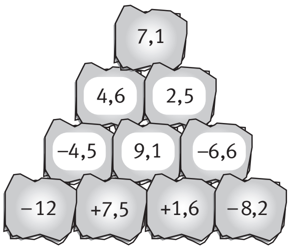
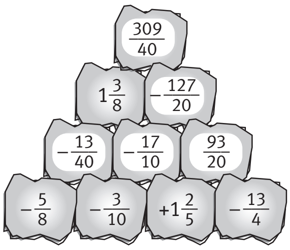
Mit rationalen Zahlen rechnen

KX **1** **a)**



b)



KX **2** **a)** richtig: 4 **b)** richtig: 3 **c)** richtig: 2, 3

Mit reellen Zahlen rechnen

KX **3** **a)** $L = \{-7; 7\}$ **b)** $L = \{-1{,}5; 1{,}5\}$ **c)** $L = \{0\}$
d) $L = \{-4; 4\}$ **e)** $L = \varnothing$ **f)** $L = \left\{-\frac{3}{7}; \frac{3}{7}\right\}$
g) $L = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$ **h)** $L = \varnothing$ **i)** $L = \varnothing$

KX **4** **a)** $\sqrt{25 \cdot 9} = 5 \cdot 3 = 15$ **b)** $\sqrt{196 \cdot 16} = 14 \cdot 4 = 56$
c) $\sqrt{361 \cdot 9} = 19 \cdot 3 = 57$ **d)** $\sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
e) $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{7}{8}$ **f)** $\sqrt{\frac{81 \cdot 16}{121}} = \frac{9 \cdot 4}{11} = 3\frac{3}{11}$

KX **5** **a)** $\sqrt{18a^2} = 3 \cdot \sqrt{2}\,a$ **b)** $\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ **c)** $\sqrt{\frac{8b^2}{9a^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}\,b}{3a}$
d) $\frac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt{ab}} = \sqrt{a^2} = a$ **e)** $\frac{\sqrt{0{,}4a^2}}{\sqrt{0{,}625}} = \sqrt{0{,}64a^2} = 0{,}8a$ **f)** $\frac{\sqrt{12a}}{\sqrt{3a^3}} = \sqrt{\frac{4}{a^2}} = \frac{2}{a}$
g) $\frac{\sqrt{54a}}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{2a^3}}{\sqrt{3b}} = \sqrt{\frac{36a^4}{b^2}} = \frac{6a^2}{b}$ **h)** $\sqrt{\frac{45a^3}{2b}} \cdot \sqrt{\frac{32a}{5b^5}} = \sqrt{\frac{144a^4}{b^6}} = \frac{12a^2}{b^3}$

KX **6** **a)** $2\sqrt{3}x = 8\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1{,}5 \quad \Rightarrow L = \{1{,}5\}$
b) $15 - 6\sqrt{5} + \sqrt{5}x = 20 - 6\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5}x = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \quad \Rightarrow L = \{\sqrt{5}\}$

Potenzgesetze anwenden

KX **7** **a)** $4^{3+0-5} = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ **b)** $4^{-2+3-(-2)} = 4^3 = 64$
c) $2^{-3+4} + 2^{-2+4} = 2 + 2^2 = 6$ **d)** $1{,}2^{4-3} - 1{,}2^{4-4} = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$
e) $(-2)^{8-4-2} = (-2)^2 = 4$ **f)** $2^{4-7-(-3)} = 2^0 = 1$

KX **8** **a)** $\frac{2^{10} \cdot a^5}{2^9 \cdot a^{10}} = \frac{2}{a^5}$ **b)** $\frac{6^4 \cdot a^5}{6^3 \cdot a^3} = 6a^2$
c) $\frac{6x^9}{6x^5} = x^4$ **d)** $\frac{1}{\left(\frac{x^4y}{x^2y^3}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{x^8y^2}{x^4y^6}\right)} = \frac{x^4y^6}{x^8y^2} = \frac{y^4}{x^4} = \left(\frac{y}{x}\right)^4$
e) $\frac{125x^6 + 27x^6}{16x^6} = \frac{152x^6}{16x^6} = \frac{19}{2} = 9{,}5$ **f)** $5x^5 + 5x^9 = 5x^5(1 + x^4)$
g) $x^0 - x^{-1} + x^{-2} - x^{-3} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
h) $\frac{-1}{2-x} + \frac{3(2-x)}{2-x} - \frac{(1-x)}{2-x} = \frac{4-2x}{2-x} = \frac{2(2-x)}{2-x} = 2$

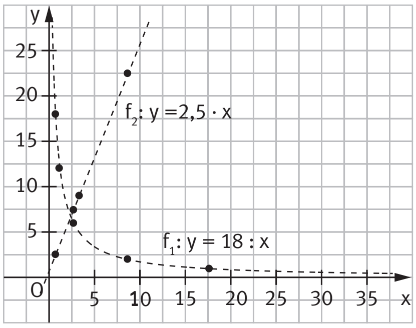
Proportionalitäten

KX **9** **a)** 1 Wegen der Produktgleichheit ($3 \cdot 6 = 9 \cdot 2 = 18$) liegt eine indirekte Proportionalität vor.

2 Wegen der Quotientengleichheit ($9 : 3{,}6 = 7{,}5 : 3 = 2{,}5$) liegt eine direkte Proportionalität vor.

1	x	1	1,5	3	9	18
	y	18	12	6	2	1
2	x	1	3,6	3	9	18
	y	2,5	9	7,5	22,5	45

b)



c) Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:

1 Ein Arbeiter braucht für eine bestimmte Aufgabe 18 Stunden.
Drei Arbeiter erledigen die Aufgabe in 6 Stunden.

2 Ein Kilogramm Äpfel kostet 2,50 €, drei Kilogramm kosten 7,50 €.

KX **10** **a)** Indirekte Proportionalität, mögliche Arbeiter-Stunden-Zahlenpaare sind: (1|18); (2|9); (3|6).

b) Weder direkte noch indirekte Proportionalität. Nimmt man z. B. ein Becken mit 100 m^3 Wasser, aus dem pro Stunde 10 m^3 abfließen, dann sind die Stunden-m^3-Zahlenpaare:
(0|100); (1|90); (2|80); (3|70); (4|60); …; (9|10); (10|0).
Die Zuordnung ist linear.

c) Auch hier liegt weder eine direkte noch eine indirekte Proportionalität vor.

KX **11** $15\,\text{d} \cdot 45\,\text{km} = x\,\text{d} \cdot 27\,\text{km} \Leftrightarrow x\,\text{d} = \frac{15\,\text{d} \cdot 45\,\text{km}}{27\,\text{km}} \Leftrightarrow x = 25$
Wenn täglich 27 km gefahren werden, reicht die Tankfüllung 25 Tage.

Prozent- und Zinsrechnung

KX **12** $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}x\right) = 54 \Leftrightarrow x = \frac{16}{9} \cdot 54 = 96$
Die Schuhe kosteten ursprünglich 96 €.

KX **13**

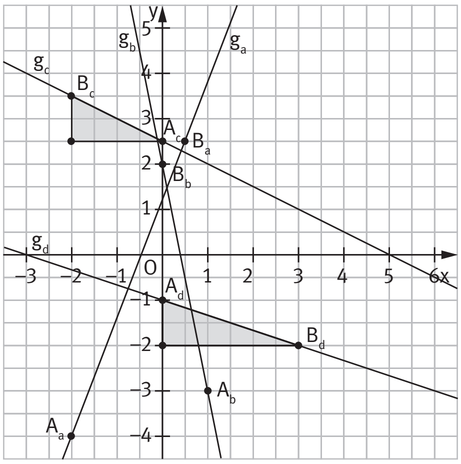
	a)	b)	c)	d)
Kapital in €	8400	12 600	24 120	1000
Jahreszins in €	100,8	189	651,24	8,5
Zinssatz p. a. in %	1,2	1,5	2,7	0,85

KX **14** Die Stückelung des Geldes spielt keine Rolle, es kommt nur auf den Zinssatz an, und der ist bei Bank A höher als bei Bank B. Daher sollte Oma Schwarz sich für das Angebot der Bank A entscheiden.
Bank A: $K_3 = 15\,000\,€ \cdot 1{,}035^3 = 16\,630{,}77\,€$.
Die Zinsen bei Anlage von 15 000 € für 3 Jahre bei Bank A betragen 1630,77 €.

Lineare Funktionen

KX **15** **a)** g: $y = x + 2$ **b)** g: $y = 2$ **c)** g: $y = -2x$ **d)** g: $y = -x - 2$

KX **16**



a) $m_a = \frac{2{,}5 + 4}{0{,}5 + 2} = 2{,}6$

$-4 = 2{,}6 \cdot (-2) + t_a \Leftrightarrow t_a = 1{,}2$

g_a: $y = 2{,}6x + 1{,}2$

b) $-3 = m_b + 2 \Leftrightarrow m_b = -5$

g_b: $y = -5x + 2$

c) $3{,}5 = -0{,}5 \cdot (-2) + t_c \Leftrightarrow t_c = 2{,}5$

g_c: $y = -0{,}5x + 2{,}5$

d) g_d: $y = -\frac{1}{3}x - 1$

KX **17** Wegen $m \cdot m^* = -1$ gilt für die Gleichung der Geraden g*:

a) $2 = \frac{1}{2} \cdot 5 + t \Leftrightarrow t = -0{,}5$

Die Funktionsgleichung von g* lautet: $y = \frac{1}{2}x - 0{,}5$

b) $2 = -4 \cdot 0 + t \Leftrightarrow t = 2$

Die Funktionsgleichung von g* lautet: $y = -4x + 2$

Lineare Gleichungen und Ungleichungen

KX **18**

a) $21x = -1$	**b)** $2\frac{5}{6}a = -5$	**c)** $c = -2$	**d)** $x = 1$
$\mathbb{N}$: $L = \emptyset$	$\mathbb{N}$: $L = \emptyset$	$\mathbb{N}$: $L = \emptyset$	$\mathbb{N}$: $L = \{1\}$
$\mathbb{Z}$: $L = \emptyset$	$\mathbb{Z}$: $L = \emptyset$	$\mathbb{Z}$: $L = \{-2\}$	$\mathbb{Z}$: $L = \{1\}$
$\mathbb{R}$: $L = \left\{-\frac{1}{21}\right\}$	$\mathbb{R}$: $L = \left\{-1\frac{13}{17}\right\}$	$\mathbb{R}$: $L = \{-2\}$	$\mathbb{R}$: $L = \{1\}$

KX **19** Die Situation wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$1200\,€ - 1200\,€ \cdot \frac{x}{100} = 800\,€ + 800\,€ \cdot \frac{x}{100} \Leftrightarrow x = 20$

Der Händler hat also 20 % nachgelassen und der Käufer 20 % mehr geboten.

Der Preis des Teppichs beträgt $800\,€ \cdot 1{,}2 = 960\,€$.

KX **20** **a)** $x = 8$ **b)** $x < 3{,}2$ **c)** $x = 5$

d) $x = \frac{15}{68}$ **e)** $x < \frac{19}{85}$ **f)** $x = 9$

Bruchterme und Bruchgleichungen

KX **21** **a)** $\frac{1}{(a-1)\cdot(a+1)}\cdot\frac{a+1}{1}=\frac{1}{a-1}$
$D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

b) $\frac{3}{(x+3)^2}\cdot\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{6}=\frac{x-3}{2\cdot(x+3)}$
$D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

c) $\frac{5x}{(x-3)^2}\cdot\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x^2}=\frac{5\cdot(x+3)}{x\cdot(x-3)}$
$D=\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$

d) $\frac{2\cdot(x+3)}{3\cdot(x-3)}\cdot\frac{5x-3}{8\cdot(x+3)}=\frac{5x-3}{12\cdot(x-3)}$
$D=\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$

e) $\frac{x-2}{x}\cdot\frac{x}{x+2}=\frac{x-2}{x+2}$
$D=\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$

f) $\frac{(y-2)\cdot(y+2)}{(3-y)\cdot(3+y)}\cdot\frac{2\cdot(y-3)}{2\cdot(y+2)}=\frac{(y-2)\cdot(y-3)}{(3-y)\cdot(3+y)}=\frac{2-y}{3+y}$
$D=\mathbb{R}\setminus\{-3;-2;3\}$

g) $\frac{x}{x\cdot(x-1)}+\frac{2}{x\cdot(x-1)}=\frac{2+x}{x\cdot(x-1)}$
$D=\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$

h) $\frac{y}{y+1}-\frac{(y+1)\cdot(y-1)}{y\cdot(y-1)}=\frac{y}{y+1}-\frac{y+1}{y}=\frac{y^2-(y+1)^2}{y\cdot(y+1)}=\frac{-(2y+1)}{y\cdot(y+1)}$
$D=\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$

KX **22** **a)** $D=\mathbb{R}\setminus\{-5;2\}$ $\quad 3\cdot(x+5)=-8\cdot(x-2)\ \Leftrightarrow\ x=\frac{1}{11}$
$L=\left\{\frac{1}{11}\right\}$

b) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3};0\right\}$ $\quad 12x^2=(4x+4)\cdot(3x+1)\ \Leftrightarrow\ x=-\frac{1}{4}$
$L=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$

c) $D=\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ $\quad (2x-3)\cdot(x-1)=2x\cdot(x-1{,}5)\ \Leftrightarrow\ x=1{,}5$
$L=\{1{,}5\}$

d) $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;4\}$ $\quad 2x\cdot(x+1)=(8x+8)\cdot(0{,}25x-1)\ \Leftrightarrow\ x=-1$
$L=\varnothing$

e) $D=\mathbb{R}\setminus\{5\}$ $\quad x\cdot(x-5)=5\cdot(x-5)\ \Leftrightarrow\ x=5$
$L=\varnothing$

f) $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ $\quad (x+1)\cdot(x-2)=-3\cdot(2-x)\ \Leftrightarrow\ (x-2)^2=0\ \Leftrightarrow\ x=2$
$L=\varnothing$

Mit Summentermen rechnen

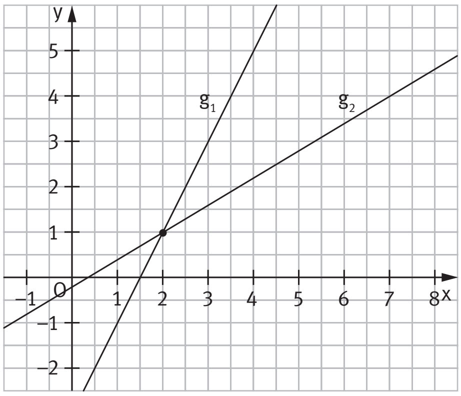
KX **23** **a)** $a^2+2ab+b^2-(a^2-b^2)=2b^2+2ab$
b) $16s^2-9u^2-(9u^2+24us+16s^2)=-18u^2-24su$
c) $36r^2-60r+25-(36r^2-25)=-60r+50$
d) $64x^2-36y^2-(36x^2+96xy+64y^2)=28x^2-96xy-100y^2$

KX **24** **a)** $x^2-x+0{,}25$ **b)** $y^2+\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}$ **c)** x^4+4x^2+4
d) $4a^4-4a^2+1$ **e)** $121x^2-196y^2$

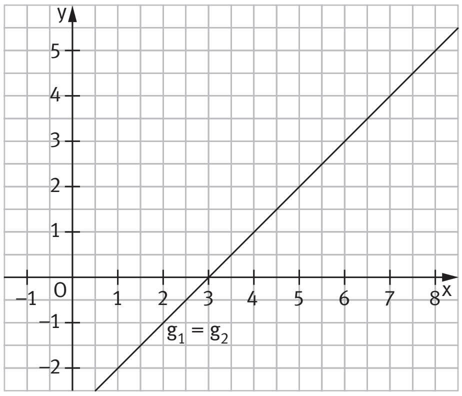
KX **25** $A_{Quadrat}(x)=x^2\,cm^2$
$A_{Rechteck}(x)=(x-2)\,cm\cdot(x+2)\,cm=(x^2-4)\,cm^2=A_{Quadrat}(x)-4\,cm^2$
Der Flächeninhalt des Rechtecks ist um $4\,cm^2$ kleiner als der des Quadrats.

Lineare Gleichungssysteme

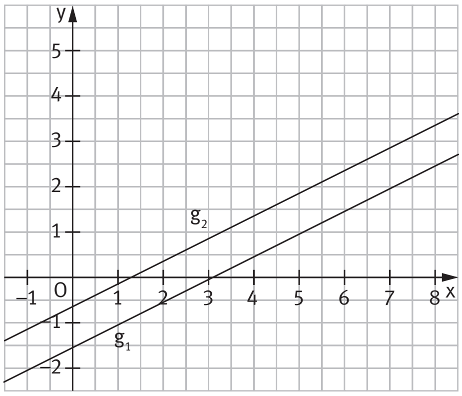
KX **26** **a)** I $y = 2x - 3$
II $y = 0{,}6x - 0{,}2$ $L = \{(2|1)\}$



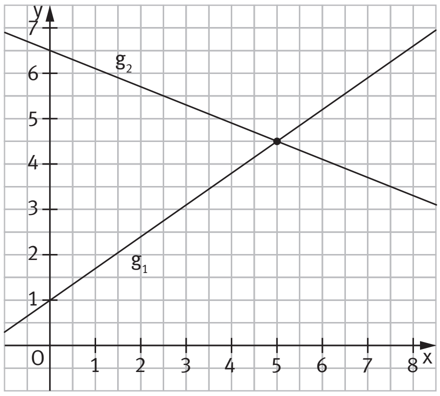
b) I $y = x - 3$
II $y = x - 3$ $L = \mathbb{R}$



c) I $y = 0{,}5x - 1{,}5$
II $y = 0{,}5x - \frac{10}{19}$ $L = \varnothing$



d) I $y = 0{,}7x + 1$
II $y = -0{,}4x + 6{,}5$ $L = \{(5|4{,}5)\}$



KX **27** Es sind individuelle Lösungswege möglich.

a) z. B. Einsetzungsverfahren:
II $x = 22{,}5 - 2y$
II in I: $3y + 9(22{,}5 - 2y) + 15 = 0$
$\Leftrightarrow$ $y = 14{,}5$; $x = -6{,}5$
$L = \{(-6{,}5|14{,}5)\}$

b) z. B. Einsetzungsverfahren:
I in II: $3y = 1{,}5(5y - 27) - 4{,}5$
$\Leftrightarrow$ $y = 10$; $x = 23$
$L = \{(23|10)\}$

c) z. B. Additionsverfahren:
I + II: $9x = -9$
$\Leftrightarrow$ $x = -1$; $y = -12$
$L = \{(-1|-12)\}$

d) z. B. Gleichsetzungsverfahren:
Umformen ergibt: I $y = -\frac{4}{7}x + 1$
II $y = -\frac{4}{7}x + 1$
$L = \mathbb{R}$

KX **28** Die Längen der beiden Katheten betragen a cm bzw. b cm.
$A_{neu} = A + 10$
Mit $\frac{a}{b} = \frac{3}{1}$ $\Leftrightarrow$ $a = 3b$ und $A = \frac{1}{2}ab$ gilt:
$\frac{1}{2} \cdot (a + 2) \cdot (b + 2) = \frac{1}{2}ab + 10$
$\frac{1}{2} \cdot (3b + 2) \cdot (b + 2) = \frac{1}{2}3b \cdot b + 10$
$3b^2 + 8b + 4 = 3b^2 + 20$
$b = 2$; $a = 6$
Die Längen der Katheten betragen 2 cm und 6 cm.

KX **29** I $1 + 6 + x + 7 + y + 0 = 28 \Leftrightarrow x = 14 - y$

II $\frac{1 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + x \cdot 3 + 7 \cdot 4 + y \cdot 5 + 0 \cdot 6}{28} = 3{,}25$

x in (II) $41 + 3 \cdot (14 - y) + 5y = 91 \Leftrightarrow y = 4; x = 10$

Zehn Schüler erhielten die Note 3 und vier Schüler die Note 5.

Extremwerte von quadratischen Termen

KX **30** **a)** $T_{min} = 0$ für $x = 3$ **b)** $T_{min} = 1$ für $x = 0$
c) $T_{min} = 1$ für $x = -4$ **d)** $T_{max} = 7$ für $x = 4$

KX **31** Mögliche Terme sind von der Form $-a \cdot (x + 1)^2 + 7$ mit $a \in \mathbb{R}^+$,
z. B.: $T(x) = -2 \cdot (x + 1)^2 + 7$ mit Maximum $T_{max} = 7$ für $x = -1$.

KX **32** **a)** $T_{min} = 1$ für $x = 2$ **b)** $T_{max} = 8$ für $x = -1$ **c)** $T_{min} = -6$ für $x = -1$

Statistische Kennwerte

KX **33** **a)** Es sind unterschiedliche Lösungen möglich, beispielsweise:
1; 2; 3; 6; 8
arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 6 + 8}{5} = 4$ Zentralwert/Median: $z = 3$
oder: 1; 1; 3; 7; 8
arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{1 + 1 + 3 + 7 + 8}{5} = 4$ Zentralwert/Median: $z = 3$

b) Die Zahlenfolge 3, 3, 3, 8, 8 hat den Zentralwert $z = 3$ und liefert das größte arithmetische Mittel von fünf Zahlen aus G, nämlich: $\overline{x} = \frac{3 + 3 + 3 + 8 + 8}{5} = 5$

KX **34** Berechnung des arithmetischen Mittels liefert:
$\overline{x} = \frac{350 + 348 + 356 + 348 + 349 + 345 + 352 + x}{8} = 349 \Leftrightarrow 2448 + x = 2792 \Leftrightarrow x = 344$
Der achte Teilnehmer hat 344 Punkte erreicht.

KX **35** Zunächst wird man die kleinste Körpergröße festlegen, z. B. 169 cm. Daraus ergibt sich durch die gegebene Spannweite die zweite Körpergröße, hier 181 cm. Die dritte Körpergröße ergibt sich mithilfe des arithmetischen Mittels:
(169 cm + 181 cm + x cm) : 3 = 174 cm $\Rightarrow$ x cm = (522 – 169 – 181) cm = 172 cm
Wenn man die erste Körpergröße ungünstig wählt, z. B. 172 cm, kann es sein, dass sich durch die dritte Größe die Spannweite ändert: Mit 172 cm und 184 cm als erster und zweiter Größe erhält man mithilfe des arithmetischen Mittels als dritte Größe x cm = (522 – 172 – 184) cm = 166 cm. Die Spannweite zwischen dem kleinsten und größten Wert beträgt dann (184 – 166) cm = 18 cm. Es sind also nur wenige Lösungen möglich, wenn man die erste Körpergröße mit ganzen Zentimetern angibt.

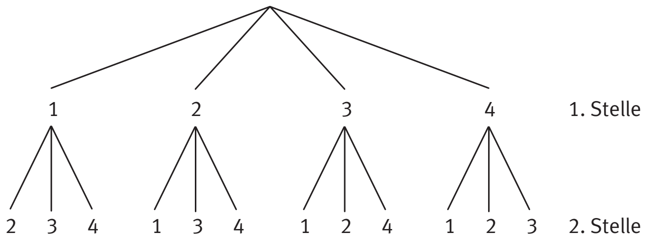
1. Körpergröße	2. Körpergröße	3. Körpergröße
164 cm	176 cm	182 cm
165 cm	177 cm	180 cm
166 cm	178 cm	178 cm
167 cm	179 cm	176 cm
168 cm	180 cm	174 cm
169 cm	181 cm	172 cm
170 cm	182 cm	170 cm
171 cm	183 cm	168 cm
172 cm	184 cm	166 cm

arithmetisches Mittel	Spannweite	Lösung
174 cm	18 cm	nein
174 cm	15 cm	nein
174 cm	12 cm	ja
174 cm	12 cm	ja
174 cm	12 cm	ja
174 cm	12 cm	ja
174 cm	12 cm	ja
174 cm	15 cm	nein
174 cm	18 cm	nein

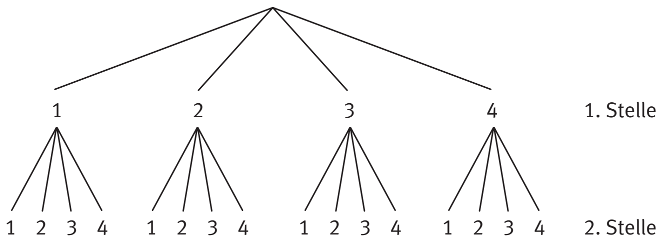
Die Körpergrößen der drei Personen könnten damit folgendermaßen ausfallen (in cm):
166–178–178; 167–176–179; 168–174–180; 169–172–181; 170–170–182.

Zufallsexperimente darstellen

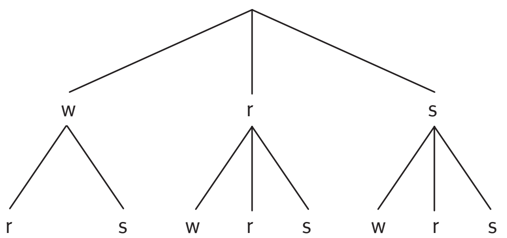
KX **36 a)** Es sind 4 · 3 = 12 verschiedene zweistellige Zahlen möglich: 12, 13, ... 42, 43



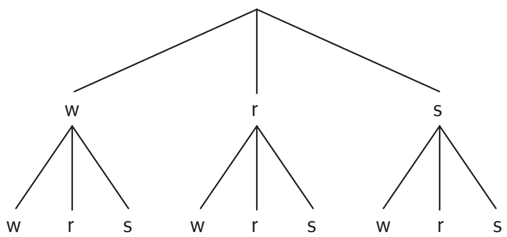
b) Es sind 4 · 4 = 16 verschiedene zweistellige Zahlen möglich: 11, 12, 13, ... 42, 43, 44.



KX **37 a)** Ω = {wr; ws; rw; rr; rs; sw; sr; ss} $|\Omega| = 8$



b) Ω = {ww; wr; ws; rw; rr; rs; sw; sr; ss} $|\Omega| = 9$



Empirisches Gesetz der großen Zahlen

KX **38** Die relative Häufigkeit, dass eine Person „Zahl“ geworfen hat, würde sich bei allen fünf Personen näher bei 0,5 einpendeln: Je öfter der Versuch durchgeführt wird, desto stärker stabilisiert sich die relative Häufigkeit des Ergebnisses „Zahl“ um einen festen Zahlenwert.

Laplace-Wahrscheinlichkeit

KX **39** **a)** P (15-jähriger Junge) = $\frac{6}{25}$

b) P (Schülerin, die älter als 15 ist) = $\frac{9}{25}$

Umfang und Flächeninhalt ebener Figuren

KX **40** A = 12 FE mit D (3 | 4,5)

KX **41** $u = a + b + c + d$

$21\,cm = a + 4\,cm + c + 5\,cm$

$a + c = 21\,cm - 9\,cm = 12\,cm$

$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$

$h = A : \frac{a+c}{2}$

$h = 19{,}2\,cm^2 : \frac{12\,cm}{2}$

$h = 3{,}2\,cm$

KX **42** Die Länge der kurzen Seite des Rechtecks sei x m, die Länge der langen Seite (x + 3) m.

$A_{alt}(x) = x \cdot (x + 3)\,m^2 = (x^2 + 3x)\,m^2$

$A_{neu}(x) = (x + 2) \cdot (x + 5)\,m^2 = (x^2 + 7x + 10)\,m^2$

$A_{alt}(x) + 26\,m^2 = A_{neu}(x)$

$x^2 + 3x + 26 = x^2 + 7x + 10 \;\Leftrightarrow\; 16 = 4x \;\Leftrightarrow\; x = 4$

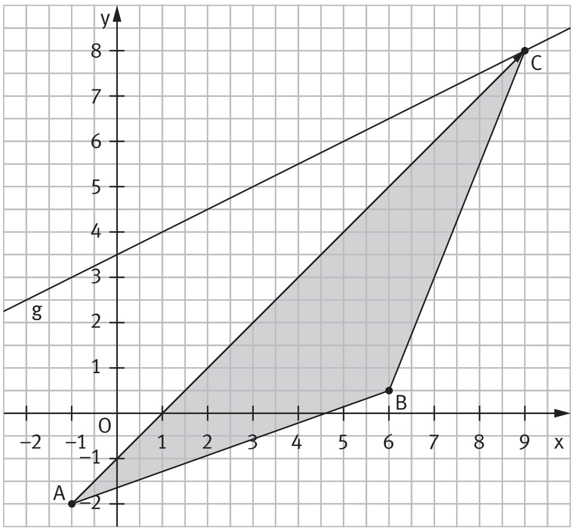
Die Seitenlängen des alten Rechtecks betragen 4 m und 7 m, die des neuen Rechtecks 6 m und 9 m.

KX **43** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ 0{,}5x + 5{,}5 \end{pmatrix}$

$A = \frac{1}{2}(7 \cdot (0{,}5x + 5{,}5) - 2{,}5(x + 1))$ FE

$= \left(\frac{1}{2}x + 18\right)$ FE

$\frac{1}{2}x + 18 = 22{,}5 \;\Leftrightarrow\; x = 9 \;\Rightarrow\; C(9|8)$



Berechnungen am Kreis

KX **44** **a)** $r = 3\,mm$ | $d = 6\,mm$ | $u \approx 18{,}85\,mm$ | $A \approx 28{,}27\,mm^2$

b) $r = 1{,}2\,cm$ | $d = 2{,}4\,cm$ | $u \approx 7{,}54\,cm$ | $A \approx 4{,}52\,cm^2$

c) $r \approx 8{,}276\,m$ | $d \approx 16{,}552\,m$ | $u = 52\,m$ | $A \approx 215{,}18\,m^2$

d) $r = 1{,}5\,m$ | $d = 3{,}0\,m$ | $u = 9{,}3\,m$ | $A = 6{,}9\,m^2$

KX **45**

	a)	b)	c)	d)
r	4 cm	1,2 cm	2,00 m	45,8 dm
μ	42°	118,4°	64°	60°
b	2,93 cm	2,48 cm	2,23 m	48 dm
A_S	5,86 cm²	1,49 cm²	2,23 m²	1098,3 dm²
u_S	10,93 cm	4,88 cm	6,23 m	139,6 dm

KX **46** **a)** 1 $A_{Ring} = \pi \cdot [R^2 - r^2] = \pi \cdot [(4\,cm)^2 - (2\,cm)^2] = \pi \cdot 12\,cm^2 \approx 37{,}7\,cm^2$

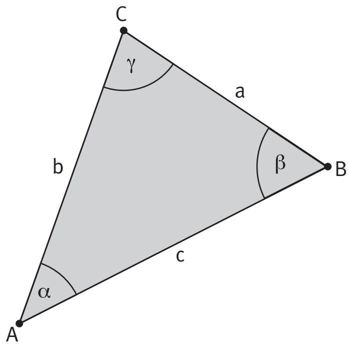
2 $A_{Ringstück} = \frac{3}{4}\pi \cdot [(4\,cm)^2 - (2\,cm)^2] = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 12\,cm^2 \approx 28{,}3\,cm^2$

b) Da das Ringstück aus 2 auf einem Grundkreis mit $\frac{3}{4}$ der Fläche des Grundkreises aus 1 besteht, gilt

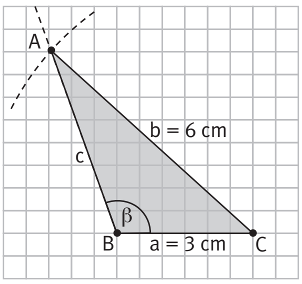
$$\frac{A_{Ringstück}}{A_{Ring}} = \frac{\frac{3}{4}\pi \cdot (R^2 - r^2)}{\pi \cdot (R^2 - r^2)} = \frac{3}{4}.$$

Kongruenzsätze für Dreiecke

KX **47** Allen Teilaufgaben liegt die nebenstehende Planfigur zugrunde.
Die Konstruktionsbeschreibungen können neben der hier angegebenen ausformulierten Version auch mithilfe mathematischer Zeichen angegeben werden.

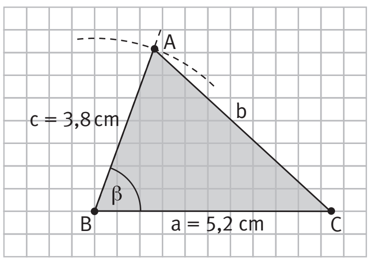


a) Kongruenzsatz SsW



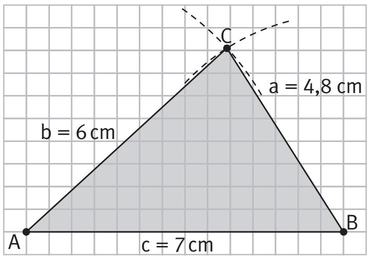
1. Zeichne die Strecke $\overline{BC}$ mit $a = 3\,cm$.
2. Trage den Winkel $\beta = 110°$ bei B an.
3. Der Schnittpunkt dieser Halbgeraden mit dem Kreis um C mit Radius $b = 6\,cm$ ist der Punkt A.

b) Kongruenzsatz SWS



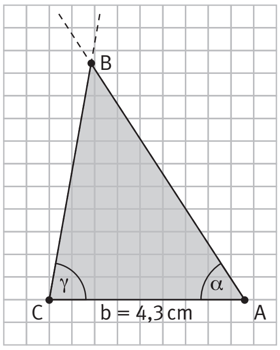
1. Zeichne die Strecke $\overline{BC}$ mit $a = 5{,}2\,cm$.
2. Trage den Winkel $\beta = 70°$ bei B an.
3. Der Schnittpunkt dieser Halbgeraden mit dem Kreis um B mit Radius $c = 3{,}8\,cm$ ist der Punkt A.

c) Kongruenzsatz SSS



1. Zeichne die Strecke $\overline{AB}$ mit c = 7 cm.
2. Trage einen Kreis um A mit dem Radius b = 6 cm und einen Kreis um B mit dem Radius a = 4,8 cm ein.
3. Der Schnittpunkt der beiden Kreise ist der Punkt C.

d) Kongruenzsatz WSW

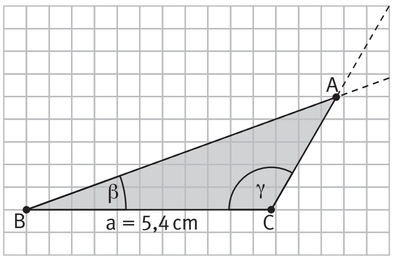


1. Zeichne die Strecke $\overline{CA}$ mit b = 4,3 cm.
2. Trage den Winkel $\gamma = 80°$ bei C und den Winkel $\alpha = 57°$ bei A ab.
3. Der Schnittpunkt dieser beiden Halbgeraden ist der Punkt B.

e) Kongruenzsatz WSW

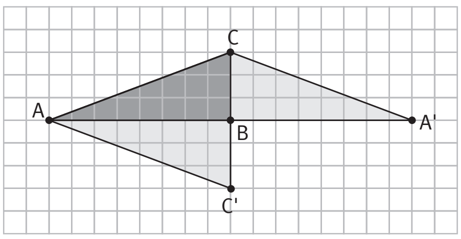
$\gamma = 3\alpha = 6\beta$ und $\alpha = 2\beta$

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Leftrightarrow 2\beta + \beta + 6\beta = 180° \Leftrightarrow \beta = 20°; \gamma = 120°; \alpha = 40°$



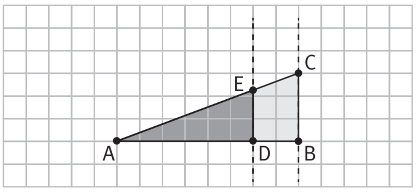
1. Zeichne die Strecke $\overline{BC}$ mit a = 5,4 cm.
2. Trage den Winkel $\beta = 20°$ bei B und den Winkel $\gamma = 120°$ bei C ab.
3. Der Schnittpunkt dieser beiden Halbgeraden ist der Punkt A.

KX **48 a)** Die Aussage ist falsch, wie man durch ein Gegenbeispiel zeigen kann:
Die beiden Dreiecke AA'C und AC'C setzen sich zusammen aus dem Dreieck ABC und einer Spiegelung des Dreiecks ABC an der Seite $\overline{BC}$ bzw. an der Seite $\overline{AB}$. Damit haben sie den gleichen Flächeninhalt und sind gleichschenklig, da $|\overline{AC}| = |\overline{A'C}| = |\overline{AC'}|$; sie sind jedoch nicht kongruent.



b) Die Aussage ist wahr, es ist der Kongruenzsatz WSW.

c) Die Aussage ist falsch: Die Dreiecke sind ähnlich, aber nicht zwingend kongruent zueinander. Gegenbeispiel sind zwei Dreiecke ABC und ADE, wobei D auf $\overline{AB}$ und E auf $\overline{AC}$ liegt und DE parallel zu BC ist: Die Winkel der beiden Dreiecke sind gleich groß, die Seitenlängen jedoch nicht – die Dreiecke sind nicht kongruent.



d) Die Aussage ist wahr, es ist der Kongruenzsatz SWS.

Zusammenhänge in Dreiecken

KX **49** **a)** $\beta = 180° - 70° = 110°$ $\quad\quad \alpha = \gamma = \frac{70°}{2} = 35°$

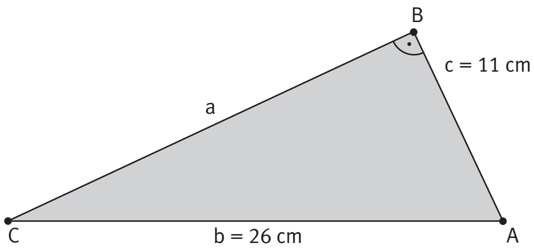
$\delta = 180° - 70° - 60° = 50°$

b) $\beta = 180° - 90° - 44° = 46°$ $\quad\quad \gamma = \frac{180° - 44°}{2} = 68°$

$\alpha = \gamma - \beta = 68° - 46° = 22°$

KX **50** **a)** wahr **b)** wahr **c)** falsch

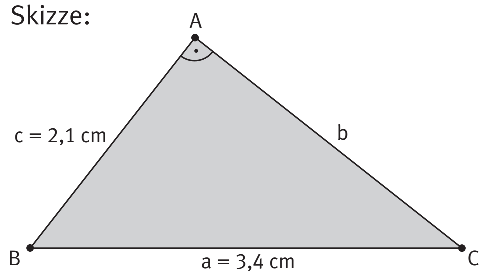
KX **51** **a)** Skizze:



Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 - c^2} = 23{,}6\,\text{cm}$

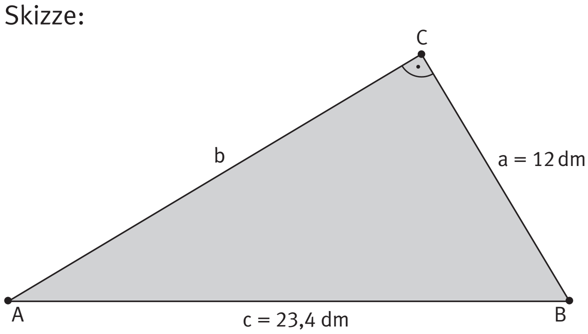
b) Skizze:



Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = 2{,}7\,\text{cm}$

c) Skizze:



Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = 20{,}1\,\text{dm}$

KX **52** Die Formeln für die Flächendiagonalen e_1, e_2 und e_3 sind eine direkte Anwendung des Satzes des Pythagoras. Für die Raumdiagonale gilt: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

a) $e_1 = 5{,}6\,\text{cm}$; $e_2 = 7{,}8\,\text{cm}$; $e_3 = 8{,}3\,\text{cm}$; $d = 9{,}0\,\text{cm}$

b) $e_1 = 60{,}1\,\text{m}$; $e_2 = 45{,}2\,\text{m}$; $e_3 = 75{,}0\,\text{m}$; $d = 75{,}1\,\text{m}$

KX **53** **a)** $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3{,}6\,\text{cm}}{8{,}5\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 25{,}1°$

$\beta = 90° - 25{,}1° = 64{,}9°$

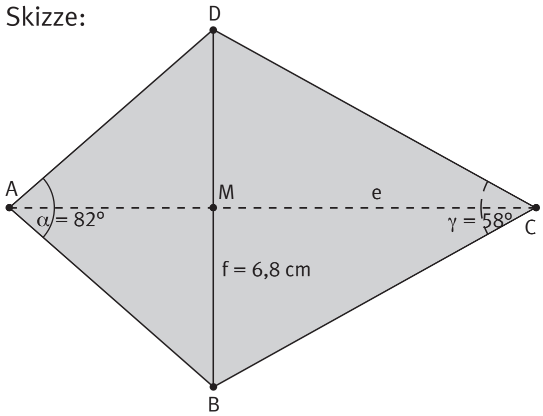
$\cos\alpha = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = c \cdot \cos\alpha = 8{,}5\,\text{cm} \cdot \cos 25{,}1° \approx 7{,}7\,\text{cm}$

b) $\sin\alpha = \frac{a}{b} = \frac{4\,\text{cm}}{8\,\text{cm}} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30°$

$\beta = 90° - 30° = 60°$

$\cos\alpha = \frac{c}{b} \Leftrightarrow c = b \cdot \cos\alpha = 8\,\text{cm} \cdot \cos 30° \approx 6{,}9\,\text{cm}$

KX **54** **a)** Skizze:



b) Der Schnittpunkt der Diagonalen (mit M bezeichnet) teilt das Drachenviereck in vier bei M rechtwinklige Teildreiecke.

Im Dreieck ABM gilt:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{f}{2}}{|AB|} \Rightarrow |AB| = \frac{f}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 5{,}2\text{ cm} = |AD|$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{|AM|}{|AB|} \Rightarrow |AM| = |AB| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 3{,}9\,\text{cm}$$

Im Dreieck BCM gilt:

$$\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{f}{2}}{|BC|} \Rightarrow |BC| = \frac{f}{2\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = 7{,}0\,\text{cm} = |CD|$$

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{|MC|}{|BC|} \Rightarrow |MC| = |BC| \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 6{,}1\,\text{cm}$$

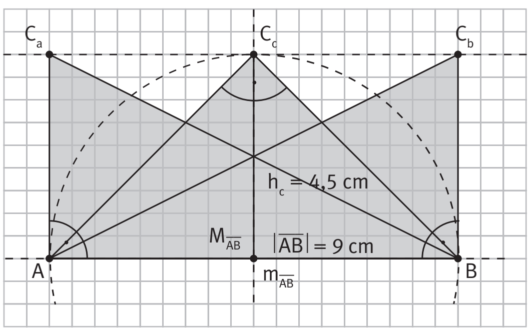
$e = |AM| + |MC| = 3{,}9\,\text{cm} + 6{,}1\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$

c) $A = \frac{1}{2}ef = \frac{1}{2} \cdot 6{,}8\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} = 34\,\text{cm}^2$

$u = 2 \cdot |AB| + 2 \cdot |BC| = 2 \cdot 5{,}2\,\text{cm} + 2 \cdot 7{,}0\,\text{cm} = 24{,}4\,\text{cm}$

Satz des Thales

KX **55**



Insgesamt gibt es drei Lösungen mit dem rechten Winkel in A, B oder C:
Der Thaleskreis über $\overline{AB}$ mit $|\overline{AB}| = 9\,\text{cm}$ schneidet die Parallele zu AB im Abstand von 4,5 cm in C_c.
Weitere Lösungen sind die beiden Dreiecke mit dem 90°-Winkel in A bzw. in B mit $|\overline{AC_a}| = h_c = 4{,}5\,\text{cm}$ bzw. mit $|\overline{BC_b}| = h_c = 4{,}5\,\text{cm}$.

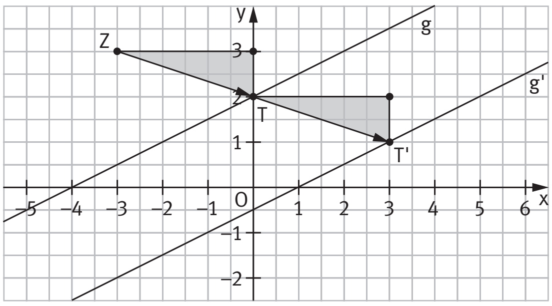
KX **56** **a)** $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CDB = 90°$, da A und D auf dem Thaleskreis über $\overline{BC}$ liegen.
$\gamma = \sphericalangle ACB = 180° - 90° - 37° = 53°$
$\beta = \sphericalangle CBA = 180° - 90° - 73° = 17°$
b) $\sphericalangle ACB = 90°$, da C auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$ liegt.
$\beta = \sphericalangle CBM = \frac{1}{2} \cdot (180° - 136°) = 22°$, da ΔMBC ein gleichschenkliges Dreieck ist.
$\alpha = \sphericalangle BAC = 180° - 90° - 22° = 68°$, da ΔABC ein rechtwinkliges Dreieck ist.

Zentrische Streckung

KX **57** **a)** A' (0|–3), B' (8|–1), C' (7|2) **b)** A' (7|6), B' (2|3,5), C' (9,5|1)
c) A' (6,5|3), B' (10,5|5), C' (4,5|7)

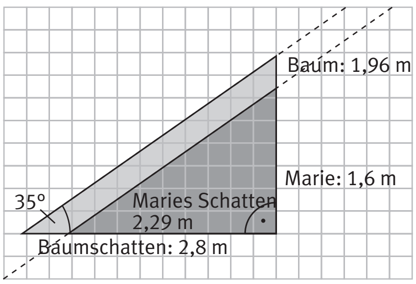
KX **58** $\overrightarrow{ZQ'} = k \cdot \overrightarrow{ZQ} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 - x_z \\ 5 - y_z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 - x_z \\ 5 - y_z \end{pmatrix}$
I $-x_Z = -2x_Z \Leftrightarrow x_Z = 0$
II $5 - y_Z = 4 - 2y_Z \Leftrightarrow y_Z = -1 \Rightarrow Z(0|-1)$

KX **59**



Man wählt einen beliebigen Punkt auf g und bildet ihn durch zentrische Streckung als Element von g' ab; hierfür bietet sich T (0|2) an, dessen Koordinaten aus der Geradengleichung von g ablesbar sind. Durch die zentrische Streckung von T (0|2) um das Zentrum Z (–3|3) mit k = 2 wird T auf T' (3|1) abgebildet. Die Steigungen von g und von g' sind gleich: $m_g = m_{g'} = 0,5$.
T' (3|1) in $y = 0,5x + t_{g'}$ einsetzen:
$1 = 0,5 \cdot 3 + t_{g'} \Leftrightarrow t_{g'} = -0,5 \Rightarrow g': y = 0,5x - 0,5$

KX **60** (Maßstab 1 : 50)



a) Der Baum ist 1,96 m groß.
b) $\frac{x}{1,6\,m} = \frac{2,8\,m}{1,96\,m} \Rightarrow x \approx 2,29\,m$
Der Schatten von Marie ist 2,29 m lang.

Strahlensätze

KX **61** **a)** c = 4 cm – b = 1 cm
$\frac{b}{b+c} = \frac{e}{e+f} \Leftrightarrow \frac{3\,cm}{4\,cm} = \frac{e}{6\,cm} \Leftrightarrow e = 4,5\,cm;\ f = 1,5\,cm$
b) $\frac{b}{b+c} = \frac{e}{e+f} \Leftrightarrow \frac{5\,cm}{8\,cm} = \frac{e}{e+4,5\,cm} \Leftrightarrow e = 7,5\,cm$
$\frac{e}{d} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{7,5\,cm}{d} = \frac{5\,cm}{2\,cm} \Leftrightarrow d = 3\,cm$
c) $\frac{b}{b+c} = \frac{e}{e+f} \Leftrightarrow \frac{2,5\,cm}{4,5\,cm} = \frac{e}{7,2\,cm} \Leftrightarrow e = 4\,cm$

KX **62** Mit dem Strahlensatz ergibt sich folgendes Verhältnis:

$\frac{x}{2\,m} = \frac{406\,m}{2{,}8\,m} \Leftrightarrow x = 290\,m$

Der Olympiaturm ist etwa 290 m hoch.

Vektoren

KX **63**

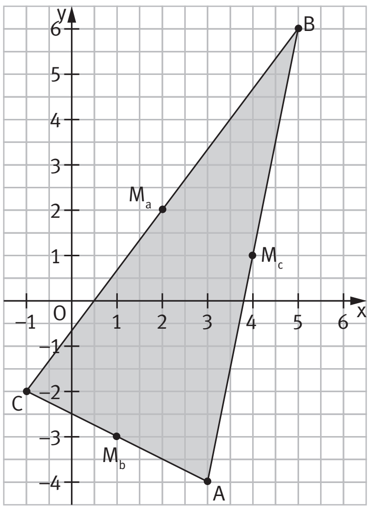
	a)	b)	c)
$\vec{v} = \overrightarrow{PP'}$	$\begin{pmatrix}-1{,}5\\6{,}5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$
Gegenvektor $\vec{v}^*$	$\begin{pmatrix}1{,}5\\-6{,}5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$
P (x | y)	(–1,5 | –2)	(2 | 1,5)	(1 | 0)
P' (x' | y')	(–3 | 4,5)	(–2 | 1,5)	(4 | 4)

KX **64** $x = -2$ und $y = 13$

KX **65** $M_a\left(\frac{5-1}{2}\middle|\frac{6-2}{2}\right) = M_a(2\,|\,2)$

$M_b\left(\frac{-1+3}{2}\middle|\frac{-2-4}{2}\right) = M_b(1\,|\,-3)$

$M_c\left(\frac{3+5}{2}\middle|\frac{-4+6}{2}\right) = M_c(4\,|\,1)$



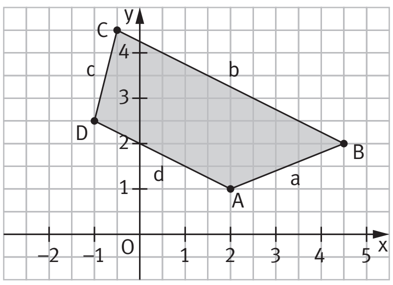
KX **66** $A_{ABCD} = A_{ABD} + A_{CDB}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4{,}5-2\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\1\end{pmatrix} = \vec{a}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-1-2\\2{,}5-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1{,}5\end{pmatrix} = \vec{d}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}-1-(-0{,}5)\\2{,}5-4{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}5\\-2\end{pmatrix} = \vec{c}$

$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}4{,}5-(-0{,}5)\\2-4{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2{,}5\end{pmatrix} = \vec{b}$



$A_{ABD} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}a_x & d_x\\a_y & d_y\end{vmatrix}\,FE = \frac{1}{2}\cdot(a_x\cdot d_y - a_y\cdot d_x)\,FE = \frac{1}{2}\cdot[2{,}5\cdot 1{,}5 - 1\cdot(-3)]\,FE = 3{,}375\,FE$

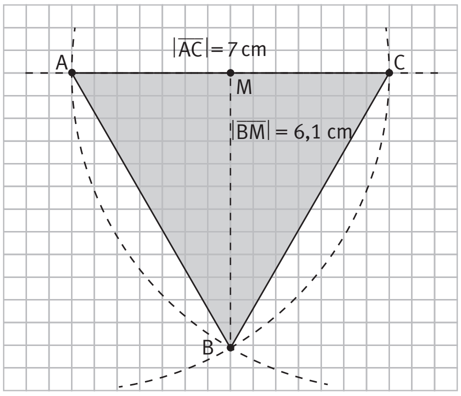
$A_{CDB} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}c_x & b_x\\c_y & b_y\end{vmatrix}\,FE = \frac{1}{2}\cdot(c_x\cdot b_y - c_y\cdot b_x)\,FE = \frac{1}{2}\cdot[(-0{,}5)\cdot(-2{,}5) - (-2)\cdot 5]\,FE = 5{,}625\,FE$

$A_{ABCD} = A_{ABD} + A_{CDB} = 3{,}375\,FE + 5{,}625\,FE = 9\,FE$

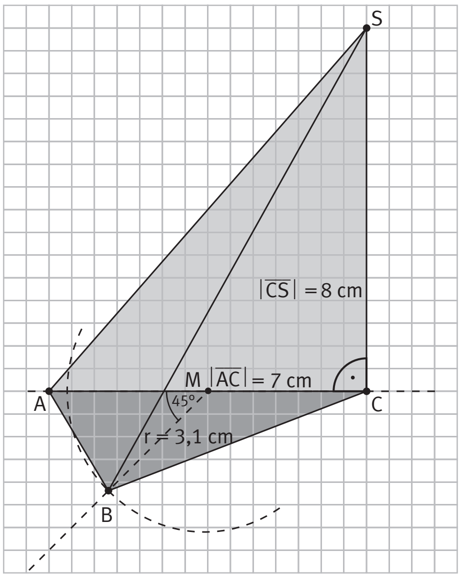
Es handelt sich um ein Trapez mit Flächeninhalt $A_{ABCD} = 9$ FE.

Darstellungen im Raum

KX **67**



Die Länge der Höhe $\overline{BM}$ beträgt im gleichseitigen Dreieck 6,1 cm und im Schrägbild 0,5 · 6,1 cm ≈ 3,1 cm.



Zuerst wird die Strecke $\overline{AC}$ mit $|\overline{AC}|$ = 7 cm gezeichnet, dazu der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AC}$.
Die Halbgerade b erhält man, indem man in M an AC 45° anträgt.
B ist der Schnittpunkt der Halbgeraden b mit dem Kreis um M mit Radius r = 3,1 cm.
Die Höhe $\overline{CS}$ mit $|\overline{CS}|$ = 8 cm wird senkrecht zu AC in C eingezeichnet.

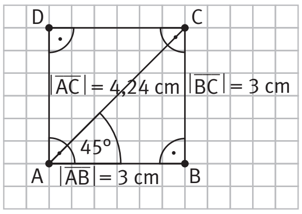
KX **68** **a)** $\overline{BH}$, $\overline{CE}$ und $\overline{DF}$ haben die gleiche Länge wie die Raumdiagonale $\overline{AG}$.

b) Die Dreiecke EHD und AHD sind kongruent zum Dreieck ADE:
Sie sind rechtwinklig bei H bzw. D und haben die Kathetenlängen 4 cm und 6 cm.

c) Die Dreiecke EGB, EGD und BDE sind kongruent zum Dreieck ACH:
Ihre Seitenlängen stimmen mit den Längen $|\overline{AC}|$, $|\overline{AH}|$ und $|\overline{CH}|$ in drei Seitenlängen überein.

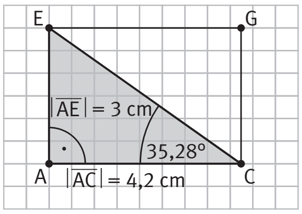
d) $|\overline{AC}| \approx 6{,}40$ cm $|\overline{AG}| \approx 8{,}77$ cm $|\overline{EN}| \approx 6{,}80$ cm $|\overline{MN}| \approx 6{,}50$ cm

KX **69 a)** und **b)**



Zeichne das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 3 cm.
Miss das Maß des Winkels ∢BAC und die Länge der Strecke $\overline{AC}$, dies ergibt:
∢BAC = 45°
$|\overline{AC}| = 4{,}24$ cm

c)



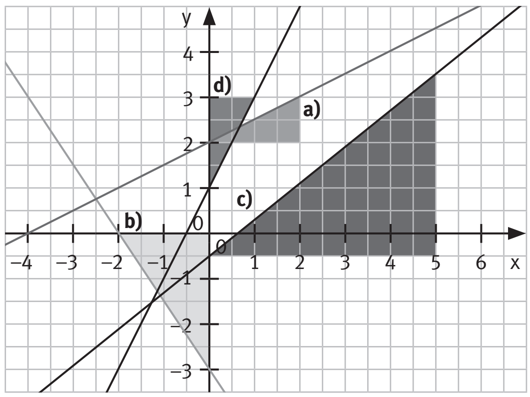
Zeichne das Rechteck ACGE (bzw. CAEG) mit den Seitenlängen $|\overline{AE}| = 3$ cm und $|\overline{AC}| = 4{,}2$ cm.
Miss das Maß des Winkels ECA (bzw. ACE), dies ergibt:
∢ECA = 35,28° (∢ACE = 35,28°)

KX **70** Da der Würfel in jeder der drei Dimensionen eine Symmetrieebene hat, müssen die Winkel zwischen den Raumdiagonalen maßgleich sein.

Startklar

Lineare Funktionen der Form y = mx + t darstellen, bestimmen und mit ihnen umgehen

K4/5 **1**



K4/5 **2** **a)** $y = \frac{1}{3}x + 1$ **b)** $y = -4x + 2$ **c)** $y = -\frac{1}{4}x + 2$ **d)** $y = 0{,}5x - 2$ **e)** $y = 4x - 2$

K5 **3** $P(4{,}5 \mid -2)$ liegt auf dem Graphen der Funktion b) $f\colon y = -3x + 11{,}5$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

K6/5 **4** **a)** $f\colon y = \frac{1}{2}x - 2$ **b)** $f\colon y = -\frac{1}{6}x + 2{,}8\overline{3}$ **c)** $f\colon y = \frac{4}{5}x + 2{,}6$

Verlauf der Graphen von linearen Funktionen beschreiben

K6/1 **5** Lisa hat nicht Recht, da die Funktionsgleichung in der Punkt-Steigungs-Form $y = m(x - x_P) + y_P$ angegeben ist und somit die Gerade nicht durch den Punkt $P(2 \mid -3)$ geht, sondern durch den Punkt $P(-2 \mid -3)$. Die Steigung der Geraden hat Lisa aber richtig angegeben.

K6/4 **6** **a)** Der Graph ist eine zur x-Achse parallele Gerade, die z. B. durch den Punkt $P(0 \mid 3)$ verläuft.
b) Der Graph ist eine zur y-Achse parallele Gerade, die z. B. durch den Punkt $P(-1{,}5 \mid 0)$ verläuft.
c) Der Graph ist eine fallende Gerade mit $m = -\frac{1}{3}$, die durch den Punkt $P(1 \mid -1)$ verläuft.

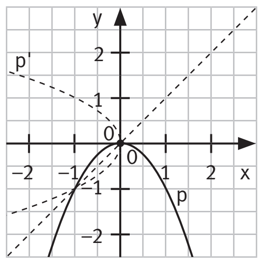
1 Quadratische Funktionen

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K6/4
- Der Bogen hat annähernd die Form einer Parabel, also einer achsensymmetrischen Kurve, deren Funktionswerte ein Maximum oder ein Minimum annehmen. (Bei genauerem Betrachten handelt es sich um eine „Kettenlinie". Unter dem perspektivischen Einfluss des Fotos ist jedoch „fast" eine Parabel zu sehen.)

K4/1
- Bei der Normalparabel kann es sich um den Graphen einer Funktion handeln, da jedem Element $x \in D$ genau ein Element $y \in W$ zugeordnet ist.



K3/5
- Möglicher Term für p: $y = -x^2$ oder $y = -0{,}5x^2$
  Hinweis: Tatsächlich handelt es sich um eine Kettenlinie, die mathematisch durch die Gleichung einer Hyperbelfunktion (Kosinus Hyperbolicus) beschreibbar ist.

K6/1
- Ein Unterschied besteht darin, dass jedes Element $y \in W$ einer linearen Funktion einem eindeutigen Element $x \in D$ zugeordnet ist, während beim Term $y = -x^2$ jedes $y \in W$ zwei Elementen $x \in D$ zugeordnet ist.

Ausblick

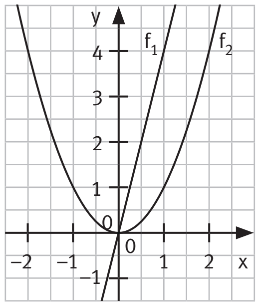
Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.
Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

1.1 Normalparabel

Entdecken

K4/5

x-Werte	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
f_1: y = 4x	–16	–12	–8	–4	0	4	8	12	16
f_2: y = x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16



K4/5

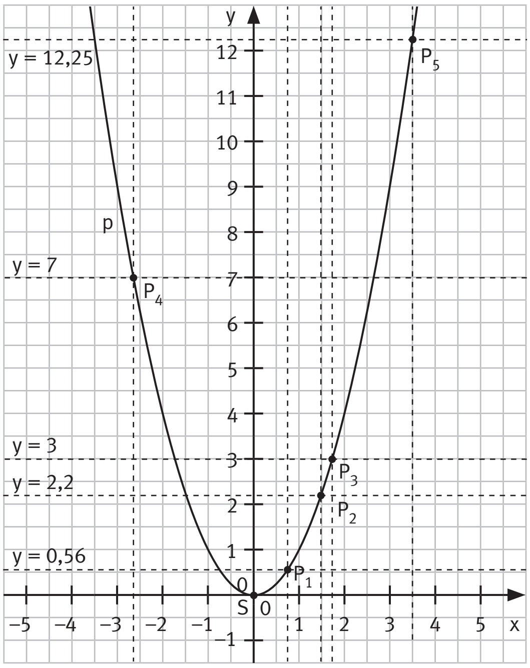
	f_1: y = 4x	f_2: y = x^2
Art der Funktion	lineare Funktion	quadratische Funktion
Verlauf des Graphen	linear, geradlinig	parabelförmig, gekrümmt

Nachgefragt

- K6/4 Beide Graphen haben ℝ als Definitionsmenge und sie verlaufen beide durch die Punkte (0|0) und (–1|–1).
- K1/4 Beim gespiegelten Graphen handelt es sich nicht um eine Funktion, weil nach der Spiegelung teilweise einem x-Wert zwei y-Werte zugewiesen werden. Die Zuordnung ist damit nicht mehr eindeutig, es liegt keine Funktion vor.

Aufgaben

K4/5 **1 a)**



P_1 (0,75|0,56)
P_2($\sqrt{2,2}$|2,2)
P_3($\sqrt{3}$|3)
P_4($-\sqrt{7}$|7)
P_5 (3,5|12,25)

b) $y = x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$, da $(-1)^2 = 1^2 = 1$

$y = x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$, da $(-2)^2 = 2^2 = 4$

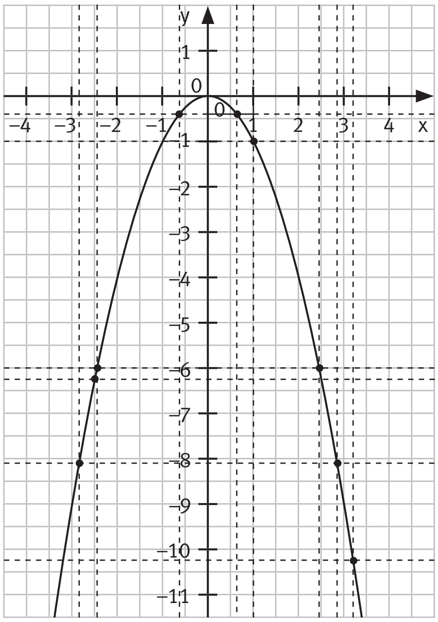
$y = x^2 = 6{,}25 \Rightarrow x = \pm\, 2{,}5$, da $(-2{,}5)^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$

K5 **2** $A \in p$, da $(-0{,}3)^2 = 0{,}09$ $B \in p$, da $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 0{,}5$

$C \in p$, da $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25$ $D \in p$, da $(10^3)^2 = (10^2)^3 = 100^3$

K6/1 **3** Danielas Aussage ist falsch. Die Form des Graphen gleicht zwar der Form einer Parabel, es wird jedoch keine quadratische Funktion dargestellt, da die Zuordnung nicht eindeutig ist; z. B. hat x = 1,7 zwei verschiedene y-Werte.

