Mit Hilfe der Aufwärmrunde soll möglichst präzise ermittelt werden, welche Inhalte bei den Lernenden noch verfügbar sind, wo auf fundiertes Wissen aufgebaut werden kann und was evtl. einer nochmaligen Grundlegung bedarf. Um eine gewisse Trennschärfe in dieser Lernstandserhebung zu erreichen, sind die Aufgaben differenziert gehalten: linke Spalte eher leichte Aufgaben, rechte Spalte dann schwierigere. Zudem wird für jede Aufgabennummer die angestrebte Kompetenz benannt. So kann diese Seite ein wichtiger Anhaltspunkt sein, um Lernende möglichst angemessen zu fördern.
Smileys sollen dazu anregen, eigene Fähigkeiten und Fertigkeiten allmählich selbst einzuschätzen. Eine aussagekräftige Analyse der Lernvoraussetzungen erhält die Lehrkraft, wenn sie die Ergebnisse mit dem Auswertungsbogen erfasst.

Diese Auswertung kann handschriftlich (K 1) bzw. bei click & teach auch in digitaler Form erfolgen.

L

1 Große und kleine Zahlen in Zehnerpotenzen darstellen

a) Ⓐ $91\,400 = 9{,}14 \cdot 10^4$
Ⓑ $4\,760\,000 = 4{,}76 \cdot 10^6$
Ⓒ $0{,}0007 = 7 \cdot 10^{-4}$
Ⓓ $0{,}00002087 = 2{,}087 \cdot 10^{-5}$

b) Ⓐ $7\,560 \cdot 100\,000 = 7{,}56 \cdot 10^8$
Ⓑ $158\,000 \cdot 1\,000 = 1{,}58 \cdot 10^8$
Ⓒ $0{,}00057 : 1\,000 = 5{,}7 \cdot 10^{-7}$
Ⓓ $0{,}009402 : 10\,000 = 9{,}402 \cdot 10^{-7}$

2 Zahlen mit Zehnerpotenzen vergleichen und ordnen

a) Ⓐ $0{,}0041 = 4{,}1 \cdot 10^{-3}$
Ⓑ $1\,000 - (-182) > 9 \cdot 10^2$
Ⓒ $3{,}05 \cdot 10^7 > 30\,050\,000$
Ⓓ $8 \cdot 10^{-3} > 0{,}00089$

b) Ⓐ $0{,}74 \cdot 10^{-2} = 7{,}4 \cdot 10^{-3}$
$0{,}074 = 7{,}4 \cdot 10^{-2}$
$740 \cdot 10^{-6} = 7{,}4 \cdot 10^{-4}$
$\Rightarrow 740 \cdot 10^{-6} < 0{,}74 \cdot 10^{-2} < 0{,}074$
Ⓑ $39\,000 = 3{,}9 \cdot 10^4$
$0{,}039 \cdot 10^7 = 3{,}9 \cdot 10^5$
$\Rightarrow 39\,000 < 3{,}9 \cdot 10^5 < 0{,}039 \cdot 10^7$
Ⓒ $0{,}000049 = 4{,}9 \cdot 10^{-5}$
$\Rightarrow 4{,}9 \cdot 10^{-6} < 4 \cdot 10^{-5} < 0{,}000049$
Ⓓ $23\,000 \cdot 10^{-1} = 2{,}3 \cdot 10^3$
$0{,}23 \cdot 10^6 = 2{,}3 \cdot 10^5$
$2\,030 = 2{,}03 \cdot 10^3$
$\Rightarrow 2\,030 < 23\,000 \cdot 10^{-1} < 0{,}23 \cdot 10^6$

3 Rechnen mit Zehnerpotenzen

a) Ⓐ $8 \cdot 10^4 \cdot 67 = 536 \cdot 10^4 = 5{,}36 \cdot 10^6$
Ⓑ $2{,}3 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}0025 = 5{,}75 \cdot 10^{-10}$
Ⓒ $5{,}18 \cdot 10^2 : 3{,}04 \approx 1{,}70 \cdot 10^2$

b) Ⓐ $0{,}49 \cdot 10^{-8} : 7^2 = 1{,}0 \cdot 10^{-10}$
Ⓑ $\sqrt{81} \cdot 10^4 \cdot 0{,}04 = 3{,}6 \cdot 10^3$
Ⓒ $\frac{7}{8} \cdot 10^{-5} : 0{,}025 = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$

4 Sachsituationen mit Zehnerpotenzen lösen

a) $500 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 2{,}628 \cdot 10^8$
Das Herz einer Maus schlägt ca. $2{,}628 \cdot 10^8$-mal pro Jahr.

b) $\frac{5\,800\,000}{2{,}8 \cdot 10^4} \approx 207$ (h) ≈ 9 (Tage)
Die Flugzeit beträgt etwa neun Tage.

5 Mit Quadraten und Quadratwurzeln von Zahlen rechnen

a) Ⓐ $12^2 = 144$
Ⓑ $-15^2 = -225$
Ⓒ $\sqrt{49} = 7$
Ⓓ $\sqrt{121} = 11$

b) Ⓐ $5^2 : \sqrt{100} = 25 : 10 = 2{,}5$
Ⓑ $8^2 - \sqrt{81} = 64 - 9 = 55$
Ⓒ $\sqrt{169} + 9^2 = 13 + 81 = 94$
Ⓓ $\sqrt{64} \cdot 4^2 = 8 \cdot 16 = 128$

Z

K 1

Auswertungsbogen zur Aufwärmrunde „Potenzen und Wurzeln“

Einsatzhinweis:
Siehe Erläuterung Lösungsband Seite 5

1 Potenzen und Wurzeln

Kompetenzerwartungen und Inhalte

M10 Lernbereich 1: Potenzen und Wurzeln

Die Schülerinnen und Schüler …

- nutzen die Potenzschreibweise als eine andere Darstellung für die Multiplikation mit gleichen Faktoren und stellen Potenzen mit beliebiger Basis dar. Bei der Beschreibung des Potenzierens verwenden sie Fachbegriffe (Potenz, Basis, Exponent).
- begründen ausgehend von geeigneten Zahlenbeispielen die Potenzgesetze und nutzen diese für einfache Termumformungen.
- stellen Brüche in Potenzschreibweise dar und übertragen die Potenzgesetze auf Terme, die auch negative Exponenten enthalten, um diese zu vereinfachen.
- erklären das Potenzieren und Radizieren als Umkehrung des jeweils anderen Vorgangs und verwenden den Begriff n-te Wurzel.
- wechseln zwischen der Wurzelschreibweise und der Potenzschreibweise mit Stammbrüchen und erläutern die mathematischen Zusammenhänge zwischen den Potenzgesetzen und Wurzelgesetzen mit eigenen Worten sowie geeigneten Fachbegriffen, um in der Sprache der Mathematik zu argumentieren.
- verwenden den Logarithmus, um Exponenten von Potenzen zu ermitteln.

Jedes neue Kapitel beginnt mit einer Bildaufgabe. Bildliche Darstellungen sind eher offen und engen weniger als textliche Vorgaben ein. So bieten sie die Möglichkeit, verschiedene Aspekte zu sehen, herauszugreifen und zu durchdenken. Vorgegebene Fragen bzw. Aufgaben zeigen dazu einen Weg auf. Mögliche eigene Fragestellungen der Lernenden können Inhalte weiter durchdringen und lassen zudem erkennen, inwieweit Lernende mit solch offenen Situationen umzugehen vermögen.

Einstieg

- **Ordne Vorsilbe, Zeichen und Zehnerpotenz einander jeweils passend zu.**

Vorsilbe	Zeichen	Zehnerpotenz
Giga-	G	10^{9}
Kilo-	k	10^{3}
Nano-	n	10^{-9}
Milli-	m	10^{-3}
Mikro-	μ	10^{-6}
Peta-	P	10^{15}
Tera-	T	10^{12}
Mega-	M	10^{6}

- **Ordne die Vorsilben der Größe nach. Beginne mit der kleinsten.**
  Nano-, Mikro-, Milli-, Kilo-, Mega-, Giga-, Tera-, Peta-
- **Finde Beispiele für solche Größen im Alltag. Recherchiere hierzu gegebenenfalls im Internet.**
  Es sind individuelle Beispiele möglich. Für Kilo-, Mega-, Giga-, Tera- und Peta- bieten sich Speicherkapazitäten als Beispiel an, bei Nano-, Mikro- und Milli- Längenangaben.

Ausblick

Hier werden kurz und kompetenzorientiert die Inhalte des nachfolgenden Kapitels aufgezeigt. Die Lernenden erhalten so bereits einen ersten Überblick über das, was sie auf den nächsten Seiten lernen.

Zehnerpotenzen wiederholen

Wiederholt werden die wichtigsten Regeln im Umgang mit Zehnerpotenzen. Besondere Beachtung sollte der Taschenrechneranzeige und der Schreibweise von Zehnerpotenzen gelten, da Lernende hier immer wieder Schwierigkeiten haben.

L

1 Wird eine Zahl mit einer Zehnerpotenz multipliziert, so wird das Komma bei einem positiven Exponenten nach rechts und bei einem negativen Exponenten nach links verschoben. Der Betrag des Exponenten gibt die Anzahl der Stellen an, um die das Komma verschoben wird.

2 a) $1{,}27 \cdot 10^{-6} = 0{,}00000127$ b) $4{,}4 \cdot 10^{3} = 4\,400$
c) $6{,}33 \cdot 10^{-10} = 0{,}000000000633$ d) $7{,}375 \cdot 10^{12} = 7\,375\,000\,000\,000$
e) $0{,}85 \cdot 10^{-2} = 0{,}0085$ f) $0{,}003 \cdot 10^{8} = 300\,000$
g) $0{,}37 \cdot 10^{10} = 3\,700\,000\,000$ h) $3{,}91 \cdot 10^{-5} = 0{,}0000391$

3 a) $5\,670\,000 = 5{,}67 \cdot 10^{6}$ b) $0{,}000675 = 6{,}75 \cdot 10^{-4}$
c) $18\,400\,000\,000 = 1{,}84 \cdot 10^{10}$ d) $0{,}00000077 = 7{,}7 \cdot 10^{-7}$
e) $80\,040\,000\,000 = 8{,}004 \cdot 10^{10}$ f) $0{,}00000049 = 4{,}9 \cdot 10^{-7}$
g) $510\,270\,000\,000 = 5{,}1027 \cdot 10^{11}$ h) $0{,}0000000978 = 9{,}78 \cdot 10^{-8}$

4 a) $8\,000 = 8 \cdot 10^{3}$ b) $9\,000\,000 = 9 \cdot 10^{6}$
c) $14\,000 = 1{,}4 \cdot 10^{4}$ d) $3\,000\,000\,000 = 3 \cdot 10^{9}$
e) $5\,000\,000\,000\,000 = 5 \cdot 10^{12}$ f) $40\,000\,000\,000\,000 = 4 \cdot 10^{13}$
g) $\frac{6}{100} = 0{,}06 = 6 \cdot 10^{-2}$ h) $\frac{2}{10} = 0{,}2 = 2 \cdot 10^{-1}$
i) $\frac{5}{1\,000} = 0{,}005 = 5 \cdot 10^{-3}$ j) $\frac{7}{1\,000\,000} = 0{,}000007 = 7 \cdot 10^{-6}$
k) $\frac{11}{1\,000\,000} = 0{,}000011 = 1{,}1 \cdot 10^{-5}$ l) $\frac{9}{1\,000\,000\,000} = 0{,}000000009 = 9 \cdot 10^{-9}$

5 a) $6{,}5 \cdot 10^{-11}$ b) $1{,}054 \cdot 10^{4}$ c) $2{,}7 \cdot 10^{-7}$
d) $4{,}09 \cdot 10^{-15}$ e) $1{,}4 \cdot 10^{0}$ f) $3{,}45 \cdot 10^{9}$
g) $7{,}07 \cdot 10^{14}$ h) $6{,}48 \cdot 10^{-18}$ i) $6{,}004 \cdot 10^{-7}$

6 a) $7{,}25 \cdot 10^{5} \cdot 300 = 2{,}175 \cdot 10^{8}$ b) $7{,}25 \cdot 10^{3} \cdot 30\,000 = 2{,}175 \cdot 10^{8}$
c) $72{,}5 \cdot 10^{4} \cdot 300 = 2{,}175 \cdot 10^{8}$ d) $7{,}25 \cdot 10^{7} \cdot 3 = 2{,}175 \cdot 10^{8}$
e) $72{,}5 \cdot 10^{8} \cdot 3 = 2{,}175 \cdot 10^{10}$ f) $725 \cdot 10^{4} \cdot 30 = 2{,}175 \cdot 10^{8}$
g) $0{,}725 \cdot 10^{9} \cdot 30 = 2{,}175 \cdot 10^{10}$ h) $0{,}725 \cdot 10^{5} \cdot 300 = 2{,}175 \cdot 10^{7}$
i) $72{,}5 \cdot 10^{5} \cdot 3\,000 = 2{,}175 \cdot 10^{10}$
Die Ergebnisse unterscheiden sich in der Standardschreibweise nur in der Zehnerpotenz. Berechnet wird jeweils $0{,}725 \cdot 3$, das Ergebnis wird mit der passenden Zehnerpotenz multipliziert.

7 a) $2{,}8 \cdot 10^{8} \cdot 450 = 1{,}26 \cdot 10^{11}$ b) $6{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 3\,200 = 2{,}08 \cdot 10^{-2}$
c) $3{,}18 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{10} = 6{,}36 \cdot 10^{2} = 636$ d) $5{,}23 \cdot 10^{8} \cdot 9 \cdot 10^{-6} = 4{,}707 \cdot 10^{3} = 4\,707$
e) $0{,}11 \cdot 10^{9} \cdot 7 \cdot 10^{-9} = 0{,}77$ f) $4{,}25 \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}9 \cdot 10^{12} = 8{,}075 \cdot 10^{5}$

8 a) $4 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{9} = 4 \cdot 2 = 8$ b) $6 \cdot 10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{10} = 6 \cdot 3 = 18$
c) $8 \cdot 10^{-12} \cdot 9 \cdot 10^{12} = 72$ d) $4 \cdot 10^{10} : (2 \cdot 10^{10}) = 4 : 2 = 2$
e) $8 \cdot 10^{-9} : (4 \cdot 10^{-9}) = 8 : 4 = 2$ f) $5 \cdot 10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{10} = 5 \cdot 3 = 15$

9 a) 1 B < 1 kB < 1 MB < 1 GB < 1 TB
b) SD-Karte: 128 GB; 512 GB; 2 TB USB-Stick: 128 GB; 512 GB; 2 TB
CD-Rom: 700 MB Externe Festplatte: 128 GB; 512 GB; 2 TB
c) $70\,000 \cdot 10^{3} \cdot 225 = 1{,}575 \cdot 10^{10}$ (B) = 15,75 (GB)
Der Speicherplatz reicht aus.
d) $1 \cdot 10^{12} : (25 \cdot 10^{9}) = 40$ Der Speicherplatz steigert sich um 3 900 %.
e) $32 \cdot 10^{9} : 175 \approx 182\,857\,143$ (Min.) ≈ 348 (Jahre)

10 a) Virus: kleiner als 0,0003 cm = $3 \cdot 10^{-4}$ cm
Bakterie: kleiner als 0,003 cm = $3 \cdot 10^{-3}$ cm
Einzeller: kleiner als 0,03 cm = $3 \cdot 10^{-2}$ cm
b) Herpesvirus: 180 nm = $1{,}8 \cdot 10^{-7}$ m
Tuberkelbazillus: 1 µm = $1 \cdot 10^{-6}$ m
Nierentierchen: 90 µm = $9 \cdot 10^{-5}$ m
c) $0{,}00005 : (0{,}02 \cdot 10^{-8}) = 250\,000$
Man müsste 250 000 Viren aneinanderreihen, um die Länge einer Bakterie zu erhalten.

