

K5

- 1 a) $\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$.
 $\mathbb{N}_0$ ist die Menge der natürlichen Zahlen und der Null: $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$.
 $\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.
 $\mathbb{Q}$ ist die Menge der rationalen Zahlen, also aller Zahlen, die sich als Quotient $\frac{a}{b}$ zweier ganzer Zahlen a, b ($b \neq 0$) darstellen lassen. Das sind alle Zahlen, deren Dezimalbruchdarstellung abbrechend oder periodisch ist.
 $\mathbb{R}$ ist die Menge der reellen Zahlen, die aus den rationalen und den irrationalen Zahlen besteht.
- b) 1 $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, da $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist.
 2 $\frac{6}{3} \in \mathbb{N}$, da $\frac{6}{3} = 2$ eine natürliche Zahl ist.
 3 $1, \bar{3} \in \mathbb{Q}$, da $1, \bar{3} = \frac{4}{3}$ eine rationale Zahl ist.
 4 $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, da π eine nicht abbrechende, nicht periodische Dezimalbruchdarstellung hat und daher eine irrationale Zahl ist.
 5 $\sqrt{-5} \notin \mathbb{R}$, da $\sqrt{-5} = \sqrt{5} > 0$ gilt.
 6 $\sqrt{\frac{6}{24}} \in \mathbb{Q}$, da $\sqrt{\frac{6}{24}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ eine rationale Zahl ist.
 7 $\frac{3}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$, da $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ eine irrationale Zahl ist.
 8 $\sqrt{18 \cdot 8} \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, da $\sqrt{18 \cdot 8} = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12$ eine rationale Zahl ist.

K5

- 2 a) $\sqrt{25 \cdot 9} = 5 \cdot 3 = 15$ b) $\sqrt{196 \cdot 16} = 14 \cdot 4 = 56$
 c) $\sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ d) $\sqrt{128} = \sqrt{2 \cdot 64} = 8\sqrt{2}$
 e) $\frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{4}{10} \sqrt{10} = \frac{2}{5} \sqrt{10}$ f) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} = 8\sqrt{3}$
 g) $\frac{12}{\sqrt{8}} = \frac{12}{2 \cdot \sqrt{2}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ h) $\frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{15 \cdot \sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$
 i) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot 2 = 6$ j) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 16}{3 \cdot 15}} = \frac{4}{\sqrt{15}} = \frac{4 \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}} = \frac{4}{15} \sqrt{15}$

K5/6

- 3 a) $3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$, da für eine positive Basis a und eine natürliche Zahl n die Potenz $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ist.
 $10^{\frac{2}{3}} = 10^2 \cdot \frac{1}{3} = (10^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10^2} = \sqrt[3]{100}$
 $2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, da man Potenzen mit negativen Exponenten als Bruch mit Zähler 1 schreiben kann.
 $5^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{5^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5^3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{125}}$
- b) Rechengesetze für Potenzen (positive Basen $a, b \in \mathbb{R}^+$, Exponenten $m, p \in \mathbb{Z}$, $n, q \in \mathbb{N}$):
- I $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$
Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem die Basis beibehalten wird und die Exponenten addiert werden.
 - II $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$
Potenzen mit gleichen Basen werden dividiert, indem die Basis beibehalten wird und die Exponenten subtrahiert werden.
 - III $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$
Eine Potenz wird potenziert, indem die Basis beibehalten wird und die Exponenten multipliziert werden.
 - IV $a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{m}{n}}$
Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem die Basen multipliziert werden und der gemeinsame Exponent beibehalten wird.
 - V $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = (a : b)^{\frac{m}{n}}$
Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem die Basen dividiert werden und der gemeinsame Exponent beibehalten wird.

- c) 1 $\frac{2^{10} \cdot a^5}{(2a^2)^5 \cdot 2^4} = \frac{2^6 \cdot a^5}{2^5 \cdot a^{10}} = \frac{2}{a^5}$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- 2 $\frac{(-6)^4 \cdot a^5}{6a^3 \cdot (-6)^2} = \frac{(-6)^2 \cdot a^2}{6} = \frac{36 \cdot a^2}{6} = 6a^2$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- 3 $\frac{3x^5 \cdot 2x^4}{2x^2 \cdot 3x^3} = x^3 \cdot x = x^4$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- 4 $\left(\frac{x^4 y}{x^2 y^3}\right)^{-2} = \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{-2} = \left(\frac{y^2}{x^2}\right)^2 = \frac{y^4}{x^4}$ $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- 5 $\frac{(5x^2)^3 - (-3)^3 \cdot x^6}{(x^{-1})^2 \cdot (2x^2)^4} = \frac{125x^6 + 27x^6}{x^{-2} \cdot 16x^8} = \frac{152x^6}{16x^6} = \frac{19}{2} = 9,5$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- 6 $\frac{25x^2}{5 \cdot x^{-3}} + \frac{30x^4}{6x^{-5}} = 5x^5 + 5x^9 = 5x^5 \cdot (1 + x^4)$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- 7 $(x^3 - x^2 + x - 1) \cdot x^{-3} = x^0 - x^{-1} + x^{-2} - x^{-3} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- 8 $\frac{1}{x-2} + 3 - \frac{1-x}{2-x} = \frac{1}{x-2} + \frac{3(x-2)}{x-2} - \frac{x-1}{x-2} = \frac{1+3(x-2)-(x-1)}{x-2}$
 $= \frac{1+3x-6-x+1}{x-2} = \frac{2x-4}{x-2} = \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- 9 $\sqrt{4a^2 + 4} = \sqrt{4 \cdot (a^2 + 1)} = 2\sqrt{a^2 + 1}$ $a \in \mathbb{R}$
- 10 $\frac{(a+1)^2 - (a-1)^2}{a} = \frac{a^2 + 2a + 1 - (a^2 - 2a + 1)}{a} = \frac{a^2 + 2a + 1 - a^2 + 2a - 1}{a} = \frac{4a}{a} = 4$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- 11 $\frac{4a^2 + 4a + 1}{2a + 1} = \frac{(2a + 1)^2}{2a + 1} = 2a + 1$ $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
- 12 $\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1} = \frac{x(x+1) - x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + x - x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{2x}{x^2 - 1}$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

K1/6 4 a) Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung. Jedem Element x der Definitionsmenge wird genau ein Wert $y = f(x)$ der Wertemenge zugeordnet.

Die maximale Definitionsmenge besteht aus allen Zahlen der Grundmenge, die in den Funktions-term eingesetzt werden können. Dabei darf z. B. ein Nenner nicht null werden und Terme unter einer Wurzel dürfen nicht negativ werden.

Die Wertemenge ist die Menge aller Funktionswerte, wenn die Variable alle zulässigen Werte der Definitionsmenge annimmt.

Für z. B. $f: x \mapsto \frac{5}{(x+1)^2}$ ist $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $W_f = \mathbb{R}^+$.

b) 1 Der Graph ist kein Funktionsgraph, da z. B. dem Wert $x_0 = 1$ zwei y -Werte zugeordnet werden.

2 Dies ist der Graph einer Funktion, da jedem x -Wert genau ein y -Wert zugeordnet wird.

Punkte: $A(0|-1)$, $B(2|2)$; lineare Funktion: $f(x) = mx + t$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-1)}{2 - 0} = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2}$$

Einsetzen der Koordinaten von B und von m in $y = mx + t$: $2 = \frac{3}{2} \cdot 2 + t \Rightarrow t = -1$

Funktionsterm: $f(x) = 1,5x - 1$

3 Der Graph ist kein Funktionsgraph, da dem Wert $x_0 = 3$ mehr als zwei (unendlich viele) y -Werte zugeordnet werden.

4 Dies ist der Graph einer Funktion, da jedem x -Wert genau ein y -Wert zugeordnet wird.

Punkte: $A(0|2)$, $B(3|2)$; Funktionsterm: $f(x) = 2$

5 Dies ist der Graph einer Funktion, da jedem x -Wert genau ein y -Wert zugeordnet wird.

Punkte: $A(0|2)$, $B(-2|0)$, $C(2|0)$

Ansatz: Quadratische Funktion über Nullstellenform:

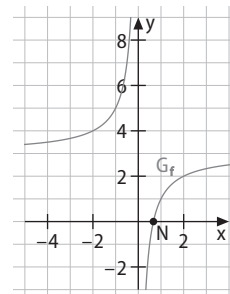
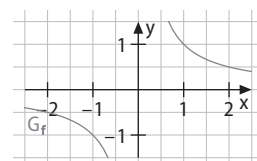
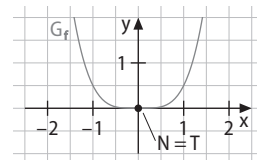
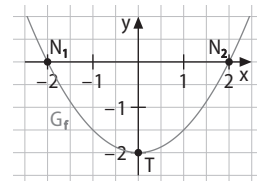
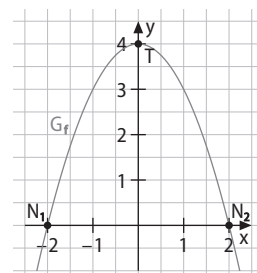
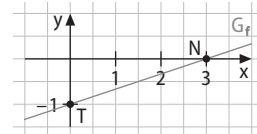
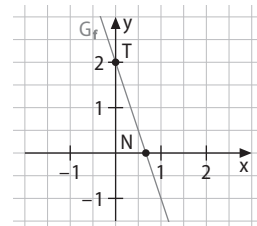
$$f(x) = a \cdot (x + 2)(x - 2) \text{ bzw. } f(x) = a(x^2 - 4)$$

Einsetzen der Koordinaten von $A(0|2)$: $2 = a \cdot (0^2 - 4) = -4a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$$\text{Funktionsterm: } f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 4) \text{ bzw. } f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$$

K5

- 5 a) $f(x) = -3x + 2$;
 $D_f = \mathbb{R}, W_f = \mathbb{R}$;
 Schnittpunkt mit der y-Achse: $T(0|2)$
 Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$
 $\Rightarrow -3x + 2 = 0$
 $\Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow N(\frac{2}{3}|0)$
 Monotonie: Der Graph ist monoton fallend (Steigung $m = -3$).
- b) $f(x) = -1 + \frac{1}{3}x$;
 $D_f = \mathbb{R}, W_f = \mathbb{R}$;
 Schnittpunkt mit der y-Achse: $T(0|-1)$
 Schnittpunkt mit der x-Achse:
 $f(x) = 0 \Rightarrow -1 + \frac{1}{3}x = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow N(3|0)$
 Monotonie: Der Graph ist monoton steigend (Steigung $m = \frac{1}{3}$).
- c) $f(x) = 4 - x^2$;
 $D_f = \mathbb{R}, W_f =]-\infty; 4]$;
 Schnittpunkt mit der y-Achse: $T(0|4)$
 Schnittpunkt mit der x-Achse:
 $f(x) = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$
 $\Rightarrow N_1(-2|0), N_2(2|0)$
 Monotonie: Der Graph ist für $x < 0$ monoton steigend und für $x > 0$ monoton fallend.
- d) $f(x) = 0,5x^2 - 2$;
 $D_f = \mathbb{R}, W_f = [-2; +\infty[$;
 Schnittpunkt mit der y-Achse: $T(0|-2)$
 Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$
 $\Rightarrow 0,5x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 0,5x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 4$
 $\Rightarrow x_{1,2} = \pm 2 \Rightarrow N_1(-2|0), N_2(2|0)$
 Monotonie: Der Graph ist für $x < 0$ monoton fallend und für $x > 0$ monoton steigend.
- e) $f(x) = 0,5x^4$;
 $D_f = \mathbb{R}, W_f = \mathbb{R}_0^+$;
 Schnittpunkt mit der y-Achse: $T(0|0)$
 Schnittpunkt mit der x-Achse:
 $f(x) = 0 \Rightarrow 0,5x^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow N(0|0) = T$
 Monotonie: Der Graph ist für $x < 0$ monoton fallend und für $x > 0$ monoton steigend.
- f) $f(x) = \frac{1}{x}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
 keine Schnittpunkte mit den Achsen
 Monotonie: Der Graph ist sowohl für $x \in]-\infty; 0[$ als auch für $x \in]0; +\infty[$ monoton fallend.
- g) $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$;
 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}, W_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$;
 kein Schnittpunkt mit der y-Achse
 Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$
 $\Rightarrow 3 - \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x} = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow N(\frac{2}{3}|0)$
 Monotonie: Der Graph ist sowohl für $x \in]-\infty; 0[$ als auch für $x \in]0; +\infty[$ monoton steigend.



h) $f(x) = \frac{3}{x-2} + 0,5$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0,5\}$;

Schnittpunkt mit der y-Achse:

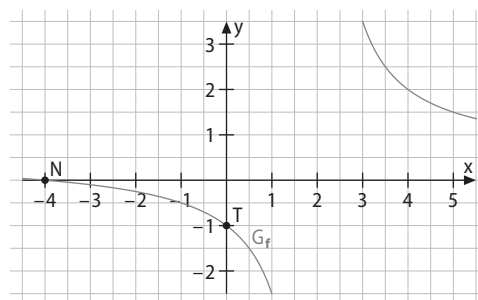
$$f(0) = \frac{3}{-2} + 0,5 = -1 \Rightarrow T(0|-1)$$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{x-2} + 0,5 = 0 \Rightarrow \frac{3}{x-2} = -0,5$$

$$\Rightarrow -6 = x - 2 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow N(-4|0)$$

Monotonie: Der Graph ist sowohl für $x \in]-\infty; 2[$ als auch für $x \in]2; +\infty[$ monoton fallend.



i) $f(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$;

$$D_f = \mathbb{R}, W_f = [-1; +\infty[;$$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

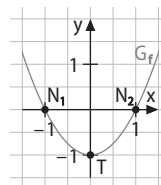
$$f(0) = -1 \Rightarrow T(0|-1)$$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow N_1(-1|0), N_2(1|0)$$

Monotonie: Der Graph ist für $x < 0$ monoton fallend und für $x > 0$ monoton steigend.



K5

6 a) 1 $x^2 - 18 = -14 \quad | + 18$

$$x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

$$x_{1,2} = \pm 2$$

$$L = \{-2; 2\}$$

Da in der quadratischen Gleichung kein linearer Term vorkommt, löst man die Gleichung nach x^2 auf und radiziert.

2 $x^2 - 14x + 49 = 0$ Nutze die 2. binomische Formel.

$$(x-7)^2 = 0 \quad | \sqrt{}$$

$$x-7 = 0 \quad | + 7$$

$$x = 7$$

$$L = \{7\}$$

3 $3x^2 = 6x \quad | - 6x$

$$3x^2 - 6x = 0 \quad \text{Klammere „3x“ aus.}$$

$$3x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2$$

$$L = \{0; 2\}$$

Nutze, dass der Wert eines Produkts null ist, wenn mindestens einer der Faktoren null ist.

4 $4x^2 + 2x + 2 = 0$

$$2 \cdot (2x^2 + x + 1) = 0 \quad | : 2$$

$$2x^2 + x + 1 = 0 \quad \text{Nutze die Lösungsformel für quadratische Gleichungen.}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

Da die Diskriminante $D = 1 - 8 = -7$ negativ ist, hat die Gleichung keine Lösung: $L = \{\}$.

5 $4x = 2x^2 + 2 \quad | - 4x$

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

Klammere aus und nutze die binomischen Formeln.

$$2 \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$2(x-1)^2 = 0$$

$$| : 2$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$| \sqrt{}$$

$$x-1 = 0$$

$$x = 1$$

$$L = \{1\}$$

6 $(x - 2) \cdot (x - 3) = 0 \quad L = \{2; 3\}$

Nutze, dass der Wert eines Produkts genau dann null ist, wenn mindestens einer der Faktoren null ist.

- b)** Eine Gerade, die nicht parallel zur y-Achse verläuft, lässt sich als Graph einer linearen Funktion mit einem Term der Form $g(x) = mx + t$; $m, t \in \mathbb{R}$ auffassen. Der Term einer quadratischen Funktion hat die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$.

Die x-Koordinaten der Schnittpunkte berechnen sich durch Gleichsetzen der Terme: $f(x) = g(x)$.

Dies führt auf eine quadratische Gleichung, die höchstens zwei Lösungen hat.

Verläuft die Gerade parallel zur y-Achse ($x = x_0$), hat sie mit der Parabel jeweils genau einen Schnittpunkt $(x_0 | f(x_0))$, also stimmt auch hier die Behauptung „höchstens zwei“.

Mit einer DGS lässt sich dies z. B. durch die Verwendung von Schieberegeln plausibel machen.

- K4** **7** **1** Da drei beliebige Gitterpunkte gegeben sind, nutzt man die allgemeine Parabelform **B**.
Punkte:

$$A(-1 | 1) \in G_f: f(-1) = 1 \Rightarrow \text{I: } a - b + c = 1$$

$$B(1 | 2) \in G_f: f(1) = 2 \Rightarrow \text{II: } a + b + c = 2$$

$$C(2 | 1,5) \in G_f: f(2) = 1,5 \Rightarrow \text{III: } 4a + 2b + c = 1,5$$

$$\text{Lösung des LGS: II-I: } 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{2} \text{ einsetzen in II: } a + c = 1,5 \quad \text{II}^*$$

$$b = \frac{1}{2} \text{ einsetzen in III: } 4a + c = 0,5 \quad \text{III}^*$$

$$\text{III}^* - \text{II}^*: 3a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$a = -\frac{1}{3} \text{ und } b = \frac{1}{2} \text{ einsetzen in II:}$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + c = 2 \Rightarrow c = \frac{11}{6} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{11}{6}$$

- 2** Man nutzt die Scheitelform **C**, da mit dem Punkt $A(1 | -3)$ der Scheitel gegeben ist.

$$\Rightarrow g(x) = a(x - 1)^2 - 3$$

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $B(0 | -1,5) \in G_g$:

$$-1,5 = a \cdot (0 - 1)^2 - 3$$

$$-1,5 = a - 3 \Rightarrow a = 1,5$$

$$\Rightarrow g(x) = 1,5(x - 1)^2 - 3$$

- 3** Man nutzt die Nullstellenform **A**, da mit $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ die Nullstellen der Funktion gegeben sind.

$$\Rightarrow h(x) = a(x - 1)(x - 3)$$

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $A(0 | 1) \in G_h$:

$$1 = a \cdot (0 - 1) \cdot (0 - 3)$$

$$1 = 3a \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{3}(x - 1)(x - 3)$$

K1/5 **8** **a)** $y = x^2 + 2x - 3$

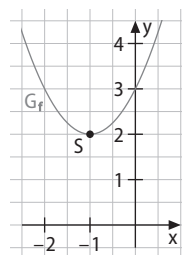
Durch quadratische Ergänzung erhält man:

$$y = x^2 + 2x + 1 - 1 + 3$$

$$y = (x + 1)^2 + 2$$

Parabelscheitel: $S(-1 | 2)$

Der Punkt $A(-2 | -5)$ liegt unterhalb der Parabel P, da $(-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 3 = 3 > -5$ gilt.



b) $y = -0,5x^2 - 4x + 12 \Rightarrow y = -0,5 \cdot (x^2 + 8x - 24)$

Durch quadratische Ergänzung erhält man:

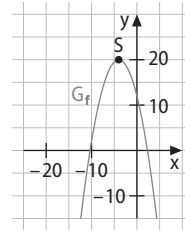
$$y = -0,5 \cdot (x^2 + 8x + 16 - 16 - 24)$$

$$y = -0,5 \cdot (x + 4)^2 + 20$$

Parabelscheitel: $S(-4|20)$

Der Punkt $A(3|4)$ liegt oberhalb der Parabel P,

da $-0,5 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 12 = -4,5 < 4$ gilt.



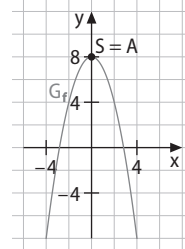
c) $y = -(x + 2)(x - 2) + 4$

$$\Rightarrow y = -(x^2 - 4) + 4$$

$$\Rightarrow y = -x^2 + 8$$

Parabelscheitel: $S(0|8)$

Da $A = S$ liegt folglich A auf der Parabel P.



d) $y = 3x^2 + 6x + 12$

$$\Rightarrow y = 3(x^2 + 2x + 4)$$

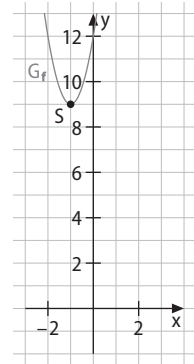
Durch quadratische Ergänzung erhält man:

$$y = 3 \cdot (x^2 + 2x + 1 - 1 + 4)$$

$$y = 3 \cdot (x + 1)^2 + 9$$

Parabelscheitel: $S(-1|9)$

Der Punkt $A(-1|8)$ liegt unterhalb der Parabel P, da die y-Koordinate des Scheitels bei einer nach oben geöffneten ($a > 0$) Parabel der kleinste Funktionswert ist.



K1/5 9 a) $f^*(x) = -f(x)$: Der Graph G_{f^*} entsteht aus dem Graphen G_f durch Spiegelung an der x-Achse.

1 $f^*(x) = -3x$

2 $f^*(x) = -x^2 + 2$

3 $f^*(x) = -\frac{1}{x}$

4 $f^*(x) = -x^3$

b) $f^*(x) = 2 \cdot f(x)$: Der Graph G_{f^*} entsteht aus dem Graphen G_f durch Streckung um den Faktor 2 in y-Richtung.

1 $f^*(x) = 6x$

2 $f^*(x) = 2x^2 - 4$

3 $f^*(x) = \frac{2}{x}$

4 $f^*(x) = 2x^3$

c) $f^*(x) = f(x) + 3$: Der Graph G_{f^*} entsteht aus dem Graphen G_f durch Verschiebung um 3 Einheiten in positive y-Richtung.

1 $f^*(x) = 3x + 3$

2 $f^*(x) = x^2 + 1$

3 $f^*(x) = \frac{1}{x} + 3$

4 $f^*(x) = x^3 + 3$

d) $f^*(x) = f(x - 1)$: Der Graph G_{f^*} entsteht aus dem Graphen G_f durch Verschiebung um eine Einheit in positive x-Richtung.

1 $f^*(x) = 3(x - 1) = 3x - 3$

2 $f^*(x) = (x - 1)^2 - 2 = x^2 - 2x - 1$

3 $f^*(x) = \frac{1}{x - 1}$

4 $f^*(x) = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

e) $f^*(x) = -f(x) - 1$: Der Graph G_{f^*} entsteht aus dem Graphen G_f durch Spiegelung an der x-Achse und anschließende Verschiebung um eine Einheit in negative y-Richtung.

1 $f^*(x) = -3x - 1$

2 $f^*(x) = -x^2 + 1$

3 $f^*(x) = -\frac{1}{x} - 1$

4 $f^*(x) = -x^3 - 1$

f) $f^*(x) = f(-x) + 5$: Der Graph G_{f^*} entsteht aus dem Graphen G_f durch Spiegelung an der y-Achse und Verschiebung um 5 Einheiten in positive y-Richtung.

1 $f^*(x) = -3x + 5$

2 $f^*(x) = x^2 + 3$

3 $f^*(x) = -\frac{1}{x} + 5$

4 $f^*(x) = -x^3 + 5$

K5/6

- 10 a) mögliche Lösung: Das Glücksrad wird einmal gedreht. Wenn eine „4“ gedreht wird, erhält der Spieler einen Preis.

b)

Summenwert	Ergebnisse beim zweimaligen Drehen	Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Summe
2	(1; 1)	$\frac{1}{25}$
3	(1; 2), (2; 1)	$\frac{2}{25}$
4	(1; 3); (2; 2); (3; 1)	$\frac{3}{25}$
5	(1; 4); (2; 3); (3; 2); (4; 1)	$\frac{4}{25}$
6	(1; 5); (2; 4); (3; 3); (4; 2); (5; 1)	$\frac{5}{25}$
7	(2; 5); (3; 4); (4; 3); (5; 2)	$\frac{4}{25}$
8	(3; 5); (4; 4); (5; 3)	$\frac{3}{25}$
9	(4; 5); (5; 4)	$\frac{2}{25}$
10	(5; 5)	$\frac{1}{25}$

Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer durch 3 teilbaren Summe: $\frac{2}{25} + \frac{5}{25} + \frac{2}{25} = \frac{9}{25} = 36\%$

Es liegt kein Laplace-Experiment vor, da die Summen jeweils nicht mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten.

K4

- 11 a) 1 $P(\text{„ein 15-jähriger Junge gewinnt“}) = \frac{6}{25} = 24\%$
 2 $P(\text{„eine Schülerin, die älter als 15 Jahre ist, gewinnt“}) = \frac{2+5+1}{25} = \frac{8}{25} = 32\%$

- b) Abkürzungen für die Vierfeldertafel:

M/W: eine zufällig ausgewählte Person ist männlich/weiblich

SU/LS: Eine zufällig ausgewählte Person gibt den Film „Stars in the universe“/„A lovely summer“ an.

	M	W	gesamt
SU	12	6 (= 60% von 10)	18
LS	3	4	7 (= 28% von 25)
gesamt	15	10	25

$P(\text{„Die ausgewählte Person ist männlich und bevorzugt ‚A lovely summer‘“}) = \frac{3}{25} = 12\%$

K1/6

- 12 a) In einem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen denselben Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse.

- b) 1 $x^2 = (3 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2 = 25 \text{ cm}^2 \Rightarrow x = 5 \text{ cm}$
 $A = \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$
 2 $x^2 = (6 \text{ cm})^2 + (14 \text{ cm})^2 = 232 \text{ cm}^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{58} \text{ cm}$
 $A = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 14 \text{ cm} = 42 \text{ cm}^2$
 3 $x^2 = (7 \text{ cm})^2 - (5 \text{ cm})^2 = 24 \text{ cm}^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{6} \text{ cm}$
 $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 2\sqrt{6} \text{ cm} = 5\sqrt{6} \text{ cm}^2$
 4 $x^2 = (10 \text{ cm})^2 - (5 \text{ cm})^2 = 75 \text{ cm}^2 \Rightarrow x = 5\sqrt{3} \text{ cm}$
 $A = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 5\sqrt{3} \text{ cm} = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$

K1/5

13 a) $\sin \alpha = \frac{\text{Länge der Gegenkathete von } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}}$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Länge der Ankathete von } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Länge der Gegenkathete von } \alpha}{\text{Länge der Ankathete von } \alpha}$$

b) 1 $\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos \alpha = 6,5 \text{ cm} \cdot \cos 30^\circ = \frac{13}{4} \sqrt{3} \text{ cm} \approx 5,6 \text{ cm}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \sin \alpha = 6,5 \text{ cm} \cdot \sin 30^\circ = 3,25 \text{ cm}$$

2 $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{34 \text{ cm}}{17 \text{ cm}} = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63,4^\circ$

$$\tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{17 \text{ cm}}{34 \text{ cm}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta \approx 26,6^\circ \text{ oder: } \beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 63,4^\circ = 26,6^\circ$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(34 \text{ cm})^2 + (17 \text{ cm})^2} = 17\sqrt{5} \text{ cm} \approx 3,8 \text{ dm}$$

3 $c = 2b = 18,8 \text{ cm}$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \sin \alpha = 18,8 \text{ cm} \cdot \sin 60^\circ = \frac{47}{5} \sqrt{3} \text{ cm} \approx 16,28 \text{ cm}$$

c) 1 Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel:

$$\text{Für } \alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ \text{ gilt } \sin \alpha = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \text{ aber } \sin \beta = \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3} \neq \sin \alpha.$$

2 Die Aussage ist wahr. $\sin \alpha = \frac{\text{Länge der Gegenkathete von } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}} < 1$, da in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse immer länger als die beiden Katheten ist.

3 Die Aussage ist wahr, da gilt: $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\tan \beta}$.

4 Die Aussage ist wahr, da gilt: $\cos \beta = \frac{a}{c} = \sin \alpha$.

5 Die Aussage ist wahr, sie ist als „trigonometrischer Pythagoras“ bekannt.

6 Die Aussage ist falsch, z. B. ist $\tan 60^\circ = \sqrt{3} > 1$.

K2

14 Bezeichnungen:

h: Höhe des Baums über der Höhe des Messgeräts

x: horizontaler Abstand von P_2 zum Baum.

$$\text{Es gilt einerseits: } \tan \alpha_2 = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\tan \alpha_2} \quad \text{I}$$

$$\text{Andererseits: } \tan \alpha_1 = \frac{h}{x + 10 \text{ m}} \Leftrightarrow x + 10 \text{ m} = \frac{h}{\tan \alpha_1} \Leftrightarrow x = \frac{h}{\tan \alpha_1} - 10 \text{ m} \quad \text{II}$$

$$\text{I} = \text{II: } \frac{h}{\tan \alpha_2} = \frac{h}{\tan \alpha_1} - 10 \text{ m}$$

$$\Leftrightarrow h \cdot \tan \alpha_1 = h \cdot \tan \alpha_2 - 10 \text{ m} \cdot \tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2$$

$$\Leftrightarrow h \cdot (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) = -10 \text{ m} \cdot \tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{-10 \text{ m} \cdot \tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2} = \frac{10 \text{ m} \cdot \tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2}{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1} \approx 15,4 \text{ m}$$

$$\text{Höhe des Baums: } 15,4 \text{ m} + 1,5 \text{ m} = 16,9 \text{ m}$$

- K1** 15 a) Die Aussage ist falsch. Für die Umfangslänge U eines Kreises gilt: $U = 2r \cdot \pi$ (r : Länge des Kreisradius).
- b) Die Aussage ist (bei gleichbleibendem Inhalt der Grundfläche) wahr. Für das Volumen eines Prismas gilt: $V = G \cdot h$. Damit sind Volumen und Höhe direkt proportional zueinander (wenn der Inhalt der Grundfläche sich nicht ändert).
- c) Die Aussage ist falsch (bei gleichbleibender Höhe des Zylinders).
Für das Volumen eines Zylinders gilt: $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$.
Verdoppelt man den Radius des Grundkreises (bei gleichbleibender Höhe), so vervierfacht sich das Volumen, denn $V^* = (2r)^2 \cdot \pi \cdot h = 4r^2 \pi \cdot h = 4V$.

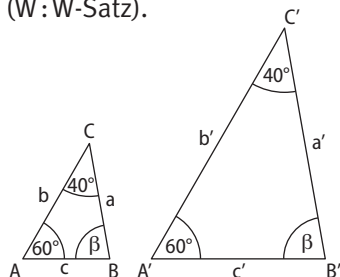
K2 16 a) $V_{\text{Hohlzylinder}} = V_{\text{außen}} - V_{\text{innen}} = \pi r_{\text{außen}}^2 h - \pi r_{\text{innen}}^2 h = \pi h (r_{\text{außen}}^2 - r_{\text{innen}}^2)$
 $= \pi \cdot 200 \text{ mm} \cdot [(70 \text{ mm})^2 - (50 \text{ mm})^2] = 480\,000 \pi \text{ mm}^3 = 480 \pi \text{ cm}^3 \approx 1508 \text{ cm}^3$

$O_{\text{Hohlzylinder}} = M_{\text{außen}} + M_{\text{innen}} + 2 \cdot (G_{\text{außen}} - G_{\text{innen}}) = 2r_{\text{außen}} \pi h + 2r_{\text{innen}} \pi h + 2(r_{\text{außen}}^2 \pi - r_{\text{innen}}^2 \pi)$
 $= 2h\pi(r_{\text{außen}} + r_{\text{innen}}) + 2(r_{\text{außen}}^2 - r_{\text{innen}}^2)\pi$
 $= 2 \cdot 200 \text{ mm} \cdot \pi \cdot (70 \text{ mm} + 50 \text{ mm}) + 2\pi \cdot [(70 \text{ mm})^2 - (50 \text{ mm})^2]$
 $= 52\,800 \pi \text{ mm}^2 = 528 \pi \text{ cm}^2 \approx 1659 \text{ cm}^2$

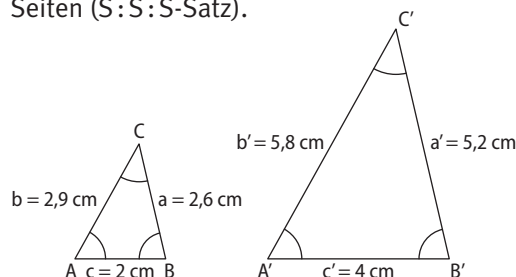
- K5** 17 a) Nach dem 2. Strahlensatz gilt: $\frac{x}{2 \text{ cm}} = \frac{5 \text{ cm} + 3 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} \Leftrightarrow x = \frac{8 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} \cdot 2 \text{ cm} = 3,2 \text{ cm}$
- b) Nach dem 2. Strahlensatz gilt: $\frac{x + 5 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = \frac{5 \text{ cm}}{7 \text{ cm}} \Leftrightarrow x + 5 \text{ cm} = \frac{5}{7} \cdot 12 \text{ cm}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{60}{7} \text{ cm} - 5 \text{ cm} = \frac{25}{7} \text{ cm} = 3\frac{4}{7} \text{ cm} \approx 3,6 \text{ cm}$

- K1** 18 a) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen ...