K4/5 **4**



a) $P_1\,(1\,|\,-1)$ $\quad -1^2 = -1$

$P_2\,(-2{,}5\,|\,-6{,}25)$ $\quad -(-2{,}5)^2 = -6{,}25$

$P_3\,(3{,}2\,|\,-10{,}24)$ $\quad -3{,}2^2 = -10{,}24$

b) $P_1\,(-0{,}63\,|\,-0{,}4)$ und $P_1'\,(0{,}63\,|\,-0{,}4)$

$-(-0{,}63)^2 = -0{,}63^2 \approx -0{,}4$

$P_2\,(-2{,}45\,|\,-6)$ und $P_2'\,(2{,}45\,|\,-6)$

$-(-2{,}45)^2 = -2{,}45^2 \approx -6$

$P_3\,(-2{,}85\,|\,-8{,}1)$ und $P_3'\,(2{,}85\,|\,-8{,}1)$

$-(-2{,}85)^2 = -2{,}85^2 \approx -8{,}1$

K2/4 **5** **a)** Dreiecke A_1BC und A_2BC mit $A_1\,(-3\,|\,9)$ und $A_2\,(-2\,|\,4)$

b) $A_1\,(-3\,|\,9)$; $A_2\,(-2\,|\,4)$; $B\,(1\,|\,1)$; $C\,(2\,|\,4)$

$$\overrightarrow{A_1B} = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 1-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

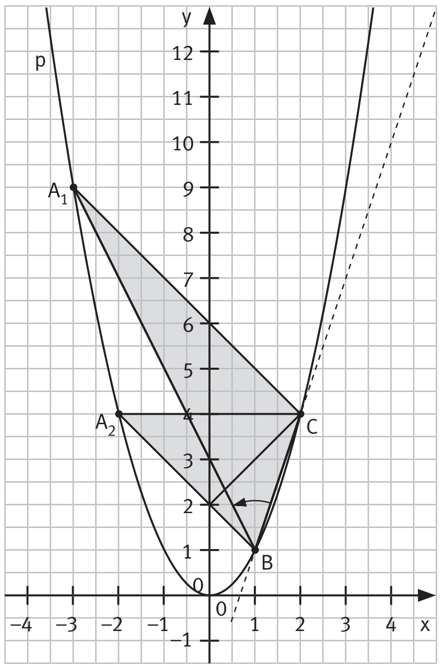
$$\overrightarrow{A_1C} = \begin{pmatrix} 2-(-3) \\ 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$A_{A_1BC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -8 & -5 \end{vmatrix} \text{ FE} = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot (-5) - (-8) \cdot (5)) \text{ FE}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (-20 + 40) \text{ FE} = \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ FE} = 10 \text{ FE}$$

$$\overrightarrow{A_2B} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

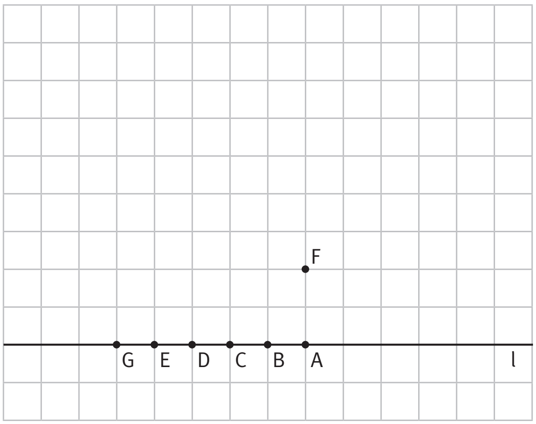
$$\overrightarrow{A_2C} = \begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

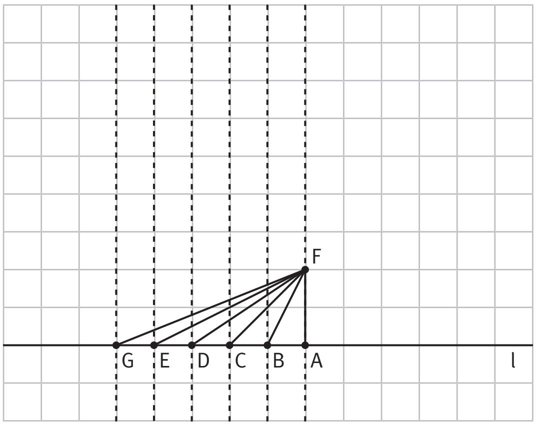
$$A_{A_2BC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \text{ FE} = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0 - (-3) \cdot 4) \text{ FE}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ FE} = 6 \text{ FE}$$

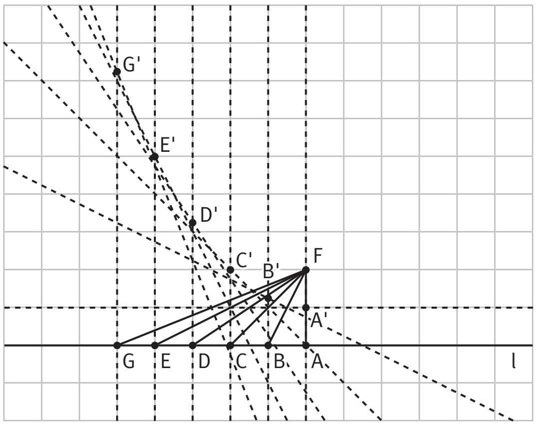


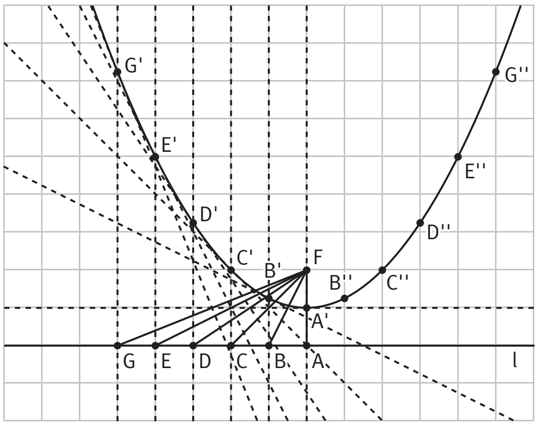
Wissen

K4/6

- 

- 

- 

- 

- B' liegt auf der Mittelsenkrechten von $\overline{BF}$, also ist B' von B und F gleich weit entfernt: $|\overline{B'B}| = |\overline{BF}|$. B' liegt auf dem Lot zu l durch B, deshalb ist $|\overline{B'B}|$ auch der Abstand des Punktes B' von l. Also hat B' von F und l den gleichen Abstand.
- Je größer der Abstand von F zu l ist, desto stärker ist die Parabel gestaucht (desto „breiter“ ist sie als die Normalparabel). Die Symmetrieachse der Parabel steht senkrecht auf l.

Entdecken

K4/3

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
p: $y = 5x^2$	80	45	20	5	0	5	20	45	80

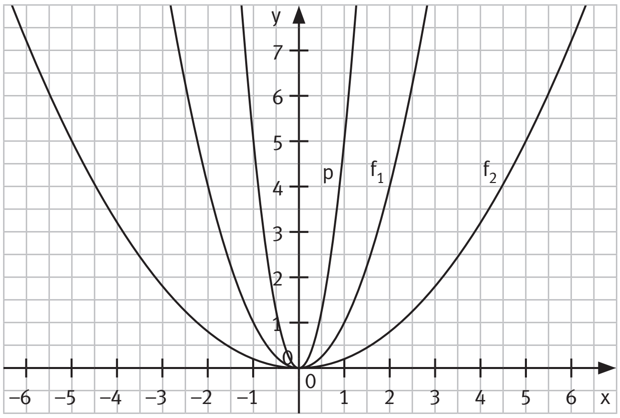
  Bei $x = 1{,}5$ wurde die Kugel aus einer Höhe von $5 \cdot 1{,}5^2\,m = 11{,}25\,m$ fallen gelassen, bei $x = 2$ aus einer Höhe von 20 m.

K4/5

- $D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}^+$

K4/6

- Die Funktion f_1: $y = x^2$ repräsentiert die Normalparabel.
  Die Parabel p mit dem Vorfaktor 5 ist „steiler" im Vergleich zur Normalparabel f_1.
  Die Parabel f_2 mit dem Vorfaktor $\frac{1}{5}$ ist „flacher" als die Parabel f_1.



Nachgefragt

K6/4

- Der Graph von $y = 0$ beschreibt eine Gerade mit Steigung $m = 0$ und y-Achsenabschnitt $t = 0$, also die x-Achse.

K1/4

- Bei der bezüglich der y-Achse symmetrischen Parabelfunktion gilt: $p(-x) = a \cdot (-x)^2 = ax^2 = p(x)$; d. h.: Die Funktionsgleichung ändert sich nicht.

Aufgaben

K4/5

1 **a)** f: $y = 1{,}2x^2$ Die Parabel ist gestreckt und nach oben geöffnet.

x	±3	±2	±1	0
y	10,8	4,8	1,2	0

b) f: $y = -2x^2$ Die Parabel ist gestreckt und nach unten geöffnet.

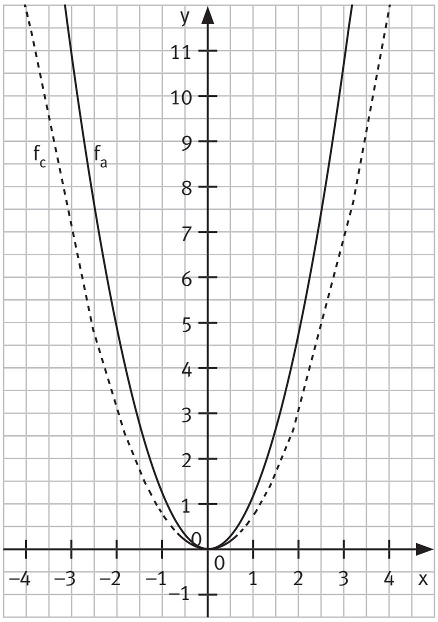
x	±2	±1,5	±1	±0,5	0
y	–8	–4,5	–2	–0,5	0

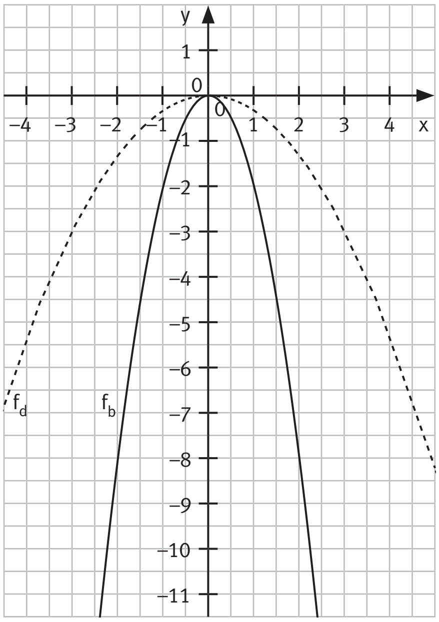
c) f: $y = 0{,}75x^2$ Die Parabel ist gestaucht und nach oben geöffnet.

x	±3	±2	±1	0
y	6,75	3	0,75	0

d) f: $y = -\frac{1}{3}x^2$ Die Parabel ist gestaucht und nach unten geöffnet.

x	±4	±3,5	±3	±2,5	±2	±1,5	±1	±0,5	0
y	–5,33	–4,08	–3,00	–2,08	–1,33	–0,75	–0,33	–0,08	0,00





K1/4 **2** A – p_3 B – p_5 C – p_4 D – p_1 E – p_2

K5 **3** $y = ax^2 \Leftrightarrow a = y : x^2$

a) $a = -3$ **b)** $a = -1{,}5$ **c)** $a = -2{,}75$ **d)** $a = 1$ **e)** $a = 0{,}8$

K6/1 **4** **a)** Die Parabel der Funktion p: $y = 0{,}5x^2$ ist gestaucht und nach oben geöffnet, sie hat ihren Scheitelpunkt im Ursprung.

Einsetzen des x-Wertes von P (–1,5 | 1,25) in die Funktionsgleichung ergibt:

$y = 0{,}5 \cdot (-1{,}5)^2 = 1{,}125$

Für x = –1,5 erhält man den Parabelpunkt Q (–1,5 | 1,125).

Der Vergleich der y-Werte von P und Q ergibt:

$y_P = 1{,}25 > 1{,}125 = y_Q$

Damit liegt P oberhalb von Q und oberhalb der nach oben geöffneten Parabel.

b) Der x-Wert von P wird in die Funktionsgleichung eingesetzt und der erhaltene Wert mit dem y-Wert von P verglichen.

1 $y = -\frac{3}{8} \cdot 4{,}4^2 = -7{,}26 \boxed{<} 7{,}26 = y_P$ $\Rightarrow$ P liegt oberhalb des Graphen.

2 $y = -2{,}5 \cdot (-4{,}8)^2 = -57{,}6 \boxed{>} -57{,}8 = y_P$ $\Rightarrow$ P liegt unterhalb des Graphen.

3 $y = 0{,}2 \cdot (-1{,}5)^2 = 0{,}45 \boxed{=} y_P$ $\Rightarrow$ P liegt auf dem Graphen.

4 $y = 3{,}2 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}8 \boxed{>} -0{,}8 = y_P$ $\Rightarrow$ P liegt unterhalb des Graphen.

K5 **5** **a)** $y_A = 12$ $x_B = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx \pm 1{,}15$ **b)** $x_A = \pm 3{,}5$ $y_B = -1{,}6$

Verkehr

K6/3

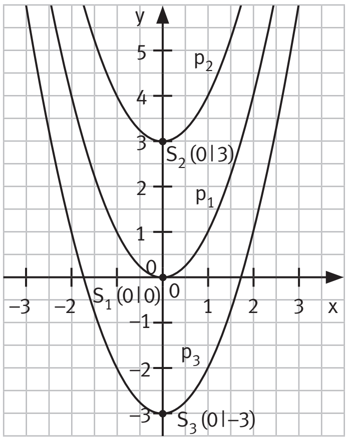
- Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:
  Der Reaktionsweg ist die Länge der Strecke, die nach einem Impuls zurückgelegt wird, bevor gebremst wird. Beeinflusst wird der Reaktionsweg z. B. durch Ablenkung, Stress, Müdigkeit, … des Fahrers. Der Bremsweg ist die Länge der Strecke, die ein Auto nach Betätigen der Bremse bis zum Stillstand zurücklegt.
-

Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$	30	50	60	80	100
Reaktionsweg in m	9,00	15,00	18,00	24,00	30,00
Bremsweg in m	6,75	18,75	27,00	48,00	75,00
Anhalteweg in m	15,75	33,75	45,00	72,00	105,00

- Die Schüler machen sich anhand der praktischen Übung die unterschiedlichen Längen von Reaktionsweg, Bremsweg und Anhalteweg bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewusst.

Entdecken

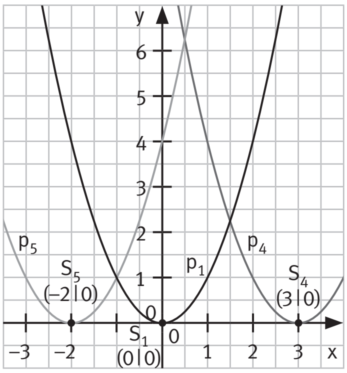
K4/6

■ 

K4/6

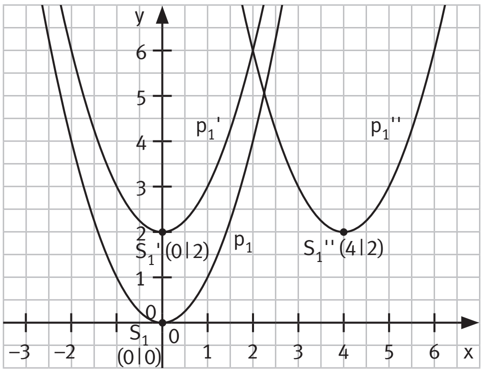
■ Der Graph zu p_2 ist im Vergleich zum Graphen von p_1 um 3 LE in positive y-Richtung („nach oben") verschoben worden. Die y-Koordinate des Scheitelpunktes hat sich entsprechend verändert.
Der Graph zu p_3 ist im Vergleich zum Graphen von p_1 um 3 LE in negative y-Richtung („nach unten") verschoben worden. Die y-Koordinate des Scheitelpunktes hat sich entsprechend verändert.

K4/6

■ 

Der Graph zu p_4 ist im Vergleich zum Graphen von p_1 um 3 LE in positive x-Richtung („nach rechts") verschoben worden.
Die x-Koordinate des Scheitelpunktes hat sich entsprechend verändert.
Der Graph zu p_5 ist im Vergleich zum Graphen von p_1 um 2 LE in negative x-Richtung („nach links") verschoben worden.
Die x-Koordinate des Scheitelpunktes hat sich entsprechend verändert.

K4/6

■ 

Der Graph von p_1' ist im Vergleich zum Graphen von p_1 um 2 LE in positive y-Richtung verschoben worden. Daraufhin wurde der Graph von p_1' um 4 LE in positive x-Richtung verschoben. Selbiges gilt jeweils für den Scheitelpunkt der Parabeln.

p_1': $y = x^2 + 2$; p_1'': $y = (x - 4)^2 + 2$

K4/6

■ Es ist festzustellen, dass alle Operationen unabhängig von a ausgeführt werden können. Mit verändertem Koeffizienten a ändert sich nur der Öffnungsfaktor der Parabel, nicht aber die Verschiebungen.

Nachgefragt

K6/1

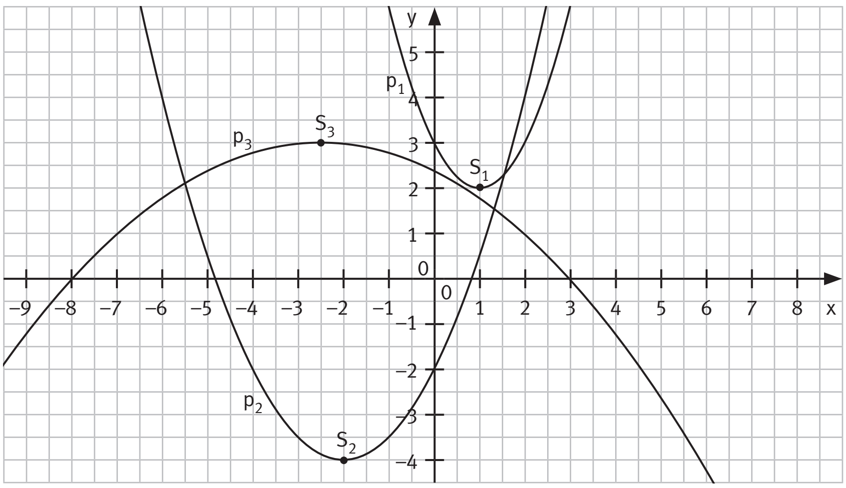
- Die nach oben geöffnete Parabel p hat ihren Scheitelpunkt im Ursprung, wo sie ihre einzige Nullstelle hat. Bei der nach oben entlang der y-Achse verschobenen Parabel p' wird insbesondere auch der Scheitelpunkt (das Minimum der Parabel) nach oben verschoben, p' besitzt daher keine Nullstelle. Bei der nach unten entlang der y-Achse verschobenen Parabel p'' wird auch der Scheitelpunkt nach unten verschoben, die nach oben geöffnete Parabel p'' besitzt daher zwei Nullstellen.

K1/4

- Jeder verschobenen Parabel liegt eine Funktionsgleichung p: $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ zugrunde; diese ordnet jedem Element $x \in \mathbb{R}$ genau ein Element $y \in$ p zu. Daher schneidet die Parabel jede Gerade $x = x_0$ in genau einem Punkt. Dies gilt insbesondere für die mit $x = 0$ beschriebene y-Achse. Der Schnittpunkt der y-Achse mit der Parabel p ist $(0 \,|\, ax_S{}^2 + y_S)$.

Aufgaben

K4/5 **1** **a)** bis **c)**

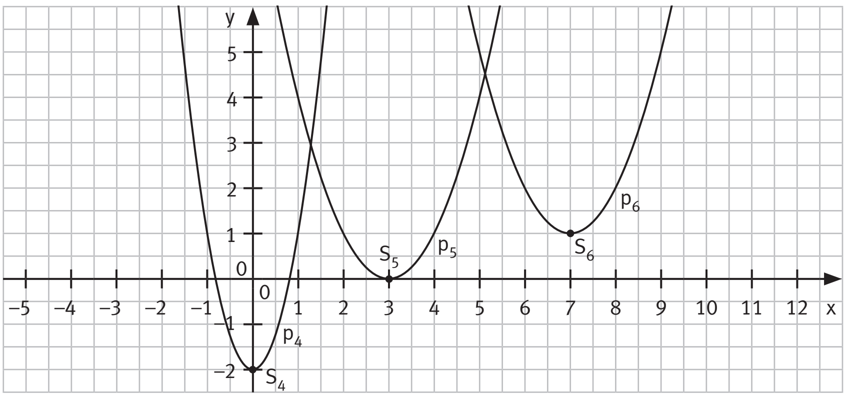


$S_1\,(1\,|\,2)$
$W_1 = \{y \,|\, y \geq 2\}$

$S_2\,(-2\,|\,-4)$
$W_2 = \{y \,|\, y \geq -4\}$

$S_3\,(-2{,}5\,|\,3)$
$W_3 = \{y \,|\, y \leq 3\}$

d) bis **f)**

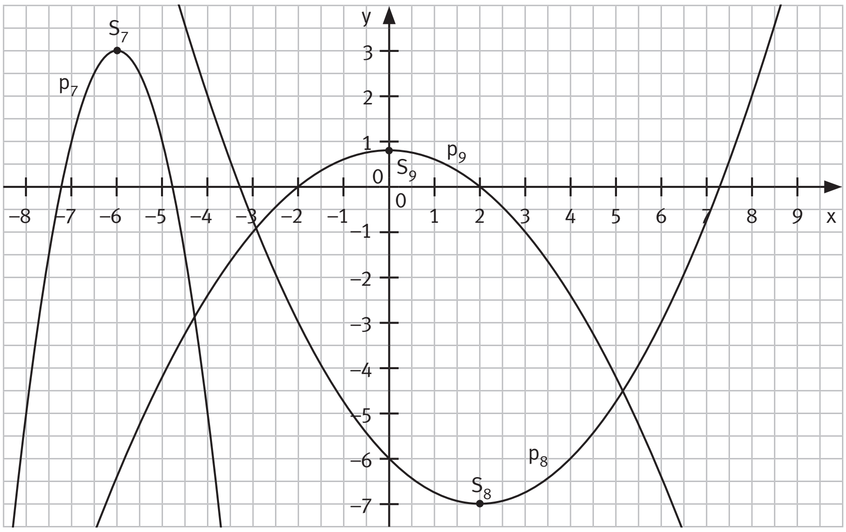


$S_4\,(0\,|\,-2)$
$W_4 = \{y \,|\, y \geq -2\}$

$S_5\,(3\,|\,0)$
$W_5 = \{y \,|\, y \geq 0\}$

$S_6\,(7\,|\,1)$
$W_6 = \{y \,|\, y \geq 1\}$

g) bis **i)**

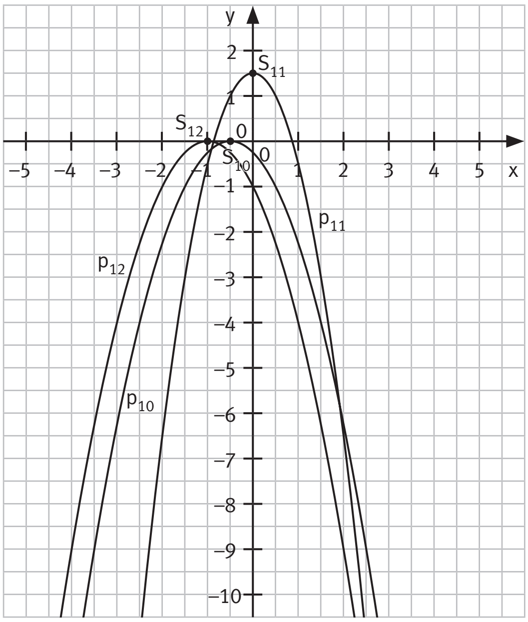


$S_7(-6|3)$
$W_7 = \{y | y \leq 3\}$

$S_8(2|-7)$ mit p_8:
$y = 0{,}25 \cdot (x-2)^2 - 7$
$W_8 = \{y | y \geq -7\}$

$S_9(0|0{,}8)$ mit p_9:
$y = -0{,}2x^2 + 0{,}8$
$W_9 = \{y | y \leq 0{,}8\}$

j) bis **l)**



$S_{10}(-0{,}5|0)$
$W_{10} = \{y | y \leq 0\}$

$S_{11}(0|1{,}5)$
$W_{11} = \{y | y \leq 1{,}5\}$

$S_{12}(-1|0)$
$W_{12} = \{y | y \leq 0\}$

K4/5 **2**

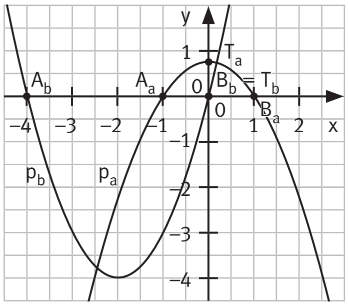
$S_1(0\|1)$	p_1: $y = x^2 + 1$	$W = \{y \| y \geq 1\}$	Symmetrieachse: $x = 0$
$S_2(-1\|0)$	p_2: $y = (x+1)^2$	$W = \{y \| y \geq 0\}$	Symmetrieachse: $x = -1$
$S_3(0\|4)$	p_3: $y = -x^2 + 4$	$W = \{y \| y \leq 4\}$	Symmetrieachse: $x = 0$
$S_4(2\|1{,}5)$	p_4: $y = (x-2)^2 + 1{,}5$	$W = \{y \| y \geq 1{,}5\}$	Symmetrieachse: $x = 2$
$S_5(3\|1)$	p_5: $y = -(x-3)^2 + 1$	$W = \{y \| y \leq 1\}$	Symmetrieachse: $x = 3$

K5 **3** **a)** $y = 0{,}5 \cdot (x-1)^2 + 2$ **b)** $y = -(x+3)^2 + 7$ **c)** $y = -3 \cdot (x-0{,}5)^2 - 3{,}5$
d) $y = 0{,}25x^2 + 2$ **e)** $y = 7 \cdot (x+4{,}5)^2 - 2$ **f)** $y = -\frac{2}{3} \cdot (x-8{,}2)^2$

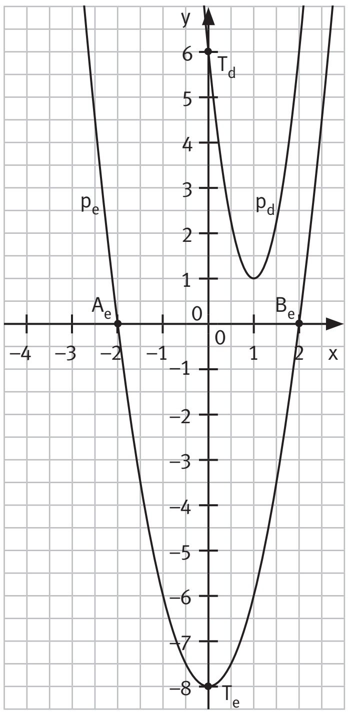
K4/5 **4** Die Schnittpunkte mit der x-Achse seien $A(x_A|0)$ und $B(x_B|0)$, der Schnittpunkt mit der y-Achse sei $T(0|x_T)$.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
A	(–1|0)	(–4|0)	(–2,5|0)	/	(–2|0)	(–2|0)
B	(1|0)	(0|0)	(2,5|0)		(2|0)	(3,2|0)
T	(0|0,75)	(0|0)	(0|18,75)	(0|6)	(0|–8)	(0|16)

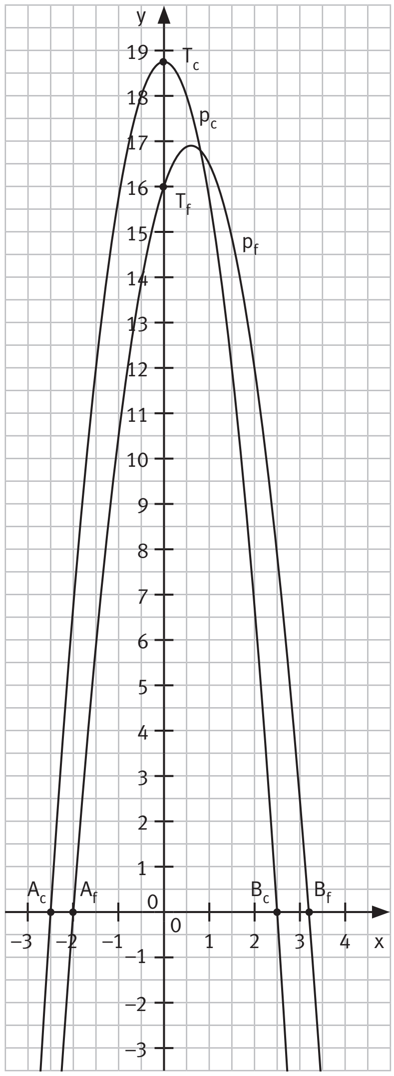
a) und **b)**



d) und **e)**



c) und **f)**



K 5 **5** Der Graph der Funktion p ist symmetrisch zur y-Achse, damit ist $x_S = 0$, $y_S = y - 0{,}25x^2$.

a) S (0|2) **b)** S (0|3,75) **c)** S (0|–4) **d)** S (0|0) **e)** S (0|–2,0625)

K 1/4 **6** Die Funktionsgleichung der an der x-Achse gespiegelten und verschobenen Normalparabel mit Scheitel S (6|–3) lautet:

p: $y = -(x-6)^2 - 3$

Für $y = -7$ gilt: $-(x-6)^2 - 3 = -7 \Leftrightarrow (x-6)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 6 = \pm 2 \Leftrightarrow x_1 = 4$; $x_2 = 8$

Die x-Koordinaten von P_1 und P_2 sind $x_1 = 4$ und $x_2 = 8$.

K 6/1 **7** **a)** Valentin hat Recht. Ein Produkt hat genau dann den Wert null, wenn einer seiner Faktoren den Wert null hat; damit kann er im vorliegenden Fall die Nullstellen direkt ablesen:
Nullstellen der Funktion p: $(x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ oder $x = 3$

b) 1 $x_1 = -2$; $x_2 = 2$ 2 $x = 1$ 3 $x = -5$

c) Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.: $y = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}^+$ oder $y = -x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}^-$

K 5 **8** **a)** $7 = a(-2+1)^2 + 3 \Leftrightarrow a = 4$

b) $-20 = -2(-1-2)^2 - c \Leftrightarrow c = 2$

c) $\frac{7}{4} = \frac{1}{3}(-2{,}5+5)^2 + c \Leftrightarrow c = \frac{21-25}{12} = -\frac{1}{3}$

d) $34{,}5 = 9a - 1{,}5 \Leftrightarrow a = 4$

K5 **9** Zur Ermittlung von x_S werden die x- und y-Koordinaten von B in die Gleichung $y = (x - x_S)^2$ eingesetzt; durch Faktorisieren erhält man (bis zu) zwei Lösungen für x_S bzw. für $S(x_S|0)$ und damit die Funktionsgleichungen der verschobenen Parabel.

a) $1 = (2 - x_s)^2 \Leftrightarrow 0 = x_s^2 - 4x_s + 3 \Leftrightarrow (x_s - 3)(x_s - 1) = 0 \Rightarrow x_s = 3$ oder $x_s = 1$
$\Rightarrow$ f: $y = (x - 3)^2$ mit $S(3|0)$ oder f: $y = (x - 1)^2$ mit $S(1|0)$

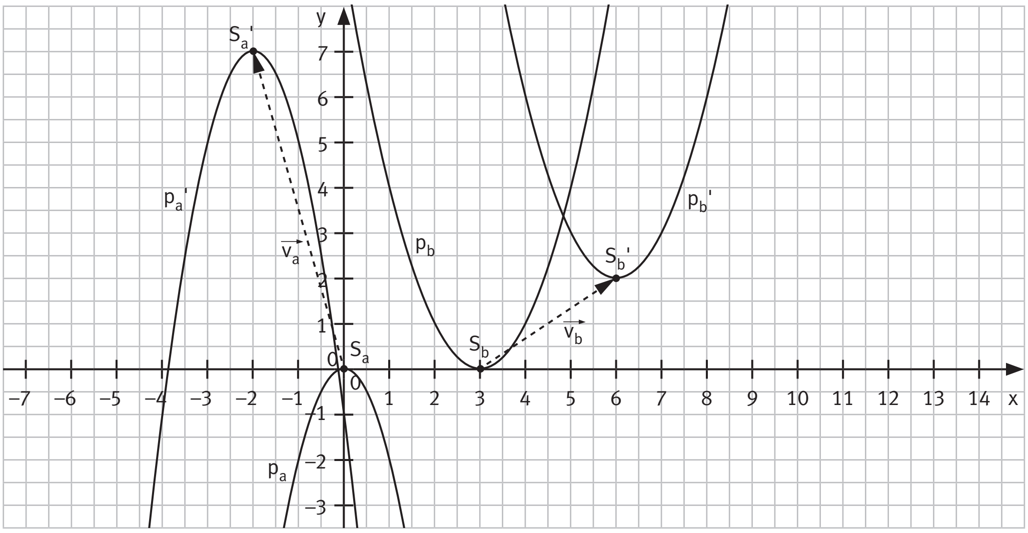
b) $4 = (0 - x_s)^2 \Leftrightarrow 4 = x_s^2 \Rightarrow x_s = -2$ oder $x_s = 2$
$\Rightarrow$ f: $y = (x + 2)^2$ mit $S(-2|0)$ oder f: $y = (x - 2)^2$ mit $S(2|0)$

c) $16 = (2 - x_s)^2 \Leftrightarrow 0 = x_s^2 - 4x_s - 12 \Leftrightarrow (x_s + 2)(x_s - 6) = 0 \Rightarrow x_s = -2$ oder $x_s = 6$
$\Rightarrow$ f: $y = (x + 2)^2$ mit $S(-2|0)$ oder f: $y = (x - 6)^2$ mit $S(6|0)$

d) $9 = (1 - x_s)^2 \Leftrightarrow 0 = x_s^2 - 2x_s - 8 \Leftrightarrow (x_s + 2)(x_s - 4) = 0 \Rightarrow x_s = -2$ oder $x_s = 4$
$\Rightarrow$ f: $y = (x + 2)^2$ mit $S(-2|0)$ oder f: $y = (x - 4)^2$ mit $S(4|0)$

e) $1 = (-3 - x_s)^2 \Leftrightarrow 0 = x_s^2 + 6x_s + 8 \Leftrightarrow (x_s + 2)(x_s + 4) = 0 \Rightarrow x_s = -2$ oder $x_s = -4$
$\Rightarrow$ f: $y = (x + 2)^2$ mit $S(-2|0)$ oder f: $y = (x + 4)^2$ mit $S(-4|0)$

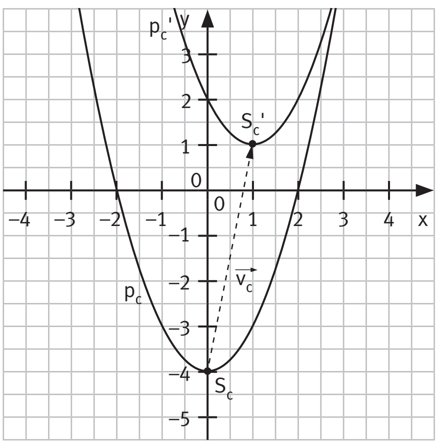
K5/4 **10** **a)** und **b)**

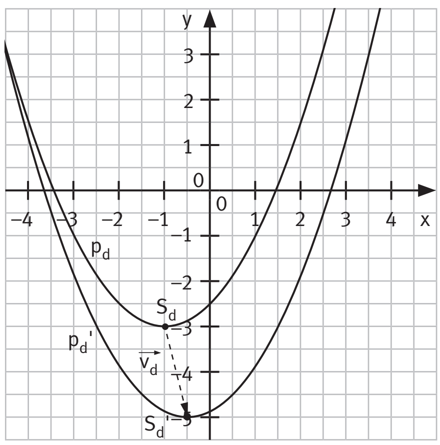


p_a: $y = -2x^2$ $\quad S_a(0|0) \xrightarrow{\vec{v_a} = \binom{-2}{7}} S_a'(-2|7) \quad \Rightarrow p_a'$: $y = -2 \cdot (x + 2)^2 + 7$

p_b: $y = (x - 3)^2$ $\quad S_b(3|0) \xrightarrow{\vec{v_b} = \binom{3}{2}} S_b'(6|2) \quad \Rightarrow p_b'$: $y = (x - 6)^2 + 2$

c) und **d)**

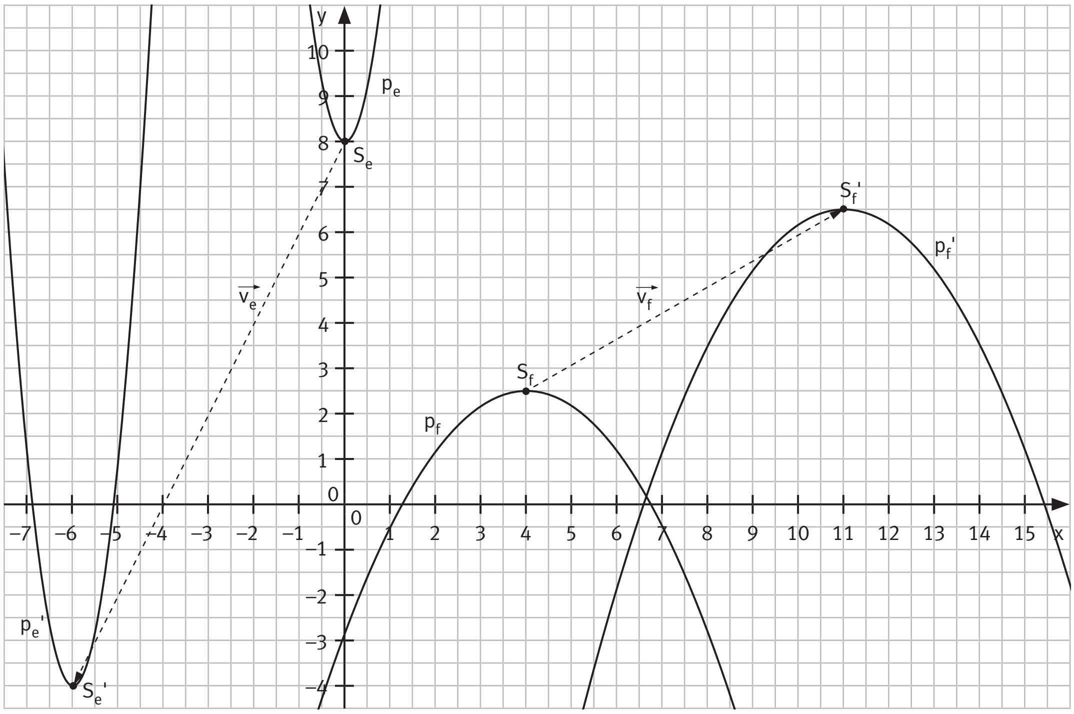




p_c: $y = x^2 - 4$ $\quad S_c(0|-4) \xrightarrow{\vec{v_c} = \binom{1}{5}} S_c'(1|1) \quad \Rightarrow p_c'$: $y = (x - 1)^2 + 1$

p_d: $y = 0{,}5 \cdot (x + 1)^2 - 3$ $\quad S_d(-1|-3) \xrightarrow{\vec{v_d} = \binom{0{,}5}{-2}} S_d'(-0{,}5|-5) \quad \Rightarrow p_d'$: $y = 0{,}5 \cdot (x + 0{,}5)^2 - 5$

e) und **f)**



p_e: $y = 5x^2 + 8$ $\quad S_e(0|8) \xrightarrow{\vec{v_e} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \end{pmatrix}} S_e'(-6|-4)$ $\quad \Rightarrow p_e'$: $y = 5(x+6)^2 - 4$

p_f: $y = -\frac{1}{3} \cdot (x-4)^2 + 2{,}5$ $\quad S_f(4|2{,}5) \xrightarrow{\vec{v_f} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}} S_f'(11|6{,}5)$ $\quad \Rightarrow p_f'$: $y = -\frac{1}{3} \cdot (x-11)^2 + 6{,}5$

K1/6

11 Jeder Graph einer quadratischen Funktion ist zur Geraden, die durch den Scheitelpunkt verläuft und senkrecht zur x-Achse ist, achsensymmetrisch. Daher existieren zu jedem $y \in W$ (außer für y_S) jeweils zwei Elemente $x \in D$.

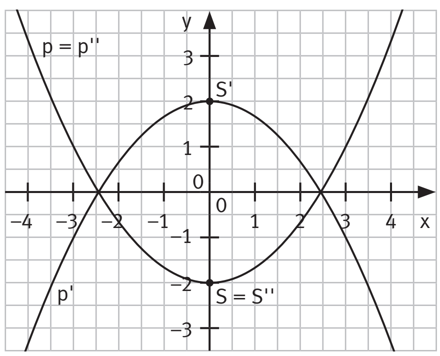
Da die Funktionswerte von p für $x = 2$ und $x = 9$ (bzw. für $x = -2{,}5$ und $x = 4{,}5$) gleich sind, muss der x-Wert des Scheitelpunkts genau zwischen $x = 2$ und $x = 9$ (zwischen $x = -2{,}5$ und $x = 4{,}5$) liegen;
d. h.: $x_s = 5{,}5$, $y_S = 0$ und $S(5{,}5|0)$ ($x_s = 1$, $y_S = 0$ und $S(1|0)$).
Für alle $y \in W$ der Funktion p: $y = (x - 5{,}5)^2$ (bzw. p: $y = (x-1)^2$) gilt: $y \geq 0$
Damit hat p für $x = x_s = 5{,}5$ ($x = x_s = 1$) mit $y = y_S = 0$ den kleinsten Funktionswert.

K5

12 Punkt … liegt auf dem Graphen der Funktionsgleichung …
A – 1 B – 2 und 5 C – 2 und 4 D – 3 E – 2 F – 5 G – 4

K5/4

13



Die Spiegelung des Graphen der Funktion p an der x-Achse ergibt:
p': $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$
Die Spiegelung des Graphen der Funktion p an der y-Achse ergibt:
p'' = p: $y = \frac{1}{3}x^2 - 2$

K6/5 **14 a)** Durch Einsetzen von x_P in die Funktionsgleichung von p erhält man einen y-Wert y_Q. Anschließend vergleicht man y_P mit y_Q. Hierbei stellt man folgende drei Fälle fest:
$y_Q = y_P$, d. h.: P liegt auf dem Graphen von p;
$y_Q < y_P$, d. h.: P liegt oberhalb des Graphen von p;
$y_Q > y_P$, d. h.: P liegt unterhalb des Graphen von p.
b) $p(-3) = 29 > 20 = y_P$, d. h.: P liegt unterhalb des Graphen von p.

K6/5 **15** Leanders Vermutungen sind falsch:
Eine Parallele zur x-Achse hat für jedes Element $x \in \mathbb{R}$ denselben Abstand zur x-Achse, sie ist eine Gerade mit der Funktionsgleichung g: $y = d$, $d \in \mathbb{R}$. Die Funktion f dagegen ist eine quadratische Funktion, ihr Graph hat für verschiedene $x \in \mathbb{R}$ verschiedene Abstände zur x-Achse, z. B.: $f(0) = 2 \neq f(10) = 2{,}0001 \neq f(-1000) = 1$. Wegen $a = 0{,}000001$ ist der Graph der Funktion f gegenüber einer Normalparabel sehr stark gestaucht.
Aus den gleichen Gründen ist auch der Graph der Funktion h keine Parallele zur y-Achse: Wegen $a = 5555$ ist die Parabel gegenüber einer Normalparabel so stark gestreckt, dass sie bei Betrachtung eines kleinen Ausschnitts wie eine Parallele zur y-Achse wirken kann. Es gilt jedoch:
$h(0) = 5500 \neq h(0{,}5) = 1333{,}75 \neq h(1) = -55$; d. h.: Für jedes Element $y \geq -55$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit: $h(x) = y$. Damit ist h nicht eine zur y-Achse parallele Gerade mit g: $x = e$; $e \in \mathbb{R}$.

K5 **16**

a)	P: $f(2) = 5$	Q: $f(-2) = 21 \neq 23$	$\Rightarrow$ P liegt auf der Parabel, Q nicht.
b)	P: $f(3) = 25$	Q: $f(11) = 81$	$\Rightarrow$ P und Q liegen auf der Parabel.
c)	P: $f(-4) = -67 \neq 67$	Q: $f(6{,}5) = -172 \neq -17{,}2$	$\Rightarrow$ P und Q liegen nicht auf der Parabel.
d)	P: $f(-3) = 111{,}5 \neq 11$	Q: $f(2) = 6{,}5$	$\Rightarrow$ Q liegt auf der Parabel, P nicht.

K4/6 **17 a)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$
b) Die Darstellung vermittelt den Eindruck, als sei der Graph von f breiter als der Graph von p. Dieser Eindruck entsteht dadurch, dass man einen größeren Teil von f sieht als von p.

K5 **18 a)** $\vec{v'} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 8 \end{pmatrix}$ **b)** $S_{p'}(-2\,|\,-3{,}5) \xrightarrow{\vec{v'} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 8 \end{pmatrix}} S_p(-6{,}5\,|\,4{,}5)$ **c)** p: $y = -1{,}5 \cdot (x + 6{,}5)^2 + 4{,}5$

K6/1 **19 a)** Nein, beide Nullstellen reichen nicht aus, um den Funktionsterm der nicht-gestauchten und nicht-gestreckten Parabel anzugeben: Auch wenn die Form der Parabel und die Nullstellen bekannt sind, weiß man noch nicht, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist. Der Funktionswert mit den Nullstellen x_1 und x_2 ist entweder p_1: $y = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ oder p_2: $y = -(x - x_1) \cdot (x - x_2)$.
b) p_1: $y = (x + 4) \cdot x \quad \Leftrightarrow y = x^2 + 4x + 4 - 4 \quad \Leftrightarrow y = (x + 2)^2 - 4 \quad S_1(-2\,|\,-4)$
p_2: $y = -(x + 4) \cdot x \quad \Leftrightarrow y = -(x^2 + 4x + 4 - 4) \quad \Leftrightarrow y = -(x + 2)^2 + 4 \quad S_2(-2\,|\,4)$

Entdecken

K4/5
- $p: y = (x-2)^2$

K1/6
- Multipliziert man den obigen Term aus, erhält man die Funktion $p: y = x^2 - 4x + 4$.

K6/1
- Im Folgenden werden die Gleichungen in Scheitelform in die Form $y = ax^2 + bx + c$ gebracht und danach mit den Gleichungen $y = 2x^2 + b + c$ verglichen.
  $y = 2(x+3)^2 - 1 = 2x^2 + 12x + 17$ (lila – grün)
  $y = 2(x-4)^2 - 2 = 2x^2 - 16x + 30$ (graublau – rot)
  $y = 2(x-1)^2 + 3 = 2x^2 - 4x + 5$ (orange – gelb)

Nachgefragt

K1/6
- Mit quadratischer Ergänzung ergibt sich:
  $x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}p^2 + q = \left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 - \frac{1}{4}p^2 + q$
  $p: y = x^2 + px + q \Leftrightarrow p: y = \left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 - \frac{1}{4}p^2 + q$ mit $S\left(-\frac{1}{2}p \mid q - \frac{1}{4}p^2\right)$

K1/6
- $p: y = (x-m)(x+m) \Leftrightarrow p: y = x^2 - m^2$ mit $S(0 \mid -m^2)$

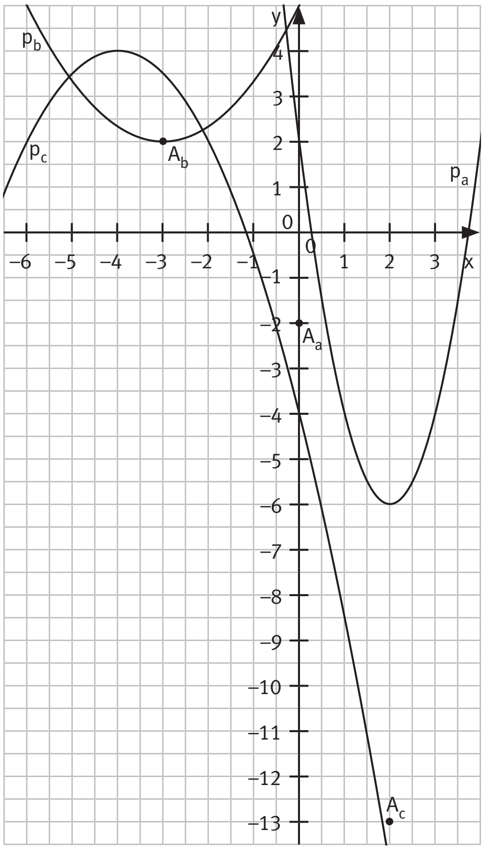
Aufgaben

K5 **1**

a) $f: y = (x+1)^2 + 2$	$S(-1 \mid 2)$	$s: x = -1$	$W = \{y \mid y \geq 2\}$
b) $f: y = -0{,}5(x-8)^2 + 50$	$S(8 \mid 50)$	$s: x = 8$	$W = \{y \mid y \leq 50\}$
c) $f: y = -3(x+1)^2 + 12$	$S(-1 \mid 12)$	$s: x = -1$	$W = \{y \mid y \leq 12\}$
d) $f: y = \frac{2}{3}(x+3)^2 - 6$	$S(-3 \mid -6)$	$s: x = -3$	$W = \{y \mid y \geq -6\}$
e) $f: y = 3(x-5)^2 - 5$	$S(5 \mid -5)$	$s: x = 5$	$W = \{y \mid y \geq -5\}$
f) $f: y = -4(x-2)^2$	$S(2 \mid 0)$	$s: x = 2$	$W = \{y \mid y \leq 0\}$
g) $f: y = -(x+1{,}5)^2 + 1$	$S(-1{,}5 \mid 1)$	$s: x = -1{,}5$	$W = \{y \mid y \leq 1\}$
h) $f: y = 5x^2 - 10$	$S(0 \mid -10)$	$s: x = 0$	$W = \{y \mid y \geq -10\}$
i) $f: y = -2(x-3)^2 + 37$	$S(3 \mid 37)$	$s: x = 3$	$W = \{y \mid y \leq 37\}$

K1/4 **2**
A – p_5: Es handelt sich um eine nach unten geöffnete und gestauchte Parabel mit $S(-1 \mid 0)$.
B – p_3: Es handelt sich um eine Gerade mit y-Achsenabschnitt $t = 1$.
C – p_2: Es handelt sich um eine nach oben geöffnete und gestreckte Parabel mit $S(1 \mid 3)$.
D – p_1: Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Parabel mit $S(-2 \mid 0)$.
E – p_4: Es handelt sich um eine nach unten geöffnete und gestreckte Parabel mit $S(0 \mid -1{,}5)$.

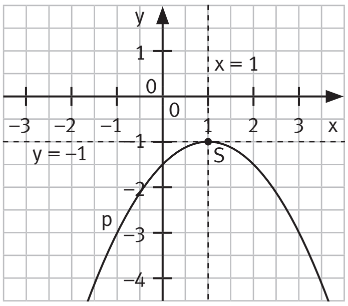
K5/4 **3**



a) $p_a(0) = 2 \neq -2 \quad \Rightarrow A_a(0|-2) \notin p_a$
b) $p_b(-3) = 2 \quad \Rightarrow A_b(-3|2) \in p_b$
c) $p_c(2) = -14 \neq -13 \quad \Rightarrow A_c(2|-13) \notin p_c$

K6/1 **4** p: $y = 0{,}5 \cdot (x-3) \cdot (x+3) + 2 \Leftrightarrow$ p: $y = 0{,}5 \cdot (x^2 - 9) + 2 \quad \Leftrightarrow$ p: $y = 0{,}5x^2 - 2{,}5$
Sid hat nicht Recht: Der Scheitelpunkt der Parabel p liegt bei $S(0|-2{,}5)$.

K4/1 **5** Es handelt sich um eine nach unten geöffnete und gestauchte Parabel mit $S(1|-1)$.



K5 **6** Die Verschiebung einer Parabel um den Vektor $\vec{v}$ bedeutet eine Verschiebung des Scheitelpunkts der Parabel um diesen Vektor. Man gibt die Funktionsgleichung von p zunächst in der Scheitelpunktsform an mit Scheitelpunkt S und erhält dann mithilfe des verschobenen Scheitelpunkts S' die Funktionsgleichung von p'.

a) p: $y = -2(x-2{,}5)^2 - 7{,}5 \qquad S(2{,}5|-7{,}5) \xrightarrow{\vec{v} = \binom{3}{5}} S'(5{,}5|-2{,}5) \qquad \Rightarrow$ p': $y = -2(x-5{,}5)^2 - 2{,}5$

b) p: $y = 0{,}4(x-15)^2 - 92 \qquad S(15|-92) \xrightarrow{\vec{v} = \binom{-2}{3}} S'(13|-89) \qquad \Rightarrow$ p': $y = 0{,}4(x-13)^2 - 89$

c) p: $y = -(x+2{,}5)^2 - 22{,}75 \qquad S(-2{,}5|-22{,}75) \xrightarrow{\vec{v} = \binom{1}{-4}} S'(-1{,}5|-26{,}75) \qquad \Rightarrow$ p': $y = -(x+1{,}5)^2 - 26{,}75$

d) p: $y = -(x-0)^2 + 4 \qquad S(0|4) \xrightarrow{\vec{v} = \binom{-3}{0}} S'(-3|4) \qquad \Rightarrow$ p': $y = -(x+3)^2 + 4$

Entdecken

Lösungsmöglichkeiten:

K6/1
- Zwei auf der Geraden liegende Punkte; ein Punkt auf der Geraden und die Steigung m; ein Punkt auf der Geraden (nicht der Punkt, der auf der y-Achse liegt) und der y-Achsen-abschnitt t; Steigung m und y-Achsenabschnitt t.

K6/1
- Die Koordinaten des Scheitelpunkts und den Koeffizienten a; Koordinaten des Scheitelpunkts und eines beliebigen anderen Punkts auf der Parabel.

K6/1
- Die drei Koeffizienten a, b und c; zwei Koeffizienten und ein beliebiger Punkt auf der Parabel.

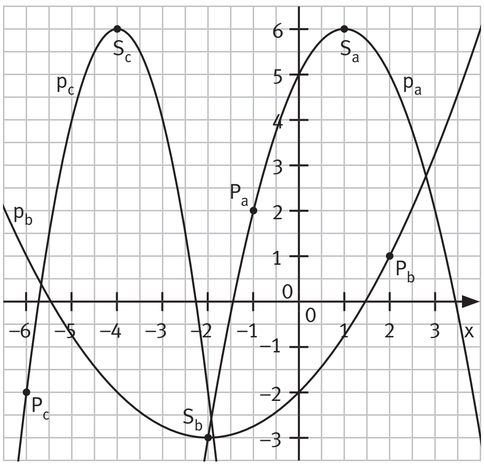
Nachgefragt

K1/6
- Zwei Punkte reichen aus, um die Gleichung der Parabel angeben zu können, wenn man weiß, dass die gesuchte Parabel eine nach oben (oder unten) geöffnete, eventuell verschobene Normalparabel ist, da in diesem Fall nur zwei Variablen unbekannt sind. Weiterhin reichen zwei Punkte aus, wenn einer der beiden Punkte der Parabelscheitel ist und man weiß, welcher der zwei angegebenen Punkte der Scheitelpunkt ist.

K1/6
- Nein, die Gleichung einer Parabel lässt sich nicht angeben, wenn nur die Symmetrieachse und die Wertemenge bekannt ist: Durch die Symmetrieachse kennt man zwar die x-Koordinate des Scheitelpunkts und durch die Wertemenge kennt man die y-Koordinate des Scheitelpunkts und man weiß auch, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist. Durch das Fehlen der Formvariablen a kennt man jedoch nicht die Form der Parabel, d. h., man weiß nicht, ob die Form der Normalparabel vorliegt oder die Parabel gestreckt oder gestaucht ist.

Aufgaben

K5/4 **1** **a)** bis **c)** Einsetzen der Koordinaten von P in die Scheitelpunktsform mit Scheitelpunkt S liefert die Formvariable a und damit die Funktionsgleichungen.

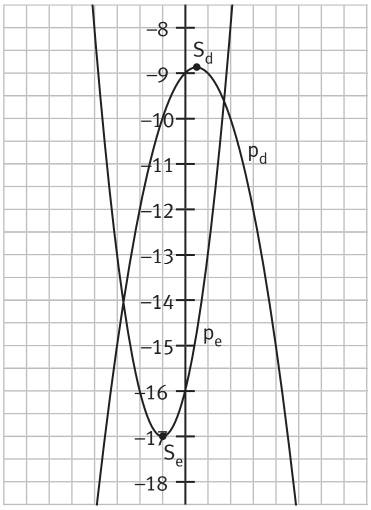


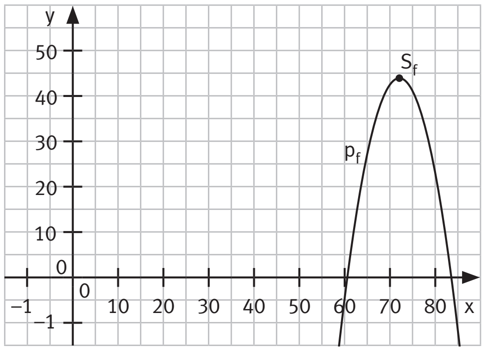
a) $2 = a \cdot (-1-1)^2 + 6 \quad \Leftrightarrow a = -1 \quad \Rightarrow p\colon y = -(x-1)^2 + 6 \quad \Leftrightarrow p\colon y = -x^2 + 2x + 5$

b) $1 = a \cdot (2+2)^2 - 3 \quad \Leftrightarrow a = 0{,}25 \quad \Rightarrow p\colon y = 0{,}25(x+2)^2 - 3 \quad \Leftrightarrow p\colon y = 0{,}25x^2 + x - 2$

c) $-2 = a \cdot (-6+4)^2 + 6 \quad \Leftrightarrow a = -2 \quad \Rightarrow p\colon y = -2(x+4)^2 + 6 \quad \Leftrightarrow p\colon y = -2x^2 - 16x - 26$

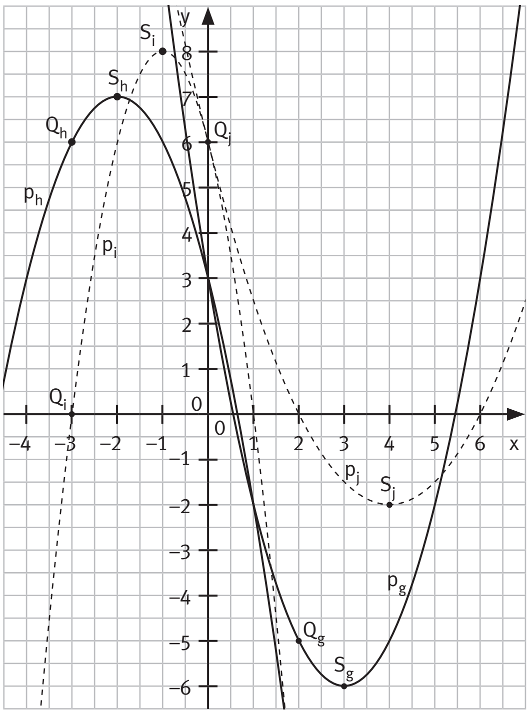
d) bis **f)** Aus der allgemeinen Formel für die Koordinaten des Scheitelpunkts $S\left(-\frac{b}{2a} \mid c-\frac{b^2}{4a}\right)$ folgen die jeweils noch fehlenden Formvariablen.





d)	$0{,}25=-\frac{1}{2a} \Leftrightarrow a=-2$	$-8\frac{7}{8}=c-\frac{1}{4\cdot(-2)} \Leftrightarrow c=-9$	$\Rightarrow p\colon y=-2x^2+x-9$
e)	$-0{,}5=\frac{-b}{2a} \Leftrightarrow a=b$	$-17=-16-\frac{a^2}{4a} \Leftrightarrow a=b=4$	$\Rightarrow p\colon y=4x^2+4x-16$
f)	$72=\frac{-b}{2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow b=48$	$44=c-\frac{48^2}{4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow c=-1684$	$\Rightarrow p\colon y=-\frac{1}{3}x^2+48x-1684$

g) bis **j)** Einsetzen der Koordinaten von Q in die Funktionsgleichung p liefert die fehlenden Formvariablen.



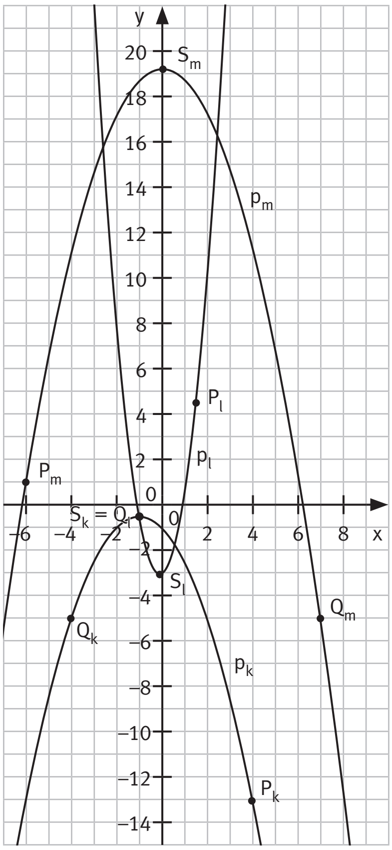
g) $-5=4a-12+3 \Leftrightarrow a=1$
$\Rightarrow p\colon y=x^2-6x+3$
$\Leftrightarrow p\colon y=(x-3)^2-6$
$S(3 \mid -6)$

h) $6=-9+12+c \Leftrightarrow c=3$
$\Rightarrow p\colon y=-x^2-4x+3$
$\Leftrightarrow p\colon y=-(x+2)^2+7$
$S(-2 \mid 7)$

i) $0=-18-3b+6 \Leftrightarrow b=-4$
$\Rightarrow p\colon y=-2x^2-4x+6$
$\Leftrightarrow p\colon y=-2\,(x+1)^2+8$
$S(-1 \mid 8)$

j) $6=c$
$\Rightarrow p\colon y=0{,}5x^2-4x+6$
$\Leftrightarrow p\colon y=0{,}5\,(x-4)^2-2$
$S(4 \mid -2)$

k) bis **m)** Einsetzen der Koordinaten von P und Q und der gegebenen Formvariable liefert die noch fehlenden Formvariablen.



k) I $-13 = 16a + 4b - 1$
II $-5 = 16a - 4b - 1$
$\Rightarrow a = -0{,}5;\ b = -1$
$\Rightarrow$ p: $y = -0{,}5x^2 - x - 1$
$\Leftrightarrow$ p: $y = -0{,}5\,(x + 1)^2 - 0{,}5$
$S\,(-1\,|\,-0{,}5)$

l) I $4{,}5 = 2{,}25a + 0{,}75 + c$
II $-0{,}5 = a - 0{,}5 + c$
$\Rightarrow a = 3;\ c = -3$
$\Rightarrow$ p: $y = 3x^2 + 0{,}5x - 3$
$\Leftrightarrow$ p: $y = 3\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - 3\frac{1}{48}$
$S\left(-\frac{1}{12}\,\middle|\,-3\frac{1}{48}\right)$

m) I $1 = -18 - 6b + c$
II $-5 = -24{,}5 + 7b + c$
$\Rightarrow b = \frac{1}{26};\ c = 19\frac{3}{13}$
$\Rightarrow$ p: $y = -0{,}5x^2 + \frac{1}{26}x + 19\frac{3}{13}$
$\Leftrightarrow$ p: $y \approx -0{,}5\left(x - \frac{1}{26}\right)^2 + 19{,}23$
$S\left(\frac{1}{26}\,\middle|\,19{,}23\right)$

K 5 **2** **a)** $7 = a + 3 \Rightarrow a = 4$ **b)** $-20 = -2 \cdot 9 + c \Rightarrow c = -2$

K 6/5 **3** Es gibt folgende Möglichkeiten und Beispiele bei gegebenem Punkt $P\,(-3\,|\,21)$.

a) Parabelgleichungen zu Punkt P	**b)** Beispiele
Man weiß, dass P der Scheitel einer nach oben (oder einer nach unten) geöffneten Normalparabel ist; z. B.: Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Normalparabel.	p: $y = (x + 3)^2 + 21$
Zusätzlich zu P wird der Scheitelpunkt angegeben; z. B. $S\,(3\,|\,15)$.	$21 = a\,(-3 - 3)^2 + 15 \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow$ p: $y = \frac{1}{6}\,(x - 3)^2 + 15 \Leftrightarrow$ p: $y = \frac{1}{6}x^2 - x + 16{,}5$
Zusätzlich zu P werden die Symmetrieachse s und der maximale (oder der minimale) Funktionswert angegeben; z. B. s: $x = 3$; $p_{min} = 15$.	Die Lösung entspricht der Lösung bei gegebenem Scheitelpunkt, da aus s: $x = 3$ und $p_{min} = 15$ der Scheitelpunkt $S\,(3\,|\,15)$ folgt.
Zusätzlich zu P werden die Symmetrieachse s und der Öffnungsfaktor a angegeben; z. B. s: $x = 3$; $a = 1$.	$21 = (-3 - 3)^2 + y_S \Leftrightarrow y_S = -15$; $S\,(3\,|\,-15)$ $\Rightarrow$ p: $y = (x - 3)^2 - 15$ $\Leftrightarrow$ p: $y = x^2 - 6x - 6$
Zusätzlich zu P ist ein Punkt Q angegeben plus eine der drei Formvariablen; z. B. $Q\,(3\,|\,15)$; $a = 2$.	I $15 = 18 + 3b + c$ II $21 = 18 - 3b + c$ $\Rightarrow c = 0;\ b = -1 \Rightarrow$ p: $y = 2x^2 - x$ $\Leftrightarrow$ p: $y = 2\,(x - 0{,}25)^2 - 0{,}125$; $S\,(0{,}25\,|\,-0{,}125)$
Zusätzlich zu P werden zwei der drei Formvariablen angegeben; z. B. $a = 2$; $b = 1$.	$21 = 18 - 3 + c \Rightarrow c = 6$ $\Rightarrow$ p: $y = 2x^2 + x + 6$ $\Leftrightarrow$ p: $y = 2\,(x + 0{,}25)^2 + 5{,}875$; $S\,(0{,}25\,|\,5{,}875)$

K5 **4** **a)** Einsetzen der Koordinaten von P und Q in die Funktionsgleichung p liefert:

I $-4 = c$

II $-4 = 64a - 32 - 4 \Leftrightarrow a = 0{,}5 \quad \Rightarrow p\text{: } y = 0{,}5x^2 + 4x - 4$

b) Einsetzen der Koordinaten von R in p ergibt:

$-1 = c = a \quad \Rightarrow p\text{: } y = -x^2 + 4x - 1$

K1/6 **5** Einsetzen der Koordinaten von S_1 in die Funktionsgleichung p mit a = b liefert:

$4 = 0{,}5^2a - 0{,}5a + 5 \Leftrightarrow -1 = -0{,}25a \Leftrightarrow a = b = 4$

$\Rightarrow p\text{: } y = 4x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow p\text{: } y = 4\,(x + 0{,}5)^2 + 4$ mit Scheitelpunkt $S_1\,(-0{,}5\,|\,4)$

Einsetzen der Koordinaten von $S_2\,(0{,}5\,|\,-4)$ in die Funktionsgleichung p mit a = b liefert:

$-4 = 0{,}5^2a + 0{,}5a + 5 \Leftrightarrow -9 = 0{,}75a \Leftrightarrow a = b = -12$

$\Rightarrow p'\text{: } y = -12x^2 - 12x + 5 \Leftrightarrow p'\text{: } y = -12\,(x + 0{,}5)^2 + 8$ mit Scheitelpunkt $S'\,(-0{,}5\,|\,8) \neq S_2\,(0{,}5\,|\,-4)$

Das Vorgehen liefert eine Funktionsgleichung mit Scheitelpunkt $S'\,(-0{,}5\,|\,8) \neq S_2\,(0{,}5\,|\,-4)$; hierbei liegt S_2 zwar auf der Parabel, ist jedoch nicht Scheitelpunkt der Parabel. Hieraus folgt:
S_2 kann nicht Scheitelpunkt der Parabel p sein, wenn a = b gelten soll.