11 a) $1{,}412 \cdot 10^{18} : (1{,}083 \cdot 10^{12}) \approx 1{,}30 \cdot 10^{6}$
Das Volumen der Sonne ist $1{,}30 \cdot 10^{6}$-mal größer als das der Erde.
$1{,}083 \cdot 10^{12} : (2{,}199 \cdot 10^{10}) \approx 49{,}2$
Das Volumen der Erde ist 49,2-mal so groß wie das des Mondes.
$1{,}99 \cdot 10^{27} : (5{,}98 \cdot 10^{21}) \approx 3{,}3 \cdot 10^{5}$
Die Masse der Sonne ist $3{,}3 \cdot 10^{5}$-mal so groß wie die der Erde.
$5{,}98 \cdot 10^{21} : (7{,}35 \cdot 10^{19}) \approx 81{,}4$
Die Masse der Erde ist 81,4-mal so groß wie die des Mondes.
$6{,}09 \cdot 10^{12} : (5{,}10 \cdot 10^{8}) \approx 1{,}2 \cdot 10^{4}$
Die Oberfläche der Sonne ist $1{,}2 \cdot 10^{4}$-mal so groß wie die der Erde.
$5{,}10 \cdot 10^{8} : (3{,}8 \cdot 10^{7}) \approx 13{,}4$
Die Oberfläche der Erde ist 13,4-mal so groß wie die des Mondes.
b) $5{,}10 \cdot 10^{8} \cdot 0{,}7 \approx 3{,}57 \cdot 10^{8}$ (km^2)
$5{,}10 \cdot 10^{8} \cdot 0{,}3 \approx 1{,}53 \cdot 10^{8}$ (km^2)
Die Erde hat etwa $3{,}57 \cdot 10^{8}$ km^2 Wasserfläche und $1{,}53 \cdot 10^{8}$ km^2 Landfläche.
c) zurückgelegte Strecke in einem Jahr: $9{,}4 \cdot 10^{8}$ km
zurückgelegte Strecke in einer Woche: $9{,}4 \cdot 10^{8} : 52 \approx 1{,}81 \cdot 10^{7}$ (km)
zurückgelegte Strecke in einer Stunde: $9{,}4 \cdot 10^{8} : 365 : 24 \approx 1{,}07 \cdot 10^{5}$
d) $1{,}496 \cdot 10^{8} : (3 \cdot 10^{5}) \approx 499$ (s) $\approx 8{,}3$ (Min.)
Das Licht braucht etwa 8,3 Minuten, um von der Sonne zur Erde zu gelangen.

Z

Kopfrechenübungen

K 2

Einsatzhinweis: Aufgaben in Präsentation oder unter Dokumentenkamera vorgeben

1. Schreibe die Zahlen mithilfe einer Zehnerpotenz. Achte auf die Standardschreibweise:
a) 3 000 b) 30 000 c) 300 000 d) 3 000 000 e) 0,2 f) 0,02

2. Notiere die Zahl:
a) $6 \cdot 10^{2}$ b) $5 \cdot 10^{3}$ c) $4 \cdot 10^{4}$ d) $2 \cdot 10^{5}$ e) $6 \cdot 10^{-2}$ f) $2 \cdot 10^{-3}$

Information

Das Byte ist die Standardeinheit, um die Größe von Speicherkapazitäten oder Datenmengen anzugeben. Ein Byte (= 8 Bit) entspricht in vielen Fällen dem zum Speichern eines einzelnen Buchstabens nötigen Platz. Die Speicherkapazität moderner Speichermedien liegt im Bereich einiger Milliarden Bytes. Deshalb werden größere Datenmengen üblicherweise zu größeren Einheiten zusammengefasst, indem man der Grundeinheit Byte Einheitenvorsätze voranstellt:

Symbol	übliche Umrechnung	exakte Umrechnung
Kilobyte	103 Byte = 1 000 Byte	210 Byte = 1 024 Byte
Megabyte	106 Byte = 1 000 000 Byte	220 Byte = 1 048 576 Byte
Gigabyte	109 Byte = 1 000 000 000 Byte	230 Byte = 1 073 741 824 Byte

Potenzen mit beliebiger Basis verstehen

Ausgehend von einem Beispiel aus dem NT-Unterricht (Kettenreaktion der Zellteilung) wird den Lernenden die enorme zahlenmäßige Zunahme (hier die Zahl der Zellen) vor Augen geführt. Bei der Potenzschreibweise handelt es sich um eine verkürzte Darstellung eines Faktorenprodukts. Fachbegriffe zur Potenz werden eingeführt.

Mithilfe der Regeln für negative Zahlen (hier Multiplikation) wird das Rechnen mit Potenzen mit negativer Basis erarbeitet. Entscheidend für den Wert der Potenz ist dabei, ob ein Exponent gerade oder ungerade ist. Lernende haben oft dann Probleme, wenn vor der Potenz mit negativer Basis ein Minuszeichen steht. Es gilt folgender Grundsatz: Zuerst die Potenz berechnen, dann auf das Rechenzeichen schauen (PoKlaPS-Regel: Potenz vor Klammer vor Punkt vor Strich).

L

1 a) Nach einer Stunde entstehen $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Bakterien.

b) $2^n > 1\,000$
Ausprobieren liefert $n \geq 10$.
Nach $10 \cdot 20$ Minuten oder 3 Stunden und 20 Minuten wird die Gesamtzahl der Bakterien größer als 1 000.

c)

Zellteilung	0	1	2	3	4	5
Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32
Produkt	1	2	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
Potenzdarstellung	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5

Zellteilung	6	7	8
Bakterienzahl	64	128	256
Produkt	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
Potenzdarstellung	2^6	2^7	2^8

Zellteilung	9	10
Bakterienzahl	512	1 024
Produkt	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
Potenzdarstellung	2^9	2^{10}

2 a) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$
b) $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 = 12^4$
c) $19 \cdot 19 \cdot 19 = 19^3$
d) $x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$
e) $y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = y^5$
f) $b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = b^5$
g) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$
h) $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{8}\right)^5$
i) $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{10}\right)^3$
j) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$
k) $\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} = \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^2$
l) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$

3 a) Man tippt zuerst die 3 ein, drückt dann die Potenztaste und gibt die 4 ein.
Als Ergebnis erhält man 81.

b)

4^3	5^4	3^5	2^6	10^7	7^3	$0{,}5^2$	$0{,}2^4$
64	625	243	64	10 000 000	343	0,25	0,0016

$0{,}3^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{9}\right)^5$	$\left(\frac{2}{5}\right)^5$	$\left(\frac{3}{4}\right)^4$
0,027	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{59\,049}$	$\frac{32}{3\,125}$	$\frac{81}{256}$

4 a)

Produkt	$(-3) \cdot (-3)$	$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$	$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$	$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$
Potenz	$(-3)^2$	$(-3)^3$	$(-3)^4$	$(-3)^5$
Potenzwert	9	–27	81	–243

b)

Produkt	$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$	$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$
Potenz	$(-3)^6$	$(-3)^7$
Potenzwert	729	–2 187

Produkt	$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$
Potenz	$(-3)^8$
Potenzwert	6 561

Produkt	$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$
Potenz	$(-3)^9$
Potenzwert	–19 683

Bei Potenzen mit geradem Exponenten ist der Wert der Potenz positiv, bei Potenzen mit ungeradem Exponenten negativ.

5 a) $(-2)^3 = -8$ b) $4^4 = 256$ c) $(-6)^3 = -216$
d) $(-2)^5 = -32$ e) $(-1)^7 = -1$ f) $(-10)^9 = -1\,000\,000\,000$
g) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$ h) $\left(-\frac{1}{3}\right)^5 = -\frac{1}{243}$ i) $\left(-\frac{1}{10}\right)^8 = \frac{1}{100\,000\,000}$
j) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$ k) $\left(-\frac{3}{10}\right)^4 = \frac{81}{10\,000}$ l) $\frac{1^4}{2} = \frac{1}{2}$

6 a) $(-1{,}3)^6 \approx 4{,}83$ b) $0{,}7^9 \approx 0{,}04$ c) $(-5{,}75)^7 \approx -207\,814{,}05$
d) $(-12{,}1)^8 \approx 459\,497\,298{,}6$ e) $23{,}3^5 \approx 6\,867\,198{,}56$ f) $(-1{,}15)^7 \approx -2{,}66$
g) $(-12{,}5)^3 \approx -1\,953{,}13$ h) $2{,}25^4 \approx 25{,}63$ i) $(-0{,}9)^3 \approx -0{,}73$
j) $(-7{,}7)^4 \approx -3\,515{,}30$ k) $(-5{,}3)^5 \approx -4\,181{,}95$ l) $0{,}6^4 \approx 0{,}13$

7 a) $3^3 = 27$ b) $3^4 = 81$ c) $2^6 = 64$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
e) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ f) $4^5 = 1024$ g) $3^6 = 729$ h) $5^4 = 625$
i) $\left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1}{10\,000}$ j) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$

8 a) $2^6 = 64$ b) $0{,}1^4 = 0{,}0001$ c) richtig d) richtig
e) $(-7)^2 = 49$ f) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ g) richtig h) richtig
i) $1^{14} = 1$ j) richtig

9 a) $-2^3 < 2^3$ b) $(-4)^4 > -4^4$ c) $-(-5)^2 < (-5)^2$
d) $-3^3 = (-3)^3$ e) $-6^2 = -(-6)^2$ f) $8^3 = -(-8)^3$

10 a) $5^2 < 2^5$ b) $3 \cdot 3 < 3^3$ c) $6 \cdot 2 < 6^2$ d) $2^4 > 4 \cdot 2$
e) $5^3 < 3^5$ f) $5^4 = 25^2$ g) $9^2 = 3^4$ h) $4^3 = 2^6$

11 a) $10^2 = 100$ b) $6^3 = 216$; $3^5 = 243$
c) $2^9 = 512$; $5^4 = 625$ d) $10^3 = 1\,000$
e) $2^{12} = 4\,096$; $3^8 = 6\,561$ f) $10^4 = 10\,000$
g) $10^5 = 100\,000$ h) $10^6 = 1\,000\,000$

Z

K 2

Kopfrechenübungen

Einsatzhinweis: Aufgaben in Präsentation oder unter Dokumentenkamera vorgeben

1. Bezeichnungen bei großen Zahlen:

Vorsilbe	Potenz	Beispiel
Deka-	10^1	6,7 dg = ______ g
Hekto-	10^2	3,5 hl = ______ l
Giga-	10^9	3,8 GB = ______ Byte
Mega-	10^6	2,9 MW = ______ W
Kilo-	10^3	7,09 kg = ______ g
Tera-	10^{12}	5,9 TB = ______ Byte

2. Bezeichnungen bei großen Zahlen:

Vorsilbe	Potenz	Beispiel
Dezi-	10^{-1}	5,2 dm = ______ m
Milli-	10^{-3}	3,8 mm = ______ m
Mikro-	10^{-6}	7,6 µm = ______ m
Piko-	10^{-12}	3,6 ps = ______ s
Zenti-	10^{-2}	5,36 cl = ______ l
Nano-	10^{-9}	8 ns = ______ s

K 2

Kopfrechenübungen

Einsatzhinweis: Aufgaben in Präsentation oder unter Dokumentenkamera vorgeben

1. Schreibe als Potenz:
   a) $3 \cdot 3 \cdot 3$ b) $7 \cdot 7$ c) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ d) $1 \cdot 1 \cdot 1$

2. Bestimme den Exponenten:
   a) $2^{■} = 32$ b) $5^{■} = 125$ c) $7^{■} = 49$ d) $3^{■} = 81$

3. Zerlege in möglichst viele gleiche Faktoren:
   a) 25 b) 625 c) 1 000 d) 144
   e) 64 f) 121 g) 169 h) 4 913

L

1 a) 1. Geburtstag: 0,02 € 5. Geburtstag: 0,32 € 10. Geburtstag: 10,24 €

b) $0{,}01 \cdot 2^{18} = 2\,621{,}44$ (€)

Von dem Geld, das sie zum 18. Geburtstag bekommt, könnte sie sich ein E-Bike für 2 500 € kaufen.

c) $0{,}01 \cdot 2^{30} = 10\,737\,418{,}24$ (€)

Der Vater kann sein Versprechen vermutlich nicht bis zum 30. Geburtstag seiner Tochter halten, denn ab dem 21. Lebensjahr fallen sehr hohe Summen an.

2 a) $2^{10} = 1\,024$ (Vorfahren) b) $2^{20} = 1\,048\,576$ (Vorfahren)

3 Es sitzt in jeder Ecke eine Katze, die einen Fressnapf vor sich hat. Insgesamt sind also vier Katzen und vier Fressnäpfe im Zimmer.

4 Wenn er dem Mann und den Frauen entgegengeht, geht eine Person nach St. Ives. Überholt er sie, gehen neun Personen nach St. Ives. Zählt man auch alle Säcke und Katzen mit, so überholt der Autor 2 801 Lebewesen und Gegenstände:

$$\underbrace{1}_{\text{man}} + \underbrace{7}_{\text{wives}} + \underbrace{7 \cdot 7}_{\text{sacks}} + \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}_{\text{cats}} + \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{\text{kits}} = 1 + 7 + 49 + 343 + 2\,401 = 2\,801$$

Insgesamt gehen also 2 801 Lebewesen und Gegenstände nach St. Ives.

5 a) Anzahl der halben Stunden von 8 Uhr bis 11 Uhr: $n = 6$

$3^6 = 729$ Um elf Uhr wissen 729 Personen vom Lottogewinn.

b) $2\,150 < 3^n$

Durch Ausprobieren erhält man: $n \geq 7$.

Um halb zwölf wissen alle Einwohner vom Gewinn.

Z

Die Türme von Hanoi

Eine Legende besagt, dass im Großen Tempel von Hanoi drei Diamantnadeln zu finden sind. Auf einer dieser Nadeln steckten bei Erschaffung der Welt 64 der Größe nach geordnete Scheiben. Die kleinste Scheibe ist oben. Priester schichten diesen Turm nun auf eine der anderen Diamantnadeln um. Dabei gelten folgende Regeln:

- Es darf immer nur eine Scheibe auf einmal bewegt werden.
- Eine größere Scheibe darf nie auf einer kleineren liegen.

Haben die Priester den gesamten Turm von 64 Scheiben umgeschichtet, so ist das Ende der Welt gekommen. Wird die Welt bald untergehen?

Online oder mithilfe von Papierscheiben, die auf Punkte gelegt werden, können die Schüler zunächst ausprobieren, wie viele Züge bei zwei, drei oder vier Scheiben nötig sind. Zusammen kann dann die allgemeingültige Formel $2^n - 1$ für n Scheiben erarbeitet werden.

Erklärung: Ein Turm mit zwei Scheiben kann mit drei Zügen umgesetzt werden. Bei einem Turm mit drei Scheiben, muss erst ein Turm mit zwei Scheiben (mittlere und kleine Scheibe) versetzt werden (drei Züge), bevor die große Scheibe umgelegt (ein Zug) und der Turm mit zwei Scheiben darauf versetzt werden kann (drei Züge). Insgesamt also $2^3 - 1 = 7$ Züge. Bei einem Turm mit vier Scheiben muss erst ein Turm mit drei Scheiben umgesetzt werden usw.

Für einen Turm aus 64 Scheiben sind dann $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \approx 1{,}845 \cdot 10^{19}$ Züge erforderlich. Wenn die Priester für einen Zug eine Sekunde bräuchten, wären sie etwa $5{,}849 \cdot 10^{11}$ oder 585 Milliarden Jahre beschäftigt.

Anhand von anschaulichen Beispielen sollen die Lernenden mittels dieser besonderen Seite eine Vorstellung davon bekommen, wie schnell Größen wachsen, wenn sie exponentiell anwachsen.

L

Ausgehend von einer Permanenzreihe mit Zweierpotenzen soll den Lernenden die Bedeutung von positiven und negativen Exponenten sowie der Null auch bei allgemeinen Potenzen klar werden. Dies ist für den Größenvergleich von Potenzen wichtig. Potenzen mit negativen Exponenten lassen sich zum besseren Verständnis als Bruch darstellen. Dieser kann häufig sehr leicht als Dezimalzahl geschrieben werden, was die Vorstellung vom Wert der Potenz erleichtert.

1 a) Von links nach rechts wird immer durch die Basis 2 dividiert. Daher nimmt der Exponent immer um 1 ab.