... in zwei Winkeln
(W:W-Satz).

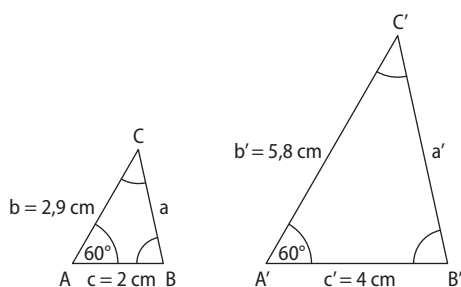


... in allen Verhältnissen der Längen entsprechender
Seiten (S:S:S-Satz).



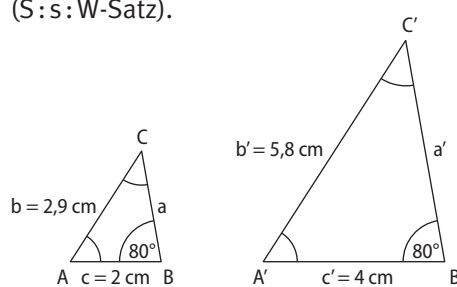
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = 2$$

... in einem Winkel und dem Verhältnis der
anliegenden Seitenlängen (S:W:S-Satz).



$$\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = 2$$

... im Verhältnis zweier sich entsprechender Seiten-
längen und dem Gegenwinkel der längeren Seite
(S:s:W-Satz).



$$\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = 2$$

1

Exponentielles Wachstum und Logarithmen

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:

Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K5

- Prozentuale Anteile der Einwohner im „Dorf“:

	Asien	Afrika	Europa	Lateinamerika	Nordamerika	Ozeanien
2021	60%	17%	9%	8%	5%	1%
2050	54,0%	25,8%	7,3%	8,1%	4,0%	0,8%

K6

- Individuelle Ergebnisse, z. B. aktuelle jährliche Wachstumsrate 1,1 %

K5

- Jetzt leben auf der Erde 7,84 Mrd. Menschen, in 2 Jahren 8,01 Mrd., in 10 Jahren 8,75 Mrd.

K3

- Beispiele für mögliches Vorgehen: Man nimmt die aktuelle Wachstumsrate für den Zeitraum bis 2050 als konstant an; alternativ kann man die Wachstumsrate an vermutete Änderungen anpassen.

Ausblick

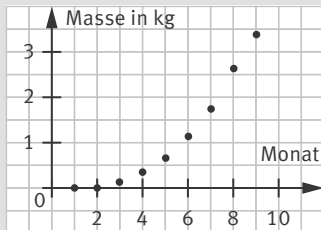
Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schülerinnen und Schüler sowie Lehrkräfte. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schülerinnen und Schüler sowie Lehrkräfte auf das Kommende einstellen.

Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Kap. 1.1

Wachstum im Bauch

- K6** ■ Individuelle Recherche-Ergebnisse. Die Entwicklung der Größe bzw. der Masse eines Embryos kann aus einer Wachstumstabelle entnommen werden.
- K3** ■ In den ersten beiden Schwangerschaftsmonaten kann die Masse des Embryos noch nicht sinnvoll angegeben werden, da sie zu klein ist. Die Entwicklung der Masse eines Embryos kann nicht mit einer linearen Funktion modelliert werden. Beispiel für die Entwicklung der Masse eines Embryos:



Kap. 1.1

Die Reiskornlegende

Auf einem Feld mit der Nummer x liegen 2^{x-1} Körner.

- K3** ■ Annahme: Eine Portion sind 60 g.
 $f(x) = 0,03 \text{ g} \cdot 2^{x-1}$ $f(12) \approx 61 \text{ g}$
 Auf dem 12. Feld liegt ungefähr eine Portion Reis.
- K3** ■ Annahme: Ein Mensch wiegt 80 kg.
 $f(x) = 0,03 \text{ g} \cdot 2^{x-1}$ $f(23) \approx 126 \text{ kg}$
 Auf dem 23. Feld liegt Reis mit einer Masse, die die eines Menschen (üblicherweise) bei weitem übersteigt.
- K3** ■ Annahme: 7,5-Tonner mit Ladevolumen von 35 m^3 bzw. einer maximalen Ladekapazität von 2200 kg.
 $f(x) = 5 \text{ mm}^3 \cdot 2^{x-1}$ $f(33) \approx 21,5 \text{ m}^3$
 $f(x) = 0,03 \text{ g} \cdot 2^{x-1}$ $f(27) \approx 2013 \text{ kg}$
 Die Beladungsgrenze des Lkw wird zuerst durch die Massebeschränkung erreicht: Auf dem 27. Feld liegen 2013 kg Reis – so viel, dass der Lkw bis 10% unter seiner Massegrenze beladen ist.
- K3** ■ Entfernung Mond – Erde ca. 384 000 km
 $f(x) = 5 \text{ mm} \cdot 2^{x-1}$ $f(37) = 343\,597 \text{ km}$ $f(38) = 687\,195 \text{ km}$
 Die Länge der Kette des 37. Feldes ist noch zu kurz, die des 38. Feldes schon deutlich zu lang.

Kap. 1.2

Wachstum auf dem Wasser

- K4** ■ Ablesen aus dem Diagramm (näherungsweise):

Zeit t in Wochen	1	2	3	4	5	6
Bedeckte Fläche in dm^2	10	21	43	86	168	325

- K6** ■ Individuelle Vermutungen. Beispiel: Die bedeckte Fläche scheint sich jede Woche zu verdoppeln.

Kap. 1.3

Alles wird Potenz

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

- Erklärung: erste Rechenregel für Potenzen. Beispiele:

$$1 + 2 = 3 \text{ und } 2 \cdot 4 = 8; -1 + 4 = 3 \text{ und } \frac{1}{2} \cdot 16 = 8; 5 + (-3) = 2 \text{ und } 32 \cdot \frac{1}{8} = 4$$

- Beispiele mit Dezimalzahlen:

$$0,5 + 1,5 = 2 \text{ und } \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4; 2,3 + 1,9 = 4,2 \text{ und } 2^{2,3} \cdot 2^{1,9} = 2^{4,2}$$

- Individuelle Recherche-Ergebnisse.

Zur Geschichte der Logarithmen:

Stifel erkannte die Zusammenhänge zwischen Addition und Multiplikation in den Potenzgesetzen. Während er nur mit ganzen Zahlen in den Exponenten arbeitete, weitete Napier dies auf die reellen Zahlen aus. Bürgi und Napier entwickelten beide unabhängig voneinander die Theorie der Logarithmen. Briggs legte fest, dass man mit dem Logarithmus zur Basis 10 arbeitete. Nach Leonard Euler wurde dann allerdings die Euler'sche Zahl e als Basis verwendet.

Auf dem Logarithmus basiert die Funktionsweise des Rechenschiebers, denn dieser arbeitet mit logarithmischen Skalen, anhand derer die Grundrechenarten abgebildet werden können.

Hintergrund: Über die Logarithmusgesetze kann man Additionen in Multiplikationen umwandeln und umgekehrt.

Kap. 1.4

Bis zum Mond

- Ein DIN-A4-Blatt kann man fünfmal falten. Vermutung: Ein DIN-A3-Blatt lässt sich sechsmal, ein Zeitungsbogen siebenmal falten.
- Gallivan hat eine Formel vorgelegt, anhand derer für eine bestimmte Anzahl von erwünschten Faltungen die nötige Länge des Papierstreifens angegeben wird. Ihre Idee bestand darin, einen langen Streifen Toilettenpapier zu nehmen und diesen immer in die gleiche Richtung zu falten.
- Individuelle Schätzungen.

Berechnung unter Annahme einer Blattdicke von $d_0 = 0,1 \text{ mm}$:

Bei jeder Faltung verdoppelt sich die Dicke, also $d(x) = d_0 \cdot 2^x$; x : Anzahl der Faltungen

Mittlerer Abstand des Mondes von der Erde: $D = 384\,000 \text{ km}$

Bedingung: $0,1 \text{ mm} \cdot 2^x = 3,84 \cdot 10^{11} \text{ mm} \Rightarrow x \approx 41,8$

Nach der 42. Faltung, wenn so viele Faltungen möglich wären, hätte man den Mond erreicht.

Entdecken

K2

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8
Jan (€)	10	20	30	40	50	60	70	80
Emil (€)	0,5	1,5	4,5	13,5	31,5	67,5	139,5	267,5

Jan hat den Vorteil, dass er jeden Monat den gleichen Betrag sparen muss, so dass er von Beginn an weiß, wie viel Geld er jeden Monat zurücklegen muss. Sein Guthaben wächst allerdings recht langsam.

Emil hat den Vorteil, dass er in den ersten Monaten nur geringe Beträge sparen muss, dass sein Guthaben von Monat zu Monat immer schneller anwächst und er schon nach 6 Monaten eine höhere Summe angespart hat als Jan. Allerdings wird Emil seinen Sparplan vermutlich nur wenige Monate lang aufrechterhalten können, da die monatlich zurückzulegenden Beträge bereits nach wenigen Monaten sehr hoch werden.

Nachgefragt

K1

- Begründung: Beim linearen Wachstum kommt immer ein konstanter Wert hinzu. Beim exponentiellen Wachstum wird der Wert, der hinzukommt, ständig größer, und irgendwann übersteigt dieser Wert den konstanten Summanden.

K1

- Die Aussage stimmt nicht. Das Wachstum kann auch ganz anders verlaufen, z. B. ganz unregelmäßig.

Aufgaben

K1/5

- linear (Zunahme: Summand 5)
 - exponentiell (Zunahme: Faktor 3)
 - Es handelt sich weder um exponentielles noch um lineares Wachstum.
 - exponentiell (Zunahme: Faktor 1,5)
 - linear (Abnahme: Summand -2)
 - exponentiell (Abnahme: Faktor 0,5)

Begründungen:

Zu- oder Abnahme in jedem Schritt um den gleichen Summanden: lineares Wachstum

Zu- oder Abnahme in jedem Schritt mit dem gleichen Faktor: exponentielles Wachstum

K1/3

- exponentiell

0	1	2	3
10	11	12,1	13,31

- exponentiell

0	1	2	3
54 000	40 500	30 375	22 781,25

- linear

0	1	2	3
10	9,6	9,2	8,8

- exponentiell

0	1	2	3
0,5	2	8	32

Begründungen:

Zu- oder Abnahme in jedem Schritt um den gleichen Summanden: lineares Wachstum

Zu- oder Abnahme in jedem Schritt mit dem gleichen Faktor: exponentielles Wachstum

- K5** 3 a) prozentuale Zunahme um jeweils 10 %
 b) prozentuale Zunahme um jeweils 5 %
 c) prozentuale Abnahme um jeweils 0,7 %
 d) prozentuale Zunahme um jeweils 3 %
 e) prozentuale Abnahme um jeweils 50 %

- K1/3** 4 a) Exponentielles Wachstum: Pro Zeiteinheit (eine Woche) verdoppelt sich die Anzahl der Algen. Zwei Wochen später kann man von einer Vervierfachung ausgehen. Es liegt also eine Multiplikation mit einem konstanten Faktor zugrunde.
 b) Lineares Wachstum: Jeden Monat wird derselbe Geldbetrag (Summand) addiert.
 c) Exponentielles Wachstum: Es wird jeweils mit dem Faktor 3 vervielfacht.

- K5** 5 a) $a = 1,035$ b) $a = 0,948$ c) $a = 1,1$ d) $a = 0,99$

K4/5 6 1 a)

x	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	5

b)

x	0	1	2	3	4
y	1	2	4	8	16

2 a)

x	0	1	2	3	4
y	-5	0	5	10	15

b)

x	0	1	2	3	4
y	1,25	2,5	5	10	20

3 a)

x	0	1	2	3	4
y	-84	-54	-24	6	36

b)

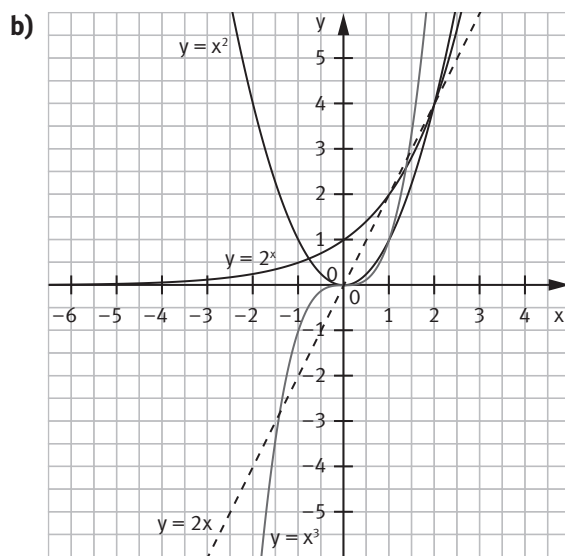
x	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	1	6	36

Vorgehen: Bei a) (lineares Wachstum) wird zu jedem Wert jeweils dieselbe Zahl addiert, bei b) (exponentielles Wachstum) wird jeder Wert jeweils mit demselben Faktor multipliziert.

K4/5 7 a)

	x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5
exponentiell	$y = 2^x$	1	1,189	1,414	1,682	2	2,828	4	5,657
linear	$y = 2x$	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5
quadratisch	$y = x^2$	0	0,063	0,25	0,563	1	2,25	4	6,25
kubisch	$y = x^3$	0	0,016	0,125	0,422	1	3,375	8	15,625

Anmerkung: Die Werte wurden auf drei Nachkommastellen gerundet.

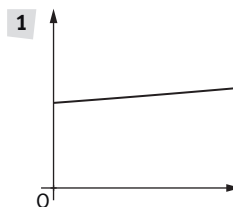


Das exponentielle Wachstum überholt für hinreichend große Werte von x die anderen Wachstumsformen.

- K3/4** 8 a) **A – 4**: Da der Graph gleichmäßig bis zu einem bestimmten Niveau ansteigt und dann waagrecht verläuft.
B – 2: Da der Graph beim Maximum anfängt und dann erst sehr stark und mit der Zeit immer weniger abnimmt: Der Grundwert für diese Prozentrechnung (Multiplikation mit dem Faktor 0,82) wird immer kleiner.
C – 1: Da der Graph exponentiell bis (fast) zu einem Maximum ansteigt und dann auf diesem Niveau bleibt. Das Maximum existiert wegen des abgeschlossenen Gefäßes.
D – 3: Da die Geschwindigkeit konstant ist, nimmt die Anzahl der verbleibenden Kilometer linear ab.

b) Individuelle Lösungen. Beispiele:

- 1** Ein Kapital wird 10 Jahre lang mit 2 % pro Jahr verzinst.
2 Die Temperatur einer Tasse heißen Kaffees vermindert sich pro Minute um 2°C bis zur Temperatur des Zimmers, in dem die Tasse steht.



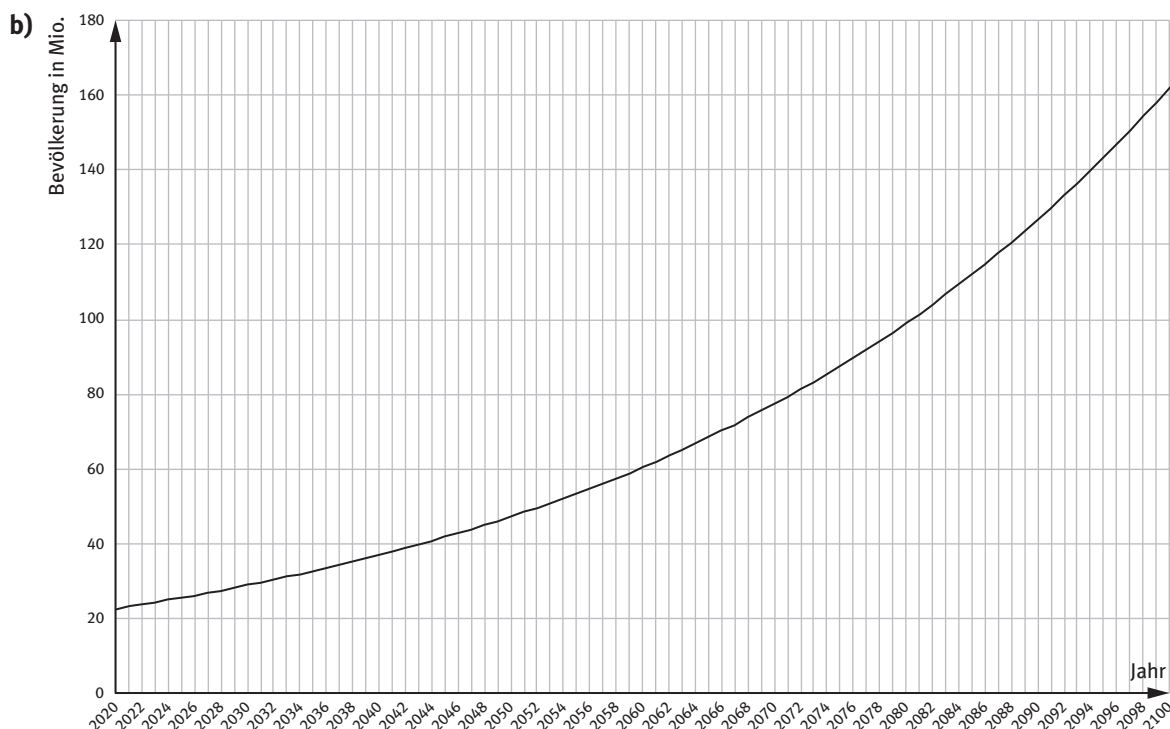
- K3** 9 $m(n) = 500 \text{ g} \cdot (1 - 2,1\%)^n = 500 \text{ g} \cdot (1 - 0,021)^n = 500 \text{ g} \cdot 0,979^n$;
 $m(2) = 500 \text{ g} \cdot 0,979^2 \approx 479,2 \text{ g}$; $m(5) = 500 \text{ g} \cdot 0,979^5 \approx 449,7 \text{ g}$;
 $m(10) = 500 \text{ g} \cdot 0,979^{10} \approx 404,4 \text{ g}$; $m(33) = 500 \text{ g} \cdot 0,979^{33} \approx 248,2 \text{ g}$;
 Die Halbwertszeit von Cs 137 beträgt also etwa 33 Jahre.

- K3** 10 a) ursprüngliche Holzmenge 10 000 fm (Festmeter)
 jährliche Zunahme des Holzbestandes um 4,0 %, d. h. Wachstumsfaktor $a = 1,04$
 Wachstumsfunktion: $h(t) = 10\,000 \cdot 1,04^t$ (t : Zeit in Jahren; $h(t)$: Holzmenge in fm)
 Holzbestand nach 20 Jahren: $h(20) = 10\,000 \cdot 1,04^{20} \approx 2,2 \cdot 10^4 = 22\,000$

- b) Die Zunahme des Holzbestandes auf mehr als das Doppelte innerhalb von 20 Jahren erscheint sehr hoch. Wahrscheinlich ist der Wachstumsfaktor in Wirklichkeit kleiner als 4 %.

- K2/3** 11 a) Funktion für die Bevölkerungszahl B (in Mio.) im Jahr x nach 2020: $B(x) = 22,5 \cdot 1,025^x$

x in Jahren ab 2020 (Jahr)	0 (2020)	10 (2030)	30 (2050)	80 (2100)
B(x) in Millionen	22,5	28,8	47,2	162,2



Individuelle Beurteilungen der Ergebnisse.

Beispiel: Die Berechnung beruht auf der Annahme eines konstanten Wachstumsfaktors, was für lange Zeiträume vermutlich nicht gegeben ist.

K2/6

- 12 a) Modell 1: lineares Wachstum, ergibt genau die gegebenen Tabellenwerte.

Bedeckte Fläche: $A_1(t) = 0,2 + 0,03 \cdot t$ (A_1 in cm^2 , t in Tagen)

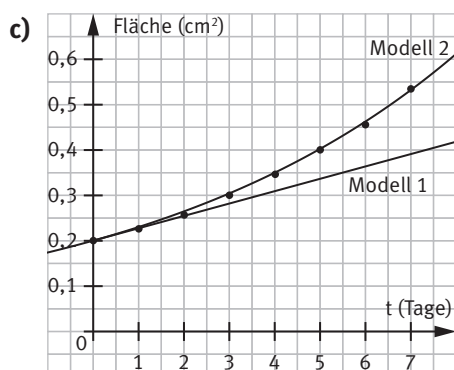
Modell 2: exponentielles Wachstum, ergibt auf zwei Dezimalen gerundet ebenfalls die gegebenen Tabellenwerte.

Bedeckte Fläche: $A_2(t) = 0,2 \cdot 1,15^t$ (A_2 in cm^2 , t in Tagen)

$A_2(1) = 0,23 [\text{cm}^2]$; $A_2(2) = 0,2645 \approx 0,26 [\text{cm}^2]$

- b) Das Modell 2 passt besser zum Sachverhalt, da es sich um einen Wachstumsvorgang handelt, bei dem sich der Wert in gleichen Zeiten jeweils um den gleichen Faktor vermehrt.

Zeit t (Tage)	0	1	2	3	4	5	6	7
bedeckte Fläche (cm^2)	0,20	0,23	0,26	0,30	0,35	0,40	0,46	0,53



Ab dem dritten Tag weicht die von Modell 1 beschriebene Entwicklung (Gerade) immer stärker von den eingezeichneten Punkten ab.

- d) Das Modell 2 beschreibt die Entwicklung in der ersten Woche sehr gut, allerdings wird sich das Wachstum der Bakterienkultur nicht unbegrenzt in dieser Weise fortsetzen, da z. B. nur eine begrenzte Fläche für die Ausbreitung der Kultur zur Verfügung steht und die Nährstoffe des Nährbodens von den Bakterien verbraucht werden.

K3/6

- 13 a) Preis der Schokolade x Jahre nach 2019:

$$P(x) = 1,00 \cdot 1,02^x \quad (P: \text{Preis in €}; x: \text{Anzahl der Jahre nach 2019})$$

$$\text{Preis im Jahr 2029 } (x = 10): P(10) = 1,00 \cdot 1,02^{10} \approx 1,22 \text{ [€]}$$

Im Jahr 2029 würde Adeles Lieblingsschokolade etwa 1,22 € kosten, also um 22 % mehr als 2019.

- b) Adeles Überlegung stimmt nicht, denn sie legt ein lineares Wachstum des Preises zugrunde. Es handelt sich aber um ein exponentielles Wachstum, da der Grundpreis jedes Jahr steigt.

K1/6

- 14 1 Die Aussage ist falsch. Da die Werte immer weiter zunehmen, nimmt auch der Produktwert aufeinanderfolgender Werte stets zu.

Anmerkung: Beim linearen Wachstum ist die Differenz aufeinanderfolgender Werte konstant.

- 2 Die Aussage ist wahr. Jeder Wert entsteht durch Multiplikation des jeweils vorangegangenen Wertes mit einem festen Faktor a. Der Quotient aufeinanderfolgender Werte ist also immer a.

K1/5

- 15 a) Beide Kapitalentwicklungen folgen dem Prinzip des exponentiellen Wachstums, da die Änderung in jedem Jahr durch einen konstanten Prozentsatz bestimmt wird. Emres Kapital nimmt mit der Zeit zu, da er Zinsen bekommt, der Wachstumsfaktor beträgt 1,005. Das Kapital seines Onkels nimmt mit der Zeit ab, denn er muss Gebühren bezahlen, der Abnahmefaktor ist 0,996.

Zeit t (Jahre)	0	1	2	3	4	5
Emre (€)	50	50,25	50,50	50,75	51,00	51,26
Onkel (€)	100 000	99 600	99 202	98 805	98 410	98 016

- b) Emre: $K_E(t) = K_E(0) \cdot 1,005^t = 50 \cdot 1,005^t$ (K_E in €, t in Jahren)
 Onkel: $K_O(t) = K_O(0) \cdot 0,996^t = 100\,000 \cdot 0,996^t$ (K_O in €, t in Jahren)

K3/5

- 16 Entwicklung eines Kapitals durch Verzinsung:
- $K(t) = K(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$

($K(t)$: Kapital nach t Jahren; $K(0)$: Anfangskapital; p: Zinssatz; t: Zeit in Jahren)

Amines Erbe: $t = 10$; $p = 2\% = 0,02$; $K(10) = 14\,627,93$

$$K(t) = K(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t \Rightarrow K(0) = \frac{K(t)}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t} = \frac{K(10)}{1,02^{10}} = \frac{14\,627,93}{1,02^{10}} \approx 12\,000$$

Die Tante hatte 12 000 € angelegt.

K5/6

- 17 a) Bedeckte Fläche
- $A(t)$
- :
- $A(0) = 137 \text{ [m}^2\text{]}$
- ;
- $A(7) = 178 \text{ [m}^2\text{]}$
- (A: Fläche in
- m^2
- ; t: Zeit in Tagen)

Die Berechnung des Umweltamts geht von einem exponentiellen Wachstum der Algenfläche mit einem täglichen Wachstumsfaktor a aus. Aus der Anfangsfläche von 137 m^2 und der Fläche eine Woche (sieben Tage) später von 178 m^2 wird der tägliche Wachstumsfaktor a berechnet. Man erhält $a \approx 1,038$, was einer täglichen prozentualen Änderung (Zunahme) von 3,8 % entspricht.

- b) 1 Zeit t in Tagen: $M(t) = M_0 \cdot a_1^t$

$$M\left(\frac{1}{6}\right) = M_0 \cdot 0,25 \Rightarrow a_1^{\frac{1}{6}} = 0,25 \Rightarrow a_1 = 0,25^6 \approx 0,00024$$

Die tägliche prozentuale Abnahme beträgt 99,976 %.

- 2 Zeit z in Stunden: $M(z) = M_0 \cdot a_2^z$

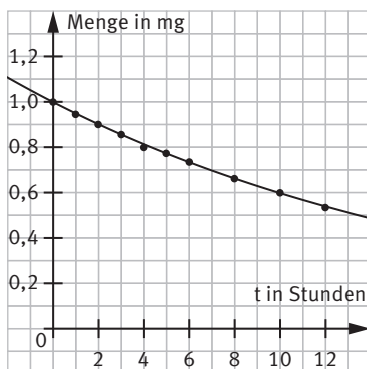
$$M(4) = M_0 \cdot 0,25 \Rightarrow a_2^4 = 0,25 \Rightarrow a_2 = 0,25^{\frac{1}{4}} \approx 0,707$$

Die stündliche prozentuale Abnahme beträgt 29,3 %.

- K2/6** 18 a) $B(t) = B_0 \cdot a^t = 1 \cdot 0,95^t$ (t: Zeit t in Stunden; B(t): Menge an Vitamin C in mg)
 $B(12) = 0,95^{12} \approx 0,54$ [mg]

Zeit t in Stunden	0	1	2	3	4	5	6	8	10	12
Vitamin C in mg	1	0,95	0,902	0,857	0,815	0,7740	0,735	0,663	0,599	0,540

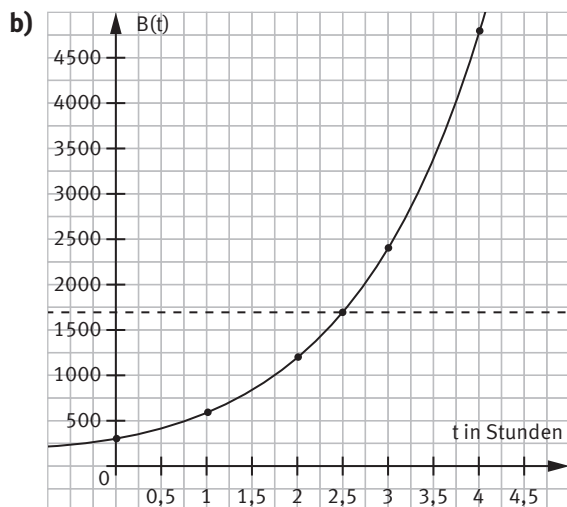
Überprüfung mit einer DGS (Punkte aus der Tabelle und Graph der Funktion $B(t) = 0,95^t$):



- b) Der Graph aus Teilaufgabe a) ist kaum von dem einer linearen Abnahmefunktion zu unterscheiden, weil der Abnahmefaktor 0,95 sehr nahe bei 1 liegt.

- K2/6** 19 stündliche Verdopplung: Wachstumsfaktor $a = 2$

a) $B(t) = 300 \cdot 2^t \Rightarrow B(1) = 600; B(2) = 1200; B(3) = 2400; B(4) = 4800$



$B(t) = 1700$ etwa zur Zeit $t = 2,5$ h

- c) $t = -1,5$ gibt den Zeitpunkt an, der 1,5 Stunden vor demjenigen ist, zu dem die Bakterienanzahl 300 betrug.