K5/2 **6** Einsetzen der Koordinaten von P in $y = ax^2 + ax + a \Leftrightarrow y = a\,(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow a = \frac{y}{x^2 + x + 1}$ liefert:

a) $a = \frac{-6}{4 - 2 + 1} = \frac{-6}{3} = -2 \quad \Rightarrow p\text{: } y = -2x^2 - 2x - 2$

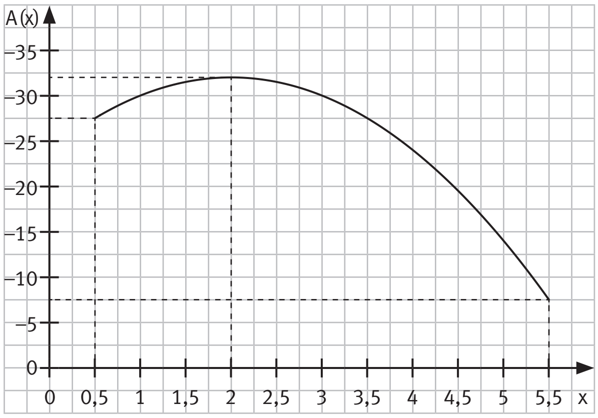
b) $a = \frac{2{,}5}{12{,}25 - 3{,}5 + 1} = \frac{2{,}5}{9{,}75} = \frac{10}{39} \quad \Rightarrow p\text{: } y = \frac{10}{39}x^2 + \frac{10}{39}x + \frac{10}{39}$

c) $a = \frac{7}{4 + 2 + 1} = \frac{7}{7} = 1 \quad \Rightarrow p\text{: } y = x^2 + x + 1$

Entdecken

K3/5
K4/5

- $A(x) = (6 - x) \cdot (4 + 2x)$
- Graph für $x \in [0{,}5; 5{,}5]$



Der Flächeninhalt wird an den Intervallgrenzen minimal und beträgt dort 27,5 cm^2 für x = 0,5 bzw. 7,5 cm^2 für x = 5,5.
Ein Maximum hat der Flächeninhalt mit 32 cm^2 bei x = 2.

K1/5

- Maximaler Flächeninhalt (in FE):
  $A(x) = (6 - x) \cdot (4 + 2x) = -2x^2 + 8x + 24 = -2(x^2 - 4x) + 24$
  $= -2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 24 = -2(x - 2)^2 + 8 + 24 = -2(x - 2)^2 + 32$
  Für x = 2 liegt der maximale Flächeninhalt bei 32 cm^2.
  Der minimale Flächeninhalt A_{min} (in FE) liegt mit 7,5 cm^2 an der rechten Intervallgrenze:
  $A(5{,}5) = (6 - 5{,}5) \cdot (4 + 2 \cdot 5{,}5) = 0{,}5 \cdot 15 = 7{,}5$

Nachgefragt

K6/1

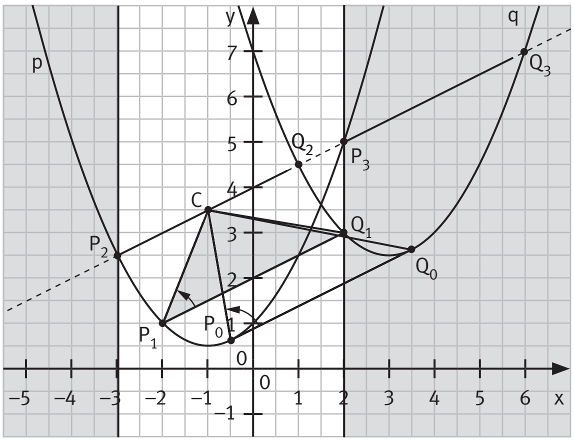
- Der zum quadratischen Term mit a > 0 gehörende Graph ist Teil einer nach oben geöffneten Parabel; dieses Parabelstück hat ein Minimum bei $(x_s | y_s)$ und ein Maximum bei $(x_s + 2 | 4a + y_s)$.

K6/1

- Der zum quadratischen Term mit a > 0 gehörende Graph ist Teil einer nach oben geöffneten Parabel; dieses Parabelstück hat ein Minimum bei (3 | –1) und zwei Maxima bei (1 | 3) und (5 | 3).

Aufgaben

K4/5 **1**



a) $P_1(-2|1)$; $Q_1(2|3)$; $\overrightarrow{P_1C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks CP_1Q_1 gilt:

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2{,}5 \end{vmatrix}$ FE $= \frac{1}{2} \cdot (10 - 2)$ FE $= 4$ FE

b) Für $x = -3$ und für $x = 2$ liegen $P_2(-3|2{,}5)$ und $Q_2(1|4{,}5)$ bzw. $P_3(2|5)$ und $Q_3(6|7)$ auf der Parallelen zu P_1Q_1 durch C, d. h., CP_2Q_2 und CP_3Q_3 bilden kein Dreieck. Nur für x aus dem Intervall $]-3; 2[$ gibt es Dreiecke CP_nQ_n.

c) $P_n(x|0{,}5x^2 + x + 1)$; $\overrightarrow{P_nC} = \begin{pmatrix} -1 - x \\ -0{,}5x^2 - x + 2{,}5 \end{pmatrix}$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks CP_nQ_n gilt:

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 - x \\ 2 & -0{,}5x^2 - x + 2{,}5 \end{vmatrix} \text{ FE}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (-2x^2 - 4x + 10 - 2(-1 - x)) \text{ FE}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (-2x^2 - 2x + 12) \text{ FE}$$
$$= (-x^2 - x + 6) \text{ FE}$$

d) Quadratische Ergänzung liefert:

$$-x^2 - x - 6 = -(x^2 + x) + 6$$
$$= -(x^2 + x + 0{,}25 - 0{,}25) + 6$$
$$= -(x + 0{,}5)^2 + 6{,}25$$

Der maximale Flächeninhalt A_0 beträgt 6,25 FE für $x = -0{,}5$ mit $P_0(-0{,}5|0{,}625)$ und $Q_0(3{,}5|2{,}625)$.

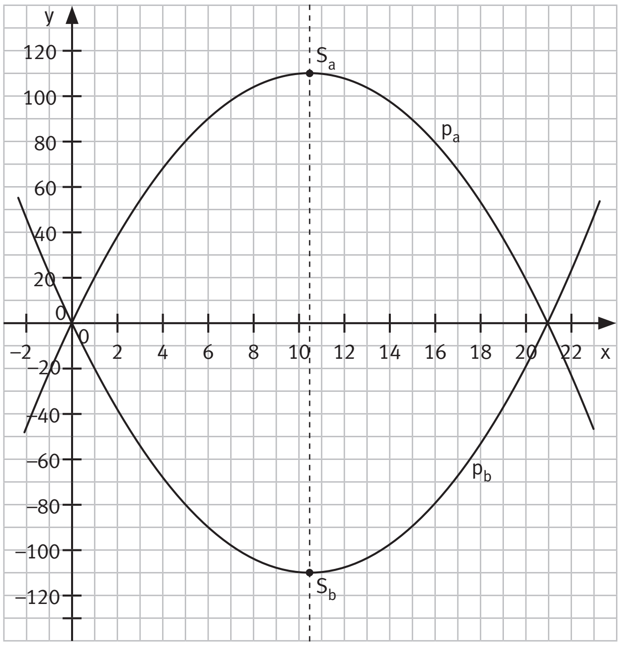
K6/1 **2** Carlo hat Recht: Für $z \in \mathbb{Z}$ gilt: $(z - 1) \cdot (z + 1) = z^2 - 1$

Für jedes $z \in \mathbb{Z}$ gilt: $z^2 \geq 0 \Rightarrow z^2 - 1 \geq -1$

Es gilt: $(z - 1) \cdot (z + 1) = -1 \Leftrightarrow z^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$

-1 ist der minimale Wert für $(z - 1) \cdot (z + 1)$; dieser Wert wird bei $z = 0$ erreicht.

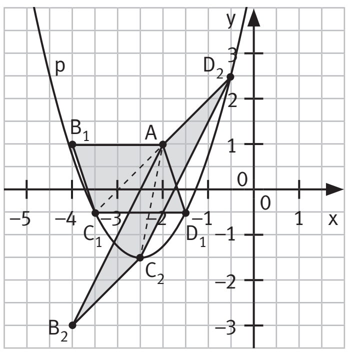
K6/4 **3**



a) Mit r, s ∈ ℚ und r + s = 21 bzw. s = 21 – r gilt:
r · s = r · (21 – r) = $-r^2 + 21r$
Quadratisches Ergänzen liefert:
$-r^2 + 21r$
$= -(r^2 - 21r + 10{,}5^2 - 10{,}5^2)$
$= -(r - 10{,}5)^2 + 10{,}5^2$
Der Graph des Produktwerts r · s kann somit als eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitel S (10,5 | 110,25) gesehen werden, d. h.:
Der Produktwert der beiden rationalen Zahlen r und s ist maximal für r = s = 10,5 und r · s = 110,25.

b) Änderung des Zahlenrätsels aus a):
Ermittle, für welche zwei rationalen Zahlen sich der kleinstmögliche Produktwert ergibt, wenn der Differenzwert beider Zahlen 21 ist.
Mit r, s ∈ ℚ und r – s = 21 bzw. s = r – 21 gilt: r · s = r · (r – 21) = $r^2 - 21r$
Quadratisches Ergänzen liefert:
$r^2 - 21r = r^2 - 21r + 10{,}5^2 - 10{,}5^2 = (r - 10{,}5)^2 - 10{,}5^2$
Der Graph des Produktwerts r · s kann somit als eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt S (10,5 | –110,25) gesehen werden, d. h.: Der Produktwert der beiden rationalen Zahlen r und s ist minimal für r = 10,5, s = –10,5 und r · s = –110,25.

K4/2 **4 a)**



b) Es sei x die x-Koordinate von C_n und $x_D = x + 2$ die x-Koordinate von $D_n\,(x_D \,|\, y_D) \in p\colon y = x^2 + 5x + 4{,}75$.
$y_D = x_D^{\;2} + 5x_D + 4{,}75$
$= (x + 2)^2 + 5\,(x + 2) + 4{,}75$
$= x^2 + 4x + 4 + 5x + 10 + 4{,}75$
$= x^2 + 9x + 18{,}75$
$\Rightarrow D_n\,(x + 2 \,|\, x^2 + 9x + 18{,}75)$

c) Die Parallelogramme $AB_nC_nD_n$ setzen sich aus den Dreiecken C_nD_nA und AB_nC_n zusammen.
Für den Flächeninhalt der Parallelogramme $AB_nC_nD_n$ gilt:
$\overrightarrow{C_nD_n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4x + 14 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{C_nA} = \begin{pmatrix} -2 - x \\ -x^2 - 5x - 3{,}75 \end{pmatrix}$
$A\,(x) = \begin{vmatrix} 2 & -(2 + x) \\ 4x + 14 & -x^2 - 5x - 3{,}75 \end{vmatrix}$ FE
$= [(-2x^2 - 10x - 7{,}5) + (4x + 14)(2 + x)]$ FE
$= (-2x^2 - 10x - 7{,}5 + 8x + 4x^2 + 28 + 14x)$ FE
$= (2x^2 + 12x + 20{,}5)$ FE

d) Quadratisches Ergänzen liefert:
$2x^2 + 12x + 20{,}5 = 2\,(x^2 + 6x + 9 - 9 + 10{,}25) = 2\,(x + 3)^2 + 2{,}5$
$A\,(x) = (2x^2 + 12x + 20{,}5)$ FE $= [2\,(x + 3)^2 + 2{,}5]$ FE
Der minimale Flächeninhalt A_0 beträgt 2,5 FE für x = –3.

K3/4 **1** **a)** Je stärker die Parabel gestaucht ist, desto kleiner ist der Faktor a (bei $a > 0$). Somit ist der Faktor a für das Schalkenmehrener Maar am kleinsten, da dieses Maar im Vergleich zur Tiefe am breitesten ist.

b) Der Scheitelpunkt bzw. der Tiefpunkt der Parabel sei $S(0|0)$. Die maximale Tiefe des Sees beträgt 38 m, die Oberfläche des Sees befindet sich in der Höhe von $y = 38$. Somit ergibt sich:

$38 = 0{,}0016x^2 \Rightarrow x \approx 154{,}1$

Der Durchmesser des Sees beträgt also $2 \cdot 154{,}1\,\text{m} = 308{,}2\,\text{m}$.

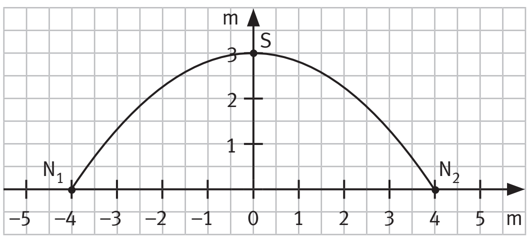
K3/5 **2** **a)** Der Schwerpunkt des Springers bewegt sich auf einer (annähernd) parabelförmigen Bahn und befindet sich im Moment des Absprungs etwa einen halben Meter über dem Felsen.

b) Der Scheitelpunkt sei $S(0|35{,}5)$. Für die Funktionsgleichung der Flugparabel gilt:
$y = ax^2 + 35{,}5$
Einsetzen des Punktes $P(-14|0)$ ergibt: $a \approx -0{,}181$
Die Funktionsgleichung der Flugparabel ist: $y = -0{,}181x^2 + 35{,}5$

c) Der Sprungturm ist 10 m hoch, der Schwerpunkt des Springers liegt 0,5 m über dem Sprungturm, also bei 10,5 m über dem Boden bzw. über der Wasseroberfläche. Der Scheitelpunkt der Parabel ist damit $S(0|10{,}5)$. Mit der in a) berechneten Formvariablen $a = -0{,}181$ ergibt sich für $y = 0$ (der Springer trifft auf der Wasseroberfläche auf):
$0 = -0{,}181x^2 + 10{,}5 \Leftrightarrow x \approx \pm 7{,}6\,\text{m}$
Der Springer taucht mit 7,6 m horizontaler Entfernung vom Absprungpunkt ins Wasser ein.

K3/4 **3** Man geht von einer nach unten geöffneten Parabel aus und wählt das Koordinatensystem so, dass eine (gedachte) Mittellinie zwischen dem Aufschlagpunkt (Schläger) und dem Auftreffpunkt (Tisch) die y-Achse und die Platte die x-Achse darstellt. Der Scheitelpunkt der Parabel ist der höchste Punkt und liegt bei $S(0|3{,}8)$. $S(0|3{,}8)$ in die Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$ eingesetzt ergibt $c = 3{,}8$. Wegen dem 10,6 m weiten Bogen weiß man, dass die Parabel die x-Achse bei $x_1 = -5{,}3$ und bei $x_2 = 5{,}3$ schneidet. $N_1(-5{,}3|0)$ in die Funktionsgleichung $y = ax^2 + 3{,}8$ eingesetzt ergibt: $0 = a \cdot (-5{,}3)^2 + 3{,}8 \Leftrightarrow a \approx -0{,}135$
Die Funktionsgleichung der Flugparabel lautet: $y = -0{,}135 \cdot x^2 + 3{,}8$.

K3/4 **4** **a)**



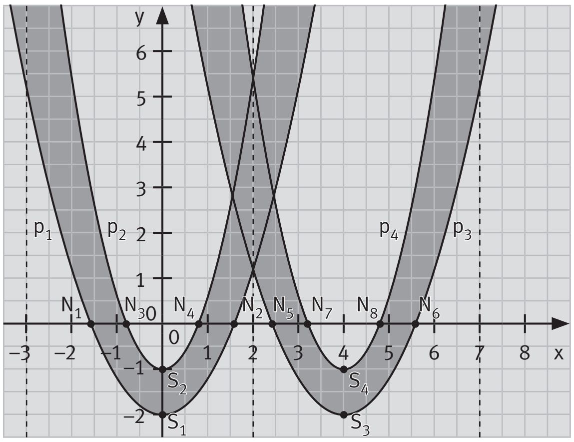
b) Der Scheitelpunkt der Parabel liegt bei $S(0|3)$. $S(0|3)$ in die Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$ eingesetzt ergibt $c = 3$.
Da die Parabel symmetrisch zur y-Achse ist und einen 8 m breiten Bogen beschreibt, befinden sich ihre Nullstellen bei $N_1(-4|0)$ und $N_2(4|0)$.
$N_2(4|0)$ in $y = ax^2 + 3$ eingesetzt ergibt:
$0 = 16a + 3 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{16} \Rightarrow y = -\frac{3}{16}x^2 + 3$

K3/4 **5** **a)** Es sind unterschiedliche Ergebnisse aufgrund unterschiedlicher Ableseergebnisse möglich.

p_1: $S_1(0|-2)$ und $N_1(-1{,}6|0)$, $N_2(1{,}6|0)$ Nullstellen: $x_1 = -1{,}6$ und $x_2 = 1{,}6$
p_2: $S_2(0|-1)$ und $N_3(-0{,}8|0)$, $N_4(0{,}8|0)$ Nullstellen: $x_1 = -0{,}8$ und $x_2 = 0{,}8$
p_3: $S_3(4|-2)$ und $N_5(2{,}4|0)$, $N_6(5{,}6|0)$ Nullstellen: $x_1 = 2{,}4$ und $x_2 = 5{,}6$
p_4: $S_4(4|-1)$ und $N_7(3{,}2|0)$, $N_8(4{,}8|0)$ Nullstellen: $x_1 = 3{,}2$ und $x_2 = 4{,}8$

b) p_1 mit $S_1(0|-2)$: $y = a_1x^2 - 2$
$N_1(-1{,}6|0)$ in p_1 eingesetzt: $0 = a_1 \cdot (-1{,}6)^2 - 2 \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{2{,}56} \approx 0{,}8 \quad \Rightarrow p_1: y = 0{,}8x^2 - 2$
p_2 mit $S_2(0|-1)$: $y = a_2x^2 - 1$
$N_0(-0{,}8|0)$ in p_2 eingesetzt: $0 = a_2 \cdot (-0{,}8)^2 - 1 \Leftrightarrow a_2 = \frac{1}{0{,}64} \approx 1{,}6 \quad \Rightarrow p_2: y = 1{,}6x^2 - 1$

c) Die Parabeln p_3 und p_4 erhält man als Spiegelungen von p_1 und p_2 an der Geraden x = 2.



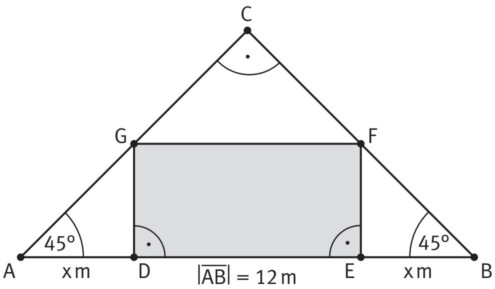
Beim Vergleich einzelner Punkte zwischen Original und Kopie stellt man fest, dass die Kurven im Original keine echten Parabeln sein können. So liegt beispielsweise das Original zwischen den Geraden x = –3 und x = 7, während p_1 und p_3 die Geraden x = –3 und x = 7 bei y = 5,2 schneiden.

K3/4 **6** **a)** k: S(–3|–1) $y = (x + 3)^2 - 1 = x^2 + 6x + 8$ l: S(–1|–1) $y = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x$
m: S(1|–1) $y = (x - 1)^2 - 1 = x^2 - 2x$ n: S(3|–1) $y = (x - 3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$
o: S(–2|–2) $y = (x + 2)^2 - 2 = x^2 + 4x + 2$ p: S(0|–2) $y = x^2 - 2$
q: S(2|–2) $y = (x - 2)^2 - 2 = x^2 - 4x + 2$ r: S(–1|–3) $y = (x + 1)^2 - 3 = x^2 + 2x - 2$
s: S(1|–3) $y = (x - 1)^2 - 3 = x^2 - 2x - 2$ t: S(0|–4) $y = x^2 - 4$

b) Die Parabeln t und r entstehen durch Spiegelung der Parabeln a bzw. b an der x-Achse. Die Parabeln a und t bzw. b und r unterscheiden sich dadurch, dass a und b nach unten, r und t nach oben geöffnet sind. Außerdem sind jeweils die x-Koordinaten der Scheitelpunkte gleich und deren y-Koordinaten gegengleich.

c) a: S(0|4) $y = -x^2 + 4$ b: S(–1|3) $y = -(x + 1)^2 + 3 = -x^2 - 2x + 2$
c: S(1|3) $y = -(x - 1)^2 + 3 = -x^2 + 2x + 2$ d: S(–2|2) $y = -(x + 2)^2 + 2 = -x^2 - 4x - 2$
e: S(0|2) $y = -x^2 + 2$ f: S(2|2) $y = -(x - 2)^2 + 2 = -x^2 + 4x - 2$
g: S(–3|1) $y = -(x + 3)^2 + 1 = -x^2 - 6x - 8$ h: S(–1|1) $y = -(x + 1)^2 + 1 = -x^2 - 2x$
i: S(1|1) $y = -(x - 1)^2 + 1 = -x^2 + 2x$ j: S(3|1) $y = -(x - 3)^2 + 1 = -x^2 + 6x - 8$

K2/1 **7**



a) Das Dreieck ADG hat zwei 45°- und einen 90°-Winkel und ist somit gleichschenklig: $|\overline{AD}| = |\overline{GD}| = x\,m$.
Der Flächeninhalt des Rechtecks ist also:
$A(x) = (12 - 2x) \cdot x\,m^2 = -2x^2\,m^2 + 12x\,m^2$

b) $A(0) = 12 \cdot 0\,m^2 = 0\,m^2$
$A(6) = 0 \cdot 6\,m^2 = 0\,m^2$
Mit x = 0 wäre die Breite des Rechtecks so lang wie die Strecke $\overline{AB}$ und die Höhe des Rechtecks betrüge 0 m. Für x = 6 wäre die Breite des Rechtecks 0 m lang. In beiden Fällen ist der Flächeninhalt null.

c) Der Graph der Flächeninhaltsfunktion ist eine nach unten geöffnete Parabel. Die x-Koordinate des Scheitelpunkts liegt in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen: $x_s = \frac{0 + 6}{2} = 3$.
x = 3 in die Funktionsgleichung eingesetzt liefert: $y_s = 18$, also S(3|18).
Für x = 3 ergibt sich also der größtmögliche Flächeninhalt des Kunstwerkes, nämlich $18\,m^2$.

d)

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
12 – 2x	10	9	8	7	6	5	4	3	2

Für x = 4 ist das Kunstwerk 4 m breit und 4 m hoch, also quadratisch.

e) $A_{Quadrat} = 4\,m \cdot 4\,m = 16\,m^2$
$A_{max.\ Rechteck} = 18\,m^2$
Unterschied: $2\,m^2$
Im Vergleich zu den $18\,m^2$ machen die $2\,m^2$ einen Anteil von $\frac{2}{18} = \frac{1}{9} \approx 11\,\%$ aus.

K1/4 **1** **a)** Die x-Koordinaten von B_n und D_n sind Gegenzahlen, die y-Koordinaten von B_n und D_n sind gleich. Außerdem liegen einander zugeordnete Punkte B_n und D_n mit gleicher y-Koordinate y_n auf dem Graphen der quadratischen Funktion p: $y = x^2 + 1$, dieser ist eine zur y-Achse symmetrische Parabel.

b) Ja, bei den Vierecken AB_nCD_n handelt es sich um Drachenvierecke, weil A und C auf der y-Achse und damit auf der Symmetrieachse zu $\overline{B_nD_n}$ liegen.

K6/1 **2** **a)** „… der Scheitelpunkt des Graphen (einer gestauchten Parabel) immer noch auf der y-Achse liegt und die y-Achse auch die Symmetrieachse des gespiegelten Graphen ist."

b) Die Funktionsgleichung des gespiegelten Graphen lautet: $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2$.

c) Durch Achsenspiegelung des Graphen von f_2 an der Achse $x = -1$ wird der Graph von f_2 auf sich selbst abgebildet.

K1/6 **3** **a)** Es gilt: $0{,}5 \cdot (x-2) \cdot (x+3) = 0{,}5 \cdot (x^2 + x - 6) = 0{,}5x^2 + 0{,}5x - 3 = 0{,}5 \cdot (x + 0{,}5)^2 - 3{,}125$

Es liegt eine quadratische Funktion vor. Der Graph der Funktion ist eine nach oben geöffnete gestauchte Parabel, die symmetrisch ist zur Achse $x = -0{,}5$, mit Scheitelpunkt $S\,(-0{,}5\,|\,-3{,}125)$.

b) Die Nullstellen von f lauten $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$.

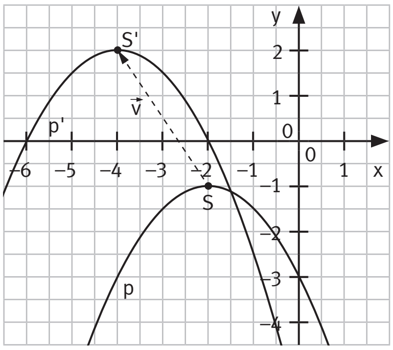
K5 **4** Gemäß der Zeichnung gilt für den Verschiebungsvektor $\vec{v}$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

Für f gilt: f: $y = 3x^2 - 1$ $\Rightarrow S_f\,(0\,|\,-1)$

Für p gilt: p: $y = 3x^2 - 24x + 41 = 3 \cdot (x^2 - 8x + 16 - 16) + 41 = 3 \cdot (x-4)^2 - 7$ $\Rightarrow S_p\,(4\,|\,-7)$

Verschiebung des Graphen von f auf den Graphen von p mithilfe von $\vec{v}$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ -7+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

K5/4 **5** **a)**



b) p: $y = -0{,}5x^2 - 2x - 3$
$= -0{,}5\,(x^2 + 4x + 4 - 4) - 3$
$= -0{,}5\,(x+2)^2 - 1$
$\Rightarrow S_p\,(-2\,|\,-1)$
$S'\,(-2-2\,|\,-1+3) = S'\,(-4\,|\,2)$
p': $y = -0{,}5\,(x+4)^2 + 2$
$= -0{,}5x^2 - 4x - 6$

K5/6 **6** Folgende Gleichungen beschreiben jeweils dieselbe Funktion: 3 und 4; 5 und 8.

K5/4 **7** **a)** A und B in f: $y = 0{,}2x^2 - bx + c$ eingesetzt liefert folgende Gleichungen:

I $-1 = 5 - 5b + c$ $\Leftrightarrow 5b - 6 = c$
II $4 = 20 - 10b + c$ $\Leftrightarrow 10b - 16 = c$ $\Rightarrow 10b - 16 = 5b - 6 \Leftrightarrow b = 2;\ c = 4$
$\Rightarrow$ f: $y = 0{,}2x^2 - 2x + 4$

b) f: $y = a\,(x - x_S)^2 + y_S = a\,(x+3)^2 + 4$
$a = -1$, da der Graph von f eine an der x-Achse gespiegelte und verschobene Normalparabel ist.
$\Rightarrow$ f: $y = -1\,(x+3)^2 + 4 = -1\,(x^2 + 6x + 9) + 4 = -x^2 - 6x - 5$

c) Nach der Scheitelpunktsform gilt für die x-Koordinate des Scheitelpunkts S: $x = -\frac{b}{2a}$

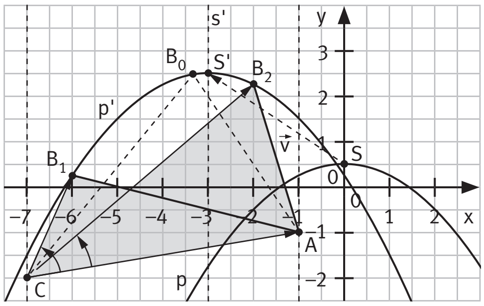
Die Gleichung der Symmetrieachse des Graphen von f lautet: $x = 4$ $\Rightarrow x_S = 4 = -\frac{b}{2a}$
$\Rightarrow b = -8a$ und f: $y = ax^2 - 8ax + c$
Einsetzen von A und B in f liefert:

I $-1 = 9a - 24a + c$ $\Leftrightarrow c = 15a - 1$
II $-7 = 4a - 16a + c$ $\Leftrightarrow c = 12a - 7$ $\Rightarrow 15a - 1 = 12a - 7$ $\Rightarrow a = -2;\ b = 16;\ c = -31$
$\Rightarrow$ f: $y = -2x^2 + 16x - 31$

K2/1 **8 a)**

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
p (x)	−5,75	−3,5	−1,75	−0,5	0,25	0,5	0,25	−0,5	−1,75

a) und **d)**



b) p: $y = -0,25x^2 + 0,5$

$S(0|0,5) \xrightarrow{\vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}} S'(-3|2,5)$

$\Rightarrow p'\colon y = -0,25(x+3)^2 + 2,5$

$= -0,25x^2 - 1,5x + 0,25$

c) $s'\colon x = -3$

$W_p = \{y \,|\, y \leq 0,5\}$

$W_{p'} = \{y \,|\, y \leq 2,5\}$

e) Es gilt: $B_n(x\,|\,-0,25x^2 - 1,5x + 0,25)$ $\quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB_n} = \begin{pmatrix}x+7\\-0,25x^2-1,5x+2,25\end{pmatrix}$

$A(x) = 0,5 \cdot \begin{vmatrix}6 & x+7\\1 & -0,25x^2-1,5x+2,25\end{vmatrix}$ FE

$= 0,5 \cdot (6 \cdot (-0,25x^2 - 1,5x + 2,25) - x - 7)$ FE

$= 0,5 \cdot (-1,5x^2 - 10x + 6,5)$ FE

$= (-0,75x^2 - 5x + 3,25)$ FE

f) $-0,75x^2 - 5x + 3,25 = -\frac{3}{4}\left[x^2 + \frac{4\cdot5}{3}x + \left(\frac{2\cdot5}{3}\right)^2 - \left(\frac{2\cdot5}{3}\right)^2\right] + 3,25$

$= -\frac{3}{4}\left(x + \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{25}{3} + 3,25$

$= -\frac{3}{4}\left(x + \frac{10}{3}\right)^2 + 11\frac{7}{12}$

Das Dreieck AB_0C mit $B_0\left(-3\frac{1}{3}\,\middle|\,-7\frac{17}{36}\right)$ hat den größten Flächeninhalt:

$A_{max} = A\left(-3\frac{1}{3}\right)$ FE $= 11\frac{7}{12}$ FE $\approx 11,583$ FE

K2/6 **9 a)** Die korrekte Durchführung des Weitsprungs kann in mehrere Phasen unterteilt werden. Während Anlauf und Absprung (1. und 2. Phase) nimmt der Springer eine aufrechte Position ein, sein Körperschwerpunkt in Höhe des Bauches befindet sich damit typischerweise mehr als 1 m über dem Boden. Nach dem Flug (3. Phase) hat der Springer bei der Landung (4. Phase) die Intention, die Beine so weit wie möglich nach vorne zu bringen und in einer sitzenden Position den Boden zu erreichen, sein Körperschwerpunkt ist dabei sehr nahe am Boden.

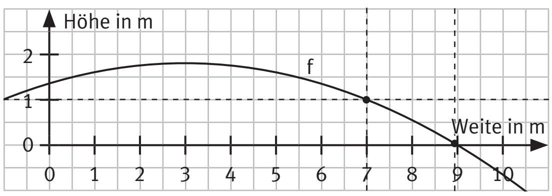
Rechnerisch ergibt sich mit $y = -0,05x^2 + 0,3x + 1,35$:

Absprung bei $x_1 = 0$ und $y_1 = 1,35$

Landung bei $x_2 = 8,95$ und $y_2 = -0,05 \cdot (8,95)^2 + 0,3 \cdot 8,95 + 1,35 = 0,029875$

Beim Absprung war der Körperschwerpunkt 1,35 m über dem Boden, bei der Landung in 8,95 m Abstand zum Absprungspunkt war der Körperschwerpunkt rund 0,03 m = 3 cm über dem Boden.

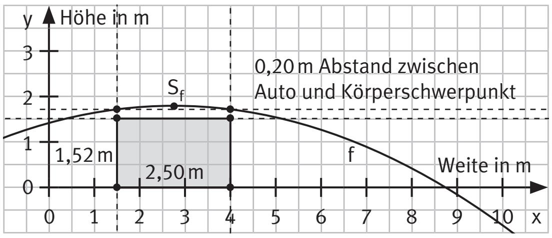
b)



Bei einer horizontalen Entfernung von 7,00 m befand sich der Körperschwerpunkt 1,00 m über dem Boden.

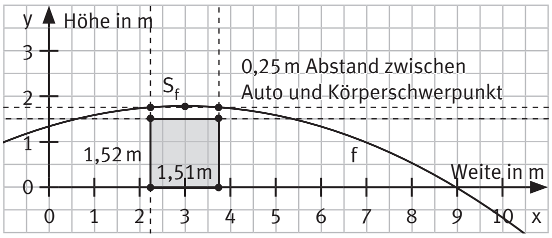
c) Es sind individuelle Lösungsansätze und Antworten möglich mit:
f: $y = -0{,}05x^2 + 0{,}3x + 1{,}35 \Leftrightarrow y = -0{,}05 \cdot (x-3)^2 + 1{,}8$ und $S_f(3\,|\,1{,}8)$
Modellierungsannahmen:

Überspringen des Autos entlang seiner Länge



Positioniert man das Auto so, dass es der Länge nach mittig unter S_f steht, mit $1{,}75 < x < 4{,}25$ und $0 < y < 1{,}52$, dann beträgt der Abstand zwischen den oberen Auto-Eckpunkten und der Parabel rund 0,2 m.

Überspringen des Autos entlang seiner Breite



Positioniert man das Auto so, dass es der Breite nach mittig unter S_f steht, mit $2{,}245 < x < 3{,}755$ und $0 < y < 1{,}52$, dann beträgt der Abstand zwischen den oberen Auto-Eckpunkten und der Parabel rund 0,25 m.

Wenn man sich vorstellt, dass anstelle von Mike Powell ein kleiner Ball der Flugbahn folgt, dann würde das Auto in beiden Fällen vom Ball überflogen werden. Es gilt hier jedoch nicht allein die Kurve des Körperschwerpunktes zu beachten, sondern auch darum, den gesamten Körper – inklusive der Beine – zu berücksichtigen. Daher ist es unrealistisch anzunehmen, dass eine Körperhaltung von Mike Powell möglich ist, bei der sein Körperschwerpunkt auch nur 26 cm über dem Auto liegt und er dabei nicht mit den Knien oder Füßen das Auto berührt. Kurz: Das Auto wäre nicht übersprungen worden.

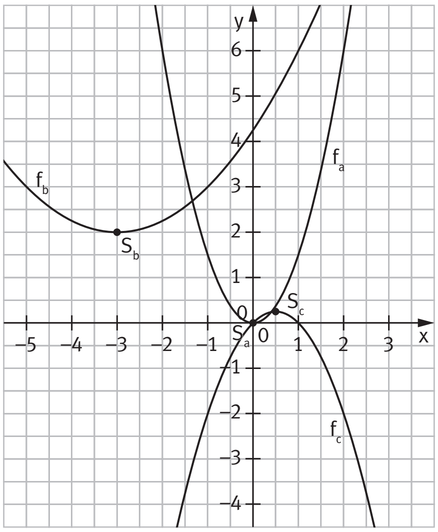
Hinweis: Ein Film von Mike Powells Sprung ist im Internet zu finden.

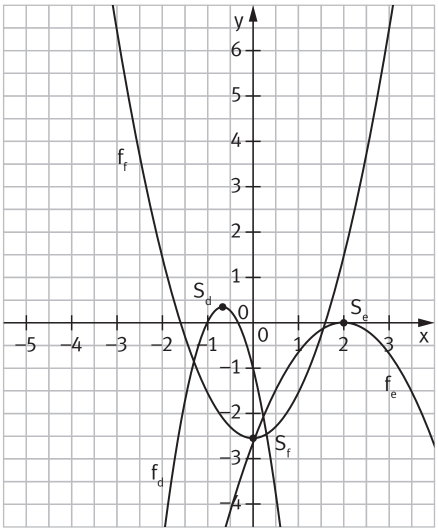
Aufgaben zur Einzelarbeit

K4/5 **1**

	x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
a)	y	37,5	24	13,5	6	1,5	0	1,5	6	13,5	24	37,5
b)	y	3	2,25	2	2,25	3	4,25	6	8,25	11	14,25	18
c)	y	–30	–20	–12	–6	–2	0	0	–2	–6	–12	–20
d)	y	–56	–33	–16	–5	0	–1	–8	–21	–40	–65	–96
e)	y	$-32\frac{2}{3}$	–24	$-16\frac{2}{3}$	$-10\frac{2}{3}$	–6	$-2\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-2\frac{2}{3}$	–6
f)	y	22,44	13,44	6,44	1,44	–1,56	–2,56	–1,56	1,44	6,44	13,44	22,44

a) Die nach oben geöffnete Parabel ist gestreckt mit S (0|0) und $D_f = \mathbb{R}$; $W_f = \mathbb{R}_0^+$.
b) Die nach oben geöffnete Parabel ist gestaucht mit S (–3|2) und $D_f = \mathbb{R}$; $W_f = \{y \mid y \geq 2\}$.
c) Die nach unten geöffnete verschobene Normalparabel hat den Scheitel S (0,5|0,25) und $D_f = \mathbb{R}$; $W_f = \{y \mid y \leq 0{,}25\}$.
d) Die nach unten geöffnete Parabel ist gestreckt mit $S\left(-\frac{2}{3}\middle|\frac{1}{3}\right)$ und $D_f = \mathbb{R}$; $W_f = \left\{y \mid y \leq \frac{1}{3}\right\}$.
e) Die nach unten geöffnete Parabel ist gestaucht mit S (2|0) und $D_f = \mathbb{R}$; $W_f = \mathbb{R}_0^-$.
f) Die nach oben geöffnete verschobene Normalparabel hat den Scheitel S (0|–2,56) und $D_f = \mathbb{R}$; $W_f = \{y \mid y \geq -2{,}56\}$.





K6/1 **2** **a)** Es gilt: p: $y = ax^2 + bx + c$ bzw. p: $y = a(x - x_S)^2 + y_S$
N (5|0) ∈ p T (0|1) ∈ p $x_S = 2 \Rightarrow$ p: $y = a(x-2)^2 + y_S$
Einsetzen von T (0|1) und N (5|0) in p: $y = a(x-2)^2 + y_S$ ergibt:
I $1 = a(0-2)^2 + y_S \Leftrightarrow y_S = 1 - 4a$
II $0 = a(5-2)^2 + y_S$
$\Rightarrow 0 = 9a + 1 - 4a \Leftrightarrow -1 = 5a \Leftrightarrow a = -0{,}2;\ y_S = 1{,}8$
Die Funktionsgleichung von p lautet:
p: $y = -0{,}2(x-2)^2 + 1{,}8$

b) Wenn man nur die Symmetrieachse und die beiden Nullstellen kennt, kann man die Gleichung der quadratischen Funktion nicht eindeutig angeben, da man dabei nicht weiß, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist, wo auf der Symmetrieachse der Scheitelpunkt liegt und wie stark die zugehörige Parabel gestreckt oder gestaucht ist.

K6/5 **3** **a)** Es gilt: f: $y = ax^2 + bx + c$ bzw. f: $y = a\,(x - x_S)^2 + y_S$ mit $a = -1$ (da der Graph von f eine an der x-Achse gespiegelte Normalparabel ist), $x_S = -2$ (da s: $x = -2$ Symmetrieachse ist) und $P\,(2\,|\,-4) \in f$.
$\Rightarrow$ f: $y = -1\,(x + 2)^2 + y_S$
$P\,(2\,|\,-4)$ in f einsetzen ergibt: $-4 = -1\,(2 + 2)^2 + y_S \;\Leftrightarrow\; y_S = 12$
$\Rightarrow$ f: $y = -1\,(x + 2)^2 + 12$
Für die allgemeine Form gilt: f: $y = -x^2 - 4x + 8$

b) Es gilt: f: $y = ax^2 + bx + c$ bzw. f: $y = a\,(x - x_S)^2 + y_S$ mit $a = 1$ (da f eine verschobene Normalparabel beschreibt) und $A\,(-5\,|\,3)$, $B\,(2\,|\,10) \in f$.
$A\,(-5\,|\,3)$ und $B\,(2\,|\,10)$ in f: $y = (x - x_S)^2 + y_S$ einsetzen ergibt:
I $\;3 = (-5 - x_S)^2 + y_S$
II $\;10 = (2 - x_S)^2 + y_S$
$\Rightarrow\; 3 - 10 = (-5 - x_S)^2 - (2 - x_S)^2$
$-7 = 25 + 10x_S + x_S^2 - 4 + 4x_S - x_S^2 \;\Leftrightarrow\; -2 = x_S;\; y_S = -6$
$\Rightarrow$ f: $y = (x + 2)^2 - 6$
Für die allgemeine Form gilt: f: $y = x^2 + 4x - 2$

c) $P\,(-4{,}5\,|\,-134)$ und $Q\,(8{,}5\,|\,-420)$ in f: $y = ax^2 + bx - 3{,}5$ einsetzen ergibt:
I $\;-134 = a\,(-4{,}5)^2 - 4{,}5b - 3{,}5 \;\Leftrightarrow\; b = 4{,}5a + 29$
II $\;-420 = a\,(8{,}5)^2 + 8{,}5b - 3{,}5$
$\Rightarrow\; -420 = 72{,}25a + 8{,}5\,(4{,}5a + 29) - 3{,}5 \;\Leftrightarrow\; -663 = 110{,}5a \;\Leftrightarrow\; a = -6;\; b = 2$
$\Rightarrow$ f: $y = -6x^2 + 2x - 3{,}5$

d) $P\,(5\,|\,0)$, $Q\,(0\,|\,5) \in$ f: $y = -2{,}5\,(x - x_S)^2 + y_S$
$P\,(5\,|\,0)$ und $Q\,(0\,|\,5)$ in f: $y = -2{,}5\,(x - x_S)^2 + y_S$ einsetzen ergibt:
I $\;0 = -2{,}5\,(5 - x_S)^2 + y_S$
II $\;5 = -2{,}5\,(0 - x_S)^2 + y_S$
$\Rightarrow\; 5 = -2{,}5\,(0 - x_S)^2 + 2{,}5\,(5 - x_S)^2$
$\Leftrightarrow\; 5 - 62{,}5 = 25x_S \;\Leftrightarrow\; 2{,}3 = x_S;\; y_S = 18{,}225$
$\Rightarrow$ f: $y = -2{,}5\,(x - 2{,}3)^2 + 18{,}225$
Für die allgemeine Form gilt: f: $y = -2{,}5x^2 + 11{,}5x + 5$

K5/4 **4** **a)** $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{15}{1{,}6} = 9{,}375$
$y_S = c - \frac{b^2}{4a} = -18 - \frac{225}{3{,}5} = -88{,}3125 \qquad \Rightarrow S\,(9{,}375\,|\,-88{,}3125)$
s: $x = 9{,}375$

b) $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$
$y_S = c - \frac{b^2}{4a} = 0 - \frac{16}{4} = -4 \qquad \Rightarrow S\,(2\,|\,-4)$
s: $x = 2$

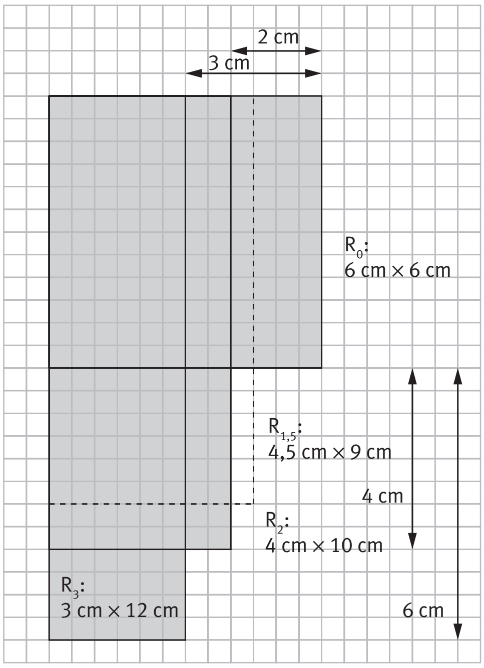
c) f: $y = (x + 1)(x - 1) + 2 \;\Leftrightarrow\;$ f: $y = x^2 + 1 \qquad \Rightarrow S\,(0\,|\,1)$
s: $x = 0$

d) f: $y = 6x^2 + 0{,}5 \qquad \Rightarrow S\,(0\,|\,0{,}5)$
s: $x = 0$

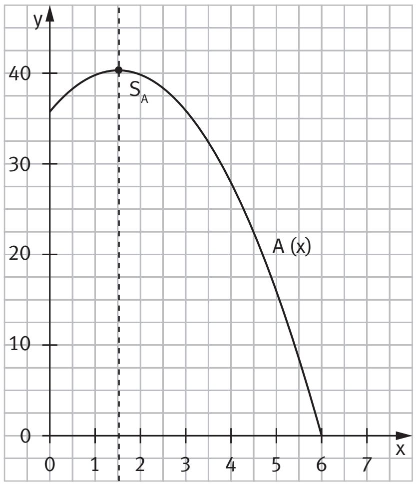
K4/5 **5** Mögliches Vorgehen: Man liest die Koordinaten x_S und y_S des Scheitelpunkts S sowie eines weiteren Punktes P der Parabel ab und setzt die Koordinaten von P in die Scheitelpunktsform ein:
f: $y = a\,(x - x_S)^2 + y_S$

a) $S\,(-2\,|\,-3)$ und $P\,(0\,|\,0)$ $\quad 0 = a\,(0 + 2)^2 - 3 \;\Leftrightarrow\; a = 0{,}75 \;\Rightarrow\;$ f: $y = 0{,}75\,(x + 2)^2 - 3$
b) $S\,(0\,|\,2)$ und $P\,(0{,}5\,|\,3)$ $\quad 3 = a\,(0{,}5 - 0)^2 + 2 \;\Leftrightarrow\; a = 4 \;\Rightarrow\;$ f: $y = 4x^2 + 2$
c) $S\,(2\,|\,1)$ und $P\,(3\,|\,2)$ $\quad 2 = a\,(3 - 2)^2 + 1 \;\Leftrightarrow\; a = 1 \;\Rightarrow\;$ f: $y = (x - 2)^2 + 1$
d) $S\,(4\,|\,0)$ und $P\,(5\,|\,-1)$ $\quad -1 = a\,(5 - 4)^2 + 0 \;\Leftrightarrow\; a = -1 \;\Rightarrow\;$ f: $y = -(x - 4)^2$

K3/4 **6** **a)**



d) $D_A = \{x \mid 0 \leq x < 6\}$ $W_A = \{y \mid 0 < y \leq 40{,}5\}$
$S_A\,(1{,}5 \mid 40{,}5)$



b) Da die Seiten des Quadrats nur begrenzt verkürzt werden können, gilt: $0 \leq x < 6$

c) $A(x) = (6 - x) \cdot (6 + 2x)\,\text{cm}^2 = (-2x^2 + 6x + 36)\,\text{cm}^2$

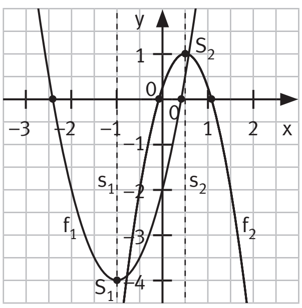
e) $-2x^2 + 6x + 36 = -2\,(x - 1{,}5)^2 + 2 \cdot 1{,}5^2 + 36 = -2\,(x - 1{,}5)^2 + 40{,}5$
$\Rightarrow\; A(x) = -2\,(x - 1{,}5)^2\,\text{cm}^2 + 40{,}5\,\text{cm}^2$
Den maximalen Flächeninhalt von $40{,}5\,\text{cm}^2$ bei $x = 1{,}5$ hat das Rechteck mit den Seitenlängen 4,5 cm und 9 cm.

K5 **7** **a)** $p\colon y = -2\,(x + 3)^2 - 4$ $S_p\,(-3 \mid -4) \xmapsto{\vec{v} = \binom{-3}{2}} S_p'\,(-6 \mid -2)$
$p'\colon y = -2\,(x + 6)^2 - 2$
$D_p = \mathbb{R}$ $W_p = \{y \mid y \leq -4\}$ $D_{p'} = \mathbb{R}$ $W_{p'} = \{y \mid y \leq -2\}$

b) $s\colon x = -3$ $s'\colon x = -6$

K5 **8** $S\,(5 \mid 2)$ und $a = 1 \;\Rightarrow\; p\colon y = (x - 5)^2 + 2$
$P\,(7 \mid 6)$ und $Q\,(27 \mid 26)$ in p einsetzen liefert:
$6 = (7 - 5)^2 + 2 \;\Leftrightarrow\; 6 = 4 + 2$ (wahr) $\;\Rightarrow\; P\,(7 \mid 6) \in p$
$26 = (27 - 5)^2 + 2 \;\Leftrightarrow\; 26 = 486$ (falsch) $\;\Rightarrow\; Q\,(27 \mid 26) \notin p$

K5 **9**



Der Graph der quadratischen Funktion $f_1\colon y = 2 \cdot (x + 1)^2 - 4$ ist die nach oben geöffnete gestreckte Parabel mit Scheitel $S_1\,(-1 \mid -4)$, Symmetrieachse $s_1\colon x = -1$ und den Nullstellen $x_1 = -1 - \sqrt{2} \approx -2{,}41$ und $x_2 = -1 + \sqrt{2} \approx 0{,}41$.
Der Graph der quadratischen Funktion $f_2\colon y = -3x^2 + 3x + 0{,}25$ bzw. $f_2\colon y = -3 \cdot (x - 0{,}5)^2 + 1$ ist die nach unten geöffnete gestreckte Parabel mit Scheitel $S_2\,(0{,}5 \mid 1)$, Symmetrieachse $s_2\colon x = 0{,}5$ und den Nullstellen $x_3 = 0{,}5 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx -0{,}08$ und $x_4 = 0{,}5 + \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}08$.

K5 **10** Mit $a = 0{,}25$ und $S\,(-3 \mid 0{,}25)$ ist die Parabel nach oben geöffnet und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $p(x) \geq 0{,}25$. Damit gibt es kein x mit $p(x) = 0$, d. h., die Parabel hat keine Nullstelle.

K5 **11 a)** und **b)**

1	$8 = a \cdot 1 + 6 \Leftrightarrow a = 2$	p: $y = 2x^2 + 6$	S (0 | 6)
2	$0 = -4 + c \Leftrightarrow c = 4$	p: $y = -0{,}25x^2 + 4$	S (0 | 4)
3	$-2 = a \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow a = -4$	p: $y = -4x^2 + 2$	S (0 | 2)

Aufgaben für Lernpartner

K1/6 **A** Das ist falsch. Eine Parabel wird bei einer Spiegelung an der y-Achse nur dann auf sich selbst abgebildet, wenn der Scheitelpunkt auf der y-Achse liegt und damit die y-Achse Symmetrieachse der Parabel ist.

K1/6 **B** Das ist richtig. Da b in beiden Koordinaten des Scheitelpunkts $S\left(-\frac{b}{2a} \middle| c - \frac{b^2}{4a}\right)$ vorkommt, bewirkt eine Änderung von b eine Verschiebung des Scheitelpunkts und damit der ganzen Parabel in x- und y-Richtung.

K1/6 **C** Das ist falsch. Wenn man nur die Koordinaten des Scheitelpunkts kennt, weiß man nicht, ob die Parabel nach unten oder nach oben geöffnet ist und ob sie gestaucht oder gestreckt ist.

K1/6 **D** Das ist falsch: Die Definitionsmenge einer quadratischen Funktion ist in der Regel $\mathbb{R}$, während die Wertemenge nur eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, da quadratische Terme der Form $T(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ b, c \in \mathbb{R})$ immer einen Extremwert besitzen.

K1/6 **E** Das ist richtig. Die Symmetrieachse verläuft parallel zur y-Achse durch den Scheitelpunkt der Parabel.

K1/6 **F** Das ist richtig. Mit x_1 und x_2 als Nullstellen gilt: $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

K1/6 **G** Das ist falsch: Mit $p(x)$: $y = -3(x-2)^2$ ist der Graph nach unten geöffnet mit Scheitel S (2 | 0) und $p(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die x-Koordinate des Scheitelpunkts ist zugleich die (einzige) Nullstelle der Parabel.

Normalparabeln

K4/5 **1** $p_1: y = (x + 2)^2 - 1$ $p_2: y = -x^2 + 3$ $p_3: y = (x - 1)^2 - 2$ $p_4: y = -(x - 2)^2 + 1$ $p_5: y = (x - 3)^2$

K5 **2**
a) $S(7|8)$
b) $S(-1{,}5|0{,}5)$
c) $p: y = (x + 1)^2 \Rightarrow S(-1|0)$
d) $p: y = -(x + 1)^2 \Rightarrow S(-1|0)$
e) $S(-2{,}25|-4)$
f) $p: y =(x - 10)^2 \Rightarrow S(10|0)$
g) $S(0|-2)$
h) $S(44|0)$
i) $S\left(-\frac{1}{7}\middle|-\frac{3}{11}\right)$
j) $S(0|0)$

K6/1 **3** Brigitte hat nicht Recht. Als Gegenbeispiel können die Punkte $A(1|1)$ und $B(-1|1)$ betrachtet werden. Hier gibt es die möglichen Parabeln: $p_1: y = x^2$ und $p^2: y = -x^2 + 2$. Demnach gibt es keine eindeutig festgelegte Parabel. Lässt man im Beispiel auch noch gestreckte und gestauchte Parabeln zu, so gibt es sogar unendlich viele Möglichkeiten für Parabeln durch A und B.

K5/1 **4** Alle Parabeln sind nach unten geöffnete Normalparabeln ($a = -1$). Zudem haben alle Scheitelpunkte die x-Koordinate $x = -0{,}25$.

K5/1 **5** Lösungsmöglichkeit:
$p_1: y = x^2$
$p_2: y = -x^2 + 2$
$p_3: y = (x - 1)^2 + 1$

Gestreckte und gestauchte Parabeln

K6/1 **6** Die erste Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist die Formvariable $a = -5$. Es ist offensichtlich, dass zum Beispiel die Parabel $p: y = -5x^2$ gestreckt ist und zudem gilt $-5 < 1$. Die Aussage wäre jedoch richtig, wenn der Betrag der Formvariable kleiner als 1 sein müsste.
Die zweite Aussage ist richtig.

K6/4 **7** Folgende Parabeln sind im Vergleich zur Parabel $p_1: y = 0{,}5x^2 + 1$ …
a) nach unten geöffnet, also am Scheitelpunkt gespiegelt.
b) auf 0,6 gestreckt.
c) auf 0,4 gestaucht.
d) um 2 Einheiten nach unten verschoben.
e) um 1 Einheit nach unten verschoben und auf 0,8 gestreckt.
f) um 1 Einheit nach links verschoben und auf 0,8 gestreckt.

K5/6 **8** $y = 3(x + 3)^2 = 3(x^2 + 6x + 9) = 3x^2 + 18x + 27$
Die Parabeln B und D beschreiben dieselbe Parabel.

K6/1 **9** Dass die beiden Parabeln $p_1: y = x^2 + 1$ und $p_2: y = 2x^2 + 2$ keinen Schnittpunkt besitzen, erkennt man daran, dass die Parabel p_1 im Vergleich zur Parabel p_2 einen geringeren Öffnungsfaktor hat ($1 < 2$), aber der Scheitelpunkt „niedriger“ liegt ($S_1(0|1)$ „unterhalb“ von $S_2(0|2)$).

K1/5 **10** Alle Parabeln sind nach oben geöffnet ($a > 0$).

Startklar

Gleichungen rechnerisch lösen

K5 **1** **a)** $L = \{8\}$ **b)** $L = \left\{-\frac{7}{5}\right\}$ **c)** $L = \left\{\frac{12}{5}\right\}$

d) $L = \{-1\}$ **e)** $L = \left\{-\frac{8}{9}\right\}$ **f)** $L = \emptyset$

K5 **2** **a)** $x - 3 = 4$ **b)** $2x + (-1) = 13$ **c)** $x + 4 = 2x - 3$

d) $3x + 30 = 50 - (x - 8)$ **e)** $4x + (-30) = -2$ **f)** $5{,}5 - 1{,}5x = -7{,}5 + 2{,}5$

K5 **3** **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; \frac{4}{3}\}$, $L = \{-15\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{0{,}25\}$, $L = \{-6\}$ **c)** $D = \mathbb{R} \setminus \{3; 5\}$, $L = \{8\}$ **d)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $L = \{2\}$

Terme umformen und vereinfachen

K1/5 **4**

1 $(a-3)^2$	=	6 $a^2 - 6a + 9$
2 $(3+3a)^2$	=	7 $9 + 18a + 9a^2$
3 $(a-3)(a+3)$	=	5 $a^2 - 9$
4 $(3a-3)^2$	=	8 $9a^2 - 18a + 9$
9 $9 - a^2$	=	10 $(3-a)(3+a)$

K5 **5** **a)** $x^2 - 14xy^2 + 49y^4 = (x - 7y^2)^2$ **b)** $c^2 - 1\frac{5}{7}c + \frac{36}{49} = \left(c - \frac{6}{7}\right)^2$

c) $(3m - 2n) \cdot (3m + 2n) = 9m^2 - 4n^2$ **d)** $p^2 + 10pq + 25q^2 = (p + 5q)^2$

K6/1 **6** **a)** $(2 + h)^2 = 4 + 4h + h^2$ **b)** $(3q - 4p)^2 = 9q^2 - 24qp + 16p^2$

c) $(r - s) \cdot (r + s) = r^2 - s^2$ **d)** $(1{,}5v + w)^2 = 2{,}25v^2 + 3vw + w^2$

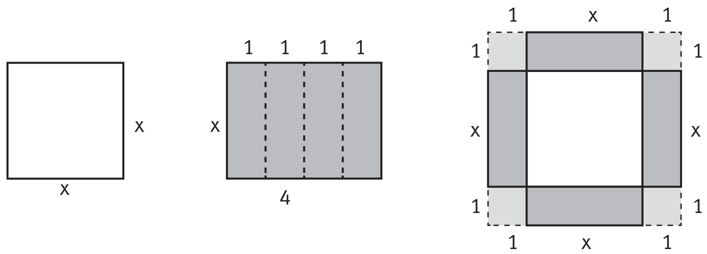
2 Quadratische Gleichungen

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K6/5
- Der Mathematiker veranschaulicht die beiden Bestandteile der Gleichung, indem er x^2 als ein Quadrat mit der Seitenlänge x cm darstellt und $8x$ als ein Rechteck mit den Seitenlängen 8 cm und x cm. Er markiert nun acht gleich große Teile des Rechtecks und ordnet jeweils zwei davon an den Seiten des Quadrats an. Die entstandene Figur kann als Quadrat gesehen werden, bei dem vier kleinere Quadrate mit der Seitenlänge 2 cm fehlen. Nun stellt er eine Gleichung auf, indem er zur Fläche der bereits vorhandenen Teile die der fehlenden Quadrate addiert: $(48 + 4 \cdot 4)\,\text{cm}^2 = 64\,\text{cm}^2$. Weiterhin weiß er, dass eine Seitenlänge des großen Quadrats $(2 + x + 2)$ cm lang ist. Somit gilt:
  $(2 + x + 2)^2\,\text{cm}^2 = 64\,\text{cm}^2 \Leftrightarrow (2 + x + 2)\,\text{cm} = 8\,\text{cm} \Leftrightarrow x\,\text{cm} = 4\,\text{cm} \Leftrightarrow x = 4$

K5
- $x^2 + 8x = 84$ (Abbildung wie im Schulbuch):
  $$(84 + 4 \cdot 4)\,\text{cm}^2 = 100\,\text{cm}^2$$
  $$(2 + x + 2)^2\,\text{cm}^2 = 100\,\text{cm}^2$$
  $$x\,\text{cm} = 6\,\text{cm}$$
  $$x = 6$$
  $x^2 + 4x = 21$:
  $$(21 + 4 \cdot 1)\,\text{cm}^2 = 25\,\text{cm}^2$$
  $$(1 + x + 1)^2\,\text{cm}^2 = 25\,\text{cm}^2$$
  $$x\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$$
  $$x = 3$$



K6/1
- Al-Chwarizmis Vorgehen erfasst nur Strecken und Flächen, die naturgemäß keine negativen Werte haben. Damit kann er negative Werte beim Wurzelziehen nicht berücksichtigen, also auch nicht (in seinem Beispiel) die Möglichkeit von $2 + x + 2 = \pm 8$ mit $x_1 = 4$ und $x_2 = -12$.

Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.
Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

2.1 Einfache quadratische Gleichungen

Entdecken

K3/4
- Aufstellen der Gleichungen:
  1 $A = 6a^2 = 486\,cm^2$ 2 $A = a^2 = 36\,cm^2$

K5
- Lösen der Gleichungen:
  1 $6a^2 = 486\,cm^2$
  $a^2 = 81\,cm^2$
  $a = 9\,cm$
  2 $a^2 = 36\,cm^2$
  $a = 6\,cm$
  Die negativen Lösungen der Gleichungen können im Sachkontext außer Acht gelassen werden.

Nachgefragt

K1/6
- Dies ist nicht wahr. Zum Beispiel hat die quadratische Gleichung $x^2 = -5$ keine Lösung, die quadratische Gleichung $x^2 = 0$ hat genau eine Lösung ($x = 0$).
  Eine lineare Gleichung hat die Form $ax + b = 0$ ($a \neq 0$). Sie hat immer die (einzige) Lösung $x = -\frac{b}{a}$.

K6/4
- Vorteile: höhere Anschaulichkeit, leichteres Überprüfen des Ergebnisses.
  Nachteile: ungenaue Ergebnisse bei ungünstigen Werten, meist zeitaufwändiger.