Zahl	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$
Produkt	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$
Potenz	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}

b)

Zahl	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
Produkt	$3\cdot3\cdot3$	$3\cdot3$	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$
Potenz	3^3	3^2	3^1	3^0	3^{-1}	3^{-2}	3^{-3}

Zahl	64	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$
Produkt	$4\cdot4\cdot4$	$4\cdot4$	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$
Potenz	4^3	4^2	4^1	4^0	4^{-1}	4^{-2}	4^{-3}

Zahl	125	25	5	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{125}$
Produkt	$5\cdot5\cdot5$	$5\cdot5$	5	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}$
Potenz	5^3	5^2	5^1	5^0	5^{-1}	5^{-2}	5^{-3}

2 Der Nenner des Bruches wird erst als Produkt und dann als Potenz geschrieben. Dann wird der Bruch als Potenz mit negativen Exponenten geschrieben.

a) $\frac{1}{16} = \frac{1}{2\cdot2\cdot2\cdot2} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$

b) $\frac{1}{27} = \frac{1}{3\cdot3\cdot3} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$

c) $\frac{1}{32} = \frac{1}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2} = \frac{1}{2^5} = 2^{-5}$

d) $\frac{1}{36} = \frac{1}{6\cdot6} = \frac{1}{6^2} = 6^{-2}$

e) $\frac{1}{81} = \frac{1}{3\cdot3\cdot3\cdot3} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$

f) $\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$

g) $\frac{1}{1\,000} = \frac{1}{10\cdot10\cdot10} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

h) $\frac{1}{625} = \frac{1}{5\cdot5\cdot5\cdot5} = \frac{1}{5^4} = 5^{-4}$

i) $\frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10\cdot10\cdot10\cdot10} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$

j) $\frac{1}{1\,000\,000} = \frac{1}{10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$

Die Potenz mit negativem Exponenten wird als Bruch geschrieben. Anschließend wird der Nenner des Bruchs ausmultipliziert.

k) $4^{-5} = \frac{1}{4^5} = \frac{1}{1\,024}$

l) $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

m) $2^{-10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1\,024}$

n) $6^{-5} = \frac{1}{6^5} = \frac{1}{7\,776}$

o) $7^{-1} = \frac{1}{7^1} = \frac{1}{7}$

p) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000}$

q) $9^{-4} = \frac{1}{9^4} = \frac{1}{6\,561}$

r) $12^{-2} = \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$

s) $100^{-4} = \frac{1}{100^4} = \frac{1}{100\,000\,000}$

t) $1\,000^{-2} = \frac{1}{1\,000^2} = \frac{1}{1\,000\,000}$

3 Eingabe passend zum Taschenrechner.

a) $2^{-3} \approx 0{,}13$ b) $0{,}6^{-6} \approx 21{,}43$ c) $0{,}7^{-4} \approx 4{,}16$ d) $0{,}8^{-5} \approx 3{,}05$

e) $9^{-1} \approx 0{,}11$ f) $5{,}6^{-2} \approx 0{,}03$ g) $0{,}4^{-8} \approx 1\,525{,}88$ h) $1{,}2^{-3} \approx 0{,}58$

i) $1{,}5^{-2} \approx 0{,}44$ j) $2{,}4^{-5} \approx 0{,}01$ k) $1{,}6^{-8} \approx 0{,}02$ l) $1{,}33^{-4} \approx 0{,}32$

4 a) $4^{-2} = 2^{-4}$ b) $5^{-3} > 3^{-5}$ c) $2^{-5} < 5^{-2}$ d) $3^{-3} > 4^{-4}$

e) $6^{-2} < 2^{-5}$ f) $5^{-4} = 25^{-2}$ g) $8^{-2} = 2^{-6}$ h) $9^{-3} < 3^{-5}$

i) $0{,}5^{-4} = 4^{2}$ j) $0{,}25^{-8} = 16^{4}$ k) $0{,}2^{-3} < 2^{-3}$ l) $0{,}1^{-4} < 1^{-3}$

5 a) $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ b) $\frac{1}{y^3} = y^{-3}$ c) $\frac{1}{x^6} = x^{-6}$ d) $\frac{1}{a^9} = a^{-9}$

e) $\frac{1}{z^4} = z^{-4}$ f) $\frac{1}{b^m} = b^{-m}$ g) $\frac{1}{c^n} = c^{-n}$

6 a) $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$ b) $0{,}125 = \frac{125}{1\,000} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

c) $0{,}008 = \frac{8}{1\,000} = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}$ d) $0{,}00032 = \frac{32}{100\,000} = \frac{1}{3\,125} = \frac{1}{5^5} = 5^{-5}$

e) $0{,}03125 = \frac{3\,125}{100\,000} = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} = 2^{-5}$ f) $0{,}0001 = \frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$

7

a)	$\frac{1}{64}$	2^{-6}; 4^{-3}; 8^{-2}
b)	$\frac{1}{256}$	2^{-8}; 4^{-4}; 16^{-2}
c)	$\frac{1}{512}$	2^{-9}; 8^{-3}
d)	$\frac{1}{1\,024}$	2^{-10}; 4^{-5}; 32^{-2}
e)	$\frac{1}{2\,048}$	2^{-11}
f)	$\frac{1}{81}$	3^{-4}; 9^{-2}
g)	$\frac{1}{729}$	3^{-6}; 9^{-3}; 27^{-2}
h)	$\frac{1}{625}$	5^{-4}; 25^{-2}
i)	$\frac{1}{1\,296}$	6^{-4}; 36^{-2}
j)	$\frac{1}{2\,401}$	7^{-4}; 49^{-2}

8 a) $0{,}25^{-2} = \frac{1}{0{,}25^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 4^2$

b) $0{,}125^{-5} = \frac{1}{0{,}125^5} = \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^5} = 8^5$

c) $0{,}008^{-2} = \frac{1}{0{,}008^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{125}\right)^2} = 125^2$

d) $0{,}03125^{-4} = \frac{1}{0{,}03125^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{32}\right)^4} = 32^4$

e) $0{,}0625^{-2} = \frac{1}{0{,}0625^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{16}\right)^4} = 16^4$

Übungsaufgaben zum Rechnen mit Potenzen lösen

Das algebraische Rechnen mit Potenzen führt zur Einsicht wichtiger Rechenregeln. Genaues konzentriertes Arbeiten ist hier eine wesentliche Grundlage des Erfolgs. Schrittweise erfolgt dann der Übergang zur Bearbeitung von Sachaufgaben mit Potenzen.

L

1 a) $7 \cdot x^2 + 11 \cdot x^2 = (7 + 11) \cdot x^2 = 18 \cdot x^2 = 18x^2$
$25m^3 - 14m^3 + 32m^2 = (25 - 14) \cdot m^3 + 32m^2 = 11 \cdot m^3 + 32m^2 = 11m^3 + 32m^2$
$13 \cdot a^3 - 5 \cdot a^3 = (13 - 5) \cdot a^3 = 8 \cdot a^3 = 8a^3$
$18n^4 + 34n^2 - 22n^5$ $\Rightarrow$ kann nicht zusammengefasst werden
$7 \cdot y^5 - 4 \cdot y^5 + 12 \cdot y^5 = (7 - 4 + 12) \cdot y^5 = 15 \cdot y^5 = 15y^5$

b) Potenzen mit gleicher Basis, aber unterschiedlichen Exponenten können nicht zusammengefasst werden.

c) Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten können addiert oder subtrahiert werden.

2 a) $5b^3 + 12b^3 + 8b^3 = (5 + 12 + 8) \cdot b^3 = 25b^3$
b) $14x^4 - 8x^4 + 20x^4 = (14 - 8 + 20) \cdot x^4 = 26x^4$
c) $45s^2 + 67s^2 - 109s^2 = (45 + 67 - 109) \cdot s^2 = 3s^2$
d) $12a^3 + 23b^3 - 6a^3 - 17b^3 = (12 - 6) \cdot a^3 + (23 - 17) \cdot b^3 = 6a^3 + 6b^3$
e) $125mn^3 + 245mn^3 = (125 + 245) \cdot mn^3 = 370mn^3$
f) $0{,}5y^8 - 0{,}45y^8 + 2y^8 = (0{,}5 - 0{,}45 + 2) \cdot y^8 = 2{,}05y^8$

3 a)

+	$4a^2$	$6b^2$	$15y^4$
$4b^2$	$4a^2 + 4b^2$	$10b^2$	$4b^2 + 15y^4$
$12y^2$	$4a^2 + 12y^2$	$6b^2 + 12y^2$	$12y^2 + 15y^4$
$16a^2$	$20a^2$	$16a^2 + 6b^2$	$16a^2 + 15y^4$

b)

−	$24a^3$	$22a^3 + 56x^2$	$78t^4 - 12x^2$
$67t^4$	$24a^3 - 67t^4$	$22a^3 + 56x^2 - 67t^4$	$11t^4 - 12x^2$
$43x^2$	$24a^3 - 43x^2$	$22a^3 + 13x^2$	$78t^4 - 55x^2$
$15a^3$	$9a^3$	$7a^3 + 56x^2$	$78t^4 - 12x^2 - 15a^3$

4 a) $3x^2 + 5y^2 - 2x^2 + 6y^2 + 5x^2 - 10y^2 = 6x^2 + y^2$
b) $10ab - 3a^2 + 7b^2 - 8ab + 4a^2 - 6b^2 = 2ab + a^2 + b^2$
c) $3{,}5c^3 - 4{,}2d^2 - 2cd - 1{,}8c^3 + 6{,}7d^2 = 1{,}7c^3 + 2{,}5d^2 - 2cd$
d) $9m^2n^3 - 8m^2 + 5n^3 - 2m^2 - m^2n^3 + 4n^3 = 8m^2n^3 - 10m^2 + 9n^3$

5 a) $3(x^2 + y^2) - 2x^2 + 4y^2 = 3x^2 + 3y^2 - 2x^2 + 4y^2 = x^2 + 7y^2$
b) $(a^3 - b^4) \cdot 7 - 2(a^3 + b^4) = 7a^3 - 7b^4 - 2a^3 - 2b^4 = 5a^3 - 9b^4$
c) $5(c^5 - d^6) - (c^5 + d^6) \cdot 4 = 5c^5 - 5d^6 - 4c^5 - 4d^6 = c^5 - 9d^6$
d) $6(s^2 - t^4) + 23s^2 - (s^2 + t^4) \cdot 25 + 27t^4 = 6s^2 - 6t^4 + 23s^2 - 25t^4 + 27t^4 = 4s^2 - 4t^4$
e) $(a^2 + b^2) \cdot 3x - 7x(a^2 - b^2) + 4a^2x = 3a^2x + 3b^2x - 7a^2 + 7b^2 + 4a^2x = 7a^2x + 3b^2x - 7a^2 + 7b^2$
f) $(c^5 - d^8) \cdot 21a^2 - (23a^2 - 18a^2) \cdot 4c^5 + 22a^2d^8 = 21a^2c^5 - 21a^2d^8 - 20a^2c^5 + 22a^2d^8$
$= a^2c^5 + a^2d^8$

6 a) $8^2 + 8^2 + 8^2 + 8^2 = 4 \cdot 8^2 = 4 \cdot 64 = 256$
b) $(-5)^4 + (-5)^4 + (-5)^4 + (-5)^4 = 4 \cdot (-5)^4 = 4 \cdot 625 = 2\,500$
c) $3^4 + 3^4 + 3^4 - 3^4 - 3^4 = 3^4 = 81$
d) $(-3)^6 + (-3)^6 - (-3)^6 - (-3)^6 = 0$
e) $5^{-2} + 5^{-2} + 5^{-2} + 5^{-2} = 4 \cdot 5^{-2} = 4 \cdot 0{,}04 = 0{,}16$
f) $7^4 - 8 \cdot 7^4 + 9 \cdot 7^4 = 2 \cdot 7^4 = 2 \cdot 2\,401 = 4\,802$
g) $6^3 + 6^3 - 6^3 + 6^3 + 6^3 = 3 \cdot 6^3 = 3 \cdot 216 = 648$
h) $(-2)^{-4} + (-2)^{-4} - (-2)^{-4} + (-2)^{-4} = 2 \cdot (-2)^{-4} = 2 \cdot 0{,}0625 = 0{,}125$

7 a) $(15 - 13)^2 = 2^2 = 4$

b) $(27 - 19)^3 - (6 - 3)^5 = 8^3 - 3^5 = 512 - 243 = 269$

c) $(11 + 23)^2 - (12 - 39)^2 = 34^2 - (-27)^2 = 1\,156 - 729 = 427$

d) $(21 - 13) \cdot 3^4 = 8 \cdot 81 = 648$

e) $5^3 \cdot (56 - 49) + 5^3 = 7 \cdot 5^3 + 5^3 = 8 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1\,000$

f) $2^{12} - (5^4 - 5^3) \cdot 2^3 = 4\,096 - 500 \cdot 8 = 4\,096 - 4\,000 = 96$

8 a) $(3 + 4)^2 = 7^2 = 49$
$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
$(3 + 4)^2 > 3^2 + 4^2$

b) $(19 - 13)^2 = 6^2 = 36$
$19^2 - 13^2 = 361 - 169 = 192$
$(19 - 13)^2 < 19^2 - 13^2$

c) $(14 - 7)^2 = 7^2 = 49$
$14^2 - 7^2 = 196 - 49 = 147$
$(14 - 7)^2 < 14^2 - 7^2$

d) $(10 - 5)^{-2} = 5^{-2} = 0{,}04$
$10^{-2} - 5^{-2} = 0{,}01 - 0{,}04 = -0{,}03$
$(10 - 5)^{-2} > 10^{-2} - 5^{-2}$

e) $11^2 + 10^2 = 121 + 100 = 221$
$(11 + 10)^2 = 21^2 = 441$
$11^2 + 10^2 < (11 + 10)^2$

f) $3 \cdot (8 - 4)^2 = 3 \cdot 4^2 = 3 \cdot 16 = 48$
$8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$
$3 \cdot (8 - 4)^2 = 8^2 - 4^2$

g) $(6 \cdot 6)^2 = 36^2 = 1\,296$
$6^2 \cdot 6^2 = 36 \cdot 36 = 1\,296$
$(6 \cdot 6)^2 = 6^2 \cdot 6^2$

h) $(2a \cdot 2)^3 = (4a)^3 = 64a^3$
$(2a)^3 \cdot 2^3 = 8a^3 \cdot 8 = 64a^3$
$(2a \cdot 2)^3 = (2a)^3 \cdot 2^3$

i) $(12 : 4)^3 = 3^3 = 27$
$12^3 : 4^3 = 1\,728 : 64 = 27$
$(12 : 4)^3 = 12^3 : 4^3$

9 a) $2^{20} = 1\,048\,576$ b) $3^{19} = 1\,162\,261\,467$ c) $8^4 = 4\,096$

10 a) $8\,000 = x^3 \Rightarrow x = 20$
b) $-27 = x^3 \Rightarrow x = -3$
c) $x^4 = 81 \Rightarrow x = 3$
d) $343 = x^3 \Rightarrow x = 7$
e) $x^5 = 1\,024 \Rightarrow x = 4$
f) $x^5 = 100\,000 \Rightarrow x = 10$
g) $1 = x^7 \Rightarrow x = 1$
h) $1\,331 = x^3 \Rightarrow x = 11$
i) $0 = x^7 \Rightarrow x = 0$
j) $-32 = x^5 \Rightarrow x = -2$

11 a) $\frac{3}{1\,000} = 3 \cdot \frac{1}{10^3} = 3 \cdot 10^{-3}$
b) $\frac{19}{10\,000} = 19 \cdot \frac{1}{10^4} = 19 \cdot 10^{-4}$
c) $\frac{78}{10\,000} = 78 \cdot \frac{1}{10^4} = 78 \cdot 10^{-4}$
d) $\frac{17}{100\,000} = 17 \cdot \frac{1}{10^5} = 17 \cdot 10^{-5}$
e) $\frac{361}{1\,000 \cdot 1\,000} = 361 \cdot \frac{1}{10^6} = 361 \cdot 10^{-6}$
f) $\frac{3 \cdot 7}{100 \cdot 1\,000} = 21 \cdot \frac{1}{10^5} = 21 \cdot 10^{-5}$

12 a) $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000}$

b) $7 \cdot 10^{-6} = \frac{7}{10^6} = \frac{7}{1\,000\,000}$

c) $2{,}3 \cdot 10^{-5} = \frac{23}{10 \cdot 10^5} = \frac{23}{1\,000\,000}$

d) $8{,}8 \cdot 10^{-7} = \frac{88}{10 \cdot 10^7} = \frac{88}{100\,000\,000} = \frac{1}{12\,500\,000}$

e) $3{,}82 \cdot 10^{-6} = \frac{382}{100 \cdot 10^6} = \frac{382}{100\,000\,000} = \frac{191}{50\,000\,000}$

f) $2{,}47 \cdot 10^{-4} = \frac{247}{100 \cdot 10^4} = \frac{247}{1\,000\,000}$

13 a) $5{,}1 \cdot 10^{14}\ m^2 = 5{,}1 \cdot 10^{12}\ a = 5{,}1 \cdot 10^{10}\ h = 5{,}1 \cdot 10^8\ km^2 = 510\,000\,000\ km^2$

b) $5{,}1 \cdot 10^8 \cdot 0{,}7 = 3{,}57 \cdot 10^8\ km^2$

14 a) $10^{-7} < 1$, da die Basis größer als 1 und der Exponent negativ ist.

b) $\left(\frac{1}{6}\right)^4 < 1$, da die Basis kleiner als 1 und der Exponent positiv ist.

c) $\frac{1}{9^2} < 1$, da der Nenner größer als der Zähler ist.

d) $0{,}5^{-5} > 1$, da die Basis kleiner als 1 und der Exponent negativ ist.

e) $(-2)^8 > 1$, da der Betrag der Basis größer als 1 und der Exponent gerade und positiv ist.

f) $(-20)^3 < 1$, da die Basis negativ und der Exponent ungerade ist.

g) $\frac{1}{8^{-2}} > 1$, da im Nenner eine Potenz mit negativem Exponenten steht.

h) $(-0{,}01)^{-7} < 1$, da die die Basis negativ und der Exponent ungerade ist.