K3/6

20 a) NN („Normalnull“): Mittleres Niveau des Meeresspiegels

hPa (Hektopascal): Druckeinheit; $1 \text{ hPa} = 100 \text{ Pa} = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ b) $899 : 1103 \approx 0,887$ $798 : 899 \approx 0,888$ $708 : 798 \approx 0,887$ $628 : 708 \approx 0,887$ $558 : 628 \approx 0,889$ $495 : 558 \approx 0,887$ $439 : 495 \approx 0,887$ $390 : 439 \approx 0,888$ $346 : 390 \approx 0,887$ $307 : 346 \approx 0,887$

Der Abnahmefaktor hat in diesem Bereich den konstanten Wert 0,887; der Luftdruck nimmt also dort mit zunehmender Höhe exponentiell um 11,3 % ab.

c) $p(h) = 1013 \cdot 0,887^h$ (h: Höhe in km; p: Druck in hPa)

Der Abnahmefaktor gibt an, mit welchem Faktor der Luftdruck pro km Höhenzunahme abnimmt.

d) Luftdruck:

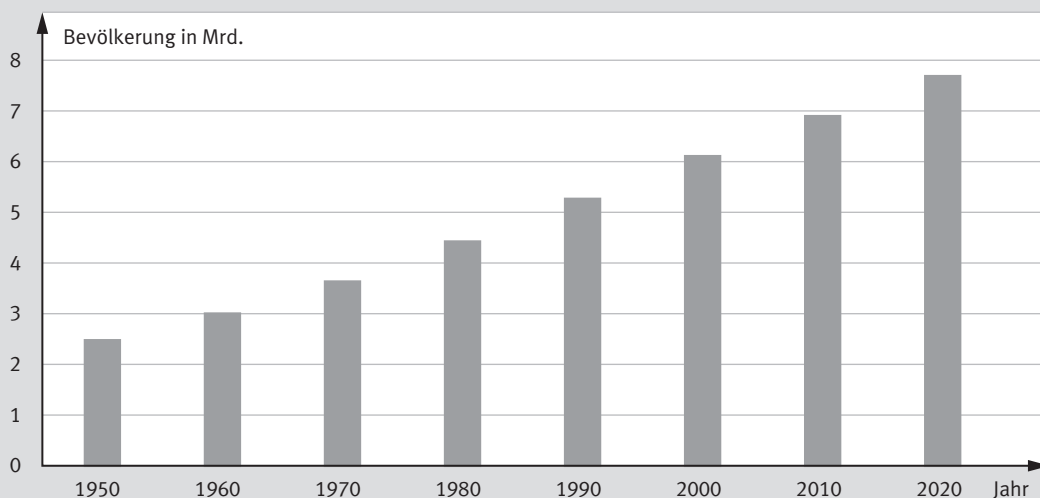
1 Zugspitze: $p(2,962) \approx 710 \text{ [hPa]}$ 2 Vesuv: $p(1,277) \approx 869 \text{ [hPa]}$ 3 Matterhorn: $p(4,478) \approx 592 \text{ [hPa]}$ 4 Mount Everest: $p(8,850) \approx 351 \text{ [hPa]}$

Bevölkerungsentwicklung

Anwendung

K2/6

Jahr	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2020
Zeit t in Jahren ab 1950	0	10	20	30	40	50	60	70
Bevölkerung $B(t)$ in Milliarden	2,53	3,03	3,69	4,45	5,32	6,13	6,92	7,72
Änderung $\Delta B = B(t+1) - B(t)$ in Milliarden		0,5	0,66	0,76	0,87	0,81	0,79	0,8
Änderung $\Delta B/B(t)$ in Prozent (gerundet)		19,8	21,8	20,6	19,6	15,2	12,9	11,6



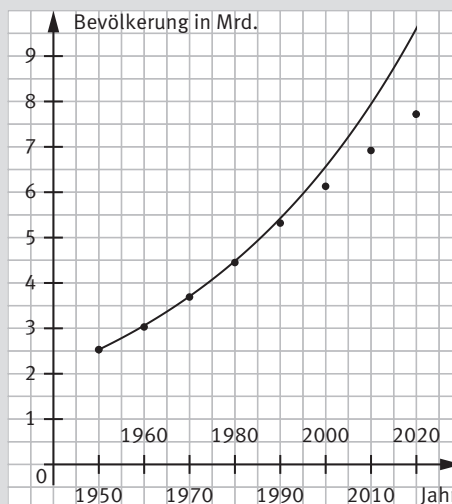
K5

- Modell für die Entwicklung der Weltbevölkerung ab 1950: $B^*(t) = 2,53 \cdot 1,21^t$
 ($B^*(t)$: Bevölkerung in Milliarden; t : Jahrzehnte seit 1950 (z. B. $t = 1$ für 1960))
 Rechnerische Überprüfung des Modells durch Einsetzen von $t = 1, t = 2$ usw. in $B^*(t)$ und Vergleich mit den Werten für $B(t)$ in der Tabelle oben:

Jahr	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2020
$B(t)$	3,03	3,69	4,45	5,32	6,13	6,92	7,72
$B^*(t)$	3,06	3,70	4,48	5,42	6,56	7,94	9,61
Abweichung	0,99%	0,27%	0,67%	1,88%	7,01%	14,74%	24,48%

Bis zum Jahr 1990 beschreibt das Modell die Entwicklung mit hinreichender Genauigkeit (Abweichungen unter 2%); ab dem Jahr 2000 nehmen die Abweichungen deutlich zu. Eine im Jahr 1995 getroffene Vorhersage der Bevölkerungsentwicklung hätte die Bevölkerungszahlen ab dem Jahr 2000 deutlich überschätzt.

Rechnerische Überprüfung des Modells
 (Punkte: $B(t)$; Graph der Funktion B^*):



Die graphische Darstellung lässt die ab dem Jahr 2000 zunehmende Abweichung der Modell-Werte $B^*(t)$ von den tatsächlichen Werten $B(t)$ erkennen.

K3

- Die im obigen Modell angenommene, durch $B^*(t)$ beschriebene Entwicklung verläuft exponentiell. Sie eignet sich daher als Beispiel für die Überprüfung der Behauptung, dass die Änderungsrate in einem Zeitraum direkt proportional zum Anfangsbestand des entsprechenden Zeitraums ist. Änderungsrate in einem bestimmten Zeitraum: $B^*(t+1) - B^*(t)$ mit dem Anfangsbestand $B^*(t)$ dieses Zeitraums.

Wenn die Änderungsrate direkt proportional zum Anfangsbestand ist, muss für alle Zeiträume die Gleichung $B^*(t+1) - B^*(t) = k \cdot B^*(t)$ mit einer (für alle Zeiträume gleichen) Konstanten k gelten bzw. es muss $\frac{B^*(t+1) - B^*(t)}{B^*(t)} = k$ mit einer Konstanten k gelten.

Dies wird anhand der oben ermittelten Werte überprüft (Rundung auf zwei Dezimalen):

Jahr	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2020
$B^*(t)$	2,53	3,06	3,70	4,48	5,42	6,56	7,94	9,61
$B^*(t+1) - B^*(t)$		0,53	0,64	0,78	0,94	1,14	1,38	1,67
$\frac{B^*(t+1) - B^*(t)}{B^*(t)}$		0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21

Mit der Konstanten $k = 0,21$ gilt somit $B^*(t+1) - B^*(t) = 0,21 \cdot B^*(t)$, die Änderungsrate $B^*(t+1) - B^*(t)$ in einem Zeitraum ist somit direkt proportional zum Anfangsbestand $B^*(t)$ dieses Zeitraums.

Anmerkung: Oben wurde festgestellt, dass die Werte von $B^*(t)$ die Entwicklung der Werte von $B(t)$ nicht passend modellieren. Damit ist aber nicht grundsätzlich ausgeschlossen, dass die Werte von $B(t)$ einer exponentiellen Entwicklung folgen – es könnte ja eine andere passende exponentielle Modellierung für die Entwicklung der Bevölkerungszahl $B(t)$ geben. Dass dies nicht der Fall ist, kann jetzt anhand der Werte von $B(t)$ nachgewiesen werden: Bei den Werten von $B(t)$ ist die Änderungsrate in einem Zeitraum nicht direkt proportional zum jeweiligen Anfangsbestand dieses Zeitraums. Analog zu der obigen Betrachtung für $B^*(t)$ ermitteln wir die entsprechenden Werte für $B(t)$:

Jahr	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2020
$B(t)$	2,53	3,03	3,69	4,45	5,32	6,13	6,92	7,72
$B(t+1) - B(t)$		0,5	0,66	0,76	0,87	0,81	0,79	0,8
$\frac{B(t+1) - B(t)}{B(t)}$		0,20	0,22	0,21	0,20	0,15	0,13	0,12

Die Werte in der letzten Zeile zeigen, dass $\frac{B(t+1) - B(t)}{B(t)}$ nicht konstant ist (insbesondere bei der Entwicklung nach 1990). Die Änderungsrate in einem Zeitraum ist nicht direkt proportional zum jeweiligen Anfangsbestand dieses Zeitraums. Daraus folgt, dass die Bevölkerungszahl $B(t)$ im Zeitraum von 1950 bis 2020 keiner exponentiellen Entwicklung folgt.

K3

■ Oberbayern:

Bevölkerungsentwicklung im Zeitraum 2012 bis 2032 (20 Jahre): +7,5%

Bevölkerungszahl von Oberbayern im Jahr 2012: $B(0) = 4,36 \cdot 10^6$ Personen (Internet)

1 lineares Wachstum

$$B(t) = B(0) + m \cdot t \text{ bzw. mit } t = 20: B(20) = B(0) + m \cdot 20$$

Es gilt: $B(20) = 1,075 \cdot B(0)$ (Zunahme um 7,5 %) und somit

$$1,075 \cdot B(0) = B(0) + m \cdot 20 \Rightarrow 0,075 \cdot B(0) = m \cdot 20$$

$$\Rightarrow m = \frac{0,075 \cdot B(0)}{20} = \frac{0,075 \cdot 4,36 \cdot 10^6}{20} = 16\,350$$

Bei linearem Wachstum nimmt die Bevölkerung von Oberbayern im Zeitraum von 2012 bis 2032 jährlich um 16 350 Personen zu.

2 exponentielles Wachstum

$$B(t) = B(0) \cdot a^t \text{ bzw. mit } t = 20: B(20) = B(0) \cdot a^{20}$$

Es gilt: $B(20) = 1,075 \cdot B(0)$ (Zunahme um 7,5 %) und somit $1,075 \cdot B(0) = B(0) \cdot a^{20}$

$$\Leftrightarrow 1,075 = a^{20} \Leftrightarrow a \approx 1,0036$$

Der Wachstumsfaktor der exponentiellen Entwicklung beträgt $a \approx 1,0036$; dies entspricht einem jährlichen prozentualen Wachstum von 0,36%.

Oberfranken:

Bevölkerungsentwicklung im Zeitraum 2012 bis 2032 (20 Jahre): $-7,5\%$

Bevölkerungszahl von Oberfranken im Jahr 2012: $B(0) = 1,06 \cdot 10^6$ Personen (Internet)

1 lineares Wachstum

$$B(t) = B(0) + m \cdot t \text{ bzw. mit } t = 20: B(20) = B(0) + m \cdot 20$$

Es gilt: $B(20) = 0,925 \cdot B(0)$ (Abnahme um $7,5\%$) und somit $0,925 \cdot B(0) = B(0) + m \cdot 20$

$$\Leftrightarrow -0,075 \cdot B(0) = m \cdot 20 \Leftrightarrow m = -\frac{0,075 \cdot B(0)}{20} = -\frac{0,075 \cdot 1,06 \cdot 10^6}{20} = -3975$$

Bei linearem Wachstum nimmt die Bevölkerung von Oberfranken im Zeitraum von 2012 bis 2032 jährlich um 3975 Personen ab.

2 exponentielles Wachstum

$$B(t) = B(0) \cdot a^t \text{ bzw. mit } t = 20: B(20) = B(0) \cdot a^{20}$$

Es gilt: $B(20) = 0,925 \cdot B(0)$ (Abnahme um $7,5\%$) und somit

$$0,925 \cdot B(0) = B(0) \cdot a^{20} \Leftrightarrow 0,925 = a^{20} \Leftrightarrow a \approx 0,9961$$

Der Wachstumsfaktor der exponentiellen Entwicklung beträgt $a \approx 0,9961$; dies entspricht einer jährlichen prozentualen Abnahme von $0,39\%$.

Landkreis München:

Bevölkerungsentwicklung im Zeitraum 2012 bis 2032 (20 Jahre): $+15,7\%$

Bevölkerungszahl im Landkreis München im Jahr 2012: $B(0) = 320\,900$ Personen (Internet)

1 lineares Wachstum

$$B(t) = B(0) + m \cdot t \text{ bzw. mit } t = 20: B(20) = B(0) + m \cdot 20$$

Es gilt: $B(20) = 1,157 \cdot B(0)$ (Zunahme um $15,7\%$) und somit $1,157 \cdot B(0) = B(0) + m \cdot 20$

$$\Leftrightarrow 0,157 \cdot B(0) = m \cdot 20 \Leftrightarrow m = \frac{0,157 \cdot B(0)}{20} = \frac{0,157 \cdot 320\,900}{20} \approx 2519$$

Bei linearem Wachstum nimmt die Bevölkerung des Landkreises München im Zeitraum von 2012 bis 2032 jährlich um etwa 2519 Personen zu.

2 exponentielles Wachstum

$$B(t) = B(0) \cdot a^t \text{ bzw. mit } t = 20: B(20) = B(0) \cdot a^{20}$$

Es gilt: $B(20) = 1,075 \cdot B(0)$ (Zunahme um $7,5\%$) und somit

$$1,075 \cdot B(0) = B(0) \cdot a^{20} \Leftrightarrow 1,075 = a^{20} \Leftrightarrow a \approx 1,0036$$

Der Wachstumsfaktor der exponentiellen Entwicklung beträgt $a \approx 1,0036$; dies entspricht einem jährlichen prozentualen Wachstum von $0,36\%$.

Landkreis Wunsiedel:

Bevölkerungsentwicklung im Zeitraum 2012 bis 2032 (20 Jahre): $-18,0\%$

Bevölkerungszahl im Landkreis Wunsiedel im Jahr 2012: $B(0) = 75\,400$ Personen (Internet)

1 lineares Wachstum

$$B(t) = B(0) + m \cdot t \text{ bzw. mit } t = 20: B(20) = B(0) + m \cdot 20$$

Es gilt: $B(20) = 0,82 \cdot B(0)$ (Abnahme um 18%) und somit $0,82 \cdot B(0) = B(0) + m \cdot 20$

$$\Leftrightarrow -0,18 \cdot B(0) = m \cdot 20 \Leftrightarrow m = -\frac{0,18 \cdot B(0)}{20} = -\frac{0,18 \cdot 75\,400}{20} \approx -679$$

Bei linearem Wachstum nimmt die Bevölkerung im Landkreis Wunsiedel im Zeitraum von 2012 bis 2032 jährlich um etwa 679 Personen ab.

2 exponentielles Wachstum

$$B(t) = B(0) \cdot a^t \text{ bzw. mit } t = 20: B(20) = B(0) \cdot a^{20}$$

Es gilt: $B(20) = 0,82 \cdot B(0)$ (Abnahme um 18%) und somit

$$0,82 \cdot B(0) = B(0) \cdot a^{20} \Leftrightarrow 0,82 = a^{20} \Leftrightarrow a \approx 0,9901$$

Der Wachstumsfaktor der exponentiellen Entwicklung beträgt $a \approx 0,9901$; dies entspricht einer jährlichen prozentualen Abnahme von $0,99\%$.

K3/6

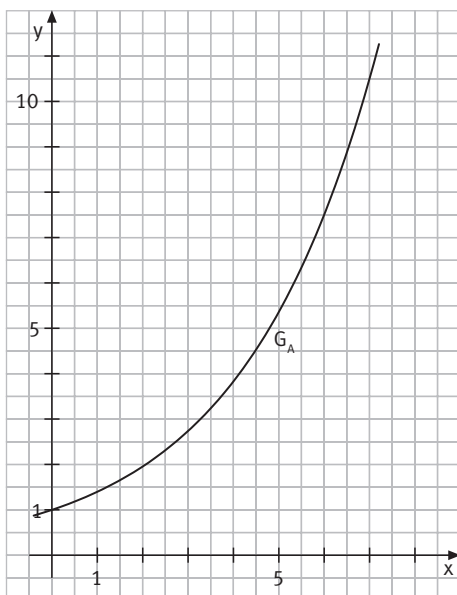
- 21 a) Simon verteilt die 500€ Zinsen in fünf Jahren gleichmäßig auf die fünf Jahre und berechnet so 100€ Zinsen pro Jahr. Das bedeutet, dass Simon von einem linearen Wachstum mit einem konstanten Zuwachs von 100€ pro Jahr ausgeht. Das entspricht pro Jahr einem Zuwachs von 10% des zu Beginn angelegten Kapitals. Grundsätzlich ist diese Anlageform durch die Werbeanzeige nicht ausgeschlossen. Tim vermutet jedoch, dass dem Angebot eine Verzinsung der üblichen Art zugrunde liegt, bei der jedes Jahr auch die bis dahin gutgeschriebenen Zinsen mitverzinst werden (Zinseszins). Das entspricht einem exponentiellen Wachstum des Kapitals.
- b) Kapital 1500€ nach fünf Jahren bei einem Anfangskapital von 1000€ bei Verzinsung mit dem Wachstumsfaktor a : $1500 = 1000 \cdot a^5 \Leftrightarrow a^5 = 1,5 \Leftrightarrow a = 1,5^{0,2} \Leftrightarrow a = 1,084$
Der Zinssatz des Angebots beträgt etwa 8,4% pro Jahr.
- c) Aktuell (2022) erhält man auf Spareinlagen sehr geringe Zinsen (meist unter 1% pro Jahr). Mit Fonds lässt sich ein höherer Ertrag erzielen, aber üblicherweise deutlich weniger als 8%. Mit Aktien ist eine Rendite um die 8% möglich, aber risikoreich. Das „Supertolle Angebot“ erscheint im gegenwärtigen Umfeld unseriös, weil es unrealistisch hohe Erträge verspricht und eventuell vorhandene Risiken verschweigt. Simon sollte ihm keinen Glauben schenken oder sich zumindest über die genauen Konditionen und mögliche Risiken informieren.

K2/5

22 a)

Anzahl n der Wochen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Größe A der von Wasserhyazinthen bedeckten Fläche (in m^2)	1	1,4	1,96	2,74	3,84	5,38	7,53	10,54	14,76	20,66	28,93

b) $A(n) = 1,4^n$



- c) 1 Individuelle Schätzungen
2 $1,4^2 = 1,96$; $1,4^3 \approx 2,74$
Nach gut 2 Wochen hat sich die von Wasserhyazinthen bedeckte Fläche verdoppelt.
- d) 1 $A(t) = A_0 \cdot 1,4^t$; durch gezieltes Probieren folgt
- | Bedeckung | 10% | 30% | 100% |
|-------------------|------|------|------|
| Zeit t (Wochen) | 67,2 | 70,5 | 74,1 |
- 2 Das Modell kann zu Beginn sinnvoll sein, aber bald erreichen die Pflanzen Teile des Sees, wo sie nicht mehr in gleichem Maße weiterwachsen können (z. B. wegen geringerer Tiefe und Nährstoffmangel). Dann verringert sich der Wachstumsfaktor oder das Wachstum hört ganz auf.

K1/5

- 23 Die Aussage ist wahr. Für den Abnahmefaktor a gilt: $0 < a < 1$. Der positive Ausgangswert wird jeweils mit der positiven Zahl a multipliziert, was immer ein positives Ergebnis zur Folge hat. Der Wert 0 wird niemals angenommen.

K2/5

- 24 a) Abnahmefaktor $a = 1 - 0,109 = 0,891$
Für die Halbwertszeit τ gilt: $A(\tau) = \frac{1}{2} \cdot A(0)$.
Vermutung: $\tau = 6$, dann wäre $a^6 = 0,891^6 \approx 0,5003 \approx 0,5$
- b) Francesco ersetzt den Abnahmefaktor 0,891 durch $0,891^6 \approx 0,5$ und schreibt dafür im Exponenten $\frac{t}{6}$ statt t .
Allgemein für ein Isotop mit Halbwertszeit τ lautet sie: $A(t) = A(0) \cdot a^t = A(0) \cdot (a^\tau)^{\frac{t}{\tau}} = A(0) \cdot 0,5^{\frac{t}{\tau}}$

- K2/6** 25 Beispiel zum linken Diagramm:
Ausbreitung von Seerosen auf einem Teich der Größe S
Beispiel zum mittleren Diagramm:
Erwärmung einer Milchflasche, die dem Kühlschrank entnommen wurde, bis zur Temperatur S
Beispiel zum rechten Diagramm:
Abkühlen einer Tasse Mokka auf Zimmertemperatur S
- K2/5** 26 Insgesamt 7 Katzen vertilgen jeweils 7 Mäuse: $7^2 = 49$ Mäuse vertilgt
Jede Maus hätte 7 Ähren gefressen: $7^3 = 343$ Ähren
Jede Ähre ergibt 7 Maß Körner: $7^4 = 2401$ Maß Körner
Die sieben Menschen verdanken ihren sieben Katzen 2401 Maß Getreidekörner,
die dank der Katzen nicht von Mäusen gefressen wurden.

Finanzmathematik**Anwendung****K6**

- Individuelle Ergebnisse.

K1

- Das Kapital wächst nicht linear, weil zu der jährlichen Einzahlung von 300€ noch die Zinsen hinzukommen. Es wächst aber auch nicht exponentiell, weil nicht nur die Zinsen, sondern auch weitere Einzahlungen hinzukommen.

Berechnung mit Tabellenkalkulation:

	Guthaben	Zinsen	Einzahlung	neues Guthaben
Geburt	300,00	3,00	300,00	603,00
1. Geburtstag	603,00	6,03	300,00	909,03
2. Geburtstag	909,03	9,09	301,00	1219,12
3. Geburtstag	1219,12	12,19	302,00	1533,31
4. Geburtstag	1533,31	15,33	303,00	1851,64
5. Geburtstag	1851,64	18,52	304,00	2174,16
6. Geburtstag	2174,16	21,74	305,00	2500,90
7. Geburtstag	2500,90	25,01	306,00	2831,91
8. Geburtstag	2831,91	28,32	307,00	3167,23
9. Geburtstag	3167,23	31,67	308,00	3506,90
10. Geburtstag	3506,90	35,07	309,00	3850,97
11. Geburtstag	3850,97	38,51	310,00	4199,48
12. Geburtstag	4199,48	41,99	311,00	4552,48
13. Geburtstag	4552,48	45,52	312,00	4910,00
14. Geburtstag	4910,00	49,10	313,00	5272,10
15. Geburtstag	5272,10	52,72	314,00	5638,82
16. Geburtstag	5638,82	56,39	315,00	6010,21
17. Geburtstag	6010,21	60,10	316,00	6386,31
18. Geburtstag	6386,31	63,86	317,00	6767,18

K5

- S: zu ermittelnde Summe; a: jährliche Einzahlung; q: Wachstumsfaktor

Erklärung der Herleitung:

I: zu ermittelnde Summe S

II: S mit dem Wachstumsfaktor q multipliziert

I – II: Alle Summanden außer dem ersten und dem letzten fallen weg; links wird S, rechts wird a ausgeklammert. Die entstandene Gleichung durch $(1 - q)$ dividiert ergibt den Term für S.Ben stehen an seinem 18. Geburtstag $S = 300 \text{ €} \cdot \frac{1 - 1,01^{19}}{1 - 1,01} \approx 6243,27 \text{ €}$ zur Verfügung.

Entdecken

K4

- Zu $f_1(x) = 4^x$ gehört der rote Graph G_2 .
Begründung: Die Basis 4 ist größer als 1, also ist der Graph G_{f_1} von f_1 monoton steigend. Damit kommen für G_{f_1} nur die beiden Graphen G_1 und G_2 in Frage. Da 4 die größte vorkommende Basis ist, muss G_{f_1} der Graph mit dem steileren Anstieg sein. Dies ist G_2 .
Zu $f_2(x) = 0,2^x$ gehört der blaue Graph G_3 .
Begründung: Die Basis 0,2 ist kleiner als 1, also ist der Graph G_{f_2} von f_2 monoton fallend. Damit kommen für G_{f_2} nur die beiden Graphen G_3 und G_4 in Frage. Da 0,2 die kleinste vorkommende Basis ist, muss G_{f_2} der Graph mit dem steileren Abfall sein. Dies ist G_3 .
Zu $f_3(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ gehört der gelbe Graph G_4 .
Begründung: Die Basis $\frac{2}{3}$ ist kleiner als 1, also ist der Graph G_{f_3} von f_3 monoton fallend. Damit kommen für G_{f_3} nur die beiden Graphen G_3 und G_4 in Frage. Da G_3 der Graph von f_2 ist, bleibt für f_3 nur der Graph G_4 übrig.
Zu $f_4(x) = 1,5^x$ gehört der grüne Graph G_1 .
Begründung: Die Basis 1,5 ist größer als 1, also ist der Graph G_{f_4} von f_4 monoton steigend. Damit kommen für G_{f_4} nur die beiden Graphen G_1 und G_2 in Frage. Da G_2 der Graph von f_1 ist, bleibt für f_4 nur der Graph G_1 übrig.
- Gemeinsamkeiten der Graphen: z. B. Verlauf durch den Punkt $(0|1)$; Wertemenge $W = \mathbb{R}^+$; monoton; x-Achse ist Asymptote.
Unterschiede zwischen den Graphen: z. B. monoton steigend für Basen größer als 1; monoton fallend für Basen kleiner als 1; verschiedene Steigungen.

K6

Nachgefragt

K6

- Die Aussage ist falsch. Die Graphen sind nicht gleich, sondern kongruent und zueinander achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

K1

- Für $a < 0$ ist die Potenz a^x nur für $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definiert.
Für $a = 0$ ist die Potenz a^x für $x \leq 0$ nicht definiert.
Für $a = 1$ würde man die konstante Funktion $f_1(x) = 1$ erhalten.

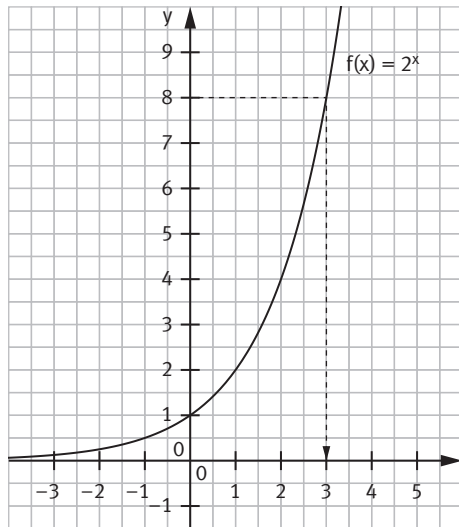
Aufgaben

K4/5

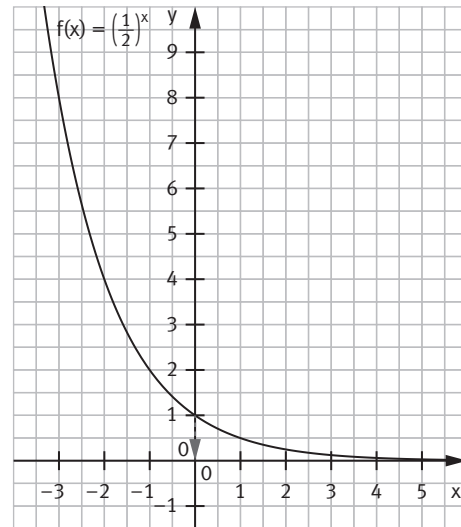
1 a)

	x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
1	$f(x) = 2^x$	0,13	0,25	0,50	0,71	1,00	1,41	2,00	4,00	8,00
2	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8,00	4,00	2,00	1,41	1,00	0,71	0,50	0,25	0,13
3	$f(x) = 0,3^x$	37,0	11,1	3,33	1,83	1,00	0,55	0,30	0,09	0,03
4	$f(x) = (\sqrt{3})^x$	0,19	0,33	0,58	0,76	1,00	1,32	1,73	3,00	5,20

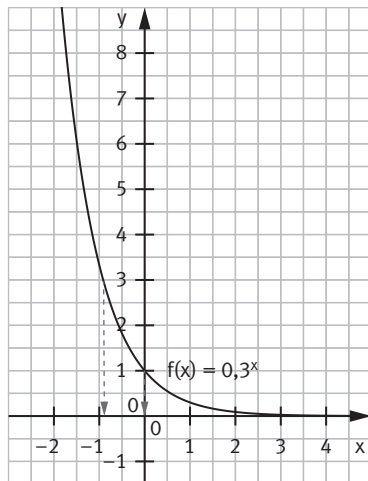
b) 1 $2^x > 8$; $L = \{4; 5; 6; \dots\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 4\}$



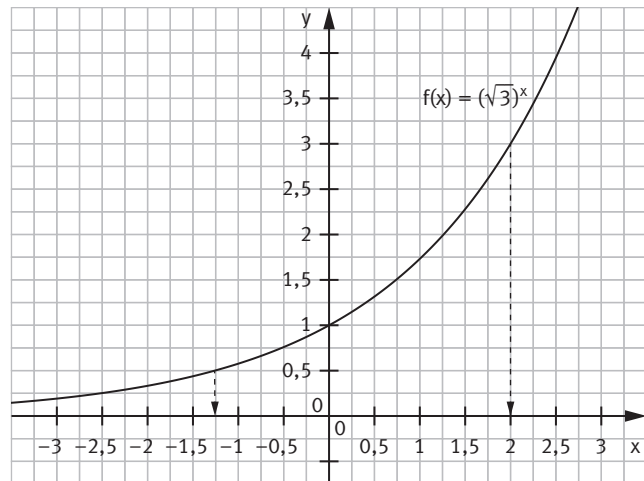
2 $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$; $L = \{1; 2; 3; \dots\} = \mathbb{N}$



3 $1 < 0,3^x < 3$; $L = \{ \}$



4 $0,5 < (\sqrt{3})^x \leq 3$; $x \in \{-1; 0; 1; 2\}$



K1/5 2 a) 1 $P(2|4): a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 2^x$

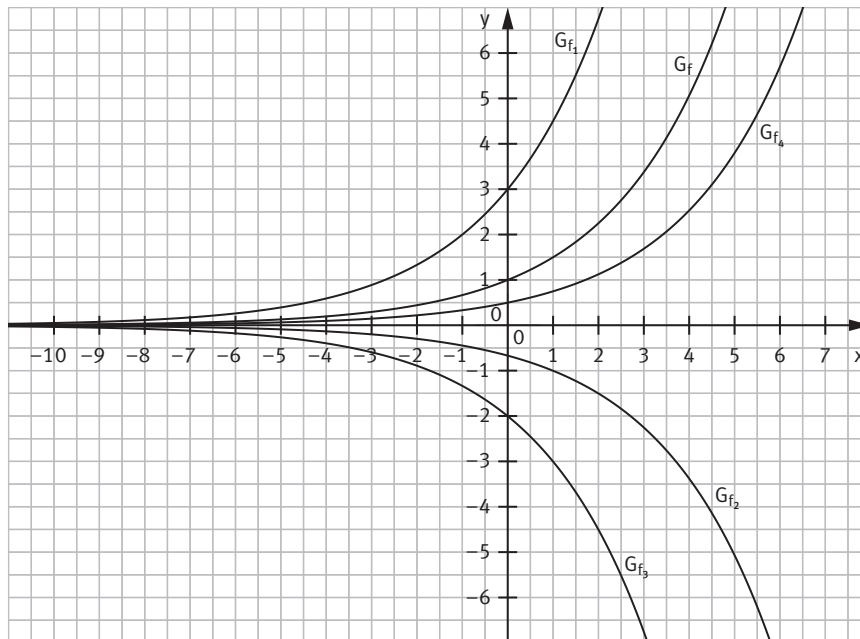
2 $P(2|0,04): a^2 = 0,04 \Rightarrow a = 0,2 \Rightarrow f(x) = 0,2^x$

3 $P(3|7): a^3 = 7 \Rightarrow a = 7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7} \Rightarrow f(x) = (\sqrt[3]{7})^x$

4 $P(4|0,0256): a^4 = 0,0256 \Rightarrow a = 0,4 \Rightarrow f(x) = 0,4^x$

b) Für alle Basen $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ hat die Potenz a^0 den Wert 1.

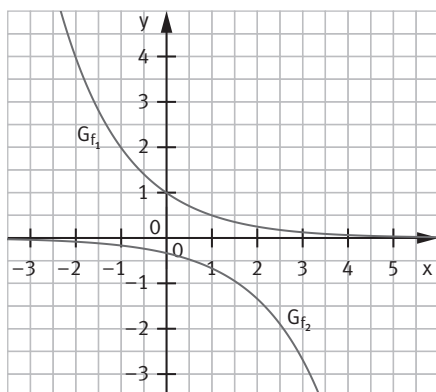
- K4/6** 3
- 1 Der Graph G_{f_1} entsteht aus dem Graphen G_f durch Streckung um den Faktor 3 in y-Richtung.
 - 2 Der Graph G_{f_2} entsteht aus dem Graphen G_f durch Stauchung um den Faktor $\frac{2}{3}$ in y-Richtung und Spiegelung an der x-Achse.
 - 3 Der Graph G_{f_3} entsteht aus dem Graphen G_f durch Streckung um den Faktor 2 in y-Richtung und Spiegelung an der x-Achse.
 - 4 Der Graph G_{f_4} entsteht aus dem Graphen G_f durch Stauchung um den Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung.



