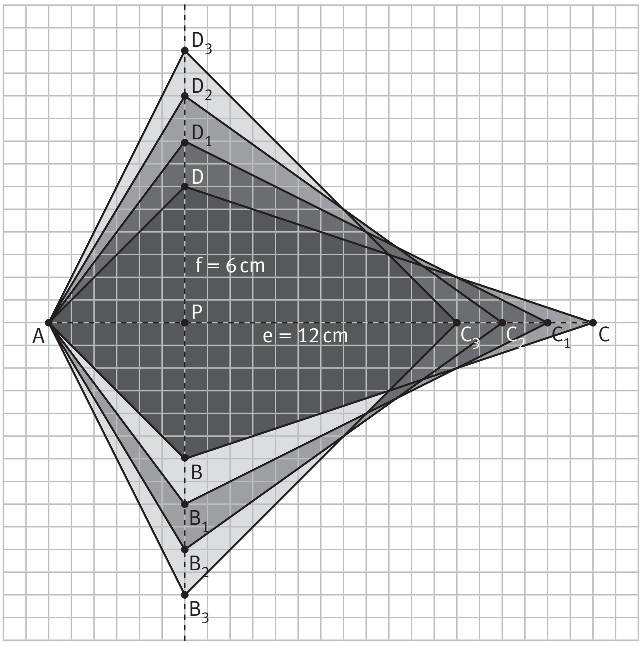
Für den Flächeninhalt A (x) des Parallelogramms $E_nF_nG_nH_n$ gilt:

$$\begin{aligned} A(x) &= A_{ABCD} - 2 \cdot A_A(x) - 2 \cdot A_B(x) \\ &= A_{ABCD} - 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \overline{AE_n} \cdot \overline{AH_n} - 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \overline{BF_n} \cdot \overline{BE_n} \\ &= 10\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} - x\,\text{cm} \cdot (6 - x)\,\text{cm} - x\,\text{cm} \cdot (10 - x)\,\text{cm} \\ &= (2x^2 - 16x + 60)\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

d) Quadratisches Ergänzen: $2x^2 - 16x + 60 = 2 \cdot (x - 4)^2 + 28 \Rightarrow A_{min} = 28\,\text{cm}^2$ für $x = 4$

e) $A(1{,}75) = (2 \cdot (1{,}75)^2 - 16 \cdot 1{,}75 + 60)\,\text{cm}^2 = 38{,}125\,\text{cm}^2$

K2 **14**



a) $A\ \ = 12\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 36\,\text{cm}^2$
$A_1 = 11\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 44\,\text{cm}^2$
$A_2 = 10\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 50\,\text{cm}^2$
$A_3 = \ \ 9\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = 54\,\text{cm}^2$

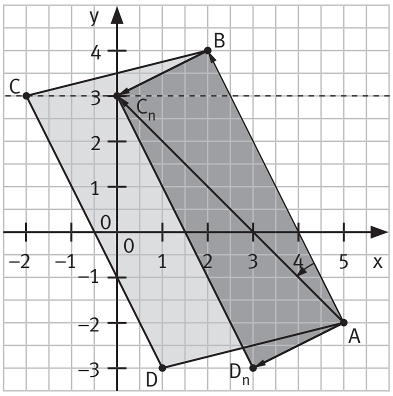
b) Bei $x = 9$ fallen C_n und P zusammen und $AB_nC_nD_n$ ist ein Dreieck mit C_n auf [BD]; für $x \in\ ]9; 12[$ ist $AB_nC_nD_n$ konkav. Damit $AB_nC_nD_n$ konvex ist, darf C_n nicht näher an A sein als P, d. h.: $x \in [0; 9[$.

c) $\overline{AC_n} = (12 - x)\,\text{cm}$, $\overline{PD_n} = (3 + x)\,\text{cm}$
$A(x) = (12 - x) \cdot (3 + x)\,\text{cm}^2$
$\quad = (-x^2 + 9x + 36)\,\text{cm}^2$

d) Quadratisches Ergänzen:
$-x^2 + 9x + 36 = -(x - 4{,}5)^2 + 56{,}25$
$\Rightarrow A_{max} = 56{,}25\,\text{cm}^2$ für $x = 4{,}5$
(mit e = 7,5 cm und f = 15 cm)

e) Man erhält eine Raute, wenn gilt:
$\overline{AP} = \overline{PC_n} = 3\,\text{cm}$
$\Leftrightarrow \overline{AC_n} = 6\,\text{cm} \Leftrightarrow 12\,\text{cm} - x\,\text{cm} = 6\,\text{cm}$
$\Rightarrow x = 6$ (e = 6 cm, f = 18 cm)