15 Beispiele:

a) $3\,000\,000 < 3{,}05 \cdot 10^6 < 3\,100\,000$
b) $120\,000 < 1{,}205 \cdot 10^5 < 121\,000$
c) $55\,500 < 5{,}5525 \cdot 10^4 < 55\,550$
d) $0{,}000006 < 6{,}5 \cdot 10^{-6} < 0{,}000007$
e) $0{,}00055 < 5{,}55 \cdot 10^{-4} < 0{,}00056$
f) $0{,}0012 < 1{,}205 \cdot 10^{-3} < 0{,}00121$

16 a) $4{,}2^6 < 26{,}2^3$, da $4{,}2^6 = 17{,}64^3$
b) $0{,}18^9 < 1{,}7^6$, da $0{,}18^9 < 1$ und $1{,}7^6 > 1$
c) $4{,}9^4 \cdot 1{,}99^{-3} < 500$, da $1{,}99^{-3}$ sehr klein ist
d) $2{,}94^4 - 1{,}001^{99} < 10^2$, da $2{,}94^4 < 3^4 = 81$ und $1{,}001^{99}$ sehr nahe bei 1 ist

17

a) $2^x < 1000$	b) $3^x < 10\,000$	c) $1{,}5^x < 100$	d) $0{,}5^x > 0{,}001$	e) $0{,}25^x > 0{,}005$
$\Rightarrow x = 9$	$\Rightarrow x = 8$	$\Rightarrow x = 11$	$\Rightarrow x = 9$	$\Rightarrow x = 3$
f) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 89$	g) $7^x < 0{,}00001$	h) $1{,}001^x < 2$	i) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0{,}009$	j) $0{,}2^x > 575$
$\Rightarrow x = -7$	$\Rightarrow x = -6$	$\Rightarrow x = 693$	$\Rightarrow x = 4$	$\Rightarrow x = -4$

18 Temperaturunterschied: 30°C – (–15°C) = 45°C
Ausdehnung: $800 \cdot 45 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} = 0{,}432$ (m) = 43,2 (cm)
Die Brücke ist bei 30°C um 43,2 cm länger als bei –15°C.

19 $2 \cdot 10^{-3}$ mm $= 2 \cdot 10^{-4}$ cm
Volumen des Goldes: $18 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 36 \cdot 10^{-4}$ (cm^3)
Gewicht des Goldes: $36 \cdot 10^4 \cdot 19 = 0{,}0684$ (g)
Materialwert des Goldes: $0{,}0684 \cdot 55 = 3{,}76$ (€)

L

1 a) $5^4 \cdot 5^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^{4+3} = 5^7$

$8^7 \cdot 8^3 = (8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8) \cdot (8 \cdot 8 \cdot 8) = 8^{7+3} = 8^{10}$

$9^5 \cdot 9^4 = (9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9) \cdot (9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9) = 9^{5+4} = 9^9$

Multipliziert man Potenzen mit gleicher Basis, so bleibt die Basis stehen und die Exponenten werden addiert.

$7^6 : 7^2 = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7} = 7^{6-2} = 7^4$

$2^9 : 2^6 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^{9-6} = 2^3$

$6^6 : 6^5 = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = 6^{6-5} = 6$

Dividiert man Potenzen mit gleicher Basis, so bleibt die Basis stehen und die Exponenten werden subtrahiert.

b) A $2^3 \cdot 2^5 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{3+5} = 2^8$

B $4^4 \cdot 4^2 = (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4) = 4^{4+2} = 4^6$

C $5{,}5^2 \cdot 5{,}5^2 = (5{,}5 \cdot 5{,}5) \cdot (5{,}5 \cdot 5{,}5) = 5{,}5^{2+2} = 5{,}5^4$

D $0{,}3^3 \cdot 0{,}3^4 = (0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3) \cdot (0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3) = 0{,}3^{3+4} = 0{,}3^7$

E $8^9 : 8^6 = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8} = 8^{9-6} = 8^3$

F $7^{10} : 7^7 = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = 7^{10-7} = 7^3$

G $4{,}2^6 : 4{,}2^3 = \frac{4{,}2 \cdot 4{,}2 \cdot 4{,}2 \cdot 4{,}2 \cdot 4{,}2 \cdot 4{,}2}{4{,}2 \cdot 4{,}2 \cdot 4{,}2} = 4{,}2^{6-3} = 4{,}2^3$

H $0{,}7^5 : 0{,}7^3 = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7}{0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7} = 0{,}7^{5-3} = 0{,}7^2$

2 a) $2^{10} \cdot 2^{-3} = 2^{10+(-3)} = 2^7$
b) $5^5 \cdot 5^{-7} = 5^{5+(-7)} = 5^{-2}$
c) $4^{-7} \cdot 4^{-3} = 4^{-7+(-3)} = 4^{-10}$
d) $3^8 \cdot 3^{-8} = 3^{8+(-8)} = 3^0$
e) $15^9 : 15^7 = 15^{9-7} = 15^2$
f) $6^2 : 6^{-2} = 6^{2-(-2)} = 6^4$
g) $9^{-12} : 9^{10} = 9^{-12-10} = 9^{-22}$
h) $11^{-4} : 11^{-4} = 11^{-4-(-4)} = 11^0$

3 A, D, J, L und M haben das Ergebnis 6^2.
B, C, E, F, G, H, I, K und N haben das Ergebnis 6^{-2}.

4 a) $12b^3 : 4b^{-3} = (12 : 4) \cdot b^{3-(-3)} = 3 \cdot b^6 = 3b^6$
b) $21m^7 : 7m^6 = (21 : 7) \cdot m^{7-6} = 3 \cdot m = 3m$
c) $84u^{-12} : 12u^{-13} = (84 : 12) \cdot u^{-12-(-13)} = 7 \cdot u = 3u$
d) $27x^7 : 3x^{-3} = (27 : 3) \cdot x^{7-(-3)} = 9 \cdot x^{10} = 9x^{10}$
e) $51u^{-9} : 17u^{-6} = (51 : 17) \cdot u^{-9-(-6)} = 3 \cdot u^{-3} = 3u^{-3}$
f) $225b^{14} : 15b^{12} = (225 : 15) \cdot b^{14-12} = 15 \cdot b^2 = 15b^2$
g) $144x^2 : 12x^{-3} = (144 : 12) \cdot x^{2-(-3)} = 12 \cdot x^5 = 12x^5$
h) $4{,}5m^{-5} : 1{,}5m^{-10} = (4{,}5 : 1{,}5) \cdot m^{-5-(-10)} = 3 \cdot m^5 = 3m^5$

5 a) $5{,}5 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^2 = 5{,}5 \cdot 4 \cdot 10^{6+8} = 22 \cdot 10^{14} = 2{,}2 \cdot 10^{15}$
b) $6{,}2 \cdot 10^7 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-2} = 6{,}2 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{7-2} = 27{,}9 \cdot 10^5 = 2{,}79 \cdot 10^6$
c) $3{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5} \cdot 6{,}4 = 3{,}4 \cdot 6{,}4 \cdot 10^{-3-5} = 21{,}76 \cdot 10^{-8} = 2{,}176 \cdot 10^{-7}$
d) $10^{-3} \cdot 2{,}2 \cdot 5 \cdot 10^6 = 2{,}2 \cdot 5 \cdot 10^{-3+6} = 11 \cdot 10^3 = 1{,}1 \cdot 10^4$
e) $3{,}8 \cdot 10^7 : 2 : 10^4 = 3{,}8 : 2 \cdot 10^{7-4} = 1{,}9 \cdot 10^3$
f) $4{,}12 \cdot 10^7 : 2{,}06 : 10^{-3} = 4{,}12 : 2{,}06 \cdot 10^{7-(-3)} = 2 \cdot 10^{10}$

Mittels anschaulicher Beispiele werden die Rechenregeln für die Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis erarbeitet und eingeübt. Folgender Grundsatz gilt: Bei der Multiplikation werden die Exponenten addiert, bei der Division subtrahiert. Bei negativen Exponenten müssen die Vorzeichenregeln der Addition und Subtraktion beachtet werden.

6 a) $\frac{25a \cdot 30b^6}{15a^4 \cdot 5b^4} = 25a \cdot 30b^6 : 15a^4 : 5b^4 = 25 \cdot 30 : 15 : 5 \cdot a^{1-4} \cdot b^{6-4} = 10a^{-3}b^2$

b) $\frac{14x^7 \cdot 35y^{12} \cdot 15x^3}{7y^{10} \cdot 5x^8} = 14x^7 \cdot 35y^{12} \cdot 15x^3 : 7y^{10} : 5x^8 = 14 \cdot 35 \cdot 15 : 7 : 5 \cdot x^{7+3-8} \cdot y^{12-10}$

$= 210x^2y^2$

c) $\frac{81n^{18} \cdot 26m^6 \cdot 10{,}5m^7}{3{,}5m^{15} \cdot 3n^4 \cdot 243n^{15}} = 81n^{18} \cdot 26m^6 \cdot 10{,}5m^7 : 3{,}5m^{15} : 3n^4 : 243n^{15}$

$= 81 \cdot 26 \cdot 10{,}5 : 3{,}5 : 3 : 243 \cdot n^{18-4-15} \cdot m^{6+7-15} = \frac{26}{3}n^{-1}m^{-2}$

d) $\frac{169c^{21} \cdot 0{,}25d^{14} \cdot 12c^9}{13c^{25} \cdot 0{,}5d^6 \cdot 6d^2} = 169c^{21} \cdot 0{,}25d^{14} \cdot 12c^9 : 13c^{25} : 0{,}5d^6 : 6d^2$

$= 169 \cdot 0{,}25 \cdot 12 : 13 : 0{,}5 : 6 \cdot c^{21+9-13} \cdot d^{14-6-2} = 13c^{17}d^6$

e) $\frac{2{,}25s^{13} \cdot 0{,}5t^6 \cdot 14t^{-4}}{1{,}5t^{-6} \cdot 7s^4 \cdot s^9} = 2{,}25s^{13} \cdot 0{,}5t^6 \cdot 14t^{-4} : 1{,}5t^{-6} : 7s^4 : s^9$

$= 2{,}25 \cdot 0{,}5 \cdot 14 : 1{,}5 : 7 \cdot s^{13-4-9} \cdot t^{6-(-4)-(-6)} = 1{,}5t^{16}$

f) $\frac{39u^5 \cdot 16v^6 \cdot 25u^2}{13v^4 \cdot 5u^6 \cdot 16v^{-5}} = 39 \cdot 16 \cdot 25 : 13 : 5 : 16 \cdot u^{5+2-6} \cdot v^{6-4-(-5)} = 15uv^7$

7 a) $(3 : 4)^2 = 3^2 : 4^2$ b) $169^2 : 13^2 = (169 : 13)^2$ c) $(14 : 7)^2 = 14^2 : 7^2$

Z

K 2

Kopfrechenübungen

Einsatzhinweis: Aufgaben in Präsentation oder unter Dokumentenkamera vorgeben

1. Gib als Potenz mit negativem Exponenten an:

a) $\frac{1}{7} =$ b) $\frac{1}{16} =$ c) $\frac{1}{49} =$ d) $\frac{1}{100} =$

e) $\frac{1}{4^3} =$ f) $\frac{1}{8^3} =$ g) $\frac{1}{2^8} =$ h) $\frac{1}{10^6} =$

2. Notiere als Bruch:

a) $3^{-2} =$ b) $5^{-2} =$ c) $6^{-2} =$ d) $4^{-2} =$

e) $x^{-3} =$ f) $y^{-4} =$ g) $z^{-2} =$ h) $a^{-5} =$

L

1 a) Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert bzw. dividiert, indem man zuerst die Basen multipliziert bzw. dividiert. Der Exponent bleibt gleich.

b) Ⓐ $5^3 \cdot 2^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) = (5 \cdot 2)^3 = 10^3$

Ⓑ $3^2 \cdot 4^2 = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4) = (3 \cdot 4)^2 = 12^2$

Ⓒ $5^{-2} \cdot 3^{-2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}\right)^2 = 15^{-2}$

Ⓓ $4^7 \cdot 3^7 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
$= (4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 3) = (4 \cdot 3)^7 = 12^7$

Ⓔ $6^2 : 3^2 = \frac{6 \cdot 6}{3 \cdot 3} = \frac{6}{3} \cdot \frac{6}{3} = \left(\frac{6}{3}\right)^2 = (6 : 3)^2 = 2^2$

Ⓕ $4^9 : 8^9 = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{8} = \left(\frac{4}{8}\right)^9 = (4 : 8)^9 = \left(\frac{1}{2}\right)^9$

Ⓖ $9^{-4} : 6^{-4} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9} = \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{9} = \left(\frac{6}{9}\right)^4 = (6 : 9)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

Ⓗ $2^{-8} : 5^{-8} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \left(\frac{5}{2}\right)^8 = (5 : 2)^8 = \left(\frac{5}{2}\right)^8$

2 a) $3^4 \cdot 4^4 = (3 \cdot 4)^4 = 12^4$
b) $10^8 \cdot 0{,}3^8 = (10 \cdot 0{,}3)^8 = 3^8$
c) $0{,}25^5 \cdot 6^5 = (0{,}25 \cdot 6)^5 = 1{,}5^5$
d) $7^{-6} \cdot 3^{-6} = (7 \cdot 3)^{-6} = 21^{-6}$
e) $5{,}2^{-3} \cdot 4{,}5^{-3} = (5{,}2 \cdot 4{,}5)^{-3} = 23{,}4^{-3}$
f) $36^3 : 12^3 = (36 : 12)^3 = 3^3$
g) $10^7 : 5^7 = (10 : 5)^7 = 2^7$
h) $7{,}5^8 : 5^8 = (7{,}5 : 5)^8 = 1{,}5^8$
i) $36^{-4} : 4^{-4} = (36 : 4)^{-4} = 9^{-4}$
j) $7{,}2^{-5} : 3{,}6^{-5} = (7{,}2 : 3{,}6)^{-5} = 2^{-5}$
k) $12^4 : 4^4 = (12 : 4)^4 = 3^4$
l) $8{,}7^{-3} : 2{,}9^{-3} = (8{,}7 : 2{,}9)^{-3} = 3^{-3}$

3 a) $5^4 \cdot 2^4 = (5 \cdot 2)^4 = 10^4 = 10\,000$
b) $10^4 \cdot 0{,}01^4 = (10 \cdot 0{,}01)^4 = 0{,}1^4 = 0{,}0001$
c) $0{,}125^4 \cdot 8^4 = (0{,}125 \cdot 8)^4 = 1^4 = 1$
d) $3^3 \cdot 2^3 = (3 \cdot 2)^3 = 6^3 = 216$
e) $12{,}5^2 \cdot 8^2 = (12{,}5 \cdot 8)^2 = 100^2 = 10\,000$
f) $40^5 : 4^5 = (40 : 4)^5 = 10^5 = 100\,000$
g) $60^3 : 12^3 = (60 : 12)^3 = 5^3 = 125$
h) $4{,}2^6 : 2{,}1^6 = (4{,}2 : 2{,}1)^6 = 2^6 = 64$

4 Das Ergebnis aller Aufgaben ist 1, da das Produkt der Basen jeweils 1 ergibt.

5 a) $2^5 \cdot b^9 \cdot 3^5 \cdot b^{-8} = (2 \cdot 3)^5 \cdot b^{9-8} = 6^5 \cdot b = 7\,776b$
b) $x^3 \cdot 4^{-2} \cdot 5^{-2} \cdot x^6 = (4 \cdot 5)^{-2} \cdot x^{3+6} = 20^{-2} \cdot x^9 = 0{,}0025x^9$
c) $5^{-3} \cdot 3^5 \cdot 3^{-3} \cdot 5^5 = (5 \cdot 3)^{-3} \cdot (5 \cdot 3)^5 = (5 \cdot 3)^2 = 225$
d) $3^2 \cdot 7^{-11} \cdot 7^{12} \cdot 2^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 2 \cdot 5)^2 \cdot 7^{-11+12} = 30^2 \cdot 7 = 6\,300$
e) $a^6 \cdot 2^{14} \cdot 0{,}5^{14} \cdot a^{-4} = a^{6-4} \cdot (2 \cdot 0{,}5)^{14} = a^2 \cdot 1^{14} = a^2$
f) $2^4 \cdot 5^4 \cdot 2^{-6} \cdot 5^{-6} \cdot 10^2 = (2 \cdot 5)^{4-6} \cdot 100 = 10^{-2} \cdot 100 = 1$
g) $2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^{-3} \cdot 2^3 \cdot 2^{-3} = 2^3 \cdot (2 \cdot 2)^3 \cdot (2 \cdot 2)^{-3} = 2^3 = 8$
h) $9^{22} \cdot n^7 \cdot 9^{-18} \cdot m^7 \cdot 9^{-4} = 9^{22-18-4} \cdot (n \cdot m)^7 = n^7m^7$

6 a) $12x^3 : 4y^3 = (12 : 4) \cdot (x : y)^3 = 3 \cdot (x : y)^3$
b) $21s^7 : 7t^7 = (21 : 7) \cdot (s : t)^7 = 3 \cdot (s : t)^7$
c) $60u^{-12} : 12v^{-12} = (60 : 12) \cdot (u : v)^{-12} = 5 \cdot (u : v)^{-12}$
d) $(3^2 \cdot n^{-9}) : (3^{-2} \cdot m^{-9}) = (3^2 : 3^{-2}) \cdot (n : m)^{-9} = 3^4 \cdot (n : m)^{-9} = 81 \cdot (n : m)^{-9}$
e) $(15^2 \cdot r^5) : (5^2 \cdot r^4) = (15 : 5)^2 \cdot r^{5-4} = 3^2r = 9r$
f) $(12^2 \cdot x^2) : 12y^2 = 12^{2-1} \cdot (x : y)^2 = 12 \cdot (x : y)^2$
g) $(16^3 \cdot z^4) : (4^4 \cdot z^2) = (16^3 : 4^4)^2 \cdot z^{4-2} = 1z^2 = z^2$
h) $(2^{-3} \cdot x^8) : (4^{-2} \cdot x^{-3}) = (2^{-3} : 4^{-2}) \cdot x^{8-(-3)} = 2x^{11}$

Die Lernenden erkennen, dass Potenzen mit gleichem Exponenten multipliziert und dividiert werden können, indem man die Basen multipliziert bzw. dividiert. Sie üben dies an zahlreichen Beispielen ein.