- K1/5** 4 a) 1 Die Gleichung $f_{a,b}(x) = 0 \Leftrightarrow b \cdot a^x = 0 \Leftrightarrow a^x = 0$ hat keine Lösungen, da $a^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- 2 $f_{a,b}(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b \Rightarrow T(0|b) \in G_{f_{a,b}}$.
- 3 Für $0 < a < 1$ gilt: Für große Werte von x nähern sich die Funktionswerte dem Wert null an. Somit ist die x-Achse waagrechte Asymptote des Graphen $G_{f_{a,b}}$.
Für $a > 1$ gilt: Für kleine negative (betragsgroße) Werte von x nähern sich die Funktionswerte dem Wert null an. Somit ist die x-Achse auch in diesem Fall waagrechte Asymptote des Graphen $G_{f_{a,b}}$.
- 4 $f^*(x) = -b \cdot a^x = -f(x)$, also sind G_f und G_{f^*} zueinander symmetrisch bezüglich der x-Achse.
- b) Für $0 < a < 1$ und $b < 0$ ist $f_{a,b}(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Graph $G_{f_{a,b}}$ verläuft monoton steigend unterhalb der x-Achse.
Für $0 < a < 1$ und $b > 0$ ist $f_{a,b}(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Graph $G_{f_{a,b}}$ verläuft monoton fallend oberhalb der x-Achse.
Für $a > 1$ und $b < 0$ ist $f_{a,b}(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Graph $G_{f_{a,b}}$ verläuft monoton fallend unterhalb der x-Achse.
Für $a > 1$ und $b > 0$ ist $f_{a,b}(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Graph $G_{f_{a,b}}$ verläuft monoton steigend oberhalb der x-Achse.

K2/6

5 a)



b) Beide Graphen sind monoton fallend.

c) Individuelle Untersuchungen in einer DGS. Mögliche Erkenntnisse für die Graphen $G_{f_{a,b}}$:

	$b < 0$	$b > 0$
$0 < a < 1$	$G_{f_{a,b}}$ monoton steigend	$G_{f_{a,b}}$ monoton fallend
$a > 1$	$G_{f_{a,b}}$ monoton fallend	$G_{f_{a,b}}$ monoton steigend

Zusammenfassung: Wie aus der Tabelle ersichtlich, ist der Graph $G_{f_{a,b}}$ der Funktion $f_{a,b}(x) = b \cdot a^x$ monoton steigend, falls entweder die Basis a zwischen 0 und 1 liegt und der Faktor b negativ ist oder falls $a > 1$ und b positiv ist. In den anderen Fällen ist $G_{f_{a,b}}$ monoton fallend.

K5/6

6 a) Man setzt die Koordinaten der beiden Punkte in die Funktionsgleichung ein und erhält ein System aus zwei Gleichungen für die Variablen a und b . Man löst dieses Gleichungssystem durch Division der Gleichungen und setzt die Lösungen a und b in die Funktionsgleichung ein.

b) 1 $P(0|5): b \cdot a^0 = 5 \Leftrightarrow b \cdot 1 = 5 \Leftrightarrow b = 5$

$$Q(1|15): b \cdot a^1 = 15 \Leftrightarrow 5 \cdot a = 15 \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow f(x) = 5 \cdot 3^x$$

2 $R(1|-1): b \cdot a^1 = -1 \Leftrightarrow b \cdot a = -1 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{a}$

$$S(2|-3): b \cdot a^2 = -3$$

$$\text{Einsetzen von } b = -\frac{1}{a} \text{ ergibt: } b \cdot a^2 = -3 \Leftrightarrow -\frac{1}{a} \cdot a^2 = -3 \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow b = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3} \cdot 3^x$$

3 $U(-1|-3): b \cdot a^{-1} = -3 \Leftrightarrow b = -3 \cdot a$

$$V(1|-\frac{1}{3}): b \cdot a^1 = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow b \cdot a = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Einsetzen von } b = -3 \cdot a \text{ ergibt: } (-3 \cdot a) \cdot a = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$\Rightarrow b = -3 \cdot a = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

K1/6

7 $f(x) = a^x, 0 < a < 1$

	Änderung	Funktionswert wird ...	Erklärung
a)	x um 1 vergrößert	mit a multipliziert.	$f(x+1) = a^{x+1} = a^x \cdot a^1 = a \cdot a^x = a \cdot f(x)$
b)	x um 2 verkleinert	durch a^2 dividiert.	$f(x-2) = a^{x-2} = a^x \cdot a^{-2} = \frac{a^x}{a^2} = \frac{1}{a^2} \cdot f(x)$
c)	x um 0,5 verkleinert	durch $\sqrt{a}$ dividiert.	$f(x-0,5) = a^{x-0,5} = a^x \cdot a^{-0,5} = \frac{a^x}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot f(x)$
d)	x verdoppelt	quadriert.	$f(2x) = a^{2x} = (a^x)^2 = (f(x))^2$
e)	x halbiert	radiziert.	$f\left(\frac{1}{2}x\right) = a^{\frac{1}{2}x} = (a^x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^x} = \sqrt{f(x)}$
f)	x mit -1 multipliziert	zu seinem Kehrwert.	$f(-x) = a^{-x} = (a^x)^{-1} = \frac{1}{a^x} = \frac{1}{f(x)}$

K2/3

- 8 a) Ein jährlicher Wertverlust von 18 % bedeutet einen Wachstumsfaktor $a = 0,82$. Die Wertentwicklung des Sportwagens wird damit durch die Funktion $W(t) = 250\,000 \cdot 0,82^t$ (t : Zeit in Jahren; $W(t)$: Wert in €) beschrieben. Damit erhält man folgende Werte (gerundet auf €):

t in Jahren	0	1	3	10	20
Wert $W(t)$ in €	250 000	205 000	137 842	34 362	4 723

- b) $W(t) = 100 \Rightarrow 250\,000 \cdot 0,82^t = 100$ ergibt durch gezieltes Probieren $t \approx 39$. Dies ist unrealistisch, weil ein Auto üblicherweise gar nicht so lange gefahren wird. Es ist auch nicht sicher, dass der Wachstumsfaktor über einen so langen Zeitraum konstant bleibt. So z. B. kann es bei einem ursprünglich hochwertigen Auto sein, dass es nach einem längeren Zeitraum (z. B. nach 30 Jahren) zu einem unter Sammlern begehrten Oldtimer wird, mit dem ein deutlich höherer Verkaufspreis erzielt werden kann, als das Modell der Wertentwicklung erwarten lassen würde.
- c) Die Wertentwicklung eines Autos kann höchstens über wenige Jahre hinweg durch eine Exponentialfunktion modelliert werden, da der Wachstumsfaktor nicht über die ganze „Lebenszeit“ des Autos hinweg konstant bleibt. Der Wert eines Autos hängt außer vom Alter auch stark von anderen Merkmalen ab wie z. B. der Fahrleistung und der Pflege. Der Wert sehr gut erhaltener Autos (Oldtimer) kann mit dem Alter sogar wieder zunehmen.

K1

9

Funktionsterm	Graph	Begründung
1 $f_1(x) = 2 \cdot 1,5^x$	G_e (grün)	Graph monoton steigend, da $1,5 > 1$ Verlauf durch (0 2) und (1 3), da $f_1(0) = 2$ und $f_1(1) = 3$
2 $f_2(x) = 3 \cdot 1,8^x$	G_c (rot)	Graph monoton steigend, da $1,8 > 1$ Verlauf durch (0 3) und (1 5,4), da $f_2(0) = 3$ und $f_2(1) = 5,4$
3 $f_3(x) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$	G_a (türkis)	Graph monoton fallend, da $\frac{2}{3} < 1$ Verlauf durch (0 3) und (1 2), da $f_3(0) = 3$ und $f_3(1) = 2$
4 $f_4(x) = 2 \cdot 1,7^x$	G_d (gelb)	Graph monoton steigend, da $1,7 > 1$ Verlauf durch (0 2) und (1 3,4), da $f_4(0) = 2$ und $f_4(1) = 3,4$
5 $f_5(x) = 3 \cdot 0,8^x$	G_b (lila)	Graph monoton fallend, da $0,8 < 1$ Verlauf durch (0 3) und (1 2,4), da $f_5(0) = 3$ und $f_5(1) = 2,4$
6 $f_6(x) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$	kein Graph	Der Graph verläuft durch (1 4,5); keiner der abgebildeten Graphen verläuft durch diesen Punkt.

K1/3

- 10 a) Ritas Rechnung ist richtig.

b) $B(10,5) = 10\,000 \text{ €} \cdot 1,02^{10,5} \approx 12\,311,24 \text{ €}$

$B(\sqrt{19}) = 10\,000 \text{ €} \cdot 1,02^{\sqrt{19}} \approx 10\,901,53 \text{ €}$

10,5 Jahre sind 10 Jahre und 6 Monate; $\sqrt{19}$ Jahre sind etwa 4 Jahre, 4 Monate und 10 Tage.

Wenn das Sparbuch bereits zu einem dieser Zeitpunkte aufgelöst wird, erhält Rita (bzw. Ihre Eltern) den jeweils oben berechneten Betrag. Falls eine solche unterjährige Verzinsung bei dem Sparbuch nicht vorgesehen ist, wenn also die Zinsen immer erst am Ende eines Anlagejahres gutgeschrieben werden, beträgt das Guthaben nach 10,5 Jahren so viel wie nach 10 Jahren bzw. nach $\sqrt{19}$ Jahren so viel wie nach 4 Jahren. In diesem Fall wäre das Guthaben nach 10,5 Jahren

$B(10) = 10\,000 \cdot 1,02^{10} \approx 12\,189,94 \text{ [€]}$

bzw. nach $\sqrt{19}$ Jahren

$B(4) = 10\,000 \cdot 1,02^4 \approx 10\,824,32 \text{ [€]}.$

K5/6 11 a) Die Aussage ist wahr. Die Berechnung verwendet das Potenzgesetz $a^x + y = a^x \cdot a^y$.

b) Änderung der Funktionswerte der Funktion f mit $f(x) = 3^x$:

	Änderung	Funktionswert wird ...	Erklärung
1	x um 2 vergrößert	verneunfacht.	$f(x+2) = 3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x = 9 \cdot f(x)$
2	x um 0,5 vergrößert	mit $\sqrt{3}$ multipliziert.	$f(x+0,5) = 3^{x+0,5} = 3^x \cdot 3^{0,5} = \sqrt{3} \cdot 3^x = \sqrt{3} \cdot f(x)$
3	x verdoppelt	quadriert.	$f(2x) = 3^{2x} = (3^x)^2 = (f(x))^2$
4	x um 1 verkleinert	gedrittelt.	$f(x-1) = 3^{x-1} = 3^x \cdot 3^{-1} = \frac{1}{3} \cdot 3^x = \frac{1}{3} \cdot f(x)$
5	x um 0,5 verkleinert	durch $\sqrt{3}$ dividiert.	$f(x-0,5) = 3^{x-0,5} = 3^x \cdot 3^{-0,5} = \frac{3^x}{\sqrt{3}} = \frac{f(x)}{\sqrt{3}}$
6	x halbiert	radiziert.	$f\left(\frac{1}{2}x\right) = 3^{\frac{1}{2}x} = (3^x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3^x} = \sqrt{f(x)}$

K3/5 12 Wachstumsfaktor $a = 1 - (1,06\% - 0,83\%) = 1 - 0,23\% = 0,9977$

Bevölkerungsentwicklung in Mio.: $B(t) = B(0) \cdot 0,9977^t$

(B: Bevölkerungszahl, t: Zeit in Jahren nach 2005; B(0): Bevölkerungszahl in Mio. im Jahr 2005)

Jahr	2005	2006	2008	2010	2015	2020	2021
t in Jahren seit 2005	0	1	3	5	10	15	16
B(t) (Mio.) berechnet	82,5	82,3	81,9	81,6	80,6	79,7	79,5
B(t) (Mio.) real	82,5	82,4	82,1	81,8	81,7	83,2	83,2

Von 2005 bis 2015 hat die Bevölkerungszahl in Deutschland tatsächlich abgenommen, allerdings etwas weniger als erwartet; nach 2015 nahm sie zu, u. a. wohl wegen des Zuzugs von Flüchtlingen.

K1/4 13 $g_1 - \mathbf{E}$; $g_2 - \mathbf{C}$; $g_3 - \mathbf{B}$; $g_4 - \mathbf{D}$; $\mathbf{A}$ veranschaulicht $y = 2^x$.

Der Funktionsterm lässt erkennen, ob der Funktionsgraph monoton fällt oder steigt, ob die Funktionswerte positiv oder negativ sind und wo der Graph die y-Achse schneidet.

Begründungen:

$$g_1(x) = 2^{x+1} = 2 \cdot 2^x:$$

Gegenüber $\mathbf{A}$ sind alle Funktionswerte und auch die Steigung verdoppelt.

$$g_2(x) = 2^x + 1:$$

Der Summand 1 bewirkt eine Verschiebung des Graphen $\mathbf{A}$ um 1 in positive y-Richtung.

$$g_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 = 2^{-x} - 1:$$

Spiegelung des Graphen $\mathbf{A}$ an der y-Achse und Verschiebung um 1 in negative y-Richtung.

$$g_4(x) = -2^{-x}:$$

Spiegelung des Graphen $\mathbf{A}$ an der x-Achse und an der y-Achse.

K3/5 14 $k(t) = 20 + 40 \cdot 2^{-0,06t}$

$$k(12) = 20 + 40 \cdot 2^{-0,06 \cdot 12} \approx 44:$$

Alfredos Kaffee wäre mit etwa 44 °C noch „lauwarm“.

K1/4 15 a) Wertetabelle (Werte auf zwei Dezimalen gerundet):

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f_1(x)$	0,25	0,35	0,50	0,71	1	1,41	2	2,83	4
$f_2(x)$	0,06	0,13	0,25	0,5	1	2	4	8	16

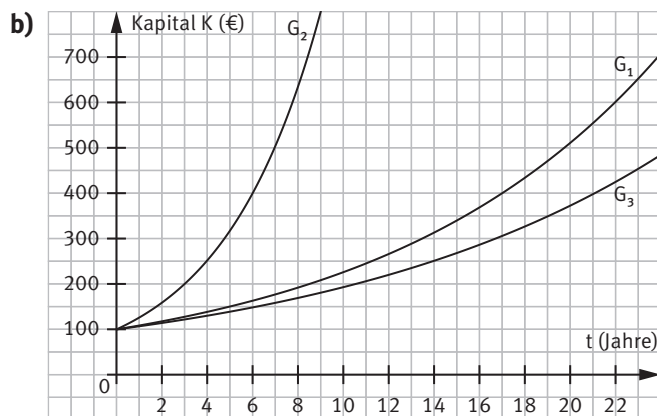
Zeichnungen: siehe Schulbuch

b) Punkte auf derselben Parallele zur x-Achse haben dieselbe y-Koordinate, z. B. $P_1(2|4) \in G_{f_1}$ und $P_2(1|4) \in G_{f_2}$. Der Abstand eines solchen Punktes von der y-Achse ist jeweils die x-Koordinate des Punktes, wobei gilt: $f_1(x_1) = f_2(x_2)$, also $2^{x_1} = 4^{x_2} = (2^2)^{x_2} = 2^{2x_2}$. Exponentenvergleich ergibt: $x_1 = 2x_2$.

K1/3

- 16 a) 1 $20000 \cdot a_1^5 = 30000 \Rightarrow a_1^5 = \frac{3}{2} \Rightarrow a_1 = 1,5^{\frac{1}{5}} \approx 1,085 \Rightarrow K_1(t) = 20000 \cdot 1,085^t$
 2 $2000 \cdot a_2^3 = 4000 \Rightarrow a_2^3 = 2 \Rightarrow a_2 = 2^{\frac{1}{3}} \approx 1,26 \Rightarrow K_2(t) = 2000 \cdot 1,26^t$
 3 $10000 \cdot a_3^{35} = 100000 \Rightarrow a_3^{35} = 10 \Rightarrow a_3 = 10^{\frac{1}{35}} \approx 1,068 \Rightarrow K_3(t) = 10000 \cdot 1,068^t$

Der Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse stellt das zum Zeitpunkt $t = 0$ (Beginn des Vertrags) vorhandene Kapital dar.



- c) Das zweite Angebot mit einer jährlichen Verzinsung von 26% ist unrealistisch und vermutlich unseriös. Auch die 8,5 % Zinsen des ersten Angebots erscheinen sehr hoch; bei einem solchen Angebot sollte man sich nach möglichen Risiken erkundigen. Auch der Zinssatz des dritten Angebots ist mit 6,8% recht hoch; auch bei diesem Angebot können Risiken für Anleger bestehen, die im Angebot nicht genannt werden. Zudem ist das Angebot auf eine Erwerbstätigkeit von 35 Jahren ausgelegt, so dass es nur für jüngere Arbeitnehmerinnen und Arbeitnehmer in Frage kommt.

K1/6

- 17 a) Entwicklung des Pkw-Bestands bei gleichbleibender Wachstumsrate:

$$2020: 3\,607\,258 \cdot 1,05 = 3\,787\,620,9$$

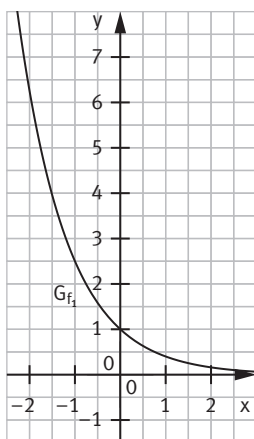
$$2021: 3\,607\,258 \cdot 1,05^2 = 3\,977\,001,945$$

Die Zahlenangaben stimmen, allerdings wäre eine im Sachzusammenhang sinnvolle Rundung angemessen, z. B. auf ganze Pkw. Damit erhielte man als Prognose für 2020 einen Bestand von etwa 3 787 621 Pkw und für 2021 einen Bestand von etwa 3 977 002 Pkw.

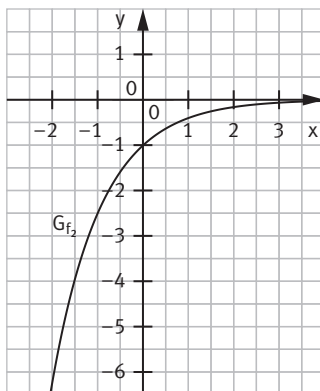
- b) Die Annahme einer gleichbleibenden Wachstumsrate über einen längeren Zeitraum hinweg erscheint nicht sinnvoll, da dabei mögliche Änderungen der Wachstumsrate nicht berücksichtigt werden. So z. B. kann eine Überlastung der Verkehrs-Infrastruktur (eine gleichbleibende jährliche Zunahme des Pkw-Bestandes um 5 % würde bereits in 10 Jahren zu etwa 6,5 Millionen Pkw führen) die Nachfrage nach Pkw dämpfen. Auch steigende Kosten (z. B. für Kraftstoffe), ein weiterer Ausbau des ÖPNV und zunehmendes ökologisches Bewusstsein der Bevölkerung können die Wachstumsrate reduzieren.

K4/5

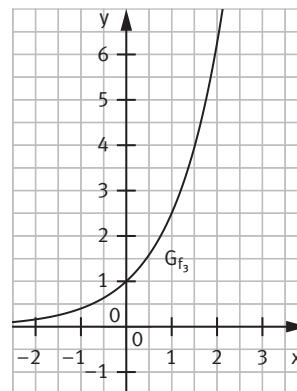
18



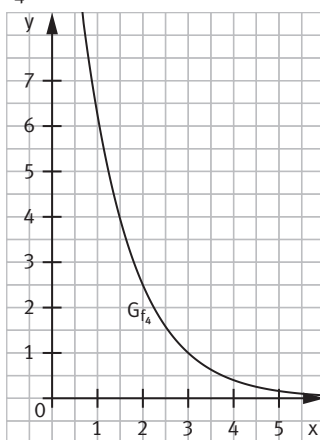
a) $f_2(x) = -0,4^x$



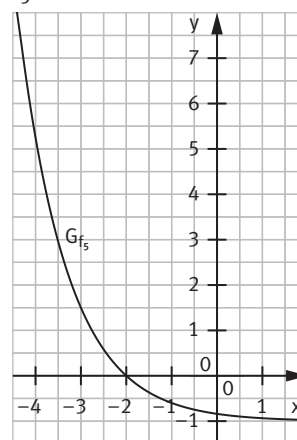
b) $f_3(x) = 2,5^x$



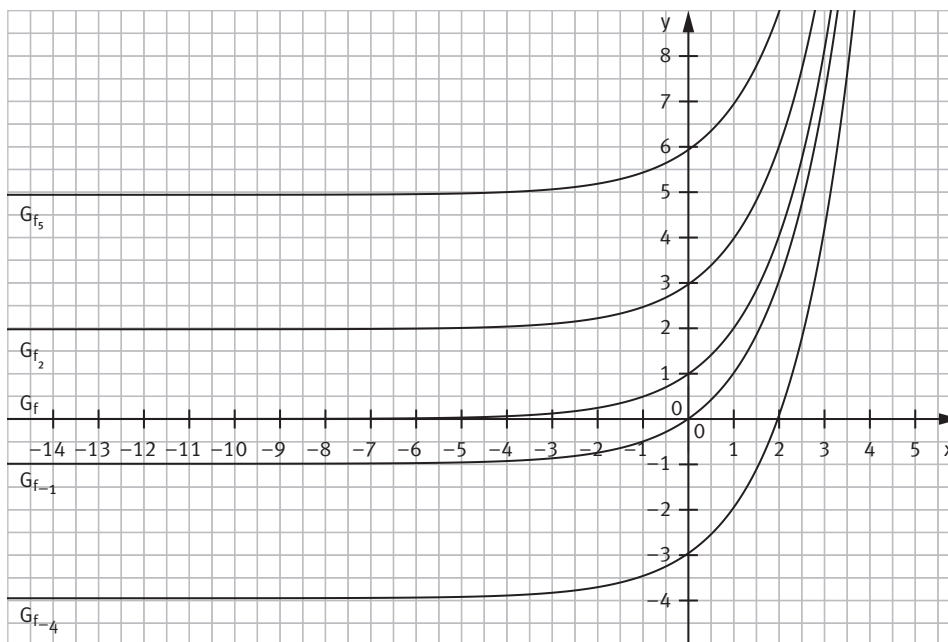
c) $f_4(x) = 0,4^{x-3}$



d) $f_5(x) = 0,4^{x+2} - 1$

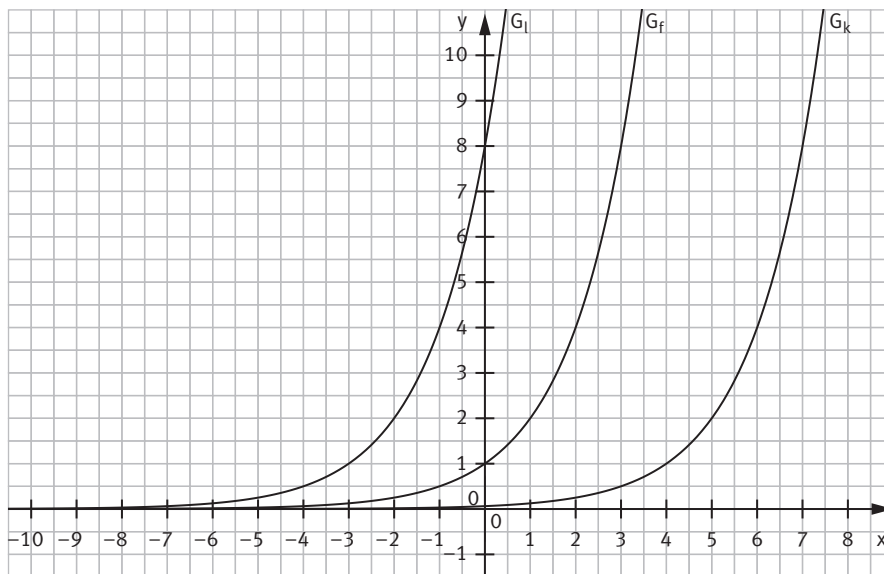


K1/4

19 a) Beispiele (Graphen der Funktionen $f, f_{-4}, f_{-1}, f_2, f_5$):


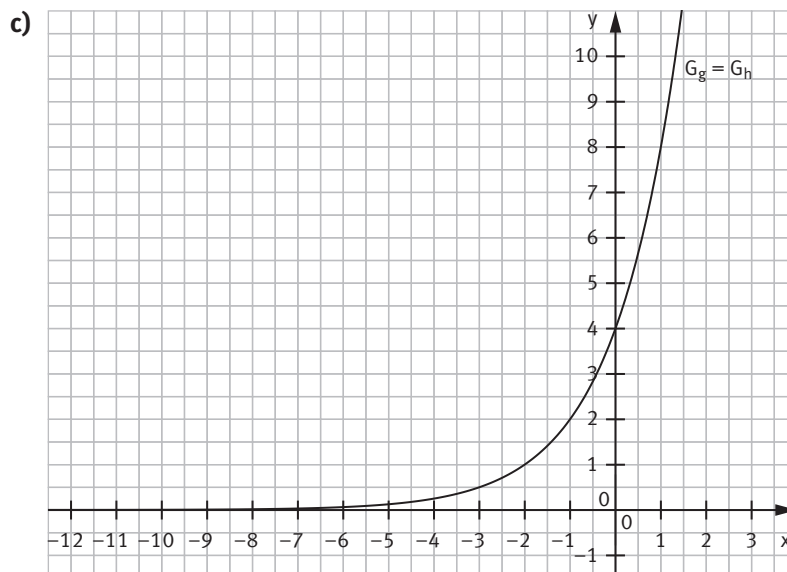
Der Graph von f_c entsteht durch Verschiebung des Graphen von G_f um c längs der y -Achse. Dabei wird die Asymptote $y = 0$ des Graphen von f mit verschoben. Die Asymptote des Graphen von f_c hat dann die Gleichung $y = c$.

b) Beispiele (Graphen der Funktionen f , k mit $k(x) = 2^{x-4}$ und l mit $l(x) = 2^{x+3}$):



Gezeichnet sind die um 3 nach links bzw. um 4 nach rechts verschobenen Graphen der Funktionen k mit $k(x) = 2^{x-4}$ und l mit $l(x) = 2^{x+3}$.

Verallgemeinert: Der Graph der Funktion mit dem Funktionsterm 2^{x-c} ist der Graph G_f um $|c|$ Einheiten längs der x -Achse verschoben. Für $c < 0$ erfolgt die Verschiebung nach links und für $c > 0$ nach rechts.



Die Graphen der Funktionen g und h stimmen überein, da die Funktionsterme $g(x)$ und $h(x)$ äquivalent sind:

$$g(x) = 4 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 2^x = 2^{x+2} = h(x)$$

- K2/3** 20 a) Strahlungsintensität I in Abhängigkeit von der Dicke d der Bleischicht
 $I(0)$: ursprünglicher Strahlungswert; d in μm):
 $I(d) = I(0) \cdot 0,99^d$
 Bedingung: $I(d) < 10\% \text{ von } I(0) \Leftrightarrow I(d) < 0,1 \cdot I(0) \Leftrightarrow I(0) \cdot 0,99^d < 0,1 \cdot I(0) \Leftrightarrow 0,99^d < 0,1$
 Gezieltes Probieren ergibt $d \approx 230$. Ab einer Dicke der Bleischicht von etwa $230 \mu\text{m}$ liegt die Strahlungsintensität unter 10% des ursprünglichen Wertes.
- b) Wenn 95% der Strahlung absorbiert werden, beträgt die Strahlungsintensität $I(d)$ noch 5% des ursprünglichen Wertes $I(0)$, also $I(d) = 0,05 \cdot I(0)$:
 $I(d) = 0,05 \cdot I(0) \Leftrightarrow I(0) \cdot 0,99^d = 0,05 \cdot I(0) \Leftrightarrow 0,99^d = 0,05$
 Gezieltes Probieren ergibt $d \approx 298 \mu\text{m}$
 Die Dicke der Bleischicht beträgt etwa $0,0298 \text{ cm}$.
 Volumen der Bleischicht, die $0,20 \text{ m}^2 = 2000 \text{ cm}^2$ schützt:
 $V = 2000 \text{ cm}^2 \cdot 0,0298 \text{ cm} = 59,6 \text{ cm}^3$
 Masse des Bleianteils: $m = \rho_{\text{Blei}} \cdot V = 11,3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 59,6 \text{ cm}^3 = 673,48 \text{ g}$
 Das Blei in der Schürze muss etwa 673 g wiegen.

- K2/6** 21 a) $a_1 = 1 \text{ cm}$
 $a_2 = 1 \text{ cm} \cdot 1,5$
 $a_3 = 1 \text{ cm} \cdot 1,5^2$
 $a_{10} = 1 \text{ cm} \cdot 1,5^9$
 $a_m = 1 \text{ cm} \cdot 1,5^{m-1}$
- b) 1 „Spirale“ aus den ersten 4 Strecken:
 $l_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \text{ cm} + 1 \text{ cm} \cdot 1,5 + 1 \text{ cm} \cdot 1,5^2 + 1 \text{ cm} \cdot 1,5^3$
 $= 1 \text{ cm} \cdot (1 + 1,5 + 1,5^2 + 1,5^3) = 8,125 \text{ cm} \approx 8 \text{ cm}$
- 2 „Spirale“ aus den ersten 6 Strecken:
 $l_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1 \text{ cm} (1 + 1,5 + 1,5^2 + 1,5^3 + 1,5^4 + 1,5^5)$
 $= 20,78125 \text{ cm} \approx 21 \text{ cm}$
- 3 „Spirale“ aus den ersten 8 Strecken:
 $l_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 1 \text{ cm} (1 + 1,5 + 1,5^2 + \dots + 1,5^7)$
 $= 49,2578 \text{ cm} \approx 49 \text{ cm}$

Anpassung von Modellen: Das logistische Wachstum

K6

- Anzahl w der „Wissenden“ in Abhängigkeit von der „Tagesnummer“ d :

d	1	2	3	4	5	10	$n \in \{1; 2; \dots; 10\}$
w	1	2	4	8	16	512	2^{n-1}

Das Modell ist nicht für eine längerfristige Beschreibung des Problems geeignet, da bereits am elften Tag die Anzahl der „Wissenden“ die Anzahl der Schülerinnen und Schüler überschreitet. Zudem wird man annehmen können, dass es bei steigender Anzahl von „Wissenden“ für einen „Wissenden“ zunehmend schwierig wird, jemanden zu treffen, der das Gerücht noch nicht kennt. Mit steigender Anzahl der „Wissenden“ wird sich also die Zunahme der Anzahl der „Wissenden“ verlangsamen.

K1

- Erläuterung der Berechnung von ΔN : Jeder der N „Wissenden“ kann das Wissen maximal an $(850 - N)$ „Nichtwissende“ weitergeben, aber das passiert nur in einem Bruchteil der möglichen Fälle, der durch den Faktor k ausgedrückt wird.

K1

Tag	Wissende	Unwissende	Zuwachs	Wissende neu
1	1,0	849,0	0,8	1,8
2	1,8	848,2	1,6	3,4
3	3,4	846,6	2,9	6,3
4	6,3	843,7	5,3	11,6
5	11,6	838,4	9,8	21,4
6	21,4	828,6	17,7	39,1
7	39,1	810,9	31,7	70,8
8	70,8	779,2	55,2	126,0
9	126,0	724,0	91,2	217,2
10	217,2	632,8	137,5	354,7
11	354,7	495,3	175,7	530,4
12	530,4	319,6	169,5	699,9
13	699,9	150,1	105,1	805,0
14	805,0	45,0	36,3	841,2
15	841,2	8,8	7,4	848,6
16	848,6	1,4	1,2	849,8
17	849,8	0,2	0,2	850,0

K6

- Beispiele für logistisches Wachstum:
- Tierpopulation (beschränktes Nahrungsangebot)
 - Seerosenteich (beschränkte Fläche, beschränkte Nährstoffe)
 - Betriebsgröße (beschränkte Arbeitskräfteanzahl)
 - vermutlich Erdbevölkerung (beschränkte Ressourcen)

Alternativer Einstieg: Schulbuch Seite 13

Entdecken

K2

- Halbwertszeit von C14 ist $T_H = 5730$ Jahre. In der Gletschermumie sind noch 53,3 % des ursprünglichen C14 vorhanden: $0,533 = 0,5^{\frac{t}{5730a}}$ (Zeit t in Jahren). Bestimmung von t durch gezieltes Probieren:

t in Jahren	5000	5100	5150	5200
C14 in %	$\approx 54,62$	$\approx 54,00$	$\approx 53,63$	$\approx 53,31$

Ötzi ist vor ungefähr 5200 Jahren gestorben.