Aufgaben

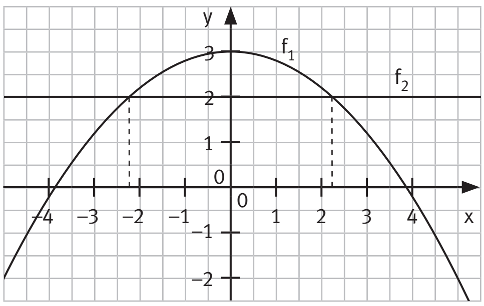
K5
1 **a)** $x = \pm 12$ **b)** $x = \pm 7$ **c)** $x = \pm 0{,}9$ **d)** $x = \pm 25$ **e)** $x = \pm 0{,}1$
f) $x = \pm 4$ **g)** $x = \pm\frac{2}{3}$ **h)** $x = \pm\sqrt{2}$ **i)** $x = \pm 0{,}2$

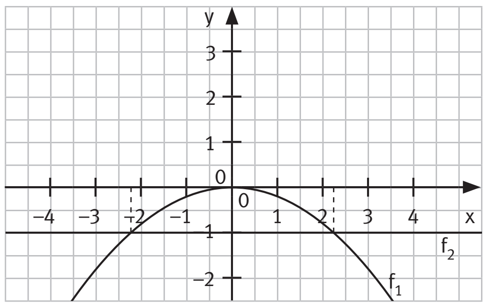
K6/1
2 **a)** 1 Gleichung umformen:

$$\begin{aligned} -0{,}2x^2 + 3 &= 2 && \mid -3 \\ -0{,}2x^2 &= -1 && \mid :(-0{,}2) \\ x^2 &= 5 \end{aligned}$$

2 Die Funktionen $y_1 = x^2$ und $y_2 = 5$ werden grafisch dargestellt.
3 Ablesen der x-Koordinaten der Schnittpunkte
4 Diese beiden Werte sind Näherungslösungen der Gleichung.

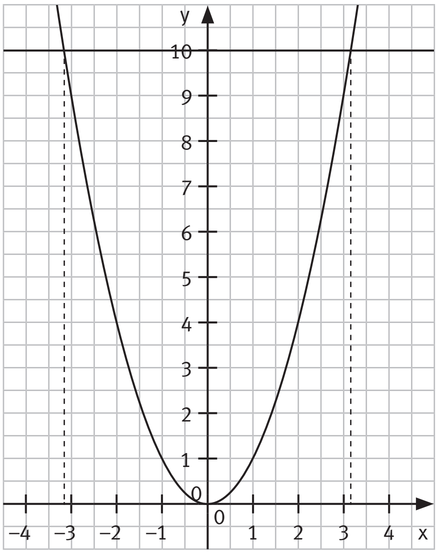
b) Setzt man die beiden Gleichungen f_1 und f_2 gleich, so erhält man wieder die Ausgangsgleichung. Deshalb kann Leon auch mit f_1 und f_2 die gleichen Lösungen erzielen.

1


2


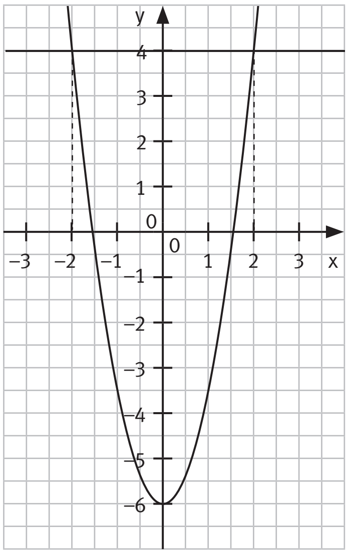
Beide Funktionsgraphen haben relativ zueinander dieselbe Lage, sind also lediglich entlang der y-Achse verschoben. An den Schnittstellen ändert sich daher nichts.

c) 1



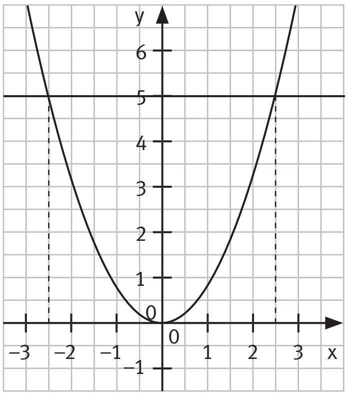
L = {−3,2; 3,2}

2



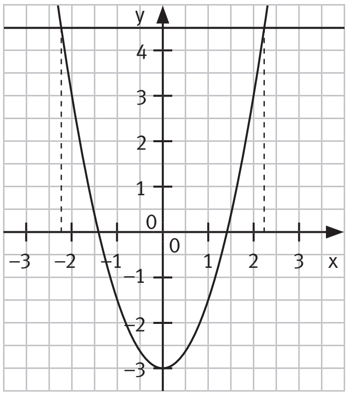
L = {−2; 2}

3



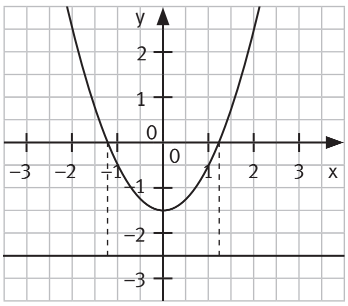
L = {−2,5; 2,5}

4



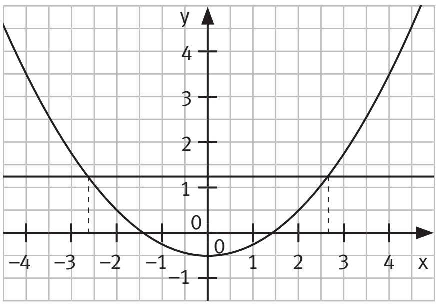
L = {−2,2; 2,2}

5



L = { }

6



L = {−2,6; 2,6}

K 1/6 **3** **a)** Die Funktionsgleichung $y = x^2 + 5$ beschreibt eine nach oben geöffnete und um 5 Einheiten auf der y-Achse nach oben verschobene Normalparabel. Da der Scheitelpunkt (0|5) der tiefste Punkt der Parabel ist, kann diese keinen Schnittpunkt mit der Geraden y = 4 haben.

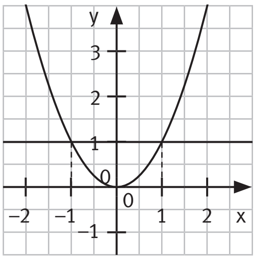
b) Die Parabel mit der Funktionsgleichung $y = 25x^2$ ist um den Faktor a = 25 gestreckt und verläuft durch den Ursprung. Da sie symmetrisch zur y-Achse und nach oben geöffnet ist, nimmt sie den Wert y = 4 bei zwei verschiedenen x-Werten an.

c) Die Funktionsgleichung $y = 16x^2$ beschreibt eine gestreckte Parabel, die ihren Scheitelpunkt im Ursprung hat. Sie hat deshalb genau einen Schnittpunkt mit der x-Achse.

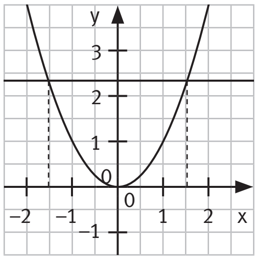
d) Die Parabel ist nach unten geöffnet und gestreckt. Der Scheitelpunkt der Parabel ist im Ursprung, sodass die einzige Nullstelle bei x = 0 liegt.

K 5/4 **4** Man vereinfacht zunächst beide Seiten der Gleichung durch Multiplikation oder Addition und bringt anschließend alle Summanden, die x^2 enthalten, auf eine und alle Summanden, die nur aus einer Zahl bestehen, auf die andere Seite. Nachdem man beide Seiten der Gleichung vereinfacht hat, dividiert man nun, wenn nötig, durch den Koeffizienten von x^2, um die Form $x^2 = -q$ zu erhalten. Grafisch lässt sich die Lösung durch den Schnittpunkt von $y = x^2$ mit der Geraden bei $y = -q$ bestimmen.
Im Folgenden sind die exakten Werte angegeben, bei der grafischen Lösung wird man aber nur Näherungen erwarten können.

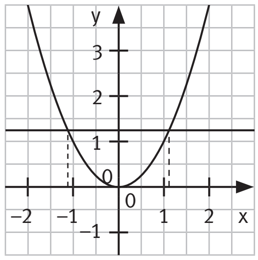
a) $54 = 54x^2$
$x^2 = 1$
$L = \{-1; 1\}$



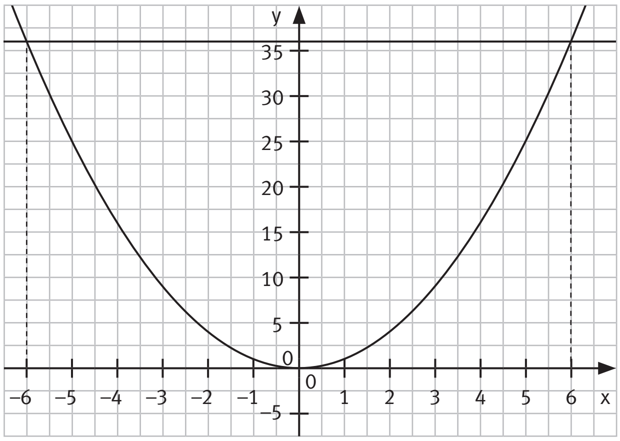
b) $15x^2 = 35$
$x^2 = 2\frac{1}{3}$
$L = \left\{-\sqrt{\frac{7}{3}}; \sqrt{\frac{7}{3}}\right\}$



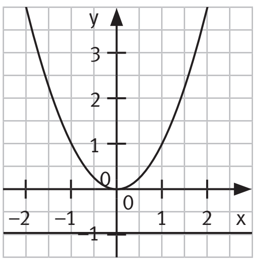
c) $8x^2 + 8x + 2 = 8x + 12$
$8x^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 = 1{,}25$
$L = \left\{-\sqrt{\frac{5}{4}}; \sqrt{\frac{5}{4}}\right\}$



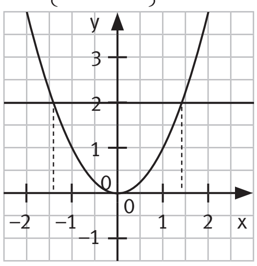
d) $36x^2 - 4 = 1292$
$36x^2 = 1296$
$x^2 = 36$
$L = \{-6; 6\}$



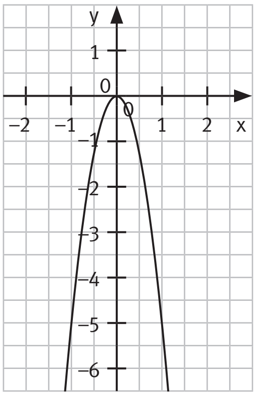
e) $-4{,}8 = 5x^2$
$x^2 = -0{,}96$
$L = \{\,\}$



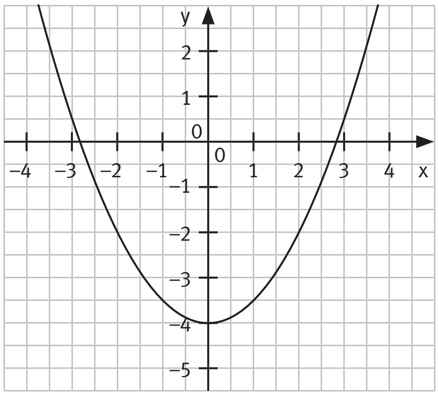
f) $x^2 - 2 = 0$
$x^2 = 2$
$L = \left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right\}$



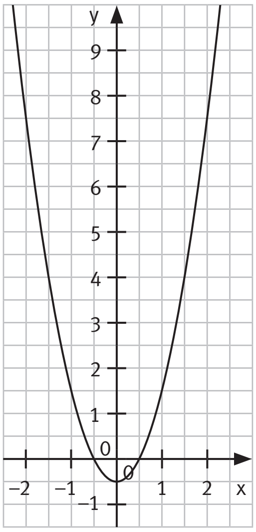
K 1/5 **5** **a)** 1 eine Lösung



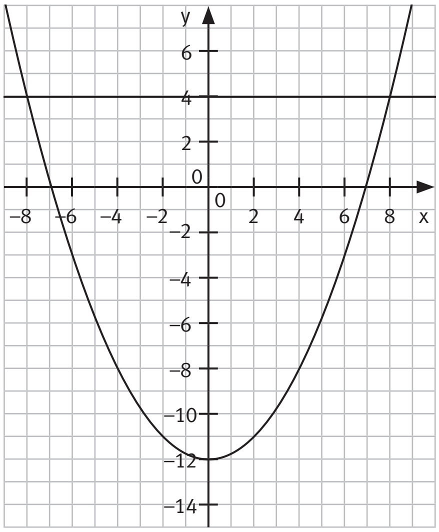
2 zwei Lösungen



3 zwei Lösungen



4 zwei Lösungen



5 $5x^2 = -15$; $x^2 = -3$ keine Lösung

6 $15x^2 = -1$ keine Lösung

b) 1 $L = \{0\}$

2 $L = \left\{-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}\right\}$

3 $L = \left\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right\}$

4 $L = \{-8;\ 8\}$

5 $L = \{\ \}$

6 $L = \{\ \}$

K 5 **6** Es sind weitere Gleichungen möglich.

a) $x^2 = 9$ **b)** $x^2 = 0{,}5$ **c)** $x^2 = -10$ **d)** $x^2 = 0{,}25$

2.2 Quadratische Gleichungen lösen

Entdecken

K6/1
- $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2x+3}$
  Auf diese Weise kann die Gleichung nicht gelöst werden, da x durch eine Wurzel, welche selbst x enthält, ausgedrückt wird.

K6/1
- $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Rightarrow x - 1 = \pm 2$
  $\Rightarrow x_1 = 3$ und $x_2 = -1$
  Evas Aussage stimmt, denn wenn man die Gleichung in die Scheitelpunktsform überführt, hat man nur noch einen Ausdruck, der x enthält, und kann somit die Gleichung wie gewohnt durch Radizieren lösen.

Nachgefragt

K1/6
- Es gilt: $(x + a) \cdot (x + b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -a;\ x_2 = -b$
  1 $a = b$ — $x_1 = x_2$
  2 $b = -a$ — $x_1 = -a;\ x_2 = a \Rightarrow x_2 = -x_1$
  3 $b = 0$ — $x_1 = -a;\ x_2 = 0$

K6/5
- Es sind individuelle Lösungen möglich.

K6/1
- Das ist falsch, denn man kann jede Parabel zeichnen, wenn ihre Funktionsgleichung gegeben ist. Zum Beispiel: $0 = 2x^2 - 2x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2x + 2$. Allerdings wäre es hier sinnvoll, die Gleichung noch durch 2 zu teilen, da man zum Zeichnen der dann auftretenden Normalparabel die Schablone verwenden kann und so genauere Ergebnisse ermöglicht werden.

Aufgaben

K5 **1**
a) $L = \{3; 11\}$ **b)** $L = \{-23; 9\}$ **c)** $L = \{-4; 16\}$ **d)** $L = \{-14{,}5; 3{,}5\}$
e) $L = \{6; 8\}$ **f)** $L = \{1; -2\}$ **g)** $L = \{1{,}5\}$ **h)** $L = \{-2{,}5; 1\}$
i) $L = \{8; 16\}$ **j)** $L = \{\ \}$ **k)** $L = \{1; 5\}$ **l)** $L = \{-4; 14\}$

K5 **2** **a)**

	Gleichung	a	b	c
1	$x^2 + 9x - 7 = 0$	1	9	–7
2	$16 - x^2 = 2x$	–1	–2	16
3	$0 = 2{,}5 - 3{,}5x + x^2$	1	–3,5	2,5
4	$8 \cdot (x - 4) = x^2$	1	–8	32
5	$(x + 1) \cdot (x - 3) = 0$	1	–2	–3

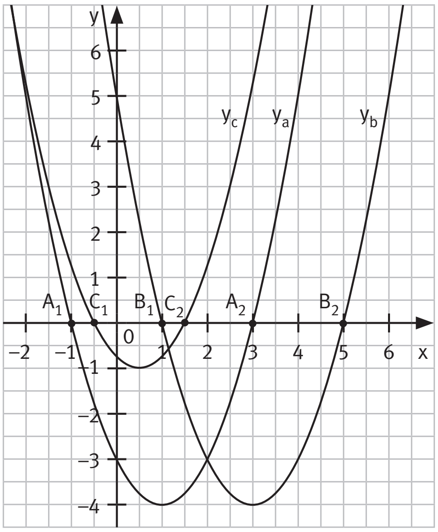
b)

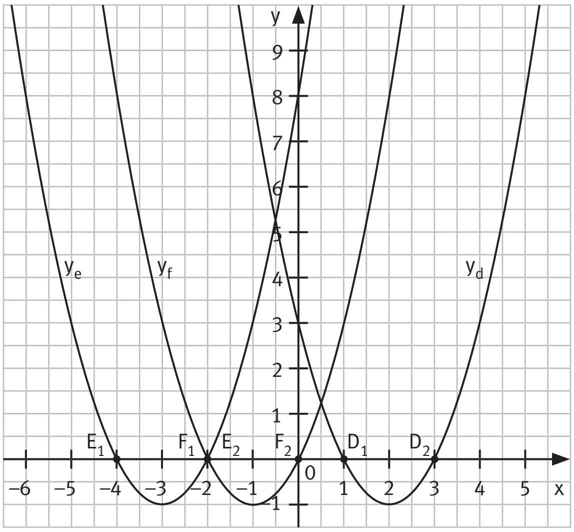
	Gleichung	a	b	c
1	$2x^2 + 4x - 6 = 0$	2	4	–6
2	$3x^2 + 6 = -3x$	3	3	6
3	$4 \cdot (2 - 7x) = -x^2$	1	–28	–8
4	$5 \cdot (x + 4) \cdot (3 - 2x) = 0$	10	25	–60
5	$\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}x = 0$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0

K5 **3**
1 $(x + 2)^2 = 1$
$L = \{-3; -1\}$; M
2 $(x + 1)^2 = 16$
$L = \{-5; 3\}$; A
3 $(x + 1{,}5)^2 = 0$
$L = \{-1{,}5\}$; R
4 $(x - 2)^2 = -1$
$L = \{\ \}$; K
5 $(x - 2{,}5)^2 = 2{,}25$
$L = \{1; 4\}$; T
6 $(x + 1{,}5)^2 = 0{,}25$
$L = \{-2; -1\}$; R
7 $(x + 0{,}175)^2 = 0{,}330625$
$L = \{-0{,}75; 0{,}4\}$; E
8 $(x - 3)^2 = 0$
$L = \{3\}$; D
9 $(x + 1{,}25)^2 = 5{,}0625$
$L = \{-3{,}5; 1\}$; W
10 $(x + 0{,}5)^2 = 6{,}25$
$L = \{-3; 2\}$; I
11 $(x + 1{,}25)^2 = -1{,}4375$
$L = \{\ \}$; T
12 $(x + 4)^2 = 4$
$L = \{-6; -2\}$; Z

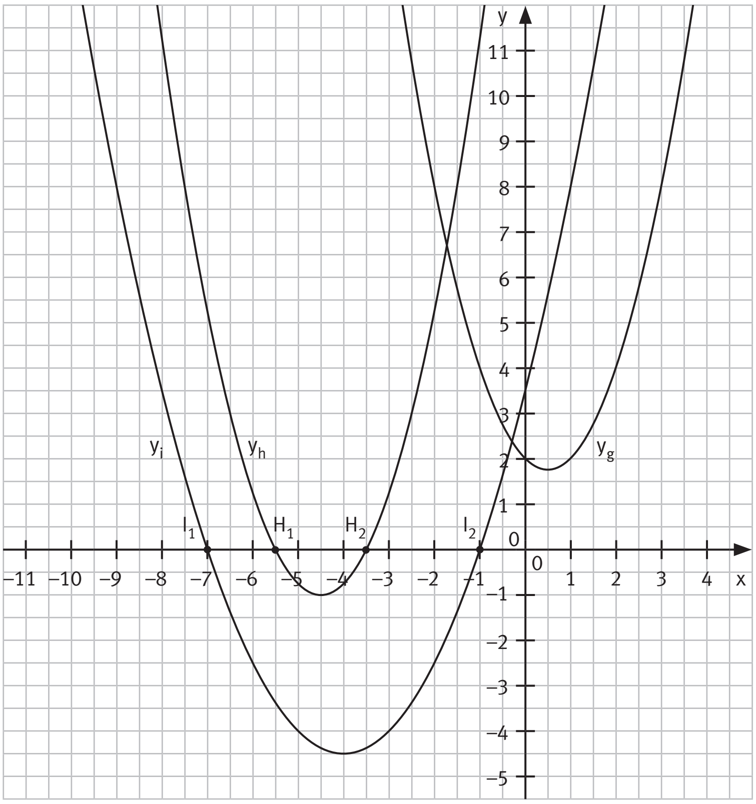
Lösungswort: MARKTREDWITZ

K4/5 **4** Die quadratischen Gleichungen werden in die Normalform $x^2 + px + q = 0$ gebracht und die Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion ermittelt. (Alternative: Man bringt die Gleichung in die Form $x^2 = mx + t$ und ermittelt die Schnittpunkte der Parabel $y = x^2$ mit der Geraden $y = mx + t$.)





a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ $y_a = x^2 - 2x - 3$ Nullstellen $x_1 = -1$; $x_2 = 3$ $L = \{-1; 3\}$
b) $x^2 - 6x + 5 = 0$ $y_b = x^2 - 6x + 5$ Nullstellen $x_1 = 1$; $x_2 = 5$ $L = \{1; 5\}$
c) $x^2 - x - 0{,}75 = 0$ $y_c = x^2 - x - 0{,}75$ Nullstellen $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = 1{,}5$ $L = \{-0{,}5; 1{,}5\}$
d) $x^2 - 4x + 3 = 0$ $y_d = x^2 - 4x + 3$ Nullstellen $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ $L = \{1; 3\}$
e) $x^2 + 6x + 8 = 0$ $y_e = x^2 + 6x + 8$ Nullstellen $x_1 = -4$; $x_2 = -2$ $L = \{-4; -2\}$
f) $x^2 + 2x = 0$ $y_f = x^2 + 2x$ Nullstellen $x_1 = -2$; $x_2 = 0$ $L = \{-2; 0\}$



g) $x^2 - x + 2 = 0$ $y_g = x^2 - x + 2$ keine Nullstellen $L = \{\,\}$
h) $x^2 + 9x + 19{,}25 = 0$ $y_h = x^2 + 9x + 19{,}25$ Nullstellen $x_1 = -5{,}5$; $x_2 = -3{,}5$ $L = \{-5{,}5; -3{,}5\}$
i) $\frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{7}{2} = 0$ $y_i = \frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{7}{2}$ Nullstellen $x_1 = -7$; $x_2 = -1$ $L = \{-7; -1\}$

K5/1 **5** **a)** $L = \{-3; 5\}$ **b)** $L = \left\{-\frac{1}{2}; -0{,}2\right\}$ **c)** $L = \{0; 4\}$
d) $L = \{-0{,}5; 0{,}5\}$ **e)** $L = \{0; 12\}$ **f)** $L = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$

K1/6 **6** Beispiele und allgemeine Lösungen:

1 $x^2 = 4$
$x = \pm 2$ $\quad x = \pm\sqrt{d}$
$L = \{-2; 2\}$

2 $(x + 1)^2 = 2$
$x = \pm\sqrt{2} - 1$ $\quad x = \pm\sqrt{d} - q$
$L = \{-\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} - 1\}$

3 $2x^2 + 3x = 0$ $\quad x\,(ax + b) = 0$
$L = \left\{0; -\frac{3}{2}\right\}$
Ein Produkt ist 0, wenn mindestens ein Faktor 0 ist.
Beim Term $x\,(ax + b)$ gibt es dafür zwei Möglichkeiten: $x = 0$ bzw. $ax + b = 0$.
Die Lösungen sind also $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$.

K6/5 **7** Zunächst subtrahiert sie auf beiden Seiten $3x^2$ und addiert $7x$, sodass auf der rechten Seite 0 steht. Dann klammert sie $2x$ aus. Nun kann man zwei Fälle unterscheiden, da ein Produkt null ergibt, wenn einer der beiden Faktoren null ist. Somit setzt sie $2x = 0$ und $4 + x = 0$ und erhält als Lösungsmenge $L = \{-4; 0\}$.

K5 **8** **a)** $3x = x^2 \Rightarrow L = \{0; 3\}$ **b)** $(x + 5)^2 \Rightarrow L = \{-5\}$ **c)** $x^2 = 64 \Rightarrow L = \{-8; 8\}$
d) $d^2 = 2{,}5d \Rightarrow L = \{0; 2{,}5\}$ **e)** $\left(e - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow L = \left\{\frac{1}{3}\right\}$ **f)** $g^2 = 6g \Rightarrow L = \{0; 6\}$
g) $k^2 = -3k \Rightarrow L = \{-3; 0\}$ **h)** $x^2 = 6 \Rightarrow L = \left\{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\right\}$ **i)** $(y - 0{,}8)^2 = 0 \Rightarrow L = \{0{,}8\}$

K5/1 **9** **a)** $x^2 = 225 \Rightarrow L = \{-15; 15\}$ **b)** $x^2 = 81 \Rightarrow L = \{-9; 9\}$
c) $a^2 = -2{,}5a \Rightarrow L = \{-2{,}5; 0\}$ **d)** $L = \{0; 11\}$
e) $c^2 = c \Rightarrow L = \{0; 1\}$ **f)** $L = \{-0{,}5; 3\}$

K5 **10** **a)** $L = \{0; 3\}$ **b)** $L = \left\{-\frac{2}{7}; 0\right\}$ **c)** $(c + 2) \cdot (c - 2) - (c + 2) = 0$
$(c + 2) \cdot (c - 3) = 0$
$L = \{-2; 3\}$
d) $L = \mathbb{R}$ **e)** $(x - 4) \cdot (x - 4 - 1) = 0$
$(x - 4) \cdot (x - 5) = 0$
$L = \{4; 5\}$
f) $L = \{0; 30\}$
g) $L = \{-0{,}5; 2\}$ **h)** $L = \{-3; 1\}$ **i)** $L = \{\,\}$
j) $(3 - x) \cdot (3 + x) = 0$
$L = \{-3; 3\}$
k) $L = \{-3{,}5\}$ **l)** $L = \{3{,}5; 5{,}5\}$

K6/1 **11** Durch die Division durch x wird beim Lösungsweg 1 eine Lösung, nämlich $x = 0$, unterschlagen. Der Lösungsweg 2 gibt die vollständige Lösungsmenge wieder.

K 5/6 **12** Lösungsmöglichkeiten:

a)
1	$(x-5)\cdot(x+5)=0$	$-3\cdot(2x-10)\cdot(x+5)=0$
2	$x\cdot(x+8)=0$	$2x^2=-16x$
3	$x^2=2$	$\left(x-\sqrt{2}\right)\cdot\left(x+\sqrt{2}\right)=0$
4	$(x-1)\cdot(x+2)=0$	$2x^2-4=-2x$
5	$(x+3)^2=0$	$(x+2)^2=-2x-5$
6	$(x-4)^2=-3$	$9x^2+26=-30x$

b) Man könnte zu den bekannten Lösungen unendlich viele verschiedene Vielfache angeben.

K 5 **13** Die quadratische Gleichung wird in die Normalform gebracht, anschließend werden durch quadratisches Ergänzen die Lösungen ermittelt.

a) $x^2+6x+3=0$
$(x+3)^2=6$
$x+3=\pm\sqrt{6}$
$x_1\approx-5{,}45;\ x_2\approx-0{,}55$
$L=\{-5{,}45;\ -0{,}55\}$

b) $2x^2-8x+8+x^2=x^2+3x$
$x^2-5{,}5x+4=0$
$(x-2{,}75)^2=3{,}5625$
$x-2{,}75=\pm\sqrt{3{,}5625}$
$x_1\approx0{,}86;\ x_2\approx4{,}64$
$L=\{0{,}86;\ 4{,}64\}$

c) $x^2-3x-13=0$
$(x-1{,}5)^2=15{,}25$
$x-1{,}5=\pm\sqrt{15{,}25}$
$x_1\approx-2{,}41;\ x_2\approx5{,}41$
$L=\{-2{,}41;\ 5{,}41\}$

d) $4x^2-9-x^2+4x=4x^2-16x+16$
$x^2-20x+25=0$
$(x-10)^2=75$
$x-10=\pm\sqrt{75}$
$x_1\approx1{,}34;\ x_2\approx18{,}66$
$L=\{1{,}34;\ 18{,}66\}$

e) $x^2+10x+21=x^2-2x-3$
$x=-2$
$L=\{-2\}$

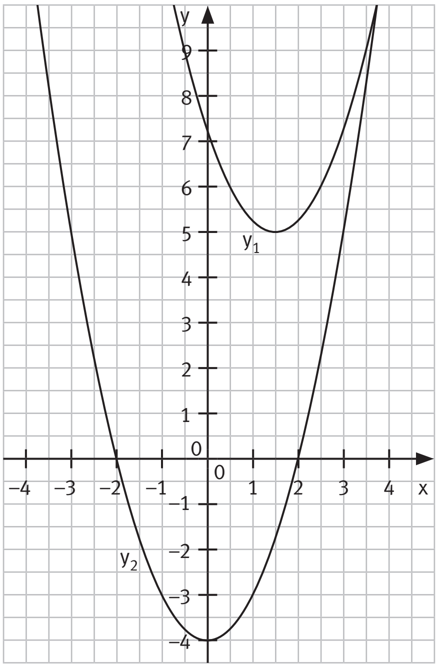
f) $x^2+x-6=x^2-x-6$
$x=0$
$L=\{0\}$

K 1/6 **14**
1 $(x+2)^2=9$
$L=\{-5;\ 1\}$
2 $x^2=9x$
$L=\{0;\ 9\}$
3 $(x+2)\cdot x=0$
$L=\{-2;\ 0\}$
4 $(x-9)^2=9$
$L=\{6;\ 12\}$
5 $(x+2)\cdot(x+3)=0$
$L=\{-3;\ -2\}$
6 $x^2-1=0$
$L=\{-1;\ 1\}$

K 6/1 **15** $x\in\mathbb{N}$
$x^2-3x=130$
$(x-1{,}5)^2=132{,}25$
$x-1{,}5=\pm11{,}5$
$x_1=-10\notin\mathbb{N};\ x_2=13$
$L=\{13\}$
Die Zahl ist 13.

$x\in\mathbb{R}$
$5\cdot(x-3)=x\cdot(x+13)$
$x^2+8x=-15$
$(x+4)^2=1$
$x+4=\pm1$
$x_1=-5;\ x_2=-3$
$L=\{-5;\ -3\}$
Die Zahl ist –5 oder –3.

K4/2 **16 a)**



b) ① $2 + 2x = 4x - 1 \Leftrightarrow x = 1{,}5$
Der Scheitelpunkt liegt bei $S(1{,}5\,|\,5)$.
Die Funktionsgleichung lautet: $y = (x - 1{,}5)^2 + 5$
Die Funktion hat keine Nullstelle.

② $P(0\,|{-4})$ in die allgemeine Funktionsgleichung eingesetzt ergibt: $-4 = 0^2 + 0p + q \Leftrightarrow q = -4$
Da ein gemeinsamer Punkt mit $y = 0{,}5x - 1$ bei $x = 2$ existiert, gilt:
$x^2 - px - 4 = 0{,}5x - 1 \Leftrightarrow -4p = 0 \Leftrightarrow p = 0$
Die Funktionsgleichung lautet: $y = x^2 - 4$
Die Funktion hat die Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.

K6/1 **17 a)** Die x-Koordinate x_S des Scheitelpunkts ist das arithmetische Mittel der Nullstellen.
x_S in die Funktionsgleichung eingesetzt ergibt die y-Koordinate y_S.

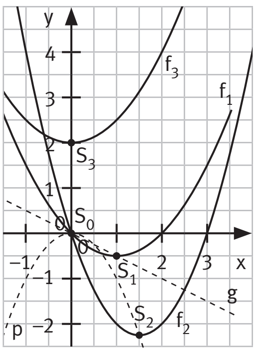
①	$y_1 = x(ax - 1)$	Nullstellen: $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{1}{a}$	$x_S = \frac{1}{2a}$	$y_S = -\frac{1}{4a}$	$S\left(\frac{1}{2a}\middle|-\frac{1}{4a}\right)$
②	$y_2 = x(x - b)$	Nullstellen: $x_1 = 0;\ x_2 = b$	$x_S = \frac{b}{2}$	$y_S = -\frac{b^2}{4}$	$S\left(\frac{b}{2}\middle|-\frac{b^2}{4}\right)$
③	$y_3 = ax^2 + c$	Nullstellen: $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}};\ x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$	$x_s = 0$	$y_s = c$	$S(0\,|\,c)$

b) ① Der Parameter a bewirkt eine Streckung oder Stauchung der Parabel im Vergleich zur Normalparabel und eine Verschiebung des Scheitelpunkts entlang der Geraden g: $y = -\frac{1}{2}x$.
$|a| = 1$: keine Streckung oder Stauchung
$|a| < 1$: Stauchung (Parabel weiter als die Normalparabel
$|a| > 1$: Streckung (Parabel enger als die Normalparabel)

② Der Parameter b bewirkt eine Verschiebung des Scheitelpunkts der Parabel entlang der Parabel p: $y = -x^2$.

③ Der Parameter a bewirkt eine Streckung oder Stauchung der Parabel im Vergleich zur Normalparabel (s. ①). Der Parameter c bewirkt eine Verschiebung des Scheitelpunkts entlang der y-Achse.

Beispiel der drei Funktionsgraphen mit a = 0,5; b = 3; c = 2:



f_1: $y = 0{,}5x^2 - x = x(0{,}5x - 1)$

f_2: $y = x^2 - 3x = x(x - 3)$

f_3: $y = 0{,}5x^2 + 2$

Entdecken

K5/6

- $2x^2 + 20x + 50 = 0 \quad | :2$
  $x^2 + 10x + 25 = 0$
  $(x + 5)^2 = 0$
  $x = -5$

  $3x^2 - 33x + 90 = 0 \quad | :3$
  $x^2 - 11x + 30 = 0 \quad$ | quadratische Ergänzung
  $(x - 5{,}5)^2 - 0{,}25 = 0$
  $(x - 5{,}5)^2 = 0{,}25 \quad | \sqrt{}$
  $x - 5{,}5 = \pm 0{,}5$
  $x = 5{,}5 \pm 0{,}5$
  $x_1 = 5;\ x_2 = 6$

K6/1

- Mithilfe von Umformungen, z. B. quadratischer Ergänzung, wird die Gleichung in eine Form gebracht, bei der die Unbekannte nur noch im Quadrat eines Binoms vorkommt. Daraus lässt sich die Lösung entweder direkt ablesen oder durch Wurzelziehen ermitteln.

Nachgefragt

K6/1

- Peter hat nicht Recht. Gegenbeispiel: Die Gleichung $x^2 + 4x + 4 = 0$ mit $b = 4 > 0$ lässt sich umformen zu $(x + 2)^2 = 0$. Sie hat die Lösung $x = -2$.

K6/1

- Es gilt: $ax^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4a}}{2a} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 + a}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + a}}{a}$
  Annika hat Recht: Wenn a positiv ist, dann gilt: $1 + a > 1$ und $\sqrt{1 + a} > 1$. Damit hat die Gleichung zwei Lösungen: eine negative und eine positive.

Aufgaben

K5

1 **a)** $a = 2;\ b = -6;\ c = 4$
$x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} = \frac{6 \pm 2}{4}$ $\quad x_1 = 1;\ x_2 = 2$ $\quad L = \{1; 2\}$

b) $a = 1;\ b = 4;\ c = 4$
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{-4}{2}$ $\quad x = -2$ $\quad L = \{-2\}$

c) $a = 1;\ b = -0{,}5;\ c = -7{,}5$
$x_{1/2} = \frac{0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 30}}{2} = \frac{0{,}5 \pm 5{,}5}{2}$ $\quad x_1 = -2{,}5;\ x_2 = 3$ $\quad L = \{-2{,}5; 3\}$

d) $a = -3;\ b = -6;\ c = 9$
$x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (-3) \cdot 9}}{-6} = \frac{6 \pm 12}{-6}$ $\quad x_1 = -3;\ x_2 = 1$ $\quad L = \{-3; 1\}$

e) $a = 0{,}5;\ b = -5{,}5;\ c = -63$
$x_{1/2} = \frac{5{,}5 \pm \sqrt{30{,}25 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (-63)}}{1} = \frac{5{,}5 \pm 12{,}5}{1}$ $\quad x_1 = 18;\ x_2 = -7$ $\quad L = \{-7; 18\}$

f) $a = 1{,}5;\ b = 7;\ c = -2{,}5$
$x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot (-2{,}5)}}{3} = \frac{-7 \pm 8}{3}$ $\quad x_1 = \frac{1}{3};\ x_2 = -5$ $\quad L = \left\{-5; \frac{1}{3}\right\}$

g) $a = 2;\ b = -0{,}5;\ c = -3{,}75$
$x_{1/2} = \frac{0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 30}}{4} = \frac{0{,}5 \pm 5{,}5}{4}$ $\quad x_1 = -1{,}25;\ x_2 = 1{,}5$ $\quad L = \{-1{,}25; 1{,}5\}$

h) $a = 1;\ b = 1{,}5;\ c = \frac{9}{16}$
$x_{1/2} = \frac{-1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 2{,}25}}{2} = \frac{-1{,}5}{2}$ $\quad x = -0{,}75$ $\quad L = \{-0{,}75\}$

i) $a = 3;\ b = 10;\ c = -25$
$x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot (-25)}}{6} = \frac{-10 \pm 20}{6}$ $\quad x_1 = 1\frac{2}{3};\ x_2 = -5$ $\quad L = \left\{-5; 1\frac{2}{3}\right\}$

K5 **2** **a)** $a = 5;\ b = 15;\ c = -10$

$x_{1/2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 4 \cdot 5 \cdot (-10)}}{10} = \frac{-15 \pm \sqrt{425}}{10}$ $x_1 \approx -3{,}56;\ x_2 \approx 0{,}56$ $L = \{-3{,}56;\ 0{,}56\}$

b) $a = -1;\ b = 2{,}5;\ c = -1{,}5$

$x_{1/2} = \frac{-2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1{,}5)}}{-2} = \frac{-2{,}5 \pm 0{,}5}{-2}$ $x_1 = 1;\ x_2 = 1{,}5$ $L = \{1;\ 1{,}5\}$

c) $a = -1;\ b = 3;\ c = 4$

$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{-2} = \frac{-3 \pm 5}{-2}$ $x_1 = -1;\ x_2 = 4$ $L = \{-1;\ 4\}$

d) $a = 1;\ b = 7;\ c = -8$

$x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot (-8) \cdot 1}}{2} = \frac{-7 \pm 9}{2}$ $x_1 = -8;\ x_2 = 1$ $L = \{-8;\ 1\}$

e) $a = 1;\ b = -4;\ c = 3$

$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$ $x_1 = 1;\ x_2 = 3$ $L = \{1;\ 3\}$

f) $a = 2;\ b = 6;\ c = -10$

$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{4} = \frac{-6 \pm \sqrt{116}}{4}$ $x_1 \approx -4{,}19;\ x_2 \approx 1{,}19$ $L = \{-4{,}19;\ 1{,}19\}$

g) $x \cdot (x - 5) + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0$

$a = 1;\ b = -5;\ c = 1$

$x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ $x_1 \approx 0{,}21;\ x_2 \approx 4{,}79$ $L = \{0{,}21;\ 4{,}79\}$

h) $x \cdot (2 - x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0$

$a = -1;\ b = 2;\ c = 0$ $x_1 = 0;\ x_2 = 2$ $L = \{0;\ 2\}$

i) $-2x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow -2\,(x^2 - 1) = 0$ $x_1 = -1;\ x_2 = 1$ $L = \{-1;\ 1\}$

j) $a = 256;\ b = -32;\ c = 1$

$x_{1/2} = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 4 \cdot 256 \cdot 1}}{512} = \frac{32 \pm 0}{512}$ $x_1 = 0{,}0625$ $L = \{0{,}0625\}$

k) $y^2 - \frac{7}{5}y = 0 \Leftrightarrow y\left(y - \frac{7}{5}\right) = 0$

$a = 1;\ b = -\frac{7}{5};\ c = 0$ $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{7}{5}$ $L = \left\{0;\ \frac{7}{5}\right\}$

l) $a = 0{,}5;\ b = -\frac{1}{3};\ c = 1$

$x_{1/2} = \frac{\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 1}}{1} = \frac{\frac{1}{3} \pm \sqrt{-\frac{17}{9}}}{1}$ $L = \{\ \}$

K5 **3** **a)** $x^2 - 2{,}4x + 1{,}43 = 0$ $x_{1/2} = \frac{2{,}4 \pm \sqrt{5{,}76 - 5{,}72}}{2} = 1{,}2 \pm 0{,}1$ $L = \{1{,}1;\ 1{,}3\}$

b) $1{,}5x^2 + 0{,}75x - 1{,}26 = 0$ $x_{1/2} = \frac{-0{,}75 \pm \sqrt{0{,}5625 + 7{,}56}}{3} = -0{,}25 \pm 0{,}95$ $L = \{-1{,}2;\ 0{,}7\}$

c) $x^2 - 7x - 2{,}75 = 0$ $x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 11}}{2} \approx \frac{7 \pm 7{,}75}{2}$ $L = \{-0{,}375;\ 7{,}375\}$

d) $2x^2 - 0{,}4x - 0{,}48 = 0$ $x_{1/2} = \frac{0{,}4 \pm \sqrt{0{,}16 + 3{,}84}}{4} = 0{,}1 \pm 0{,}5$ $L = \{-0{,}4;\ 0{,}6\}$

e) $x^2 - 4x + 4 = 0$ $x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$ $L = \{2\}$

f) $-3x^2 + 9x + 15 = 0$ $x_{1/2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 180}}{-6} \approx \frac{-9 \pm 16{,}16}{-6}$ $L = \{-1{,}19;\ 4{,}19\}$

K5 **4** **a)** $L = \{-8;\ -6\}$ **b)** $L = \{1;\ 15\}$ **c)** $L = \{-11;\ 8\}$

d) $L = \{-3;\ -2\}$ **e)** $L = \{-1;\ 8{,}5\}$ **f)** $L = \left\{\frac{1}{6};\ \frac{1}{2}\right\}$

g) $x^2 + 4x - 5 = 0$
$L = \{-5;\ 1\}$

h) $x^2 - 10x - 11 = 0$
$L = \{-1;\ 11\}$

i) $x^2 - x - 0{,}75 = 0$
$L = \{-0{,}5;\ 1{,}5\}$

j) $x^2 - x - 6 = 0$
$L = \{-2;\ 3\}$

k) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0$
$L = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

l) $x^2 + 5{,}625 = 0$
$L = \{\ \}$

K 1/6 **5** **a)** ① Mithilfe der quadratischen Ergänzung kann ein Term zu einer binomischen Formel zusammengefasst werden. Damit lässt sich die Lösungsformel für quadratische Gleichungen herleiten.

② $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

b) Wie im Einstiegsbeispiel wird die Gleichung mithilfe von quadratischer Ergänzung in eine Form gebracht, bei der die Unbekannte nur noch im Quadrat eines Binoms vorkommt. Daraus lässt sich die Lösung durch Wurzelziehen ermitteln.

K 5 **6** **a)** $L = \{-3; 1\}$ **b)** $L = \{-7; 1\}$ **c)** $L = \varnothing$

d) $L = \{2{,}5; 2\}$ **e)** $L = \left\{\frac{5}{3}; 3\right\}$ **f)** $L = \{-13; 0\}$

g) $L = \{-3; 1\}$ **h)** $L = \{7\}$ **i)** $L = \{3{,}5\}$

K 5 **7** **a)** $x^2 + 9x - 52 = 0$, $L = \{-13; 4\}$ **b)** $x^2 - 3x - 70 = 0$, $L = \{-7; 10\}$ **c)** $x^2 - \frac{1}{2}x - 5 = 0$, $L = \{-2; 2{,}5\}$ **d)** $x^2 - 10x + 21 = 0$, $L = \{3; 7\}$

K 5 **8** **a)** $x^2 + 6x + \square = 0$

$x_{1/2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \square} = -3 \pm \sqrt{9 - \square}$

$-3 \pm \sqrt{9 - \square} = -2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{9 - \square} = 1 \Leftrightarrow 9 - \square = 1 \Leftrightarrow \square = 8$ Die Gleichung lautet: $x^2 + 6x + 8 = 0$

b) $b^2 - 10b - \square = 0$

$b_{1/2} = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10}{2}\right)^2 + \square} = 5 \pm \sqrt{25 + \square}$

$5 \pm \sqrt{25 + \square} = 2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{25 + \square} = -3 \Leftrightarrow 25 + \square = 9 \Leftrightarrow \square = -16$ Die Gleichung lautet: $b^2 - 10b + 16 = 0$

c) $a^2 + 8a - \square = 0$

$a_{1/2} = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + \square} = -4 \pm \sqrt{16 + \square}$

$-4 \pm \sqrt{16 + \square} = -6 \Leftrightarrow \pm\sqrt{16 + \square} = -2 \Leftrightarrow 16 + \square = 4 \Leftrightarrow \square = -12$ Die Gleichung lautet: $a^2 + 8a + 12 = 0$

d) $3g^2 - 4g + \square = 2g^2 \Leftrightarrow g^2 - 4g + \square = 0$

$g_{1/2} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - \square} = 2 \pm \sqrt{4 - \square}$

$2 \pm \sqrt{4 + \square} = -1 \Leftrightarrow \pm\sqrt{4 + \square} = -3 \Leftrightarrow 4 + \square = 9 \Leftrightarrow \square = 5$ Die Gleichung lautet: $3g^2 - 4g + 5 = 2g^2$

K 5 **9** **a)** $D = 16 + 12 = 28$ > 0, also 2 Lösungen

b) $D = 36 - 40 = -4$ < 0, also keine Lösung

c) $D = 144 - 48 = 96$ > 0, also 2 Lösungen

d) $D = 100 - 120 = -20$ < 0, also keine Lösung

e) $D = 1 + 0 = 1$ > 0, also 2 Lösungen

f) $D = 1 - 4 = -3$ < 0, also keine Lösung

K5/1 **10** Vor der Bestimmung der Diskriminante wird die Gleichung in die Form $x^2 + bx + c = 0$ gebracht und hierzu die Diskriminante berechnet.

a) $x^2 - 1{,}4x + 0{,}5 = 0$	$D = -0{,}04 < 0$	keine Lösung
b) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0$	$D = -\frac{8}{9} < 0$	keine Lösung
c) $x^2 + 2x + 36 = 0$	$D = -140 < 0$	keine Lösung
d) $x^2 - 0{,}5x + \frac{17}{18} = 0$	$D \approx -3{,}5 < 0$	keine Lösung
e) $x^2 + 5{,}2x + 1 = 0$	$D = 23{,}0 > 0$	zwei Lösungen
f) $x^2 + 6x + 9 = 0$	$D = 0$	eine Lösung

K5/1 **11**

a)	$D = -68$	$D < 0 \Rightarrow$ keine Lösung	$L = \{\ \}$
b)	$D = 58$	$D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen	$L = \left\{\frac{-10-\sqrt{58}}{2}; \frac{-10+\sqrt{58}}{2}\right\} \approx \{-8{,}81; -1{,}19\}$
c)	$D = 1296$	$D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen	$L = \{-7; 5\}$
d)	$D = 76{,}5625$	$D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen	$L = \{-1; 1{,}5\}$
e)	$D = -144$	$D < 0 \Rightarrow$ keine Lösung	$L = \{\ \}$
f)	$D = -236$	$D < 0 \Rightarrow$ keine Lösung	$L = \{\ \}$
g)	$D = -576$	$D < 0 \Rightarrow$ keine Lösung	$L = \{\ \}$
h)	$D = 4$	$D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen	$L = \{-3{,}5; -1{,}5\}$
i)	$D = 121$	$D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen	$L = \{-8; 3\}$
j)	$D = 306{,}25$	$D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen	$L = \{-1; 1{,}5\}$
k)	$D = 0{,}04$	$D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen	$L = \{1{,}4; 1{,}6\}$
l)	$D = 1250$	$D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen	$L = \{5 - 5\sqrt{2}; 5 + 5\sqrt{2}\} \approx \{-2{,}07; 12{,}07\}$

K5 **12** **a)** $5x^2 + 37x + 96 = 0$ $L = \{\ \}$ **b)** $9x^2 - 78x + 160 = 0$ $L = \left\{\frac{10}{3}; \frac{16}{3}\right\}$ **c)** $x^2 - 16x + 15 = 0$ $L = \{1; 15\}$ **d)** $x^2 + 7x - 60 = 0$ $L = \{-12; 5\}$

K5/1 **13** **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
$x^2 - 14 = 0$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{14}$
$L = \{-\sqrt{14}; \sqrt{14}\} \approx \{-3{,}74; 3{,}74\}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x^2 - 8x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-16}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{3}$
$L = \{4 - 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3}\} \approx \{0{,}54; 7{,}46\}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{1{,}75\}$
$12x^2 + 6x - 59 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+2832}}{24} = \frac{-3 \pm \sqrt{717}}{12}$
$L = \left\{\frac{-3-\sqrt{717}}{12}; \frac{-3+\sqrt{717}}{12}\right\} \approx \{-2{,}48; 1{,}98\}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$
$4x^2 - 22x + 25 = 0$
$x_{1/2} = \frac{22 \pm \sqrt{484-400}}{8} = \frac{11 \pm \sqrt{21}}{4}$
$L = \left\{\frac{11-\sqrt{21}}{4}; \frac{11+\sqrt{21}}{4}\right\} \approx \{1{,}60; 3{,}90\}$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; -\frac{1}{3}; 1\}$
$7x^2 - 2x - 5 = 0$
$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+140}}{14} = \frac{1 \pm 6}{7}$
$L = \left\{-\frac{5}{7}\right\}$; ($x = 1$ entfällt wegen D)

f) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right\}$
$6{,}5x^2 + 10{,}5x + 2{,}5 = 0 \Leftrightarrow 13x^2 + 21x + 5 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-21 \pm \sqrt{441-260}}{26} = \frac{-21 \pm \sqrt{181}}{26}$
$L = \left\{\frac{-21-\sqrt{181}}{26}; \frac{-21+\sqrt{181}}{26}\right\} \approx \{-1{,}33; -0{,}29\}$

K3 **14** Es gilt: $x^2 = \frac{c}{a}$
Für $\frac{c}{a} < 0$ hat die Gleichung keine Lösung. Dies ist genau dann der Fall, wenn $c < 0$ und $a > 0$ oder wenn $c > 0$ und $a < 0$.
Für $\frac{c}{a} = 0$ hat die Gleichung eine Lösung. Dieser Fall tritt für $c = 0$ ein.
Für $\frac{c}{a} > 0$ hat die Gleichung zwei Lösungen. Dies ist genau dann der Fall, wenn $c < 0$ und $a < 0$ oder wenn $c > 0$ und $a > 0$.

K5

15 a) $x^2 + 8x - a = 0$ $\quad D = 16 + a > 0 \Leftrightarrow a > -16$
Setzt man also beispielsweise a = 0, so hat die Gleichung zwei Lösungen.

b) $x^2 + 8x - a = 0$
Mit dem Satz von Vieta und $x_1 = -2$ gilt: $x_1 + x_2 = -8 \Leftrightarrow -2 + x_2 = -8 \Leftrightarrow x_2 = -6$
Mit $x_1 = -2$ und $x_2 = -6$ gilt: $-a = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow -a = 12 \Leftrightarrow a = -12$

c) Zwei positive Lösungen sind nicht möglich, denn $f(x) = x^2 + 8x = x(x + 8)$ ist eine verschobene Normalparabel mit den Nullstellen $x_1 = -8$ und $x_2 = 0$ und dem Scheitelpunkt $S(-4|-16)$. Für $a < -16$ gibt es keine Lösung. Beim Schneiden mit $g(x) = a$ mit $a > -16$ ist mindestens eine Lösung negativ.

d) Da der Scheitelpunkt der Parabel $f(x) = x^2 + 8x$ bei $S(-4|-16)$ liegt (vgl. c), muss für a gelten: $-16 < a < 0$. Setzt man beispielsweise $a = -1$, so hat die Gleichung zwei negative Lösungen.

e) $D = \left(\frac{-8}{2}\right)^2 + a = 16 + a$ $\quad$ Mit D = 0 gilt: $16 + a = 0 \Leftrightarrow a = -16$

f) Für $a > 0$ liegt eine positive und eine negative Lösung vor (vgl. c und d).

K3/5

16 a) Es gibt zwei Möglichkeiten für das neue Rechteck (mit dem gleichen Endergebnis): Entweder wird die kurze Seite um x cm verkürzt und die lange Seite um x cm verlängert oder es wird die lange Seite um x cm verkürzt und die kurze Seite um x cm verlängert.

1. Fall: $D_1 = \{x | 0 < x < 4\}$
$(4 - x) \cdot (7 + x) = 21{,}25$
$x^2 + 3x - 6{,}75 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 27}}{2} = \frac{-3 \pm 6}{2}$
$x_1 = -4{,}5 \notin D_1$; $x_2 = 1{,}5 \in D_1$
$L_1 = \{1{,}5\}$
Die Seiten werden um 1,5 cm verkürzt bzw. verlängert; die Seitenlängen des neuen Rechtecks betragen 2,5 cm und 8,5 cm.

2. Fall: $D_2 = \{x | 0 < x < 7\}$
$(7 - x) \cdot (4 + x) = 21{,}25$
$x^2 - 3x - 6{,}75 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 27}}{2} = \frac{-3 \pm 6}{2}$
$x_1 = -1{,}5 \notin D_2$; $x_2 = 4{,}5 \in D_2$
$L_2 = \{4{,}5\}$
Die Seiten werden um 4,5 cm verkürzt bzw. verlängert; die Seitenlängen des neuen Rechtecks betragen 2,5 cm und 8,5 cm.

b) Aus dem Quadrat soll ein Rechteck mit 165 cm² Flächeninhalt entstehen.
$D = \{x | 0 < x < 12\}$
$(12 - x) \cdot (12 + 2x) = 165$
$2x^2 - 12x + 21 = 0$
$x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{-24}}{4}$
$L = \{\ \}$

Aus dem Quadrat soll ein Rechteck mit 160 cm² Flächeninhalt entstehen.
$D = \{x | 0 < x < 12\}$
$(12 - x) \cdot (12 + 2x) = 160$
$2x^2 - 12x + 16 = 0$
$x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{4} \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = 4$
$L = \{2; 4\}$

Ein Rechteck mit 165 cm² Flächeninhalt kann nicht entstehen. Ein Rechteck mit 160 cm² Flächeninhalt kann entstehen, und zwar auf zwei unterschiedliche Arten: Bei Verkürzung um 2 cm und Verlängerung um 4 cm hat das neue Rechteck Seitenlängen von 10 cm und 16 cm; bei Verkürzung um 4 cm und Verlängerung um 8 cm hat das neue Rechteck Seitenlängen von 8 cm und 20 cm.

c) $631{,}75 = 7 \cdot (7 + x)^2$
$90{,}25 = (7 + x)^2$
$x_{1/2} = -7 \pm 9{,}5$ $\quad x_1 = -16{,}5 < 0$ keine Lösung im Kontext
$x = x_2 = 2{,}5$ $\quad$ Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche beträgt 9,5 cm.

Werkzeug

K5/4

- Die Schülerinnen und Schüler üben die grafische und die rechnerische Nutzung des grafikfähigen Taschenrechners (GTR) zur Lösung quadratischer Gleichungen.

a) $L = \{-0{,}4; 0{,}75\}$ **b)** $L = \{-2; 12\}$ **c)** $L = \left\{\frac{1}{2} - \sqrt{2}; \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right\} = \{-0{,}914; 1{,}914\}$ **d)** $L = \{-0{,}4; 0{,}6\}$

2.4 Systeme quadratischer Gleichungen

Entdecken

K3/6

- Man kann die Funktionsgleichungen der Geraden g (Bahnverlauf der Zahnradbahn) und der Parabel p (Schlucht) bestimmen und anschließend beide Funktionsgleichungen gleichsetzen. So kann man die Schnittstellen beider Kurven ermitteln bzw. die Koordinaten der Schnittpunkte.
  $m_g = \frac{2-0}{-4-(-8)} = \frac{2}{4} = 0{,}5$
  g: $0 = 0{,}5 \cdot (-8) + t \Rightarrow t = 4$
  g: $y = 0{,}5x + 4$
  p: $y = 0{,}5x^2 + 1$
  $0{,}5x + 4 = 0{,}5x^2 + 1$
  $0{,}5x^2 - 0{,}5x - 3 = 0$
  $x_{1/2} = \frac{0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (-3)}}{1} = 0{,}5 \pm 2{,}5 \Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 3$
  Die Bahn fährt in $S_1\,(-2|3)$ aus dem Tunnel und in $S_2\,(3|5{,}5)$ wieder in einen zweiten Tunnel hinein.

Nachgefragt

K6/1

- Für $t < 0$ besitzt die Funktion $y = t$ keinen Schnittpunkt mit der Normalparabel.
  Für $t = 0$ besitzt die Funktion $y = t$ genau einen Schnittpunkt mit der Normalparabel: $(S\,(0|0))$.
  Für $t > 0$ besitzt die Funktion $y = t$ zwei Schnittpunkte mit der Normalparabel.

Aufgaben

K5/4

1 Die Gleichungen von p und g werden gleichgesetzt, man erhält eine quadratische Gleichung. Die Diskriminante D zeigt die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung und damit die Lage der Geraden zur Parabel als Passante, Tangente oder Sekante an.

a) $-x^2 + 4x - 4 = 0$
$D = 0$ Tangente $S_1\,(2|4)$

b) $y = -5$ Sekante $S_2\,(5|-5)$

c) $-x^2 + 2x - 3 = 0$
$D = -8 < 0$ Passante

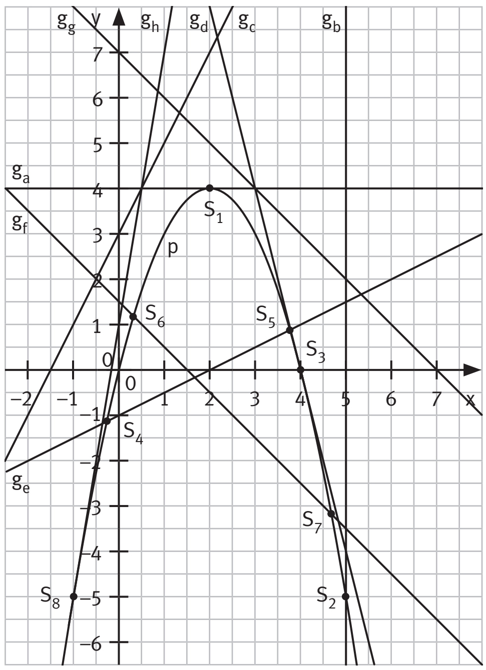
d) $-x^2 + 8x - 16 = 0$
$D = 0$ Tangente $S_3\,(4|0)$

e) $-x^2 + 3{,}5x + 1 = 0$
$D = 16{,}25 > 0$ Sekante $S_4\,(-0{,}3|-1{,}1)$, $S_5\,(3{,}8|0{,}9)$

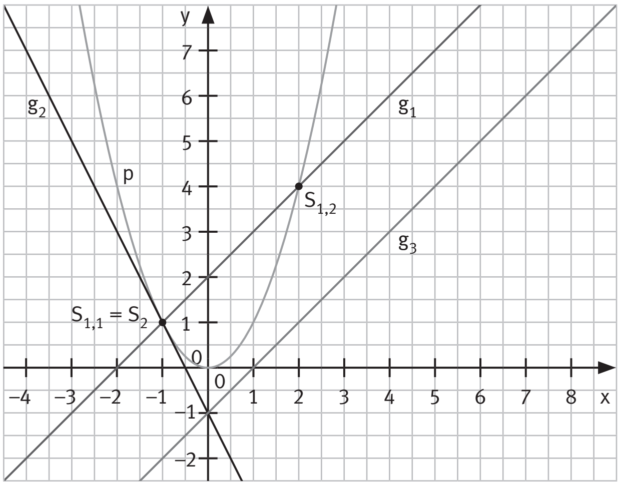
f) $-x^2 + 5x - 1{,}5 = 0$
$D = 19 > 0$ Sekante $S_6\,(0{,}3|1{,}2)$, $S_7\,(4{,}7|-3{,}2)$

g) $-x^2 + 5x - 7 = 0$
$D = -3 < 0$ Passante

h) $-x^2 - 2x - 1 = 0$
$D = 0$ Tangente $S_8\,(-1|-5)$



K4/5 **2** **a)**



b) $S_{1,1}(-1|1)$; $S_{1,2}(2|4)$; $S_2(-1|1)$

$g_1 = p$: $x + 2 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -1$; $x_2 = 2$ — $S_{1,1}(-1|1)$; $S_{1,2}(2|4)$

$g_2 = p$: $-2x - 1 = x^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} \Rightarrow x_1 = -1$ — $S_2(-1|1)$

$g_3 = p$: $x - 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ — keine Lösung, kein Schnittpunkt

c) Es gilt:
Diskriminante $D > 0 \Rightarrow$ zwei Schnittpunkte
Diskriminante $D = 0 \Rightarrow$ ein Schnittpunkt
Diskriminante $D < 0 \Rightarrow$ kein Schnittpunkt

K5 **3**

a) $x + 4 = x^2 - x + 1$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$
$x_1 = -1$; $x_2 = 3$
$y_1 = 3$; $y_2 = 7$
$S_1(-1|3)$; $S_2(3|7)$
$L = \{(-1|3); (3|7)\}$

b) $x + 3 = \frac{1}{3}x^2 + x$
$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$
$x_1 = -3$; $x_2 = 3$
$y_1 = 0$; $y_2 = 6$
$S_1((-3|0)$; $S_2(3|6)$
$L = \{(-3|0); (3|6)\}$

c) $-x + 6{,}5 = -x^2 + 2x$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 6{,}5 = 0$
$D = -17 < 0$
Kein Schnittpunkt
$L = \varnothing$

d) $-2x + 4 = -x^2 + 4$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$
$x_1 = 0$; $x_2 = 2$
$y_1 = 4$; $y_2 = 0$
$S_1(0|4)$; $S_2(2|0)$
$L = \{(0|4); (2|0)\}$

e) $2x + 3 = x^2 + x - 3$
$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$
$x_1 = -2$; $x_2 = 3$
$y_1 = -1$; $y_2 = 9$
$S_1(-2|-1)$; $S_2(3|9)$
$L = \{(-2|-1); (3|9)\}$

f) $-x + 5 = x^2 - 4x + 5$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$
$x_1 = 0$; $x_2 = 3$
$y_1 = 5$; $y_2 = 2$
$S_1(0|5)$; $S_2(3|2)$
$L = \{(0|5); (3|2)\}$

K5 **4** Für die Seiten des Rechtecks mit den Längen a cm und b cm bzw. a m und b m ($a, b > 0$) gilt:

a) I $44 = 2a + 2b \Leftrightarrow 22 = a + b$
II $117 = a \cdot b \Leftrightarrow a = \frac{117}{b}$
a in I einsetzen:
$22 = \frac{117}{b} + b \Leftrightarrow b^2 - 22b + 117 = 0$
$b_{1/2} = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 468}}{2} = 11 \pm 2$
$b_1 = 9$; $b_2 = 13$ und $a_1 = 13$; $a_2 = 9$
Die Seitenlängen des Rechtecks betragen 9 cm und 13 cm.

b) I $a = b + 12$
II $405 = a \cdot b$
a in II einsetzen:
$405 = (b + 12) \cdot b \Leftrightarrow 0 = b^2 + 12b - 405$
$b_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 1620}}{2} = -6 \pm 21$
$b_1 = -27$; $b_2 = 15$
Da $a > 0$ und $b > 0$, gilt nun: $b = 15$; $a = 27$
Die Seitenlängen des Rechtecks betragen 15 m und 27 m.