7

Kantenlänge (cm)	90	60	30	20	18	10
Anzahl der Würfel	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$6^3 = 216$	$9^3 = 729$	$10^3 = 1\,000$	$18^3 = 5\,832$

Z

K 2

Kopfrechenübungen

Einsatzhinweis: Aufgaben in Präsentation oder unter Dokumentenkamera vorgeben

1. Vereinfache:

a) $2^3 \cdot 2^2 =$ b) $4^3 \cdot 4^2 =$ c) $5^2 \cdot 5^3 =$ d) $8^2 \cdot 8^2 =$
e) $3^4 \cdot 3^{-2} =$ f) $6^{-4} \cdot 6^3 =$ g) $7^{-2} \cdot 7^{-1} =$ h) $9^{-4} \cdot 9^{-2} =$

2. Vereinfache:

a) $2^8 : 2^4 =$ b) $5^6 : 5^5 =$ c) $3^6 \cdot 3^6 =$ d) $4^9 : 4^7 =$
e) $8^5 : 8^4 =$ f) $2^{-2} : 2^2 =$ g) $6^3 : 6^5 =$ h) $7^{-4} : 7^{-5} =$

L

1 a) $(2^4)^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^8$

$(4^{-2})^3 = \frac{1}{4 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4 \cdot 4} = \frac{1}{4^6} = 4^{-6}$

Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.

b) $(2^2)^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2^6$

$(4^4)^3 = (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) = 4^{12}$

$(6^3)^2 = (6 \cdot 6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) = 6^6$

$(1{,}2^5)^2 = (1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2) \cdot (1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2) = 1{,}2^{10}$

$(3^{-4})^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) = 3^{-8}$

$(9^{-2})^2 = \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}\right) = 9^{-4}$

$(10^{-5})^3 = \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}\right) = 10^{-15}$

$(2{,}6^{-3})^3 = \left(\frac{1}{2{,}6} \cdot \frac{1}{2{,}6} \cdot \frac{1}{2{,}6}\right) \cdot \left(\frac{1}{2{,}6} \cdot \frac{1}{2{,}6} \cdot \frac{1}{2{,}6}\right) \cdot \left(\frac{1}{2{,}6} \cdot \frac{1}{2{,}6} \cdot \frac{1}{2{,}6}\right) = 2{,}6^{-9}$

2 a) $(2^2)^3 = 2^6 = 64$ b) $(2^3)^4 = 2^{12} = 4\,096$

c) $(2^3)^{-4} = 2^{-12} = \frac{1}{4\,096}$ d) $(4^3)^{-3} = 4^{-9} = \frac{1}{262\,144}$

e) $(7^{-3})^{-2} = 7^6 = 117\,649$ f) $(2^{-3})^4 = 2^{-12} = \frac{1}{4\,096}$

g) $(9^{-2})^{-2} = 9^4 = 6\,561$ h) $(3^3)^4 = 3^{12} = 531\,441$

i) $(1{,}5^2)^{-2} = 1{,}5^{-4} = \frac{16}{81}$ j) $(2{,}8^{-3})^{-5} = 2{,}8^{15} = 5\,097\,655{,}355$

3 a) $(5^3)^6 = 5^{18}$ b) $(3^{-2})^{-4} = 3^8$ c) $(10^2)^{-3} = 10^{-6}$ d) $(9^{-3})^4 = 9^{-12}$

e) $(6^{-4})^2 = 6^{-8}$ f) $7^{10} = (7^2)^5$ g) $(4^2)^{-3} = 4^{-6}$ h) $(8^{-4})^2 = 8^{-8}$

4 a) $(2 \cdot 10^3)^2 = 2^2 \cdot 10^{3 \cdot 2} = 4 \cdot 10^6$

b) $(0{,}5 \cdot 10^2)^4 = 0{,}5^4 \cdot 10^{2 \cdot 4} = 0{,}0625 \cdot 10^8 = 6{,}25 \cdot 10^6$

c) $(1{,}3 \cdot 10^{-2})^3 = 1{,}3^3 \cdot 10^{(-2) \cdot 3} = 2{,}197 \cdot 10^{-6}$

d) $(9{,}8 \cdot 10^3)^{-4} = 9{,}8^{-4} \cdot 10^{3 \cdot (-4)} \approx 1{,}08 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-12} = 1{,}08 \cdot 10^{-16}$

e) $(0{,}06 \cdot 10^{-3})^{-2} = 0{,}06^{-2} \cdot 10^{(-3) \cdot (-2)} \approx 277{,}8 \cdot 10^6 = 2{,}778 \cdot 10^8$

f) $(1{,}7 \cdot 10^{-4})^{-2} = 1{,}7^{-2} \cdot 10^{(-4) \cdot (-2)} \approx 0{,}35 \cdot 10^8 = 3{,}5 \cdot 10^7$

g) $(0{,}002 \cdot 10^4)^4 = 0{,}002^4 \cdot 10^{4 \cdot 4} = 1{,}6 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{16} = 1{,}6 \cdot 10^5$

h) $(4{,}2 \cdot 10^{-3})^{-2} = 4{,}2^{-2} \cdot 10^{(-3) \cdot (-2)} \approx 0{,}057 \cdot 10^6 = 5{,}7 \cdot 10^4$

i) $(1{,}1 \cdot 10^6)^{-2} = 1{,}1^{-2} \cdot 10^{-12} \approx 0{,}826 \cdot 10^{-12} = 8{,}26 \cdot 10^{-13}$

j) $(2{,}07 \cdot 10^{-3})^{-3} = 2{,}07^{-3} \cdot 10^{(-3) \cdot (-3)} \approx 0{,}113 \cdot 10^9 = 1{,}13 \cdot 10^8$

k) $(5{,}8 \cdot 10^6)^{-4} = 5{,}8^{-4} \cdot 10^{6 \cdot (-4)} \approx 8{,}84 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-24} = 8{,}84 \cdot 10^{-28}$

l) $(0{,}1 \cdot 10^{-5})^5 = 0{,}1^5 \cdot 10^{(-5) \cdot 5} = 1 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-25} = 1 \cdot 10^{-30}$

5 a) $x \cdot 5^3 = 15^3 \quad | : 5^3$

$x = 15^3 : 5^3$

$x = 3^3 = 27$

b) $9^5 : x = 3^5 \quad | \cdot x : 3^5$

$9^5 : 3^5 = x$

$3^5 = 243 = x$

6 a) $4^7 = (2^2)^7 = 2^{14} = 16\,384$ b) $36^4 = (6^2)^4 = 6^8 = 1\,679\,616$

c) $25^{-3} = (5^2)^{-3} = 5^{-6} = 6{,}4 \cdot 10^{-5}$ d) $64^{-4} = (2^6)^{-4} = 2^{-24} \approx 5{,}96 \cdot 10^{-8}$

e) $125^2 = (5^3)^2 = 5^6 = 15\,625$ f) $16^7 = (2^4)^7 = 2^{28} = 268\,435\,456$

g) $0{,}49^5 = (0{,}7^2)^5 = 0{,}7^{10} \approx 0{,}028$ h) $3{,}24^{-4} = (1{,}8^2)^{-4} = 1{,}8^{-8} = 0{,}00907$

i) $1\,000^{-4} = (10^3)^{-4} = 10^{-12}$ j) $900^3 = (30^2)^3 = 30^6 = 729\,000\,000$

Eine Ausweitung stellt das Potenzieren von Potenzen dar. Aus der Faktorenproduktdarstellung ergibt sich die Rechenregel: Exponenten werden multipliziert.

7 a) $(10^{-3})^{-3} = 10^9$
$(2^{-2})^{-2} = 2^4$
b) $4^4 \cdot 4^{-3} = 4$
$5^{-4} \cdot 5^3 = 5^{-1}$
c) $5^3 : 5^5 = 5^{-2}$
$8^{-2} : 4^{-2} = 2^{-2}$
d) $100^{-4} \cdot 0{,}1^{-4} = 10^{-4}$
$0{,}01^{-2} : 10^{-2} = 10^{-6}$
e) $(10^{-2})^3 = 10^{-6}$
$(0{,}1^{-4})^2 = 10^{-8}$

8 a) $(x^{-2})^4 = x^{-8}$ b) $(y^7)^{-7} = y^{-49}$ c) $(x^{-2})^{-1} = x^2$ d) $(y^{-4})^2 = y^{-8}$
e) $a^{-2} \cdot a^3 = a$ f) $x^2 : x^{-5} = x^7$ g) $y^{-2} \cdot y^{-4} = y^{-6}$ h) $a^{-11} : b^{-11} = (a : b)^{-11}$
i) $x^{-4} \cdot y^{-4} = (xy)^{-4}$ j) $a^{-2} : b^{-2} = (a : b)^{-2}$

9 a) $(x^4 \cdot y^3)^2 = x^8y^6$ b) $(a^2 \cdot b^2 \cdot c^2)^2 = a^4b^4c^4$
c) $(3 \cdot x^2 \cdot b)^3 = 27x^6b^3$ d) $(2x^2 \cdot 3y^3 \cdot 4z^4)^2 = 576x^4y^6z^8$

Z

K 2

Kopfrechenübung

Einsatzhinweis: Aufgaben in Präsentation oder unter Dokumentenkamera vorgeben

Vereinfache und berechne im Kopf:

a) $2^4 \cdot 5^4 =$ b) $4^2 \cdot 5^2 =$ c) $2^3 \cdot 10^3 =$
d) $6^4 \cdot 3^4 =$ e) $28^2 : 7^2 =$ f) $16^3 : 4^3 =$

L

1 a) $a^3 = 512 \quad |\sqrt[3]{\ }$
$a = 8$ (cm)
b) $a^3 = 3 \cdot 512 \quad |\sqrt[3]{\ }$
$a \approx 11{,}54$ (cm)
c) Möglich sind alle Kantenlängen, die als Produkt 512 cm^3 ergeben.
Beispiel : a = 4 cm; b = 16 cm; c = 8 cm

2 Individuelle Lösungen. Zuerst müssen die Tage berechnet werden, die seit der Geburt vergangen sind, diese Zahl wird dann mit $4{,}06 \cdot 10^{-4}$ multipliziert. Man erhält das Ergebnis in Metern.

3 Mars: $(4 \cdot 10^8) : 300\,000 \approx 1\,333{,}3$ (s) $\approx 22{,}2$ (min)
Saturn: $(1{,}658 \cdot 10^9) : 300\,000 \approx 5\,526{,}7$ (s) $\approx 92{,}1$ (min)
Jupiter: $(9{,}67 \cdot 10^8) : 300\,000 \approx 3\,223{,}3$ (s) $\approx 53{,}7$ (min)

4 a) Länge nach einem Monat: $2{,}7 \cdot 10^{-4} \cdot 30 = 8{,}1 \cdot 10^{-3}$ (mm)
Länge nach einem Jahr: $2{,}7 \cdot 10^{-4} \cdot 365 \approx 0{,}099$ (mm)
Länge nach 100 Jahren: $2{,}7 \cdot 10^{-4} \cdot 365 \cdot 100 \approx 9{,}86$ (mm)
b) 0,507 m = 507 mm
$507 : (2{,}7 \cdot 10^{-4}) \approx 1{,}88 \cdot 10^6$ (Tage) $\approx 5\,145$ (Jahre)
Ein 0,507 m langer Tropfstein ist etwa 5 145 Jahre alt.
5,37 m = 5 370 mm
$5\,370 : (2{,}7 \cdot 10^{-4}) \approx 1{,}99 \cdot 10^7$ (Tage) $\approx 54\,490$ (Jahre)
Ein 5,37 m langer Tropfstein ist etwa 54 490 Jahre alt.
11,5 m = 11 500 mm
$11\,500 : (2{,}7 \cdot 10^{-4}) \approx 4{,}26 \cdot 10^7$ (Tage) $\approx 116\,692$ (Jahre)
Ein 11,5 m langer Tropfstein ist etwa 116 692 Jahre alt.

5 a) 6; 3; 5 :
Größte Zahl: $3^{(2^6)} = 3^{64} \approx 3{,}43 \cdot 10^{30}$
Kleinste Zahl: $(2 - 6)^3 = (-4)^3 = -64$
5; 2; 4 :
Größte Zahl: $2^{(4^5)} = 2^{1\,024}$
Kleinste Zahl: $(2 - 4)^5 = -32$
b) Größte Zahl: $6^{(6^6)} = 6^{46\,656}$
Kleinste Zahl $6 - 6 - 6 = -6$
c) Individuelle Lösungen

6 a) $3^5 = 243$ (Nachkommen)
b) $5^3 = 125$ (Nachkommen)
c) Anzahl der Nachkommen in der ersten Generation: $x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$
Anzahl der Kinder in der sechsten Generation: $4^6 = 4\,096$

7 a) $5{,}5\ l = 5\,500\ cm^3 = 5\,500\,000\ mm^3$
$5\,500\,000 \cdot 5 \cdot 10^6 = 2{,}75 \cdot 10^{13}$
b) $2{,}75 \cdot 10^{13} \cdot 7 \cdot 10^{-6} \approx 1{,}93 \cdot 10^8$ (m)
c) $2 \cdot 10^{11} : 24 : 60 : 60 \approx 2{,}31 \cdot 10^6$
d) $5\,000\,000 \cdot 5 \cdot 10^6 = 2{,}5 \cdot 10^{13}$
$2 \cdot 10^{11} : (2{,}5 \cdot 10^{13}) = 0{,}008 = 0{,}8\%$

Die Darstellung großer und kleiner Zehnerpotenzen mit Vorsilben bereitet den Lernenden oft Probleme, spielt aber im Alltag, besonders bei Speichergrößen, eine wichtige Rolle. Aufgrund der Alltagsrelevanz der Vorsilben kommen sie auch in diesen Sachsituationen an geeigneten Stellen vor. Weiter soll den Lernenden die Bedeutung von Potenzen im Alltag vor Augen geführt werden.

Wurzeln in Potenzschreibweise darstellen

Die Einstiegsbeispiele zeigen, dass Quadrat- und Kubikwurzeln mit dem Taschenrechner einfach bestimmt werden können, da entsprechende Tasten und Funktionen vorhanden sind. Um höhere Wurzeln mit dem Taschenrechner zu berechnen, müssen sie mitunter in Potenzschreibweise eingegeben werden, weil keine separaten Funktionen zur Verfügung stehen.