K5 **15**

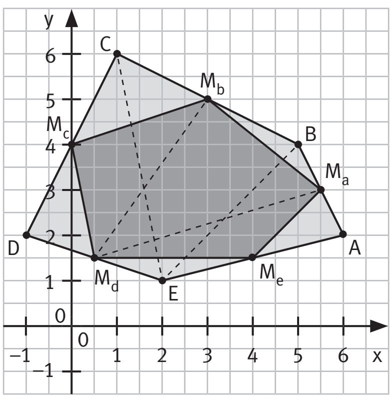


$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x - 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$A(x) = \begin{vmatrix} -3 & x - 5 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ FE
$\quad = (-3 \cdot 5)\ \text{FE} - 6 \cdot (x - 5)\ \text{FE}$
$\quad = (-6x + 15)\ \text{FE}$

$(-6x + 15)\ \text{FE} = 27\ \text{FE}$
$\Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow C(-2\,|\,3)$
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$
$\Rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - 5 \\ y_D + 2 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow x_D = 1,\ y_D = -3 \Rightarrow D(1\,|\,-3)$

K5 **16**



a) Es sind individuelle Zerlegungen in Dreiecke möglich, z. B. mit Anfangspunkt E:
$\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
$A_{ABCDE} = 4{,}5\ \text{FE} + 9\ \text{FE} + 7\ \text{FE} = 20{,}5\ \text{FE}$

b) $M_a(5{,}5\,|\,3)$; $M_b(3\,|\,5)$; $M_c(0\,|\,4)$; $M_d(0{,}5\,|\,1{,}5)$; $M_e(4\,|\,1{,}5)$

c) Berechnung des Flächeninhalts durch Zerlegung in Dreiecke, z. B. mit Anfangspunkt M_d:
$\overrightarrow{M_dM_e} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{M_dM_a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{M_dM_b} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{M_dM_c} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$
$A_{M_dM_eM_aM_bM_c} = 2{,}625\ \text{FE} + 6{,}875\ \text{FE} + 4\ \text{FE} = 13{,}5\ \text{FE}$

K5 **1** **a)** $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = 4\,cm^2$ **b)** $g = \frac{2 \cdot A}{h} = 6\,dm$ **c)** $h = \frac{2 \cdot A}{g} = 33\,mm$

K5 **2** $h_b = \frac{2 \cdot A}{b} = 4{,}5\,cm$

K5 **3**

	a	b	h_a	h_b	A
a)	5 cm	4 cm	3 cm	3,75 cm	15 cm^2
b)	3 dm	10,5 dm	7 dm	20 cm = 2 dm	21 dm^2
c)	8 m	8 m	5 m	5 m	40 m^2
d)	3 dm = 30 cm	12 cm	2 cm	5 cm	60 cm^2

K5 **4** $a = \overline{AB} = \overline{CD} = 9\,cm$, $h_a = 5\,cm \Rightarrow A = a \cdot h_a = 45\,cm^2$

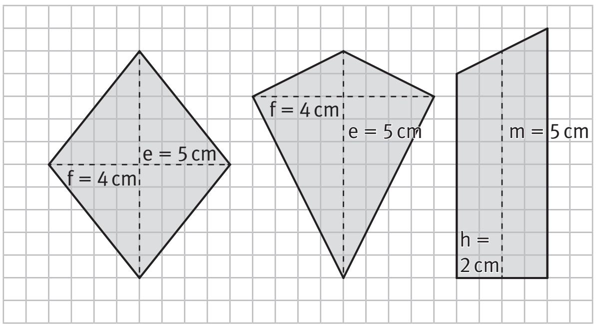
K5 **5**

	a	c	m	h	A
a)	5,6 cm	3 cm	4,3 cm	4 cm	17,2 cm^2
b)	12 cm	2 cm	7 cm	2 cm	14 cm^2
c)	1,4 cm	20,6 cm	11 cm	3,5 cm	38,5 cm^2
d)	z. B. 10 cm	z. B. 8 cm	9 cm	6,6 cm	59,4 cm^2

Aufgabe d) hat mehrere Möglichkeiten; es muss stets gelten: a + c = 18 cm.