K5/4 **5** **a)** Die Scheitelpunktform der Parabel lautet:

$p: y = -0{,}25(x-4)^2 + 7$

$\Leftrightarrow p: y = -0{,}25(x^2 - 8x + 16) + 7$

$\Leftrightarrow p: y = -0{,}25x^2 + 2x + 3$

b) $-0{,}25x^2 + 2x + 3 = 0{,}5x - 1$

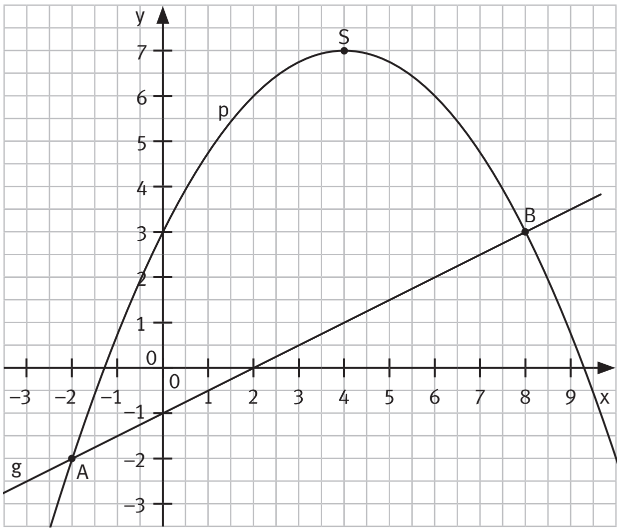
$\Leftrightarrow 0{,}25x^2 - 1{,}5x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$

$x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = 3 \pm 5$

$x_1 = -2;\ x_2 = 8$ und $y_1 = -2;\ y_2 = 3$

A (−2 | −2); B (8 | 3)



K5 **6**

	a)	b)
Parallelenschar	$y = 2x + t$	$y = -4x + t$
Funktionsterme gleichsetzen	$x^2 - 4x + 1 = 2x + t$ $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 - t = 0$	$-2x^2 + 1 = -4x + t$ $\Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 1 + t = 0$
D bestimmen	$D = 32 + 4t$	$D = 24 - 8t$
Bedingung: D = 0	$32 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = -8$	$24 - 8t = 0 \Leftrightarrow t = 3$
Tangente	$y = 2x - 8$	$y = -4x + 3$

	c)	d)
Parallelenschar	$y = -2x + t$	$y = 3x + t$
Funktionsterme gleichsetzen	$0{,}5x^2 + 3x = -2x + t$ $\Leftrightarrow 0{,}5x^2 + 5x - t = 0$	$-0{,}75x^2 = 3x + t$ $\Leftrightarrow 0{,}75x^2 + 3x + t = 0$
D bestimmen	$D = 25 + 2t$	$D = 9 - 3t$
Bedingung: D = 0	$25 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = -12{,}5$	$9 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 3$
Tangente	$y = -2x - 12{,}5$	$y = 3x + 3$

	e)	f)
Parallelenschar	$y = -x + t$	$y = x + t$
Funktionsterme gleichsetzen	$x^2 + 3x - 1 = -x + t$ $\Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 - t = 0$	$-x^2 + 5 = x + t$ $\Leftrightarrow -x^2 - x + 5 - t = 0$
D bestimmen	$D = 20 + 4t$	$D = 21 - 4t$
Bedingung: D = 0	$20 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = -5$	$21 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 5{,}25$
Tangente	$y = -x - 5$	$y = x - 5{,}25$

	g)	h)
Parallelenschar	$y = 3x + t$	$y = -2x + t$
Funktionsterme gleichsetzen	$3x^2 - 3x - 3 = 3x + t$ $\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 3 - t = 0$	$0{,}25x^2 - 2x + 1 = -2x + t$ $\Leftrightarrow 0{,}25x^2 + 1 - t = 0$
D bestimmen	$D = 72 + 12t$	$D = -1 + t$
Bedingung: D = 0	$72 + 12t = 0 \Leftrightarrow t = -6$	$-1 + t = 0 \Leftrightarrow t = 1$
Tangente	$y = 3x - 6$	$y = -2x + 1$

K 5/4

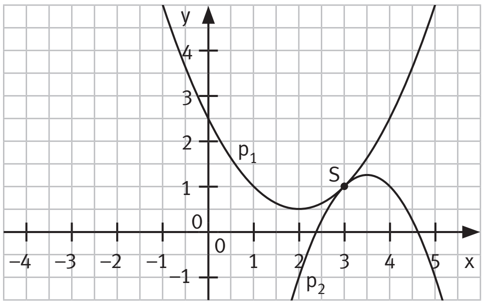
7 Die Funktionsgleichungen der beiden Parabeln werden gleichgesetzt und die Diskriminante berechnet; diese gibt an, ob die Gleichung eine Lösung (D = 0), zwei Lösungen (D > 0) oder keine Lösung (D < 0) besitzt. Falls die Gleichung eine oder zwei Lösungen hat, berechnet man diese mit der Lösungsformel. Durch Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen erhält man die y-Werte der Schnittpunkte.

a) $\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{1}{2}=-x^2+7x-11$

$\Leftrightarrow 1{,}5x^2-9x+13{,}5=0$

$D=81-81=0 \Rightarrow$ 1 Lösung

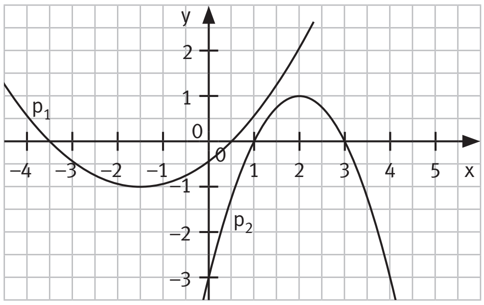
$x=3 \Rightarrow S\,(3\,|\,1)$



b) $\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{7}{16}=-x^2+4x-3$

$\Leftrightarrow 5x^2-13x+10{,}25=0$

$D=169-205=-36<0 \Rightarrow$ keine Lösung

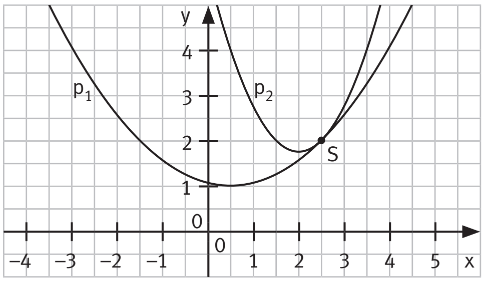


c) $\frac{1}{4}\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+1=x^2-4x+\frac{23}{4}$

$\Leftrightarrow 0=3x^2-15x+18{,}75$

$D=225-225=0 \Rightarrow$ 1 Lösung

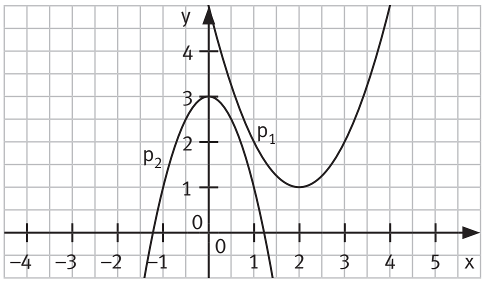
$x=2{,}5 \Rightarrow S\,(2{,}5\,|\,2)$



d) $x^2-4x+5=-2x^2+3$

$\Leftrightarrow 3x^2-4x+2=0$

$D=16-24=-8<0 \Rightarrow$ keine Lösung



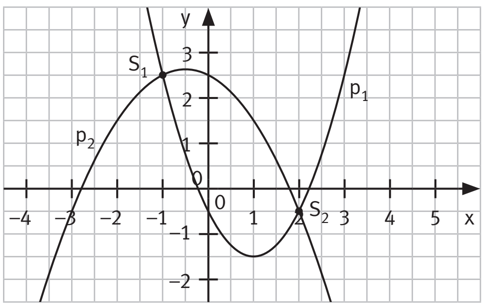
e) $x^2-2x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{21}{8}$

$\Leftrightarrow 1{,}5x^2-1{,}5x-3=0$

$D=2{,}25+18=20{,}25>0 \Rightarrow$ 2 Lösungen

$x_{1/2}=\frac{1{,}5\pm4{,}5}{3}=0{,}5\pm1{,}5$

$x_1=-1;\ x_2=2 \Rightarrow S_1\,(-1\,|\,2{,}5);\ S_2\,(2\,|\,-0{,}5)$

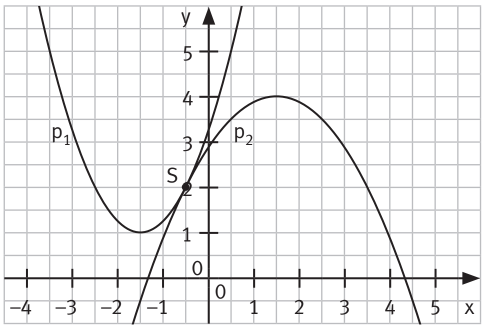


f) $x^2+3x+\frac{13}{4}=-\frac{1}{2}\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+4$

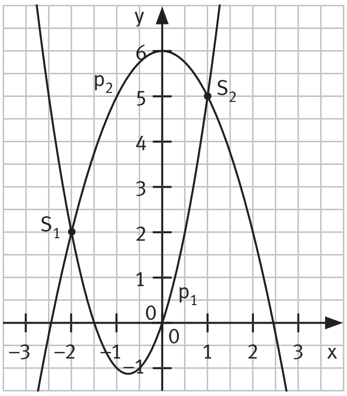
$\Leftrightarrow 1{,}5x^2+1{,}5x+0{,}375=0$

$D=2{,}25-2{,}25=0 \Rightarrow$ 1 Lösung

$x=\frac{-2{,}25}{4{,}5}=-0{,}5 \Rightarrow S\,(-0{,}5\,|\,2)$

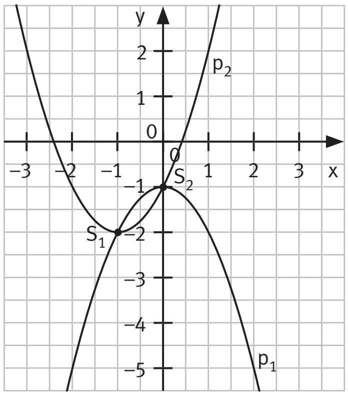


K4/5 **8** **a)**



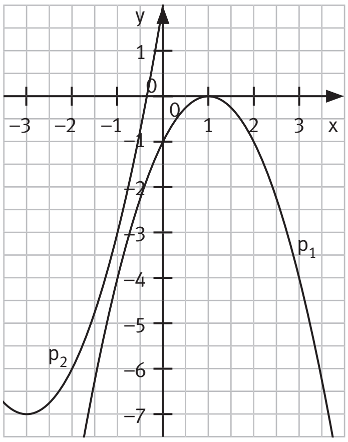
$S_1\,(-2\,|\,2)$
$S_2\,(1\,|\,5)$

b)



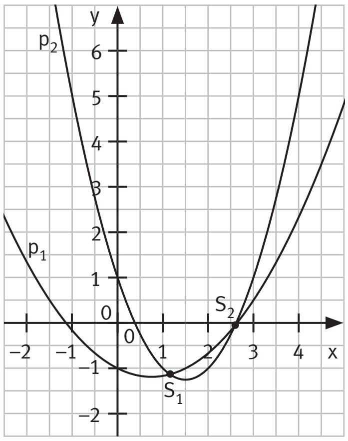
$S_1\,(-1\,|\,-2)$
$S_2\,(0\,|\,-1)$

c)



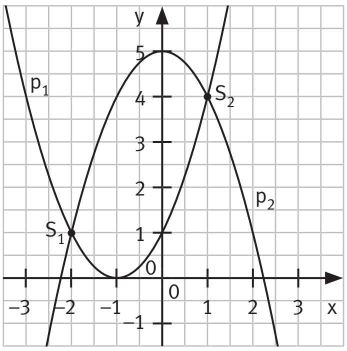
kein Schnittpunkt

d)



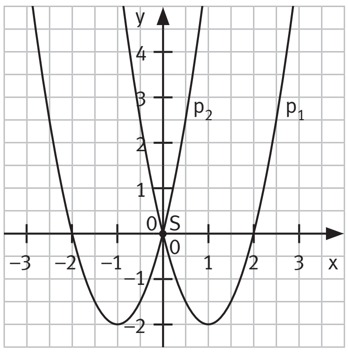
$S_1\,(1{,}2\,|\,-1{,}1)$
$S_2\,(2{,}6\,|\,-0{,}1)$

e)



$S_1\,(-2\,|\,1)$
$S_2\,(1\,|\,4)$

f)



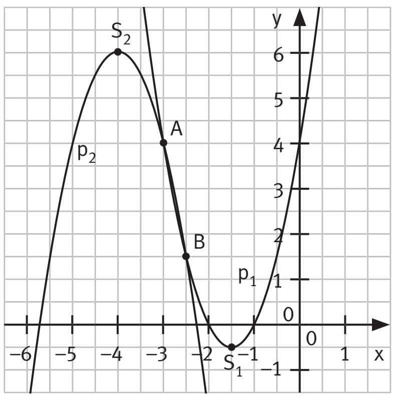
$S\,(0\,|\,0)$

K5/1 **9** **a)** Berechnung der Scheitelkoordinaten $S\,(x_S\,|\,y_S)$ durch quadratisches Ergänzen:

p_1: $y = 2(x^2 + 3x) + 4$
$= 2[(x + 1{,}5)^2 - 2{,}25] + 4$
$= 2(x + 1{,}5)^2 - 0{,}5$ $\quad S_1\,(-1{,}5\,|\,-0{,}5)$

p_2: $y = -2(x^2 + 8x) - 26$
$= -2[(x + 4)^2 - 16] - 26$
$= -2(x + 4)^2 + 6$ $\quad S_2\,(-4\,|\,6)$

Bezüglich der Vermutung über die Anzahl der gemeinsamen Punkte sind individuelle Antworten möglich.



b) Gleichsetzen der Parabelgleichungen:

$2x^2 + 6x + 4 = -2x^2 - 16x - 26 \Leftrightarrow 4x^2 + 22x + 30 = 0$

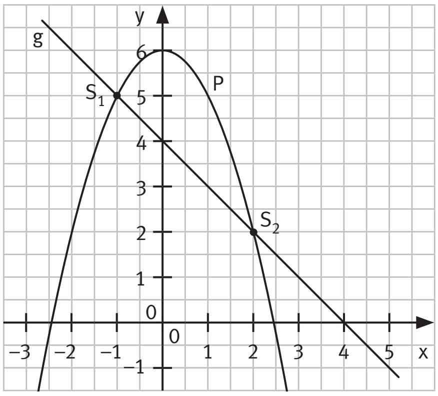
$D = 484 - 380 = 4 > 0$

Die Parabeln haben zwei gemeinsame Punkte.

$x_{1/2} = \frac{-22 \pm 2}{8} = -2{,}75 \pm 0{,}25$: $A\,(-3\,|\,4)$ und $B\,(-2{,}5\,|\,1{,}5)$

K 4/5

10 a)



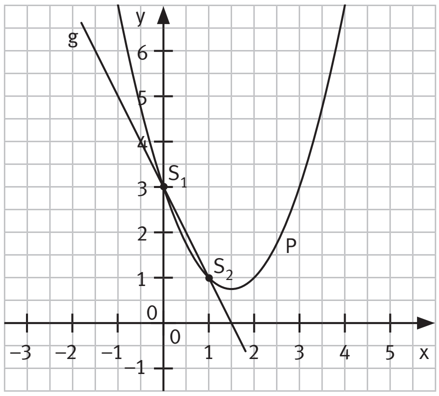
$S_1(-1|5)$; $S_2(2|2)$

Probe: S_1: $5 = 1 + 4 \quad \wedge \quad 5 = -1 + 6$ w

S_2: $2 = -2 + 4 \quad \wedge \quad 2 = -4 + 6$ w

$L = \{(-1|5); (2|2)\}$

b)



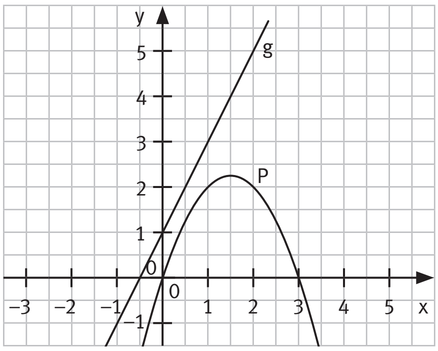
$S_1(0|3)$; $S_2(1|1)$

Probe: S_1: $3 = 3 \quad \wedge \quad 3 = 3$ w

S_2: $1 = -2 + 3 \quad \wedge \quad 1 = 1 - 3 + 3$ w

$L = \{(0|3); (1|1)\}$

c)



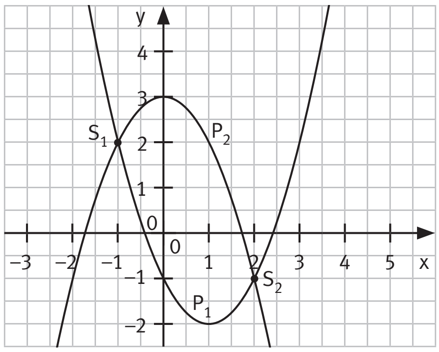
Es gibt keinen Schnittpunkt.

$2x + 1 = 3x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$

Diskriminante $D = 1 - 4 = -3 < 0$

$L = \varnothing$

d)



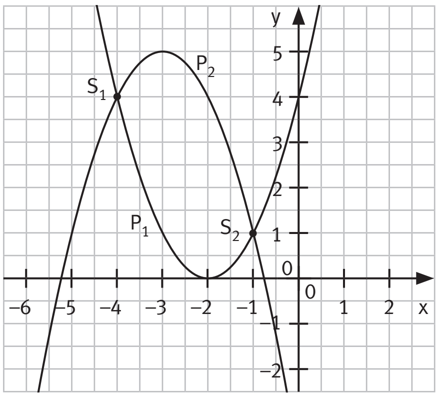
$S_1(-1|2)$; $S_2(2|-1)$

Probe: S_1: $2 = 4 - 2 \quad \wedge \quad 2 = -1 + 3$ w

S_2: $-1 = 1 - 2 \quad \wedge \quad -1 = -4 + 3$ w

$L = \{(-1|2); (2|-1)\}$

e)



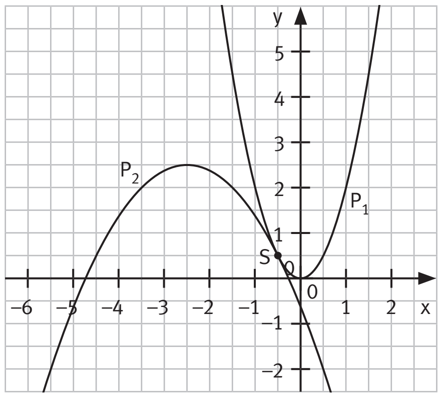
$S_1(-4|4)$; $S_2(-1|1)$

Probe: S_1: $4 = (-2)^2 \quad \wedge \quad 4 = -(-1)^2 + 5$ w

S_2: $1 = 1^2 \quad \wedge \quad 1 = -2^2 + 5$ w

$L = \{(-4|4); (-1|1)\}$

f)



$S(-0{,}5|0{,}5)$

$2x^2 = -0{,}5x^2 - 2{,}5x - 0{,}625 \Leftrightarrow x^2 + x + 0{,}25 = 0$

Diskriminante $D = 0 \Rightarrow$ eine Lösung

Probe: $0{,}5 = 2 \cdot 0{,}25 \wedge$

$0{,}5 = -0{,}125 + 1{,}25 - 0{,}625$ w

$L = \{(-0{,}5|0{,}5)\}$

K6/1 **11** Sabine löst das Gleichungssystem rechnerisch, indem sie das quadratische Gleichungssystem notiert und die Gleichungen gleichsetzt. Dann ermittelt sie die Lösungen x_1 und x_2 der entstandenen Gleichung, berechnet die zugehörigen y-Werte y_1 und y_2 und gibt die Lösungsmenge $L = \{(2|2); (3|5)\}$ an.

Luca löst das Gleichungssystem zeichnerisch, indem er die Graphen der beiden quadratischen Gleichungen in ein Koordinatensystem zeichnet, der Zeichnung die Schnittpunkte $S_1(2|2)$ und $S_2(3|5)$ entnimmt und damit $L = \{(2|2); (3|5)\}$ angibt.

K4/1 **12** **a)** g_1: $y = -2x - 1$ $\quad$ g_2: $y = x - 1{,}75$ $\quad$ g_3: $y = x - 4$

p_1: $y = (x - 2)^2 - 4$ $\quad$ p_2: $y = -(x - 3)^2 + 1$ $\quad$ p_3: $y = -(x - 8)^2 + 6$

b) $g_3 \cap p_1 = \{P_1(1|-3); P_2(4|0)\}$ $\quad$ $g_3 \cap p_3 = \{P_3(6|2); P_4(9|5)\}$

$g_1 \cap p_1 = \{P_5(1|-3)\}$ $\quad$ $g_2 \cap p_3 = \{P_6(7{,}5|5{,}75)\}$

c) 1 $g_3 \cap p_2$: $x - 4 = -(x - 3)^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_1 = 1; x_2 = 4 \quad y_1 = -3; y_2 = 0 \quad L = \{(1|-3); (4|0)\}$

$p_1 \cap p_2$: $(x - 2)^2 - 4 = -(x - 3)^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_1 = 1; x_2 = 4 \quad y_1 = -3; y_2 = 0 \quad L = \{(1|-3); (4|0)\}$

$\Rightarrow \; g_3 \cap p_2 = p_1 \cap p_2 = \{(1|-3); (4|0)\}$

2 $g_1 \cap p_1$: $-2x - 1 = (x - 2)^2 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0$

$x = 1 \quad y = -3 \quad L = \{(1|-3)\}$

$p_1 \cap p_2$: $(x - 2)^2 - 4 = -(x - 3)^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_1 = 1; x_2 = 4 \quad y_1 = -3; y_2 = 0 \quad L = \{(1|-3); (4|0)\}$

$\Rightarrow \; (g_1 \cap p_1) \subset (p_1 \cap p_2)$

K5 **1**

a) $L = \{-4; 4\}$ **b)** $L = \{-16; 0\}$ **c)** $L = \varnothing$

d) $L = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ **e)** $L = \{-2; 0\}$ **f)** $L = \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$

g) $L = \{2{,}5\}$ **h)** $L = \{1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\}$ **i)** $L = \{-4{,}6; 2\}$

j) $L = \left\{-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}\right\}$ **k)** $L = \{-6{,}5; 3{,}5\}$ **l)** $L = \{-1; 1\}$

K5 **2**

a)	$D = -3$	$D < 0$	keine Lösung	$L = \varnothing$
b)	$D = -16$	$D < 0$	keine Lösung	$L = \varnothing$
c)	$D = 1{,}0625$	$D > 0$	zwei Lösungen	$L = \left\{\frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}\right\} \approx \{-0{,}39; 0{,}64\}$
d)	$D = 256$	$D > 0$	zwei Lösungen	$L = \{-9; 7\}$
e)	$D = 12{,}25$	$D > 0$	zwei Lösungen	$L = \{-2; 1{,}5\}$
f)	$D = \frac{1}{9}$	$D > 0$	zwei Lösungen	$L = \left\{-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right\}$
g)	$D = -7$	$D < 0$	keine Lösung	$L = \varnothing$
h)	$D = -1\frac{8}{9}$	$D < 0$	keine Lösung	$L = \varnothing$
i)	$D = 0$	$D = 0$	eine Lösung	$L = \{7\}$

K5/6 **3**

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$ $\qquad x_{1/2} = -2 \pm 1$

Die Nullstellen der Funktion liegen bei $x_1 = -3$ und $x_2 = -1$.

b) $3x^2 = 6x + 9 \iff x^2 - 2x - 3 = 0$ $\qquad x_{1/2} = 1 \pm 2$

Die Schnittpunkte sind $P(-1|3)$ und $Q(3|27)$.

c) $x^2 - 4x + 3 = -2x^2 + \frac{14}{3}x + 2 \iff 9x^2 - 26x + 3 = 0$ $\qquad x_{1/2} = \frac{13 \pm \sqrt{142}}{9}$

$x_1 \approx 0{,}12$; $x_2 \approx 2{,}77$

Die gemeinsamen Punkte der Parabeln sind näherungsweise $P(0{,}12|2{,}53)$ und $Q(2{,}77|-0{,}41)$.

d) Eine mögliche Funktionsgleichung lautet $y = (x+8)(x-3)$.

K3/5 **4**

a) Für $x \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$x + x^2 = 132$

$x^2 + x - 132 = 0$

$x_1 = -12 \notin \mathbb{N}$; $x_2 = 11 \in \mathbb{N}$

$x = 11$

Die Zahl ist 11.

b) Für $x \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$x \cdot (x+1) = 812$

$x^2 + x - 812 = 0$

$x_1 = -29 \notin \mathbb{N}$; $x_2 = 28$

$x = 28$

Die Zahlen lauten 28 und 29.

c) I $\quad x - y = 7$

II $\quad x \cdot y = 450$

$(y+7) \cdot y = 450$

$y^2 + 7y - 450 = 0$

$y_1 = -25$; $y_2 = 18$

Die Zahlenpaare sind $(-18|-25)$ und $(25|18)$.

d) Für $x \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$(2x)^2 + (2x+2)^2 + (2x+4)^2 + (2x+6)^2 = 1176$

$16x^2 + 48x - 1120 = 0$

$x^2 + 3x - 70 = 0$

$x_1 = -10 \notin \mathbb{N}$; $x_2 = 7 \in \mathbb{N}$

$x = 7$

Die Zahlen lauten 14, 16, 18 und 20.

e) I $\quad x + 12 = y$

II $\quad x \cdot y = 864$

$x \cdot (x+12) = 864$

$x^2 + 12x - 864 = 0$

$x_1 = -36$; $x_2 = 24$

Die Zahlenpaare sind $(-36|-24)$ und $(24|36)$.

f) $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^2 = 12{,}25$

$\frac{x^2}{9} + \frac{x^2}{16} = 12{,}25$

$16x^2 + 9x^2 = 1764$

$x^2 = 70{,}56$

$x_1 = -8{,}4$; $x_2 = 8{,}4$

K3 **5** **a)** Für $x \in \mathbb{R}^+$ gilt:
I $x + 7 = y$
II $x^2 + y^2 = 13^2$ (Pythagoras)
$x^2 + (x + 7)^2 = 169 \Leftrightarrow 2x^2 + 14x + 49 = 169 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 60 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 240}}{2} = -3{,}5 \pm 8{,}5$
$x_1 = -12$; $x_2 = 5$
Da $x \in \mathbb{R}^+$ gefordert ist, folgt: $x = 5$.
Die Katheten haben die Längen 5 cm und 12 cm.
b) $u = (5 + 12 + 13)\,\text{cm} = 30\,\text{cm}$ $\quad A = 0{,}5(5 \cdot 12)\,\text{cm}^2 = 30\,\text{cm}^2$
Der Umfang des Dreiecks beträgt 30 cm, der Flächeninhalt 30 cm².

K3/5 **6** A für $x > 4$: $160 = 0{,}5 \cdot (x - 4) \cdot x = 0{,}5x^2 - 2x$
$0 = 0{,}5x^2 - 2x - 160$
$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (-160)}}{1} = 2 \pm \sqrt{324} = 2 \pm 18$
$x_1 = -16 < 0$ keine Lösung im Kontext
$x = x_2 = 20$
Die Länge der Grundseite beträgt 20 cm, die Länge der Höhe beträgt 16 cm.

K5 **7**

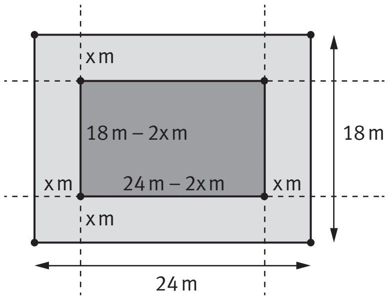
a)	$D = \mathbb{R}$	$6x^2 + 10x + 4 = 7x^2 + 10x + 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$	$L = \{-1; 1\}$
b)	$D = \mathbb{R}$	$144x^2 + 72x + 9 = 72x + 13 \Leftrightarrow 144x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \frac{1}{6}$	$L = \left\{-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right\}$
c)	$D = \mathbb{R}$	$50x^2 + 18 = 218 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$	$L = \{-2; 2\}$
d)	$D = \mathbb{R}$	$x^2 + 24x + 63 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -12 \pm 9$	$L = \{-21; -3\}$
e)	$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{9}; 36\right\}$	$(52 - 7x) \cdot (4 - 9x) = (x - 36) \cdot (13x - 28)$	
		$\Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 4$	$L = \{-4; 4\}$
f)	$D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -0{,}5\}$	$(3x - 7) \cdot (2x + 1) = (x + 3) \cdot (2x - 5)$	
		$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = 2$	$L = \{1; 2\}$
g)	$D = \mathbb{R}$	$3x^2 + 5 = 12 + 4x^2 - 10 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$	$L = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

K1/5 **8** Lösungsmöglichkeiten:
a) $(x + 0{,}5) \cdot (x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 = 1{,}5x + 1$
b) $(x - 0{,}03) \cdot (x - 0{,}5) = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 = 0{,}53x - 0{,}015$
c) $(x + 8) \cdot (x - 23) = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 = 15x + 184$

K3 **9** Es sei x die Anzahl der Schrauben, die Ulf gekauft hat, und y der Preis pro Schraube in €, den Ulf bezahlt hat, mit $x, y > 0$.
I $x \cdot y = 30 \Leftrightarrow x = \frac{30}{y}$
II $(x + 100) \cdot (y - 0{,}05) = x \cdot y \Leftrightarrow x \cdot y - 0{,}05x + 100y - 5 = x \cdot y \Leftrightarrow 100y - 0{,}05x - 5 = 0$
$x = \frac{30}{y}$ in $100y - 5 - 0{,}05x = 0$ eingesetzt ergibt:
$100y - 5 - 0{,}05 \cdot \frac{30}{y} = 0 \Leftrightarrow 100y^2 - 5y - 1{,}5 = 0$
$y_{1/2} = \frac{5 \pm 25}{200}$; $y_1 = -0{,}1$; $y_2 = 0{,}15$ $\quad \Rightarrow y = 0{,}15$ (da $y > 0$); $x = \frac{30}{0{,}15} = 200$
Ulf hat 200 Schrauben gekauft beim Preis von 0,15 € je Schraube. Im zweiten Geschäft hätte Ulf für 30 € 300 Schrauben zum Preis von 0,10 € je Schraube bekommen.

K3 **10** **a)** $A(x) = (4\,\text{cm} + x\,\text{cm})^2 = (x^2 + 8x + 16)\,\text{cm}^2$ mit $x \in \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
b) $A(x) = 64\,\text{cm}^2 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = 64 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 48 = 0 \Leftrightarrow (x + 12) \cdot (x - 4) = 0$
$\Rightarrow x_1 = -12 \notin \mathbb{D}$; $x_2 = 4 \in \mathbb{D}$
Für $x = 4$ hat das neue Quadrat mit 8 cm Seitenlänge einen Flächeninhalt von 64 cm².
c) Damit $(x + 4)^2 \leq 64$ erfüllt ist, darf x den Wert 4 nicht übersteigen; d. h.: $0 < x \leq 4$

K2 **11** Skizze:



Fläche des Grundstücks: $A_0 = (24\,m) \cdot (18\,m) = 432\,m^2$

Fläche der Baugrube: $A_1 = \frac{2}{3} \cdot 432\,m^2 = 288\,m^2$

Es sei x m die Breite des Streifens mit $0 < x < 9$.

Die Baugrube ist $(24 - 2x)$ m lang und $(18 - 2x)$ m breit.

Für $A(x) = (24 - 2x) \cdot (18 - 2x)\,m^2$ soll gelten:

$(24 - 2x) \cdot (18 - 2x)\,m^2 = 288\,m^2$

$\Rightarrow 4x^2 - 84x + 144 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 21x + 36 = 0$

$x_{1/2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 144}}{2} \approx \frac{21 \pm 17{,}2}{2}$; $x_1 = 1{,}9$; $x_2 = 19{,}1$

Wegen $0 < x < 9$ gilt: $x = 1{,}9$

Der Streifen ist 1,9 m breit, die Baugrube ist 20,2 m lang und 14,2 m breit.

K5 **12** Im Folgenden werden die Funktionsgleichungen von g und p bzw. von p und q gleichgesetzt, die Gleichung geeignet umgeformt, die Diskriminante berechnet und – falls Lösungen existieren – die Koordinaten der Schnittpunkte berechnet.

a) $-0{,}5x + 0{,}75 = 0{,}5x^2 + 1{,}5x - 0{,}375$

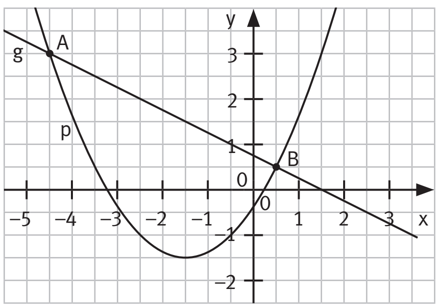
$\Leftrightarrow 0{,}5x^2 + 2x - 1{,}125 = 0$

$D = 4 + 2{,}25 = 6{,}25 > 0$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{6{,}25}}{1} = -2 \pm 2{,}5$

$\Rightarrow$ zwei Schnittpunkte

A (–4,5 | 3) und B (0,5 | 0,5)



b) $-2x + 6 = 0{,}5(x - 3)^2 + 2$

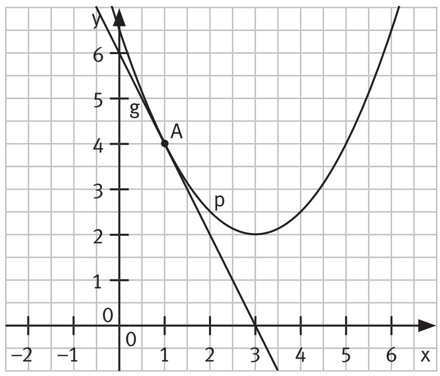
$\Leftrightarrow 0{,}5x^2 - x + 0{,}5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$

$D = 1 - 1 = 0$

$x = 1$

$\Rightarrow$ ein Schnittpunkt

A (1 | 4)



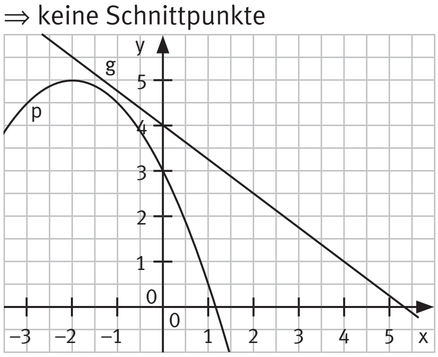
c) $-0{,}75x + 4 = -0{,}5x^2 - 2x + 3$

$\Leftrightarrow 0{,}5x^2 + 1{,}25x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2{,}5x + 2 = 0$

$D = 6{,}25 - 8 = -1{,}75 < 0$

$\Rightarrow$ keine Schnittpunkte



d) $x + 6 = -x^2 - 6x - 4$

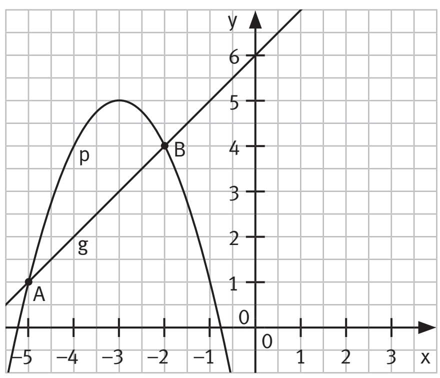
$\Leftrightarrow x^2 + 7x + 10 = 0$

$D = 49 - 40 = 9 > 0$

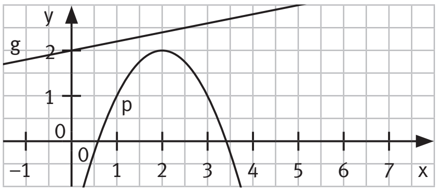
$x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2} = -3{,}5 \pm 1{,}5$

$\Rightarrow$ zwei Schnittpunkte

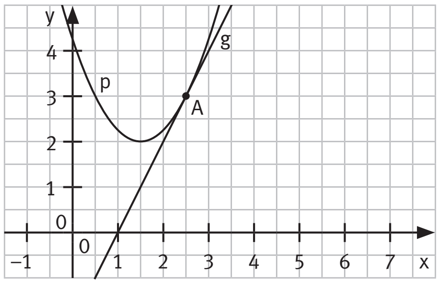
A (–5 | 1) und B (–2 | 4)



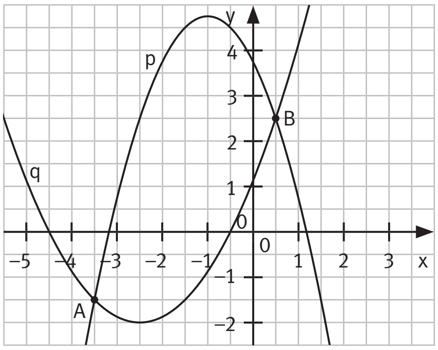
e) $0{,}2x + 2 = -x^2 + 4x - 2$
$\Leftrightarrow x^2 - 3{,}8x + 4 = 0$
$D = 14{,}44 - 16 = -1{,}56 < 0$
$\Rightarrow$ keine Schnittpunkte



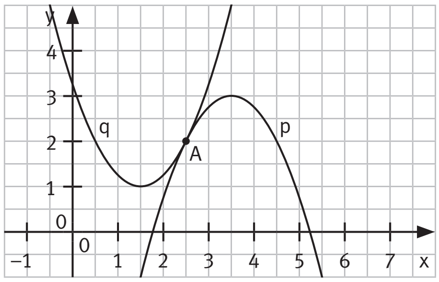
f) $2x - 2 = x^2 - 3x + 4{,}25$
$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6{,}25 = 0 \Leftrightarrow (x - 2{,}5)^2 = 0$
$D = 25 - 25 = 0$
$\Rightarrow$ ein Schnittpunkt
$A\,(2{,}5\,|\,3)$



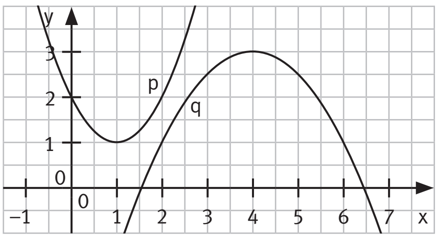
g) $-(x + 1)^2 + 4{,}75 = 0{,}5x^2 + 2{,}5x + 1{,}125$
$\Leftrightarrow 1{,}5x^2 + 4{,}5x - 2{,}625 = 0$
$D = 20{,}25 + 15{,}75 = 36 > 0$
$x_{1/2} = \frac{-4{,}5 \pm \sqrt{36}}{3} = -1{,}5 \pm 2$
$\Rightarrow$ zwei Schnittpunkte
$A\,(-3{,}5\,|\,-1{,}5)$ und $B\,(0{,}5\,|\,2{,}5)$



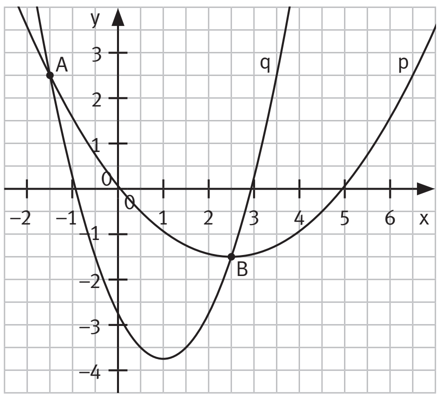
h) $-(x - 3{,}5)^2 + 3 = x^2 - 3x + 3{,}25$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 12{,}5 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 2{,}5)^2 = 0$
$D = 25 - 25 = 0$
$x = 2{,}5$
$\Rightarrow$ ein Schnittpunkt
$A\,(2{,}5\,|\,2)$



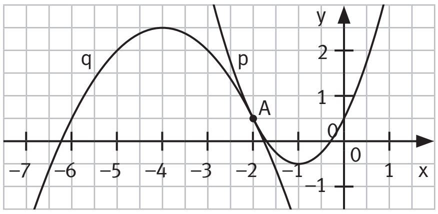
i) $(x - 1)^2 + 1 = -0{,}5x^2 + 4x - 5$
$\Leftrightarrow 1{,}5x^2 - 6x + 7 = 0$
$D = 36 - 42 = -6 < 0$
$\Rightarrow$ keine Schnittpunkte



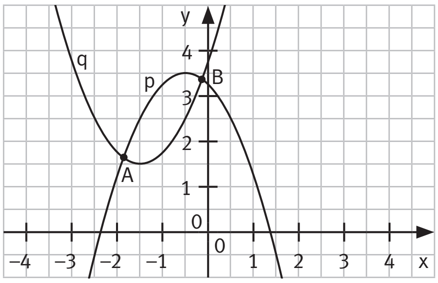
j) $0{,}25x^2 - 1{,}25x + 0{,}0625 = (x - 1)^2 - 3{,}75$
$\Leftrightarrow 0{,}75x^2 - 0{,}75x - 2{,}8125 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - x - 3{,}75 = 0$
$D = 1 + 15 = 16 > 0$
$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{16}}{2} = 0{,}5 \pm 2$
$\Rightarrow$ zwei Schnittpunkte
$A\,(-1{,}5\,|\,2{,}5)$ und $B\,(2{,}5\,|\,-1{,}5)$



k) $(x + 1)^2 - 0{,}5 = -0{,}5x^2 - 4x - 5{,}5$
$\Leftrightarrow 1{,}5x^2 + 6x + 6 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0$
$D = 16 - 16 = 0$
$x = -2$
$\Rightarrow$ ein Schnittpunkt
$A(-2\,|\,0{,}5)$



l) $-x^2 - x + 3{,}25 = x^2 + 3x + 3{,}75$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 0{,}5 = 0$
$D = 16 - 4 = 12 > 0$
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{4} = -1 \pm 0{,}5\sqrt{3}$
$\Rightarrow$ zwei Schnittpunkte
$A(-1{,}9\,|\,1{,}6)$ und $B(-0{,}1\,|\,3{,}4)$



K5

13 Gleichsetzen der Funktionsgleichung von g und p ergibt:
$2x - 5 = x^2 - 6x + 11 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 4$
Es gibt genau einen gemeinsamen Punkt von g und p: $S(4\,|\,3)$. Damit ist g eine Tangente an p.
Gleichsetzen der Funktionsgleichung von f und p ergibt:
$5x + 2 = x^2 - 6x + 11 \;\Leftrightarrow\; 0 = x^2 - 11x + 9$
$x_{1/2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 36}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{85}}{2} \approx 5{,}5 \pm 4{,}6 \;\Rightarrow\; x_1 \approx 0{,}9;\ x_2 \approx 10{,}1$
p und f haben zwei gemeinsame Punkte $S_1(0{,}9\,|\,6{,}5)$ und $S_2(10{,}1\,|\,52{,}5)$. Damit ist f nicht Tangente an p.

K1/4

14 Mögliche Antwort: Für jede Parallele zur y-Achse gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, das die Parallele definiert mit $x = a$. Zu diesem a gibt es einen Punkt $A(a\,|\,p(a))$, der Schnittpunkt der Parallele mit der Parabel ist.

K1

15 a) Es sind verschiedene Lösungen für p und f möglich, z. B.:
p: $y = -x^2$ und f: $y = 0{,}5x + 3$ oder p: $y = x^2$ und f: $y = -0{,}5x - 5$

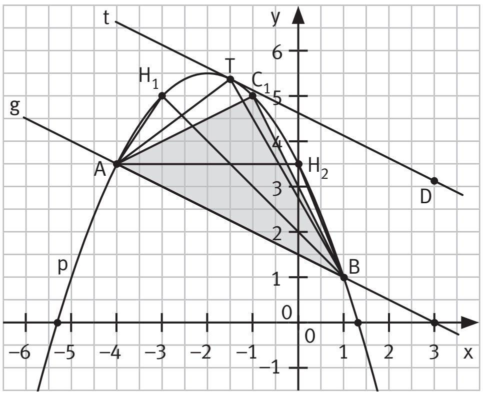
b) P und Q haben den y-Wert 4. Die Funktionsgleichung für f lautet daher f: $y = 4$.
Da P und Q denselben y-Wert haben, muss die x-Koordinate des Scheitels zwischen den x-Koordinaten von P und Q liegen, daher gilt: $x_S = 0$.
Für p gilt daher: $y = ax^2 + y_S$ mit der Bedingung (P und $Q \in p$):
$4 = 4a + y_S \quad \Leftrightarrow y_S = 4 - 4a \quad \Leftrightarrow a = 1 - 0{,}25y_S$
Man kann a und y_S nun beliebig wählen, z. B.:

$a = 1,\ y_S = 0$	p: $y = x^2$	und f: $y = 4$
$a = 2,\ y_S = -4$	p: $y = 2x^2 - 4$	und f: $y = 4$
$a = 0{,}5,\ y_S = 2$	p: $y = 0{,}5x^2 + 2$	und f: $y = 4$

c) Wählt man p mit R als Scheitelpunkt und f: $x = -1$ (oder mit f*: $y = 2$), dann hat p mit f (bzw. mit f*) einen gemeinsamen Punkt, R.
p: $y = (x + 1)^2 + 2$ und f: $x = -1$ oder p: $y = -2(x + 1)^2 + 2$ und f: $y = 2$
Es sind weitere Lösungen mit f als Tangente an p und gemeinsamem Punkt $R(-1\,|\,2)$ möglich.

d) Man wählt einen beliebigen Punkt P auf g, z. B. $P(3\,|\,0)$; dieser wird als Scheitelpunkt der Parabel festgelegt. Möglich sind nun folgende Funktionsgleichungen für die Parabel p und die Gerade f, die beide mit g: $x = 3$ den gemeinsamen Punkt $P(3\,|\,0)$ haben:
p: $y = (x - 3)^2$ oder $y = -2(x - 3)^2$ oder $y = 5(x - 3)^2$ oder …
f: $y = x - 3$ oder $y = 3x - 9$ oder $y = -4x + 12$ oder …

K2/4 **16 a)** und **e)**



d) Bestimmung von t: $y = mx + b$

$m = m_g = -0{,}5$

D (3|3,125) in t einsetzen:

$3{,}125 = -0{,}5 \cdot 3 + b$

$4{,}625 = b$

t: $y = -0{,}5x + 4{,}625$

Funktionsterme von p und t gleichsetzen:

$0{,}5x^2 + 1{,}5x + 1{,}125 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2{,}25 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1{,}5)^2 = 0 \Rightarrow x = -1{,}5$

t: $y = -0{,}5x + 4{,}625$ berührt p in T (–1,5|5,375).

b) Nullstellen von p:

$-0{,}5x^2 - 2x + 3{,}5 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0{,}5x^2 + 2x - 3{,}5$

$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{11}$ $\quad x_1 \approx -5{,}3;\ x_2 \approx 1{,}3$

Nullstelle von g: $-0{,}5x + 1{,}5 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

c) $-0{,}5x^2 - 2x + 3{,}5 = -0{,}5x + 1{,}5$

$\Leftrightarrow 0{,}5x^2 + 1{,}5x - 2 = 0$

$x_{1/2} = -1{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = -1{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1 = -4;\ x_2 = 1$; A (–4|3,5) und B (1|1)

f) Für $x \in\ ]-4; 1[$ existieren Dreiecke ABC_n.

g) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x+4 \\ -0{,}5x^2 - 2x \end{pmatrix}$

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & x+4 \\ -2{,}5 & -0{,}5x^2 - 2x \end{vmatrix}$ FE

$= (-1{,}25x^2 - 3{,}75x + 5)$ FE

h) $(-1{,}25x^2 - 3{,}75x + 5)$ FE = 5 FE

$\Leftrightarrow 1{,}25x^2 + 3{,}75x = 0$

$\Rightarrow x_1 = -3 \in\ ]-4; 1[;\ x_2 = 0 \in\ ]-4; 1[$

Die Dreiecke ABH_1 und ABH_2 mit H_1 (–3|5) und H_2 (0|3,5) haben den Flächeninhalt 5 FE.

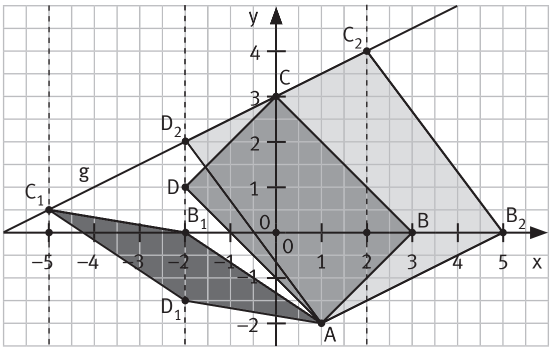
i) Quadratisches Ergänzen:

$-1{,}25x^2 - 3{,}75x + 5$

$= -1{,}25\,(x + 1{,}5)^2 + 7{,}8125$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC_0 ist maximal für $T = C_0$ (–1,5|5,375).

K5 **17**



a) $AB_1C_1D_1$ mit A (1|–2), B_1 (–2|0), C_1 (–5|0,5), D_1 (–2|–1,5)

$AB_2C_2D_2$ mit A (1|–2), B_2 (5|0), C_2 (2|4), D_2 (–2|2)

b) Mit x = 3 erhält man die Eckpunkte B (3|0), C (0|3) und D (–2|1), die mit A (1|–2) ein Parallelogramm bilden.

Für die Geraden AB und BC gilt:

AB: $y = x - 3$ und BC: $y = 3 - x$, d. h.: $m_{AB} = 1$ und $m_{BC} = -1 \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$

Die parallelen Geraden AB und DC stehen senkrecht zu den parallelen Geraden BC und AD. Damit ist das Parallelogramm ABCD ein Rechteck.

c) Flächeninhalt der Parallelogramme mit $\overrightarrow{B_nA} = \begin{pmatrix} x-1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{B_nC_n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0{,}5x + 1{,}5 \end{pmatrix}$:

$A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ 2 & 0{,}5x + 1{,}5 \end{vmatrix}$ FE $= [(x-1) \cdot (0{,}5x + 1{,}5) + 6]$ FE $= [0{,}5x^2 + x + 4{,}5]$ FE

d) A (x) = 116,5 FE $\quad \Leftrightarrow 0{,}5x^2 + x + 4{,}5 = 116{,}5 \quad \Leftrightarrow x_1 = -16;\ x_2 = 14$

A (x) = 64,5 FE $\quad \Leftrightarrow 0{,}5x^2 + x + 4{,}5 = 64{,}5 \quad \Leftrightarrow x_1 = -12;\ x_2 = 10$

Mit x = –16 bzw. x = 14 haben die Parallelogramme einen Flächeninhalt von 116,5 FE.

Mit x = –12 bzw. x = 10 haben die Parallelogramme einen Flächeninhalt von 64,5 FE.

K5 **18 a)** $-(x^2 - 6x + 9) + 7 = 0{,}4x^2 - x + 3{,}6$

$\Leftrightarrow 1{,}4x^2 - 7x + 5{,}6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \;\Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 4$ $\qquad S_1\,(1|3)$ und $S_2\,(4|6)$

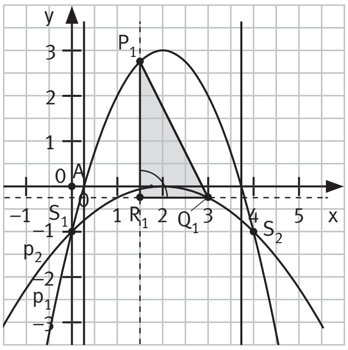
b) $m = \frac{6-3}{4-1} = 1$ $\qquad S_1\,(1|3)$ in g: $y = x + t$ einsetzen: $3 = 1 + t \Leftrightarrow t = 2$ $\qquad$ g: $y = x + 2$

c) p_1: $y = -(x-3)^2 + 7$ und h: $y = x + \frac{17}{4}$ gleichsetzen:

$-x^2 + 6x - 2 = x + 4{,}25 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6{,}25 = 0 \Rightarrow$ Diskriminante $D = 25 - 25 = 0 \Rightarrow$ eine Lösung

Die Parabel p_1 hat mit h nur einen gemeinsamen Punkt, damit ist h Tangente an p_1.

K5 **19 a)** und **b)**



a) $p_1 \cap p_2$:

$-x^2 + 4x - 1 = -0{,}25x^2 + x - 1$

$\Leftrightarrow 0 = 0{,}75x^2 - 3x \Leftrightarrow 0 = x \cdot (x - 4)$

$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 4$ bzw. $S_1\,(0|-1)$; $S_2\,(4|-1)$

b) $P_1\,(1{,}5|p_1(1{,}5)) = P_1\,(1{,}5|2{,}75)$; $Q_1\,(3|p_2(3)) = Q_1\,(3|-0{,}25)$

c) Das Dreieck $P_1R_1Q_1$ mit $R_1\,(1{,}5|-0{,}25)$ ist rechtwinklig und hat die Seitenlängen (Maßzahlen) $p_1 = 1{,}5$ und $q_1 = 2{,}75 + 0{,}25 = 3$.

$|\overline{P_1Q_1}| = \sqrt{1{,}5^2 + 3^2} \approx 3{,}35$ (nach Pythagoras)

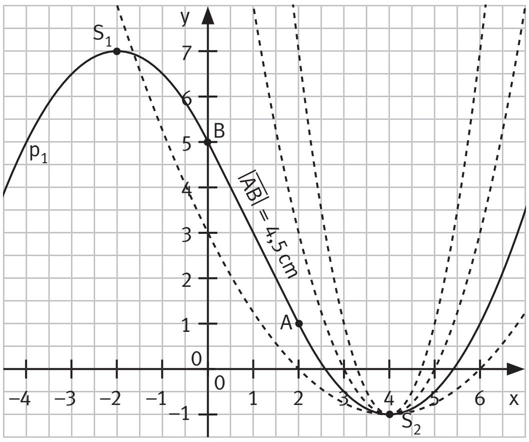
d) $Q_n\,(2x|p_2(2x)) = Q_n\,(2x|-x^2 + 2x - 1)$

e) Zur Vereinfachung betrachte man x und $p_1(x) \in \mathbb{R}_0^+$, d. h.: $x \in [2 - \sqrt{3};\ 2 + \sqrt{3}] \approx [0{,}27;\ 3{,}73]$

Das Dreieck $P_nR_nQ_n$ mit $P_n\,(x|-x^2 + 4x - 1)$, $Q_n\,(2x|-x^2 + 2x - 1)$ und $R_n\,(x|-x^2 + 2x - 1)$ ist rechtwinklig bei R_n; die Seitenlängen (Maßzahlen) des Dreiecks sind:

$|\overline{P_nQ_n}| = \sqrt{(x_{P_n} - x_{Q_n})^2 + (y_{P_n} - y_{Q_n})^2} = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{5x^2} = x\sqrt{5}$

K2/4 **20 a)**



b) Geradengleichung von AB durch Einsetzen von A und B in $y = mx + t$ ermitteln:

$\Rightarrow$ AB: $y = -2x + 5$

Schnittpunkte von p_1 mit AB ermitteln: $-0{,}5x^2 - 2x + 5 = -2x + 5 \Leftrightarrow 0{,}5x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ AB und p_1 haben nur einen gemeinsamen Punkt, nämlich B (0|5).

$\Rightarrow$ AB ist Tangente an p_1.

c) Funktionsterme von AB und p (a) gleichsetzen:

$-2x + 5 = a(x-4)^2 - 1 \Leftrightarrow -2x + 5 = ax^2 - 8ax + 16a - 1 \Leftrightarrow 0 = ax^2 + (2 - 8a)\,x + 16a - 6$

D bestimmen:

$D = (2 - 8a)^2 - 4a\,(16a - 6) = 4 - 32a + 64a^2 - 64a^2 + 24a = 4 - 8a$

$D = 4 - 8a = 0 \Rightarrow a = 0{,}5$

p (0,5): $y = 0{,}5(x-4)^2 - 1$

d) 1 $\;|\overline{AB}| \approx 4{,}5$ LE $\mathrel{\hat=}$ 450 m = 0,45 km $\qquad$ Die Strecke ist rund 0,45 km lang.

2 $\;v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v} \Rightarrow t = \frac{0{,}45\,\text{km}}{180\,\text{km}} \cdot h = 0{,}0025\,h = 9\,\text{sek}$ $\qquad$ Der Wagen benötigt 9 Sekunden für $\overline{AB}$.

Werkzeuge

K5/6

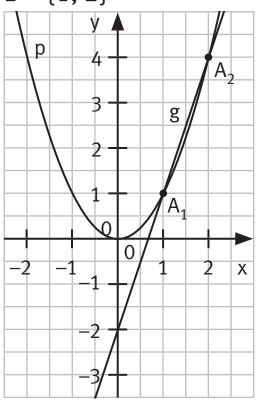
- Lösungsmöglichkeit zum Leben von François Viète:
  - geboren 1540 in Fontenay-le-Comte
  - Besuch einer Klosterschule
  - Studium der Rechtswissenschaften mit 18 Jahren
  - Arbeit als Advokat und Rechtsanwalt
  - Beschäftigung mit Mathematik und Lösen einer weltweit gestellten Aufgabe
  - gestorben am 13. Dezember 1603 in Paris
- Lösungsmöglichkeit für die weiteren mathematischen Erkenntnisse:
  - Lösung des apollonischen Problems (gesucht: alle Kreise, die drei gegebene Kreise berühren) mit Zirkel und Lineal
  - Einführung des Rechnens mit Buchstaben, Symbolen und mathematischen Operationen wie +, –, = und Bruchstrich
  - Produktdarstellung der Kreiszahl π
- 1 $x_1 = 2$; $x_2 = 5$ | 2 $x_1 = -3$; $x_2 = 6$ | 3 $x_1 = -3$; $x_2 = 9$ | 4 $x_1 = -15$; $x_2 = 8$
  5 $x_1 = -3$; $x_2 = 15$ | 6 $x_1 = -9$; $x_2 = 5$ | 7 $x_1 = -5$; $x_2 = 7$ | 8 $x_1 = -7$; $x_2 = -1$
- 1 $p = -3$ $q = -10$ $y = x^2 - 3x - 10$ | 2 $p = -24$ $q = 108$ $y = x^2 - 24x + 108$
  3 $p = 3$ $q = -28$ $y = x^2 + 3x - 28$ | 4 $p = -1$ $q = -8{,}75$ $y = x^2 - x - 8{,}75$
  5 $p = 4{,}8$ $q = 4{,}32$ $y = x^2 + 4{,}8x + 4{,}32$ | 6 $p = -8$ $q = 0$ $y = x^2 - 8x$

Aufgaben zur Einzelarbeit

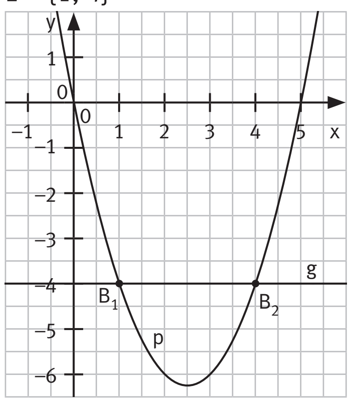
K5 **1** **a)** $L = \{-11; 11\}$ **b)** $L = \{-9; 9\}$ **c)** $L = \{-3; 3\}$ **d)** $L = \{-23; 23\}$

K5 **2**
a) $(x + 12)(x - 23) = 0$ $L = \{-12; 23\}$
b) $x^2 - 4x - 165 = 0$ $L = \{-11; 15\}$
c) $x^2 - 4x + 77 = 0$ $L = \varnothing$
d) $x^2 - 0{,}6x - 0{,}72 = 0$ $L = \{-0{,}6; 1{,}2\}$
e) $3x^2 + 13x - 30 = 0$ $L = \left\{-6; \frac{5}{3}\right\}$
f) $x^2 - 2x + 0{,}75 = 0$ $L = \{0{,}5; 1{,}5\}$
g) $2x^2 - 13x - 45 = 0$ $L = \{-2{,}5; 9\}$
h) $x^2 - 1 = 0$ $L = \{-1; 1\}$
i) $(7 + 5x) \cdot (9x - 8) = (5 + 7x) \cdot (9 - 8x)$ $L = \{-1; 1\}$
j) $(52 - 7x) \cdot (4 - 9x) = (x - 36) \cdot (13x - 28)$ $L = \{-4; 4\}$
k) $6x^2 + 10x + 4 = 7x^2 + 10x + 3$ $L = \{-1; 1\}$

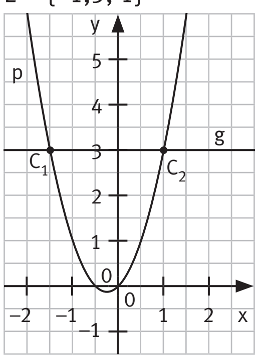
K4/5 **3**
a) $L = \{1; 2\}$



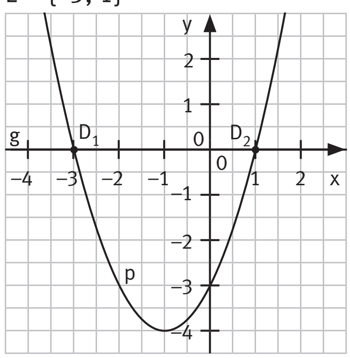
b) $L = \{1; 4\}$



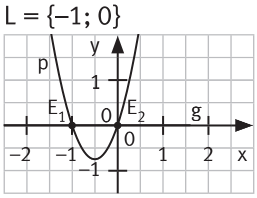
c) $L = \{-1{,}5; 1\}$



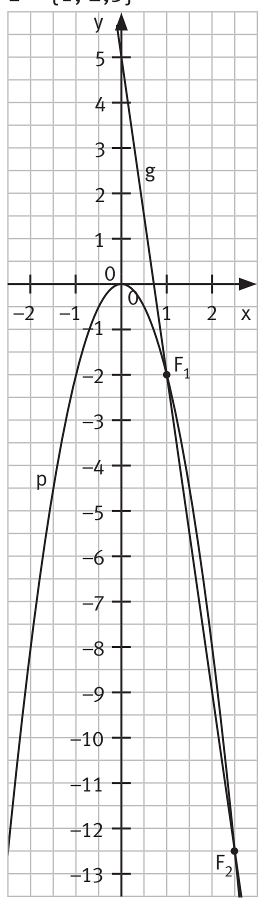
d) $L = \{-3; 1\}$



e) $L = \{-1; 0\}$



f) $L = \{1; 2{,}5\}$



K4/5 **4** **a)** $x^2 = -x + 2$ $L = \{-2; 1\}$ **b)** $-x^2 + 3{,}5 = -2x + 3{,}5$ $L = \{0; 2\}$

K5 **5** **a)** $x^2 + 1 = -2x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$ $\quad L = \{-1\}$

Es gibt nur einen gemeinsamen Punkt, g ist Tangente an p mit B (–1 | 2).

b) $-0{,}5x^2 + 2x = -x + 5 \Leftrightarrow 0{,}5x^2 - 3x + 5 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 10}}{1} = 3 \pm \sqrt{-1}$ $\quad L = \varnothing$

Es gibt keinen gemeinsamen Punkt, g ist weder Tangente noch Sekante an p.

c) $2x^2 - 2 = -x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4}$ $\quad L = \{-1{,}5; 1\}$

Es gibt zwei gemeinsame Punkte, g ist Sekante an p mit S_1 (–1,5 | 2,5), S_2 (1 | 0).

d) $-\frac{1}{4}x^2 + 3 = x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$ $\quad L = \{-2\}$

Es gibt nur einen gemeinsamen Punkt, g ist Tangente an p mit S (–2 | 2).

K6/5 **6** $D = \mathbb{N}$

a) $x^2 + 2x = 323$

$x_1 = -19 \notin D$; $x_2 = 17 \in D$

Die gesuchte natürliche Zahl ist 17.

b) $x^2 + \frac{1}{2}x = 742{,}5$

$x_1 = -27{,}5 \notin D$; $x_2 = 27 \in D$

Die gesuchte natürliche Zahl ist 27.

c) $x^2 + \frac{1}{10}x = 101$

$x_1 = -10{,}1 \notin D$; $x_2 = 10 \in D$

Die gesuchte natürliche Zahl ist 10.

d) $x^2 - x = x$

$x_1 = 0$; $x_2 = 2 \in D$

Die gesuchten natürlichen Zahlen sind 0 und 2.

K3/5 **7** Lösungsmöglichkeit (alle Angaben in cm bzw. cm²; $D = \mathbb{Q}$ mit $x > 0$)

Flächeninhalt der Platte: $A = a^2 = 60^2 = 3600$

Verschnitt: $0{,}125 \cdot 3600 = 450$

Summe der Dreiecksflächen: $4 \cdot \frac{1}{2}x^2 = 2x^2$

Bestimmung von x: $2x^2 = 450 \Rightarrow x_1 = -15 \notin D$; $x_2 = 15 \in D$

Es müssen gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit der Schenkellänge 15 cm abgeschnitten werden.

K3/5 **8** I $\quad x \cdot y = 1056 \Leftrightarrow y = \frac{1056}{x}$

II $\quad 2x + 2y - 4 = 136 \Leftrightarrow x + y - 70 = 0$

I in II einsetzen: $x + \frac{1056}{x} - 70 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 70x + 1056 = 0$

$x_{1/2} = 35 \pm 13$; $L = \{22; 48\}$

Das Grundstück hat die Seitenlängen 22 m und 48 m.