L

1 a) $A = 9\text{ cm} \cdot 9\text{ cm}$
$A = (9\text{ cm})^2$
$A = 81\text{ cm}^2$

$a^2 = 64\text{ cm}^2$
$a = \sqrt{64\text{ cm}^2}$
$a = 8\text{ cm}$

$V = 3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}$
$A = (3\text{ cm})^3$
$A = 27\text{ cm}^3$

$a^3 = 125\text{ cm}^3$
$a = \sqrt[3]{125\text{ cm}^3}$
$a = 5\text{ cm}$

b) $\sqrt{81} = 9$
$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{256} = 16$
$\sqrt{361} = 19$
$\sqrt{625} = 25$
$\sqrt{900} = 30$
$\sqrt{10\,000} = 100$
$\sqrt{160\,000} = 400$
$\sqrt[3]{27} = 3$
$\sqrt[3]{216} = 6$
$\sqrt[3]{343} = 7$
$\sqrt[3]{729} = 9$
$\sqrt[3]{1\,000} = 10$
$\sqrt[3]{512} = 8$
$\sqrt[3]{27\,000} = 30$
$\sqrt[3]{8\,000} = 20$
$\sqrt[3]{1\,000\,000} = 100$

2 a) $\sqrt{529} = 23$ $\quad 23^2 = 529$
b) $\sqrt{306{,}25} = 17{,}5$ $\quad 17{,}5^2 = 306{,}25$
c) $\sqrt{179{,}56} = 13{,}4$ $\quad 13{,}4^2 = 179{,}56$
d) $\sqrt[3]{10\,648} = 22$ $\quad 22^3 = 10\,648$
e) $\sqrt[3]{91\,125} = 45$ $\quad 45^3 = 91\,125$
f) $\sqrt[3]{857\,375} = 95$ $\quad 95^3 = 857\,375$
g) $\sqrt[3]{857{,}375} = 9{,}5$ $\quad 9{,}5^3 = 857{,}375$
h) $\sqrt[3]{3\,652{,}264} = 15{,}4$ $\quad 15{,}4^3 = 3\,652{,}264$
i) $\sqrt[3]{6\,331{,}625} = 18{,}5$ $\quad 18{,}5^3 = 6\,331{,}625$

3 a) $\sqrt{1\,089} = 1\,089^{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt[3]{2\,197} = 2\,197^{\frac{1}{3}}$ c) $\sqrt[4]{1\,296} = 1\,296^{\frac{1}{4}}$
d) $\sqrt[5]{3\,125} = 3\,125^{\frac{1}{5}}$ e) $\sqrt[6]{262\,144} = 262\,144^{\frac{1}{6}}$ f) $\sqrt[7]{2\,187} = 2\,187^{\frac{1}{7}}$
g) $\sqrt[8]{6\,561} = 6\,561^{\frac{1}{8}}$ h) $\sqrt[10]{1\,024} = 1\,024^{\frac{1}{10}}$ i) $\sqrt[11]{177\,147} = 177\,147^{\frac{1}{11}}$
j) $\sqrt[12]{4\,096} = 4\,096^{\frac{1}{12}}$

4 a) $625^{\frac{1}{4}} = 5$ b) $7\,776^{\frac{1}{5}} = 6$ c) $4\,096^{\frac{1}{4}} = 8$ d) $78\,125^{\frac{1}{7}} = 5$
e) $1{,}44^{\frac{1}{2}} = 1{,}2$ f) $0{,}0081^{\frac{1}{4}} = 0{,}3$ g) $1\,728^{\frac{1}{3}} = 12$ h) $74{,}088^{\frac{1}{3}} = 4{,}2$
i) $5{,}0625^{\frac{1}{4}} = 1{,}5$ j) $42{,}875^{\frac{1}{3}} = 3{,}5$

5 a) $\sqrt[3]{135} \approx 5{,}13$ b) $\sqrt[4]{2\,654} \approx 7{,}18$ c) $\sqrt[5]{36{,}8} \approx 2{,}06$ d) $\sqrt[6]{0{,}85} \approx 0{,}97$
e) $\sqrt[7]{340{,}9} \approx 2{,}30$ f) $\sqrt[8]{3\,749{,}6} \approx 2{,}80$ g) $\sqrt[6]{1\,500} \approx 3{,}38$ h) $\sqrt[10]{950} \approx 1{,}99$
i) $\sqrt[4]{500} \approx 4{,}73$ j) $\sqrt[4]{129} \approx 3{,}37$

6 a) $\sqrt[3]{262\,144} = 64$ b) $\sqrt[7]{5{,}63 \cdot 10^{14}} = 128$ c) $\sqrt[5]{\frac{3\,125}{32}} = 2{,}5$
d) $\sqrt[4]{2\,401} = 7$ e) $\sqrt[6]{\frac{64}{15\,625}} = 64$ f) $\sqrt[12]{531\,441} = 3$
g) $\sqrt[0{,}5]{9} = 81$ $\quad (\sqrt[0{,}5]{9} = 9^{\frac{1}{0{,}5}} = 9^2 = 81)$
h) $\sqrt[0{,}2]{6} = 7776$ $\quad (\sqrt[0{,}2]{6} = 6^{\frac{1}{0{,}2}} = 6^5 = 7\,776)$
i) $\sqrt[11]{8\,589\,934\,592} = 8$ j) $\sqrt[4]{\frac{2\,401}{256}} = 1{,}75$

7 Die Behauptung ist falsch, weil sie für 1 nicht gilt: $\sqrt[3]{1} = 1$.

Z

Kopfrechenübungen

Einsatzhinweis: Aufgaben in Präsentation oder unter Dokumentenkamera vorgeben

1. Vereinfache:
   a) $(2^2)^3$ b) $(3^2)^3$ c) $(4^5)^2$ d) $(5^3)^3$ e) $(0{,}2^2)^2$ f) $(1{,}4^6)^3$

2. Vereinfache den Term:
   a) $(x^3)^{-2}$ b) $(x^{-2})^3$ c) $(y^{-2})^{-2}$ d) $(y^4)^3$ e) $(x^{-1})^{-1}$ f) $(x^3)^{-3}$

3. Löse die Klammern auf:
   a) $(a^2 \cdot b^3)^2$ b) $(x^4 \cdot y^3)^3$ c) $(a^{-2} \cdot b^3)^3$
   d) $(a^{-2} \cdot b^{-2})^{-2}$ e) $(x^3 \cdot y^{-3})^{-4}$ f) $(x^4 \cdot y^3)^{-2}$

Rechengesetze bei Wurzeln kennen und anwenden

Die Rechengesetze bei Wurzeln werden schrittweise mittels anschaulicher Beispiele von bereits bekannten Potenzgesetzen eingeführt. Dadurch wird auch die Anwendung der Potenzgesetze wiederholt und gefestigt und mit den hier eingeführten Rechengesetzen bei Wurzeln verbunden.

L

1 a) Ⓐ $9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 9^{2} = 81$

Ⓑ $16^{\frac{3}{4}} : 16^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$

Ⓒ $3^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} = (3 \cdot 9)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$

Ⓓ $64^{\frac{1}{4}} : 4^{\frac{1}{4}} = (64 : 4)^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$

Ⓔ $\left(36^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} = 36^{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}} = 36^{\frac{1}{2}} = 6$

b) Ⓐ Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Ⓑ Division von Potenzen mit gleicher Basis

Ⓒ Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponent

Ⓓ Division von Potenzen mit gleichem Exponent

Ⓔ Potenzieren von Potenzen

c) Die Potenzgesetze gelten auch für Potenzen mit Brüchen als Exponent.

2 a) $81^{\frac{1}{3}} : 3^{\frac{1}{3}} = (81 : 3)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$

b) $5^{\frac{1}{4}} \cdot 125^{\frac{1}{4}} = (5 \cdot 125)^{\frac{1}{4}} = 625^{\frac{1}{4}} = 5$

c) $\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$

d) $32^{\frac{1}{2}} \cdot 0{,}5^{\frac{1}{2}} = (32 \cdot 0{,}5)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$

e) $5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{7}{4}} = 5^{\frac{1}{4} + \frac{7}{4}} = 5^{2} = 25$

f) $16^{\frac{2}{3}} : 16^{\frac{1}{6}} = 16^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$

g) $256^{\frac{1}{7}} : 2^{\frac{1}{7}} = (256 : 2)^{\frac{1}{7}} = 128^{\frac{1}{7}} = 2$

h) $\left(25^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 25^{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$

3 a) Ⓐ $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = 9^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = (9 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$

Ⓑ $\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{108^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}} = (108 : 4)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$

Ⓒ $\sqrt[2]{\sqrt[3]{729}} = \left(729^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 729^{\frac{1}{6}} = 3$

b) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

4 a) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{49} = \sqrt{4 \cdot 49} = \sqrt{196} = 14$

b) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$

c) $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2 \cdot 2]{16} = \sqrt{16} = 2$

d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125} = \sqrt{5 \cdot 125} = \sqrt{625} = 25$

e) $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{60}{15}} = \sqrt{2} = 2$

f) $\sqrt{\sqrt{625}} = \sqrt[2 \cdot 2]{625} = \sqrt[4]{625} = 5$

g) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{16 \cdot 2} = \sqrt[5]{32}$

h) $\frac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{\frac{72}{9}} = \sqrt[3]{8} = 2$

i) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{9 \cdot 24} = \sqrt[3]{216} = 6$

j) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{4 \cdot 8 \cdot 32} = \sqrt{1\,024} = 32$

k) $\sqrt[4]{\sqrt{6\,561}} = \sqrt[8]{6\,561} = 3$

l) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{300} = \sqrt[3]{6 \cdot 15 \cdot 300} = \sqrt[3]{27\,000} = 30$

m) $\frac{243}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{81} = 3$

n) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4\,096}} = \sqrt[12]{4\,096} = 2$

o) $\frac{\sqrt[4]{1875}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{1875}{3}} = \sqrt[4]{625} = 5$

p) $\sqrt[4]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{768} = \sqrt[4]{\frac{1}{3} \cdot 768} = \sqrt[4]{256} = 4$

5 a) $\sqrt{8\cdot 32}=\sqrt{4\cdot 64}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{64}=2\cdot 8=16$

b) $\sqrt{48\cdot 12}=\sqrt{16\cdot 3\cdot 12}=\sqrt{16\cdot 36}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{36}=4\cdot 6=24$

c) $\sqrt{7\cdot 175}=\sqrt{7\cdot 7\cdot 25}=\sqrt{7^2}\cdot\sqrt{25}=7\cdot 5=35$

d) $\sqrt{5\cdot 125}=\sqrt{25\cdot 25}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{25}=5\cdot 5=25$

e) $\sqrt{6\cdot 14\cdot 21}=\sqrt{6\cdot 2\cdot 7\cdot 3\cdot 7}=\sqrt{6^2}\cdot\sqrt{7^2}=6\cdot 7=42$

f) $\sqrt{6\cdot 10\cdot 15}=\sqrt{2\cdot 3\cdot 2\cdot 5\cdot 3\cdot 5}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5^2}=2\cdot 3\cdot 5=30$

g) $\sqrt[3]{16\cdot 12\cdot 9}=\sqrt[3]{2^4\cdot 2^2\cdot 3\cdot 3^2}=\sqrt[3]{2^6}\cdot\sqrt[3]{3^3}=4\cdot 3=12$

h) $\sqrt[3]{12\cdot 45\cdot 50}=\sqrt[3]{2^2\cdot 3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 2\cdot 5^2}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{5^5}=2\cdot 3\cdot 5=30$

i) $\sqrt[3]{5\cdot 45\cdot 15}=\sqrt[3]{5\cdot 3^2\cdot 5\cdot 3\cdot 5}=\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{3^3}=5\cdot 3=15$

j) $\sqrt[3]{9\cdot 49\cdot 21}=\sqrt[3]{3^2\cdot 7^2\cdot 3\cdot 7}=\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{7^3}=3\cdot 7=21$

6 $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}=a^{\frac{1}{m}\cdot n}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n=\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$

Die Aussage ist wahr.

Z

Kopfrechenübungen

K 2

Einsatzhinweis: Aufgaben in Präsentation oder unter Dokumentenkamera vorgeben

1. Schreibe als Wurzel und berechne:

a) $4^{\frac{1}{2}}=$ b) $25^{\frac{1}{2}}=$ c) $125^{\frac{1}{3}}=$

d) $27^{\frac{1}{3}}=$ e) $16^{\frac{1}{4}}=$ f) $81^{\frac{1}{4}}=$

2. Ordne die Ergebnisse richtig zu:

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt[5]{32}$ c) $\sqrt[3]{729}$ d) $\sqrt[4]{2\,401}$ e) $\sqrt[5]{3\,125}$ f) $\sqrt[3]{1\,331}$

7 5 1 9 2 8

Logarithmen berechnen

Logarithmieren ist die Umkehrung des Potenzierens für den Fall, dass die Potenz aus fester Basis und variablem Exponenten besteht. Die dekadischen Logarithmen haben als Basis 10. Man schreibt die Basis üblicherweise nicht mit und kürzt mit log ab.
Das Einführungsbeispiel zeigt die Zusammenhänge zwischen Potenzieren und Logarithmieren auf. Weiterhin wird die Notwendigkeit der Berechnung von Umkehrungen des Potenzierens aufgezeigt.
Des Weiteren lernen die Lernenden, den Logarithmus mithilfe des Taschenrechners zu bestimmen.

L

1 a) Ⓐ $x = 2$ Ⓒ $x = 5$ Ⓓ $x = 9$ Ⓔ $x = 4$ Ⓖ $x = 2$ Ⓘ $x = 3$

b) Ⓑ

Exponent x	1	2	3	4	5	6	7
Wert der Potenz 3^x	3	9	27	81	243	729	2 187

$\Rightarrow x = 7$

Ⓕ

Exponent x	1	2	3	4	5	6
Wert der Potenz 9^x	9	81	729	6 561	59 049	531 441

$\Rightarrow x = 6$

Ⓗ

Exponent x	1	2	3	4	5	6	7	8
Wert der Potenz 6^x	6	36	216	1 296	7 776	466 656	279 936	1 679 616

$\Rightarrow x = 8$

2 a) $2^8 = 256$, $\log_2 256 = 8$ b) $3^7 = 2\,187$, $\log_3 2\,187 = 7$ c) $248\,832 = 12^5$, $\log_{12} 248\,832 = 5$
d) $\log_5 625 = 4$, $5^4 = 625$ e) $\log_4 1\,024 = 5$, $4^5 = 1\,024$ f) $4 = \log_6 1\,296$, $6^4 = 1\,296$

3 a) $x = 4$ b) $x = 6$ c) $x = 3$ d) $x = 3$ e) $x = 3$
f) $x = 3$ g) $x = -2$ h) $x = -3$ i) $x = -4$ j) $x = -3$

4 a) $\log_2 512 = 9$ b) $\log_2 2\,048 = 11$ c) $\log_2 0{,}25 = -2$ d) $\log_2 \frac{1}{64} = -6$
e) $\log_2 \frac{1}{128} = -7$ f) $\log_3 243 = 5$ g) $\log_3 729 = 6$ h) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$
i) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ j) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$ k) $\log_4 256 = 4$ l) $\log_4 4 = 1$
m) $\log_4 \frac{1}{64} = -3$ n) $\log_4 0{,}25 = -1$ o) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

5 a) $3^x = 2\,187 \Rightarrow x = \log_3 2187 = \frac{\log 2\,187}{\log 3} = 7$
Probe: $7^3 = 2\,187$
b) $5^x = 625 \Rightarrow x = \log_5 625 = \frac{\log 625}{\log 5} = 4$
Probe: $5^4 = 625$
c) $4^x = 256 \Rightarrow x = \log_4 256 = \frac{\log 256}{\log 4} = 4$
Probe: $4^4 = 256$
d) $2^x = 4\,096 \Rightarrow x = \log_2 4\,096 = \frac{\log 4\,096}{\log 2} = 12$
Probe: $2^{12} = 4\,096$
e) $6^x = 216 \Rightarrow x = \log_6 216 = \frac{\log 216}{\log 6} = 3$
Probe: $6^3 = 216$
f) $8^x = 32\,768 \Rightarrow x = \log_8 32\,768 = \frac{\log 32\,768}{\log 8} = 5$
Probe: $8^5 = 32\,768$
g) $9^x = 59\,049 \Rightarrow x = \log_9 59\,049 = \frac{\log 59\,049}{\log 9} = 5$
Probe: $9^5 = 59\,049$
h) $7^x = 823\,543 \Rightarrow x = \log_7 823\,543 = \frac{\log 823\,543}{\log 7} = 7$
Probe: $7^7 = 823\,543$

6 a) $\log 10 = 1$ b) $\log 1\,000 = 3$ c) $\log 100\,000 = 5$ d) $\log 10^8 = 8$
e) $\log 0{,}001 = -3$ f) $\log \frac{1}{10} = -1$ g) $\log \frac{1}{1\,000\,000} = -6$ h) $\log 0{,}000001 = -5$

7 a) $\log 30 \approx 1{,}477$ Probe: $10^{1{,}477} \approx 30$
b) $\log 50 \approx 1{,}699$ Probe: $10^{1{,}699} \approx 50$
c) $\log 64 \approx 1{,}806$ Probe: $10^{1{,}806} \approx 64$
d) $\log 500 \approx 2{,}699$ Probe: $10^{2{,}699} \approx 500$
e) $\log 2000 \approx 3{,}301$ Probe: $10^{3{,}301} \approx 2000$
f) $\log 0{,}8 \approx -0{,}097$ Probe: $10^{-0{,}097} \approx 0{,}8$
g) $\log 0{,}06 \approx -1{,}222$ Probe: $10^{-1{,}222} \approx 0{,}06$
h) $\log 0{,}009 \approx -2{,}046$ Probe: $10^{-2{,}046} \approx 0{,}009$
i) $\log 99 \approx 1{,}996$ Probe: $10^{1{,}996} \approx 99$
j) $\log 999 \approx 3{,}000$ Probe: $10^{3{,}000} \approx 999$
k) $\log 8000 \approx 3{,}903$ Probe: $10^{3{,}903} \approx 8000$
l) $\log 0{,}02 \approx -1{,}699$ Probe: $10^{-1{,}699} \approx 0{,}02$

8 a) $\log 3 \approx 0{,}477$
$\log 30 \approx 1{,}477$
$\log 300 \approx 2{,}477$
$\log 3000 \approx 3{,}477$
$\log 30000 \approx 4{,}477$
Wird der Wert der Potenz mit zehn multipliziert, so erhöht sich der zugehörige Zehnerlogarithmus um eins.

b) $\log 0{,}4 \approx -0{,}398$
$\log 0{,}04 \approx -1{,}398$
$\log 0{,}004 \approx -2{,}398$
$\log 0{,}0004 \approx -3{,}398$
$\log 0{,}00004 \approx -4{,}398$
Wird der Wert der Potenz durch zehn dividiert, so verringert sich der zugehörige Zehnerlogarithmus um eins.