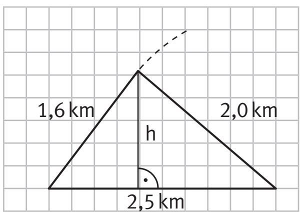
K5 **6** **a)** $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = 1500\,cm^2 = 15\,dm^2$ **b)** $e = \frac{2 \cdot A}{f} = 4\,cm$ **c)** $f = \frac{2 \cdot A}{e} = 1{,}8\,mm$

K5 **7** Es sind individuelle Lösungen möglich, z. B. mit $A = 10\,cm^2$:



Die einfachste und bequemste Lösung ist es, ein Quadrat zu zeichnen und dieses als Raute, als Drachenviereck und als Trapez zu betrachten.

K3 **8** **a)**



Beim Maßstab von 1 : 50 000 entspricht die Höhe h mit der gemessenen Länge von 2,6 cm 1,3 km in Wirklichkeit. Die Waldfläche beträgt damit $0{,}5 \cdot 2{,}5\,km \cdot 1{,}3\,km = 1{,}625\,km^2 \approx 160\,ha$.

b) Bei einer Fläche von 160 ha kostet die Aufforstung 1,28 Millionen €.

K5 **9** Wegen fehlender Längenangaben kann zu den Figuren 1, 4 und 5 der Umfang nicht berechnet werden.

1 **a)** $A = 1{,}5\,\text{cm} \cdot 7{,}3\,\text{cm} = 10{,}95\,\text{cm}^2$ **b)** –

2 **a)** $A = 32\,\text{m} \cdot 32\,\text{m} = 1024\,\text{m}^2$ **b)** $u = 4 \cdot 32\,\text{m} = 128\,\text{m}$

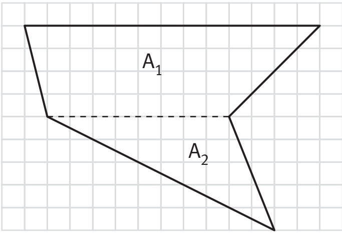
3 **a)** $A = \frac{38\,\text{dm} + 20\,\text{dm}}{2} \cdot 10{,}7\,\text{dm} = 310{,}3\,\text{dm}^2$ **b)** $u = 38\,\text{dm} + 14\,\text{dm} + 20\,\text{dm} + 14\,\text{dm} = 86\,\text{dm}$

4 **a)** $A = \frac{8{,}4\,\text{dm} + 11{,}2\,\text{dm}}{2} \cdot 5{,}5\,\text{dm} = 53{,}9\,\text{dm}^2$ **b)** –

5 **a)** $A = 2\,\text{cm} \cdot 2{,}5\,\text{cm} = 5\,\text{cm}^2$ **b)** –
Die Höhe muss zu einer bekannten Seite des Parallelogramms gewählt werden.

K5 **10** Es sind verschiedene Zerlegungen (oder auch Ergänzungen) möglich:

a) Zerlegung in Trapez (A_1) und Dreieck (A_2):

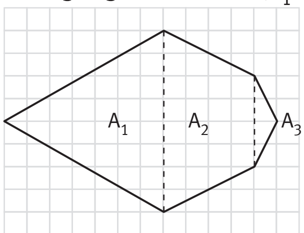


$A_1 = \frac{4\,\text{cm} + 6{,}5\,\text{cm}}{2} \cdot 2\,\text{cm} = 10{,}5\,\text{cm}^2$

$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 2{,}5\,\text{cm} = 5\,\text{cm}^2$

$A = A_1 + A_2 = 15{,}5\,\text{cm}^2$

b) Zerlegung in Dreiecke (A_1, A_3) und Trapez (A_2):



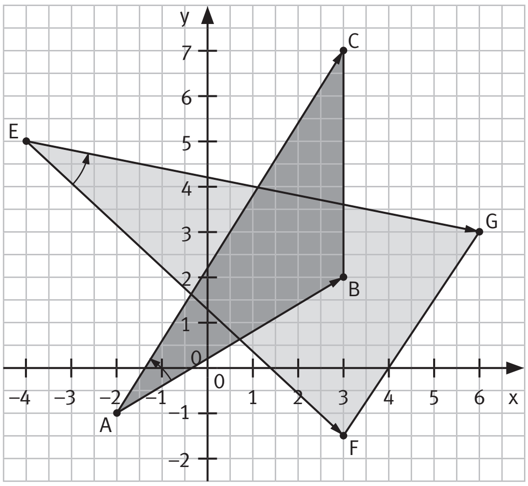
$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 3{,}5\,\text{cm} = 7\,\text{cm}^2$

