Mit Hilfe der Aufwärmrunde soll möglichst präzise ermittelt werden, welche Inhalte bei den Lernenden noch verfügbar sind, wo auf fundiertes Wissen aufgebaut werden kann und was evtl. einer nochmaligen Grundlegung bedarf. Um eine gewisse Trennschärfe in dieser Lernstandserhebung zu erreichen, sind die Aufgaben differenziert gehalten: linke Spalte eher leichte Aufgaben, rechte Spalte dann schwierigere. Zudem wird für jede Aufgabennummer die angestrebte Kompetenz benannt. So kann diese Seite ein wichtiger Anhaltspunkt sein, um Lernende möglichst angemessen zu fördern.
Smileys sollen dazu anregen, eigene Fähigkeiten und Fertigkeiten allmählich selbst einzuschätzen. Eine aussagekräftige Analyse der Lernvoraussetzungen erhält die Lehrkraft, wenn sie die Ergebnisse mit dem Auswertungsbogen erfasst.

Diese Auswertung kann handschriftlich (K 3) bzw. bei click & teach auch in digitaler Form erfolgen.

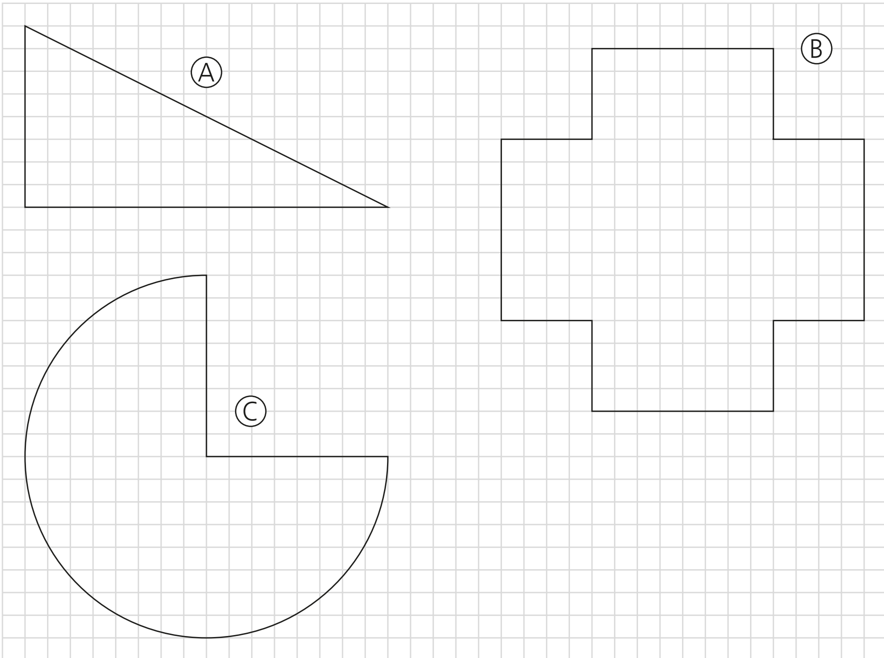
L

1 Im Maßstab zeichnen und rechnen

a) A Figur wurde im Maßstab 1 : 2 verkleinert

B Figur wurde im Maßstab 1 : 3 verkleinert

b) Die Figuren A bis C wurden im Maßstab 4 : 1 vergrößert:



2 Netze Körpern zuordnen

a) Netz A Regelmäßiges Fünfeck-Prisma
Netz B Regelmäßige Sechseck-Pyramide
Netz C Unregelmäßiges Dreiecksprisma

b)

Netz…	Zu einer Pyramide faltbar?	Art der Pyramide
Netz A	ja	Regelmäßige Dreieckspyramide
Netz B	ja	Quadratische Pyramide
Netz C	ja	Rechtecks-Pyramide
Netz D	nein	–
Netz E	ja	Quadratische Pyramide
Netz F	nein	–

3 Volumen und Oberflächeninhalt von Pyramiden berechnen

a) $V_{Py} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_K$

$= \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 30 \cdot 60$

$= 18\,000\ (\text{cm}^3) = 18\ (\text{dm}^3)$

b) $h_a = \sqrt{5^2 + 3^2} \approx 5{,}83\ (\text{cm})$

$O_{Py} = G + M$

$= 6 \cdot 6 + 4 \cdot \frac{6 \cdot 5{,}83}{2}$

$= 36 + 69{,}96 = 105{,}96\ (\text{cm}^2)$

4 Volumen und Oberflächeninhalt von Kegeln berechnen

a) $V_{Ke} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_K$

$= \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h_K$

$= r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s$

$= \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3{,}14 \cdot 6$

$= 226{,}08\ (cm^3)$

b) $s = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8{,}48\ (cm)$

$O_{Ke} = G + M$

$= 6^2 \cdot 3{,}14 + 6 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}48$