K5

- Die Funktion m gehört zu einem exponentiellen Abnahmeprozess mit der Halbwertszeit T_H , da $m(5730) = 0,5^1 = 0,5$ gilt.

Nachgefragt

K1

- Die Aussage ist falsch, denn $2^1 \neq 0$. Richtig wäre: $\log_2 1 = 0$, denn $2^0 = 1$.

K1

- Die Behauptung ist richtig, denn es gilt: $a^x = p \Leftrightarrow x = \log_a p$.

Aufgaben

K5

- 1 a) $2^5 = 32$ $\log_2 32 = 5$ $\log_2 64 = 6$ $\log_4 64 = 3$ $\log_8 64 = 2$
 b) $81^{\frac{1}{4}} = 3$ $\log_9 27 = \log_9 (3^3) = 3 \cdot \log_9 3 = 3 \cdot \log_9 (9^{\frac{1}{2}}) = \frac{3}{2} \cdot \log_9 9 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$
 $\log_9 81 = 2$ $\log_3 27 = 3$ $\log_3 243 = 5$
 c) $\log 10 = 1$ $\log 1000 = 3$ $\log(10^7) = 7$ $\log 0,01 = -2$ $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$
 d) $\log_2 (2^4) = 4$ $\log_2 (4^3) = \log_2 ((2^2)^3) = 3 \cdot \log_2 (2^2) = 3 \cdot 2 = 6$ $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$
 $\log_2 1024 = 10$ $\log_2 \sqrt[3]{8} = \log_2 2 = 1$
 e) $\log_{0,1} 0,01 = 2$ $\log_{0,5} 2 = -1$ $\log_{0,4} 0,16 = 2$ $\log_{0,125} 8 = -1$
 $\log_8 (64^2) = 4$

K5

- 2 a) $\log_x 9 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow L = \{3\}$
 $\log_x 64 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow L = \{4\}$
 $\log_x 2 = 9 \Leftrightarrow x^9 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[9]{2} \Rightarrow L = \{\sqrt[9]{2}\}$
 $\log_x 0,25 = -2 \Leftrightarrow x^{-2} = 0,25 \Leftrightarrow x^{-2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow L = \{2\}$
 b) $\log_y 625 = 4 \Leftrightarrow y^4 = 625 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow L = \{5\}$
 $\log_y 2 = 2 \Leftrightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2} \Rightarrow L = \{\sqrt{2}\}$
 $\log_y 7 = 8 \Leftrightarrow y^8 = 7 \Rightarrow y = \sqrt[8]{7} \Rightarrow L = \{\sqrt[8]{7}\}$
 $\log_y 8 = -3 \Leftrightarrow y^{-3} = 8 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow L = \{\frac{1}{2}\}$
 c) $\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 \Leftrightarrow x = 8 \Rightarrow L = \{8\}$
 $\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 \Leftrightarrow x = 9 \Rightarrow L = \{9\}$
 $\log_7 x = 1 \Leftrightarrow x = 7^1 \Leftrightarrow x = 7 \Rightarrow L = \{7\}$
 $\log_9 x = 4 \Leftrightarrow x = 9^4 \Leftrightarrow x = 6561 \Rightarrow L = \{6561\}$
 d) $2^x = 32 \Leftrightarrow x = \log_2 32 \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow L = \{5\}$
 $\log_2 32 = y \Leftrightarrow 2^y = 32 \Leftrightarrow y = 5 \Rightarrow L = \{5\}$
 $\log_z 32 = 5 \Leftrightarrow z^5 = 32 \Leftrightarrow z = 2 \Rightarrow L = \{2\}$
 $\log_2 w = 10 \Leftrightarrow w = 2^{10} \Leftrightarrow w = 1024 \Rightarrow L = \{1024\}$

- e) $\log_2(x^2) = 4 \Leftrightarrow x^2 = 2^4 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \Leftrightarrow L = \{4\}$
 oder:
 $\log_2(x^2) = 4 \Leftrightarrow 2 \cdot \log_2 x = 4 \Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 \Rightarrow x = 4 \Leftrightarrow L = \{4\}$
 $\log_3|y-3| = 3 \Leftrightarrow |y-3| = 3^3 \Leftrightarrow |y-3| = 27 \Rightarrow y_1 = 30 \text{ oder } y_2 = -24 \notin \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Rightarrow L = \{30\}$
 $\log z = 2,5 \Leftrightarrow z = 10^{2,5} \Leftrightarrow z = 10^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow z = \sqrt{10^5} = \sqrt{10^4 \cdot 10} = 10^2 \sqrt{10} = 100\sqrt{10}$
 $\Rightarrow L = \{100\sqrt{10}\}$
 $\log(\log w) = 0 \Leftrightarrow \log w = 10^0 = 1 \Leftrightarrow w = 10^1 = 10 \Rightarrow L = \{10\}$
- f) $5^{4x-7} = 125 \Leftrightarrow 4x-7 = \log_5 125 \Leftrightarrow 4x-7 = 3 \Leftrightarrow 4x = 10 \Leftrightarrow x = 2,5 \Rightarrow L = \{2,5\}$
 $4^{3x+5} = 16 \Leftrightarrow 3x+5 = \log_4 16 \Leftrightarrow 3x+5 = 2 \Leftrightarrow x = -1 \notin \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Rightarrow L = \{\}$
 $|\log_3 x| = 1 \Leftrightarrow \log_3 x_1 = -1 \text{ oder } \log_3 x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 3^{-1} = \frac{1}{3} \text{ oder } x_2 = 3^1 = 3 \Rightarrow L = \{\frac{1}{3}; 3\}$
 $\log_3(4x+1) = 2 \Leftrightarrow 4x+1 = 3^2 \Leftrightarrow 4x+1 = 9 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow L = \{2\}$

K5/6

- 3 Die beiden Terme haben unterschiedliche Bedeutungen:

$\sqrt[3]{243}$ ist die Zahl, deren dritte Potenz gleich 243 ist, also eine Basis.

$\log_3 243$ ist die Zahl, mit der man die Basis 3 potenzieren muss, um 243 zu erhalten, also ein Exponent.

Auch die Werte der beiden Zahlen unterscheiden sich:

$$\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3^{\frac{5}{3}} \approx 6,24 \quad \log_3 243 = \log_3 3^5 = 5.$$

K1/5

- 4 a) $\log 3 \approx 0,477$ $\log 30 \approx 1,477$ $\log 300 \approx 2,477$

$$\log 3000 \approx 3,477 \quad \log 30000 \approx 4,477$$

Hinweis: Auffallend ist, dass sich mit jeder weiteren Zehnerpotenz das Ergebnis um 1 erhöht:

$$\log 30 = 1 + \log 3 \quad \log 300 = 2 + \log 3 \quad \log 3000 = 3 + \log 3 \quad \log 30000 = 4 + \log 3$$

Da $\log 10 = 1$ ist, lassen sich diese Beziehungen auch folgendermaßen schreiben:

$$\log 30 = \log 10 + \log 3$$

$$\log 300 = 2 \cdot \log 10 + \log 3 = \log(10^2) + \log 3 = \log 100 + \log 3$$

$$\log 3000 = 3 \cdot \log 10 + \log 3 = \log(10^3) + \log 3 = \log 1000 + \log 3$$

$$\log 30000 = 4 \cdot \log 10 + \log 3 = \log(10^4) + \log 3 = \log 10000 + \log 3$$

bzw.

$$\log(3 \cdot 10) = \log 3 + \log 10$$

$$\log(3 \cdot 100) = \log 3 + \log 100$$

$$\log(3 \cdot 1000) = \log 3 + \log 1000$$

$$\log(3 \cdot 10000) = \log 3 + \log 10000$$

Diese Beobachtungen können zu der Vermutung führen, dass allgemein gilt:

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b \text{ (siehe auch Aufgabe 11).}$$

- b) $\log 0,5 \approx -0,301$ $\log 0,05 \approx -1,301$ $\log 0,005 \approx -2,301$

$$\log 0,0005 \approx -3,301 \quad \log 0,00005 \approx -4,301$$

Hinweis: Auffallend ist, dass sich mit jeder weiteren Zehnerpotenz das Ergebnis um 1 vermindert:

$$\log 0,05 = -1 + \log 0,5 \quad \log 0,005 = -2 + \log 0,5$$

$$\log 0,0005 = -3 + \log 0,5 \quad \log 0,00005 = -4 + \log 0,5$$

Da $\log(10^{-1}) = -1$ ist, lassen sich diese Beziehungen auch folgendermaßen schreiben:

$$\log 0,05 = \log(10^{-1}) + \log 0,5$$

$$\log 0,005 = 2 \cdot \log(10^{-1}) + \log 0,5 = \log(10^{-2}) + \log 0,5$$

$$\log 0,0005 = 3 \cdot \log(10^{-1}) + \log 0,5 = \log(10^{-3}) + \log 0,5$$

$$\log 0,00005 = 4 \cdot \log(10^{-1}) + \log 0,5 = \log(10^{-4}) + \log 0,5$$

bzw.

$$\log(0,5 \cdot 10^{-1}) = \log 0,5 + \log(10^{-1})$$

$$\log(0,5 \cdot 10^{-2}) = \log 0,5 + \log(10^{-2})$$

$$\log(0,5 \cdot 10^{-3}) = \log 0,5 + \log(10^{-3})$$

$$\log(0,5 \cdot 10^{-4}) = \log 0,5 + \log(10^{-4})$$

Auch diese Beobachtungen können zu der Vermutung führen, dass allgemein gilt:

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b \text{ (siehe auch Aufgabe 11).}$$

Anmerkung: Die letzten vier Gleichungen lassen sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\log\left(\frac{0,5}{10}\right) = \log 0,5 - \log 10$$

$$\log\left(\frac{0,5}{100}\right) = \log 0,5 - \log(10^2) = \log 0,5 - \log 100$$

$$\log\left(\frac{0,5}{1000}\right) = \log 0,5 - \log(10^3) = \log 0,5 - \log 1000$$

$$\log\left(\frac{0,5}{10000}\right) = \log 0,5 - \log(10^4) = \log 0,5 - \log 10000$$

Diese Beobachtungen können zu der Vermutung führen, dass allgemein gilt:

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \text{ (siehe auch Aufgabe 11).}$$

K1/5

5 a) $\log_2 4 = \log_3 9$, da $\log_2 4 = 2$ und $\log_3 9 = 2$.

b) $\log 10 < \log_2 10$, da $\log 10 = 1$ und $\log_2 10 > 1$, weil $2^1 = 2 < 10$.

c) $\log_2 10 > \log_3 10$, da $2 < 3$.

2 muss mit einer größeren Zahl potenziert werden als 3, um als Ergebnis 10 zu erhalten:

$$2^3 = 8 < 10 < 2^4 = 16, \text{ also } 3 < \log_2 10 < 4$$

$$3^2 = 9 < 10 < 3^3 = 27, \text{ also } 2 < \log_3 10 < 3.$$

d) $\log_5 125 = \log_3 27$, da $\log_5 125 = 3$ und $\log_3 27 = 3$.

e) $\log_5 35 < \log_3 35$, da $5 > 3$.

5 muss mit einer kleineren Zahl potenziert werden als 3, um als Ergebnis 35 zu erhalten:

$$5^2 = 25 < 35 < 5^3 = 125, \text{ also } 2 < \log_5 35 < 3$$

$$3^3 = 27 < 35 < 3^4 = 81, \text{ also } 3 < \log_3 35 < 4.$$

f) $\log_6 108 < \log_2 12$, da

$$6^2 = 36 < 108 < 6^3 = 216, \text{ also } 2 < \log_6 108 < 3$$

$$2^3 = 8 < 12 < 2^4 = 16, \text{ also } 3 < \log_2 12 < 4.$$

K3/5

6 a) $n = n_0 \cdot 2^x$ (x: Zeit in h)

$$n = 10 \cdot n_0$$

$$n_0 \cdot 2^x = 10 \cdot n_0$$

$$2^x = 10 \Rightarrow x \approx 3,3: \text{ Nach etwa 3,3 h hat sich die Anzahl verzehnfacht.}$$

b) $m = m_0 \cdot a^x$ (x: Zeit in h)

$$2m_0 = m_0 \cdot a^{\frac{80}{60}} = m_0 \cdot a^{\frac{4}{3}}$$

$$a^{\frac{4}{3}} = 2 \Leftrightarrow a = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8} \approx 1,68$$

$$m \approx m_0 \cdot 1,68^x$$

$$100m_0 \approx m_0 \cdot 1,68^x$$

$$1,68^x \approx 100 \Rightarrow x \approx 8,9: \text{ Innerhalb von knapp 9 Stunden hat die Masse auf das 100-Fache zugenommen.}$$

c) $n = n_0 \cdot a^x$ (x: Zeit in h)

$$1,6 \cdot n_0 = n_0 \cdot a^1 \Rightarrow a = 1,6$$

$$n = n_0 \cdot 1,6^x$$

$$2n_0 = n_0 \cdot 1,6^x$$

$$1,6^x = 2 \Rightarrow x \approx 1,47: \text{ Sie teilen sich nach jeweils etwa } 1\frac{1}{2} \text{ Stunden; dadurch verdoppelt sich ihre Anzahl.}$$

- K5** 7 a) $x = \sqrt[4]{2401} = 7$ b) $a = \sqrt[8]{6561} = 3$ c) $m = \sqrt[5]{120} \approx 2,605$
 d) $y = \sqrt[10]{72} \approx 1,534$ e) $x = \log_4 256 = 4$ f) $b = \log_5 100 \approx 2,861$
 g) $n = \log_{0,5} 0,05 \approx 4,322$ h) $y = \log_{0,2} 15 \approx -1,683$

K1/5 8 a)

Der Wert von ...	liegt zwischen ...	Begründung
$\log 15$	1 und 2	$10 = 10^1 < 15 < 10^2 = 100$
$\log 150$	2 und 3	$100 = 10^2 < 150 < 10^3 = 1000$
$\log 6$	0 und 1	$1 = 10^0 < 6 < 10^1 = 10$
$\log 0,07$	-2 und -1	$0,01 = 10^{-2} < 0,07 < 10^{-1} = 0,1$
$\log 12,5$	1 und 2	$10 = 10^1 < 12,5 < 10^2 = 100$
$\log 12\,000$	4 und 5	$10\,000 = 10^4 < 12\,000 < 10^5 = 100\,000$
$\log 0,0001$	-5 und -3	$\log 0,0001 = \log (10^{-4}) = -4$

b)

Der Wert von ...	liegt zwischen ...	Begründung
$\log_3 15$	2 und 3	$9 = 3^2 < 15 < 3^3 = 27$
$\log_3 150$	4 und 5	$81 = 3^4 < 150 < 243 = 3^5$
$\log_3 6$	1 und 2	$3 = 3^1 < 6 < 9 = 3^2$
$\log_2 0,3$	-2 und -1	$0,25 = 2^{-2} < 0,3 < 0,5 = 2^{-1}$
$\log_3 28$	3 und 4	$27 = 3^3 < 28 < 81 = 3^4$
$\log_3 700$	5 und 6	$243 = 3^5 < 700 < 729 = 3^6$
$\log_3 0,1$	-3 und -2	$0,037 = 3^{-3} < 0,1 < 0,1 = 3^{-2}$

- K1/3** 9 a) Die Lautstärkeskala in Dezibel basiert auf der gerade noch hörbaren Schallleistung P_0 („Hörschwelle“), die bei den meisten Menschen etwa gleich ist. Hierbei gelangt im mittleren Tonhöhenbereich auf jeden Quadratzentimeter Trommelfell die Schallleistung $P_0 = 10^{-16} \text{ J s}^{-1} = 10^{-16} \text{ W}$; die zugehörige Lautstärke wird als 0 dB bezeichnet.

Durch $10^x = \frac{P_2}{P_1}$, also $x = \log \frac{P_2}{P_1}$, ist der Wert x (in Bel) der Lautstärkedifferenz als (dekadischer)

Logarithmus des Schallleistungsverhältnisses definiert.

- b) 1 Schallleistung von einem (zwei; drei) dieser Presslufthämmer: P_1 ($2P_1$; $3P_1$)

Lautstärkezunahmen: $\left(\log \frac{2P_1}{P_1} \right) B = (\log 2) B \approx 0,30 B = 3,0 \text{ dB}$

$\left(\log \frac{3P_1}{P_1} \right) B = (\log 1,5) B \approx 0,18 B = 1,8 \text{ dB}$

Ergebnis: Die Lautstärke nimmt um 3,0 dB bzw. (nur noch) um 1,8 dB zu.

- 2 Schallleistung von einem (zwei; ...; n) dieser Lautsprecher: P_1 ($2P_1$; ... nP_1); $n \in \mathbb{N}$

Einzelschallleistung: $\log \left(\frac{P_1}{P_0} \right) B = 30 \text{ dB} = 3,0 B$; $\log \left(\frac{P_1}{P_0} \right) = 3,0$; $\frac{P_1}{P_0} = 10^{3,0} = 1000$; $P_1 = 1000 P_0$

Gesamtschallleistung: $P_n = nP_1 = 1000 nP_0$; $\log \left(\frac{P_n}{P_0} \right) B = 2 \cdot 30 \text{ dB} = 6 B$

$\log \left(\frac{P_n}{P_0} \right) = 6$; $\frac{P_n}{P_0} = 10^6$; $P_n = 10^6 P_0$; $n = \frac{P_n}{P_1} = \frac{10^6 P_0}{1000 P_0} = 1000$

Ergebnis: 1000 dieser Lautsprecher wurden als doppelt so laut wie ein einzelner wahrgenommen.

- K2/3** 10 a) 1935 entwickelte der amerikanische Geophysiker und Seismologe Charles Francis Richter (1900–1985) ein Verfahren zur Bewertung der Stärke S von Erdbeben. Die nach ihm benannte Richter-Skala ist nicht linear, sondern logarithmisch zur Basis 10. Die jeweils nächsthöhere Stufe auf der Richter-Skala („Magnitude“) entspricht einer 10-mal so großen Erdbebenintensität.
 $S = \log \frac{I}{I_0}$ (I : Intensität, die mit dem Seismographen gemessen wird; I_0 : minimale, gerade noch wahrnehmbare Intensität)
- b) Aus $I_{LA} = 5 \cdot 10^6 \cdot I_0$ ergibt sich $S_{LA} = \log \frac{5 \cdot 10^6 \cdot I_0}{I_0} = \log(5 \cdot 10^6) \approx 6,7$.
- c) Aus $S = \log \frac{I}{I_0}$ folgt $I = I_0 \cdot 10^S$, also $I_{SF} \approx I_0 \cdot 10^{8,3} \approx 200 \text{ Mio. } I_0$ und $I_{NC} \approx I_0 \cdot 10^{7,7} \approx 50 \text{ Mio. } I_0$, d. h. $I_{SF} \approx 4 \cdot I_{NC}$.

- K2/6** 11 a) **Erläuterung des Beweises für Rechenregel 1 :**
 Zunächst werden p und q als Potenzen mit der Basis a geschrieben, da dies auch die Basis des Logarithmus ist: $p = a^x$ und $q = a^y$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Die Zahlen x und y findet man als $x = \log_a p$ und $y = \log_a q$. Bei den Umformungen werden folgende Rechengesetze verwendet:
 Potenzgesetz $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
 Rechengesetz für Logarithmen: $\log_a(p^r) = r \cdot \log_a p$. Daraus ergibt sich:
 $\log_a a^{x+y} = (x+y) \cdot \log_a a = (x+y) \cdot 1 = x+y$.
 Wegen $x = \log_a p$ und $y = \log_a q$ lässt sich $x+y$ schreiben als $x+y = \log_a p + \log_a q$.

Beweis der Rechenregel 2 :

p und q werden wie oben als Potenzen mit der Basis a geschrieben, da dies auch die Basis des Logarithmus ist: $p = a^x$ und $q = a^y$ mit $x = \log_a p$ und $y = \log_a q$.

Damit gilt:

$$\log_a \left(\frac{p}{q} \right) = \log_a \left(\frac{a^x}{a^y} \right) = \log_a a^{x-y} = (x-y) \cdot \log_a a = (x-y) \cdot 1 = x-y = \log_a p - \log_a q.$$

Hier wurden das Potenzgesetz $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ und das Rechengesetz für Logarithmen $\log_a(p^r) = r \cdot \log_a p$ verwendet.

- b) 1 $\log_2 6 - \log_2 48 = \log_2 \left(\frac{6}{48} \right) = \log_2 \left(\frac{1}{8} \right) = -3$
- 2 $\log_5 \sqrt{250} - \log_5 \sqrt{10} = \log_5 \left(\frac{\sqrt{250}}{\sqrt{10}} \right) = \log_5 \left(\sqrt{\frac{250}{10}} \right) = \log_5 (\sqrt{25}) = \log_5 5 = 1$
- 3 $3 \log_a x + 2 \log_a y = \log_a (x^3) + \log_a (y^2) = \log_a (x^3 \cdot y^2)$
- 4 $\log x - \log y = \log \left(\frac{x}{y} \right)$
- 5 $\log x + 3 \log y - 2 \log z = \log x + \log (y^3) - \log (z^2) = \log (x \cdot y^3) - \log (z^2) = \log \left(\frac{x \cdot y^3}{z^2} \right)$
- 6 $\log a - \log b = \log \left(\frac{a}{b} \right)$
- 7 $2 \log x + \log y = \log (x^2) + \log y = \log (x^2 \cdot y)$
- 8 $\log a + 1 = \log a + \log 10 = \log (10a)$
- 9 $\log 5 - 2 = \log 5 - \log 100 = \log \left(\frac{5}{100} \right) = \log \left(\frac{1}{20} \right) \approx -1,301$
- 10 $\log 3 + 2 \log a = \log 3 + \log (a^2) = \log (3a^2)$
- 11 $\log 18 - \log 3 = \log \left(\frac{18}{3} \right) = \log 6 \approx 0,778$

- K1/6** 12 a) 1 Lucas verwendet die Definition des Logarithmus, um die Gleichung umzuschreiben.
- 2 Laura logarithmiert beide Seiten der Gleichung mit dem Logarithmus zur Basis 10 und dividiert sie dann durch $\log a$.
- Da beide die Gleichung nach x aufgelöst haben, kann man nun die rechten Seiten gleichsetzen.

b) $b^x = p; x = \log_b p \quad (1)$

$$\log_a (b^x) = \log_a p; x \cdot \log_a b = \log_a p$$

$$x = \frac{\log_a p}{\log_a b} \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $\log_b p = \frac{\log_a p}{\log_a b}$.

K2/5 13 $\log\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \log\left(1 + \frac{1}{99}\right) = \log\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{99}{98} \cdot \frac{100}{99}\right) = \log 100 = 2$

K1/6 14 Lisa verwendet im ersten Schritt eine Rechenregel für Logarithmen, danach eine Äquivalenzumformung und zum Schluss die Definition des Logarithmus. Lisas Rechnung ist korrekt.

K2/5 15 a) $\log_3 (x^2 + 2xy + y^2) = \log_3 [(x+y)^2] = 2 \log_3 (x+y) = 2 \cdot 2 = 4$

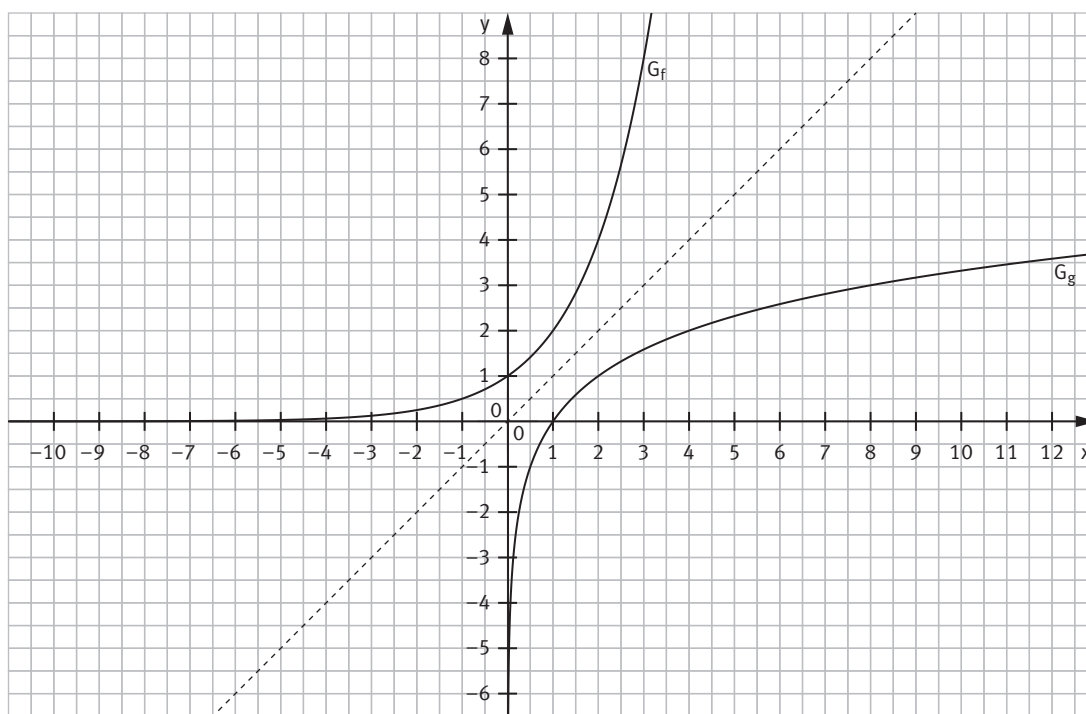
b) $\log_3 \sqrt{x+y} = 0,5 \cdot \log_3 (x+y) = 0,5 \cdot 2 = 1$

c) $\log_3 \frac{1}{x+y} = \log_3 1 - \log_3 (x+y) = 0 - 2 = -2$

d) $x+y = 3^2 = 9$

e) $(x+y)^{x+y} = 9^9 \approx 3,87 \cdot 10^8$

K2/4 16 a)



b) Definitionsmengen: $D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}^+$

Wertemengen: $W_f = \mathbb{R}^+, W_g = \mathbb{R}$

Somit gilt: $D_f = W_g$ und $D_g = W_f$.

Nullstellen: f hat keine Nullstelle, g hat genau eine Nullstelle $x = 1$.

Monotonie: Beide Graphen G_f und G_g sind monoton steigend.

Asymptoten: G_f hat die x -Achse als waagrechte Asymptote, G_g hat die y -Achse als senkrechte Asymptote.

c) Zu jedem Punkt $P(x|y) \in G_f$ liegt der bezüglich der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten spiegelbildliche Punkt $Q(y|x)$ auf dem Graphen G_g . Wenn $P(x|y)$ auf G_f liegt, gilt: $2^x = y$.

Daraus folgt $x = \log_2 y$, weswegen der Punkt $Q(y|x)$ auf G_g liegt.

d) Individuelle Ergebnisse. Für a sollten auch Werte mit $0 < a < 1$ einbezogen werden.

K1/3 17 a) $m(t) = m(0) \cdot 0,917^t$ (t : Zeit in Tagen; $m(t)$: Jodmasse in kg)

Halbwertszeit T_H :

$$m(T_H) = 0,5 \cdot m(0) \Rightarrow 0,5 \cdot m(0) = m(0) \cdot 0,917^{T_H}$$

$$\Rightarrow 0,917^{T_H} = 0,5 \Rightarrow T_H = \log_{0,917} 0,5 \approx 8,00 \text{ [d]}$$

$$\text{Nach 120 Tagen: } m(120) = 1 \text{ kg} \cdot 0,917^{120} \approx 3,1 \cdot 10^{-5} \text{ kg} = 0,31 \text{ mg}$$

b) $m(t) = m(0) \cdot 0,5^{\frac{t}{30}}$ (t : Zeit in Jahren)

$$m(10) = m(0) \cdot 0,5^{\frac{10}{30}} \approx 0,794 \cdot m(0)$$

Nach 10 Jahren waren noch etwa 79,4% der ursprünglichen Menge vorhanden.

$$m(20) = m(0) \cdot 0,5^{\frac{20}{30}} \approx 0,630 \cdot m(0)$$

Nach 20 Jahren waren noch etwa 63,0% der ursprünglichen Menge vorhanden.

Nach 30 Jahren waren noch 50% der ursprünglichen Menge vorhanden ($t_H = 30 \text{ a}$).

$$m(100) = m(0) \cdot 0,5^{\frac{100}{30}} \approx 0,099 \cdot m(0)$$

Nach 100 Jahren werden noch etwa 9,9% der ursprünglichen Menge vorhanden sein.

c) Individuelle Ergebnisse.

K2/6 18 Annahme: Von 5 Infizierten ausgehend hat einer davon nach einem Tag eine weitere Person angesteckt, so dass es nach dem ersten Tag 6 Infizierte sind. Rein rechnerisch stecken diese bis zum nächsten Tag 1,2 Personen neu an, also hat man nach 2 Tagen 7,2 Infizierte. Diese stecken $0,2 \cdot 7,2 = 1,44$ Personen neu an, so dass es nach 3 Tagen 8,64 Infizierte sind. Von diesen werden wiederum $0,2 \cdot 8,64 = 1,73$ Personen angesteckt. Nach 4 Tagen sind es also 10,37 Infizierte, was die angegebene Verdopplung der Anzahl innerhalb von vier Tagen annähernd trifft.

Alternative Lösung: Unter der Annahme einer exponentiellen Ausbreitung der Grippeepidemie gilt für die Anzahl $N(t)$ der Infizierten: $N(t) = N_0 \cdot a^t$ mit einem Wachstumsfaktor a (t in Tagen; N_0 : Anzahl der am Anfang des betrachteten Zeitraums Infizierten).

Bestimmung des Wachstumsfaktors a aus der Angabe, dass $N(t)$ sich innerhalb von vier Tagen verdoppelt:

$$N(4) = N_0 \cdot a^4; \text{ mit } N(4) = 2N_0 \text{ folgt } 2N_0 = N_0 \cdot a^4 \text{ und daraus } a^4 = 2 \text{ bzw. } a = \sqrt[4]{2} \approx 1,189 \approx 1,2.$$

Der Wachstumsfaktor 1,2 besagt, dass von einer Gruppe von Infizierten 20% der Personen, also jeder fünfte, täglich jeweils eine weitere Person anstecken.