9 a) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ b) $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$ c) $\log_{16384} 4 = \frac{1}{7}$ d) $\log_{14641} 11 = \frac{1}{4}$

10 a) $\log_{10} 10 = 1 \Rightarrow 10^1 = 10$
Eine Potenz hat den Wert der Basis, wenn der Exponent 1 ist.
b) $\log_{10} 1 = 0 \Rightarrow 10^0 = 1$
Eine Potenz mit Exponent 0 hat immer den Wert 1.
c) $\log_x 1 = 0 \Rightarrow x^0 = 1$
Eine Potenz mit Exponent 0 hat immer den Wert 1.
d) $\log_x x = 1 \Rightarrow x^1 = x$
Eine Potenz hat den Wert der Basis, wenn der Exponent 1 ist.

11 a) $8 - \log_{0{,}25} 32 = 10{,}5$ b) $4 \cdot \log_4 24 \approx 9{,}17$
c) $(\log_6 36)^2 - \log_8 27{,}6 \approx 2{,}40$ d) $\frac{3}{\log_6 21} \approx 1{,}77$

12 a) $\log_{10} \sqrt{10} = x$
$10^x = \sqrt{10}$
$10^x = 10^{\frac{1}{2}}$
$x = \frac{1}{2}$

b) $\log_7 \sqrt{7} = x$
$7^x = \sqrt{7}$
$7^x = 7^{\frac{1}{2}}$
$x = \frac{1}{2}$

c) $\log_{14} \sqrt{14} = x$
$14^x = \sqrt{14}$
$14^x = 14^{\frac{1}{2}}$
$x = \frac{1}{2}$

d) $\log_5 \sqrt[4]{5} = x$
$5^x = \sqrt[4]{5}$
$5^x = 5^{\frac{1}{4}}$
$x = \frac{1}{4}$

e) $\log_a \sqrt{a} = x$
$a^x = \sqrt{a}$
$a^x = a^{\frac{1}{2}}$
$x = \frac{1}{2}$

f) $\log_b \sqrt[3]{b} = x$
$b^x = \sqrt[3]{b}$
$b^x = b^{\frac{1}{3}}$
$x = \frac{1}{3}$

g) $\log_c c^{-2} = x$
$c^x = c^{-2}$
$x = -2$

h) $\log_d 1 = x$
$d^x = 1$
$x = 0$

13 a) $2 \cdot 3^x = 18 \quad |:2$
$3^x = 9$
$\log_3 9 = x$
$x = 2$

b) $2 \cdot 3^x = 15 \quad |:2$
$3^x = 7{,}5$
$\log_3 7{,}5 = x$
$x \approx 1{,}834$

c) $3 \cdot 2^x = 18 \quad |:3$
$2^x = 6$
$\log_2 6 = x$
$x \approx 2{,}585$

d) $2^x \cdot 5 = 25 \quad |:5$
$2^x = 5$
$\log_2 5 = x$
$x \approx 2{,}322$

e) $54{,}8 = 20 \cdot 1{,}4^x \quad |:20$
$2{,}74 = 1{,}4^x$
$\log_{1{,}4} 2{,}74 = x$
$x \approx 2{,}996$

f) $480 = 400 \cdot 1{,}06^x \quad |:400$
$1{,}2 = 1{,}06^x$
$\log_{1{,}06} 1{,}2 = x$
$x \approx 3{,}129$

g) $710 = 175 \cdot 1{,}06^x \quad | : 175$
$\frac{142}{35} = 1{,}06^x$
$\log_{1{,}06} \frac{142}{35} = x$
$x \approx 24{,}035$

h) $150 \cdot 0{,}8^x = 36{,}015 \quad | : 150$
$0{,}8^x = 0{,}2401$
$\log_{0{,}8} 0{,}2401 = x$
$x \approx 6{,}394$

14 a) $\log_2 (10 + 6) = 4$ b) $\log_3 (5 + 22) = 3$ c) $\log_8 (60 + 4) = 2$ d) $\log_{10} (1\,004 - 4) = 3$

15 a) $14^x - 500\,000 = 37\,824 \quad | + 500\,000$
$14^x = 537\,824$
$\log_{14} 537\,824 = 5$
Linas gedachte Zahl ist 5.

b) $2^{x+7} : 16 = 8 \quad | \cdot 16$
$2^{x+7} = 128$
$\log_2 128 = x + 7 \quad | - 7$
$-7 = x$
Henrys gedachte Zahl ist –7.

c) $60\,025^{x-4{,}5} = 245$
$\log_{60\,025} 245 = x - 4{,}5 \quad | + 4{,}5$
$5 = x$
Lisas gedachte Zahl ist 5.

16 384 000 km = 384 000 000 000 mm
$2^x \cdot 0{,}2 = 384\,000\,000\,000 \quad | : 0{,}2$
$2^x = 1{,}92 \cdot 10^{12}$
$\log_2 (1{,}92 \cdot 10^{12}) = x$
$x \approx 40{,}8$
Man müsste das Papier 41-mal falten, um einen Turm zu erhalten, der bis zum Mond reicht.

L

1 Mit Zehnerpotenzen rechnen

a) Ⓐ $3{,}24 \cdot 10^8$
Ⓑ $3{,}49 \cdot 10^7$
Ⓒ $4{,}51 \cdot 10^{-3}$

b) Ⓐ $1{,}69576 \cdot 10^3$
Ⓑ $1{,}2 \cdot 10^6$
Ⓒ $7{,}484 \cdot 10^0$

2 Potenzen mit beliebiger Basis verstehen

a) Ⓐ 8^5 Ⓑ b^8 Ⓒ $\left(\frac{3}{7}\right)^6$

b) Ⓐ $3^4 \cdot 5^4 = 15^4$ Ⓑ $e^4\, f^5$
Ⓒ $\left(\frac{2}{9}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{9}\right)^4$

3 Mit Potenzen mit beliebiger Basis rechnen

a) Ⓐ 191 102 976
Ⓑ $1{,}78 \cdot 10^{-5}$
Ⓒ $5{,}72 \cdot 10^{-3}$

b) Ⓐ $3{,}5^{11} < 7^8$ Ⓑ $3 \cdot 1{,}01^{12} > 3^8 : 2^{14}$
Ⓒ $211^7 : \left(\frac{21}{24}\right)^{10} < 0{,}1^{17} \cdot 87^{18}$

4 Potenzen mit negativem Exponenten vergleichen

a) $4^{-6} \approx 2{,}44 \cdot 10^{-4}$
$7^{-8} \approx 1{,}73 \cdot 10^{-7}$
$9^{-7} \approx 2{,}09 \cdot 10^{-7}$
$5^{-4} = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$

b) Ⓐ $14^{-4} \approx 2{,}60 \cdot 10^{-5}$ $0{,}2^4 = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$
$4{,}9 \cdot 10^{-6} < 14^{-4} < 3{,}59 \cdot 10^{-4} < 0{,}2^4$
Ⓑ $24^{-3} \approx 7{,}23 \cdot 10^{-5}$ $0{,}8^{24} \approx 4{,}72 \cdot 10^{-3}$
$96^{-7} \approx 1{,}33 \cdot 10^{-14}$
$96^{-7} < 7{,}2 \cdot 10^{-8} < 24^{-3} < 0{,}8^{24}$

5 Rechengesetze bei Potenzen mit gleicher Basis anwenden

a) Ⓐ 4^{10} Ⓑ 8^2 Ⓒ b^8 Ⓓ y^6 b) Ⓐ 4^8 Ⓑ $8^9 \cdot 7^5$ Ⓒ $48x^{6y}$

6 Rechengesetze bei Potenzen mit gleichem Exponenten anwenden

a)
$(1000xy)^4$
$(20x)^4$ | $(50y)^4$
$(2x)^4$ | 10^4 | $(5y)^4$
x^4 | 2^4 | 5^4 | y^4

b)
$4(128x^4y^4)^2$
$4(4x^3y)^2$ | $(32xy^3)^2$
$4(x^2)^2$ | $(4xy)^2$ | $8(y^2)^2$
x^2 | $(2x)^2$ | $(2y)^2$ | $(4y)^2$
1^2 | x^2 | 2^2 | y^2 | 4^2

7 Sachaufgaben zu Potenzen lösen

a) Benötigte Zeit für 1 m Wachstum:
$1000 : (2{,}3 \cdot 10^{-6}) \approx 4{,}35 \cdot 10^8$ (Min)
≈ 827 (Jahre)
Benötigte Zeit für 2 m Wachstum:
$2000 : (2{,}3 \cdot 10^{-6}) \approx 8{,}70 \cdot 10^8$ (Min)
≈ 1654 (Jahre)
Benötigte Zeit für 10 m Wachstum:
$10000 : (2{,}3 \cdot 10^{-6}) \approx 4{,}35 \cdot 10^9$ (Min)
≈ 8272(Jahre)

b) $2{,}998 \cdot 10^{12}\ l = 2{,}998 \cdot 10^{15}\ cm^3$
Anzahl der Wassermoleküle des Starnberger Sees:
$3{,}35 \cdot 10^{22} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{15} \approx 1{,}00 \cdot 10^{38}$

Die wesentlichen Inhalte des Kapitels sind erarbeitet. Inwieweit sind die Schüler darin fit? Wie unterschiedlich ist der Lernstand? Die Zwischenrunde bietet die Möglichkeit, das durch zwei Anforderungsniveaus differenziert zu erfassen. Auch die Schüler können lernen, sich selbst einzuschätzen. Die Lösungen sind dazu im Buch angegeben. Ferner findet sich im Internet ein entsprechender Selbsteinschätzungsbogen. Unter Umständen müssen Inhalte nochmals aufgegriffen werden, um einen gesicherten Wissensstand zu erreichen.

8 Wurzeln in Potenzschreibweise darstellen

a) Ⓐ $22^{\frac{1}{2}}$ Ⓑ $5^{\frac{2}{7}}$ Ⓒ $4^{\frac{4}{8}} = 4^{\frac{1}{2}}$

b) Ⓐ $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{3}{4}}$ Ⓑ $y^{\frac{5}{7}} \cdot y^{-\frac{5}{14}} = y^{\frac{5}{14}}$

Ⓒ $8z^{\frac{1}{2}} \cdot 3z^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \cdot z^{-\frac{1}{2}} = 24z^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$

9 Potenzgesetze anwenden

a) Ⓐ $8 \cdot 4^4 + 4^4 - 5{,}5 \cdot 4^4 - (-4)^4$
$= 2{,}5 \cdot 4^4 = 640$

Ⓑ $3 \cdot (a^4)^3 - 2(a^2)^6 = 3a^{12} - 2a^{12} = a^{12}$

Ⓒ $\frac{x^5 \cdot y^2 \cdot z^3}{x^3 \cdot y^7} = x^2 \cdot y^{-5} \cdot z^3$

b) Ⓐ $2{,}5a^7b^7 + 3{,}5a^4 - \left(\frac{1}{2}a^7b^7 - a^4\right) + (-4{,}5a^4)$
$= 2{,}5a^7b^7 + 3{,}5a^4 - \frac{1}{2}a^7b^7 + a^4 - 4{,}5a^4$
$= 2a^7b^7$

Ⓑ $\frac{4 \cdot y^{-4} \cdot 3 \cdot x^4 \cdot 5 \cdot z^{-3} \cdot x^{-2} \cdot y^6}{2 \cdot z^{-4} \cdot 3 \cdot x^{-3} \cdot 10 \cdot y^2}$
$= \frac{4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot y^{-4} \cdot y^6 \cdot x^4 \cdot x^{-2} \cdot z^{-3}}{2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot x^{-3} \cdot y^2 \cdot z^{-4}} = 2x^5z$

Ⓒ $x^{\frac{1}{3}} : (x^{-6})^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} : x^{14} \cdot \sqrt[4]{x^{12}}$
$= x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{12} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-14} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{2}{3}}$

10 Logarithmen berechnen

a) Ⓐ 2 Ⓑ 7 Ⓒ 11

b) Ⓐ $\log_{13} 371\,293 = 5$
Ⓑ $\log_{6} 216 = 3$
Ⓒ $\log_{2} 33\,554\,432 = 25$

Z

Selbsteinschätzungsbogen

Erhältlich unter www.ccbuchner.de/medien (60014-01)

L

1 a) $3{,}45 \cdot 10^{10}$ b) $7{,}13 \cdot 10^{8}$ c) $4{,}56 \cdot 10^{-6}$ d) $2{,}1 \cdot 10^{-9}$ e) $6{,}5 \cdot 10^{13}$ f) $9{,}0 \cdot 10^{-10}$

2 a) 16 b) 125 c) 2,25 d) 0,0016 e) $\frac{1}{36}$ f) 0,125

3 a) $\sqrt{1\,369} = 1\,369^{\frac{1}{2}} = 37$ b) $\sqrt{3{,}61} = 3{,}61^{\frac{1}{2}} = 1{,}9$ c) $\sqrt{14{,}44} = 14{,}44^{\frac{1}{2}} = 3{,}8$
d) $\sqrt[3]{15\,625} = 15\,625^{\frac{1}{3}} = 25$ e) $\sqrt[4]{6\,561} = 6\,561^{\frac{1}{4}} = 9$ f) $\sqrt[5]{32\,768} = 32\,768^{\frac{1}{5}} = 8$

4 a) $7^3 \cdot 7^4 = 7^7 = 823\,543$ b) $2^4 \cdot 2^6 = 2^{10} = 1\,024$ c) $6^3 \cdot 6^2 = 6^5 = 7\,776$
d) $4^7 : 4^3 = 4^4 = 256$ e) $9^7 : 9^4 = 9^3 = 729$ f) $1{,}5^6 : 1{,}5^3 = 1{,}5^3 = 3{,}375$

5 a) $6^3 \cdot 7^3 = 42^3 = 74\,088$ b) $4^5 \cdot 0{,}5^5 = 2^5 = 32$ c) $2{,}2^4 \cdot 4^4 = 8{,}8^4 = 5\,996{,}9536$
d) $26^3 : 26^3 = 26^0 = 1$ e) $5^6 : 10^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$ f) $1{,}2^5 : 0{,}2^5 = 6^5 = 7\,776$

6 a) $(3^3)^3 = 3^9 = 19\,683$ b) $(1{,}2^2)^4 = 1{,}2^8 \approx 4{,}30$ c) $(4^3)^{-5} = 4^{-15} \approx 9{,}3 \cdot 10^{-10}$
d) $(6^8)^{0{,}5} = 6^4 = 1\,296$ e) $(5^{-2})^{-3} = 5^6 = 15\,625$ f) $(9^{-4})^2 = 9^{-8} = 2{,}32 \cdot 10^{-8}$

7 a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$ b) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{512} = 8$ c) $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$
d) $\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{16} = 2$ e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{28} = \sqrt{784} = 28$ f) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$
g) $\sqrt{\sqrt[4]{6\,561}} = \sqrt[8]{6\,561} = 3$ h) $\frac{\sqrt[5]{3\,645}}{\sqrt[5]{15}} = \sqrt[5]{243} = 3$ i) $\sqrt[4]{\sqrt{256}} = \sqrt[8]{256} = 2$

8 a) 4 b) 5 c) $\approx 1{,}60$ d) $\approx -0{,}40$ e) 7 f) 6

9 a) $8^3 \cdot 8^4 = 8^7 = 2\,097\,152$ b) $4^7 : 4^3 = 4^4 = 256$

10 a) $3{,}5^4 \cdot 3^{-2} \cdot 3^6 = 3{,}5^4 \cdot 3^4 = 10{,}5^4 = 12\,155{,}0625$
b) $5^7 \cdot 8^7 \cdot 0{,}25^7 = 10^7 = 10\,000\,000$
c) $(2^2 \cdot 4^2)^3 = (8^2)^3 = 8^6 = 262\,144$
d) $\frac{3^4 \cdot 8^4 \cdot 5^4}{4^4 \cdot 5^4 \cdot 6^4} = \left(\frac{120}{120}\right)^4 = 1$
e) $7x^4 : 3{,}5x^4 \cdot x^4 = 2x^4$
f) $\frac{18x^7 \cdot 2y^{-3} \cdot 12x^{-5}}{6y^{-7} \cdot 3x^6} = \frac{24x^2y^{-3}}{y^{-7}x^6} = 24x^{-4}y^4$

11 a) $5{,}1 \cdot 10^8 \cdot 0{,}71 \approx 3{,}62 \cdot 10^8$ (km²)
b) $3{,}62 \cdot 10^{14} \cdot 2{,}3 \cdot 10^{-3} = 8{,}33 \cdot 10^{11}$ (m³)
c) Volumen des Wassers: $2{,}6 \cdot 10^{16} \cdot 0{,}9 = 2{,}34 \cdot 10^{16}$ (m³)
Anstieg des Meeresspiegels: $2{,}34 \cdot 10^{16} : (3{,}62 \cdot 10^{14}) \approx 64{,}64$ (m)

12

Eltern:	$2^1 = 2$
Großeltern:	$2^2 = 4$
Urgroßeltern:	$2^3 = 8$
Ururgroßeltern:	$2^4 = 16$
Urururgroßeltern:	$2^5 = 32$
Ururururgroßeltern:	$2^6 = 64$
Urururururgroßeltern:	$2^7 = 128$
Vorfahren insgesamt:	$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 254$

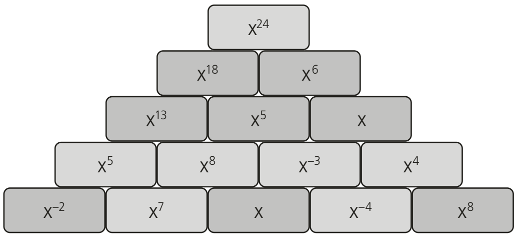
Diese beiden Seiten dienen dem Üben und Vertiefen der neuen Lerninhalte. Dabei sollen die Lernenden überwiegend eigenständig arbeiten. Um das zu ermöglichen, wird zum einen das Merkwissen „Auf einen Blick“ nochmals in der linken Spalte zusammengefasst, zum anderen stehen die Lösungen am Ende des Buches zur Selbstkontrolle zur Verfügung.