$A_2 = \frac{4\,\text{cm} + 2\,\text{cm}}{2} \cdot 2\,\text{cm} = 6\,\text{cm}^2$

$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 2\,\text{cm} \cdot 0{,}5\,\text{cm} = 0{,}5\,\text{cm}^2$

$A = A_1 + A_2 + A_3 = 13{,}5\,\text{cm}^2$

K4 **11**



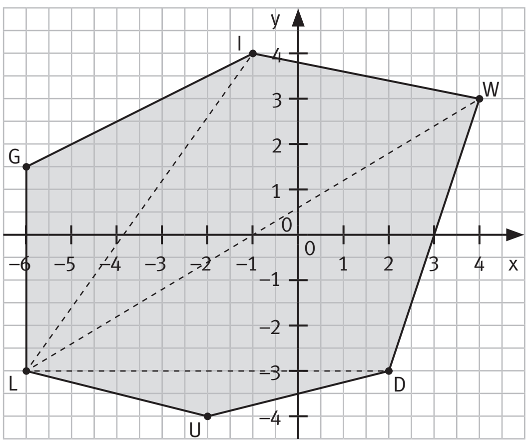
a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}\,\text{FE} = 12{,}5\,\text{FE}$

b) $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$

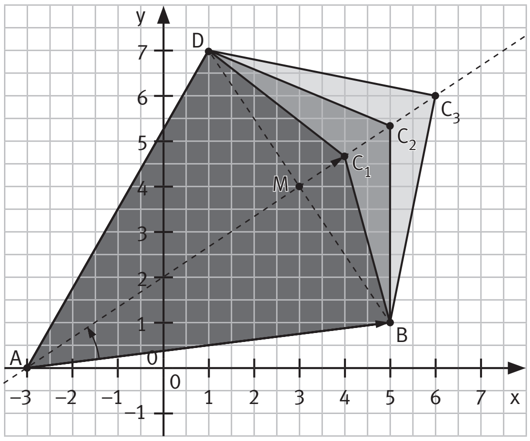
$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ -6{,}5 & -2 \end{vmatrix}\,\text{FE} = 25{,}5\,\text{FE}$

K4 **12** Es sind individuelle Zerlegungen möglich, z. B. mit L als Anfangspunkt:



$A_{LUDWIG} = A_{LUD} + A_{LDW} + A_{LWI} + A_{LIG}$
$= 4\,\text{FE} + 24\,\text{FE} + 20\,\text{FE} + 11{,}25\,\text{FE}$
$= 59{,}25\,\text{FE}$

K 5 **13**



a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x + 3 \\ \frac{2}{3}x + 2 \end{pmatrix}$

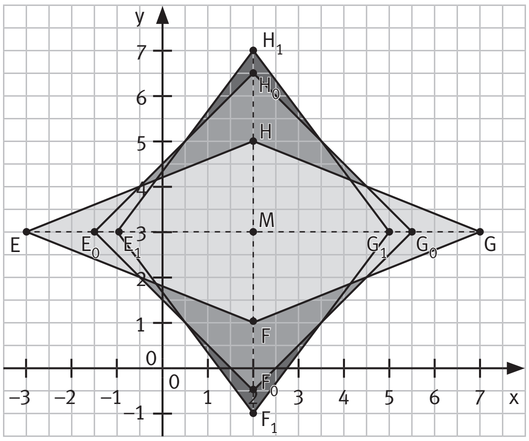
$A(x) = \begin{vmatrix} 8 & x + 3 \\ 1 & \frac{2}{3}x + 2 \end{vmatrix}$ FE

$= \left(\frac{13}{3}x + 13\right)$ FE

b) $M_{[BD]}(3|4)$

$\Rightarrow x > 3$, $A(x) > 26$ FE

K 5 **14 a)**



b) $A_{EFGH} = \frac{1}{2} \cdot 10$ LE $\cdot$ 4 LE = 20 FE

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (10 - 2x)$ LE $\cdot$ $(4 + 2x)$ LE

$= (-2x^2 + 6x + 20)$ FE

c) $M(2|3) \Rightarrow x \in [0; 5[$

d) $-2x^2 + 6x + 20 = -2(x - 1{,}5)^2 + 24{,}5$

$\Rightarrow A_{max} = 24{,}5$ FE für $x = 1{,}5$

K 1/6 **15** Die Aussage ist richtig für $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$.