$= 113{,}04 + 159{,}76$

$\approx 272{,}80\ (cm^2)$

5 Volumen und Oberflächeninhalt zusammengesetzter Körper berechnen

a) $V_{ges} = 2 \cdot V_{Py} + V_{Wü}$

$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_K + a^3$

$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 + 2^3$

$= 10{,}67 + 8 \approx 18{,}67\ (cm^3)$

b) $O_{ges} = O_{Zy} + O_{Ke} - 2 \cdot G_{Ke}$

$O_{Zy} = 2 \cdot 4^2 \cdot \pi + 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot h$

$= 150{,}72\ (cm^2)$

$s = \sqrt{(3^2 + 2^2)} \approx 3{,}6\ (cm)$

$O_{Ke} = G + M = 2^2 \cdot \pi + 2 \cdot \pi \cdot 3{,}6$

$\approx 35{,}17\ (cm^2)$

$G_{Ke} = 2^2 \cdot \pi = 12{,}56\ (cm^2)$

$O_{gesamt} = 150{,}72 + 35{,}17 - 2 \cdot 12{,}56$

$= 160{,}77\ (cm^2)$

Z

Auswertungsbogen zur Aufwärmrunde „Geometrie“

KX

Einsatzhinweis:

Siehe Erläuterung Lösungsband Seite 5

3 Geometrie

Jedes neue Kapitel beginnt mit einer Bildaufgabe. Bildliche Darstellungen sind eher offen und engen weniger als textliche Vorgaben ein. So bieten sie die Möglichkeit, verschiedene Aspekte zu sehen, herauszugreifen und zu durchdenken. Vorgegebene Fragen bzw. Aufgaben zeigen dazu einen Weg auf. Mögliche eigene Fragestellungen der Lernenden können Inhalte weiter durchdringen und lassen zudem erkennen, inwieweit Lernende mit solch offenen Situationen umzugehen vermögen.

Kompetenzerwartungen und Inhalte

M10 Lernbereich 5: Geometrische Figuren, Körper und Lagebeziehungen

Die Schülerinnen und Schüler …

- erklären die Oberflächeninhaltsberechnung sowie die Volumenberechnung bei Kugeln anschaulich. Sie wenden die entsprechenden Formeln sicher an, auch bei Umkehraufgaben.
- zerlegen und ergänzen bei komplexeren Sachaufgaben sowie berufsorientierenden Aufgaben (Teil-)Körper und berechnen entsprechende Oberflächeninhalte und Volumina. Dabei erstellen sie ggf. notwendige Skizzen und beschriften diese mit gegebenen Werten und gesuchten Größen

M10 Lernbereich 3: Ähnliche Figuren

Die Schülerinnen und Schüler …

- treffen anhand der jeweils vorliegenden Winkel und Streckenverhältnisse begründete Aussagen über die Ähnlichkeit von Figuren.
- verwenden die Begriffe zentrische Streckung, Streckungszentrum und Streckungsfaktor k bei Vergrößerungen und Verkleinerungen geometrischer Figuren fachgerecht, um die Bedeutung einer Maßstabsangabe zu erklären.
- berechnen an ähnlichen Figuren und Körpern fehlende Seitenlängen, Flächeninhalte und Volumina auch in Sachzusammenhängen.
- erklären die Strahlensätze basierend auf den Kenntnissen der zentrischen Streckung und wenden sie zur Berechnung unbekannter Strecken auch in Sachzusammenhängen an.
- erklären Kathetensatz sowie Höhensatz und geben sie in rechtwinkligen Dreiecken mit verschiedenen Seitenvariablen an. Sie berechnen fehlende Streckenlängen auch in Sachzusammenhängen.