13 Kantenlänge des großen Würfels: $\sqrt[3]{3{,}375} = 1{,}5$ (m)
Kantenlänge der kleinen Würfel: $1{,}5 : 3 = 0{,}5$ (m)

14 Ein Jahr hat $365 \cdot 24 = 8\,760$ Stunden.
Zurückgelegte Strecke: $1{,}08 \cdot 10^5 \cdot 8\,760 = 9{,}46 \cdot 10^8$ (km)

15 $7^5 = 16\,807$ Maß Getreidekörner

16



17 a) $3 \cdot (4x^2 - 5y^4) - 9x^2 - (2x^2 - 16y^4)$
$= 12x^2 - 15y^4 - 9x^2 - 2x^2 + 16y^4$
$= x^2 + y^2$

b) $2a^2 \cdot 4b^{-3} \cdot 5a^{-4} \cdot 0{,}5b^5 \cdot a^3$
$= 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 0{,}5 \cdot a^2 \cdot a^{-4} \cdot a^3 \cdot b^{-3} \cdot b^5$
$= 20ab^2$

c) $15x^7 \cdot 2y^{-6} \cdot 0{,}25y^{10} \cdot 2y^{-5} : 5x^4$
$= 15 \cdot 2 \cdot 0{,}25 \cdot 2 : 5 \cdot x^7 : x^4 \cdot y^{-6} \cdot y^{10} \cdot y^{-5}$
$= 3x^3y^{-1}$

d) $\dfrac{72u^3 \cdot 0{,}25x^{14} \cdot 5u^{-5}w^{-7}}{4w^{-3} \cdot 0{,}5v^{-5} \cdot 5v^2 \cdot 1{,}5u^{10}}$
$= \dfrac{72 \cdot 0{,}25 \cdot 5 \cdot u^3 \cdot u^{-5} \cdot v^{14} \cdot w^{-7}}{4 \cdot 0{,}5 \cdot 5 \cdot 1{,}5 \cdot w^{-3} \cdot v^{-5} \cdot v^2 \cdot u^{10}}$
$= 6u^{-12}v^{17}w^{-4}$

e) $\dfrac{12 \cdot b^{-4} \cdot 2 \cdot a^{-2} \cdot 4 \cdot b^8 \cdot c^2 \cdot 4 \cdot a^3 \cdot 20 \cdot c^{-6}}{8 \cdot c^{-4} \cdot 6 \cdot b^2 \cdot 20 \cdot a^{-3}}$
$= \dfrac{12 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 20 \cdot a^{-2} \cdot a^3 \cdot b^8 \cdot b^{-4} \cdot c^2 \cdot c^{-6}}{8 \cdot 6 \cdot 20 \cdot c^{-4} \cdot b^2 \cdot a^{-3}}$
$= 8a^4b^2c^8$

18 a) $5 \cdot 10^{10} : (200 \cdot 10^6) = 250$ (Jahre)
b) $5 \cdot 10^{10} : 1\,000 = 5 \cdot 10^7$ (Sekunden) $\approx 1{,}6$ (Jahre)

19 Produkt pro Zeile/Spalte/Diagonale: $216x^6y^9z^3$

$18x^3y^2$	xy^5z^2	$12x^2y^2z$
$4xy^3z^2$	$6x^2y^3z$	$9x^3y^3$
$3x^2y^4z$	$36x^3y$	$2xy^4z^2$

20 Der Fehler befindet sich in Zeile 3.
Korrektur: $= \frac{x^4}{x^2} = x^2$

L

1 a) $(3 + 8)^2 = 121$ b) $(56 : 8)^3 = 343$ c) $(66 - 55)^2 + (111 - 97)^2 = 317$

d) $(57 - 13)^2 \cdot 2 + 8^3 = 4384$ e) $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{64}$ f) $0{,}5 + 0{,}5^2 = 0{,}75$

g) $(23 - 25)^5 - (2^3 - 3^2) = -31$ h) $157 - 13^2 \cdot 4 + 4^4 = -263$

2 a) $x^4 \cdot x^{-3} = x$ b) $a^5 \cdot b^5 = (ab)^5$ c) $(y^{-2})^{-3} = y^6$

d) $x^8 : x^4 = x^4$ e) $a^5 : b^5 = a^5b^{-5}$ f) $(x^4)^{-3} = x^{-12}$

3 a) $a^7 \cdot a^4 \cdot \frac{1}{a^9} = a^2$ b) $\frac{b^5 \cdot c^2}{b^3 \cdot c^4} = b^2c^{-2}$

c) $\frac{\sqrt{a^5}}{\sqrt{a^3}} = \sqrt{\frac{a^5}{a^3}} = \sqrt{a^2} = \pm a$ d) $\sqrt[3]{a^9 \cdot b^6 \cdot c^3} = \sqrt[3]{a^9} \cdot \sqrt[3]{b^6} \cdot \sqrt[3]{c^3} = a^3 \cdot b^2 \cdot c$

4 a) $2 + \log_{0,5} 14 \approx -1{,}81$ b) $\log_3 25{,}9 : 10^{-2} \approx 296{,}21$

c) $(\log_{11} 57)^3 + \log_{15} 57 \approx 6{,}29$ d) $\frac{\log_4 247}{\log_{13} 73} \approx 2{,}38$

5 a) $7{,}349 \cdot 10^{22}$ kg $= 7{,}349 \cdot 10^{19}$ t

b) $5{,}974 \cdot 10^{24} : (7{,}349 \cdot 10^{22}) = 81{,}29$

Die Masse der Erde ist etwa 81mal so groß wie die Masse des Mondes.

6 Volumen einer Verpackung: $75 : 4\,800 = 0{,}015625$ (m^3)

Seitenlänge einer Verpackung: $\sqrt[3]{0{,}015625} = 0{,}25$ (m)

7 a) $\frac{48a^8 \cdot 49b^7 \cdot a^{-2}}{12a^3 \cdot 7b^6 \cdot 4a^2} = \frac{48 \cdot 49 \cdot a^6 \cdot b^7}{12 \cdot 7 \cdot 4 \cdot a^5 \cdot b^6} = 7ab$

b) $\frac{17{,}5x^{-7} \cdot x^4 \cdot y^4 \cdot y^{-2}}{y^{-3} \cdot x^{-5} \cdot 2{,}5x \cdot y^3} = \frac{7{,}5x^{-3}y^2}{2{,}5x^{-4}} = 7xy^2$

c) $\frac{2{,}5x^{-4} \cdot 1{,}5y^6 \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{x^{-4} \cdot y^{-6} \cdot 2{,}5x^{-4} \cdot 1{,}5y^6} = \frac{2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot x^{-8}}{2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot x^{-8}} = 1$

8 a) $200 \cdot 300 \cdot 500 = 3 \cdot 10^7$ (Knoten)

b) Anzahl der benötigten Knoten: $100 \cdot 100 \cdot 500 = 5 \cdot 10^6$

Anzahl der Arbeitsminuten: $1\,600 \cdot 60 = 9{,}6 \cdot 10^4$

Knoten pro Minute: $5{,}6 \cdot 10^6 : (9{,}6 \cdot 10^4) = 52{,}08$

Der Arbeiter muss pro Minute 53 Knoten knüpfen.

9 a) $7{,}2 \cdot 10^7 : (2{,}8 \cdot 10^4) \approx 2\,571$ (h) $\approx 10^7$ (d)

b) zurückgelegte Strecke in zwei Tagen:

$2{,}8 \cdot 10^4 \cdot 48 = 1{,}344 \cdot 10^6$ (km)

Zurückgelegte Strecke in einem Jahr:

$2{,}8 \cdot 10^4 \cdot 8\,760 \approx 2{,}45 \cdot 10^8$ (km)

c) $7{,}5 \cdot 10^7 : (2{,}8 \cdot 10^4) \approx 2\,679$ (h) ≈ 112 (d)

d) Erdradius: $40\,000 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r$ $r = \frac{40\,000}{2 \cdot 3{,}14} \approx 6\,369$ (km)

Radius der Flugbahn: $6\,369 + 400 = 6\,769$ (km)

Länge der Flugbahn: $2 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,769 = 42\,509$ (km)

Benötigte Zeit: $42\,509 : (2{,}8 \cdot 10^4) = 1{,}52$ (h)

Die Abschlussrunde bietet die Möglichkeit, am Ende einer Einheit den Lernstand zu erheben und gegebenenfalls Maßnahmen zu ergreifen, um Defizite zu beheben. Sollte die Lehrkraft eine Testung unabhängig vom Schulbuch wünschen, stehen in click & teach Klassenarbeiten zur Verfügung.

L

Die Seiten „Kreuz und quer“ greifen im Sinne einer permanenten Wiederholung Lerninhalte früher behandelter Kapitel auf und sichern so nachhaltig Basiskompetenzen.

Zahlen und Operationen

1 a) $9 - (5x - 4) - 5x$
$= 9 - 5x + 4 - 5x$
$= 13 - 10x$

b) $3\,(4x - 2) - (4 + x) \cdot 6 + 12$
$= 12x - 6 - 24 - 6x + 12$
$= 6x - 18$

c) $4\left(1 + \frac{3}{4}x\right) - (6 - 3x) \cdot \frac{1}{3}$
$= 4 + 3x - 2 + x$
$= 2 + 4x$

d) $(2x - 4{,}5) \cdot (1{,}4 - 2y)$
$= 2{,}8x - 4xy - 6{,}3 + 9y$

2 a) $4\,(x + 2) - 5{,}5x = 24{,}5 - x$
$4x + 8 - 5{,}5x = 24{,}5 - x$
$-1{,}5x + 8 = 24{,}5 - x$
$\Rightarrow x = -33$

b) $\frac{4x - 2}{3} = \frac{12 + 2x}{2}$
$2\,(4x - 2) = 3\,(12 + 2x)$
$8x - 4 = 36 + 6x$
$\Rightarrow x = 20$

c) $\frac{18}{x} - 8{,}5 = \frac{13{,}5}{x + 25} \quad | \cdot x \cdot (x + 25)$
$18\,(x + 25) - 8{,}5x\,(x + 25) = 13{,}5x$
$\Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 \approx -26{,}47$

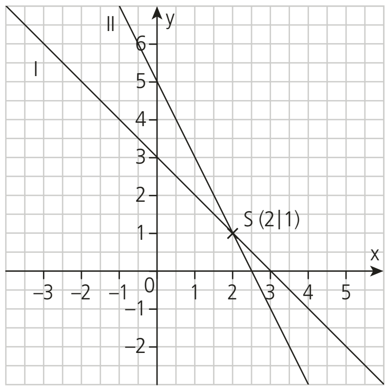
d) $y^2 + 2y^2 - 26 = (3 + y^2) \cdot 8$
$10y^2 - 26 = 24 + 8y^2$
$y^2 = 25$
$y_{1/2} = \pm\sqrt{25}$
$y_1 = 5 \quad y_2 = -5$

3 a) I $x = 4y - 14$
II $2x + 3y = 5$
I in II:
$2\,(4y - 14) + 3y = 5$
$8y - 28 + 3y = 5$
$11y - 28 = 5$
$\Rightarrow y = 3$
$y = 3$ in I:
$x = 4 \cdot 3 - 14 = -2$
L: $(-2|3)$

b) I $2x = 10y - 6$
II $2x = 4y + 3$
I – II:
$0 = 6y - 9$
$\Rightarrow y = 1{,}5$
$y = 1{,}5$ in I:
$2x = 10 \cdot 1{,}5 - 6$
$\Rightarrow x = 4{,}5$
L: $(4{,}5|1{,}5)$

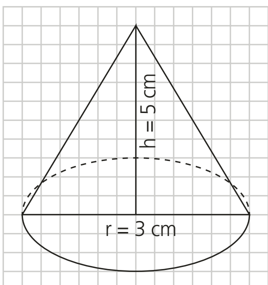
4 I $2x + 2y = 6$
$y = -x + 3$

II $2x + y = 5$
$y = -2x + 5$

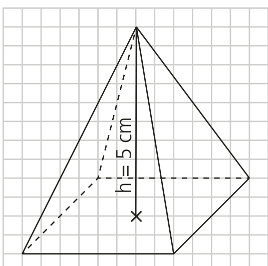


Raum und Form

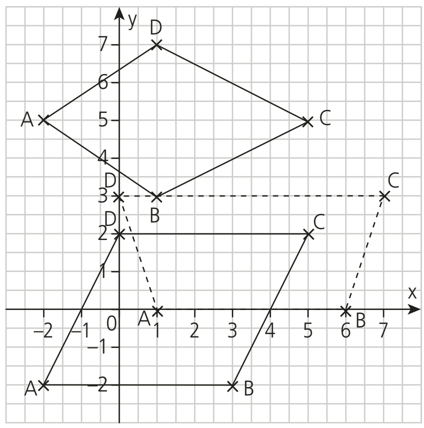
1 a)



b)



2



3 a) –
b) Kegel
c) –
d) quadratische Pyramide
e) fünfseitige Pyramide
f) quadratische Pyramide

Größen und Messen

1

	a)	b)	c)
Seite a	3,6 cm	2,5 m	1,6 dm
Seite b	2,5 cm	≈ 2,59 m	1,5 dm
Diagonale e	≈ 4,4 cm	3,6 m	≈ 2,2 dm
Flächeninhalt AR	9 cm^2	6,476 m^2	2,4 dm^2

2 $e^2 = 15^2 + 6^2$
$e^2 = 261 \quad | \sqrt{}$
$e = 16{,}2$ (cm)

$d^2 = e^2 + 8^2$
$d^2 = 326{,}44 \quad | \sqrt{}$
$d = 18{,}0$ (cm)

3 a) Höhe Pyramide:
$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_K^2 = h_D^2$
$\left(\frac{4}{2}\right)^2 + h_K^2 = 6^2$
$h_K^2 = 32 \quad | \sqrt{}$
$h_K = 5{,}7$ (cm)

Oberflächeninhalt Pyramide
$O_{Py} = a \cdot a + 4 \cdot \frac{a \cdot h_D}{2}$
$= 4 \cdot 4 + 4 \cdot \frac{4 \cdot 6}{2}$
$= 64$ (cm^2)

Volumen Pyramide
$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_K$
$= \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 5{,}7$
$= 30{,}4\ cm^3$

b) Volumen Kegel
$V_K = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot 3{,}14 \cdot h_K$
$= \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 3{,}14 \cdot 5$
$= 47{,}1$ (cm^3)

Seitenline s
$r^2 + h_K^2 = s^2$
$3^2 + 5^2 = s^2 \quad | \sqrt{}$
5,8 (cm) ≈ s

Oberflächeninhalt Kegel
$O_K = r^2 \cdot 3{,}14 + r \cdot 3{,}14 \cdot s$
$= 9 \cdot 3{,}14 + 3 \cdot 3{,}14 \cdot 5{,}8$
$= 82{,}9\ cm^2$

Funktionale Zusammenhänge

1 a) m = 2 $\quad$ t = –2 ⇒ y = 2x – 2
b) m = 1 $\quad$ t = 2 ⇒ y = x + 2
c) m = 1 $\quad$ t = 5 ⇒ y = x + 5
d) m = 2,5 $\quad$ t = 1 ⇒ y = 2,5x + 1
e) m = 3 $\quad$ t = –1 ⇒ y = 3x – 1

2