K 1/6 **16** Die Aussage ist falsch. Damit $A = 0{,}5 \cdot a \cdot h = 15\,cm^2$ mit $a = 5$ cm erfüllt ist, ist $h = 3$ cm. Alle (unendlich viele) Punkte C und D auf der Parallele zu AB im Abstand 3 cm mit $\overline{CD} = 5$ cm ergeben ein entsprechendes Parallelogramm mit $A = 15\,cm^2$.

K 1/6 **17** Die Aussage ist falsch. Die Längen der Höhe und der beiden Grundseiten eines Trapezes können beliebig gewählt werden.

K 1/6 **18** Die Aussage ist richtig. Da die beiden Katheten senkrecht aufeinander stehen, können sie als Grundseite und zugehörige Höhe betrachtet werden.

K 1/6 **19** Die Aussage ist richtig. Das Parallelogramm lässt sich in ein flächengleiches Rechteck mit gleicher Grundlinie umformen, wobei die Höhe des Parallelogramms der Breite des Rechtecks entspricht.

K 1/6 **20** Die Aussage ist falsch. Der Flächeninhalt des Drachenvierecks berechnet sich: $A_D = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$.
Der Flächeninhalt des Rechtecks mit den gegebenen Maßen berechnet sich: $A_R = e \cdot f$.

K 1/6 **21** Die Aussage ist richtig. Die Höhe des Dreiecks entspricht dem Abstand des dritten Punktes zur Grundlinie des Dreiecks. Da die Gerade parallel zur Grundlinie verläuft, ist dieser Abstand stets gleich und damit auch die Höhe und der Flächeninhalt des Dreiecks.

K 1/6 **22** Die Aussage ist richtig. Werden die Vektoren mathematisch negativ in die Determinante eingetragen, so hat das Ergebnis zwar ein negatives Vorzeichen, der Betrag des Flächeninhalts bleibt aber gleich.

K5 **1** **a)** $x = 8$ **b)** $x < 3{,}2$ **c)** $x = 5$
d) $x = \frac{15}{68}$ **e)** $x < \frac{19}{85}$ **f)** $x = 9$

K5 **2** **a)** $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \left\{-\frac{8}{3}; 0\right\}$, $\mathbb{L} = \{-2\}$ **b)** $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 2\}$, $\mathbb{L} = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 2\}$ **c)** $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{2}{5}; 3\frac{1}{2}\right\}$, $\mathbb{L} = \emptyset$ **d)** $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{L} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

K3 **3** **a)**
Breite b:	$b = 5\,m$		
Flächeninhalt A:	$A = l \cdot b = l \cdot 5\,m \le 50\,m^2$	$\Rightarrow$	$l \le 10\,m$
Umfang u:	$u = 2l + 2b = 2l + 10\,m \ge 25\,m$	$\Rightarrow$	$l \ge 7{,}5\,m$
Länge l:	$7{,}5\,m \le l \le 10\,m$		

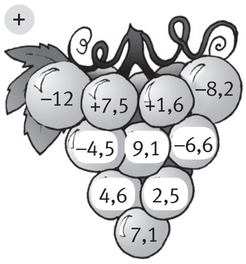
Das Gartenhäuschen muss zwischen 7,5 m und 10 m lang sein.

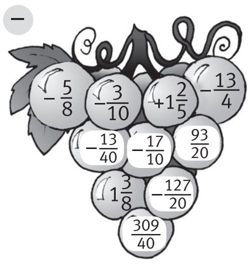
b)
Flächeninhalt A:	$A = l \cdot b \ge 36\,m^2$ mit $b \le l$	$\Rightarrow$	$l \ge 6\,m$, $b > 0\,m$
Umfang u:	$u = 2l + 2b \le 30\,m \Leftrightarrow l + b \le 15\,m$	$\Rightarrow$	$l < 15\,m$
Länge l:	$6\,m \le l < 15\,m$		
Breite b:	$0 < b \le 7{,}5\,m$		

Lösungspaare (l|b), u. a.: (6|6), (7|7), (7,5|7,5), (8|7), (9|6), (10|5), (11|4), (12|3)
Das Gartenhäuschen ist zwischen 6 m und 12 m lang und zwischen 3 m und 7,5 m breit.