Entdecken

K2

	5 Jahre	10 Jahre	20 Jahre
Einkommen	$3800 \text{ €} \cdot 1,025^5$ $\approx 4299,35 \text{ €}$	$3800 \text{ €} \cdot 1,025^{10}$ $\approx 4864,32 \text{ €}$	$3800 \text{ €} \cdot 1,025^{20}$ $\approx 6226,74 \text{ €}$
Miete	$650 \text{ €} \cdot 1,06^5$ $\approx 869,85 \text{ €}$	$650 \text{ €} \cdot 1,06^{10}$ $\approx 1164,05 \text{ €}$	$650 \text{ €} \cdot 1,06^{20}$ $\approx 2084,64 \text{ €}$
Anteil der Miete am Einkommen	$\frac{869,85 \text{ €}}{4299,35 \text{ €}} \approx 20,23 \%$	$\frac{1164,05 \text{ €}}{4864,32 \text{ €}} \approx 23,93 \%$	$\frac{2084,64 \text{ €}}{6226,74 \text{ €}} \approx 33,48 \%$

K2

- Anteil der Miete am Einkommen nach t Jahren:

$$A(t) = \frac{650}{3800} \cdot \left(\frac{1,06}{1,025}\right)^t \approx 0,171 \cdot 1,034^t$$

Berechnung, nach wie vielen Jahren die Miete $p\%$ des Gehalts ausmacht:

$$A(t_p) = \frac{p}{100} \text{ eingesetzt in obige Gleichung ergibt (Rundungen auf drei Dezimalen)}$$

$$\frac{p}{100} = 0,171 \cdot 1,034^{t_p} \Leftrightarrow 1,034^{t_p} = 0,058p \Leftrightarrow t_p = \log_{1,034}(0,058p).$$

Nachgefragt

K5

- **1** $4^x + 3^x = 0$: Die Gleichung hat keine Lösung, da beide Summanden positiv sind: $L = \{ \}$.
- 2** $4^x + 3^x = 2$: $x = 0$, denn $4^0 + 3^0 = 1 + 1 = 2$. $L = \{0\}$
 Die Gleichung hat keine weiteren Lösungen: Sie ist äquivalent zur Gleichung $4^x = -3^x + 2$ und kann daher als Bestimmung des Schnittpunkts der Graphen der Funktionen $f: x \mapsto 4^x$ und $g: x \mapsto -3^x + 2$, $D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gedeutet werden, die wegen ihrer Monotonie genau einen Schnittpunkt besitzen.
- 3** $4^x - 3^x = 7$: $x = 2$, denn $4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$. $L = \{2\}$
 Die Gleichung hat keine weiteren Lösungen: Sie ist äquivalent zur Gleichung $4^x = 7 + 3^x$ und kann daher als Bestimmung des Schnittpunkts der Graphen der Funktionen $f: x \mapsto 4^x$ und $g: x \mapsto 7 + 3^x$, $D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gedeutet werden, die wegen ihrer Monotonie genau einen Schnittpunkt besitzen.
- Die Aussage ist falsch, denn es gilt $2^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
 Die Gleichung hat keine Lösung für $a \leq 0$.

Aufgaben

K5

- 1** a) $2^x = 64$; $L = \{6\}$ b) $3^x = 81$; $L = \{4\}$ c) $L = \{4\}$ d) $2 \cdot 3^x = 18 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$; $L = \{2\}$
 e) $7 \cdot 5^x = 35 \Leftrightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$; $L = \{1\}$ f) $9 \cdot 7^x = \frac{9}{7} \Leftrightarrow 7^x = \frac{1}{7} \Rightarrow x = -1$; $L = \{-1\}$
 g) $4^x - 5 = 27 \Leftrightarrow 4^x = 32 \Leftrightarrow (2^2)^x = 2^5 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^5 \Leftrightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = 2,5$; $L = \{2,5\}$
 h) $9^x + \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow 9^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$; $L = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
 i) $2^{x+1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^2 \Rightarrow x+1 = 2 \Rightarrow x = 1$; $L = \{1\}$
 j) $3^{x-5} = 81 \Leftrightarrow 3^{x-5} = 3^4 \Rightarrow x-5 = 4 \Rightarrow x = 9$; $L = \{9\}$
 k) $2^{2x+3} = \frac{1}{32} \Leftrightarrow 2^{2x+3} = 2^{-5} \Leftrightarrow 2x+3 = -5 \Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = -4$; $L = \{-4\}$
 l) $3^{5x-1,5} = \sqrt[4]{27} \Leftrightarrow 3^{5x-1,5} = \sqrt[4]{3^3} \Leftrightarrow 3^{5x-1,5} = 3^{\frac{3}{4}} \Rightarrow 5x-1,5 = 0,75$
 $\Rightarrow 5x = 2,25 \Leftrightarrow x = 0,45$; $L = \{0,45\}$

K5

2 a) $4^x - 2 = 0 \Leftrightarrow (2^2)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}; L = \{\frac{1}{2}\}$

b) $\frac{1}{3} \cdot 3^{x+1} = 243 \Leftrightarrow 3^x = 3^5 \Rightarrow x = 5; L = \{5\}$

c) $3 - 0,5^x = 1 \Leftrightarrow 0,5^x = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2 \Rightarrow x = -1; L = \{-1\}$

d) $1 + 2^{3x} = 65 \Leftrightarrow 2^{3x} = 64 \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^6 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2; L = \{2\}$

e) $4 \cdot 1^{2-3x} = 8 \Leftrightarrow 4 = 8$, da $1^{2-3x} = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Gleichung $4 = 8$ ist eine falsche Aussage, die ursprüngliche Gleichung hat somit keine Lösung;
 $L = \{\}$.

f) $5 + 3^x = 1,5 \Leftrightarrow 3^x = -3,5$ Nicht lösbar, da $3^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; $L = \{\}$.

g) $6 \cdot 2^{x-2} = 24 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 4 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 2^2 \Leftrightarrow x-2 = 2 \Rightarrow x = 4; L = \{4\}$

h) $0,2 \cdot 5^{x+3} = 5 \Leftrightarrow 5^{x+3} = 25 \Leftrightarrow 5^{x+3} = 5^2 \Leftrightarrow x+3 = 2 \Rightarrow x = -1; L = \{-1\}$

K5

3 a) $2^x = 10 \Leftrightarrow x = \log_2 10 \approx 3,32$

$2^x = 20 \Leftrightarrow x = \log_2 20 \approx 4,32$

$2^x = 0$: Keine Lösung, da $2^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Der Funktionswert 0 wird von der Funktion f nicht angenommen.

$2^x = 1000 \Leftrightarrow x = \log_2 1000 \approx 9,97$

b) 1 $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x - 5 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x = 5 \Leftrightarrow 2^x = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \log_2 \frac{5}{3} \approx 0,74$

2 $f(x) = 0 \Leftrightarrow 5^{x+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 5^{x+1} = 1 \Leftrightarrow 5^{x+1} = 5^0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

3 $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 2 \Leftrightarrow 3^{-x} = 2$
 $\Leftrightarrow -x = \log_3 2 \Leftrightarrow x = -\log_3 2 \approx -0,63$

K4

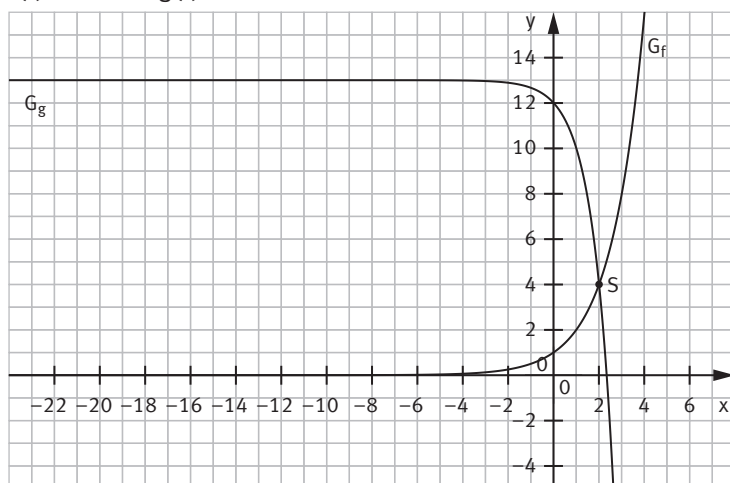
- 4 a) Die linke (bzw. rechte) Seite der Gleichung ist Funktionsterm der Funktion f (bzw. g). Es werden die Graphen G_f bzw. G_g der Funktion f bzw. g gezeichnet. Durch Ablesen aus der Zeichnung wird die x -Koordinate des Schnittpunkts von G_f und G_g ermittelt. Dieser Wert $x \approx 2,3$ ist die Lösung der Gleichung bzw. ein Näherungswert für die Lösung der Gleichung.

Eine zeichnerische Lösung muss rechnerisch überprüft werden, da die Zeichnung und das Ablesen aus der Zeichnung mit Ungenauigkeiten verbunden sind. Dies zeigt auch die Probe durch Einsetzen des abgelesenen Werts $x \approx 2,3$ in die linke bzw. rechte Seite der Gleichung. Man erhält:

linke Seite: $f(2,3) \approx 0,219$

rechte Seite: $g(2,3) \approx 0,231$

b) 1 $f(x) = 2^x$ und $g(x) = 13 - 3^x$

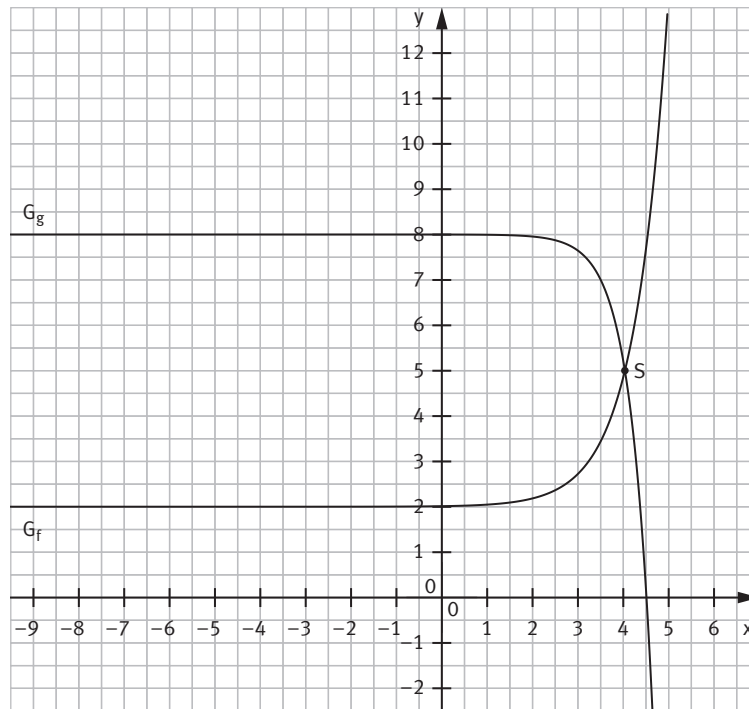


Schnittpunkt S von G_f und G_g : $S(2|4)$.

Probe für $x = 2$: linke Seite: $f(2) = 4$; rechte Seite: $g(2) = 13 - 3^2 = 4 = f(2)$

Somit ist $x = 2$ die Lösung der Gleichung $2^x = 13 - 3^x$.

2 $f(x) = 3 \cdot 4^{x-4} + 2$ und $g(x) = \frac{-3}{2^{12}} \cdot 2^{3x} + 8$



Schnittpunkt S von G_f und G_g : $S(4|5)$.

Probe für $x = 4$: linke Seite: $f(4) = 3 \cdot 4^0 + 2 = 5$; rechte Seite: $g(4) = \frac{-3}{2^{12}} \cdot 2^{12} + 8 = 5 = f(4)$

Somit ist $x = 4$ die Lösung der Gleichung $3 \cdot 4^{x-4} + 2 = \frac{-3}{2^{12}} \cdot 2^{3x} + 8$.

K5

- 5 a) $\frac{1}{2} \cdot 3^x = 5 \Leftrightarrow 3^x = 10 \Leftrightarrow x = \log_3 10 \approx 2,096$
 b) $5 \cdot 2^{x+1} = 18 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 3,6 \Leftrightarrow x+1 = \log_2 3,6 \Leftrightarrow x = -1 + \log_2 3,6 \approx 0,848$
 c) $3 \cdot 4^{x-1} + 5 = 5,8 \Leftrightarrow 4^{x-1} = \frac{4}{15} \Leftrightarrow x-1 = \log_4 \frac{4}{15} \Leftrightarrow x = 1 + \log_4 \frac{4}{15} \approx 0,047$
 d) $1,5^{x+6} = 3,28 \Leftrightarrow x+6 = \log_{1,5} 3,28 \Leftrightarrow x = -6 + \log_{1,5} 3,28 \approx -3,070$
 e) $3 \cdot 2^{x-3} = 2,4 \Leftrightarrow 2^{x-3} = 0,8 \Leftrightarrow x-3 = \log_2 0,8 \Leftrightarrow x = 3 + \log_2 0,8 \approx 2,678$
 f) $3^{x+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} = 26 \Leftrightarrow 3^{x+1} - (3^{-1})^{2-x} = 26 \Leftrightarrow 3^{x+1} - 3^{x-2} = 26$
 $\Leftrightarrow 3 \cdot 3^x - 3^{-2} \cdot 3^x = 26 \Leftrightarrow 3^x \cdot \left(3 - \frac{1}{9}\right) = 26 \Leftrightarrow 3^x \cdot \frac{26}{9} = 26 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$
 g) $-2,1 \cdot 7^{x+8} = -1,6 \Leftrightarrow 7^{x+8} = \frac{16}{21} \Leftrightarrow x+8 = \log_7 \frac{16}{21} \Leftrightarrow x = -8 + \log_7 \frac{16}{21} \approx -8,140$
 h) $72 - 3 \cdot 6^{3x+2} = -576 \Leftrightarrow -3 \cdot 6^{3x+2} = -648 \Leftrightarrow 6^{3x+2} = 216 \Leftrightarrow 6^{3x+2} = 6^3$
 $\Leftrightarrow 3x+2 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$
 i) $3^{x+4} = 27^{2x+3} \Leftrightarrow 3^{x+4} = (3^3)^{2x+3} \Leftrightarrow 3^{x+4} = 3^{3 \cdot (2x+3)} \Leftrightarrow x+4 = 6x+9 \Leftrightarrow 5x = -5 \Leftrightarrow x = -1$

K5/6

- 6 a) Fehler im letzten Schritt: Aus der Gleichheit der Exponenten folgt nicht die Gleichheit der Potenzwerte und damit auch nicht die Gleichheit der Basen.
 Korrektur:
 $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^5 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right)^5 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} \Leftrightarrow x = -5$
 b) Fehler: Nach der zweiten Zeile wird die Ungleichung durch den negativen Wert $\log\left(\frac{1}{3}\right)$ dividiert. Dabei kehrt sich das Ungleichheitszeichen um, es muss also $3 < 7$ heißen.

K5 7 a) 1 $f(x) = 2^{x+1} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow G_f$ hat keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.

Schnittpunkt T von G_f mit der y-Achse: $f(0) = 2^1 = 2 \Rightarrow T(0 | 2)$

2 Schnittpunkt N von G_f mit der x-Achse:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 2 \Leftrightarrow (3^{-1})^{x+1} = 2$$

$$\Leftrightarrow 3^{-x-1} = 2 \Leftrightarrow -x-1 = \log_3 2 \Leftrightarrow -x = 1 + \log_3 2 \Leftrightarrow x = -1 - \log_3 2 \approx -1,631$$

$$\Leftrightarrow N(-1 - \log_3 2 | 0)$$

Schnittpunkt T von G_f mit der y-Achse:

$$f(0) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 - 4 = \frac{2}{3} - 4 = -\frac{10}{3} \Rightarrow T\left(0 \mid -\frac{10}{3}\right)$$

3 Schnittpunkt N von G_f mit der x-Achse:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 3^{x-2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^{x-2} = 0,25 \Leftrightarrow x-2 = \log_3 0,25 \Leftrightarrow x = 2 + \log_3 0,25 \approx 0,738$$

$$\Rightarrow N(2 + \log_3 0,25 | 0)$$

Schnittpunkt T von G_f mit der y-Achse:

$$f(0) = 4 \cdot 3^{-2} - 1 = \frac{4}{9} - 1 = -\frac{5}{9} \Rightarrow T\left(0 \mid -\frac{5}{9}\right)$$

4 Schnittpunkt N von G_f mit der x-Achse:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 0,5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} = 4 \Leftrightarrow (5^{-1})^{x-3} = 4$$

$$\Rightarrow 5^{-x+3} = 4 \Leftrightarrow -x+3 = \log_5 4 \Leftrightarrow x = 3 - \log_5 4 \approx 2,139$$

$$\Rightarrow N(3 - \log_5 4 | 0)$$

Schnittpunkt T von G_f mit der y-Achse:

$$f(0) = 0,5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} - 2 = 0,5 \cdot 5^3 - 2 = 60,5 \Rightarrow T(0 | 60,5)$$

b) Schnittpunkte der Graphen von f und g:

1 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2^{x+1} = 3,5 \Leftrightarrow x+1 = \log_2 3,5 \Leftrightarrow x = -1 + \log_2 3,5 \approx 0,807$

$$\Rightarrow S_1(-1 + \log_2 3,5 | 3,5)$$

2 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 4 = -1,5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 1,25 \Leftrightarrow (3^{-1})^{x+1} = 1,25$

$$\Leftrightarrow 3^{-x-1} = 1,25 \Leftrightarrow -x-1 = \log_3 1,25 \Leftrightarrow x = -1 - \log_3 1,25 \approx -1,203$$

$$\Rightarrow S_2(-1 - \log_3 1,25 | -1,5)$$

3 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4 \cdot 3^{x-2} - 1 = 8747 \Leftrightarrow 3^{x-2} = 2187 \Leftrightarrow x-2 = \log_3 2187$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \log_3 2187 = 2 + 7 = 9 \Rightarrow S_3(9 | 8747)$$

4 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0,5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} - 2 = -1,98 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} = 0,04 \Leftrightarrow (5^{-1})^{x-3} = 0,04$

$$\Leftrightarrow 5^{-x+3} = 0,04 \Leftrightarrow -x+3 = \log_5 0,04 \Leftrightarrow x = 3 - \log_5 0,04 = 3 - (-2) = 5$$

$$\Rightarrow S_4(5 | -1,98)$$

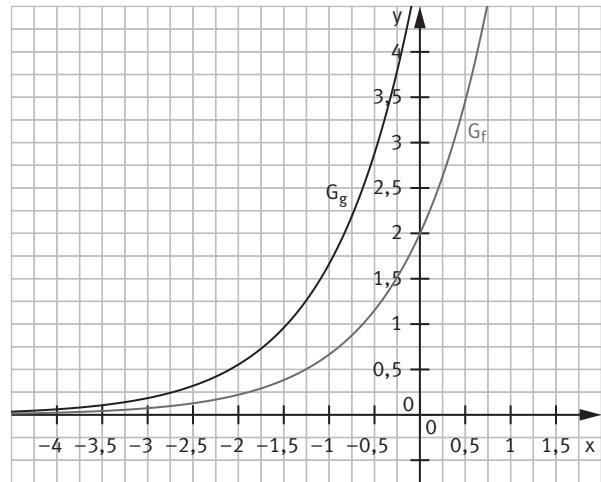
K1/4

- 8 a) Da das Ablesen in der DGS mit Ungenauigkeiten verbunden ist, wird jeweils auch eine (rechnerische) Überprüfung des Ergebnisses angegeben.

1 Es gibt keinen Schnittpunkt.

Hinweis (rechnerische Lösung):

$$f(x) = 2 \cdot 3^x < 5 \cdot 3^x = g(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$



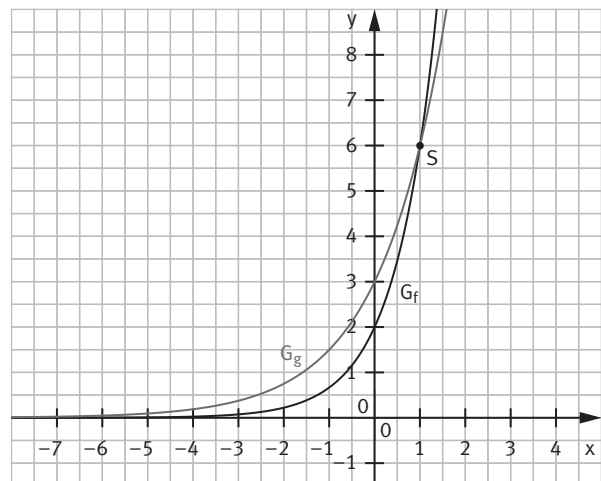
2 Ablesen aus der Graphik: S(1|6)

Hinweis (rechnerische Lösung):

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x \Rightarrow \frac{3^x}{2^x} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 6 \Rightarrow S(1|6)$$



3 Ablesen aus der Graphik: S(0,62|1)

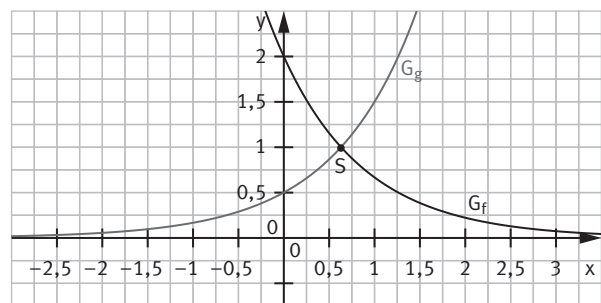
Hinweis (rechnerische Lösung):

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0,5 \cdot 3^x$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 3^{-x} = 3^x \Rightarrow 9^x = 4$$

$$\Rightarrow x = \log_9 4 \approx 0,631$$

$$g(0,631) = 1 \Rightarrow S(0,631|1)$$

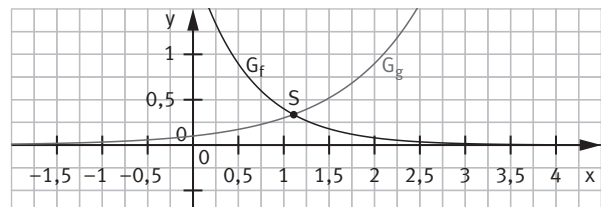


4 Hinweis (rechnerische Lösung):

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2 \cdot 5^{-x} = 0,1 \cdot 3^x$$

$$\Rightarrow 15^x = 20 \Rightarrow x = \log_{15} 20 \approx 1,106$$

$$g(1,106) \approx 0,337 \Rightarrow S(1,106|0,337)$$



- b) Die Graphen schneiden sich nicht, da $g(x) = 2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^x > 2^x = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

- K5/6** 9 a) $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow D_{\max} =]1; +\infty[$
 $\log(x - 1) = 0$, wenn $x - 1 = 1$ gilt, da $\log 1 = 0$.
 Es gilt: $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow L = \{2\}$.
- b) $1 - y^2 > 0 \Leftrightarrow y^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 1 \Rightarrow D_{\max} =]-1; 1[$
 $\log(1 - y^2) = 0$, wenn $1 - y^2 = 1$ gilt, da $\log 1 = 0$.
 Es gilt: $1 - y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow L = \{0\}$.
- c) $y + 1 > 0$ und $y > 0 \Leftrightarrow y > -1$ und $y > 0 \Rightarrow D_{\max} = \mathbb{R}^+$
 $\log(y + 1) - \log y = 1 \Leftrightarrow \log \frac{y+1}{y} = \log 10 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y} = 10 \Leftrightarrow y + 1 = 10y$
 $\Leftrightarrow 9y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{9} \Rightarrow L = \left\{\frac{1}{9}\right\}$

- K3/4** 10 a) 15 % von 18000 sind 2700.
 $18000 \cdot 3^{-0,2t} = 2700 \Leftrightarrow 3^{-0,2t} = 0,15 \Leftrightarrow -0,2t = \log_3 0,15 \Rightarrow t = -5 \log_3 0,15$
 Nach etwa $8\frac{1}{2}$ Jahren macht der Bestand nur noch 15 % des Anfangsbestands aus.

- b) 1 Wertetabelle:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(t) in 1000 Stück	18,00	14,45	11,60	9,31	7,47	6,00	4,82	3,87	3,10
Abnahme	3550	2850	2290	1840	1470	1180	950	770	

- 2 $18000 \cdot 3^{-0,2(t-1)} - 18000 \cdot 3^{-0,2t} < 1000 \Leftrightarrow 3^{-0,2t} (3^{0,2} - 1) < \frac{1}{18} \Leftrightarrow 3^{0,2t} > 18 \cdot (3^{0,2} - 1)$
 $\Leftrightarrow 0,2t = \log_3 [18(3^{0,2} - 1)] \Rightarrow t = 5 \cdot \log_3 [18(3^{0,2} - 1)] \Rightarrow t \approx 6,77$
 Innerhalb des siebten Jahres nimmt der Bestand zum ersten Mal um weniger als 1000 Tiere ab.

- K5** 11 a) Schnittpunkt N von G_f mit der x-Achse:
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2^{x-1} - 2^{1-x} = 0 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^{1-x} \Leftrightarrow x - 1 = 1 - x \Leftrightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow N(1|0)$
 Schnittpunkt T von G_f mit der y-Achse:
 $f(0) = 2^{-1} - 2^1 = -1,5 \Rightarrow T(0|-1,5)$
- b) Schnittpunkt N von G_f mit der x-Achse:
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{2^x - 4}{2^x + 4} = 0 \Leftrightarrow 2^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow N(2|0)$
 Schnittpunkt T von G_f mit der y-Achse:
 $f(0) = 2 \cdot \frac{2^0 - 4}{2^0 + 4} = -\frac{6}{5} = -1,2 \Rightarrow T(0|-1,2)$
- c) Schnittpunkt N von G_f mit der x-Achse:
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow \log(x^2 + 10) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 10 = 1 \Leftrightarrow x^2 = -9$ nicht möglich, d. h. G_f schneidet die x-Achse nicht.
 Schnittpunkt T von G_f mit der y-Achse: $f(0) = \log(0 + 10) = 1 \Rightarrow T(0|1)$

- K6** 12 a) Individuelle Ergebnisse. Der vom Statistischen Bundesamt zur Ermittlung des Preisindex bzw. der Inflationsrate zusammengestellte sogenannte „Warenkorb“ ist eine repräsentative Auswahl von etwa 650 Gütern und Dienstleistungen, deren durchschnittliche Preise regelmäßig ermittelt werden. Zum Warenkorb gehören z. B. Nahrungsmittel, Kleidung, Wohnung, Verkehr u. a.

- b) Mit Inflationsrate p%, Wachstumsfaktor $a = 1 - \frac{p}{100}$, Wert des Vermögens in € zur Zeit t: $K(t)$,
 Vermögen zu Beginn $K(0) = 50\,000$ gilt: $K(t) = K(0) \cdot a^t$.
 Halbierung des Vermögenswerts: $K(T_H) = 0,5 \cdot K(0) \Leftrightarrow K(T_H) = K(0) \cdot a^{T_H} = 0,5 \cdot K(0)$
 $\Leftrightarrow 0,5 = a^{T_H} \Rightarrow T_H = \log_a 0,5$ unabhängig vom zugrunde gelegten Vermögen $K(0)$
 Damit erhält man folgende Zeiträume für die Halbierung des Vermögenswerts:

Inflationsrate p%	3 %	2 %	1 %	0,5 %
$a = 1 - \frac{p}{100}$	0,97	0,98	0,99	0,995
t in Jahren	$\approx 22,8$	$\approx 34,3$	$\approx 69,0$	$\approx 138,3$

- c) Die Inflationsraten $p\%$ der Jahre 2008–2023 werden aus der Grafik im Schulbuch entnommen. Damit erhält man folgende Wachstumsfaktoren $a = 1 - \frac{p}{100}$ für die Jahre 2008–2023:

Jahr	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
p%	2,6 %	0,3 %	1,1 %	2,1 %	2,0 %	1,4 %	1,0 %	0,5 %
a	0,974	0,997	0,989	0,979	0,980	0,986	0,990	0,995

Jahr	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
p%	0,5 %	1,5 %	1,8 %	1,4 %	0,5 %	2,9 %	2,6 %	1,6 %
a	0,995	0,985	0,982	0,986	0,995	0,971	0,974	0,984

Multipliziert man das Vermögen von 250 000 € nacheinander mit allen Wachstumsfaktoren der Jahre von 2008 bis 2023, erhält man als Wert des Vermögens am Ende des Jahres 2023 rund 196 598 €. Das bedeutet eine Entwertung von rund 21,4 %.

Bei einer Inflationsrate von 2,6 % in jedem Jahr von 2008 bis 2023 erhält man als Wert des Vermögens am Ende des Jahres 2023: $250\,000\text{ €} \cdot 0,974^{16} \approx 164\,014\text{ €}$.

In diesem Fall beträgt die Entwertung rund 34,4 %.

- d) Der Leitzins der EZB ist der Zinssatz, zu dem sich Geschäftsbanken bei der EZB Geld beschaffen können. Wird der Leitzins angehoben, wird es für die Geschäftsbanken teurer, sich Geld von der Zentralbank zu leihen. Um die erhöhten Kosten zu decken, erhöhen nun die Geschäftsbanken ihrerseits die Zinsen bei der Vergabe von Krediten. Die Verteuerung der Kredite für Konsumenten und Unternehmen hat zur Folge, dass weniger Kredite nachgefragt werden und so der kreditfinanzierte Konsum bzw. die kreditfinanzierten Investitionen zurückgehen, was in der Regel den Preisdruck auf die Produkte senkt. Zu beachten ist allerdings, dass die Inflation auch andere Ursachen haben kann, die durch die Anhebung des Leitzinses nur bedingt oder gar nicht beeinflusst werden können.

K3/5

- 13 a) Einsetzen von $(0|16,8)$ in $h(t)$ ergibt: $16,8 = a \cdot b^0 \Rightarrow a = 16,8$;

Einsetzen von a und $(60|5,0)$ in $h(t)$ ergibt: $5,0 = 16,8 \cdot b^{60} \Rightarrow b = \sqrt[60]{\frac{5,0}{16,8}} \approx 0,980$.

Die Zerfallsgleichung $h(t) = 16,8 \cdot 0,980^t$ liefert z. B. für $t_3 = 30$ bzw. für $t_9 = 90$ die Werte $h_3 \approx 9,16$ bzw. $h_9 \approx 2,73$, gibt also die entsprechenden Tabellenwerte gut wieder.

- b) $h = a \cdot b^t$: $16,8 = a \cdot b^0 \Rightarrow a = 16,8$; $2,7 = 16,8 \cdot b^{60} \Rightarrow$

$b^{60} = \frac{2,7}{16,8} \Rightarrow b = \sqrt[60]{\frac{2,7}{16,8}} \approx 0,970$: Die Zerfallsgleichung ist richtig ermittelt.

Modellierungskreislauf

Modellieren

K3

- Der Modellierungskreislauf stellt die Schritte dar, mit denen man vom realen Sachverhalt eines Problems mithilfe einer mathematischen Beschreibung der Zusammenhänge zunächst zu einer mathematischen Lösung des Problems gelangt. Diese mathematische Lösung wird im Sachzusammenhang interpretiert, um die Lösung des realen Problems zu erhalten. Es gibt komplexe Probleme, die z. B. in mehrere Abschnitte zerlegt werden müssen, auf die man den Kreislauf jeweils getrennt anwendet.

K4

- Realer Sachverhalt: 10,0 g Hefe sind innerhalb einer Stunde auf das Doppelte angewachsen. Vereinfachter Sachverhalt: Eine ursprünglich vorhandene Substanzmenge m verdoppelt sich in einer gewissen Zeit t .
Mathematisches Modell: $m(t) = m_0 \cdot 2^t$; t : vergangene Zeit in Stunden, $m(0)$: Masse zur Zeit $t = 0$; $m(t)$: Masse zur Zeit t .
Mögliche Frage: Welche Masse hat die Kultur nach einem Tag?
Berechnung: $m(24) = 10,0\text{ g} \cdot 2^{24} \approx 1,68 \cdot 10^8\text{ g} = 168\text{ t}$
Bewertung: Die mathematische Modellierung trifft sicher nicht über den gesamten Zeitraum zu, denn es ist nicht möglich, dass die Hefekultur innerhalb eines Tages auf 168 Tonnen zunimmt. Vielmehr wird sich ihr Wachstumsfaktor sehr bald nach der ersten Stunde stark verringern, z. B. wegen Nährstoff- und Platzmangels.