K5 **9** **a)** $2x^2 - 2{,}5x - 2 = 0$

$D = 6{,}25 + 16 = 22{,}25 > 0$

$x_{1/2} = \frac{2{,}5 \pm \sqrt{22{,}25}}{4}$

$x_1 \approx -0{,}55$; $x_2 \approx 1{,}8$

S_1 (–0,55 | 1,72); S_2 (1,8 | 2,9)

b) $0{,}25x^2 + 0{,}375x + 0{,}25 = 0$

$D = 0{,}140625 - 0{,}25 < 0$

kein Schnittpunkt

c) $x^2 + 3x + 2{,}25 = 0$

$(x + 1{,}5)^2 = 0$

$x = -1{,}5$

S (–1,5 | 4,75)

d) $0{,}75x^2 - 4{,}5x + 6 = 0$

$D = 20{,}25 - 18 = 2{,}25 > 0$

$x_{1/2} = \frac{4{,}5 \pm \sqrt{2{,}25}}{1{,}5}$

$x_1 = 2$; $x_2 = 4$

S_1 (2 | 2); S_2 (4 | 6)

e) $0{,}375x^2 + 1{,}75x + 2{,}5 = 0$

$D = 3{,}0625 - 3{,}75 < 0$

kein Schnittpunkt

f) $2x^2 - 2x - 2 = 0$

$D = 4 + 16 = 20 > 0$

$x_{1/2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x_1 \approx -0{,}6$; $x_2 \approx 1{,}6$

S_1 (–0,6 | 0); S_2 (1,6 | 0)

K5 **10** Gerade g durch P (2 | –4) und Q (8 | 8):

I $\quad -4 = 2m + t \Leftrightarrow t = -4 - 2m$

II $\quad 8 = 8m + t \Rightarrow 8 = 8m - 4 - 2m \Leftrightarrow 12 = 6m \Rightarrow m = 2; t = -8$ $\quad$ g: $y = 2x - 8$

$p \cap g$: $x^2 - 6x + 8 = 2x - 8 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0$ $\quad x = 4$

Es gibt genau einen gemeinsamen Punkt von p und g, g ist Tangente an p mit T (4 | 0).

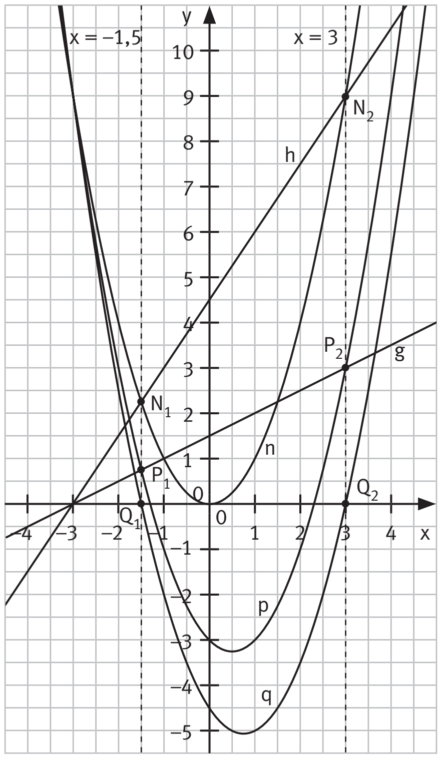
K6/4

11 a) Die Gleichung beschreibt die Schnittmenge der Parabel p: $y = x^2 - x - 3$ mit der Geraden g: $y = 0{,}5x + 1{,}5$.

Alternativ kann man die Gleichung auch in $x^2 = 1{,}5x + 4{,}5$ umformen, man erhält so die Schnittmenge der Normalparabel n: $y = x^2$ mit der Geraden h: $y = 1{,}5x + 4{,}5$.

Durch weiteres Umformen erhält man $x^2 - 1{,}5x - 4{,}5 = 0$, wobei die Nullstellen der Parabel q: $y = x^2 - 1{,}5x - 4{,}5$ den Lösungen der Gleichung entsprechen.

Bei jedem dieser Verfahren sind die Lösungen der Gleichung die x-Werte der Schnittpunkte.



b) Anwenden der Lösungsformel auf $x^2 - 1{,}5x - 4{,}5 = 0$ ergibt:

$x_{1/2} = \frac{1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 18}}{2} = \frac{1{,}5 \pm 4{,}5}{2} = 0{,}75 \pm 2{,}25$

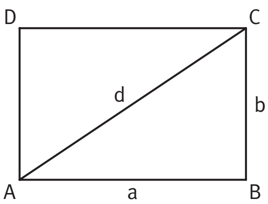
$\Rightarrow x_1 = -1{,}5;\ x_2 = 3$

$L = \{-1{,}5;\ 3\}$

Die beiden Lösungen sind die Nullstellen der Parabel q: $y = x^2 - 1{,}5x - 4{,}5$ bzw. die x-Werte der Schnittpunkte von p: $y = x^2 - x - 3$ mit g: $y = 0{,}5x + 1{,}5$.

K3

12 a)



Es gilt: $a - 3 = b$

Im Dreieck ABC ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras: $d^2 = a^2 + b^2$

$15^2 = a^2 + (a - 3)^2$

$-2a^2 + 6a + 216 = 0$

$a^2 - 3a - 108 = 0$

$a_1 = -9 \notin \mathbb{R}^+;\ a_2 = 12 \in \mathbb{R}^+$

Die Seiten sind 12 cm und 9 cm lang.

b) Ursprüngliche Seitenlänge: a (in LE); ursprünglicher Flächeninhalt: $A = a^2$ (in FE)

Neue Seitenlänge: $a_{neu} = a + 4$; neuer Flächeninhalt: $A_{neu} = (a + 4)^2$

Bedingung: $A_{neu} = 9A = 9a^2$

$(a + 4)^2 = 9a^2 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0$

$a_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = 0{,}5 \pm 1{,}5$

$a_1 = -1 \notin \mathbb{R}^+;\ a_2 = 2 \in \mathbb{R}^+$.

Die ursprüngliche Seitenlänge beträgt 2 cm, die neue Seitenlänge 6 cm.

Aufgaben für Lernpartner

K 1/6 **A** Das ist falsch. Eine reinquadratische Gleichung ist eine quadratische Gleichung, bei der die Variable x nur quadratisch vorkommt: $ax^2 + c = 0$.

K 1/6 **B** Das ist falsch. Eine reinquadratische Gleichung der Form $x^2 = d$ mit $d \geq 0$ ist lösbar und hat die Lösungsmenge $L = \{-\sqrt{d}; \sqrt{d}\}$. Mit $d < 0$ ist $x^2 = d$ nicht lösbar.

K 1/6 **C** Das ist richtig.

K 1/6 **D** Das ist richtig.

K 1/6 **E** Das ist richtig. Die Lösungen der Gleichung entsprechen den x-Koordinaten der Schnittpunkte der Parabeln p_1: $y = ax^2 + bx + c$ und p_2: $y = dx^2 + ex + f$.

K 1/6 **F** Das ist richtig.

Parabeln und Geraden

K6/5 **1** Die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 - 8x + 16 = 0$ ist $L = \{4\}$.

① $x^2 = 8x - 16 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = 0$
② $(x - 4)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = 0$
③ $x^2 + 16 = 8x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = 0$
④ $x^2 - 8x = -16 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = 0$
⑤ $0{,}125x^2 = x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 8x - 16 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = 0$

Die grafische Interpretation ist in allen Fällen korrekt.

K6/5 **2** Lösungsmöglichkeiten:

a) nach oben geöffnet: p_2: $y = 2x^2 + 1$ nach unten geöffnet: p_2: $y = -x^2 - 1$
b) nach oben geöffnet: p_2: $y = 2x^2$ nach unten geöffnet: p_2: $y = -x^2$
c) nach oben geöffnet: p_2: $y = 2x^2 - 1$ nach unten geöffnet: p_2: $y = -x^2 + 1$

Der Ansatz zur Bestimmung der x-Koordinaten der Schnittpunkte von p_1 und p_2 besteht in allen Fällen darin, die Funktionsterme von p_1 und p_2 gleichzusetzen.

Quadratische Gleichungen lösen

K5 **3** **a)** $a^2 = 81 \quad \Rightarrow a_1 = 9;\ a_2 = -9$
b) $(b + 5)^2 = 0 \quad \Rightarrow b = -5$
c) $\left(c - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$
d) $(d - 10)^2 = 0 \Rightarrow d = 10$
e) $\left(e + \frac{1}{7}\right)^2 = 0 \Rightarrow e = -\frac{1}{7}$
f) $f^2 = -1000 \quad \Rightarrow$ keine Lösung

K5 **4** Lösungsmöglichkeiten:

a) $0 = (x - 1)^2$
b) $0 = (x - 6) \cdot (x + 6)$
c) $0 = x^2$
d) $0 = (x + 2) \cdot (x - 3)$
e) $0 = \left(x + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{8}\right)$
f) $0 = x^2 + 1$

K6/1 **5** … kleiner als 0.

K5/6 **6** $0{,}25x^2 + 10x + 1 = 0 \quad \Rightarrow D = 99$
$-x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \Rightarrow D = 24$
$-4x^2 + 8x - 4 = 0 \quad \Rightarrow D = 0$
$x^2 + x + 0{,}5 = 0 \quad \Rightarrow D = -1$
$-x^2 - 0{,}5x - 0{,}125 = 0 \quad \Rightarrow D = -0{,}25$

K1/5 **7** **a)** keine Lösung für $-12 < b < 12$
b) genau eine Lösung für $b = \pm 12$
c) zwei Lösungen für $b < -12$ oder $b > 12$

Hinweis: Hier sind die kompletten Bereiche angegeben, die Schülerinnen und Schüler sollen natürlich nur exemplarische Werte liefern.

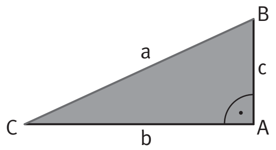
K1/5 **8** Lösungsmöglichkeit: $x^2 + 2x + 1 = 0$
$2x^2 + 4x + 2 = 0$

Startklar

Satz des Pythagoras

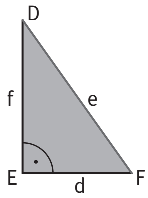
KX

1 **a)**



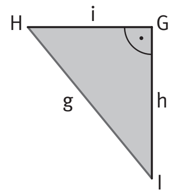
$b^2 + c^2 = a^2$

b)



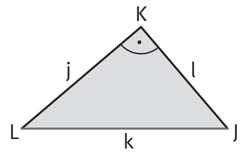
$d^2 + f^2 = e^2$

c)



$i^2 + h^2 = g^2$

d)



$j^2 + l^2 = k^2$

KX

2 Lorena hat den Satz des Pythagoras angewendet, obwohl es sich bei dem abgebildeten Dreieck um ein spitzwinkliges Dreieck handelt. Der Satz des Pythagoras gilt nur für rechtwinklige Dreiecke.

Zusammenhänge im Dreieck

KX

3 **a)** Bei den rechtwinkligen Dreiecken 2 und 5 lässt sich der Flächeninhalt direkt berechnen: Bei rechtwinkligen Dreiecken wird die Grundseitenlänge durch eine der beiden Katheten dargestellt und die Höhe durch die andere Kathete. Damit gilt für die Dreiecke 2 und 5:

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \text{Kathete}_1 \cdot \text{Kathete}_2$

Beim gleichschenkligen Dreieck 3 lässt sich die Höhe h zur Grundseite g = 7 cm mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen, indem man das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke mit Hypotenuse b = 4,8 cm und einer Kathete mit 3,5 cm zerlegt. Für die Höhe h erhält man:

$h = \sqrt{4{,}8^2 - 3{,}5^2}\,\text{cm} \approx 3{,}3\,\text{cm}$

b) Zur Berechnung des Flächeninhalts der Dreiecke 1 und 4 muss jeweils eine Dreieckshöhe bestimmt werden.

$A_1 \approx \frac{1}{2} \cdot 6{,}5\,\text{cm} \cdot 1{,}9\,\text{cm} = 6{,}175\,\text{cm}^2$

$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 5\,\text{cm} \cdot 3{,}6\,\text{cm} = 9\,\text{cm}^2$

$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 7\,\text{cm} \cdot 3{,}3\,\text{cm} = 11{,}55\,\text{cm}^2$

$A_4 \approx \frac{1}{2} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 2{,}8\,\text{cm} = 11{,}2\,\text{cm}^2$

$A_5 = \frac{1}{2} \cdot 3\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 6\,\text{cm}^2$

KX

4

x	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
α	28,5°	76,3°	60°	90°	18,9°	110°	91°
β	62,5°	90°	60°	19°	5,1°	35°	78°
γ	89°	13,7°	60°	71°	156°	35°	11°
Art	spitz-winklig	recht-winklig	gleichseitig	recht-winklig	stumpf-winklig	gleich-schenklig	stumpf-winklig

Bei d) können die Maße von α und γ auch vertauscht sein.

3 Trigonometrie

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K4

- Sabrina berechnet die Höhe h:
  $\tan 57° = \frac{h}{50\,m} \Rightarrow h = 50\,m \cdot \tan 57° \approx 77\,m$
  Ergebnis: Der Dom ist rund 77 m hoch.

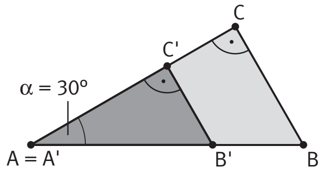
Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.
Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

3.1 Zusammenhänge am rechtwinkligen Dreieck

Entdecken

KX ■ Es werden verschieden große rechtwinklige Dreiecke ABC und A'B'C' mit $\gamma = 90°$ und $\alpha = 30°$ gezeichnet, z. B. mit a = 3 cm, b ≈ 5,2 cm und c = 6 cm oder mit a' = 2 cm, b' ≈ 3,5 cm und c' = 4 cm.



KX ■ Es sind unterschiedliche Beobachtungen möglich.

KX ■ Der Vergleich der Quotienten der Seitenlängen zeigt, dass die Quotienten konstant sind, so gilt im Beispiel mit ABC und A'B'C': $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = 0{,}5$ bzw. $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \approx 0{,}87$ und $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \approx 0{,}58$.

Nachgefragt

K 1/6 ■ Da die Hypotenuse dem rechten und somit dem größten Winkel im Dreieck gegenüberliegt, ist sie die längste der drei Seiten im Dreieck. Somit ist bei beiden Quotienten (von Ankathete und Hypotenuse bzw. von Gegenkathete und Hypotenuse) der Nenner größer als der Zähler und der Wert des Bruchs damit stets kleiner als 1. Insofern ist sogar diese Formulierung passend: „Die Quotientenwerte sind stets kleiner als 1“.

K 1/6 ■ Die Werte von Sinus und Kosinus ändern sich nicht, da bei der Verdoppelung, Halbierung ... aller Seitenlängen der Faktor sowohl im Zähler als auch im Nenner des Bruchs steht und damit gekürzt werden kann:

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{2a}{2c} = \frac{3a}{3c} = \ldots$ $\qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{2b}{2c} = \frac{3b}{3c} = \ldots$

Aufgaben

K 6/4 **1** **a)** $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad \tan\alpha = \frac{a}{b}$
$\sin\beta = \frac{b}{c}$ $\quad \cos\beta = \frac{a}{c}$ $\quad \tan\beta = \frac{b}{a}$

b) $\sin\alpha = \frac{d}{f}$ $\quad \cos\alpha = \frac{e}{f}$ $\quad \tan\alpha = \frac{d}{e}$
$\sin\beta = \frac{e}{f}$ $\quad \cos\beta = \frac{d}{f}$ $\quad \tan\beta = \frac{e}{d}$

c) $\sin\alpha = \frac{r}{t}$ $\quad \cos\alpha = \frac{s}{t}$ $\quad \tan\alpha = \frac{r}{s}$
$\sin\beta = \frac{s}{t}$ $\quad \cos\beta = \frac{r}{t}$ $\quad \tan\beta = \frac{s}{r}$

d) $\sin\alpha = \frac{v}{u}$ $\quad \cos\alpha = \frac{w}{u}$ $\quad \tan\alpha = \frac{v}{w}$
$\sin\beta = \frac{w}{u}$ $\quad \cos\beta = \frac{v}{u}$ $\quad \tan\beta = \frac{w}{v}$

K 5/6 **2** **a)**

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
sin α	0,174	0,342	0,5	0,643	0,766	0,866	0,940	0,985	1
cos α	0,985	0,940	0,866	0,766	0,643	0,5	0,342	0,174	0
tan α	0,176	0,364	0,577	0,839	1,192	1,732	2,747	5,671	–

b) Die Sinus- und die Kosinus-Werte liegen für $\alpha \in [0°; 90°]$ im Bereich [0; 1].
Dabei ist sin 10° = cos 80°; sin 20° = cos 70°; sin 30° = cos 60°; sin 40° = cos 50°; ...
Die Tangens-Werte steigen für $\alpha \in [0°; 90°[$ monoton an und entsprechen dem Quotienten aus den Werten für Sinus und Kosinus:

$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \sin\alpha : \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

K5/4 **3** **a)** $\sin\alpha = \frac{a}{b} = \frac{5{,}5}{7{,}3} \approx 0{,}75$ $\quad \cos\alpha = \frac{c}{b} = \frac{4{,}8}{7{,}3} \approx 0{,}66$ $\quad \tan\alpha = \frac{a}{c} = \frac{5{,}5}{4{,}8} \approx 1{,}15$

$\sin\gamma = \frac{c}{b} = \frac{4{,}8}{7{,}3} \approx 0{,}66$ $\quad \cos\gamma = \frac{a}{b} = \frac{5{,}5}{7{,}3} \approx 0{,}75$ $\quad \tan\gamma = \frac{c}{a} = \frac{4{,}8}{5{,}5} \approx 0{,}87$

b) $\sin\alpha = \frac{a}{b} = \frac{56}{65} \approx 0{,}86$ $\quad \cos\alpha = \frac{c}{b} = \frac{33}{65} \approx 0{,}51$ $\quad \tan\alpha = \frac{a}{c} = \frac{56}{33} \approx 1{,}70$

$\sin\gamma = \frac{c}{b} = \frac{33}{65} \approx 0{,}51$ $\quad \cos\gamma = \frac{a}{b} = \frac{56}{65} \approx 0{,}86$ $\quad \tan\gamma = \frac{c}{a} = \frac{33}{56} \approx 0{,}59$

K5/4 **4** **a)** $\beta = 90° - 50° = 40°$

$\tan 50° = \frac{c}{b} \Leftrightarrow c = b \cdot \tan 50° = 7\,\text{cm} \cdot \tan 50° \approx 8{,}3\,\text{cm}$

$\cos 50° = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a = \frac{b}{\cos 50°} = \frac{7\,\text{cm}}{0{,}64} = 10{,}9\,\text{cm}$

b) $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3{,}2\,\text{cm}}{8{,}7\,\text{cm}} \Rightarrow \quad \alpha \approx 21{,}6° \quad \beta \approx 90° - 21{,}6° = 68{,}4°$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = c \cdot \cos\alpha \approx 8{,}7\,\text{cm} \cdot \cos 21{,}6° \approx 8{,}1\,\text{cm}$

c) $\sin\alpha = \frac{a}{b} = \frac{4\,\text{dm}}{8\,\text{dm}} = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 30° \quad \beta = 90° - 30° = 60°$

$\cos\alpha = \frac{c}{b} \Leftrightarrow c = b \cdot \cos\alpha = 8\,\text{dm} \cdot \cos 30° \approx 6{,}9\,\text{dm}$

K5/2 **5**

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a in cm	6,1	8,2	4,9	6,4	12,6	5,6
b in cm	8,2	4,8	6,6	3,7	5,9	4,4
c in cm	5,5	6,6	8,2	7,4	11,1	7,1
α	48,0°	90,0°	36,6°	60,0°	90,0°	52,0°
β	90,0°	36,0°	53,4°	30,0°	28,0°	38,0°
γ	42,0°	54,0°	90,0°	90,0°	62,0°	90,0°

K3/5 **6** $\tan 43° = \frac{x\,\text{m} + 10\,\text{m}}{37\,\text{m}} \Leftrightarrow x\,\text{m} = 37\,\text{m} \cdot \tan 43° - 10\,\text{m} \approx 34{,}5\,\text{m} - 10\,\text{m} = 24{,}5\,\text{m}$

Der Fluss ist 24,5 m breit.

Entdecken

KX ■ Abbildung wie im Schulbuch

KX ■ Mögliche Antwort:
Bei gegebenem Winkel α entspricht im zugehörigen Dreieck mit dem Punkt P (x | y) auf dem Einheitskreis der Sinus-Wert von α dem y-Wert von P und der Kosinus-Wert dem x-Wert von P, d. h.:
P (cos α | sin α)

KX ■ Es sind individuelle Beobachtungen und Begründungen möglich, z. B.:
$\cos 30° = \sin 60°$, $\cos 60° = \sin 30°$

KX ■ (Ohne Abbildung) Das Dreieck mit dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 45°$ ist ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck, d. h.: $\sin\alpha = \cos\alpha$.

KX ■ Mögliche Antwort:
Der Punkt Q (1 | tan 30°) liegt auf der Ursprungsgeraden $y = m \cdot x$, für die mit Einsetzen von Q (1 | tan 30°) in die Geradengleichung $\tan 30° = m$ gilt.

Nachgefragt

K1 ■ Die Aussage ist korrekt. Zu jedem $\varphi \geq 360°$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass gilt: $\varphi = n \cdot 360° + \alpha$, wobei $\alpha \in [0°; 360°[$ ist; d. h.: Nach einer Umdrehung von 360° wiederholen sich die Werte für Sinus, Kosinus und Tangens.

KX ■ Mögliche Antwort:
Wie unter „Verstehen“ dargestellt, lässt sich jedem Winkelmaß α eine Steigung m zuordnen, die zur Ursprungsgeraden $y = mx$ gehört. Auf dieser Ursprungsgeraden liegt insbesondere der Punkt P (cos α | sin α). Durch Einsetzen von P in die Geradengleichung $y = mx$ erhält man $m = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und damit $m = \tan\alpha$.

Aufgaben

K4 **1**

Vorzeichen	I. Quadrant	II. Quadrant	III. Quadrant	IV. Quadrant
sin α	+	+	–	–
cos α	+	–	–	+
tan α	+	–	+	–
Verlauf von g	steigend	fallend	steigend	fallend

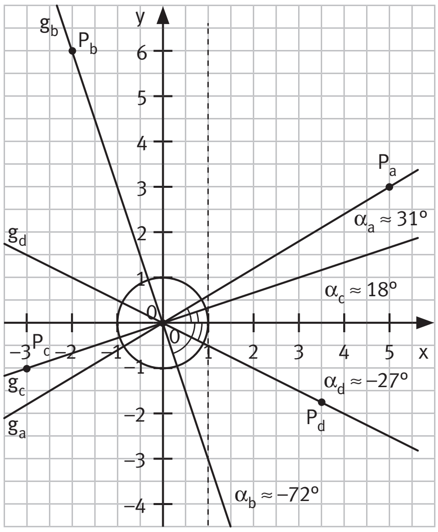
K5 **2**
a) 0,47 g: $y = 0{,}47x$
b) nicht def.
c) –1,73 g: $y = -1{,}73x$
d) 0,01 g: $y = 0{,}01x$
e) –0,04 g: $y = -0{,}04x$
f) –4,75 g: $y = -4{,}75x$
g) –0,84 g: $y = -0{,}84x$
h) 0 g: $y = 0$

K1 **3** Für $\alpha = 90°$ bzw. $\alpha = 270°$ liegt der Punkt P (x | y) auf der y-Achse, P (0 | 1) bzw. P (0 | –1), die Ursprungsgerade durch P ist die y-Achse, diese kann nicht durch $y = mx$ angegeben werden. Insbesondere ist $\tan\alpha$ für $\alpha = 90°$ bzw. $\alpha = 270°$ nicht definiert, da in diesem Fall $\cos\alpha$ gleich null ist und der Bruch $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ für $\cos\alpha = 0$ nicht definiert ist.

K5 **4** **a)** $\alpha \in\ ]270°, 360°[$ IV. Quadrant z. B.: $\alpha = 300°$
b) $\alpha \in\ ]180°, 270°[$ III. Quadrant z. B.: $\alpha = 200°$
c) $\alpha \in\ ]0°, 90°[$ I. Quadrant z. B.: $\alpha = 30°$
d) $\alpha \in\ ]90°, 180°[$ II. Quadrant z. B.: $\alpha = 100°$

K5 **5** 1 F 2 U 3 N 4 K 5 T 6 I 7 O 8 N Lösungswort: FUNKTION

K5 **6** Mit P (x | y) gilt für die Ursprungsgerade g: y = mx bzw. für die Steigung: $m = \tan\alpha = \frac{y}{x}$.



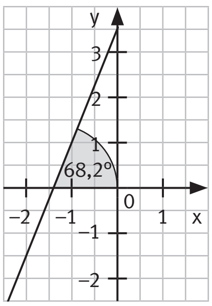
a) $m = \frac{3}{5} = 0{,}6$ g: y = 0,6x
$\tan\alpha = 0{,}6$ $\alpha \approx 31°$

b) $m = \frac{6}{-2} = -3$ g: y = –3x
$\tan\alpha = -3$ $\alpha \approx -72°$

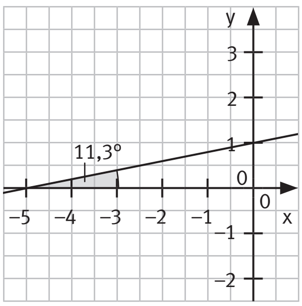
c) $m = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$ g: $y = \frac{1}{3}x$
$\tan\alpha = \frac{1}{3}$ $\alpha \approx 18°$

d) $m = \frac{-1{,}75}{3{,}5} = -0{,}5$ g: y = –0,5x
$\tan\alpha = -0{,}5$ $\alpha \approx -27°$

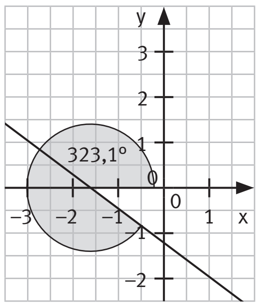
K5 **7** **a)** m = 2,5
$\tan^{-1} 2{,}5 \approx 68{,}2°$



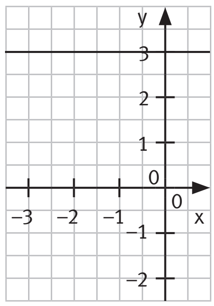
b) m = 0,2
$\tan^{-1} 0{,}2 \approx 11{,}3°$



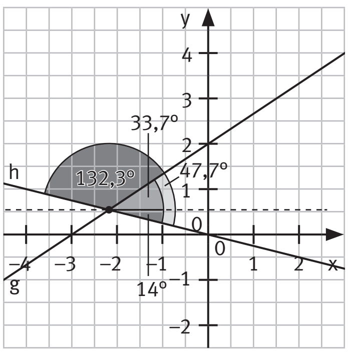
c) m = –0,75
$\tan^{-1} (-0{,}75) \approx 323{,}1°$



d) m = 0
$\tan^{-1} 0 = 0°$

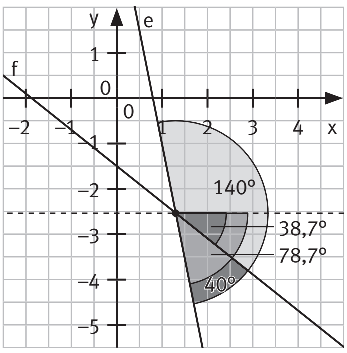


K5 **8** **a)**



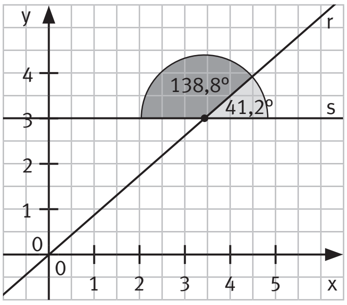
$\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33{,}7°$
$\alpha_2 = \tan^{-1}(-0{,}25) \approx -14°$
$\alpha = \alpha_1 + |\alpha_2| = 33{,}7° + 14° = 47{,}7°$
$\beta = 180° - 47{,}7° = 132{,}3°$

b)



$\alpha_1 = \tan^{-1}(-5) \approx 78{,}7°$
$\alpha_2 = \tan^{-1}(-0{,}8) \approx 38{,}7°$
$\alpha = |\alpha_1| - \alpha_2 = 78{,}7° - 38{,}7° = 40°$
$\beta = 180° - 40° = 140°$

c)



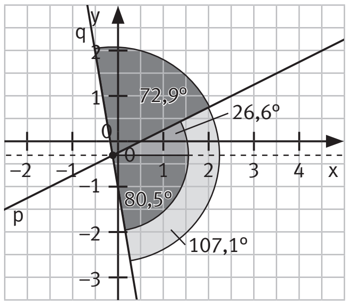
$\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{7}{8}\right) \approx 41{,}2°$

$\alpha_2 = \tan^{-1} 0 \approx 0°$

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 41{,}2° + 0° = 41{,}2°$

$\beta = 180° - 41{,}2° = 138{,}8°$

d)



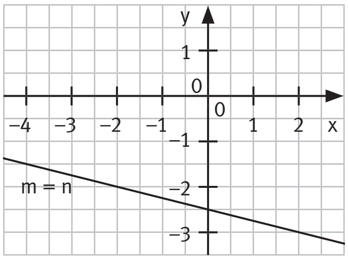
$\alpha_1 = \tan^{-1} 0{,}5 \approx 26{,}6°$

$\alpha_2 = \tan^{-1} (-6) \approx -80{,}5°$

$\alpha = \alpha_1 + |\alpha_2| = 26{,}6° + 80{,}5° = 107{,}1°$

$\beta = 180° - 107{,}1° = 72{,}9°$

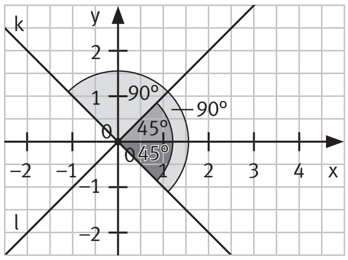
e)



Geraden m und n: m = n

$m_1 = m_2 = -0{,}25$

f)



$\alpha_1 = \tan^{-1} 1 = 45°$

$\alpha_2 = \tan^{-1} (-1) \approx -45°$

$\alpha = \alpha_1 + |\alpha_2| = 45° + 45° = 90°$

$\beta = 180° - 90° = 90°$

K1 **9** In einem bei B rechtwinkligen Dreieck ABC gilt nach dem Satz des Pythagoras (Zeichnung 2):
$a^2 + c^2 = b^2$
In der Zeichnung 1 gilt: $a = \sin\alpha$ und $c = \cos\alpha$
Eingesetzt ergibt sich: $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

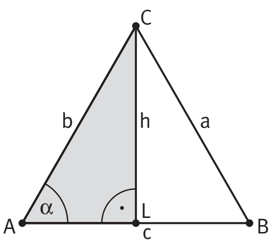
K6 **10 a)** Gesa löst die ihr bekannten Formeln jeweils nach $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$ auf, ohne α vorher zu berechnen.

b)

	1	2	3	4	5	6	7
sin α	0,25	0,87	0,71	0,11	0,69	0,50	0,59
cos α	0,97	0,50	0,71	0,99	0,72	0,87	0,81
tan α	0,26	1,74	1,00	0,11	0,96	0,57	0,73

KX **11** Lösungsmöglichkeit:
Zu jeder Geraden g: $y = m_g x + b_g$ gibt es eine parallele Ursprungsgerade g_0: $y = m_0 x$, für die gilt: $m_0 = m_g$. Für g_0 lässt sich $m_0 = \tan\alpha$ bestimmen und damit auch m_g. Es gilt: $m_0 = m_g = \tan\alpha$.

KX **12**

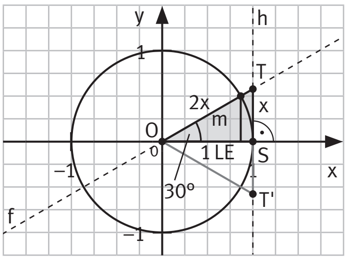


Im gleichseitigen Dreieck ABC haben alle drei Höhen die Länge h. Mit dem Lotfußpunkt L von C auf die Strecke AB erhält man das rechtwinklige Dreieck ALC mit der Hypotenusenlänge b = a und den Dreieckseiten der Länge 0,5a bzw. h. Im rechtwinkligen Dreieck ALC gilt: $\sin\alpha = \frac{h}{a}$.

Wissen

KX

- Das gleichschenklige Dreieck mit $\alpha = 60°$ ist ein gleichseitiges Dreieck. Im gleichseitigen Dreieck mit $a = 1$ (Einheitskreis) gilt:
  $h^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ bzw. $h = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
  Im gleichseitigen Dreieck mit $a = 1$ (Einheitskreis) gilt nach Aufgabe 12:
  $\sin 60° = h = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- Die Sinus-Werte für 0° und für 90° ergeben sich direkt anhand des Einheitskreises.
  Für 30° entspricht der Kosinus-Wert im Einheitskreis der Höhe $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; damit gilt mit Pythagoras:
  $\sin 30° = \sqrt{1 - h^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$
  Für 45° entsprechen sich die Werte für Sinus und Kosinus, d. h.: $\sin 45° = \cos 45°$; mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich im Einheitskreis:
  $(\sin 45°)^2 + (\sin 45°)^2 = 1 \Leftrightarrow (\sin 45°)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- Es sind individuelle Beobachtungen und Erklärungen möglich.
- Bei gegebenen Werten für Sinus und Kosinus erhält man die Tangens-Werte mit $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
- Dass $\tan 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ gilt, sieht man anhand der Dreiecke OST und OT'T:



Wenn man das rechtwinklige Dreieck OST mit $\alpha = 30°$ an der x-Achse spiegelt, erhält man das gleichseitige Dreieck OT'T mit $\alpha' = 60°$ und der Seitenlänge 2x mit $x = |\overline{ST}|$. Im rechtwinkligen Dreieck OST mit $\alpha = 30°$ und $|\overline{OS}| = 1$ LE, $|\overline{ST}| = x$ LE und $|\overline{OT}| = 2x$ LE gilt für x:
$x^2 = OT^2 - OS^2 = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$
d. h.: $1 = 3x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{3}} = x \Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{3} = x$

Der Wert für tan 45° ergibt sich anhand des gleichseitigen Dreiecks OST mit $|\overline{OS}| = |\overline{ST}| = 1$ LE.
Der Wert für tan 0° ist offensichtlich im „Dreieck" OST mit $|\overline{ST}| = 0$ LE. Dass der Tangens für $\alpha = 0°$ nicht definiert ist, ist offensichtlich im „Dreieck" OST mit $|\overline{OS}| = 0$ LE.

Entdecken

KX
- Arbeit mit einem dynamischen Geometrieprogramm als Vorbereitung für das Ablesen der Werte.

KX
-

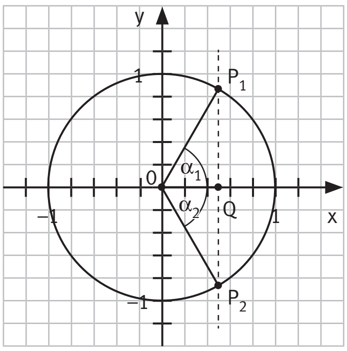
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos\alpha$	1	0,9	0,7	0,5	0	–0,5	–0,7	–0,9	–1
$\sin\alpha$	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0
$\tan\alpha$	0	0,6	1	1,7	/	–1,7	–1	–0,6	0

KX
- Individuelle Beobachtungen und Erklärungen.

KX
-

α	0°	–30°	–45°	–60°	–90°	–120°	–135°	–150°	–180°
$\cos\alpha$	1	0,9	0,7	0,5	0	–0,5	–0,7	–0,9	–1
$\sin\alpha$	0	–0,5	–0,7	–0,9	–1	–0,9	–0,7	–0,5	0
$\tan\alpha$	0	–0,6	–1	–1,7	/	1,7	1	0,6	0

Nachgefragt

K6
- 

Die Gleichung $\cos\alpha = 0{,}5$ hat im Bereich $]-180°; 180°[$ zwei Lösungen:
$\cos\alpha = 0{,}5 \;\Leftrightarrow\; \alpha_1 = 60°$ oder $\alpha_2 = -60°$ (wegen $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$)

KX
- Individuelle Beschreibungen, u. a. mithilfe der Beobachtungen unter „Entdecken“ und der Supplementsbeziehungen bzw. der Symmetrie am Einheitskreis.

Aufgaben

KX **1** Anwenden der Supplementbeziehungen:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

a) $\sin 170° = \sin(180° - 10°)$ $\quad \Rightarrow \alpha = 10°$

b) $\sin 101° = \sin(180° - 79°)$ $\quad \Rightarrow \alpha = 79°$

c) $\sin 93{,}5° = \sin(180° - 86{,}5°)$ $\quad \Rightarrow \alpha = 86{,}5°$

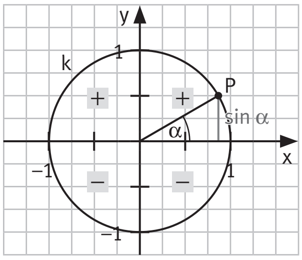
d) $\cos 176° = \cos(180° - 4°)$ $\quad \Rightarrow \alpha = 4°$

e) $\cos 115° = \cos(180° - 65°)$ $\quad \Rightarrow \alpha = 65°$

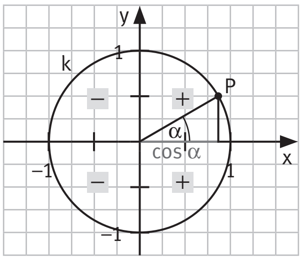
f) $\cos 92{,}7° = \cos(180° - 87{,}3°)$ $\quad \Rightarrow \alpha = 87{,}3°$

KX **2** **a)** $\sin(-30°) = -0{,}5$ **b)** $\cos(-125°) = -0{,}57$ **c)** $\tan(-89°) = -57{,}29$ **d)** $\cos(-312°) = 0{,}67$
e) $\tan(-175°) = 0{,}09$ **f)** $\sin(-234°) = 0{,}81$ **g)** $\sin(-340°) = 0{,}34$ **h)** $\cos(-45°) = 0{,}71$

KX **3** **a)** Sinuswerte



b) Kosinuswerte



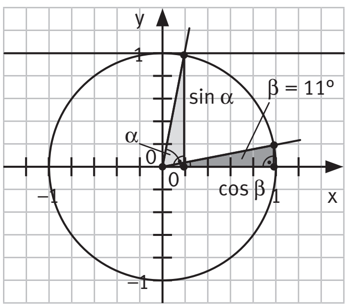
K5 **4** **a)** $\alpha \in \left]90°; 180°\right[$ **b)** $\alpha \in \left]-90°; 0°\right[$ **c)** $\alpha \in \left]-180°; -90°\right[$

K5 **5** **a)** $\sin 40° = \sin 140°$ $\sin(-140°) = \sin(-40°)$ $\sin(-50°) = \sin(-130°)$
b) $\cos 140° = \cos(-140°)$ $\cos 40° = \cos(-40°)$ $\cos 80° = \cos(-80°)$
c) $\tan 40° = \tan(-140°)$ $\tan(-40°) = \tan 140°$

K5 **6** **a)** $\alpha_1 \approx 41{,}4°$; $\alpha_2 \approx -41{,}4°$ **b)** $\alpha_1 = 120°$; $\alpha_2 = -120°$ **c)** $\beta_1 \approx 72{,}5°$; $\beta_2 \approx -72{,}5°$
d) $\gamma_1 \approx 33{,}4°$; $\gamma_2 \approx 146{,}6°$ **e)** $\gamma_1 = -30°$; $\gamma_2 = -150°$ **f)** $\beta = -90°$
g) $\alpha_1 \approx 54{,}5°$; $\alpha_2 \approx -125{,}5°$ **h)** $\alpha_1 \approx 31{,}0°$; $\alpha_2 \approx -149{,}0°$

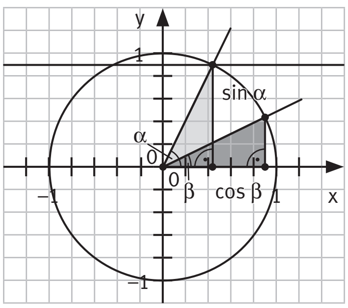
K5 **7** **a)** $\sin(\alpha - 35°) = 0{,}7 \Rightarrow \alpha - 35° = 44{,}4°$ $\Rightarrow \alpha_1 = 79{,}4°$
$\sin 44{,}4° = \sin(180° - 44{,}4°) = \sin 135{,}6° = \sin(170{,}6° - 35°)$ $\Rightarrow \alpha_2 = 170{,}6°$
b) $\cos(\alpha - 25°) = 0{,}5 \Rightarrow \alpha - 25° = 60°$ $\Rightarrow \alpha = 85°$
(es gibt keine weitere Lösung $\alpha \in [0°; 180°]$)
c) $\sin(\alpha + 35°) = 0{,}4 \Rightarrow \alpha + 35° = 23{,}6°$ $\Rightarrow \alpha_1 = -11{,}4° \notin [0°; 180°]$
$\sin 23{,}6° = \sin(180° - 23{,}6°) = \sin 156{,}4°$ $\Rightarrow \alpha_2 = 121{,}4°$
d) $\cos(2\alpha) = 0{,}5 \Rightarrow 2\alpha = 60°$ $\Rightarrow \alpha = 30°$
(es gibt keine weitere Lösung $\alpha \in [0°; 180°]$)
e) $\sin(3\alpha + 10°) = 0{,}9 \Rightarrow 3\alpha + 10° = 64{,}2°$ $\Rightarrow \alpha_1 = 18{,}1°$
$\sin 64{,}2° = \sin(180° - 64{,}2°) = \sin 115{,}8° \Rightarrow 3\alpha + 10° = 115{,}8°$ $\Rightarrow \alpha_2 = 35{,}3°$
f) $\tan(\alpha - 30°) = 1{,}1 \Rightarrow \alpha - 30° = 47{,}7°$ $\Rightarrow \alpha = 77{,}7°$
(es gibt keine weitere Lösung $\alpha \in [0°; 180°]$)

K1 **8** **a)**



Behauptung: $\cos 11° = \sin 79°$
Das Eintragen der Winkel von $\alpha = 79°$ bzw. $\beta = 11°$ am Einheitskreis liefert zwei rechtwinklige Dreiecke, die jeweils in den drei Winkeln und in der Länge der Hypotenuse übereinstimmen. Folglich sind die Dreiecke kongruent und die Seiten gleich lang. Es gilt:
$\cos 11° = \sin 79°$
$\sin 79° - \cos 11° = 0{,}98 - 0{,}98 = 0$

b)



Behauptung: $\cos 26° + \sin 64° = 2 \cdot \sin 64° \Leftrightarrow \cos 26° = \sin 64°$
Das Eintragen der Winkel $\alpha = 64°$ bzw. $\beta = 26°$ am Einheitskreis liefert zwei Dreiecke, die jeweils in den drei Winkeln und in einer Seite, dem Kreisradius übereinstimmen. Folglich sind die Dreiecke kongruent und es gilt:
$\cos 26° = \sin 64°$ bzw. $\cos 26° + \sin 64° = 2 \cdot \sin 64°$
$\cos 26° + \sin 64° = 0{,}9 + 0{,}9 = 1{,}8 = 2 \cdot \sin 64°$

Entdecken

KX ■ (Abbildung der Sinusfunktion wie in „Verstehen“ im Schulbuch)

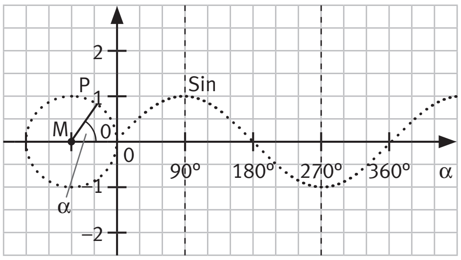
KX ■ Individuelle Beschreibung der beobachteten Eigenschaften des Graphen der Sinusfunktion.

Nachgefragt

K6 ■ Jedem Hochpunkt (Tiefpunkt) der Sinusfunktion entspricht am Einheitskreis der Punkt P (0 | 1) (P (0 | –1)).

Aufgaben

K6 **1** Es sind individuelle Formulierungen möglich, z. B.:



Den Punkten P (α | sin α) auf dem Einheitskreis ordnet man die Punkte S (α | sin α) zu und zeichnet diese Punkte in ein Koordinatensystem, bei dem auf der x-Achse die Winkelmaße angegeben werden und auf der y-Achse die Funktionswerte.
Die Punkte S (α | sin α) sind Punkte der Sinuskurve.

K5 **2** Gleiche Sinuswerte:
–275°, –265°, 85° und 95°; –235°, 55°, 125° und 415°; –155°, –25°, 205° und 335°.

K5 **3** **a)** $\alpha_1 = 63{,}1°$ $\alpha_2 = 116{,}9°$ **b)** $\alpha_1 = 15{,}3°$ $\alpha_2 = 164{,}7°$
c) $\alpha_1 = -5{,}0°$ $\alpha_2 = -175°$ **d)** $\alpha_1 = -95{,}1°$ $\alpha_2 = -84{,}9°$

KX **4** Die Nullstellen der Funktion im Intervall [–180°; 180°] sind $x_1 = -180°$, $x_2 = 0°$, $x_3 = 180°$.

KX **5** Aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Sinusfunktion gibt es zu einem Winkelmaß α_1 ein Winkelmaß α_2 mit gleichem Sinuswert: $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$. Für jedes dieser beiden Winkelmaße gilt, dass sich die Sinuswerte jeweils bei $k \cdot 360°$ wiederholen, d. h.: $\sin \alpha_1 = \sin (\alpha_1 + k \cdot 360°) = \sin \alpha_2 = \sin (\alpha_2 + k \cdot 360°)$.
Verenas Aussage ist falsch, da sie die Symmetrie der Sinusfunktion nicht berücksichtigt.

KX **6** **a)** 30°; 150° **b)** [0; 30°[;]150°; 360°] **c)** –90°; 270° **d)** [390°; 510°]

Wissen

KX • Den Graphen der Kosinusfunktion kann man als einen verschobenen Graphen der Sinusfunktion auffassen. Wie bei der Sinusfunktion liegen die Funktionswerte im Intervall [–1; 1], die Periodenlänge ist 360°, Nullstellen sind bei $90° + k \cdot 180°$, $k \in \mathbb{Z}$.

K1 • Die Aussage ist richtig mit der Einschränkung, dass die zu verschiebende Sinusfunktion bei α = 90° beginnt: Der Graph der Kosinusfunktion ist gegenüber dem Graphen der Sinusfunktion um 90° nach links verschoben, und zwar so, dass der Startpunkt des Graphen der Kosinusfunktion mit 0° beginnt.

Entdecken

KX
- Im beschriebenen Fall handelt es sich nicht um ein rechtwinkliges Dreieck, daher lassen sich die gesuchten Längen nicht direkt mittels Sinus, Kosinus oder Tangens bestimmen.

KX
- $h_a = 11{,}01\,\text{cm}$ bzw. $h_a = 11{,}01\,\text{m}$

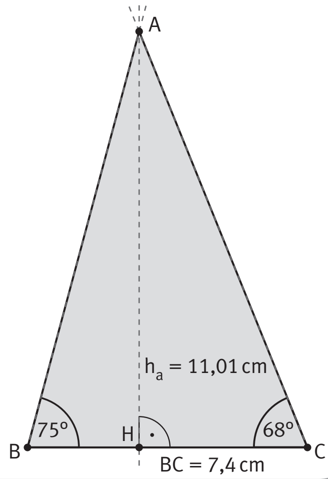
KX
- Durch die Zerlegung des Dreiecks ABC in die Teildreiecke ABH und AHC mit dem Höhenfußpunkt H erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke. Mittels der Winkelmaße β und γ und der Länge a und durch Anwenden des Sinussatzes lassen sich das Winkelmaß α, die Seitenlängen b und c und damit schließlich die Höhe h_a bestimmen.

$\alpha = 180° - 75° - 68° = 37°$

$b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot a = \frac{\sin 75°}{\sin 37°} \cdot 7{,}4\,\text{cm} \approx 11{,}9\,\text{cm}$

$c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \cdot a = \frac{\sin 68°}{\sin 37°} \cdot 7{,}4\,\text{cm} \approx 11{,}4\,\text{cm}$

$h_a = \sin\beta \cdot c = \sin 75° \cdot 11{,}4\,\text{cm} \approx 11{,}01\,\text{cm}$



Nachgefragt

K6
- Der Sinussatz für ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C lautet:
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin 90°} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = c \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\sin\beta = \frac{b}{c}$
Das sind die bereits bekannten Zusammenhänge im rechtwinkligen Dreieck.

K1
- Die Aussage ist falsch. Bei gegebenen Seitenlängen des Dreiecks kann man die Maße der Innenwinkel zwar eindeutig bestimmen, jedoch nicht mithilfe des Sinussatzes, sondern mithilfe des Kosinussatzes. Für die Anwendung des Sinussatzes braucht man noch das Maß eines Winkels, um die dann noch fehlenden Winkelmaße zu bestimmen.

Aufgaben

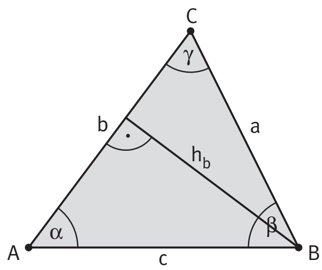
K5 **1** **a)** $\alpha = 46°$
$a = \sin 46° \cdot \frac{10{,}8\,\text{cm}}{\sin 78°} \approx 7{,}9\,\text{cm}$
$c = \sin 56° \cdot \frac{10{,}8\,\text{cm}}{\sin 78°} \approx 9{,}2\,\text{cm}$

b) $\alpha = 92°$
$a = \sin 92° \cdot \frac{3{,}2\,\text{cm}}{\sin 65°} \approx 3{,}5\,\text{cm}$
$c = \sin 23° \cdot \frac{3{,}2\,\text{cm}}{\sin 65°} \approx 1{,}4\,\text{cm}$

c) $\beta = 29°$
$b = \sin 29 \cdot \frac{21{,}3\,\text{cm}}{\sin 108°} \approx 10{,}9\,\text{cm}$
$a = \sin 43° \cdot \frac{21{,}3\,\text{cm}}{\sin 108°} \approx 15{,}3\,\text{cm}$

K5 **2** **a)** $\beta \approx 29{,}2°; \gamma \approx 112{,}8°$ **b)** $\alpha \approx 75{,}1°; \beta \approx 59{,}9°$ **c)** $\alpha \approx 15{,}8°; \gamma \approx 151{,}2°$

K5 **3** $\sin\gamma = \frac{h_b}{a} \Leftrightarrow h_b = a \cdot \sin\gamma$
$\sin\alpha = \frac{h_b}{c} \Leftrightarrow h_b = c \cdot \sin\alpha$
$\Rightarrow a \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\alpha \Leftrightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$



K3 **4**
$a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = c \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ $\qquad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a \cdot \sin\beta}{b}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{a \cdot \sin\gamma}{c}\right)$

$b = c \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ $\qquad \beta = \sin^{-1}\left(\frac{b \cdot \sin\alpha}{a}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{b \cdot \sin\gamma}{c}\right)$

$c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = b \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ $\qquad \gamma = \sin^{-1}\left(\frac{c \cdot \sin\alpha}{a}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{c \cdot \sin\gamma}{b}\right)$

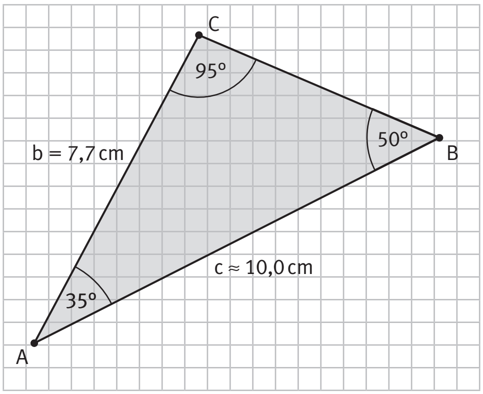
K5 **5**

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a	12 cm	≈ 4,5 dm	45,3 mm	5,1 m	≈ 3,0 cm	385 mm
b	≈ 11,3 cm	3,6 dm	≈ 46,7 mm	3,6 m	4,2 cm	≈ 857 mm
c	5,8 cm	≈ 4,6 dm	≈ 9,7 mm	≈ 6,6 m	≈ 1,6 cm	721 mm
α	≈ 82,1°	64,8°	76°	50,5°	36,3°	26,5°
β	≈ 69,3°	47°	92°	≈ 33,0°	125°	≈ 96,8°
γ	28,6°	68,2°	12°	≈ 96,5°	18,7°	≈ 56,7°

KX **6** Er hat Recht. Bei einem nach dem WSW-Satz konstruierbaren Dreieck muss man zuerst über die Innenwinkelsumme das Maß des der Seite gegenüberliegenden Winkels ermitteln.

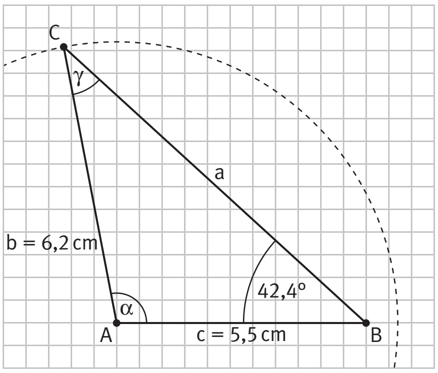
K5 **7** **a)** $\beta = 180° - 35° - 95° = 50°$ $c = b \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 77\,\text{cm} \cdot \frac{\sin 95°}{\sin 50°} \approx 100\,\text{cm}$

b) Maßstab 1 : 10



K5 **8** (Ohne Planfigur und ohne Konstruktionsbeschreibung)

a)

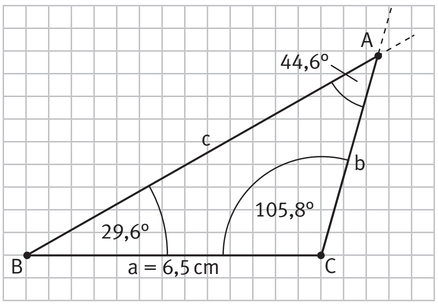


$\sin\gamma = \frac{c}{b} \cdot \sin\beta = \frac{5{,}5\,\text{cm}}{6{,}2\,\text{cm}} \cdot \sin 42{,}4° \Rightarrow \gamma \approx 36{,}7°$

$\alpha = 180° - 42{,}4° - 36{,}7° = 100{,}9°$

$a = \frac{b}{\sin\beta} \cdot \sin\alpha = \frac{6{,}2\,\text{cm}}{\sin 42{,}4°} \cdot \sin 100{,}9° \approx 9{,}0\,\text{cm}$

b)

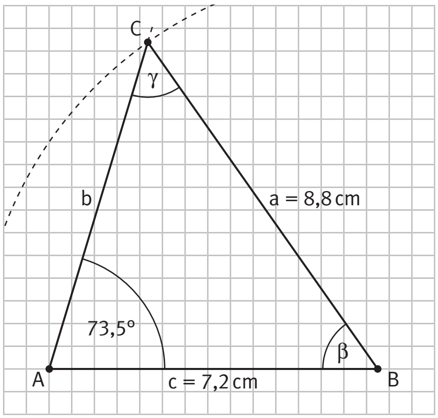


$\beta = 180° - 44{,}6° - 105{,}8° = 29{,}6°$

$b = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta = \frac{6{,}5\,\text{cm}}{\sin 44{,}6°} \cdot \sin 29{,}6° \approx 4{,}6\,\text{cm}$

$c = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\gamma = \frac{6{,}5\,\text{cm}}{\sin 44{,}6°} \cdot \sin 105{,}8° \approx 8{,}9\,\text{cm}$

c)

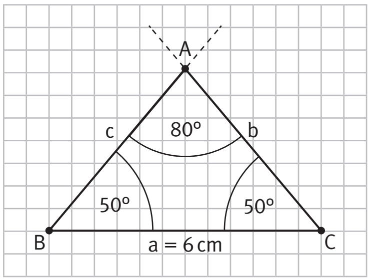


$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{a} \cdot c = \frac{\sin 73{,}5°}{8{,}8\,\text{cm}} \cdot 7{,}2\,\text{cm} \Rightarrow \gamma \approx 51{,}7°$

$\beta = 180° - 73{,}5° - 51{,}7° = 54{,}8°$

$b = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta = \frac{8{,}8\,\text{cm}}{\sin 73{,}5°} \cdot \sin 54{,}8° \approx 7{,}5\,\text{cm}$

d)

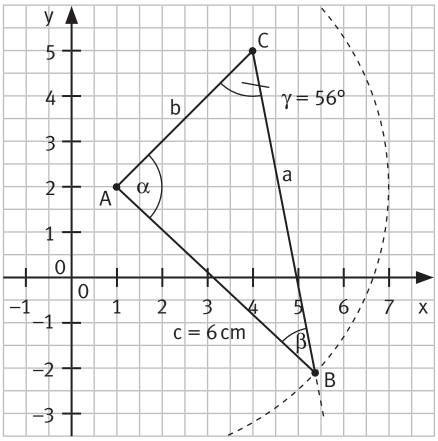


$\beta = \gamma = \frac{180° - 80°}{2} = 50°$

$\Rightarrow$ gleichschenkliges Dreieck ABC

$c = b = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta = \frac{6\,\text{cm}}{\sin 80°} \cdot \sin 50° \approx 4{,}7\,\text{cm}$

K5 **9 a)** 1



$c = |\overline{AB}| = 6{,}0\,\text{cm}$

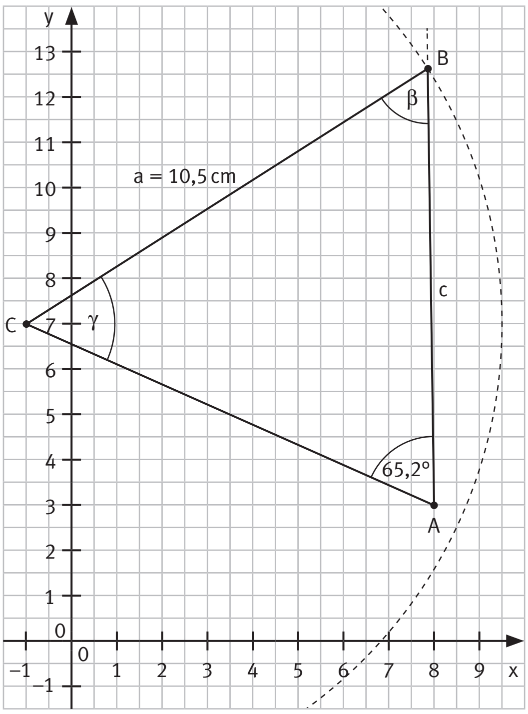
$b = |\overline{AC}| = \sqrt{(3\,\text{cm})^2 + (3\,\text{cm})^2} \approx 4{,}24\,\text{cm}$

$\sin\beta = \frac{\sin\gamma}{c} \cdot b = \frac{\sin 56°}{6\,\text{cm}} \cdot 4{,}24\,\text{cm} \Rightarrow \beta \approx 35{,}9°$

$\alpha = 180° - \gamma - \beta = 180° - 56° - 35{,}9° = 88{,}1°$

$a = \frac{b}{\sin\beta} \cdot \sin\alpha = \frac{4{,}24\,\text{cm}}{\sin 35{,}9°} \cdot \sin 88{,}1° \approx 7{,}23\,\text{cm}$

2



$a = |\overline{BC}| = 10{,}5\,\text{cm}$

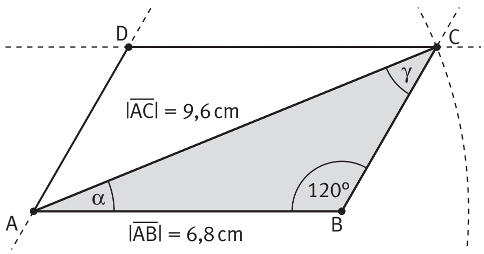
$b = |\overline{AC}| = \sqrt{(9\,\text{cm})^2 + (4\,\text{cm})^2} \approx 9{,}85\,\text{cm}$

$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{a} \cdot b = \frac{\sin 65{,}2°}{10{,}5\,\text{cm}} \cdot 9{,}85\,\text{cm} \Rightarrow \beta \approx 58{,}4°$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 65{,}2° - 58{,}4° = 56{,}4°$

$c = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\gamma = \frac{10{,}5\,\text{cm}}{\sin 65{,}2°} \cdot \sin 56{,}4° \approx 9{,}6\,\text{cm}$

b)



Zur Bestimmung der Länge von $\overline{BC}$ im Parallelogramm genügt es, das Dreieck ABC zu betrachten mit

$c = |\overline{AB}| = 6{,}8\,\text{cm}$; $b = |\overline{AC}| = 9{,}6\,\text{cm}$; $\beta = 120°$.

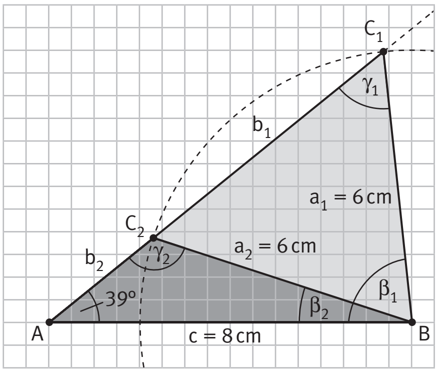
Im Dreieck ABC gilt:

$\sin\gamma = \frac{\sin\beta}{b} \cdot c = \frac{\sin 120°}{9{,}6\,\text{cm}} \cdot 6{,}8\,\text{cm} \Rightarrow \gamma \approx 37{,}8°$

$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 120° - 37{,}8° = 22{,}2°$

$|\overline{BC}| = a = \frac{b}{\sin\beta} \cdot \sin\alpha = \frac{9{,}6\,\text{cm}}{\sin 120°} \cdot \sin 22{,}2° \approx 4{,}2\,\text{cm}$

K1 **10 a)**



Der Winkel mit dem Winkelmaß $\alpha = 39°$ liegt nicht der längeren der beiden gegebenen Dreiecksseiten gegenüber. Daher gibt es zwei Schnittpunkte, C_1 und C_2, des von A ausgehenden Schenkels mit dem Kreis um B mit Radius $r = 6\,\text{cm}$.

b) $\frac{6\,\text{cm}}{\sin 39°} = \frac{8\,\text{cm}}{\sin\gamma} \Leftrightarrow \sin\gamma = \frac{8\,\text{cm}}{6\,\text{cm}} \cdot \sin 39° \quad \Rightarrow \gamma_1 \approx 57{,}0°;\ \gamma_2 = 180° - 57{,}0° = 123{,}0°$

Wegen der Supplementbeziehung $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ gibt es zu jedem Winkel zwischen 0° und 180° einen weiteren Winkel mit dem gleichen Sinuswert.

c) $\beta_1 = 180° - 39° - 57{,}0° = 84°$ $\qquad b_1 = |\overline{AC_1}| = \frac{6\,\text{cm}}{\sin 39°} \cdot \sin 84° \approx 9{,}5\,\text{cm}$

$\beta_2 = 180° - 39° - 123{,}0° = 18°$ $\qquad b_2 = |\overline{AC_2}| = \frac{6\,\text{cm}}{\sin 39°} \cdot \sin 18° \approx 2{,}9\,\text{cm}$

KX **11 a)** ε ist der Gegenwinkel der kleineren Seite, also ist der Kongruenzsatz SsW nicht anwendbar, d. h. das Lösungsdreieck muss nicht eindeutig sein, falls es existiert.

$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\varepsilon}{e} \Leftrightarrow \sin\gamma = \frac{c}{e} \cdot \sin\varepsilon \qquad \sin\gamma = \frac{8{,}3}{7{,}2} \cdot \sin 75° \approx 1{,}1$

Da Sinuswerte über 1 nicht möglich sind, gibt es kein solches Dreieck.

b) δ ist der Gegenwinkel der kleineren Seite, also ist der Kongruenzsatz SsW nicht anwendbar, d. h. das Lösungsdreieck muss nicht eindeutig sein, falls es existiert.