K4 **4** **a)** $\mathbb{G} = \mathbb{N}$; $3x + 1 = 2x + 5 \Rightarrow x = 4$; $\mathbb{L} = \{4\}$ **b)** $\mathbb{G} = \mathbb{N}$; $2x + 8 = 5x + 2 \Rightarrow x = 2$; $\mathbb{L} = \{2\}$

K5 **5** Maries Taschengeld: x €
Nach der 1. Woche hat Marie noch $\frac{2}{3}$ ihres Taschengeldes, nach der 2. Woche $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ und nach der 3. Woche $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ ihres Taschengeldes; das sind 12 €.
$x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 12 \Leftrightarrow x \cdot \frac{8}{27} = 12 \Leftrightarrow x = 40{,}5$
Marie bekommt 40,50 € Taschengeld.

K5 **6** **a)**


b)


K5 **7** Es sind individuelle Lösungen möglich, z. B.:
a) positiv: $-8 + (-5) + 11 - (-24) = 22$
negativ: $-24 + (-8) + (-5) - 11 = -48$
b) möglichst groß: $(-24) \cdot (-8) \cdot 11 - (-5) = 2117$
möglichst klein: $(-24) \cdot (-8) \cdot 11 \cdot (-5) = -10\,560$
c) möglichst nahe bei 0: $-24 - (-8) + 11 - (-5) = 0$

K1 **8** **a)** richtig: 4 **b)** richtig: 3 **c)** richtig: 2, 3

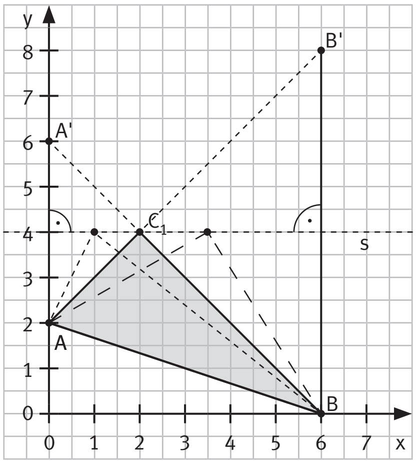
K5 **9** **a)** Alle Produkte ergeben den Wert 32 768.
b) Es sind individuelle Lösungen möglich, z. B.:
Man kann die Werte im Uhrzeigersinn um 90°, 180° oder 270° drehen oder mit einem bestimmten Faktor multiplizieren oder die Einträge der 1. und 3. Spalte oder der 1. und 3. Zeile vertauschen.

K5 **10** $\frac{x}{x - (-4)} = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow 5x = -3\,(x + 4) \Leftrightarrow 5x = -3x - 12 \Leftrightarrow 8x = -12 \Rightarrow x = -1{,}5$

K5 **11 a)** Die Aussage trifft nicht zu, da die Orientierung von Winkeln sich bei Achsenspiegelungen umdreht.
b) Die Aussage trifft nicht zu, da die Winkelmaße bei einer Achsenspiegelung erhalten bleiben.
c) Die Aussage trifft zu: Die beiden Winkel sind maßgleich, jedoch unterschiedlich orientiert.

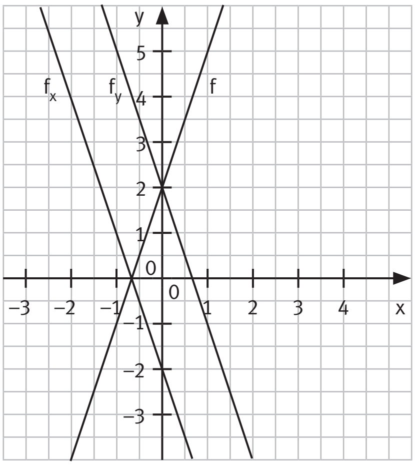
K1 **12** Die Gerade g_6 ist die Spiegelachse.