K3/6

14 a) Wachstumsfaktoren:

$$\text{Ahausen: } a_A = \left(\frac{32800}{30000}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1,018 \quad \text{Bendorf } a_B = 1 - 0,012 = 0,988$$

gleiche Einwohnerzahlen (t in Jahren):

$$30000 \cdot 1,018^t = 40000 \cdot 0,988^t \Leftrightarrow \left(\frac{1,018}{0,988}\right)^t = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 1,030^t = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow t = \log_{1,030} \frac{4}{3} \approx 9,733$$

Im zehnten Jahr, also 2020, haben beide Orte gleich viele Einwohner.

b) Einwohnerzahl von Bendorf im Jahr 2015: $40000 \cdot 0,988^5 \approx 37657$

2015 kommen 4000 Personen dazu, also hat Bendorf dann 41657 Einwohner.

$$41657 \cdot 0,988^t = 40000 \Leftrightarrow t = \log_{0,988} \left(\frac{40000}{41657}\right) \approx 3,362$$

Im vierten Jahr nach 2015, also 2019, hat Bendorf wieder 40000 Einwohner.

c) Man nimmt für die Berechnungen an, dass es bei exponentiellem Wachstum bleibt und dass die Änderungsraten gleich bleiben, da keine weiteren Angaben vorliegen. Die örtlichen Gegebenheiten können sich aber auch ändern, z. B. durch verstärkten Zuzug (z. B. Ausweisung von Neubaugebieten) oder Wegzug (z. B. Abwanderung von Arbeitsplätzen).

K2/3

15 a) $100 \text{ ppm} \cdot (1 - 15\%)^n \leq 20 \text{ ppm} \Leftrightarrow 0,85^n \leq 0,20 \Leftrightarrow n \cdot \log 0,85 \leq \log 0,20$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\log 0,20}{\log 0,85} \approx 9,90$$

Hinweis: $\log 0,85 < 0$, daher Umkehrung des Ungleichheitszeichens bei Division durch $\log 0,85$.

Das Badeverbot darf erst nach etwa 10 Wochen aufgehoben werden.

b) In der Modellierung geht man davon aus, dass der Abnahmefaktor der Verunreinigung gleich bleibt und dass keine erneute Verschmutzung hinzukommt. Das müsste man durch häufige weitere Messungen überprüfen.

K3/5

16 Die Lichtintensität sinkt auf etwa $0,96^3 \approx 0,885 = 88,5\%$.

K2/6

17 Vereinfachende Annahme: Der Monat hat genau vier Wochen.

Theo teilt sein Geld so ein, dass er jede Woche gleich viel ausgeben kann, nämlich jeweils 250 € (25 % des Monatsbetrags). Nach vier Wochen hat er seine 1000 € vollständig ausgegeben.

Karin dagegen handelt nach einem exponentiellen Abnahme-Modell, denn sie entnimmt jede Woche denselben Anteil (30 %) des noch vorhandenen Guthabens; das ist jeweils ein immer kleinerer Betrag. Karin hat damit in den einzelnen Wochen folgende Ausgaben:

Woche	Guthaben zu Wochenbeginn	Ausgaben in der Woche	Guthaben am Ende der Woche
1	1000 €	$0,3 \cdot 1000 \text{ €} = 300 \text{ €}$	700 €
2	700 €	$0,3 \cdot 700 \text{ €} = 210 \text{ €}$	490 €
3	490 €	$0,3 \cdot 490 \text{ €} = 147 \text{ €}$	343 €
4	343 €	$0,3 \cdot 343 \text{ €} = 102,90 \text{ €}$	240,10 €

K2/6

- 18 a)** Da $3^{2x} = (3^x)^2$ gilt, lässt sich die gegebene Exponentialgleichung als quadratische Gleichung schreiben, wenn man 3^x als neue Unbekannte u bezeichnet (Substitution).

Die dadurch entstandene Gleichung für die Unbekannte u wird mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen gelöst; man erhält für u die beiden Lösungen $u_1 = 1$ und $u_2 = 9$. Aus diesen beiden Lösungen für u werden dann die Lösungen für die ursprüngliche Variable x ermittelt.

- b) 1** $D = \mathbb{R}$

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+2} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 3 \cdot 2^2 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 2 = 0$$

Mit der Substitution $2^x = u$ erhält man die quadratische Gleichung

$$u^2 - 12u + 2 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{136}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{4 \cdot 34}}{2} = \frac{12 \pm 2\sqrt{34}}{2}$$

$$= 6 \pm \sqrt{34} \Rightarrow u_1 = 6 - \sqrt{34} \text{ und } u_2 = 6 + \sqrt{34}$$

$$u_1 = 6 - \sqrt{34} \Rightarrow 2^{x_1} = 6 - \sqrt{34} \Rightarrow x_1 = \log_2(6 - \sqrt{34}) \approx -2,56$$

$$u_2 = 6 + \sqrt{34} \Rightarrow 2^{x_2} = 6 + \sqrt{34} \Rightarrow x_2 = \log_2(6 + \sqrt{34}) \approx 3,56$$

$$L = \{\log_2(6 - \sqrt{34}); \log_2(6 + \sqrt{34})\}$$

- 2** $D = \mathbb{R}^+$

Mit der Substitution $\log x = u$ erhält man die quadratische Gleichung

$$u^2 + 3u - 4 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$\Rightarrow u_1 = -4, u_2 = 1$$

$$u_1 = -4 \Rightarrow \log x_1 = -4 \Rightarrow x_1 = 10^{-4} = 0,0001 \in D$$

$$u_2 = 1 \Rightarrow \log x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 10 \in D$$

$$L = \{0,0001; 10\}$$

- 3** $D = \mathbb{R}$

Mit der Substitution $5^{2x} = u$ erhält man die Gleichung

$$u - 2 + \frac{1}{u} = 0 \Leftrightarrow \frac{u^2 - 2u + 1}{u} = 0 \Leftrightarrow u^2 - 2u + 1 = 0 \Rightarrow (u - 1)^2 = 0$$

$$u = 1 \Rightarrow 5^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$L = \{0\}$$

- 4** $D = \mathbb{R}$

$$4^{x^2} = 256 \Leftrightarrow 4^{x^2} = 4^4 \Rightarrow x^2 = 4 \text{ (Exponentenvergleich)}$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$$

$$L = \{-2; 2\}$$

K3/6

- 19 a)** $(1 - 0,25\%)^{2012-1990} = 0,9975^{22} \approx 0,9464 = 94,64\% = 1 - 5,36\%:$

Damit kann das angestrebte Ziel erreicht werden.

- b)** Ungeachtet der Beschlüsse von Kyoto steigt der Ausstoß von Treibhausgasen kontinuierlich an. Der jährliche weltweite Ausstoß von CO_2 betrug im Jahr 1997 etwa 33 Milliarden Tonnen, im Jahr 2017 jedoch schon etwa 47 Milliarden Tonnen. Das ist ein Anstieg von 42 %.

Das Modell eines exponentiellen Wachstums ist nicht sinnvoll, da der Wachstumsfaktor in den betrachteten Jahren nicht konstant war, sondern von 0,6 % auf 1,3 % zugenommen, sich also mehr als verdoppelt hat.

- K1/2** 20 a) Die Hälfte des ursprünglichen Werts sind 100 mg.
 $200 \text{ mg} \cdot 2,5^{-0,4t} = 100 \text{ mg} \Leftrightarrow 2,5^{-0,4t} = 0,5 \Leftrightarrow -0,4t = \log_{2,5} 0,5$
 $\Leftrightarrow t = -2,5 \cdot \log_{2,5} 0,5 \approx -2,5 \cdot (-0,756) = 1,89$
 Nach ungefähr 1,89 Stunden ist das Medikament auf die Hälfte der ursprünglichen Menge abgebaut.
- Ein Viertel des ursprünglichen Werts sind 50 mg.
 $200 \text{ mg} \cdot 2,5^{-0,4t} = 50 \text{ mg} \Leftrightarrow 2,5^{-0,4t} = 0,25 \Leftrightarrow -0,4t = \log_{2,5} 0,25$
 $\Leftrightarrow t = -2,5 \cdot \log_{2,5} 0,25 \approx -2,5 \cdot (-1,513) \approx 3,78$
 Nach ungefähr 3,78 Stunden ist das Medikament auf ein Viertel der ursprünglichen Menge abgebaut.
- 10% des ursprünglichen Werts sind 20 mg.
 $200 \text{ mg} \cdot 2,5^{-0,4t} = 20 \text{ mg} \Leftrightarrow 2,5^{-0,4t} = 0,1 \Leftrightarrow -0,4t = \log_{2,5} 0,1$
 $\Leftrightarrow t = -2,5 \cdot \log_{2,5} 0,1 \approx -2,5 \cdot (-2,513) \approx 6,28$
 Nach ungefähr 6,28 Stunden ist das Medikament auf 10% der ursprünglichen Menge abgebaut.
- b) $200 \text{ mg} \cdot 2,5^{-0,4t} = 30 \text{ mg} \Leftrightarrow 2,5^{-0,4t} = 0,15 \Leftrightarrow -0,4t = \log_{2,5} 0,15$
 $\Leftrightarrow t = -2,5 \cdot \log_{2,5} 0,15 \approx -2,5 \cdot (-2,07) \approx 5,18$
 Nach ungefähr 5,18 Stunden ist das Medikament bis auf 30 mg abgebaut.
- c) Die zweite Dosis, die nach 6 Stunden eingenommen wird, addiert sich zu der dann noch vorhandenen Menge der ersten Dosis, daher die Summe. Auch diese zweite Dosis nimmt in gleicher Weise ab wie die erste Dosis, was durch die Potenz ausgedrückt wird, jedoch beginnt ihre Abbauphase um 6 Stunden später. Dies wird im Exponenten durch den Summanden $0,4 \cdot 6 = 2,4$ berücksichtigt.
- K1/5** 21 a) Die pH-Werte sind positiv, weil die Konzentration c der Hydroniumionen zwischen 0 und 1 liegt, also $\log c < 0$ und damit $-\log c > 0$ ist.
- b) $-\log c_{\text{Haut}} = 5,5 \Rightarrow c_{\text{Haut}} \approx 3,162 \cdot 10^{-6}$
 $-\log c_{\text{Wasser}} = 7 \Rightarrow c_{\text{Wasser}} = 10^{-7} \Rightarrow c_{\text{H}} : c_{\text{W}} = 31,62$
 Die Konzentration von Hydroniumionen ist auf der Haut etwa 32-mal so hoch wie in Wasser.

Corona-Pandemie

Anwendung

- K3/6** ■ Individuelle Ergebnisse.
- K3/6** ■ $R < 1$ bedeutet, dass eine infizierte Person im Durchschnitt weniger als eine weitere Person infiziert, also nimmt dann die Gesamtzahl der Infizierten ab.
- K3/6** ■ Voraussetzung ist z. B., dass die Reproduktionszahl über den betrachteten Zeitraum hinweg konstant ist.
- K2** ■ Gesamtbevölkerung in Deutschland: etwa 83 Millionen
 Verdopplungszeit 2 d ergibt für die Anzahl $I(t)$ der Infizierten in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) die Gleichung $I(t) = 262 \cdot 2^{2t}$. Mit $I(t) = 83 \cdot 10^6$ erhält man
 $262 \cdot 2^{2t} = 83 \cdot 10^6 \Leftrightarrow 2^{2t} = \frac{83 \cdot 10^6}{262} \Leftrightarrow 2t = \log_2 \left(\frac{83 \cdot 10^6}{262} \right)$
 $\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(\frac{83 \cdot 10^6}{262} \right) \approx \frac{1}{2} \cdot \log_2 316\,794 \approx \frac{1}{2} \cdot 18,27 \approx 9,14$
 Nach ungefähr 9,14 Tagen, also am zehnten Tag (14. März 2020), wären bei gleichbleibenden Bedingungen alle Einwohner Deutschlands infiziert gewesen.
 Schutzmaßnahmen: individuelle Ergebnisse (z. B. Isolation von Infizierten, Nachverfolgung der Kontakte von Infizierten, Quarantäne für Kontaktpersonen).

K5

1

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

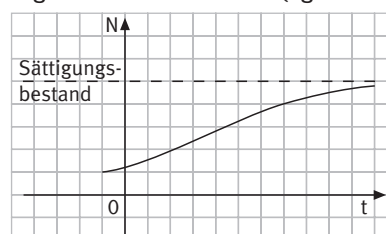
x	1	2	3	4	5
y	2	4	8	16	32

x	1	2	3	4	5
y	0,7	1,0	1,3	1,6	1,9

x	1	2	3	4	5
y	12	144	1728	20 736	248 832

Nach sechs richtigen Antworten hat man bei Option 1 erstmalig mehr Geld (3200 €) als bei Option 2 (3000 €). Gibt man die falsche Antwort, so ist alles Geld verloren. Sind die Fragen also hinreichend schwierig, ist Option 2 die bessere Variante. Ist das Spiel hingegen einfach, ist man mit Option 1 besser beraten.

logistisches Wachstum (vgl. Schulbuch Seite 27)



K1

4

- 1 exponentielle Abnahme: Der Graph hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 8$ und ist monoton fallend.
- 2 lineare Abnahme: Der Graph ist eine fallende Gerade.

K5

5

- a) exponentielle Zunahme um 4 %
- b) exponentielle Abnahme um 60 %
- c) exponentielle Abnahme um 12 %
- d) exponentielle Zunahme um 100 %

K2

6

$A_0 = 1 \text{ cm}^2$; Wachstumsfaktor $a = 1,145$;
 $A(t) = A_0 \cdot 1,145^t$ (t: Zeit in Stunden)
 $A(24) = 1 \text{ cm}^2 \cdot 1,145^{24} \approx 25,78 \text{ cm}^2$

- 1 weder exponentielles noch lineares Wachstum

- 2 exponentielle Abnahme: Der Graph hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0$ (x-Achse) und ist monoton fallend.

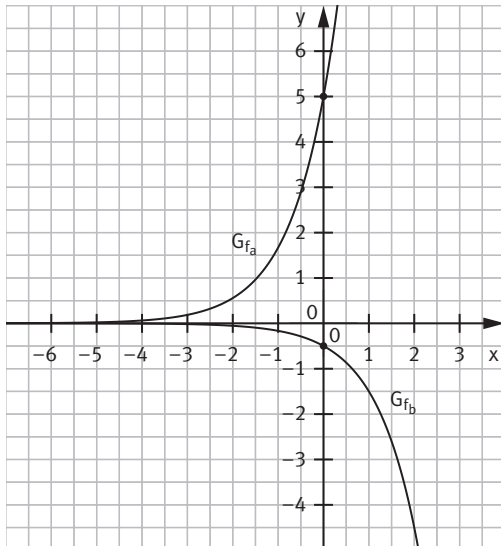
- a) exponentielle Zunahme um 30 %
- b) exponentielle Zunahme um 200 %
- c) exponentielle Abnahme um 3 %
- d) exponentielle Abnahme um 95 %

$A_0 = 1 \text{ cm}^2$; Wachstumsfaktor $a = 1,145$;
 $A(t) = A_0 \cdot 1,145^t$ (t: Zeit in Stunden)
 $A(168) = 1 \text{ cm}^2 \cdot 1,145^{168} \approx 7,57 \cdot 10^9 \text{ cm}^2$
 $= 75,7 \text{ ha}$

Prozentuale Zunahme in der Woche: $7,57 \cdot 10^{11} \%$
 Diese Berechnung ist unrealistisch, denn die Kultur hat wahrscheinlich keine so große Fläche zur Verfügung und auch nicht ausreichend Nahrung. Der Wachstumsfaktor wird über den Zeitraum von einer Woche nicht konstant bleiben.

- K4** 7 **A - 2** : exponentielle Zunahme; $f(0) = 1$
B - 3 : $f(0) = -1$
 (an der x-Achse gespiegelter Graph **2**)
C - 1 : quadratische Funktion (Normalparabel)

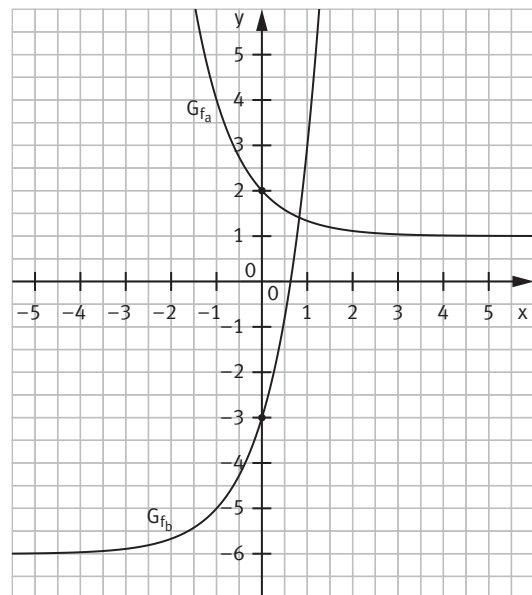
- K4/6** 8 a) Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 5.
 Keine Schnittpunkte mit der x-Achse;
 Schnittpunkt mit der y-Achse: (0|5)
 b) Stauchung in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$
 und Spiegelung an der x-Achse.
 Keine Schnittpunkte mit der x-Achse;
 Schnittpunkt mit der y-Achse: (0|-0,5).



- K5** 9 a) $A(2|5) \in G_{f_a} \Rightarrow a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$
 b) $B(-1|4) \in G_{f_a} \Rightarrow a^{-1} = 4 \Rightarrow a = 0,25$

- A - 1** : exponentielle Abnahme; $f(0) = 2$
B - 2 : exponentielle Zunahme; $f(0) = 0,5$
 (um 1 Einheit in positive x-Richtung
 verschobener Graph der Funktion g
 mit $g(x) = 2^x$)
C - 3 : exponentielle Zunahme; $f(0) = 3$
 (um 2 Einheiten in positive y-Richtung
 verschobener Graph der Funktion g mit
 $g(x) = 2^x$)

- a) Spiegelung an der y-Achse und Verschiebung
 um 1 Einheit in positive y-Richtung.
 Keine Schnittpunkte mit der x-Achse;
 Schnittpunkt mit der y-Achse (0|2).
 b) Streckung um den Faktor 3 in y-Richtung
 (bzw. gleichbedeutend Verschiebung um
 1 Einheit in negative x-Richtung) und um
 6 Einheiten in negative y-Richtung.
 Schnittpunkt mit der x-Achse: $(\log_3 2|0)$;
 Schnittpunkt mit der y-Achse (0|-3).



- a) $A(0|3) \in G_{f_{a,b}} \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f_{a,3}(x) = 3 \cdot a^x$
 $B(1,5|1) \in G_{f_{a,3}} \Rightarrow 3 \cdot a^{1,5} = 1$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

- b) $B(-2|0,25) \in G_{f_{a,b}} \Rightarrow b \cdot a^{-2} = 0,25$
 $\Rightarrow b = 0,25 \cdot a^2$

Alle Wertepaare a und b mit $b = 0,25 \cdot a^2$ und
 $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0; 1\}$ (Ausschluss von 0, da $b \neq 0$)
 erfüllen die Bedingung.

Beispiele: $a = 2, b = 1$; $a = 4, b = 4$

K5 10 a) $\log_4 256 = \log_4 4^4 = 4$ b) 8 c) 0

K5 11 a) $\log_a 9 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$
 b) $\log_a 64 = 3 \Leftrightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a = 4$
 c) $\log_a 125 = 3 \Leftrightarrow a^3 = 125 \Rightarrow a = 5$
 d) $\log_a 81 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$

K5 12 a) $5^x = 28 \Rightarrow x = \log_5 28$ $L = \{\log_5 28\}$
 b) $3^x - 7 = 2 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$ $L = \{2\}$
 c) $2^{x+5} = 512 \Leftrightarrow 2^{x+5} = 2^9 \Rightarrow x + 5 = 9$
 $\Rightarrow x = 4$ $L = \{4\}$
 d) $2 \cdot 5^y = 5 \cdot 2^y \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^y = \frac{5}{2} \Rightarrow y = 1$
 $L = \{1\}$

K2 13 a) $8000 \cdot 1,03^{10} \approx 10751$
 Nach 10 Jahren sind etwa 10751 Festmeter Holz vorhanden.
 b) $8000 \cdot 1,03^t = 10000$ (t: Jahre)
 $1,03^t = 1,25 \Rightarrow t = \log_{1,03} 1,25 \approx 7,55$
 Nach etwa 7,55 Jahren, also nach 7 Jahren, 6 Monaten und etwa 18 Tagen, ist der Holzbestand auf 10000 Festmeter angewachsen.

a) 3 b) 1 c) $\log_2 4^2 = \log_2 (2^2)^2 = \log_2 2^4 = 4$

a) $\log_a 8 = 3 \Leftrightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$
 b) $\log_a 10 = 1 \Leftrightarrow a^1 = 10 \Rightarrow a = 10$
 c) $\log_a 1,3^9 = 9 \Leftrightarrow a^9 = 1,3^9 \Rightarrow a = 1,3$
 d) $\log_a 10000 = 4 \Leftrightarrow a^4 = 10000 \Rightarrow a = 10$

a) $9^x - 3^x = 0 \Leftrightarrow (3^2)^x - 3^x = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 3^x = 0$
 $\Leftrightarrow 3^{2x} = 3^x \Leftrightarrow 2x = x \Rightarrow x = 0$ $L = \{0\}$
 b) $4^{x^2} = 256 \Leftrightarrow 4^{x^2} = 4^4 \Leftrightarrow x^2 = 4$
 $\Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$ $L = \{-2; 2\}$
 c) $16 \cdot 2^{x-2} = 1 \Leftrightarrow 2^4 \cdot 2^{x-2} = 1$
 $\Leftrightarrow 2^{x-2+4} = 1 \Leftrightarrow 2^{x+2} = 2^0$
 $\Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ $L = \{-2\}$
 d) $2 \cdot 3^x + 5 = 15 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^x = 10$
 $\Leftrightarrow 3^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_3 5$ $L = \{\log_3 5\}$

a) $B(t) = 8000 \cdot 1,03^t$ (B: Holzbestand in Festmeter (fm); t: Zeit in Jahren)
 b) Holzbestand nach 10 Jahren:
 $B(10) = 8000 \cdot 1,03^{10} \approx 10751$ [fm]
 Nach der Entnahme von 2000 fm sind noch $10751 \text{ fm} - 2000 \text{ fm} = 8751 \text{ fm}$ vorhanden.
 Zeitdauer, bis der Wald wieder 10751 fm Holz enthält:
 $8751 \cdot 1,03^t = 10751 \Leftrightarrow 1,03^t \approx 1,23$
 $\Rightarrow t = \log_{1,03} 1,23 \approx 7,0$
 Etwa sieben Jahre nach der Fällung hat der Wald den Holzbestand von vor der Fällung wieder erreicht.

K5 14 Begründung: Der Quotient der gegebenen y-Werte ist der Wachstumsfaktor a.

a) $a = 8 : 12 = \frac{2}{3}$

x	0	1	2	3	4	5
y	12	8	$5\frac{1}{3} \approx 5,3$	$3\frac{5}{9} \approx 3,6$	$2\frac{10}{27} \approx 2,4$	$1\frac{47}{81} \approx 1,6$

b) $a = 50625 : 3375 = 15$

x	0	1	2	3	4	5
y	225	3375	50625	759375	11390625	170859375

K5 15 a) 1 $8 - 3,375 = 4,625$, aber $15,625 - 8 = 7,625 \neq 4,625$

$\Rightarrow$ kein lineares Wachstum

$8 : 3,375 = 2,370$, aber $15,625 : 8 = 1,953125 \neq 2,370$

$\Rightarrow$ kein exponentielles Wachstum

2 $2,4 - 1,2 = 3,6 - 2,4 = 4,8 - 3,6 = 1,2 \Rightarrow$ lineares Wachstum

3 $1,73 \approx \sqrt{3}$

$1,73 : 1 = 3 : 1,73 = 9 : 1,73^3 = 1,73 \Rightarrow$ exponentielles Wachstum

4 $13,25 - 15 = 11,5 - 13,25 = 9,75 - 11,5 = -1,75 \Rightarrow$ lineares Wachstum

b) 2 $f(x) = 1,2x$

3 $f(x) = 3^x$

4 $f(x) = -3,5x + 15$

K5 16 a) angelegtes Kapital: 2000 €;

jährlicher Wachstumsfaktor $a = 2056 € : 2000 € = 1,028$

Das Kapital wurde zu einem jährlichen Zinssatz von 2,8% angelegt; die Zinsen werden jeweils mitverzinst („Zinseszins“).

Wertentwicklung des Kapitals (K(n) in Euro, n in Jahren):

$K(n) = 2000 \cdot 1,028^n$

b) $K(10) = 2000 \cdot 1,028^{10} \approx 2636,10$ [€]

$K(20) = 2000 \cdot 1,028^{20} \approx 3474,50$ [€]

c) $2000 € \cdot 1,028^n = 1,5 \cdot 2000 € \Leftrightarrow 1,028^n = 1,5 \Rightarrow n = \log_{1,028} 1,5 \approx 14,68 \approx 15$

Nach etwa 15 Jahren ist das Kapital auf das Eineinhalbfache angewachsen.

K2 17 Jeder Mitarbeiter erhält nach zehnjähriger Betriebszugehörigkeit 200 €; dieser Betrag soll mit weiterer Betriebszugehörigkeit steigen.

Vorschlag A: Nach weiteren n Jahren erhält jeder Mitarbeiter $200 € + n \cdot 20 €$.

Vorschlag B: Nach weiteren n Jahren erhält jeder Mitarbeiter $200 € \cdot 1,075^n$.

Bei einer weiteren Betriebszugehörigkeit von 8 (oder weniger als 8) Jahren ist der Vorschlag A für die Arbeitnehmer günstiger: $200 € + 8 \cdot 20 € = 360 € \Rightarrow 200 € \cdot 1,075^8 \approx 356,70 €$.

Bei einer weiteren Betriebszugehörigkeit von 9 (oder mehr als 9) Jahren ist dagegen der Vorschlag B für die Arbeitnehmer günstiger: $200 € + 9 \cdot 20 € = 380 € \Rightarrow 200 € \cdot 1,075^9 \approx 383,45 €$.

K4

18 a) Funktionsterme: $f(x) = 1,5x + 1$; $g(x) = 1 \cdot 2^x$ b) Funktionen: $f^*: f^*(x) = -1,5x - 1$; $D_{f^*} = \mathbb{R}$;
 $g^*: g^*(x) = 2^{-x}$; $D_{g^*} = \mathbb{R}$ c) $f^*(x) = 0 \Rightarrow -1,5x - 1 = 0$

$$\Rightarrow x_S = -\frac{2}{3} \text{ und somit } S\left(-\frac{2}{3} \mid 0\right)$$

$$g^*(2) = 2^{-2} = 0,25 \text{ und somit } B^*(2 \mid 0,25)$$

Flächeninhalte:

$$A_{BSB^*} = A_{SNB} - A_{SNB^*}$$

$$= \frac{1}{2} |\overline{SN}| \cdot |\overline{NB}| - \frac{1}{2} |\overline{SN}| \cdot |\overline{NB^*}|$$

$$= \frac{1}{2} |\overline{SN}| \cdot (|\overline{NB}| - |\overline{NB^*}|)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(4 - \frac{1}{4}\right) \text{ cm}^2 = 5 \text{ cm}^2$$

$$|\overline{CA}| : |\overline{B^*B}| = \frac{2}{3} : 2\frac{2}{3} = 1 : 4;$$

$$|\overline{CA}| = \frac{1}{4} \cdot \left(4 - \frac{1}{4}\right) \text{ cm} = \frac{15}{16} \text{ cm}$$

(2. Strahlensatz; V-Figur mit Scheitel S);

$$A_{\text{III. Quadrant}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} \text{ cm}^2 = \frac{5}{16} \text{ cm}^2$$

$$\text{Bruchteil: } \frac{\frac{5}{16}}{\frac{5}{16}} = \frac{1}{16} \approx 6,3 \%$$

$$\text{Umfangslänge: } |\overline{BS}| = \sqrt{\left(2 + \frac{2}{3}\right)^2 + 4^2} \text{ cm} = \sqrt{23\frac{1}{9}} \text{ cm} = \frac{4}{3} \sqrt{13} \text{ cm} \approx 4,81 \text{ cm}$$

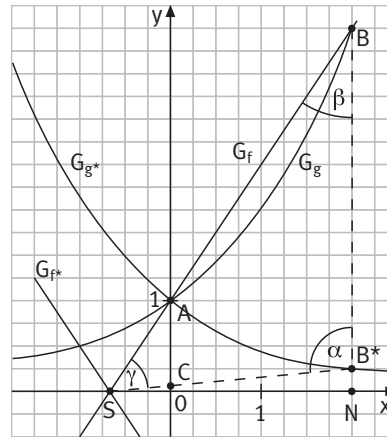
$$|\overline{SB^*}| = \sqrt{\left(2 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} \text{ cm} = \sqrt{7\frac{25}{144}} \text{ cm} = \frac{1}{12} \sqrt{1033} \text{ cm} \approx 2,68 \text{ cm}$$

$$U_{BSB^*} \approx 4,81 \text{ cm} + 2,68 \text{ cm} + 3,75 \text{ cm} = 11,24 \text{ cm}$$

$$\text{Winkelgrößen: } A_{BSB^*} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{B^*B}| \cdot |\overline{SB^*}| \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha \approx 0,996 \Rightarrow \alpha \approx 95,4^\circ$$

$$A_{BSB^*} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{BS}| \cdot |\overline{B^*B}| \cdot \sin \beta \Rightarrow \sin \beta \approx 0,555 \Rightarrow \beta \approx 33,7^\circ \Rightarrow \gamma \approx 50,9^\circ$$

d) Individuelle Mindmaps.



K2

19 a) Ihr Logarithmuswert liegt zwischen 2 und 3; die Zahl vor dem Komma ist stets 2.

b) Für alle fünfstelligen (natürlichen) Zahlen x gilt $10\,000 \leq x \leq 99\,999$;

$$1 \cdot 10^4 \leq x \leq 9,9999 \cdot 10^4; 4 \leq \log x < 5.$$

Für alle sechsstelligen Zahlen y gilt $100\,000 \leq y \leq 999\,999$;

$$1 \cdot 10^5 \leq y \leq 9,99999 \cdot 10^5; 5 \leq \log y < 6.$$

Für alle fünfzehnstelligen Zahlen z gilt

$$100\,000\,000\,000\,000 \leq z \leq 999\,999\,999\,999\,999;$$

$$1 \cdot 10^{14} \leq z \leq 9,99999999999999 \cdot 10^{14}; 14 \leq \log z < 15.$$

c) $\log 22^{22} = 22 \log 22 \approx 22 \cdot 1,34 = 29,48$;Der Wert der Potenz 22^{22} besitzt 30 Ziffern.

$$\log 55^{55} = 55 \log 55 \approx 55 \cdot 1,74 = 95,7;$$

Der Wert der Potenz 55^{55} besitzt 96 Ziffern.

$$\log 99^{99} = 99 \log 99 \approx 99 \cdot 1,996 = 197,604;$$

Der Wert der Potenz 99^{99} besitzt 198 Ziffern.

$$\log[(99^{99})^{99}] = \log(99^{99 \cdot 99}) = 99 \cdot 99 \log 99 \approx 19\,559,22;$$

Der Wert der Potenz $(99^{99})^{99}$ besitzt 19 560 Ziffern.d) 1 Mersenne-Zahlen sind Werte von Termen der Form $2^n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$,
also die Zahlen 1; 3; 7; 15; 31; 63; ...