$\frac{\sin\varepsilon}{e} = \frac{\sin\delta}{d} \Leftrightarrow \sin\varepsilon = \frac{e}{d} \cdot \sin\delta \qquad \sin\varepsilon = \frac{9{,}3}{6{,}8} \cdot \sin 46° \approx 0{,}98$

$\varepsilon_1 \approx 79{,}7° \quad \varepsilon_2 \approx 180° - 79{,}7° = 100{,}3$

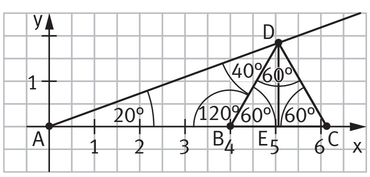
c) γ ist der Gegenwinkel der größeren Seite, also ist der Kongruenzsatz SsW anwendbar, d. h. das Lösungsdreieck ist eindeutig.

$\frac{\sin\delta}{d} = \frac{\sin\gamma}{c} \Leftrightarrow \sin\delta = \frac{d}{c} \cdot \sin\gamma \qquad \sin\delta = \frac{5}{8} \cdot \sin 52° \approx 0{,}49$

$\delta \approx 29{,}5°$

d) Da $c = e$ ist, ist das Dreieck gleichschenklig. Damit müsste auch $\varepsilon = \gamma$ gelten. Dies ist jedoch im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ nicht möglich; es gibt kein solches Dreieck.

K5 **12**



a) $\frac{\sin 40°}{\sin 120°} = \frac{4\,\text{cm}}{|\overline{AD}|} \quad \Rightarrow \quad |\overline{AD}| = 4\,\text{cm} \cdot \frac{\sin 120°}{\sin 40°} \approx 5{,}4\,\text{cm}$

b) $\frac{\sin 40°}{\sin 20°} = \frac{4\,\text{cm}}{|\overline{BD}|} \quad \Rightarrow \quad |\overline{BD}| = 4\,\text{cm} \cdot \frac{\sin 20°}{\sin 40°} \approx 2{,}1\,\text{cm}$

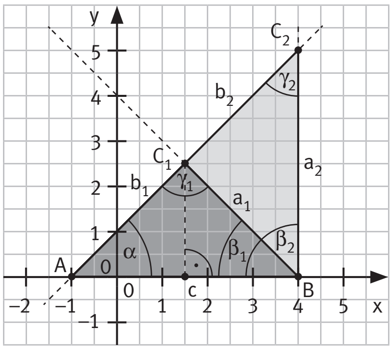
$\sin 60° = \frac{|\overline{DE}|}{|\overline{BD}|} \quad \Rightarrow \quad |\overline{DE}| = 2{,}1\,\text{cm} \cdot \sin 60° \approx 1{,}8\,\text{cm}$

Das Dreieck BCD ist gleichseitig (zwei Innenwinkel der Größe $3\alpha = 60°$) mit Seitenlänge 2,1 cm.

$x_D = 4\,\text{cm} + 1{,}05\,\text{cm} = 5{,}05\,\text{cm} \approx 5{,}1\,\text{cm} \qquad y_D = 1{,}8\,\text{cm} \qquad D\,(5{,}1\,|\,1{,}8)$

$x_C = 4\,\text{cm} + 2{,}1\,\text{cm} = 6{,}1\,\text{cm} \qquad y_C = 0 \qquad C\,(6{,}1\,|\,0)$

K5 **13 a)**



Für beide Dreiecke ist A (–1|0) und c = 5 cm.
Da g die Steigung m = 1 besitzt, ist $\alpha = 45°$.
Daraus folgt:

$\gamma_1 = 180° - 45° - 45° = 90°$ und $a_1 = b_1$

$\gamma_2 = 180° - 45° - 90° = 45°$ und $a_2 = c$

$\sin 45° = \frac{a_1}{5\,\text{cm}} \Leftrightarrow a_1 = 5\,\text{cm} \cdot \sin 45° \approx 3{,}5\,\text{cm} = b_1$

$a_2 = c = 5\,\text{cm}$ und $\sin 45° = \frac{5\,\text{cm}}{b_2} \Leftrightarrow b_2 = \frac{5\,\text{cm}}{\sin 45°} \approx 7{,}1\,\text{cm}$

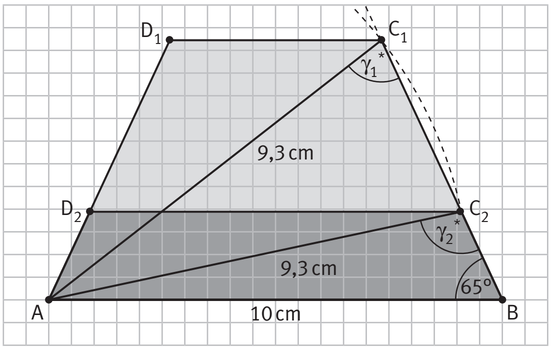
C_1 (1,5|2,5) und $a_1 = b_1 = 3{,}5$ cm

C_2 (4|5) und $a_2 = 5$ cm, $b_2 = 7{,}1$ cm

b) $A_1 = 0{,}5 \cdot c \cdot h_1 = 0{,}5 \cdot 5\,\text{cm} \cdot 2{,}5\,\text{cm} = 6{,}25\,\text{cm}^2$

$A_2 = 0{,}5 \cdot c \cdot a_2 = 0{,}5 \cdot 5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 12{,}5\,\text{cm}^2$

K5 **14**



$\frac{\sin \gamma^*}{10\,\text{cm}} = \frac{\sin 65°}{9{,}3\,\text{cm}} \Rightarrow \sin \gamma^* = 10\,\text{cm} \cdot \frac{\sin 65°}{9{,}3\,\text{cm}}$ $\quad \gamma_1^* \approx 77{,}0°$

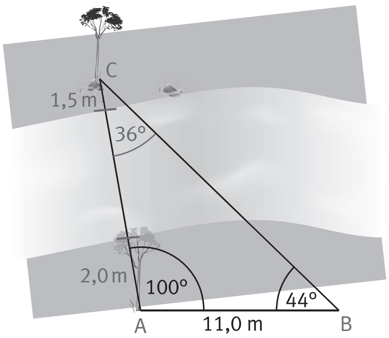
$\gamma_2^* = 180° - 77{,}0° = 103°$

Durch weitere Anwendung des Sinussatzes erhält man folgende Lösungen:

$b_1 = d_1 \approx 6{,}3$ cm $\quad c_1 \approx 4{,}7$ cm

$b_2 = d_2 \approx 2{,}1$ cm $\quad c_2 \approx 8{,}2$ cm

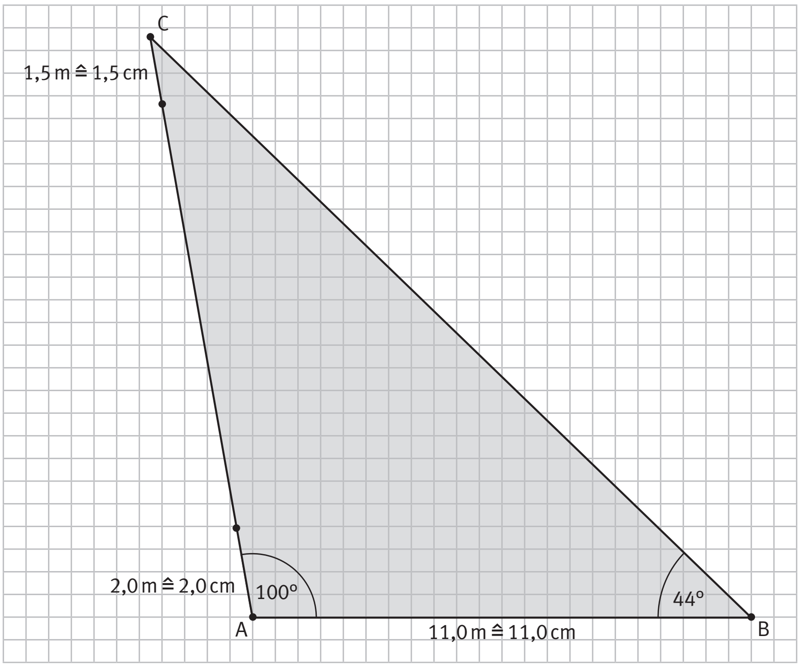
K2 **15 a)**



$\frac{\sin 36°}{\sin 44°} = \frac{11{,}0\,\text{m}}{|\overline{AC}|} \Rightarrow |\overline{AC}| = 11{,}0\,\text{m} \cdot \frac{\sin 44°}{\sin 36°} \approx 13{,}0\,\text{m}$

Die Flussbreite beträgt (13,0 – 2,0 – 1,5) m = 9,5 m.

b) Maßstab 1 : 100



Wissen

K 1

- Die Maßgleichheit kann mit einem dynamischen Geometrieprogramm schnell festgestellt werden.
- ① $\frac{c}{2}$ ist eine Kathete, r_u die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ADM.
  Für das eingezeichnete γ ergibt sich somit: $\sin\gamma = \frac{\frac{c}{2}}{r_u}$, also $\sin\gamma = \frac{c}{2 \cdot r_u}$.

  ② Aus $\sin\gamma = \frac{c}{2 \cdot r_u}$ folgt nach Äquivalenzumformung $2r_u = \frac{c}{\sin\gamma}$.
  Daraus ergeben sich nach dem Sinussatz auch die anderen Zusammenhänge.
- **a)** $a \approx 8{,}7\,\text{m}$; $\alpha \approx 75{,}0°$; $\beta \approx 39{,}3°$; $\gamma \approx 65{,}7°$
  b) $b \approx 5{,}8\,\text{m}$; $\alpha \approx 46{,}4°$; $\beta \approx 92{,}7°$; $\gamma \approx 40{,}9°$
  c) $a \approx 10{,}2\,\text{m}$; $b \approx 7{,}7\,\text{m}$; $c \approx 8{,}4\,\text{m}$; $\beta = 48°$
  d) $a = b = c = 17{,}3\,\text{m}$; $\alpha = 60°$

Entdecken

KX
- Mögliche Antwort:
  Die Anwendung des Sinussatzes setzt voraus, dass zusätzlich zu den angegebenen Längen mindestens ein Winkelmaß gegeben ist (bzw. sich berechnen lässt) und es zu den Seiten mit angegebener Länge auch das Maß eines Gegenwinkels gegeben ist.

KX
- Individuelle Antwort

KX
- Individuelle Antwort, analog zur Herleitung für $a^2 = b^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\alpha$

Nachgefragt

K1
- Nach dem Kongruenzsatz SSS kann ein Dreieck bei gegebenen Seitenlängen eindeutig konstruiert werden. Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck gilt: $\alpha, \beta, \gamma \in \,]0°; 180°[$.
  Damit liefert der Kosinussatz eindeutige Werte für α, β und γ:
  $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\quad\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $\quad\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

K1
- Die Aussage ist richtig: Für $\gamma = 90°$ entspricht der Kosinussatz dem Satz des Pythagoras:
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 90° \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$

Aufgaben

K1

1 Man kann das Quadrat der gesuchten Seite a, b oder c direkt berechnen, indem man die gegebenen Größen in die entsprechende Formel einsetzt:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$ $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$
Anschließend wird zur Ermittlung der gesuchten Seitenlänge die Wurzel gezogen.

a) $a^2 = (4{,}3\,\text{cm})^2 + (6{,}3\,\text{cm})^2 - 2 \cdot 4{,}3\,\text{cm} \cdot 6{,}3\,\text{cm} \cdot \cos 36{,}4° \Rightarrow a \approx 3{,}8\,\text{cm}$
b) $b^2 = (71\,\text{mm})^2 + (48\,\text{mm})^2 - 2 \cdot 71\,\text{mm} \cdot 48\,\text{mm} \cdot \cos 121{,}4° \Rightarrow b \approx 104{,}4\,\text{mm}$
c) $c^2 = (5{,}8\,\text{cm})^2 + (8{,}1\,\text{cm})^2 - 2 \cdot 5{,}8\,\text{cm} \cdot 8{,}1\,\text{cm} \cdot \cos 63° \Rightarrow c \approx 7{,}5\,\text{cm}$
d) $c^2 = (4{,}2\,\text{cm})^2 + (3{,}8\,\text{cm})^2 - 2 \cdot 4{,}2\,\text{cm} \cdot 3{,}8\,\text{cm} \cdot \cos 104° \Rightarrow c \approx 6{,}3\,\text{cm}$
e) $b^2 = (3{,}8\,\text{cm})^2 + (4{,}5\,\text{cm})^2 - 2 \cdot 3{,}8\,\text{cm} \cdot 4{,}5\,\text{cm} \cdot \cos 35° \Rightarrow b \approx 2{,}6\,\text{cm}$
f) $a^2 = (7\,\text{cm})^2 + (14\,\text{cm})^2 - 2 \cdot 7\,\text{cm} \cdot 14\,\text{cm} \cdot \cos 58° \Rightarrow a \approx 11{,}9\,\text{cm}$

K5

2 a) Da alle drei Seitenlängen bekannt sind, berechnet Saskia im ersten Schritt mit dem Kosinussatz das Maß des Winkels γ. Im zweiten Schritt berechnet sie mithilfe des Sinussatzes das Maß des Winkels α. Das Maß des Winkels β ermittelt sie im dritten Schritt durch die Winkelsumme im Dreieck.

b) 1 $\alpha \approx 54{,}7°$; $\beta \approx 85{,}9°$; $\gamma \approx 39{,}4°$
2 $\alpha \approx 38{,}6°$; $\beta \approx 17{,}3°$; $\gamma \approx 124{,}1°$
3 $\alpha \approx 101{,}2°$; $\beta \approx 53{,}5°$; $\gamma \approx 25{,}3°$

K6 **3** Es sind Abweichungen aufgrund von Rundungsungenauigkeiten möglich.

a) Kosinussatz: $\cos\alpha = \frac{(10{,}5\,\text{cm})^2 + (15{,}1\,\text{cm})^2 - (7{,}4\,\text{cm})^2}{2 \cdot 10{,}5\,\text{cm} \cdot 15{,}1\,\text{cm}}$ $\Rightarrow \alpha \approx 26{,}6°$

Sinussatz: $\sin\beta = b \cdot \frac{\sin\alpha}{a} = 10{,}5\,\text{cm} \cdot \frac{\sin 26{,}6°}{7{,}4\,\text{cm}}$ $\Rightarrow \beta \approx 39{,}5°$

Winkelsumme: $\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 26{,}6° - 39{,}5° = 113{,}9°$ $\Rightarrow \gamma \approx 113{,}9°$

b) Kosinussatz: $\cos\alpha = \frac{(8{,}3\,\text{cm})^2 + (6{,}5\,\text{cm})^2 - (12{,}7\,\text{cm})^2}{2 \cdot 8{,}3\,\text{cm} \cdot 6{,}5\,\text{cm}}$ $\Rightarrow \alpha \approx 117{,}7°$

Sinussatz: $\sin\beta = b \cdot \frac{\sin\alpha}{a} = 8{,}3\,\text{cm} \cdot \frac{\sin 117{,}7°}{12{,}7\,\text{cm}}$ $\Rightarrow \beta \approx 35{,}4°$

Winkelsumme: $\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 117{,}7° - 35{,}4° = 26{,}9°$ $\Rightarrow \gamma \approx 26{,}9°$

c) Kosinussatz: $\cos\beta = \frac{(3{,}8\,\text{cm})^2 + (5{,}5\,\text{cm})^2 - (7{,}2\,\text{cm})^2}{2 \cdot 3{,}8\,\text{cm} \cdot 5{,}5\,\text{cm}}$ $\Rightarrow \beta \approx 99{,}8°$

Sinussatz: $\sin\alpha = a \cdot \frac{\sin\beta}{b} = 3{,}8\,\text{cm} \cdot \frac{\sin 99{,}8°}{7{,}2\,\text{cm}}$ $\Rightarrow \alpha \approx 31{,}3°$

Winkelsumme: $\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 31{,}3° - 99{,}8° = 48{,}9°$ $\Rightarrow \gamma \approx 48{,}9°$

d) Wegen $b^2 + c^2 = a^2$ ist das Dreieck rechtwinklig bei A. $\Rightarrow \alpha = 90°$

Sinussatz: $\sin\beta = b \cdot \frac{\sin\alpha}{a} = 4\,\text{cm} \cdot \frac{\sin 90°}{5\,\text{cm}}$ $\Rightarrow \beta \approx 53{,}1°$

Winkelsumme: $\gamma = 180° - 90° - 53{,}1° \approx 36{,}9°$ $\Rightarrow \gamma \approx 36{,}9°$

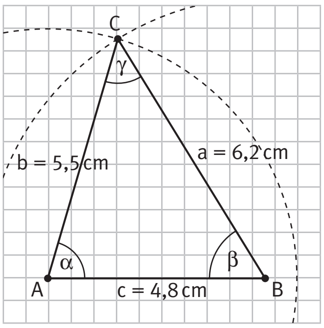
K5 **4** $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Der Aufbau ist immer gleich: Das Quadrat der Länge der dem gesuchten Winkel gegenüberliegenden Seite wird von der Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen abgezogen. Dieser Wert wird durch das doppelte Produkt der beiden anderen Seitenlängen dividiert.

K5 **5**

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a	3,8 cm	18,1 cm	87,3 km	812 m	1,2 dm	3,3 cm
b	7,4 cm	21,2 cm	123,5 km	706 m	2,3 dm	4,4 cm
c	5,6 cm	34,5 cm	47,6 km	582 m	3,4 dm	5,5 cm
α	30,1°	26,2°	32,7°	77,5°	9,9°	36,9°
β	102,2°	31,2°	130,2°	58,1°	19,1°	53,1°
γ	47,7°	122,6°	17,1°	44,4°	151,0°	90,0°

K5 **6** **a)**



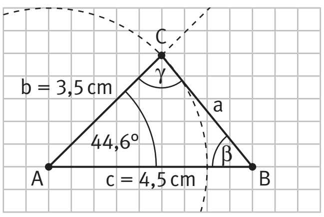
$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$= \frac{(5{,}5\,\text{cm})^2 + (4{,}8\,\text{cm})^2 - (6{,}2\,\text{cm})^2}{2 \cdot 5{,}5\,\text{cm} \cdot 4{,}8\,\text{cm}}$ $\Rightarrow \alpha \approx 73{,}7°$

$\sin\beta = b \cdot \frac{\sin\alpha}{a} = 5{,}5\,\text{cm} \cdot \frac{\sin 73{,}7°}{6{,}2\,\text{cm}}$ $\Rightarrow \beta \approx 58{,}4°$

$\gamma \approx 180° - 73{,}7° - 58{,}4° = 47{,}9°$ $\Rightarrow \gamma \approx 47{,}9°$

b)



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

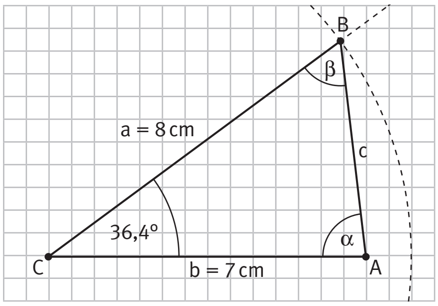
$= (3{,}5\,\text{cm})^2 + (4{,}5\,\text{cm})^2 - 2 \cdot 3{,}5\,\text{cm} \cdot 4{,}5\,\text{cm} \cdot \cos 44{,}6°$

$\Rightarrow a \approx 3{,}2\,\text{cm}$

$\sin\beta = b \cdot \frac{\sin\alpha}{a} = 3{,}5\,\text{cm} \cdot \frac{\sin 44{,}6°}{3{,}2\,\text{cm}}$ $\Rightarrow \beta \approx 50{,}2°$

$\gamma \approx 180° - 44{,}6° - 50{,}2° = 85{,}2°$ $\Rightarrow \gamma \approx 85{,}2°$

c)



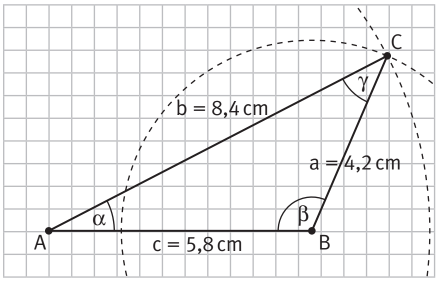
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

$\quad = (8\,\text{cm})^2 + (7\,\text{cm})^2 - 2 \cdot 8\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} \cdot \cos 36{,}4°$ $\quad \Rightarrow c \approx 4{,}8\,\text{cm}$

$\sin\alpha = a \cdot \frac{\sin\gamma}{c} = 8\,\text{cm} \cdot \frac{\sin 36{,}4°}{4{,}8\,\text{cm}}$ $\quad \Rightarrow \alpha \approx 81{,}5°$

$\beta \approx 180° - 36{,}4° - 81{,}5° = 62{,}1°$ $\quad \Rightarrow \beta \approx 62{,}1°$

d)



$b = 2a = 2 \cdot 4{,}2\,\text{cm} = 8{,}4\,\text{cm}$ $\quad \Rightarrow b = 8{,}4\,\text{cm}$

$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

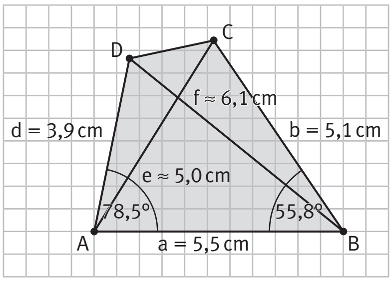
$\quad = \frac{(4{,}2\,\text{cm})^2 + (5{,}8\,\text{cm})^2 - (8{,}4\,\text{cm})^2}{2 \cdot 4{,}2\,\text{cm} \cdot 5{,}8\,\text{cm}}$ $\quad \Rightarrow \beta \approx 113{,}3°$

$\sin\alpha = a \cdot \frac{\sin\beta}{b} = 4{,}2\,\text{cm} \cdot \frac{\sin 113{,}3°}{8{,}4\,\text{cm}}$ $\quad \Rightarrow \alpha \approx 27{,}3°$

$\gamma \approx 180° - 27{,}3° - 113{,}3° = 39{,}4°$ $\quad \Rightarrow \gamma \approx 39{,}4°$

K5 **7 a)** $\beta = \delta = \frac{360° - 50°}{2} = 155°$; $|\overline{AC}| \approx 11{,}1\,\text{cm}$; $|\overline{BD}| \approx 3{,}5\,\text{cm}$

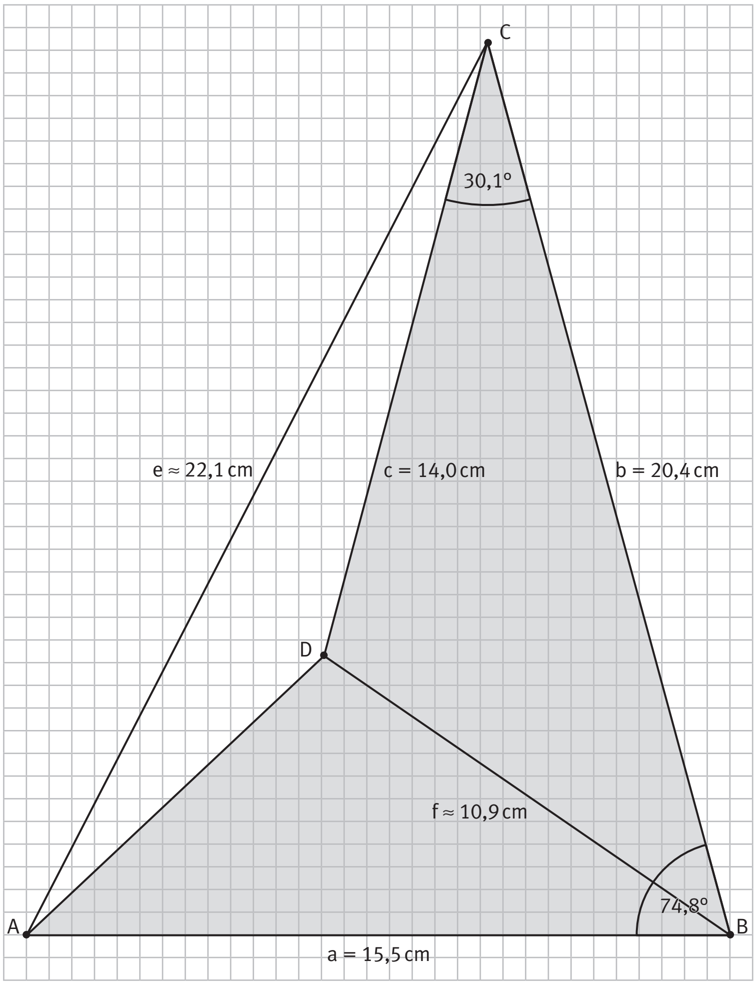
b) 1



$e \approx 5{,}0\,\text{cm}$

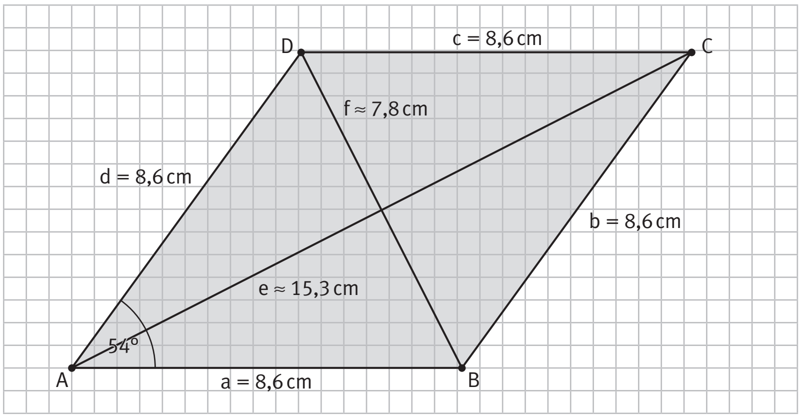
$f \approx 6{,}1\,\text{cm}$

2



$e \approx 22{,}1\,\text{cm}$

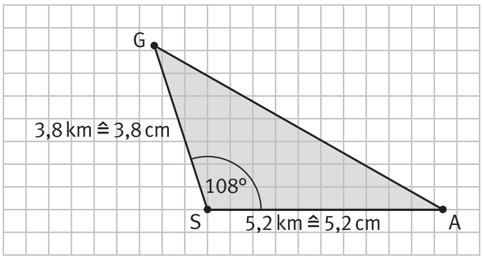
$f \approx 10{,}9\,\text{cm}$

3 

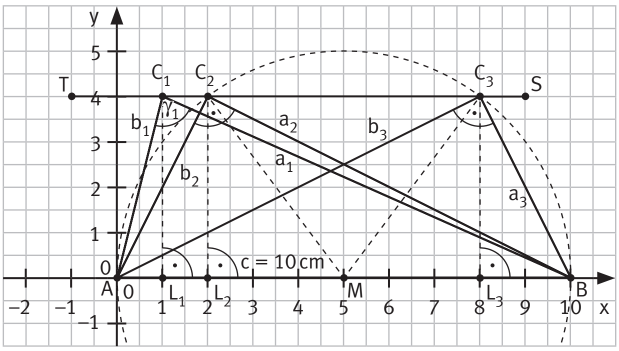
e ≈ 15,3 cm f ≈ 7,8 cm

K1 **8** Den Kosinussatz aufzustellen ist für gleichseitige Dreiecke unnötig, da alle Winkelgrößen immer 60° betragen. Wird noch eine der drei gleich langen Seiten angegeben, sind alle Größen ohnehin bekannt, die der Kosinussatz liefern könnte.
$a^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos 60° = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot 0{,}5 = a^2 + a^2 - a^2 = a^2$
Hier liegt also eine Identität vor, die außer dem Schluss, dass der Kosinussatz auch für gleichseitige Dreiecke gilt, keine weiteren Schlüsse zulässt.

K5 **9** **a)** $|\overline{AG}| \approx 7{,}3$ km **b)** Maßstab 1 : 100 000



K5 **10** **a)** und **b)**



a) Mit dem Lotfußpunkt $L_1\,(1|0)$ von C_1 auf $\overline{AB}$ erhält man die rechtwinkligen Dreiecke BC_1L_1 bzw. C_1AL_1. Mit dem Satz des Pythagoras und dem Kosinussatz ergibt sich:
$a_1 = |\overline{BC_1}| = \sqrt{(4\,\text{cm})^2 + (9\,\text{cm})^2} \approx 9{,}85$ cm $b_1 = |\overline{AC_1}| = \sqrt{(4\,\text{cm})^2 + (1\,\text{cm})^2} \approx 4{,}12$ cm
$\cos \gamma_1 = \frac{a_1^2 + b_1^2 - c^2}{2a_1b_1} = \frac{9{,}85^2 + 4{,}12^2 - 10^2}{2 \cdot 9{,}85 \cdot 4{,}12} \approx 0{,}17 \quad \Rightarrow \gamma_1 = 80{,}07°$

b) C_2 und C_3 liegen auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$ mit M als Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Mit den Lotfußpunkten L_2 und L_3 von C_2 und C_3 auf $\overline{AB}$ erhält man die rechtwinkligen Dreiecke C_2L_2M und ML_3C_3 mit $|\overline{C_2L_2}| = |\overline{C_3L_3}| = 4$ cm und $|\overline{MC_2}| = |\overline{MC_3}| = |\overline{MA}| = 5$ cm. Mit dem Satz des Pythagoras erhält man: $|\overline{ML_2}| = |\overline{ML_3}| = 3$ cm. Hieraus ergeben sich die Koordinaten für $C_2\,(2|4)$ und $C_3\,(8|4)$.

c) Für Dreiecke, die bei $C_n\,(x_n|4)$ stumpfwinklig sind, muss C_n zwischen C_2 und C_3 liegen, d. h. es muss gelten: $x_n \in\ ]2; 8[$.

K6 **11** $5{,}5^2 = 8^2 + 6{,}2^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6{,}2 \cdot \cos\beta$

$30{,}25 = 64 + 38{,}44 - 99{,}2 \cdot \cos\beta$ (Paul hat hier die Werte im Subtrahenden ebenfalls quadriert!)

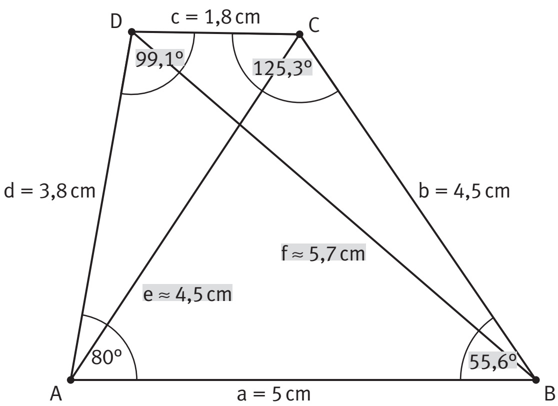
$\cos\beta \approx 0{,}728$

$\beta \approx 43{,}3°$

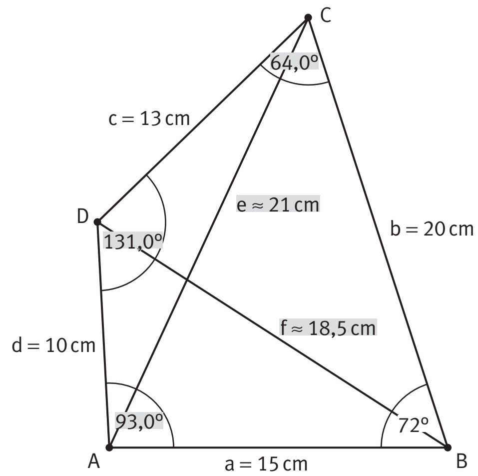
K5 **12** Die Winkel sind ca. 92,0°, 52,3° und 35,7° groß.

K5 **13** Der übersichtlichen Darstellung wegen sind hier die Vierecke abgebildet. Es gibt meist unterschiedliche rechnerische Möglichkeiten, die Streckenlängen und Winkelmaße zu berechnen, weswegen hier nur die Ergebnisse (grau unterlegt) angegeben werden. Die Zeichnungen sind jeweils proportional dargestellt, aber nicht mit demselben Maßstab.

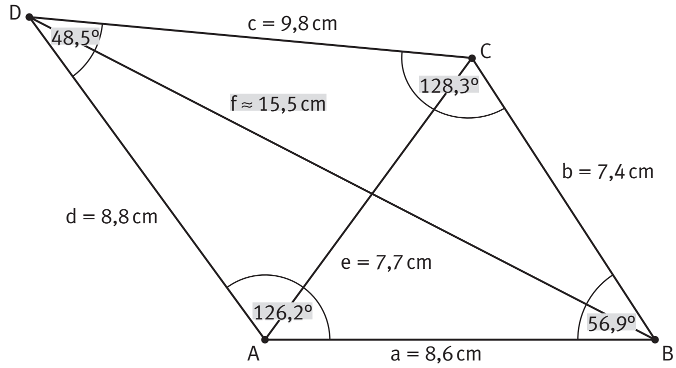
a)



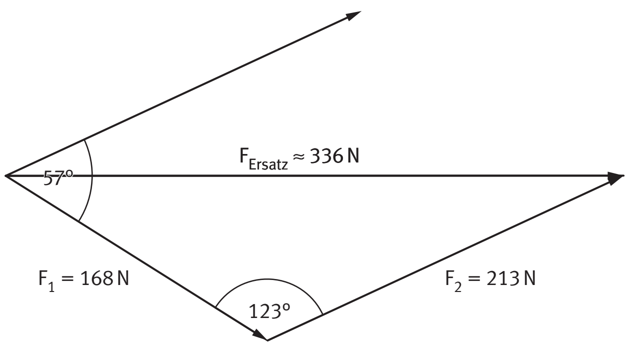
b)



c)



K3 **14**



Die Kräfte F_1 und F_2 bilden ein Kräfteparallelogramm mit Innenwinkeln von 57° bzw. 180° – 57° = 123°. Der Betrag der resultierenden Kraft lässt sich mithilfe des Kosinussatzes ausrechnen und beträgt ca. 336 N.

3.7 Flächeninhalt von beliebigen Dreiecken

Entdecken

KX
- Mit $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow b \cdot \sin\alpha = h_c$ folgt: $A = \frac{1}{2}c \cdot h_c = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin\alpha$

KX
- 1 Mit $\sin\beta = \frac{h_c}{a} \Leftrightarrow a \cdot \sin\beta = h_c$ folgt: $A = \frac{1}{2}c \cdot h_c = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \sin\beta$

  2 Mit $\sin\gamma = \frac{h_b}{a} \Leftrightarrow a \cdot \sin\gamma = h_b$ folgt: $A = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\gamma$

Nachgefragt

K6
- Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:
  Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt zweier Dreiecksseiten multipliziert mit dem Sinus des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels.

K1
- Das rechtwinklige Dreieck habe den rechten Winkel bei C, die Seite $\overline{AC}$ mit der Länge b und die Seite $\overline{BC}$ mit der Länge a stehen senkrecht zueinander, entsprechen also der Grundseite g und der Höhe h.
  Es gilt: $A = 0{,}5 \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma = 0{,}5 \cdot a \cdot b \cdot \sin 90° = 0{,}5 \cdot a \cdot b = 0{,}5 \cdot g \cdot h$

Aufgaben

K5 **1** Es sind Abweichungen aufgrund von Rundungsungenauigkeiten möglich.

	a)	b)	c)	d)	e)
a	6,3 cm	3,5 cm	5,3 cm	4,2 cm	3b = 25,5 cm
b	5,1 cm	3,2 cm	4,7 cm	7,82 cm	8,5 cm
c	3,26 cm	4,5 cm	6,0 cm	2a = 8,4 cm	18,63 cm
α	95,3°	50,2°	57,8°	29,75°	136,8°
β	53,7°	44,6°	48,6°	67,5°	13,2°
γ	31,0°	85,2°	73,6°	82,75°	30°
A	8,27 cm²	5,53 cm²	12,00 cm²	16,30 cm²	54,19 cm²

K1 **2** Es sei $|\overline{DA}| = x$.

Im Dreieck DAC gilt: $\sin(180° - \alpha) = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad h = b \cdot \sin(180° - \alpha) = b \cdot \sin\alpha$

$A_{\text{Dreieck ABC}} = A_{\text{Dreieck DBC}} - A_{\text{Dreieck DAC}}$

$= \frac{1}{2}h \cdot (x + c) - \frac{1}{2}h \cdot x = \frac{1}{2}h \cdot c$

Mit $h = b \cdot \sin\alpha$ folgt:

$A_{\text{Dreieck ABC}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$

KX **3** $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \sin\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 3{,}7\,\text{dm} \cdot 2{,}4\,\text{dm} \cdot \sin 123° \approx 3{,}72\,\text{dm}^2$

Kosinussatz:

$e^2 = (3{,}7\,\text{dm})^2 + (2{,}4\,\text{dm})^2 - 2 \cdot (3{,}7\,\text{dm}) \cdot (2{,}4\,\text{dm}) \cdot \cos 123° \approx 29{,}1\,\text{dm}^2$

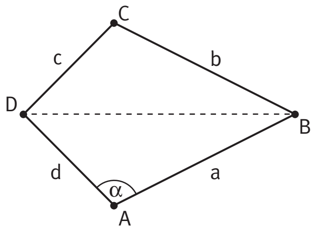
$e \approx 5{,}39\,\text{dm}$

Sinussatz:

$\delta \approx 21{,}9°;\ \gamma \approx 35{,}1°$

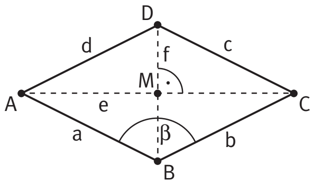
K5 **4** $A = 0{,}5 \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta$ liefert mit $\sin\beta = \frac{2 \cdot (15{,}00\,\text{cm}^2)}{(7{,}5\,\text{cm}) \cdot (8{,}0\,\text{cm})} = 0{,}5$ die Winkelmaße $\beta_1 = 30°$ und $\beta_2 = 150°$.
Mit $\beta_1 = 30°$ erhält man mit dem Kosinussatz $b \approx 4{,}04\,\text{cm}$ und mit dem Sinussatz $\alpha \approx 68{,}2°$ und $\gamma \approx 81{,}8°$.
Mit $\beta_2 = 150°$ erhält man mit dem Kosinussatz $b = 15{,}0\,\text{cm}$ und mit dem Sinussatz $\alpha = 14{,}5°$ und $\gamma = 15{,}5°$.

K5 **5** Skizze:



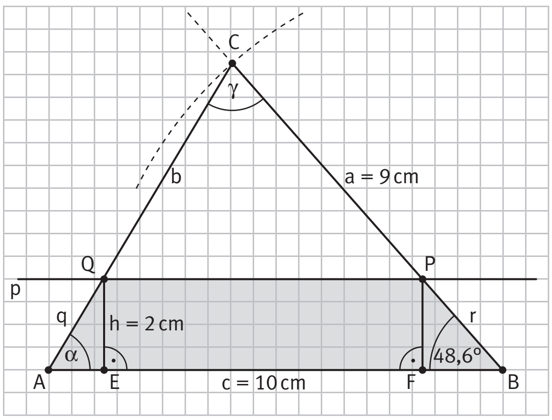
$A_{ABCD} = 2 \cdot A_{ABD}$
$= 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot d \cdot \sin\alpha$
$= 5\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} \cdot \sin 112° \approx 18{,}54\,\text{cm}^2$

K5 **6** Skizze:



Im Dreieck ABC gilt:
$\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab} \Rightarrow \beta \approx 91{,}2° = \delta$
$A_{Raute} = 2 \cdot A_{ABC} = 2 \cdot 0{,}5 \cdot a \cdot b \cdot \sin 91{,}2° = 49{,}0\,\text{cm}^2$
Im rechtwinkligen Dreieck MCD gilt:
$\left(\frac{f}{2}\right)^2 = c^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2 = (49 - 25)\,\text{cm}^2 = 24\,\text{cm}^2$
$f = 2 \cdot \sqrt{24}\,\text{cm} \approx 9{,}8\,\text{cm}$ $\quad A_{Raute} = 0{,}5 \cdot e \cdot f = 49{,}0\,\text{cm}^2$

K5 **7** Es sind Abweichungen aufgrund von Rundungsungenauigkeiten möglich.
a) und **b)**



a) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$
$= (81 + 100 - 180 \cdot \cos 48{,}6°)\,\text{cm}^2 \approx 61{,}96\,\text{cm}^2 \qquad \Rightarrow b \approx 7{,}9\,\text{cm}$
$\sin\alpha = \frac{a}{b} \cdot \sin\beta \approx \frac{9\,\text{cm}}{7{,}9\,\text{cm}} \cdot \sin 48{,}6° \qquad \Rightarrow \alpha \approx 58{,}7°$
$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 48{,}6° - 58{,}7° \qquad \Rightarrow \gamma \approx 72{,}7°$
$A_{Dreieck} = 0{,}5 \cdot 9\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} \cdot \sin 48{,}6° \qquad \Rightarrow A_{Dreieck} \approx 33{,}8\,\text{cm}^2$

b) In den rechtwinkligen Dreiecken AEQ und BPF mit $r = |\overline{AQ}|$ und $r = |\overline{BP}|$ und $h = 2\,\text{cm}$ gilt:
$\sin\alpha = \frac{h}{q} \Leftrightarrow q = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{2\,\text{cm}}{\sin 59°} \approx 2{,}3\,\text{cm} \qquad \Rightarrow |\overline{QC}| = b - q \approx 7{,}9\,\text{cm} - 2{,}3\,\text{cm} = 5{,}6\,\text{cm}$
$\sin\beta = \frac{h}{r} \Leftrightarrow r = \frac{h}{\sin\beta} = \frac{2\,\text{cm}}{\sin 48{,}6°} \approx 2{,}7\,\text{cm} \qquad \Rightarrow |\overline{PC}| = a - r \approx 9\,\text{cm} - 2{,}7\,\text{cm} = 6{,}3\,\text{cm}$
Im Dreieck QPC ergibt sich mit dem Kosinussatz:
$|\overline{PQ}|^2 = (5{,}6\,\text{cm})^2 + (6{,}3\,\text{cm})^2 - 2 \cdot 5{,}6\,\text{cm} \cdot 6{,}3\,\text{cm} \cdot \cos 72{,}4° \approx 49{,}7\,\text{cm}^2 \Rightarrow |\overline{PQ}| \approx 7{,}1\,\text{cm}$

c) $A_{Trapez} = \frac{10\,cm + 7,1\,cm}{2} \cdot 2\,cm = 17,1\,cm^2$ $\quad \frac{A_{Trapez}}{A_{Dreieck}} = \frac{17,1\,cm^2}{33,8\,cm^2} \approx 0,51$

Der Anteil der Trapezfläche an der Dreiecksfläche beträgt 51 %.

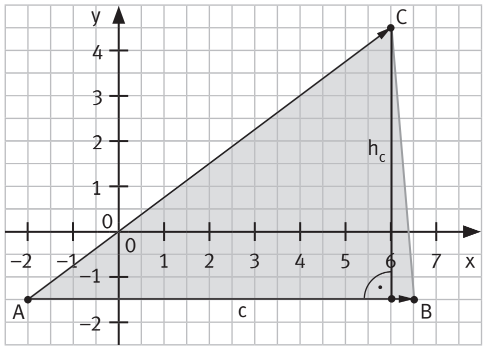
d) $u_{Trapez} = c + |\overline{BP}| + |\overline{PQ}| + |\overline{AQ}| \approx 10\,cm + 2,7\,cm + 7,1\,cm + 2,3\,cm = 22,1\,cm$

KX **8** **a)** Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$:

$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 8,5 & 8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} FE = \frac{1}{2} \cdot (8,5 \cdot 6 - 0 \cdot 8)\,FE = 25,5\,FE$

b) Grundseite $c = |\overline{AB}| = 8,5\,LE$ und Höhe $h_c = 6\,LE$:

$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 8,5\,LE \cdot 6\,LE = 25,5\,FE$



c) $c = |\overline{AB}| = 8,5\,LE$

$b = \sqrt{8^2 + 6^2}\,LE = 10\,LE$

$a = \sqrt{0,5^2 + 6^2}\,LE \approx 6,02\,LE$

$\sin\alpha = \frac{6}{10} = 0,6$ $\quad \alpha \approx 36,9°$

$\sin\beta = \frac{6}{6,02} = 0,997$ $\quad \beta \approx 85,3°$

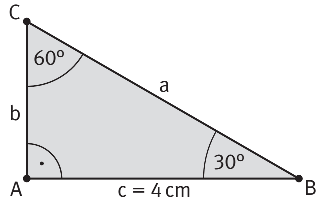
$\gamma = 180° - 36,9° - 85,3°$ $\quad \gamma = 57,8°$

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 10\,LE \cdot 8,5\,LE \cdot \sin 36,9° \approx 25,5°$

Entdecken

KX

- Georg hat nicht Recht, wenn er die Höhe des Quaders mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnen will. Es ist aber möglich, mit der angegebenen Seitenlänge $c = 4\,\text{cm}$ und den Winkelmaßen $\alpha = 90°$, $\beta = 30°$ und $\gamma = 60°$ und mithilfe des Sinussatzes die Höhe des Quaders zu berechnen:
$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow b = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \cdot c = \frac{\sin 30°}{\sin 60°} \cdot 4\,\text{cm} \approx 2{,}31\,\text{cm}$



Nachgefragt

KX

- Mögliche Antwort:
Wie Beispiel I zeigt, findet man in Körpern Figuren, die rechtwinklig sind, z. B. das Stützdreieck AMD im Prisma ABCDEF.

KX

- Mögliche Antwort:
Rechtwinklige Dreiecke sind Sonderfälle von beliebigen Dreiecken, daher gelten alle Sätze für beliebige Dreiecke auch für rechtwinklige Dreiecke.

Aufgaben

K5 **1** **a)** $h = |\overline{BF}| = 4{,}5\,\text{cm} \cdot \tan 18{,}4° \approx 1{,}5\,\text{cm}$

$V = a \cdot b \cdot h \approx 4{,}5 \cdot 3{,}5 \cdot 1{,}5\,\text{cm}^3 = 23{,}625\,\text{cm}^3$

$d = \text{Raumdiagonale } |\overline{BH}| = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$

$\approx \sqrt{4{,}5^2 + 3{,}5^2 + 1{,}5^2}\,\text{cm} = \sqrt{34{,}75}\,\text{cm} \approx 5{,}9\,\text{cm}$

Winkel δ der Raumdiagonalen mit der Grundfläche: $\sin\delta = \frac{h}{d} = \frac{1{,}5}{5{,}9} \approx 0{,}25 \quad \Rightarrow \delta \approx 14{,}7°$

b) $b = |\overline{AD}| = 5{,}5\,\text{cm} \cdot \tan 28{,}6° \approx 3{,}0\,\text{cm}$

$V = a \cdot b \cdot h \approx 5{,}5 \cdot 3{,}0 \cdot 2{,}5\,\text{cm}^3 = 41{,}25\,\text{cm}^3$

$d = \text{Raumdiagonale } |\overline{AG}| = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$

$= \sqrt{5{,}5^2 + 3{,}0^2 + 2{,}5^2}\,\text{cm} = \sqrt{45{,}5}\,\text{cm} \approx 6{,}7\,\text{cm}$

Winkel δ der Raumdiagonalen mit der Grundfläche: $\sin\delta = \frac{h}{d} = \frac{2{,}5}{6{,}7} \approx 0{,}37 \quad \Rightarrow \delta \approx 21{,}9°$

K2 **2** **a)** Es gilt: $|\overline{DB}| = \sqrt{(6\,\text{cm})^2 + (5\,\text{cm})^2} = \sqrt{61}\,\text{cm}$ und $\tan\beta = \frac{3\,\text{cm}}{\sqrt{61}\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \beta = 21{,}0°$

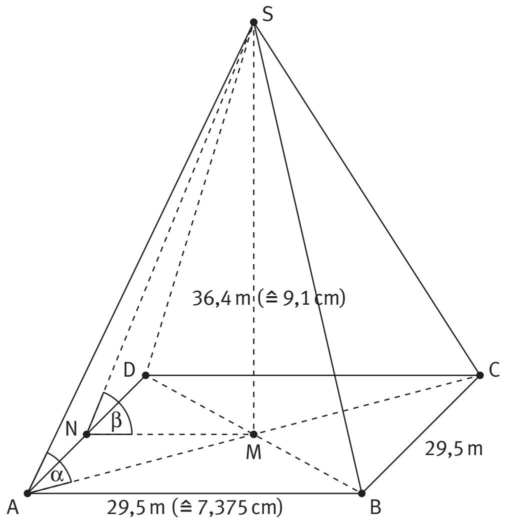
b) Der Winkel β tritt ebenfalls zwischen den Raumdiagonalen $\overline{AG}$, $\overline{DF}$, $\overline{CE}$ und der Grundfläche ABCD auf sowie zwischen diesen Raumdiagonalen und der Fläche EFGH.

K2 **3** **a)** $|\overline{AM}| = \frac{1}{2}\sqrt{(6\,\text{cm})^2 + (4\,\text{cm})^2} = \sqrt{13}\,\text{cm}$

$\tan\alpha = \frac{|\overline{MS}|}{|\overline{AM}|} = \frac{8}{\sqrt{13}} = \frac{8\sqrt{13}}{13} \approx 2{,}219 \quad \Rightarrow \alpha \approx 65{,}7°$

b) Es ist $|\overline{MF}| = 3\,\text{cm}$ und damit $\tan\beta = \frac{|\overline{MS}|}{|\overline{MF}|} = \frac{8}{3} \approx 2{,}667 \quad \Rightarrow \beta \approx 69{,}4°$

K3 **4** **a)**



b) Maß des Neigungswinkels α der Seitenkanten zur Grundfläche:

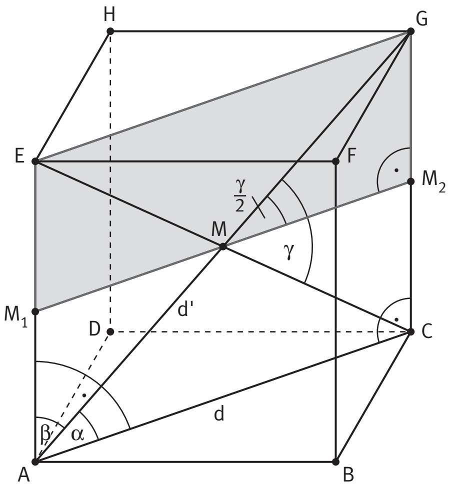
Es gilt: $|\overline{AM}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 29{,}5\,\text{m} \approx 20{,}9\,\text{m}$ und $\tan\alpha = \frac{|\overline{MS}|}{|\overline{AM}|} = \frac{36{,}4\,\text{m}}{20{,}9\,\text{m}}$ $\Rightarrow \alpha \approx 60{,}1°$

Maß des Neigungswinkels β der Seitenflächen zur Grundfläche:

$\tan\beta = \frac{|\overline{MS}|}{|\overline{NM}|} = \frac{36{,}4\,\text{m}}{\frac{29{,}5\,\text{m}}{2}}$ $\Rightarrow \beta \approx 67{,}9°$

K2 **5** Flächendiagonale: $d = a\sqrt{2} = 8\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} \approx 11{,}31\,\text{cm}$

Raumdiagonale: $d' = a\sqrt{3} = 8\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} \approx 13{,}86\,\text{cm}$



a) Winkel α zwischen Raum- und Flächendiagonale:

$\tan\alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\Rightarrow \alpha \approx 35{,}26°$

b) Winkel β zwischen Raumdiagonale und Würfelkante:

$\tan\beta = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$ $\Rightarrow \beta = 54{,}74°$

(Alternative: $\beta = 90° - \alpha = 90° - 35{,}26° = 54{,}74°$)

c) Schnittwinkel γ zwischen den Diagonalen:

$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{d'}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = 35{,}26° \Rightarrow \gamma = 70{,}54°$

(Alternative: γ ist das doppelte Winkelmaß von α, d. h.: $\gamma = 2 \cdot \alpha = 2 \cdot 35{,}26° = 70{,}52°$)

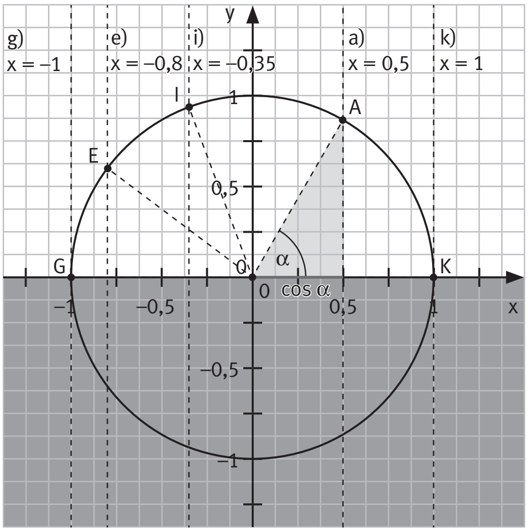
d) $\tan\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\tan\beta = \sqrt{2}$ $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\beta$, $\tan\alpha$ und $\sin\frac{\gamma}{2}$ sind unabhängig von a.
Also haben alle Würfel die gleichen Winkelmaße.

K4

1 Zu **a)**, **e)**, **g)**, **i)** und **k)**

Werte für cos α mit α ∈ [0°; 180°]



a) cos α eine Lösung: α = 60°

e) cos α eine Lösung: α ≈ 143,1°

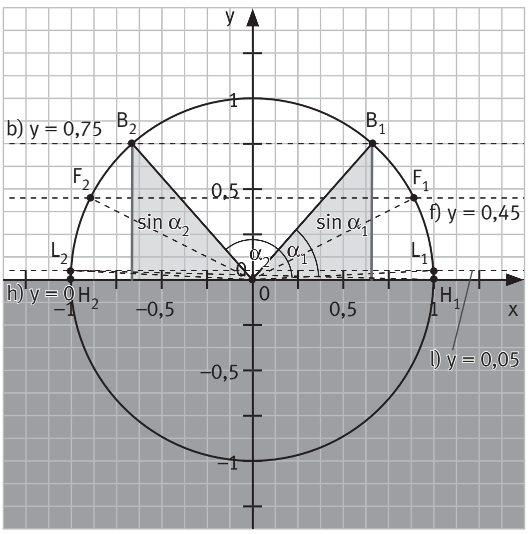
g) cos α eine Lösung: α = 180°

i) cos α eine Lösung: α ≈ 110,5°

k) cos α eine Lösung: α = 0°

Zu **b)**, **f)**, **h)** und **l)**:

Werte für sin α mit α ∈ [0°; 180°]



b) sin α zwei Lösungen: $\alpha_1 \approx 48{,}6°$ $\alpha_2 \approx 131{,}4°$

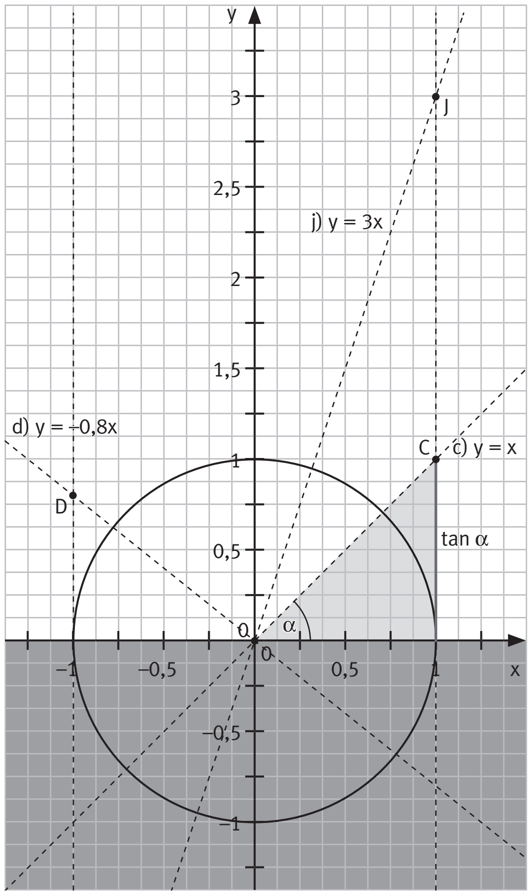
f) sin α zwei Lösungen: $\alpha_1 \approx 26{,}7°$ $\alpha_2 \approx 153{,}3°$

h) sin α zwei Lösungen: $\alpha_1 = 0°$ $\alpha_2 = 180°$

l) sin α zwei Lösungen: $\alpha_1 \approx 2{,}9°$ $\alpha_2 \approx 177{,}1°$

Zu **c)**, **d)** und **j)**

Werte für tan α mit α ∈ [0°; 180°]



c) tan α eine Lösung: α = 45°

d) tan α eine Lösung: α ≈ 141,3°

j) tan α eine Lösung: α ≈ 71,6°

K1 **2** (ohne Skizze)

a) $2\alpha - 20° = 60°$ oder $2\alpha - 20° = -60°$ $\Rightarrow \alpha_1 = 40°$ $\alpha_2 \approx 160°$

b) $4\alpha - 20° \approx 48{,}6°$ oder $4\alpha - 20° \approx 131{,}4°$ $\Rightarrow \alpha_1 \approx 17{,}2°$ $\alpha_2 \approx 37{,}9°$ $\alpha_3 \approx 107{,}2°$ $\alpha_4 \approx 127{,}9°$

c) $2\alpha + 60° \approx 60{,}9°$ oder $2\alpha + 60° \approx 240{,}9°$ $\Rightarrow \alpha_1 \approx 0{,}45°$ $\alpha_2 \approx 90{,}45°$

d) $3\alpha \approx 41{,}3°$ oder $3\alpha \approx 138{,}7°$ $\Rightarrow \alpha_1 \approx 13{,}8°$ $\alpha_2 \approx 46{,}2°$ $\alpha_3 \approx 133{,}8°$ $\alpha_4 \approx 166{,}2°$

e) $2\alpha + 45° \approx 101{,}5°$ oder $2\alpha + 45° \approx -101{,}5°$ $\Rightarrow \alpha_1 \approx 28{,}3°$ $\alpha_2 \approx 106{,}8°$

f) $0{,}5\alpha + 10° \approx 26{,}7°$ oder $0{,}5\alpha + 10° \approx 153{,}3°$ $\Rightarrow \alpha \approx 33{,}4°$

K1 **3** Die Aussagen ergeben sich durch Umformungen mithilfe von $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ bzw. $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ und $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$.

a) $1 + \cos^2\alpha = 1 + (1 - \sin^2\alpha) = 2 - \sin^2\alpha$

b) $1 + 4\cdot\cos^2\alpha - 5\cdot\sin^2\alpha = 1 + 4\cdot(1 - \sin^2\alpha) - 5\cdot\sin^2\alpha = 5 - 9\cdot\sin^2\alpha$

c) $3 - \cos^2\alpha - 2\cdot\sin^2\alpha = 3 - (1 - \sin^2\alpha) - 2\cdot(1 - \cos^2\alpha) = \sin^2\alpha + 2\cdot\cos^2\alpha$

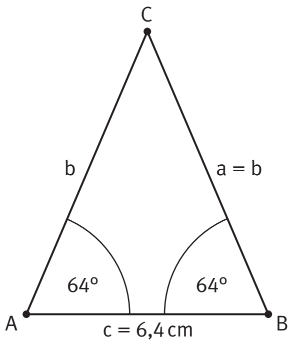
K5 **4** **a)** $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{4\sqrt{3}\,\text{cm}}{4\,\text{cm}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$ $\beta = 180° - 90° - 60° = 30°$

b) Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

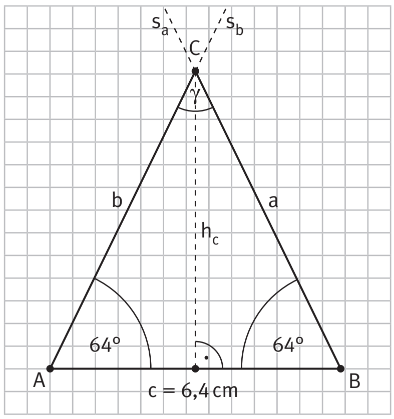
$A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot|\overline{AC}|\cdot|\overline{BC}|$ und $A_{ABC} = 12\,\text{FE}$ $\Rightarrow |\overline{BC}| = \frac{24\,\text{FE}}{|\overline{AC}|} = \frac{24\,\text{FE}}{2{,}4\,\text{LE}} = 10\,\text{LE}$

$\tan\alpha = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{10\,\text{LE}}{2{,}4\,\text{LE}} \Rightarrow \alpha \approx 76{,}5°$ $\beta = 180° - 90° - 76{,}50° = 13{,}5°$

K5 **5** **a)** Planfigur:



Zeichnung:



Beschreibung:
1. Zeichne $\overline{AB}$ mit $c = 6{,}4\,\text{cm}$.
2. Zeichne an $\overline{AB}$ im Punkt A bzw. B die Winkel mit dem Maß 64°; du erhältst die Schenkel s_a und s_b.
3. Die Schenkel s_a und s_b schneiden sich in C.

b) Aus $\alpha = \beta = 64°$ folgt: $\gamma = 180° - 128° = 52°$

Aus $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$ folgt: $a = c\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 6{,}4\,\text{cm}\cdot\frac{\sin 64°}{\sin 52°} \approx 7{,}3\,\text{cm} = b$

Die Schenkellängen a und b des Dreiecks betragen 7,3 cm.

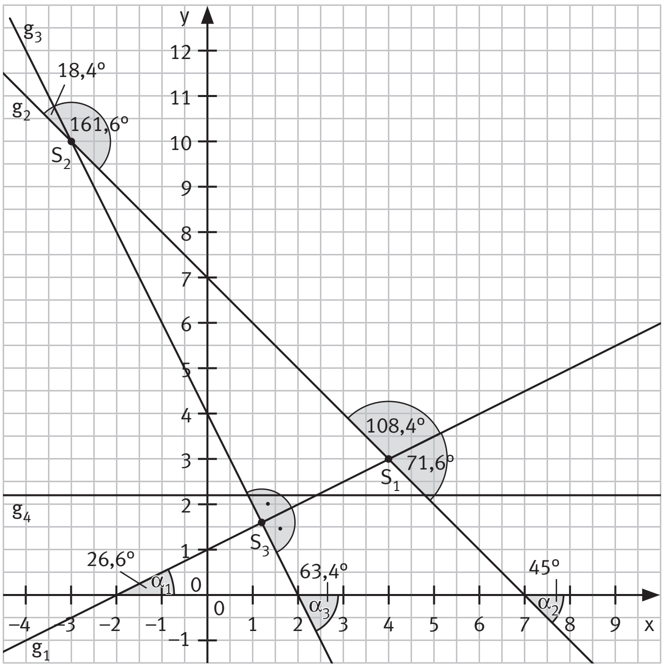
c) Es sind unterschiedliche Rechenwege möglich, z. B.:

$A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 7{,}3\,\text{cm}\cdot 6{,}4\,\text{cm}\cdot\sin 64° \approx 21{,}00\,\text{cm}^2$

K5 **6**

	a	b	c	α	β	γ
a)	92 cm	37,5 cm	84 cm	90°	24,1°	65,9°
b)	1,9 m	0,9 m	2,1 m	64,6°	25,4°	90°
c)	0,8 km	1,0 km	0,6 km	54,5°	90°	35,5°

K6 **7**



a) ① $m = \tan \alpha = 0{,}5 \quad \Rightarrow \alpha = 26{,}6°$

② $m = \tan \alpha = -1 \quad \Rightarrow \alpha = -45°$

③ $m = -2 = \tan \alpha \quad \Rightarrow \alpha \approx -63{,}4°$

④ Da die Gerade g_4: $y = 2{,}2$ parallel zur x-Achse ist, schließt sie mit dieser keinen Winkel ein.

b) Winkelmaße zwischen g_1 und g_2:
$26{,}6° + 45° = 71{,}6°$
$180° - 71{,}6° = 108{,}4°$

Winkelmaße zwischen g_2 und g_3:
$63{,}4° - 45° = 18{,}4°$
$180° - 18{,}4° = 161{,}6°$

Winkelmaße zwischen g_1 und g_3:
$26{,}6° + 63{,}4° = 90°$
$180° - 90° = 90°$

c) Die Winkelmaße der Geraden g_1, g_2 und g_3 mit der zur x-Achse parallelen Geraden g_4: $y = 2{,}2$ entsprechen den Winkelmaßen, die g_1, g_2 und g_3 mit der x-Achse haben:
Winkelmaße zwischen g_1 und g_4: $26{,}6°$ und $180° - 26{,}6° = 153{,}4°$
Winkelmaße zwischen g_2 und g_4: $-45°$ und $180° - 45° = 135°$
Winkelmaße zwischen g_3 und g_4: $-63{,}4°$ und $180° - 63{,}4° = 116{,}6°$

K3 **8** Kosinussatz:

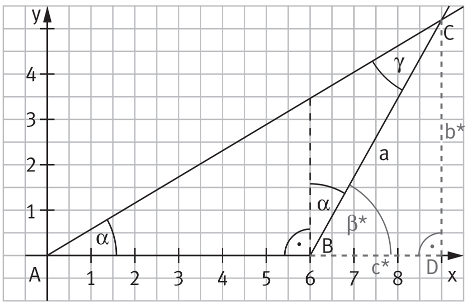
$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma} = \sqrt{4{,}6^2 + 4{,}1^2 - 2 \cdot 4{,}6 \cdot 4{,}1 \cdot \cos 75°}\,\text{cm} = \sqrt{28{,}2}\,\text{cm} \approx 5{,}3\,\text{cm}$

Sinussatz:

$\sin \alpha = \frac{a}{c} \cdot \sin \gamma = \frac{4{,}6}{5{,}3} \cdot \sin 75° \approx 0{,}84 \qquad \alpha \approx 57° \qquad \beta = 180° - 75° - 57° = 48°$

Die dritte Seite ist ca. 5,3 cm lang, die beiden Winkelmaße betragen ca. 57° bzw. ca. 48°.