K4 **13**



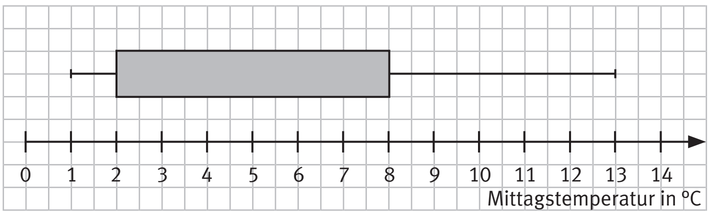
C_1 (2|4)
u = 6,3 cm + 5,7 cm + 2,8 cm = 14,8 cm

K5 **14**



f: y = 3x + 2
f_y: y = –3x + 2 (Achsenspiegelung an der y-Achse)
f_x: y = –3x – 2 (Achsenspiegelung an der x-Achse)

K3 **15 a)** Rangliste: 1 °C; 2 °C; 2 °C; 5 °C; 7 °C; 8 °C; 8 °C; 8 °C; 8 °C; 9 °C; 13 °C
Modalwert: 8 °C — Zentralwert: 8 °C — arithmetisches Mittel: $\frac{71}{11}$ °C ≈ 6,45 °C
Minimum: 1 °C — Maximum: 13 °C — Spannweite: 12 °C
b) unteres Quartil: 2 °C — oberes Quartil: 8 °C



K6 **16** Der Witz spielt darauf an, dass ein Durchschnittswert nicht immer sinnvolle Angaben liefert: Selbst wenn es dem Statistiker mit dem Kopf im Backofen und den Füßen in Eiswasser „im Durchschnitt“ gut geht, weil die Durchschnittstemperatur halbwegs „normal“ ist: Lange wird er so nicht leben.

K5 **17** $\frac{12 + 26 + 18 + 21 + 15 + 13 + 21 + 12 + 20 + x}{10} = 17 \quad \Leftrightarrow \quad x = 170 - 158 \quad \Leftrightarrow \quad x = 12$

K5 **18** arithmetisches Mittel: $\frac{346 + 321 + 256 + 432 + 127 + 245}{6} = \frac{1727}{6} \approx 287{,}83$
Über dem arithmetischen Mittel liegen die Werte 321, 346 und 432.

K1 **19** Aussage b) und Aussage d) sind richtig.
Aussage a) und Aussage c) sind falsch.

K6 **20** Zunächst wird man die kleinste Körpergröße festlegen, z. B. 169 cm. Daraus ergibt sich durch die gegebene Spannweite die zweite Körpergröße, hier 181 cm. Die dritte Körpergröße ergibt sich mithilfe des arithmetischen Mittels:

$(169\,\text{cm} + 181\,\text{cm} + x\,\text{cm}) : 3 = 174\,\text{cm} \Rightarrow x\,\text{cm} = (522 - 169 - 181)\,\text{cm} = 172\,\text{cm}$

Wenn man die erste Körpergröße ungünstig wählt, z. B. 172 cm, kann es sein, dass sich durch die dritte Größe die Spannweite ändert: Mit 172 cm und 184 cm als erster und zweiter Größe erhält man mithilfe des arithmetischen Mittels als dritte Größe $x\,\text{cm} = (522 - 172 - 184)\,\text{cm} = 166\,\text{cm}$. Die Spannweite zwischen dem kleinsten und größten Wert beträgt dann $(184 - 166)\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$. Es sind also nur wenige Lösungen möglich, wenn man die erste Körpergröße mit ganzen Zentimetern angibt.

1. Körpergröße	2. Körpergröße	3. Körpergröße	arithmetisches Mittel	Spannweite	Lösung
164 cm	176 cm	182 cm	174 cm	18 cm	nein
165 cm	177 cm	180 cm	174 cm	15 cm	nein
166 cm	178 cm	178 cm	174 cm	12 cm	ja
167 cm	179 cm	176 cm	174 cm	12 cm	ja
168 cm	180 cm	174 cm	174 cm	12 cm	ja
169 cm	181 cm	172 cm	174 cm	12 cm	ja
170 cm	182 cm	170 cm	174 cm	12 cm	ja
171 cm	183 cm	168 cm	174 cm	15 cm	nein
172 cm	184 cm	166 cm	174 cm	18 cm	nein

Die Körpergrößen der drei Personen könnten damit folgendermaßen ausfallen (in cm):
166-178-178; 167-176-179; 168-174-180; 169-172-181; 170-170-182.