Mersenne-Primzahlen sind z. B.:

$$(2^2 - 1 =) 3, (2^3 - 1 =) 7, (2^5 - 1 =) 31, (2^7 - 1 =) 127 \text{ und } (2^{13} - 1 =) 8191.$$

Hinweis: $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ ist nicht prim.

$$2 \quad 2^n - 1 \geq 10^{100\,000\,000} \Leftrightarrow$$

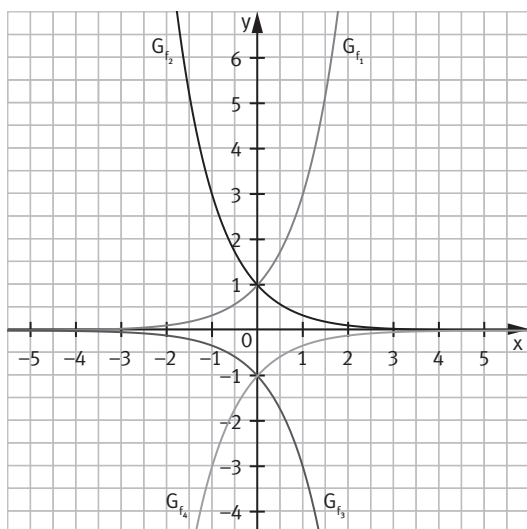
$$2^n > 10^{100\,000\,000} \Leftrightarrow$$

$$n > \frac{100\,000\,000}{\log 2} \Leftrightarrow$$

$n > 3\,321\,928\,095$: Der Exponent n muss mindestens gleich $3\,321\,928\,096$ sein.

K4

20 a)



- b) G_{f_1} und G_{f_4} sind monoton steigend, G_{f_2} und G_{f_3} sind monoton fallend.
 f_1 und f_2 nehmen nur positive Werte an, f_3 und f_4 nehmen nur negative Werte an.
 Die x -Achse ist waagrechte Asymptote aller vier Funktionsgraphen.
 Es gibt keine Schnittpunkte der Funktionsgraphen mit der x -Achse (d. h. keine Nullstellen).
 Schnittpunkte mit der y -Achse: $(0|1)$ für G_{f_1} und G_{f_2} bzw. $(0|-1)$ für G_{f_3} und G_{f_4} .
- c) ■ G_{f_1} und G_{f_2} sind zueinander symmetrisch bezüglich der y -Achse.
 G_{f_3} und G_{f_4} sind zueinander symmetrisch bezüglich der y -Achse.
 ■ G_{f_1} und G_{f_3} sind zueinander symmetrisch bezüglich der x -Achse.
 G_{f_2} und G_{f_4} sind zueinander symmetrisch bezüglich der x -Achse.

K5

21 Der Funktionswert wird ...

- a) halbiert, da $f(x+1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2} \cdot f(x)$ ist.
- b) vervierfacht, da $f(x-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \cdot f(x)$ ist.
- c) mit $\sqrt{2}$ multipliziert, da $f(x-0,5) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-0,5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-0,5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{2} \cdot f(x)$ ist.
- d) quadriert, da $f(2x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2 = [f(x)]^2$ ist.
- e) Aus dem Funktionswert wird die Quadratwurzel gezogen, da $f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0,5x} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{0,5} = \sqrt{f(x)}$ ist.
- f) Vom Funktionswert wird der Kehrwert genommen, da $f(-x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x} = \frac{1}{f(x)}$ ist.

K4

22

Funktion	Graph	Begründung
f_1	A	$2^{x-1} = 2^x \cdot 2^{-1} = 0,5 \cdot 2^x$ G_{f_1} ist der mit dem Faktor 0,5 gestauchte Graph der Funktion f mit $f(x) = 2^x$.
f_2	D	G_{f_2} ist der mit dem Faktor 2 gestreckte Graph der Funktion f mit $f(x) = 2^x$.
f_3	B	G_{f_3} ist der an der y-Achse gespiegelte Graph der Funktion f mit $f(x) = 2^x$.
f_4	B	$f_4(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x} = f_3(x)$ $G_{f_4} = G_{f_3}$ ist der an der y-Achse gespiegelte Graph der Funktion f mit $f(x) = 2^x$.
f_5	C	G_{f_5} ist der an der x-Achse gespiegelte und um 2 Einheiten in positive y-Richtung verschobene Graph der Funktion f mit $f(x) = 2^x$.
f_6	A	$f_6(x) = 0,5 \cdot 2^x = 2^{-1} \cdot 2^x = 2^{x-1} = f_1(x)$ G_{f_6} ist der mit dem Faktor 0,5 gestauchte Graph der Funktion f mit $f(x) = 2^x$.

K5

- 23 a) $\log_3 x = 9 \Leftrightarrow x = 3^9 \Leftrightarrow x = 19683$ b) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
 c) Hier wurde korrekt umgeformt. d) $x^4 = \frac{625}{16} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \pm 2,5$
 (Das „Vorzeichen“ $\pm$ fehlt vor der Wurzel.)
 e) $\log_2 x = 64 \Leftrightarrow x = 2^{64}$ f) $3^x = 64 \Leftrightarrow \log_3 64 = x \Leftrightarrow x \approx 3,79$
 $\Leftrightarrow x = 18446744073709551616$
 g) $\log 1010 \approx 3,004$ (TR). Die Umformung ist falsch, da der Logarithmus einer Summe nicht als Summe der Logarithmen der Summanden geschrieben werden kann.

K5

- 24 a) $2 \cdot 4^{-x} = 1 \Leftrightarrow 4^{-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (2^2)^{-x} = 2^{-1} \Leftrightarrow 2^{-2x} = 2^{-1} \Leftrightarrow -2x = -1 \Rightarrow x = 0,5$ $L = \{0,5\}$
 b) $(1+3x)^3 = 8 \Leftrightarrow 1+3x = \sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ $L = \left\{\frac{1}{3}\right\}$
 c) $2x - 16 = 0 \Leftrightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8$ $L = \{8\}$
 d) $2^{3x+1} - 8 = 0 \Leftrightarrow 2^{3x+1} = 8 \Leftrightarrow 2^{3x+1} = 2^3 \Leftrightarrow 3x+1 = 3 \Leftrightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ $L = \left\{\frac{2}{3}\right\}$
 e) $2^{x^2-1} - 8 = 0 \Leftrightarrow 2^{x^2-1} = 8 \Leftrightarrow 2^{x^2-1} = 2^3 \Leftrightarrow x^2-1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ $L = \{-2; 2\}$
 f) $2^{\sqrt{x}-1} = 8 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x}-1} = 2^3 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$ $L = \{16\}$
 g) $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$ $L = \{\log_2 3\}$
 h) $4 \cdot 2^x - 1 = 63 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^x = 64 \Leftrightarrow 2^2 \cdot 2^x = 2^6 \Leftrightarrow 2^{x+2} = 2^6 \Leftrightarrow x+2 = 6 \Rightarrow x = 4$ $L = \{4\}$
 i) $64 = 10^y \Leftrightarrow y = \log 64$ $L = \{\log 64\}$
 j) $64 = 10^{1-2y} \Leftrightarrow 1-2y = \log 64 \Leftrightarrow 2y = 1 - \log 64 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \log 64$
 $= \frac{1}{2} - \log(64^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} - \log 8$ $L = \left\{\frac{1}{2} - \log 8\right\}$
 k) $\sqrt{64} = 10^y - 6 \Leftrightarrow 8 = 10^y - 6 \Leftrightarrow 10^y = 14 \Rightarrow y = \log 14$ $L = \{\log 14\}$
 l) $\frac{9x}{x^2+20} = 1 \Leftrightarrow 9x = x^2 + 20 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 20 = 0$
 $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-4 \cdot 20}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 4; x_2 = 5$ $L = \{4; 5\}$
 m) $x^2 + 15x + 56 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225-4 \cdot 56}}{2} = \frac{-15 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = -8; x_2 = -7$ $L = \{-8; -7\}$
 n) $10^{y+1} - 90 = 10 \Leftrightarrow 10^{y+1} = 100 \Leftrightarrow 10^{y+1} = 10^2 \Leftrightarrow y+1 = 2 \Rightarrow y = 1$ $L = \{1\}$
 o) $\sqrt{x^2+9} = 7 \Leftrightarrow x^2+9 = 49 \Leftrightarrow x^2 = 40 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{40} = \pm 2\sqrt{10}$
 $\Rightarrow x_1 = -2\sqrt{10}, x_2 = 2\sqrt{10}$ $L = \{-2\sqrt{10}; 2\sqrt{10}\}$
 p) $\frac{2^4}{x^2+6} = 2^3 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2+6} = 1 \Leftrightarrow x^2+6 = 2 \Leftrightarrow x^2 = -4$ keine Lösung $L = \{\}$

K3

25 a) Tägliche Verdopplung der Anzahl bedeutet exponentielles Wachstum mit dem Wachstumsfaktor $a = 2$.

b) $f(t) = 3 \cdot 2^t$ (t: Zeit in Tagen; f(t): Anzahl der Amöben nach t Tagen)

c) 1 Anzahl der Amöben nach 5 Tagen: $f(5) = 3 \cdot 2^5 = 96$; da zu Beginn 3 Amöben vorhanden waren, sind in 5 Tagen 93 Amöben entstanden.

Anzahl der Amöben nach 30 Tagen: $f(30) = 3 \cdot 2^{30} = 3\,221\,225\,472$

Da zu Beginn 3 Amöben vorhanden waren, sind in 30 Tagen 3 221 225 469 Amöben entstanden.

2 $3 \cdot 2^t > 1000 \Leftrightarrow 2^t > \frac{1000}{3} \Leftrightarrow t > \log_2\left(\frac{1000}{3}\right) \approx 8,4$

Nach 9 Tagen sind mehr als 1000 Amöben vorhanden.

Anmerkung: Die Lösung kann auch durch gezieltes Probieren mit geläufigen Zweierpotenzen gefunden werden.

d) Insbesondere bei der Größenordnung ($3 \cdot 10^9$) der Anzahl der in 30 Tagen entstandenen Amöben ist die Angabe des Ergebnisses mit dieser Genauigkeit (etwa eins zu eine Milliarde) zwar rechnerisch korrekt, aber wenig sinnvoll. Zudem sollte die Tragfähigkeit der Modellbildung bis zu einer solchen Größenordnung kritisch hinterfragt werden. So z. B. ist es bei einem Laborexperiment sehr unwahrscheinlich, dass es sich 30 Tage lang mit gleichbleibendem Wachstum der Amöbenkultur durchführen lässt, da schon vorher der Platz und die Nahrung der Amöben nicht mehr ausreichen werden. In anderer Umgebung – z. B. in freier Natur – wäre eine solche Entwicklung grundsätzlich denkbar, sie ist aber unrealistisch, da sie über einen längeren Zeitraum gleichbleibende Umweltbedingungen voraussetzt und z. B. die Wirkung natürlicher Feinde der Amöben (z. B. bestimmter Bakterienarten) vernachlässigt.

K3

26 a) $Z(t) = Z_0 \cdot 1,65^t$ (Z: Anzahl der Infizierten; t: Zeit in Tagen)

Zeit in Tagen	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14
Zahl der Infizierten	24	40	65	108	178	294	484	799	3590	5923	9773	16 125	26 606

Etwa ab Tag 6 weichen die berechneten Anzahlen stark von den beobachteten Zahlen ab, das Modell eignet sich also nicht für eine längerfristige Beschreibung der Grippewelle.

b) tägliche Zunahme der Infiziertenzahl in Prozent:

Zeit in Tagen	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16
Zunahme in %	75	83	52	67	48	32	32	43	26	31	13	12	17	14

Anpassung des Modells: Die tägliche Zunahme beträgt durchschnittlich etwa 40%, deshalb:

$$Z^*(t) = Z_0 \cdot 1,40^t$$

c) Langfristig kann die Grippewelle nicht mit einem exponentiellen Wachstum beschrieben werden, weil der Wachstumsfaktor nicht gleich bleibt. Der Wachstumsfaktor kann nicht konstant sein, weil die Anzahl von Personen, welche infiziert werden können, eine Obergrenze hat.

K4

27 $V\left(0,5 \mid \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707\right), I(2 \mid 4), E(-2 \mid 4), R\left(-0,5 \mid \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707\right)$

Das Viereck VIER ist ein Trapez.

a) $A = \frac{|RV| + |IE|}{2} \cdot [f(2) - g(0,5)] \text{ cm} = \frac{1+4}{2} \text{ cm} \cdot \left(4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ cm}$
 $= \left(10 - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right) \text{ cm}^2 \approx 8,232 \text{ cm}^2 \approx 8 \text{ cm}^2$

$$U = |VI| + |IE| + |ER| + |RV|$$

$$|VI| = \sqrt{(2-0,5)^2 + \left(4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \text{ cm} \approx \sqrt{1,5^2 + 3,293^2} \text{ cm}$$

$$\approx 3,62 \text{ cm}; |ER| = |VI|$$

$$U \approx 3,62 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 3,62 \text{ cm} + 1 \text{ cm} \approx 12 \text{ cm}$$

$$A_{ETI} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$$

$$A_{RVT} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ cm}^2 \approx 0,146 \text{ cm}^2$$

$$A_{ETI} + A_{RVT} \approx 6,146 \text{ cm}^2$$

$$\text{Bruchteil: } \frac{6,146 \text{ cm}^2}{8,232 \text{ cm}^2} \approx 0,747 \approx \frac{3}{4}$$

- b) $\varphi = \varphi^*$ (Wechselwinkel an den parallelen Geraden RV und EI). Deshalb gilt im rechtwinkligen Dreieck VQI:

$$\tan \varphi = \tan \varphi^* = \frac{4 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2 - 0,5} \approx 2,195 \Rightarrow \varphi \approx 65,5^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - \varphi \approx 114,5^\circ$$

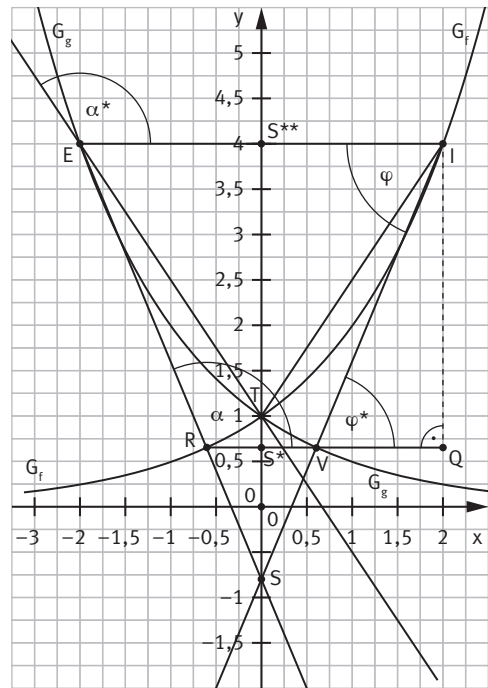
Größen der vier Innenwinkel des Trapezes VIER: $114,5^\circ; 65,5^\circ; 65,5^\circ; 114,5^\circ$

- c) $\frac{|SS^*|}{|SS^{**}|} = \frac{|TV|}{|S^{**}I|}$; mit $|SS^*| = x$ gilt:

$$\frac{x}{x + \left(4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x = x + 4 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 3x = 4 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \left(4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 1,0976$$

$$y_S = y_{S^*} - x = \frac{1}{\sqrt{2}} - x \approx -0,39; S(0 \mid -0,39)$$

Wechselwinkel an Parallelen: φ und φ^* ; Stufenwinkel an Parallelen: α und α^*



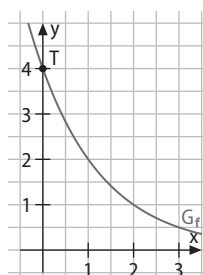
- K1** 1 a) Es handelt sich um lineares Wachstum, wenn die Pflanze täglich um die gleiche Länge wächst.
 b) Es handelt sich um exponentielles Wachstum, wenn der Bambuspreis jährlich um denselben Faktor größer wird.

- K5** 2 a) $f(t) = 5600 \text{ mg} \cdot (1 - 0,045)^t = 5600 \text{ mg} \cdot 0,955^t$
 b) $f(t) = 5000 \text{ €} \cdot (1 + 0,035)^t = 5000 \text{ €} \cdot 1,035^t$
 c) $f(t) = 150 \text{ kg} \cdot (1 - 0,035)^t = 150 \text{ kg} \cdot 0,965^t$
 d) $f(t) = 20 \text{ cm} \cdot (1 + 0,015)^t = 20 \text{ cm} \cdot 1,015^t$

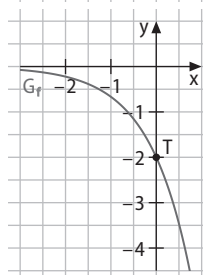
- K5** 3 a) $f_a(5) = 1024 \Rightarrow 1024 = a^5 \Rightarrow a = \sqrt[5]{1024} = 4 \Rightarrow f(x) = 4^x$
 b) $f_a(0,5) = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = a^{0,5} \Rightarrow a = (\sqrt{2})^2 = 2 \Rightarrow f(x) = 2^x$
 c) $f_a(0) = 1 \Rightarrow 1 = a^0$

Dies ist allgemeingültig für alle $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. a lässt sich aus der Angabe also nicht bestimmen.

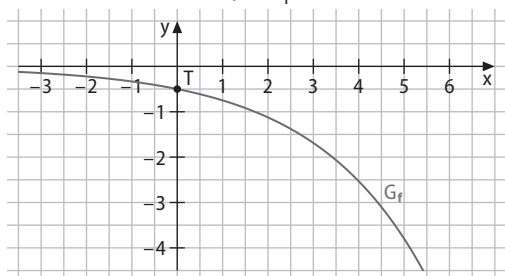
- K4** 4 a) Schnittpunkt mit der y-Achse:
 $f(0) = 4 \cdot 0,5^0 = 4 \cdot 1 = 4 \Rightarrow T(0|4)$
 Asymptote: $y = 0$
 Monotonie: Der Graph G_f ist monoton fallend.



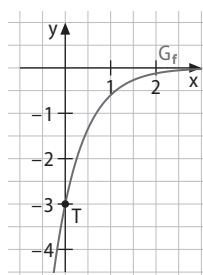
- b) Schnittpunkt mit der y-Achse:
 $f(0) = -2 \cdot 3^0 = -2 \cdot 1 = -2 \Rightarrow T(0|-2)$
 Asymptote: $y = 0$
 Monotonie: Der Graph G_f ist monoton fallend.



- c) Schnittpunkt mit der y-Achse:
 $f(0) = -0,5 \cdot 1,5^0 = -0,5 \cdot 1 = -0,5 \Rightarrow T(0|-0,5)$
 Asymptote: $y = 0$
 Monotonie: Der Graph G_f ist monoton fallend.



- d) Schnittpunkt mit der y-Achse:
 $f(0) = -3 \cdot 0,2^0 = -3 \cdot 1 = -3$
 $\Rightarrow T(0|-3)$
 Asymptote: $y = 0$
 Monotonie: Der Graph G_f ist monoton steigend.



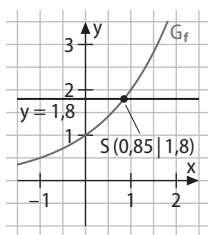
- K5** 5 a) Einsetzen der Koordinaten der Punkte ergibt:
 $P(0|-3) \in G_{f_{a,b}}: f_{a,b}(0) = -3 \Rightarrow b \cdot a^0 = -3 \Rightarrow b = -3$
 $Q(1|-1,5) \in G_{f_{a,b}} \Rightarrow f_{a,b}(1) = -1,5 \Rightarrow (-3) \cdot a^1 = -1,5 \Rightarrow a = \frac{-1,5}{-3} = 0,5 \Rightarrow f_{a,b}(x) = -3 \cdot 0,5^x$
- b) Einsetzen der Koordinaten der Punkte ergibt:
 $P(-0,5|3) \in G_{f_{a,b}}: f_{a,b}(-0,5) = 3 \Rightarrow b \cdot a^{-0,5} = 3 \quad I$
 $Q\left(\frac{1}{2} \middle| \frac{3}{4}\right) \in G_{f_{a,b}}: f_{a,b}(0,5) = 0,75 \Rightarrow b \cdot a^{0,5} = 0,75 \quad II$
 $II : I$ ergibt: $\frac{a^{0,5}}{a^{-0,5}} = 0,25 \Rightarrow a = 0,25$
 $a = 0,25$ einsetzen in II ergibt: $b \cdot 0,25^{0,5} = 0,75$
 $\Rightarrow \frac{1}{2}b = 0,75 \Rightarrow b = 1,5 \Rightarrow f_{a,b}(x) = 1,5 \cdot 0,25^x$
- c) Einsetzen der Koordinaten der Punkte ergibt:
 $P(3|250) \in G_{f_{a,b}}: f_{a,b}(3) = 250 \Rightarrow b \cdot a^3 = 250 \quad I$
 $Q\left(-1 \middle| \frac{2}{5}\right) \in G_{f_{a,b}}: f_{a,b}(-1) = \frac{2}{5} \Rightarrow b \cdot a^{-1} = \frac{2}{5} \quad II$
 $I : II$ ergibt: $\frac{a^3}{a^{-1}} = 625 \Rightarrow a^4 = 625 \Rightarrow a = \sqrt[4]{625} = 5$
 $a = 5$ einsetzen in I ergibt: $b \cdot 5^3 = 250 \Rightarrow 125b = 250 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f_{a,b}(x) = 2 \cdot 5^x$
- d) Einsetzen der Koordinaten der Punkte ergibt:
 $P(0,5|-2,4) \in G_{f_{a,b}}: f_{a,b}(0,5) = -2,4 \Rightarrow b \cdot a^{0,5} = -2,4 \quad I$
 $Q\left(0 \middle| -\frac{6}{5}\right) \in G_{f_{a,b}}: f_{a,b}(0) = -\frac{6}{5} \Rightarrow b \cdot a^0 = -\frac{6}{5} \Rightarrow b = -\frac{6}{5} \quad II$
 $b = -\frac{6}{5}$ in I einsetzen: $\left(-\frac{6}{5}\right) \cdot a^{0,5} = -2,4 \Rightarrow a^{0,5} = 2 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow f_{a,b}(x) = -1,2 \cdot 4^x$

- K6** 6 mögliche Lösung: Der Logarithmus von 81 zur Basis 3 ($\log_3 81$) ist diejenige Zahl, mit der man 3 potenzieren muss, um 81 zu erhalten. Also: $\log_3 81 = 4$, da $3^4 = 81$ ist.

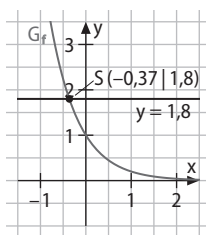
- K5** 7 a) $\log_4 512 = \log_4 2^9 = \log_4 4^{4,5} = 4,5$
b) $\log_3 2187 = \log_3 3^7 = 7$
c) $\log_6 36^5 = \log_6 6^{10} = 10$
d) $\log_{0,5} 64 = \log_{0,5} 2^6 = \log_{0,5} \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = -6$
e) $\log 10000 = \log 10^4 = 4$
f) $\log 10^{1,5} = 1,5$

- K5/6** 8 a) $2^x = 64$ Schreibe 64 als Zweierpotenz.
 $2^x = 2^6$ Der Exponentenvergleich ergibt die Lösung.
 $L = \{6\}$
- b) $0,4^x = 0,064$ Schreibe 0,064 als Potenz zur Basis 0,4.
 $0,4^x = 0,4^3$ Der Exponentenvergleich ergibt die Lösung.
 $L = \{3\}$
- c) $0,3^x = 0,027$ Schreibe 0,027 als Potenz zur Basis 0,3.
 $0,3^x = 0,3^3$ Der Exponentenvergleich ergibt die Lösung.
 $L = \{3\}$
- d) $x = \log_7 1 = \log_7 7^0 = 0$ Schreibe 1 als Potenz zur Basis 7, $1 = 7^0$.
 $L = \{0\}$
- e) $x = \log_{10} \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1$ Schreibe $\frac{1}{10}$ als Potenz zur Basis 10: $\frac{1}{10} = 10^{-1}$.
 $L = \{-1\}$
- f) $x = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$ Schreibe 8 als Potenz zur Basis 2, $8 = 2^3$.
 $L = \{3\}$

K4 9 a) $f: x \mapsto 2^x \quad x \approx 0,85$



b) $f: x \mapsto 0,2^x \quad x \approx -0,37$



K5 10 a) $7^x = 2401 \Leftrightarrow x = \log_7 2401 = 4 \Rightarrow L = \{4\}$

b) $4^x - 1021 = 3 \Leftrightarrow 4^x = 1024 \Leftrightarrow x = \log_4 1024 = 5 \Rightarrow L = \{5\}$

c) $3^{x+5} = 81 \Leftrightarrow 3^x \cdot 3^5 = 3^4 \Leftrightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow L = \{-1\}$

d) $2^y + 2^{2+y} = 20 \Leftrightarrow 2^y + 4 \cdot 2^y = 20 \Leftrightarrow 5 \cdot 2^y = 20 \Leftrightarrow 2^y = 4 \Leftrightarrow 2^y = 2^2 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow L = \{2\}$

e) $3 \cdot 5^x = 4^{2x} \Leftrightarrow 3 \cdot 5^x = 16^x \Leftrightarrow 3 = \left(\frac{16}{5}\right)^x \Leftrightarrow x = \log_{3,2} 3 \Rightarrow L = \{\log_{3,2} 3\}$

f) $3^{-y} + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^y = -3$ nicht lösbar $\Rightarrow L = \{\}$

Hinweis: Die linke Seite ist für alle $y \in \mathbb{R}$ positiv, die rechte Seite ist negativ.

K3 11 a) n: Anzahl der Verdoppelungen ab Beobachtungsbeginn

$$1\,000\,000 = 50 \cdot 2^n \Rightarrow 2^n = 20\,000 \Rightarrow n = \log_2 20\,000 \approx 14,3$$

$$\text{Zeit: } 14,3 \cdot 12 \text{ h} = 171,6 \text{ h} \approx 7,2 \text{ d.}$$

Nach gut 7 Tagen nach Beobachtungsbeginn befinden sich rund 1 000 000 Algen im See.

b) t: Zeit in Stunden ab Beobachtungsbeginn

$$f(t) = 50 \cdot 2^{\frac{t}{12}}$$

c) Das Wachstum kann nur als exponentiell angenommen werden, solange die Algen im See z. B. genügend Platz und Nahrung vorfinden und keine natürlichen Feinde das Wachstum hemmen.

K2 12 Bestand an Kobalt-60 im Behälter zum Zeitpunkt t (in Jahren) nach Beobachtungsbeginn:

$$B(t) = 12t \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}}$$

$$B(5) = 12t \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 6t$$

$$B(10) = 12t \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3t$$

$$B(15) = 12t \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{5}} = 1,5t$$

$$B(30) = 12t \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{5}} = \frac{3}{16}t = 187,5 \text{ kg}$$

$$B(100) = 12t \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100}{5}} = \frac{3}{262144}t \approx 11,4 \text{ g}$$

K3 13 Als t wählt man die Zeit in Jahren.

Bevölkerungswachstum in Nigeria:

$$B_N(t) = 177,5 \text{ Mio} \cdot 1,025^t$$

Bevölkerungswachstum in den USA:

$$B_{USA}(t) = 317,7 \text{ Mio} \cdot 1,004^t$$

Gleichsetzen:

$$B_N(t) = B_{USA}(t)$$

$$177,5 \cdot 1,025^t = 317,7 \cdot 1,004^t$$

$$\frac{177,5}{317,7} \cdot 1,025^t = 1,004^t$$

$$\frac{177,5}{317,7} = \left(\frac{1,004}{1,025}\right)^t$$

$$t = \log_{\frac{1,004}{1,025}} \frac{177,5}{317,7} \approx 28,1 \text{ [Jahre]}$$

Rein rechnerisch stimmt die Einschätzung der Zeitung. Allerdings stimmt der Wert nur, wenn das Bevölkerungswachstum in beiden Ländern gleich bleibt, was auf einen so langen Zeitraum kaum vorhersehbar ist.

- K2** 14 Lichtintensität in x Metern Tiefe: $I(x) = 0,85^x$

Gesucht: Tiefe x mit $I(x) = 0,2$

$$0,85^x = 0,2$$

$$x = \log_{0,85} 0,2 \approx 9,9 \text{ [m]}$$

Die Kamera funktioniert somit bis in eine Tiefe von knapp 10 Metern.

Aufgaben für Lernpartner

- K1/6** A Die Aussage ist (in dieser Allgemeinheit) falsch. Gegenbeispiel:

	Wachstumsfunktion
Lineares Wachstum	$B_1(t) = 100 \cdot t$
Exponentielles Wachstum	$B_2(t) = 2^t$
	Zunahme im Intervall $[0; 1]$:
Lineares Wachstum	$B_1(1) - B_1(0) = 100 - 0 = 100$
Exponentielles Wachstum	$B_2(1) - B_2(0) = 2 - 1 = 1 < 100$

Allerdings „überholt“ jedes exponentielle Wachstum jedes lineare Wachstum zu irgendeinem Zeitpunkt.

- K1/6** B Die Aussage ist falsch. Bei exponentiellem Wachstum ist der prozentuale Zuwachs (oder die prozentuale Abnahme) in gleichen Zeitabschnitten gleich groß.
- K1/6** C Die Aussage ist falsch. Wenn ein Graph mit der y -Achse zwei Punkte gemeinsam hat, ist dies nicht der Graph einer Funktion (insbesondere auch nicht einer Exponentialfunktion), da dem x -Wert 0 zwei y -Werte zugeordnet würden. Die Zuordnung wäre also nicht eindeutig und daher keine Funktion.
- K1/6** D Die Aussage ist falsch. Eine Exponentialfunktion f mit $f_a(x) = a^x$; $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ hat keine Nullstelle, da $a^x > 0$ ist.
- K1/6** E Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: f mit $f(x) = x^2$; $x \in \mathbb{R}$
Der Graph (Normalparabel) ist für $x < 0$ monoton fallend und für $x \geq 0$ monoton steigend.
- K1/6** F Die Aussage ist richtig. Wenn der Graph einer Exponentialfunktion eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = x_0$ hätte, dann wäre $x_0 \notin D_f$. Dies ist ein Widerspruch zur maximalen Definitionsmenge einer Exponentialfunktion mit $D_f = \mathbb{R}$.
- K1/6** G Die Aussage ist falsch. Spiegelt man den Graphen der Funktion f an der x -Achse, so ist $g(x) = -f(x)$, also $g(x) = -2^x$ ein Term der zum gespiegelten Graphen G_g gehörenden Funktion.
- K1/6** H Die Aussage ist falsch. Die waagrechte Asymptote der Funktion f ist die x -Achse ($y = 0$).
- K1/6** I Die Aussage ist richtig. Es gilt:
 $g(x) = 9 \cdot 3^x = 3^2 \cdot 3^x = 3^{x+2}$.
Der Graph der Funktion g entsteht aus dem der Funktion f also durch Verschiebung um 2 Einheiten in negative x -Richtung. Daher sind die Graphen kongruent.
- K1/6** J Die Aussage ist falsch. Graphische Lösungen sind immer Näherungen, da Zeichnen und Ablesen niemals absolut exakt erfolgen können.

- K1/6** **K** Die Aussage ist falsch. Man muss zusätzlich zum Wachstumsfaktor auch einen Anfangsbestand bzw. den Bestand zu irgendeinem Zeitpunkt kennen.
- K1/6** **L** Die Aussage ist falsch. Stellt man die Gleichung $x = \log_c b$ um, so erhält man $b = c^x$.
- K1/6** **M** Die Aussage ist richtig. $2^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- K1/6** **N** Die Aussage ist falsch. Es gilt $\log_2 1 = 0$, da $2^0 = 1$ ist.
- K1/6** **O** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Die Gleichung $2^{-x} = 0,5^x$ hat unendlich viele Lösungen ($L = \mathbb{R}$), also insbesondere mehr als eine Lösung.
- K1/6** **P** Die Aussage ist falsch. Aufgrund der begrenzten Anzahl der Schüler in einer Klasse stößt das Modell des exponentiellen Wachstums sehr schnell an seine Grenzen.
- K1/6** **Q** Die Aussage ist falsch.
Es gilt: $\sqrt{8} > 1$ und somit $\log \sqrt{8} > 0$.