K5 **9**



$\gamma = 180° - 30° - 120° = 30°$

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit $a = c = 6$ LE.

Das Dreieck BDC ist rechtwinklig bei D.

Es gilt: $\beta^* = 60°$ und $|\overline{BC}| = a = 6$ LE.

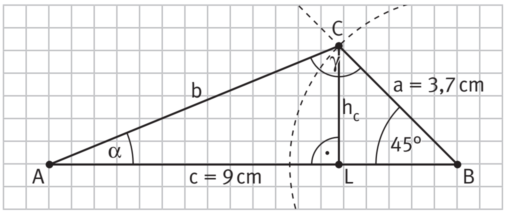
$\sin \beta^* = \frac{b^*}{a} \quad \Rightarrow b^* = a \cdot \sin \beta^* = 6\,\text{LE} \cdot \sin 60° \approx 5{,}2\,\text{LE}$

$\cos \beta^* = \frac{c^*}{a} \quad \Rightarrow c^* = a \cdot \cos \beta^* = 6\,\text{LE} \cdot \cos 60° = 3\,\text{LE}$

C (9 | 5,2)

KX **10** Die Aussage ist falsch: Der Sinussatz ist nur anwendbar, wenn das Dreieck aus den gegebenen Stücken eindeutig anhand der Kongruenzsätze konstruierbar ist (s. die Beispiele zum Sinussatz). Der Kosinussatz ist nur anwendbar, wenn bei einem Dreieck zwei Seitenlängen und das Maß des eingeschlossenen Winkels gegeben sind (SWS).

K5 **11 a)**



Zeichne $\overline{AB}$ mit der Länge c und den Winkel β an $\overline{AB}$ in B. Der freie Schenkel schneidet den Kreis um B mit r = a in C.

Kosinussatz im Dreieck ABC:

$b = \sqrt{3{,}7^2 + 9^2 - 2 \cdot 3{,}7 \cdot 9 \cdot \cos 45°}\ \text{cm} \approx 6{,}9\ \text{cm}$

Sinussatz im Dreieck ABC:

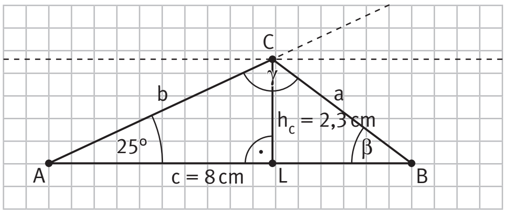
$\sin\alpha = \frac{3{,}7\ \text{cm}}{6{,}90\ \text{cm}} \cdot \sin 45° \Rightarrow \alpha \approx 22{,}3°$

$\gamma = 180° - 22{,}3° - 45° = 112{,}7°$

$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha = 6{,}9\ \text{cm} \cdot \sin 22{,}3° \approx 2{,}6\ \text{cm}$

$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 9\ \text{cm} \cdot 2{,}6\ \text{cm} \approx 11{,}7\ \text{cm}^2$

b)



Zeichne $\overline{AB}$ mit der Länge c und den Winkel α an $\overline{AB}$ in A. Der freie Schenkel schneidet die Parallele zu AB im Abstand von $d = h_c$ in C.

Sinussatz im Dreieck ALC:

$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow b = \frac{h_c}{\sin\alpha} = \frac{2{,}3\ \text{cm}}{\sin 25°} \approx 5{,}44\ \text{cm}$

$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 8\ \text{cm} \cdot 2{,}3\ \text{cm} \approx 9{,}2\ \text{cm}^2$

Kosinussatz im Dreieck ABC:

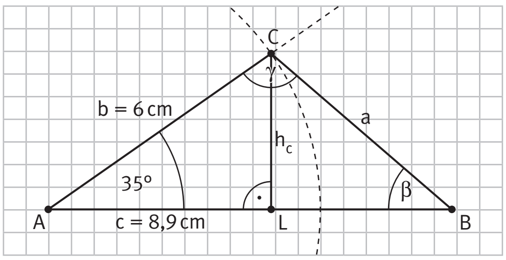
$a = \sqrt{5{,}44^2 + 8^2 - 2 \cdot 5{,}44 \cdot 8 \cdot \cos 25°}\ \text{cm} \approx 3{,}84\ \text{cm}$

Sinussatz im Dreieck ABC:

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{b}{a} \cdot \sin\alpha = \frac{5{,}44\ \text{cm}}{3{,}84\ \text{cm}} \cdot \sin 25°$

$\Rightarrow \beta \approx 36{,}8° \qquad \gamma \approx 180° - 25° - 36{,}8° = 118{,}2°$

c)



Zeichne $\overline{AB}$ mit der Länge c und den Winkel α an $\overline{AB}$ in A. Der freie Schenkel schneidet den Kreis um A mit r = b in C.

Kosinussatz im Dreieck ABC:

$a = \sqrt{6^2 + 8{,}9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8{,}9 \cdot \cos 35°}\ \text{cm} \approx 5{,}27\ \text{cm}$

$A = 0{,}5 \cdot 6 \cdot 8{,}9 \cdot \sin 35°\ \text{cm}^2 = 15{,}31\ \text{cm}^2$

Sinussatz im Dreieck ALC:

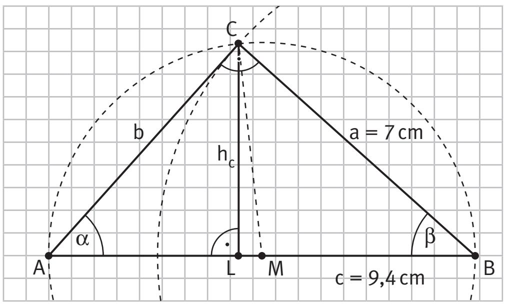
$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha = 6\ \text{cm} \cdot \sin 35° \approx 3{,}44\ \text{cm}$

Sinussatz im Dreieck ABC:

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{b}{a} \cdot \sin\alpha = \frac{6}{5{,}27} \cdot \sin 35°$

$\Rightarrow \beta \approx 40{,}8° \qquad \gamma \approx 180° - 35° - 40{,}8° = 104{,}2°$

d)



Zeichne $\overline{AB}$ mit der Länge c und den Mittelpunkt M von $\overline{AB}$. Der Thaleskreis über $\overline{AB}$ schneidet den Kreis um B mit r = a in C.

Satz des Pythagoras im Dreieck ABC:

$b = \sqrt{9{,}4^2 - 7^2}\ \text{cm} \approx 6{,}27\ \text{cm}$

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{7\ \text{cm}}{9{,}4\ \text{cm}} \Rightarrow \alpha \approx 48{,}13°$

$\beta \approx 180° - 90° - 48{,}13° = 41{,}87°$

$A = 0{,}5 \cdot a \cdot b = 0{,}5 \cdot 7 \cdot 6{,}27\ \text{cm}^2 \approx 21{,}95\ \text{cm}^2$

$A = 0{,}5 \cdot c \cdot h_c \Leftrightarrow h_c = \frac{2A}{c} = \frac{2 \cdot 21{,}95}{9{,}4}\ \text{cm} \approx 4{,}67\ \text{cm}$

K5

12 Wenn man zweimal den Sinussatz anwendet, kann man die Anwendung des Kosinussatzes vermeiden.
Im Dreieck ABC gilt:

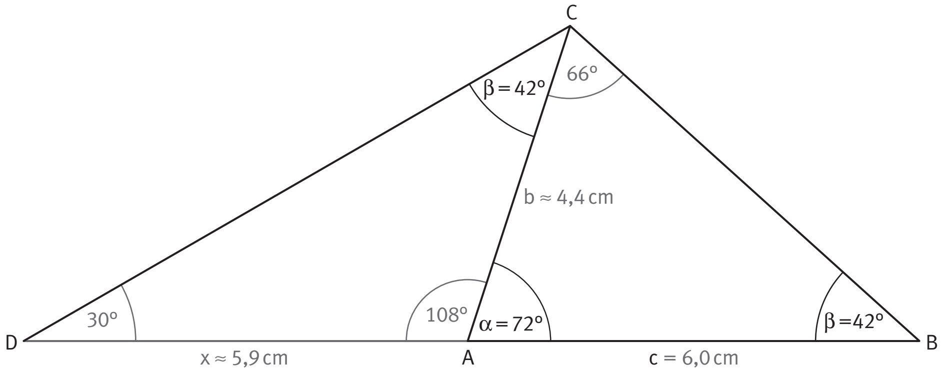
$\gamma = 180° - 72° - 48° = 66°$

$\frac{\sin 66°}{c} = \frac{\sin 42°}{b} \qquad \Rightarrow b = c \cdot \frac{\sin 42°}{\sin 66°} = 6{,}0\,\text{cm} \cdot \frac{\sin 42°}{\sin 66°} \approx 4{,}4\,\text{cm}$

In Dreieck DBC gilt:

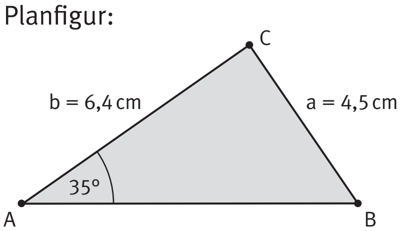
$\delta = 180° - 42° - 108° = 30°$

$\frac{\sin 30°}{b} = \frac{\sin 42°}{x} \qquad \Rightarrow x = b \cdot \frac{\sin 42°}{\sin 30°} = 4{,}4\,\text{cm} \cdot \frac{\sin 42°}{\sin 30°} \approx 5{,}9\,\text{cm}$



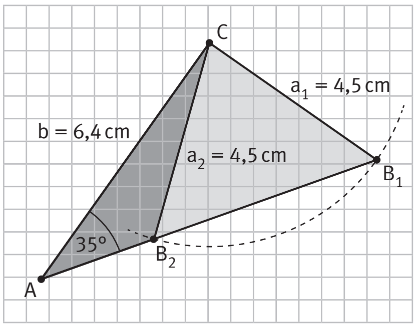
K5

13 **a)** Planfigur:



Beschreibung:
1. Zeichne die Strecke b mit den Eckpunkten A und C.
2. Trage in A den Winkel α an.
3. Zeichne einen Kreisbogen um C mit Radius a.
4. Der Schnittpunkt des freien Schenkels von α und des Kreisbogens ergibt B.

Zeichnung:



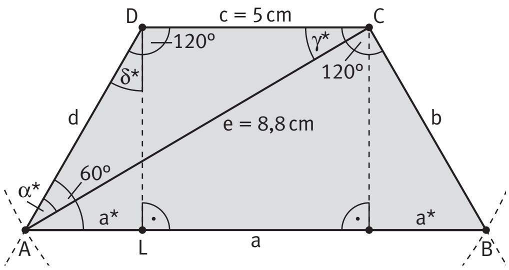
b) Es gibt zwei mögliche Lösungen, da für eine Konstruktion nach SsW der gegebene Winkel der längeren Seite gegenüberliegen müsste. Hier ist das nicht der Fall, denn $a < b$.

c) $\frac{\sin 35°}{\sin \beta} = \frac{4{,}5\,\text{cm}}{6{,}4\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \sin \beta = 6{,}4\,\text{cm} \cdot \frac{\sin 35°}{4{,}5\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \beta_1 \approx 54{,}7°$

$\beta_2 = 180° - 54{,}7° = 125{,}3°$

d) $c_1 \approx 7{,}9\,\text{cm}$; $c_2 \approx 2{,}6\,\text{cm}$

KX **14**



Das Winkelmaß α im Trapez beträgt $\frac{360° - 120° - 120°}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$. $\alpha = \beta = 60°$

Das Winkelmaß δ^* im rechtwinkligen Dreieck ALD beträgt $180° - 90° - 60° = 30°$. $\delta^* = 30°$

Mit dem Sinussatz gilt im Dreieck ACD für die Winkelmaße α^* und γ^*:

$\frac{e}{\sin 120°} = \frac{c}{\sin \alpha^*} \Leftrightarrow \sin \alpha^* = \frac{c}{e} \cdot \sin 120° = \frac{5}{8{,}8} \cdot \sin 120° \Rightarrow \alpha^* \approx 29{,}5°$ $\alpha^* \approx 29{,}5°$

$\gamma^* = 180° - 120° - 29{,}5° = 30{,}5°$ $\gamma^* \approx 30{,}5°$

Mit dem Sinussatz gilt für $|\overline{AD}| = d$:

$\frac{5\,\text{cm}}{\sin 29{,}5°} = \frac{d}{\sin 30{,}5°} \Leftrightarrow d = \frac{\sin 30{,}5°}{\sin 29{,}5°} \cdot 5\,\text{cm} \approx 5{,}2\,\text{cm}$ $b = d \approx 5{,}2\,\text{cm}$

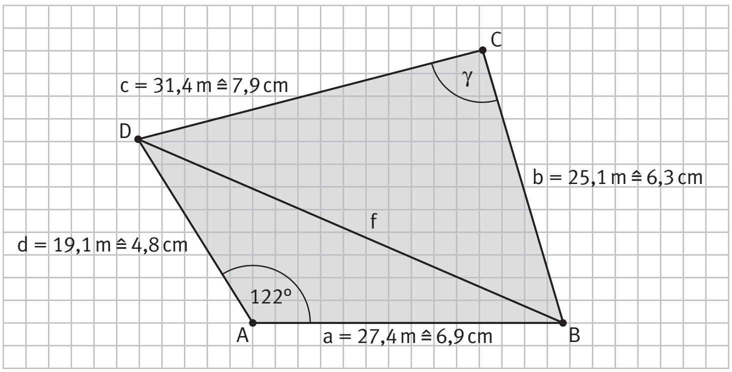
Im rechtwinkligen Dreieck ALD gilt für $|\overline{AL}| = a^*$:

$a^* = \frac{\sin 30°}{\sin 90°} \cdot d = \sin 30° \cdot 5{,}2\,\text{cm} = 2{,}6\,\text{cm}$ $a^* = 2{,}6\,\text{cm}$

Im Trapez gilt für $|\overline{AB}| = a$:

$a = 2a^* + 5\,\text{cm} = 10{,}2\,\text{cm}$ $a = 10{,}2\,\text{cm}$

K3 **15** **a)** Maßstab 1 : 400



b) $A_{\text{Dreieck ABD}} = \frac{1}{2} \cdot 27{,}4\,\text{m} \cdot 19{,}1\,\text{m} \cdot \sin 122° \approx 221{,}9\,\text{m}^2$

Kosinussatz im Dreieck ABD:

$f^2 = a^2 + d^2 - 2a \cdot d \cdot \cos 122°$

$\quad = (27{,}4\,\text{m})^2 + (19{,}1\,\text{m})^2 - 2 \cdot 27{,}4\,\text{m} \cdot 19{,}1\,\text{m} \cdot \cos 122° \approx 1670{,}2\,\text{m}^2$

Kosinussatz im Dreieck BCD:

$f^2 = (31{,}4\,\text{m})^2 + (25{,}1\,\text{m})^2 - 2 \cdot 31{,}4\,\text{m} \cdot 25{,}1\,\text{m} \cdot \cos \gamma$

$1670{,}2\,\text{m}^2 = (31{,}4\,\text{m})^2 + (25{,}1\,\text{m})^2 - 2 \cdot 31{,}4\,\text{m} \cdot 25{,}1\,\text{m} \cdot \cos \gamma$

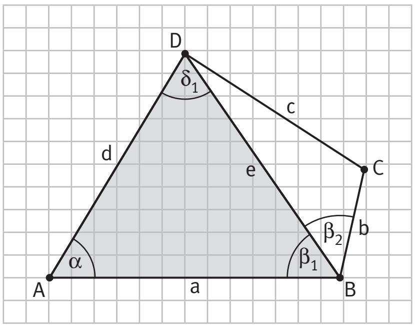
$\gamma \approx 92{,}0°$

$A_{\text{Dreieck BCD}} = \frac{1}{2} \cdot 31{,}4\,\text{m} \cdot 25{,}1\,\text{m} \cdot \sin 92{,}0° \approx 393{,}8\,\text{m}^2$

$A_{\text{gesamt}} = A_{\text{Dreieck ABD}} + A_{\text{Dreieck BCD}} \approx 221{,}9\,\text{m}^2 + 393{,}8\,\text{m}^2 = 615{,}7\,\text{m}^2$

Der Flächeninhalt des Fischweihers beträgt ca. $616\,\text{m}^2$.

K5 **16** Skizze:



Wegen der Winkelsumme im Dreieck ABD gilt:

$\delta_1 = 180° - \alpha - \beta_1 = 180° - 58{,}8° - 55{,}3° = 65{,}9°$

Mit dem Sinussatz gilt für $e = |\overline{BD}|$:

$\frac{e}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\delta_1}$

$\Leftrightarrow e = \frac{a}{\sin\delta_1} \cdot \sin\alpha = \frac{320\,m}{\sin 65{,}9°} \cdot \sin 58{,}8° \approx 299{,}85\,m$

$$\begin{aligned}
A_{ABCD} &= A_{ABD} + A_{BCD} \\
&= 0{,}5 \cdot a \cdot e \cdot \sin\beta_1 + 0{,}5 \cdot e \cdot b \cdot \sin\beta_2 \\
&= 0{,}5 \cdot 320\,m \cdot 299{,}85\,m \cdot \sin 55{,}3° + 0{,}5 \cdot 299{,}85\,m \cdot 122\,m \cdot \sin 47{,}4° \\
&\approx 39\,443\,m^2 + 13\,464\,m^2 \\
&= 52\,907\,m^2
\end{aligned}$$

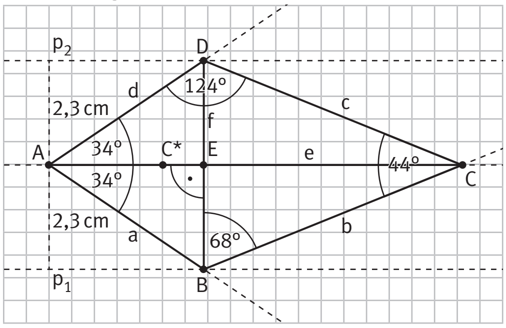
Es werden 52 907 m² Ackerland gewonnen.

K5 **17 a)** Vorüberlegung zur Konstruktion:

Da AC die Symmetrieachse des Drachenvierecks ist, gilt: d (B; AC) = d (D; AC) = 0,5f = 2,3 cm.

Im gleichschenkligen Dreieck BCD gilt: $\beta^* = \delta^* = 0{,}5 \cdot (180° - \gamma) = 0{,}5 \cdot (180° - 44°) = 68°$.

Zeichnung:



Konstruktion:

1. Zeichne eine Gerade AC*; auf ihr wird C liegen, d. h.: AC* ist die Symmetrieachse des Drachenvierecks.
2. Zeichne zwei Parallelen p_1 und p_2 zu AC* im Abstand von 2,3 cm.
3. Zeichne an AC* in A zwei Winkel mit dem Maß $\alpha^* = 0{,}5\alpha = 34°$. Die freien Schenkel schneiden p_1 und p_2 in B und D.
4. Zeichne an $\overline{BD}$ in B einen Winkel mit dem Maß $\beta^* = 68°$. Der freie Schenkel schneidet AC* in C.

b) Im Drachenviereck gilt:

$\beta = \delta = 0{,}5 \cdot (360° - \alpha - \gamma) = 0{,}5 \cdot (360° - 68° - 44°) = 124°$

Im rechtwinkligen Dreieck ABE gilt für $|\overline{AB}| = a$:

$\sin 34° = \frac{2{,}3\,cm}{a} \Leftrightarrow a = \frac{2{,}3\,cm}{\sin 34°} \approx 4{,}1\,cm$

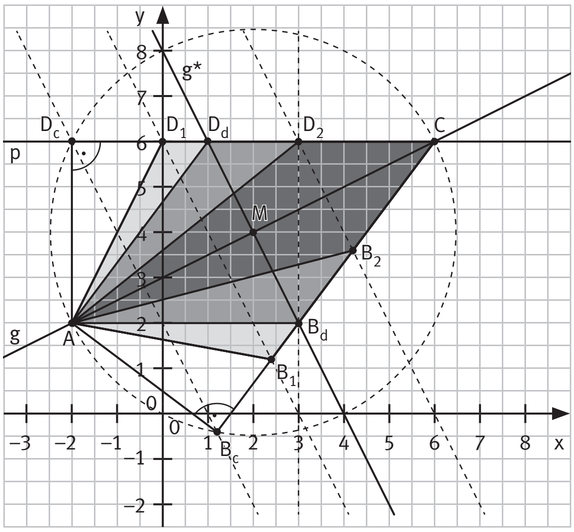
Im rechtwinkligen Dreieck BCE gilt für $|\overline{BC}| = b$:

$\cos 68° = \frac{2{,}3\,cm}{b} \Leftrightarrow b = \frac{2{,}3\,cm}{\cos 68°} \approx 6{,}1\,cm$

Mit dem Kosinussatz für das Dreieck ABC gilt für $|\overline{AC}| = e$:

$e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta} = \sqrt{4{,}1^2 + 6{,}1^2 - 2 \cdot 4{,}1 \cdot 6{,}1 \cdot \cos 124°}\,cm \approx 9{,}1\,cm$

K3 **18**



a) $x_A = -2$ in g: $y = 0{,}5x + 3$ einsetzen:
$y_A = 0{,}5 \cdot (-2) + 3 = 2$ $\Rightarrow A\,(-2\,|\,2)$
$y_C = 6$ in g: $y = 0{,}5x + 3$ einsetzen:
$6 = 0{,}5x_C + 3 \Leftrightarrow x_C = 6$ $\Rightarrow C\,(6\,|\,6)$

b) $D_1\,(0\,|\,6)$; $D_2\,(3\,|\,6)$

c) Der Thaleskreis über $\overline{AC}$ schneidet p in $D_c\,(-2\,|\,6)$. Spiegelt man D_c an g, erhält man B_c.

d) Die Mittelsenkrechte von $\overline{AC}$ schneidet p in $D_d\,(1\,|\,6)$. Spiegelt man D_d an g, erhält man B_d.

Zu **c)**: Die Koordinaten von D_c sind $(-2\,|\,6)$, da D_c auf p liegt und AD_c senkrecht zu p ist.
Mit $|\overline{AD_c}| = 4\,\text{cm}$ und $|\overline{D_cC}| = 8\,\text{cm}$ gilt: $u = 2 \cdot (|\overline{AD_c}| + |\overline{D_cC}|) = 24\,\text{cm}$
$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{|\overline{CD_c}|}{|\overline{AD_c}|} = \frac{8\,\text{cm}}{4\,\text{cm}} = 2 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 63{,}43°$ $\alpha \approx 126{,}87°$
$\gamma = 360° - 180° - 126{,}87° = 53{,}13°$

Zu **d)**: D_d liegt auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$, d. h. auf der Geraden g* mit der Steigung –2.
Da $M_{\overline{AC}}\,(2\,|\,4)$ ebenfalls auf g* liegt, erhält man die Gleichung von g*, indem man die Koordinaten von $M_{\overline{AC}}$ in g*: $y = -2x + t$ einsetzt. Man erhält $t = 8$ bzw. g*: $y = -2x + 8$.
Durch Gleichsetzen von p und g* erhält man die Koordinaten von D_d:
$6 = -2x + 8 \Leftrightarrow x = 1$ bzw. $D_d\,(1\,|\,6)$.
Mit der Seitenlänge $|\overline{CD_d}| = 5\,\text{cm}$ gilt: $u = 4 \cdot |\overline{CD_d}| = 4 \cdot 5\,\text{cm} = 20\,\text{cm}$
Mit der Höhe $h = 2\,\text{cm}$ gilt im Dreieck AB_dM: $A^* = 0{,}5 \cdot 5\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} = 5\,\text{cm}^2$
Für die Raute AB_dCD_d gilt mit $A = 4 \cdot A^*$: $A = 20\,\text{cm}^2$
Für das Dreieck AB_dD_d gilt:
$A' = 0{,}5 \cdot |\overline{AB_d}| \cdot |\overline{AD_d}| \cdot \sin\alpha = 0{,}5 \cdot 5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} \cdot \sin\alpha = 12{,}5\,\text{cm}^2 \cdot \sin\alpha$
Mit $A' = 10\,\text{cm}^2$ folgt:
$12{,}5\,\text{cm}^2 \cdot \sin\alpha = 10\,\text{cm}^2 \Leftrightarrow \sin\alpha = 0{,}8 \Rightarrow \alpha \approx 53{,}13°$
$\alpha = \gamma \approx 53{,}13°$
$\beta = \delta \approx 180° - 53{,}13° = 126{,}87°$

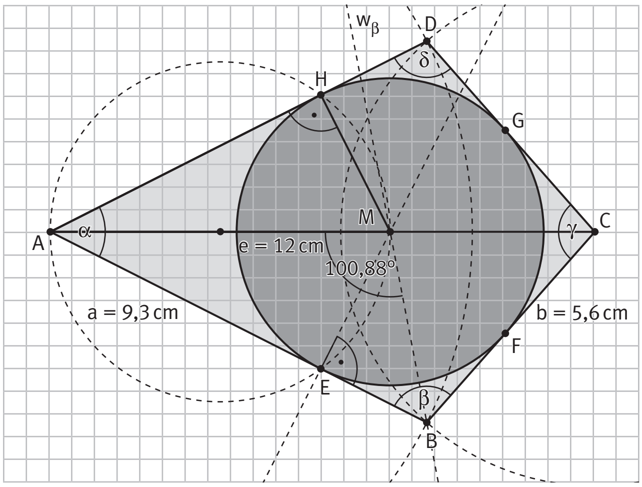
K1 **19** **a)** Da B und D auf dem Thaleskreis um M über $\overline{AC}$ liegen, ist das Drachenviereck ABCD bei B und D rechtwinklig. Hier gilt: $\sin\delta = \sin 90° = 1$ und $\cos\beta = \cos 90° = 0$.

b) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{f}{d} = \frac{e}{a} = \frac{c}{g+h} = \frac{b}{g+h}$ $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{f}{c} = \frac{e}{b} = \frac{d}{g+h} = \frac{a}{g+h}$

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{g}{d} = \frac{g}{a} = \frac{d}{g+h} = \frac{a}{g+h}$ $\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{h}{c} = \frac{h}{b} = \frac{c}{g+h} = \frac{b}{g+h}$

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{f}{g} = \frac{e}{g} = \frac{c}{d} = \frac{b}{a}$ $\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{f}{h} = \frac{e}{h} = \frac{d}{c} = \frac{a}{b}$

K3 **20 a)**



1. Zeichne die Strecke $\overline{AC}$ mit Länge $e = 12\,cm$.
2. Die Kreise um A mit $r = a = 9,3\,cm$ und um C mit $r = b = 5,6\,cm$ schneiden sich in B und D.
3. AC ist Winkelhalbierende der Winkel α und γ, w_β ist Winkelhalbierende des Winkels β.
4. AC und w_β schneiden sich in M, dem Mittelpunkt des Inkreises.
5. Der Thaleskreis über $\overline{AM}$ schneidet $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ in den Inkreispunkten E und H.
6. Zeichne den Inkreis als Kreis um M mit $r = |\overline{ME}|$.

Im Dreieck ABC gilt mit dem Kosinussatz und dem Sinussatz:

$\cos\beta = \frac{(9,3\,cm)^2 + (5,6\,cm)^2 - (12\,cm)^2}{2 \cdot 9,3\,cm \cdot 5,6\,cm} \Rightarrow \beta \approx 104,54°$ $\qquad \beta = \delta \approx 104,54°$

$\frac{\sin\beta}{e} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{b} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = b \cdot \frac{\sin\beta}{e} = 5,6\,cm \cdot \frac{\sin 104,54°}{12\,cm} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 26,85°$ $\qquad \alpha \approx 53,70°$

$\gamma \approx 360° - 2 \cdot 104,54° - 53,70°$ $\qquad \gamma \approx 97,22°$

b) $A_{Drachen} = 2 \cdot A_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\beta = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9,3\,cm \cdot 5,6\,cm \cdot \sin 104,54°$ $\qquad A_{Drachen} \approx 50,41\,cm^2$

Im Dreieck ABM gilt:

$\sphericalangle AMB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180° - 26,85° - 52,27° = 100,88°$

Mit dem Sinussatz folgt:

$\frac{|\overline{MB}|}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{9,3\,cm}{\sin 100,88°} \Leftrightarrow |\overline{MB}| = \sin 26,85° \cdot \frac{9,3\,cm}{\sin 100,88°} \approx 4,28\,cm$

Im rechtwinkligen Dreieck BME gilt für den Inkreisradius $r = |\overline{ME}|$:

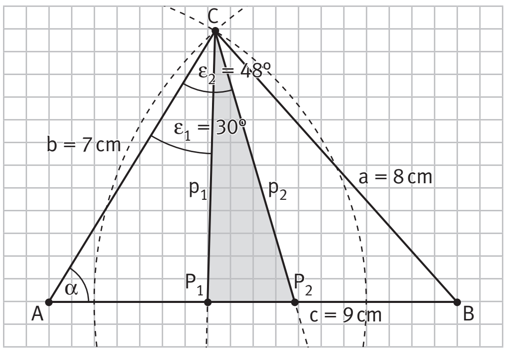
$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{r}{|\overline{MB}|} \Leftrightarrow r = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot |\overline{MB}| = \sin 52,27° \cdot 4,28\,cm \approx 3,39\,cm$

Es folgt für den Flächeninhalt des Inkreises mit $r = 3,39\,cm$: $A_{Inkreis} = (3,39\,cm)^2\pi \approx 36,10\,cm^2$

$\frac{A_{Inkreis}}{A_{Drachen}} = \frac{36,01\,cm^2}{50,41\,cm^2} \approx 0,71$

Die Fläche des Inkreises nimmt 71 % der Fläche des Drachenvierecks ein.

K3 **21 a)**



b) Mit dem Kosinussatz im Dreieck ABC gilt:

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 9^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 9} \Rightarrow \alpha \approx 58,41°$

c) In den Dreiecken AP_1C und AP_2C gilt:

$\sphericalangle AP_1C = 180° - 30° - 58,41° = 91,59°$

$\sphericalangle AP_2C = 180° - 48° - 58,41° = 73,59°$

Sinussatz in den Dreiecken AP_1C und AP_2C:

$\frac{|\overline{CP_1}|}{\sin 58,41°} = \frac{7\,cm}{\sin 91,59°} \Leftrightarrow |\overline{CP_1}| = \sin 58,41° \cdot \frac{7\,cm}{\sin 91,59°}$

$\Rightarrow |\overline{CP_1}| \approx 5,97\,cm$

$\frac{|\overline{CP_2}|}{\sin 58,41°} = \frac{7\,cm}{\sin 73,59°} \Leftrightarrow |\overline{CP_2}| = \sin 58,41° \cdot \frac{7\,cm}{\sin 73,59°}$

$\Rightarrow |\overline{CP_2}| \approx 6,22\,cm$

d) Für den Flächeninhalt A_c des Dreiecks P_2CP_1 gilt mit $\sphericalangle P_1CP_2 = 48° - 30° = 18°$:

$A_c = \frac{1}{2} \cdot 5,97\,cm \cdot 6,22\,cm \cdot \sin 18° \approx 5,74\,cm^2$

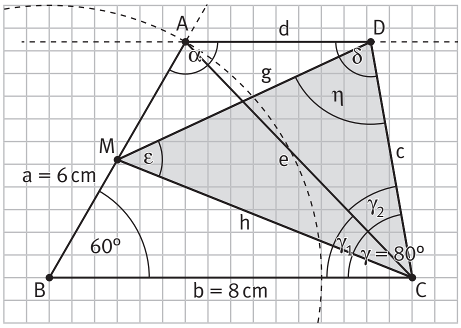
Für den Flächeninhalt A_{gesamt} des Dreiecks ABC gilt:

$A_{gesamt} = \frac{1}{2} \cdot 7\,cm \cdot 9\,cm \cdot \sin 58,41° \approx 26,83\,cm^2$

Anteil: $\frac{A_c}{A_{gesamt}} = \frac{5,74}{26,83} \approx 0,214 = 21,4\,\%$

Das Teildreieck P_2CP_1 nimmt 21,4 % an der Gesamtfläche des Dreiecks ABC ein.

K2 **22 a)** und **b)**



Zeichne die Strecke $\overline{BC}$ mit der Länge b = 8 cm.
Zeichne einen Winkel mit $\beta = 60°$ in B.
Der freie Schenkel schneidet den Kreis um B mit Radius r = 6 cm in A.
Zeichne einen Winkel mit $\gamma = 80°$ in C.
Der freie Schenkel schneidet die Parallele zu BC durch A in D.

Im Dreieck ABC gilt mit $e = |\overline{AC}|$ mit dem Kosinus- bzw. Sinussatz:

$e = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 60°} \approx 7{,}21\,\text{cm}$

$\frac{7{,}21\,\text{cm}}{\sin 60°} = \frac{6\,\text{cm}}{\sin \gamma_1} \Leftrightarrow \sin \gamma_1 = \frac{6\,\text{cm}}{7{,}21\,\text{cm}} \cdot \sin 60° \Rightarrow \gamma_1 = 46{,}1°$

$\Rightarrow \gamma_2 \approx 80° - \gamma_1 = 80° - 46{,}1° = 33{,}9°$

Da α und β bzw. γ und δ Nebenwinkel an parallelen Geraden sind, gilt:

$\alpha = 180° - \beta = 120°$ und $\delta = 180° - \gamma = 100°$

Im Dreieck ACD gilt mit dem Sinussatz:

$\frac{d}{\sin 33{,}9°} = \frac{7{,}21\,\text{cm}}{\sin 100°} \Leftrightarrow d = \frac{7{,}21\,\text{cm}}{\sin 100°} \cdot \sin 33{,}9° \approx 4{,}08\,\text{cm}$ $\qquad d \approx 4{,}08\,\text{cm}$

c) Im Dreieck AMD gilt mit $g = |\overline{MD}|$ mit dem Kosinussatz:

$g = \sqrt{3^2 + 4{,}08^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4{,}08 \cdot \cos 120°}\,\text{cm} \approx 6{,}16\,\text{cm}$ $\qquad g \approx 6{,}16\,\text{cm}$

Im Dreieck MBC gilt mit $h = |\overline{MC}|$ mit dem Kosinussatz:

$h = \sqrt{3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 60°}\,\text{cm} \approx 7{,}00\,\text{cm}$ $\qquad h \approx 7{,}00\,\text{cm}$

Im Dreieck ABC gilt:

$\sphericalangle BAC = 180° - 60° - \gamma_1 = 120° - 46{,}1° = 73{,}9°$

$\Rightarrow \sphericalangle CAD = \alpha - 73{,}9° = 120° - 73{,}9° = 46{,}1°$

Im Dreieck ACD gilt mit dem Sinussatz:

$\frac{c}{\sin 46{,}1°} = \frac{7{,}21\,\text{cm}}{\sin 100°} \Leftrightarrow c = \frac{7{,}21\,\text{cm}}{\sin 100°} \cdot \sin 46{,}1° \approx 5{,}28\,\text{cm}$ $\qquad c \approx 5{,}28\,\text{cm}$

Mit dem Kosinussatz im Dreieck CDM gilt für $\varepsilon = \sphericalangle CMD$:

$\cos \varepsilon = \frac{6{,}16^2 + 7^2 - 5{,}28^2}{2 \cdot 6{,}16 \cdot 7} \Rightarrow \varepsilon \approx 46{,}77°$ $\qquad \sphericalangle CMD \approx 46{,}77°$

Mit dem Sinussatz gilt weiterhin im Dreieck CDM mit $\eta = \sphericalangle MDC$:

$\frac{5{,}28\,\text{cm}}{\sin 46{,}77°} = \frac{7\,\text{cm}}{\sin \eta} \Leftrightarrow \sin \eta = \frac{7\,\text{cm}}{5{,}28\,\text{cm}} \cdot \sin 46{,}77° \Rightarrow \eta \approx 75{,}01°$ $\qquad \sphericalangle MDC \approx 75{,}01°$

Mit der Winkelsumme im Dreieck CDM folgt:

$\sphericalangle DCM \approx 180° - 46{,}77° - 75{,}01° \approx 58{,}22°$ $\qquad \sphericalangle DCM \approx 58{,}22°$

d) Für den Flächeninhalt des Dreiecks CDM gilt:

$A_{CDM} \approx \frac{1}{2} \cdot 7\,\text{cm} \cdot 6{,}16\,\text{cm} \cdot \sin 46{,}77° \approx 15{,}7\,\text{cm}^2$ $\qquad A_{CDM} \approx 15{,}7\,\text{cm}^2$

Für den Flächeninhalt des Trapezes gilt:

$A_{Trapez} = A_{ABC} + A_{ACD}$

$= \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} \cdot \sin 60° + \frac{1}{2} \cdot 4{,}08\,\text{cm} \cdot 5{,}28\,\text{cm} \cdot \sin 100°$

$\approx 20{,}8\,\text{cm}^2 + 10{,}6\,\text{cm}^2 = 31{,}4\,\text{cm}^2$ $\qquad A_{Trapez} \approx 31{,}4\,\text{cm}^2$

Mit $\frac{15{,}7\,\text{cm}^2}{31{,}4\,\text{cm}^2} \approx 0{,}5$ nimmt der Flächeninhalt des Dreiecks CDM die Hälfte des Flächeninhalts des Trapezes ABCD ein.

Alternativer Lösungsweg (ohne Berechnung der Flächeninhalte):
Die Fläche des Dreiecks CDM berechnet sich aus der Trapezfläche abzüglich der Dreiecksflächen BCM und DAM. Diese beiden Dreiecksflächen sind zusammen genau halb so groß wie die Trapezfläche, da ihre Höhe jeweils die halbe Trapezhöhe ist (da M Mittelpunkt von $\overline{AD}$ ist) und die Grundseiten der Dreiecke genau die zueinander parallelen Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ sind. Damit gilt:

$\frac{A_{CDM}}{A_{Trapez}} = 0{,}5$

K2 **23 a)** Das Dreieck P_1BG mit $P_1 = E$ ist gleichseitig mit $d = 6\sqrt{2}$ cm als Seitenlänge.
Für die Höhe h_1 im Dreieck gilt dann $h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6\sqrt{2}\,\text{cm} = 3 \cdot \sqrt{6}\,\text{cm}$ und damit für den Flächeninhalt:
$A = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2}\,\text{cm} \cdot 3 \cdot \sqrt{6}\,\text{cm} = 18\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \approx 31{,}18\,\text{cm}^2$

b) Es ist $|\overline{BG}| = |\overline{EG}| = 6\sqrt{2}$ cm. Mithilfe von $|\overline{AP_2}| = 3$ cm und $|\overline{EG}| = 6\sqrt{2}$ cm berechnet man in den Dreiecken ABP_2 und P_2GE:
$|\overline{BP_2}| = \sqrt{a^2 + \overline{AP}^2} = \sqrt{6^2 + 3^2}\,\text{cm} \approx 6{,}71\,\text{cm}$
$|\overline{GP_2}| = \sqrt{\overline{P_2E}^2 + \overline{EG}^2} = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 + 3^2}\,\text{cm} = 9{,}0\,\text{cm}$
$\tan \varepsilon_2 = \frac{\overline{AP_2}}{\overline{AB}} = \frac{3\,\text{cm}}{6\,\text{cm}} \qquad \varepsilon_2 \approx 26{,}57°$
Eine geometrische Bestimmung des Winkels ε_2 und der Länge $|\overline{P_2B}|$ wäre möglich, da das Dreieck ABP_2 im Schrägbild nicht verzerrt dargestellt wird. Die beiden verbleibenden Dreiecksseiten werden jedoch verzerrt dargestellt, weshalb eine geometrische Bestimmung hier nicht möglich ist.

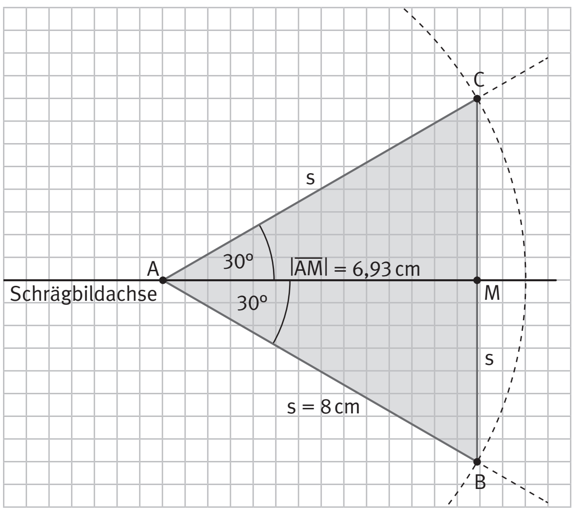
c) Im Dreieck ABP_3 mit $\varepsilon_3 = 20°$ gilt:
$|\overline{AP_3}| = |\overline{AB}| \cdot \tan \varepsilon_3 = 6\,\text{cm} \cdot \tan 20° \approx 2{,}18\,\text{cm}$
$|\overline{EP_3}| = (6 - 2{,}18)\,\text{cm} = 3{,}82\,\text{cm}$
$|\overline{GP_3}| = \sqrt{|\overline{P_3E}|^2 + |\overline{EG}|^2} = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 + 3{,}82^2}\,\text{cm} \approx 9{,}31\,\text{cm}$

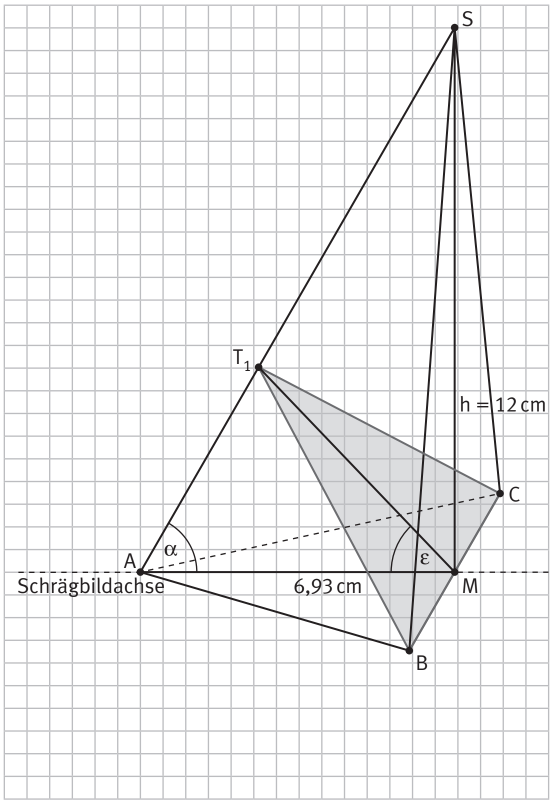
K2 **24 a)** Im Dreieck ABP_1 gilt:
$|\overline{AP_1}| = \frac{|\overline{AB}|}{\cos \alpha_1} = \frac{6\,\text{cm}}{\cos 25°} \approx 6{,}62\,\text{cm}$
$A = |\overline{AP_1}| \cdot |\overline{P_1Q_1}| = 6{,}62\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = 39{,}72\,\text{cm}^2$

b) A ist maximal, wenn $|\overline{DQ_2}|$ maximal ist, d. h.: $Q_2 = G$.

c) Aus $A = |\overline{AP_3}| \cdot |\overline{P_3Q_3}|$ folgt:
$|\overline{AP_3}| = \frac{A}{\overline{P_3Q_3}} = \frac{40\,\text{cm}^2}{6\,\text{cm}} \approx 6{,}67\,\text{cm}$
$\cos \alpha_3 = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AP_3}|} = \frac{6\,\text{cm}}{6{,}67\,\text{cm}} \approx 0{,}90 \Rightarrow \alpha_3 \approx 25{,}8°$

K2 **25 a)** Im gleichseitigen Dreieck ABC mit s = 8 cm hat $\overline{AM}$ die Länge $\cos 30° \cdot 8\,\text{cm} \approx 6{,}93\,\text{cm}$.





b) Im Dreieck AMS gilt: $\tan\alpha = \frac{|\overline{MS}|}{|\overline{AM}|} = \frac{12\,\text{cm}}{6{,}93\,\text{cm}} \Rightarrow \alpha = 60°$.

c) Es ist $|\overline{AM}| = 6{,}93\,\text{cm}$ und $\sphericalangle AT_2M = 180° - (\alpha + \varepsilon_2) = 65°$.
Nach dem Sinussatz gilt:
$\frac{|\overline{MT_2}|}{|\overline{AM}|} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\sphericalangle AT_2M)} \Rightarrow |\overline{MT_2}| = \frac{\sin\alpha}{\sin(\sphericalangle AT_2M)} \cdot |\overline{AM}| \approx 6{,}62\,\text{cm}$
$A = \frac{1}{2} \cdot |\overline{BC}| \cdot |\overline{MT_2}| = \frac{1}{2} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 6{,}62\,\text{cm} = 26{,}48\,\text{cm}^2$

d) $|\overline{MT_n}|$ wird minimal, wenn $\sphericalangle AT_nM = 90°$. In diesem Fall ist $\varepsilon_3 = 180° - 90° - \alpha = 30°$.

Aufgaben zur Einzelarbeit

KX **1** **a)** sin 35° ≈ 0,57
cos 35° ≈ 0,82
tan 35° ≈ 0,70

b) sin 270° = –1
cos 270° = 0
tan 270° (nicht definiert)

c) sin 167,5° ≈ 0,22
cos 167,5° ≈ –0,98
tan 167,5° ≈ –0,22

d) sin (–60,6°) ≈ –0,87
cos (–60,6°) ≈ –0,49
tan (–60,6°) ≈ –1,77

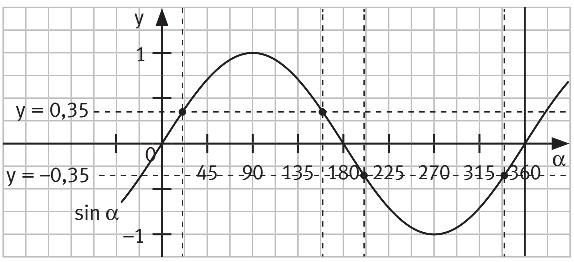
e) sin 180° = 0
cos 180° = –1
tan 180° = 0

f) sin (–140°) ≈ –0,64
cos (–140°) ≈ –0,77
tan (–140°) ≈ 0,84

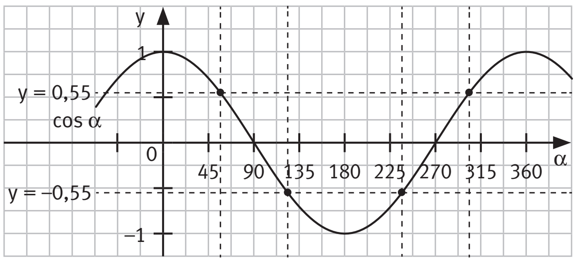
KX **2** **a)** $\alpha_1 \approx 73{,}6°$ $\alpha_2 \approx 156{,}41°$
b) $\alpha \approx 96{,}4°$
c) $\alpha \approx 121{,}4°$
d) $\alpha_1 \approx 17{,}7°$ $\alpha_2 \approx 102{,}3°$ $\alpha_3 \approx 137{,}7°$
e) $\alpha_1 \approx 17{,}4°$ $\alpha_2 \approx 49{,}3°$ $\alpha_3 \approx 137{,}4°$ $\alpha_4 \approx 169{,}3°$

KX **3** **a)** $\alpha_1 \approx -306{,}9°$ $\alpha_2 \approx -233{,}1°$ $\alpha_3 \approx 53{,}1°$ $\alpha_4 \approx 126{,}9°$
b) $\alpha_1 \approx -168{,}5°$ $\alpha_2 \approx -11{,}5°$ $\alpha_3 \approx 191{,}5°$ $\alpha_4 \approx 348{,}5°$
c) $\alpha_1 \approx -270°$ $\alpha_2 \approx 90°$
d) $\alpha_1 \approx -225{,}6°$ $\alpha_2 \approx -134{,}4°$ $\alpha_3 \approx 134{,}4°$ $\alpha_4 \approx 225{,}6°$
e) $\alpha_1 \approx -275{,}7°$ $\alpha_2 \approx -84{,}3°$ $\alpha_3 \approx 84{,}3°$ $\alpha_4 \approx 275{,}7°$
f) $\alpha_1 \approx -180°$ $\alpha_2 \approx 180°$
g) $\alpha_1 \approx -291{,}8°$ $\alpha_2 \approx -111{,}8°$ $\alpha_3 \approx 68{,}2°$ $\alpha_4 \approx 248{,}2°$
h) $\alpha_1 \approx -234{,}5°$ $\alpha_2 \approx -54{,}5°$ $\alpha_3 \approx 125{,}5°$ $\alpha_4 \approx 305{,}5°$

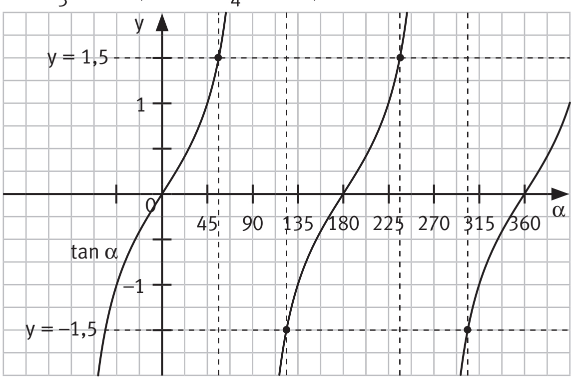
KX **4** **a)** $\alpha_1 \approx 20{,}5°$ $\alpha_2 \approx 159{,}5°$
$\alpha_3 \approx 200{,}5°$ $\alpha_4 \approx 339{,}5°$



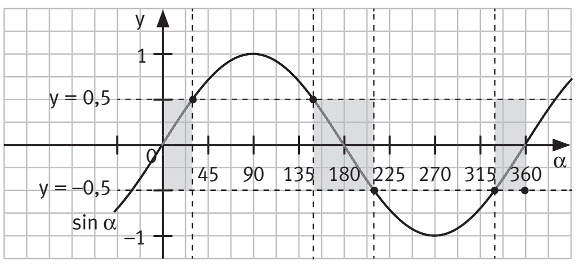
b) $\alpha_1 \approx 56{,}6°$ $\alpha_2 \approx 123{,}4°$
$\alpha_3 \approx 236{,}6°$ $\alpha_4 \approx 303{,}4°$



c) $\alpha_1 \approx 56{,}3°$ $\alpha_2 \approx 123{,}7°$
$\alpha_3 \approx 236{,}3°$ $\alpha_4 \approx 303{,}7°$



d) $\alpha \in [0°; 30°[$ $\alpha \in]150°; 210°[$ $\alpha \in]330°; 360°]$



KX **5** **a)** Die Aussage ist wahr, denn:
$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$
$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - 0{,}64^2 \approx 0{,}59$
$\sin\beta = \sqrt{\sin^2\beta} = \sqrt{0{,}59} \approx 0{,}77$
$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{0{,}77}{0{,}64} \approx 1{,}2$

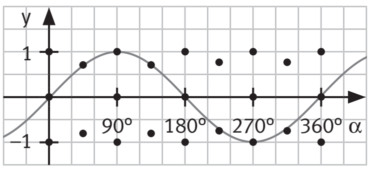
KX **6** **a)** $m = \tan 8{,}5° \approx 0{,}15$ **b)** $m = \tan 45° = 1$ **c)** $m = \tan 60° \approx 1{,}73$

KX **7** **a)** $y = -x - 2{,}5$ $m = -1$ $S(-2{,}5\,|\,0)$
Es gibt keinen Schnittpunkt mit der positiven x-Achse.
b) $y = \frac{1}{4}x + 1$ $m = \frac{1}{4}$ $S(-4\,|\,0)$
Es gibt keinen Schnittpunkt mit der positiven x-Achse.
c) $y = -3x + 6$ $m = -3$ $S(2\,|\,0)$
$\tan\alpha = -3 \Leftrightarrow \alpha \approx -71{,}6°$
d) $y = 3{,}5$ $m = 0$
Die Gerade verläuft parallel zur x-Achse, es gibt keinen Schnittpunkt mit der Achse.

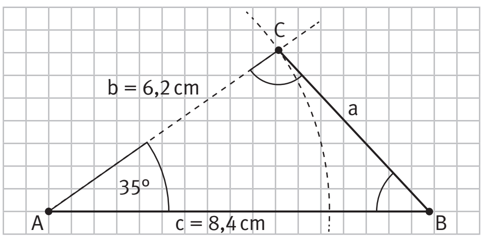
KX **8** **a)** $y = 0{,}5x$ $m = 0{,}5$ $\tan\varepsilon = 0{,}5 \Leftrightarrow \varepsilon \approx 26{,}6°$
b) $y = -3x$ $m = -3$ $\tan\varepsilon = -3 \Leftrightarrow \varepsilon \approx -71{,}6°$
c) $y = -2x$ $m = -2$ $\tan\varepsilon = -2 \Leftrightarrow \varepsilon \approx -63{,}4°$

KX **9** r: $y = -\frac{5}{3}x$ s: $y = 0{,}5x$ t: $y = 0{,}5x - 1{,}5$
Die Geraden s und t haben beide die Steigung $m = 0{,}5$ und verlaufen demnach parallel und haben keinen Schnittpunkt.
Die Winkel zwischen r und s sowie zwischen r und t sind identisch, da s und t parallel sind.
$m_1 = \tan\alpha_1 = -\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \alpha_1 \approx -59{,}0°$
$m_2 = \tan\alpha_2 = 0{,}5 \quad \Rightarrow \alpha_2 \approx 26{,}6°$
$\alpha = \alpha_1 + |\alpha_2| = 26{,}6° + 59{,}0° \approx 85{,}6°$
$\beta = 180° - \alpha = 94{,}4°$

KX **10**



KX **11** **a)**



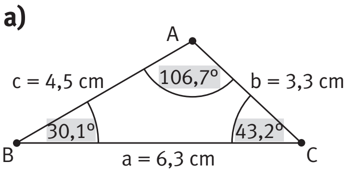
Zeichne $\overline{AB}$ mit $c = 8{,}4$ cm und bei A den Winkel mit dem Maß $\alpha = 35°$.
Der freie Schenkel schneidet den Kreis um A mit $r = b = 6{,}2$ cm in C.

b) Mit dem Kosinussatz ergibt sich:
$a = \sqrt{6{,}2^2 + 8{,}4 - 2 \cdot 6{,}2 \cdot 8{,}4 \cdot \cos 35°}\ \text{cm} \approx 4{,}87\ \text{cm}$

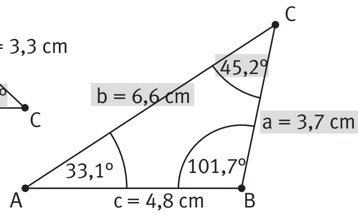
KX **12** **a)** $\alpha = \gamma \approx 53{,}1°$; $\beta \approx 73{,}8°$; $h_b = 5{,}2$ cm
b) $A = \frac{1}{2} \cdot 7{,}8\ \text{cm} \cdot 5{,}2\ \text{cm} = 20{,}28\ \text{cm}^2$
$A = \frac{1}{2} \cdot (6{,}5\ \text{cm})^2 \cdot \sin 73{,}8° \approx 20{,}29\ \text{cm}^2$

KX

13 a)

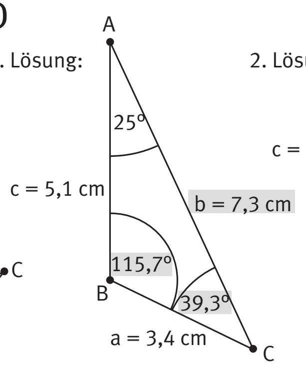


b)

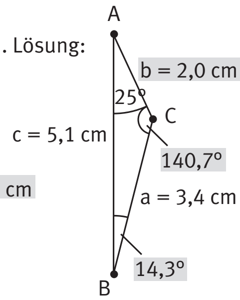


c)

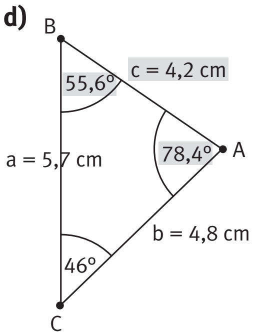
1. Lösung:



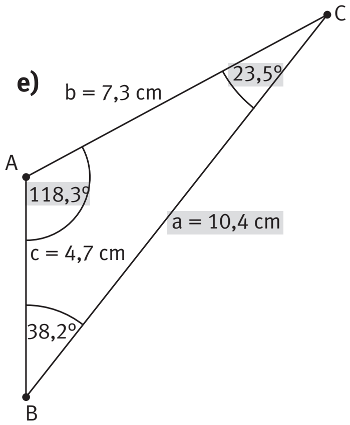
2. Lösung:



d)



e)



KX

14 a) $A \approx 4{,}6\,\text{cm}^2$

b) $A \approx 662{,}7\,\text{mm}^2$

c) $A \approx 16{,}1\,\text{cm}^2$

Bei c) berechnet man zuerst mithilfe des Sinussatzes den Winkel α, anschließend anhand der Winkelsumme im Dreieck den Winkel γ, bevor man dann mit a, b und γ den Flächeninhalt bestimmt.

KX

15 a) Mit rechtwinkligem Dreieck CMF folgt:

$\frac{h}{|\overline{MC}|} = \tan\alpha = \frac{8{,}7\,\text{dm}}{5{,}6\,\text{dm}} \approx 1{,}5$ $\qquad$ $\alpha \approx 56{,}9°$

b) Mit $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAC = 75°$ folgt $\sphericalangle ACB = 30°$, da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt. Da Dreieck ABC ein gleichschenkliges Dreieck ist, folgt, dass die Dreiecke MBC und AMC rechtwinklig und zueinander kongruent sind. Es folgt: $\sphericalangle MCB = \sphericalangle ACM = 15°$.

$\frac{|\overline{MC}|}{|\overline{BC}|} = \cos\sphericalangle MCB$

$|\overline{BC}| = \frac{|\overline{MC}|}{\cos\sphericalangle MCB} = \frac{5{,}6\,\text{dm}}{\cos 15°} \approx 5{,}8\,\text{dm}$ $\qquad$ $|\overline{BF}| = |\overline{AF}| = \sqrt{h^2 + |\overline{BC}|^2} \approx 10{,}5\,\text{dm}$

$|\overline{MF}| = \sqrt{h^2 + |\overline{MC}|^2} \approx 10{,}3\,\text{dm}$

$|\overline{MB}| = |\overline{AM}| = \sqrt{|\overline{BF}|^2 - |\overline{MF}|} \approx 2{,}0\,\text{dm}$ $\qquad$ $|\overline{AB}| = |\overline{MB}| + |\overline{AM}| = 4{,}0\,\text{dm}$

$\frac{|\overline{MF}|}{|\overline{BF}|} = \sin\sphericalangle FBM = \frac{10{,}3\,\text{dm}}{10{,}5\,\text{dm}} \approx 0{,}98$ $\qquad$ $\sphericalangle FBM = \sphericalangle FBA = \sphericalangle BAF \approx 78{,}8°$

$\frac{|\overline{MB}|}{|\overline{BF}|} = \sin\sphericalangle MFB = \frac{2{,}0\,\text{dm}}{10{,}5\,\text{dm}} \approx 0{,}19$ $\qquad$ $\sphericalangle MFB \approx 11{,}0°$

$\sphericalangle AFB = 2 \cdot \sphericalangle MFB = 2 \cdot 11{,}0° = 22{,}0°$

Aufgaben für Lernpartner

K 1/6 **A** Das ist richtig.

K 1/6 **B** Das ist falsch, die Werte von Sinus und Kosinus sind immer kleiner oder gleich 1, der Tangens nimmt auch Werte größer als 1 an.

K 1/6 **C** Das ist richtig.

K 1/6 **D** Das ist falsch, die Kosinuswerte wiederholen sich am Einheitskreis alle 360° (Periode 360°).

K 1/6 **E** Das ist richtig.

K 1/6 **F** Das ist richtig.

K 1/6 **G** Das ist falsch, da der Sinussatz bei drei gegebenen Längenmaßen nur einen Wert zum Verhältnis zweier Innenwinkel, aber keinen exakten Wert für einen Innenwinkel liefert.

K 1/6 **H** Das ist falsch, der Kosinussatz gilt in beliebigen Dreiecken, somit auch in gleichseitigen Dreiecken.

Besondere Winkelmaße und -beziehungen

KX **1**

α	30°	150°	210°	330°
$\sin\alpha$	0,5	0,5	–0,5	–0,5
$\cos\alpha$	0,9	–0,9	–0,9	0,9
$\tan\alpha$	0,6	–0,6	0,6	–0,6

K5 **2** **a)** $\sin(180° - \alpha) = +\sin\alpha$ $\quad\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$

b) $\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$

c) $\cos(180° - \alpha) = -\cos(+\alpha)$ $\quad\cos(180° - \alpha) = +\cos(180° + \alpha)$

d) $\cos 133° = -\cos(146° - 99°)$

e) $\tan(\alpha - 180°) = +\tan\alpha$ $\quad\tan(\alpha - 360°) = +\tan\alpha$ $\quad\tan(\alpha - 2\alpha) = -\tan\alpha$

K5 **3** **a)** $\sin 45° = \cos 45°$ **b)** $\tan 70° > \tan 60°$ **c)** $\sin 20° < \sin 70°$ **d)** $\cos 40° > \cos 60°$

e) $\tan 45° = 1$ **f)** $\cos 0° + \cos 90° = 1$ **g)** $\tan 60° > 1$ **h)** $\sin 90° + \cos 0° = 2$

K1 **4** **a)** Aus $\sin\alpha = \frac{h}{b}$ und $\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{h}{b}$ folgt $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.

b) Aus $\cos\alpha = \frac{\frac{c}{2}}{b} = \frac{c}{2b}$ und $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{c}{2}}{b} = \frac{c}{2b}$ folgt $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.

Sinus, Kosinus und Tangens anwenden

K6 **5** **a)** Rechtwinklige Dreiecke sind: ABM, AMC, ACS, ABS, AMS.

b) $|MS|^2 = |AS|^2 + |AM|^2$ $\quad(|AB|^2 = |BM|^2 + |AM|^2)$

c) Dreieck AMS:

$\sin \sphericalangle ASM = \frac{|AM|}{|SM|}$ $\quad\cos \sphericalangle ASM = \frac{|AS|}{|SM|}$ $\quad\tan \sphericalangle ASM = \frac{|AM|}{|AS|}$

$\sin \sphericalangle SMA = \frac{|AS|}{|SM|}$ $\quad\cos \sphericalangle SMA = \frac{|AM|}{|SM|}$ $\quad\tan \sphericalangle SMA = \frac{|AS|}{|AM|}$

K6 **6** Sei c die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck ABC, dann gilt:

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ $\quad A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ $\quad A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{\tan\alpha}$

K1/6 **7** Antwort C: Die Anwendung des Kosinussatzes im rechtwinkligen Dreieck ergibt den Satz des Pythagoras.
Begründung: Mit c als Hypotenuse und $\gamma = 90°$ folgt:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 90° = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2$
Der Satz des Pythagoras kann als Sonderfall des Kosinussatzes angesehen werden.

KX **8** Zerlegt man ein beliebiges Dreieck entlang einer Höhe in zwei Teildreiecke, so kann man die bekannten Zusammenhänge für $\sin\alpha$, $\sin\beta$ und $\sin\gamma$ erkennen, aus denen der Sinussatz folgt. Dass der Sinussatz auch für stumpfwinklige Dreiecke anwendbar ist, wird in Beispiel II zum Sinussatz (Seite 78/79) unter Verwendung der Supplementbeziehung $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ gezeigt.