Einstieg

- **Die Gruppe hat die Aufgabe, annähernd den Flächeninhalt der Ummantelung und das Volumen von einem Fußball zu bestimmen. Es dürfen dabei aber nur bisher bekannte Vorgehensweisen und Formeln benützt werden.**
- **Welche Strategie würdet ihr vorschlagen? Wertet sie hinsichtlich der Umsetzbarkeit.**
- **Bestimmt nun selbst an einem Fußball den Oberflächeninhalt und das Volumen. Wo ergeben sich Probleme?**

  Es gibt individuelle Einschätzungen.

  Ummantelung:

  a) Man könnte mithilfe des Meterstabs grob den Flächeninhalt der weißen Sechsecke bzw. der schwarzen Fünfecke ermitteln.
  b) Anschließend die Maßzahl mit der Anzahl der vorhandenene Fünf- bzw. Sechsecke multiplizieren.

  Volumen:

  a) Den Fußball in einen Eimer legen, so dass er sich unter dem oberen Rand befindet.
  b) Anschließend den Zwischenraum („Luft") zwischen Eimer-Innenseite und Fußball mit Wasser randvoll auffüllen, den Fußball dabei niederdrücken.
  c) Den Fußball aus dem Eimer nehmen, das im Eimer verbliebene Wasser mit Hilfe eines Meßbechers (mit cm^3-Skala) messen.
  d) Zum Schluss mithilfe des Fußball-Durchmessers dessen Radius ermitteln und in Beziehung zum ermittelten Volumen setzen

  - **Warum ist das Ergebnis nur ein angenäherter Wert?**

  Es sind individuelle Antworten möglich.
  Exemplarisch: Die Messgenauigkeit mit einem Meterstab ist zu ungenau.

Ausblick

Hier werden kurz und kompetenzorientiert die Inhalte des nachfolgenden Kapitels aufgezeigt. Die Lernenden erhalten so bereits einen ersten Überblick über das, was sie auf den nächsten Seiten lernen.

Volumen von Kugeln berechnen

Schrittweise wird die Volumenberechnung von Kugeln erarbeitet:
Die dargestellten, gleich hohen Füllkörper, welche jeweils auch den gleichen Grundflächeninhalt haben, können die Lernenden die Körper rein optisch nach ihrem jeweiligen Rauminhalt ordnen.
Anschließend können die Lernenden die bereits bekannten Volumensformeln für Kegel und Zylinder notieren – mit der Bezugsgröße r als Körperhöhe. Sie erkennen, dass das Volumen der Halbkugel zwischen Kegel und Zylindervolumen zu verorten ist.

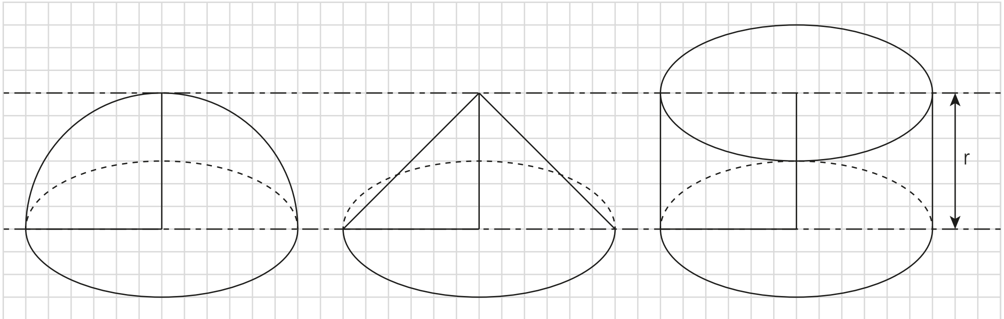
Die Lernenden bestimmen das Volumen der Kugel über den Vergleich mit bekannten Volumina. Die Berechnungsformel wird abgeleitet und in einfachen Aufgaben angewandt.

Durch unterschiedliche, vor allem auch reversible Aufgabenstellungen gewinnen sie zunehmend Sicherheit.

L

1 a) Halbkugel, gerader Kegel, Zylinder

b)



c) Individuelle Schülerantworten möglich, z. B.:

Halbkugel	Kegel	Zylinder
????	$V_{Ke} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_K$ $V_{Ke} = \frac{1}{3} \cdot r^2\, \pi\, h_K$	$V_Z = G \cdot h_k$ $V_Z = r \cdot r \cdot \pi \cdot h_K$

d) Das Volumen einer „ganzen" Kugel ist doppelt so groß wie das Volumen der Halbkugel. Dieses liegt „zahlenmäßig" irgendwo zwischen Kegel- und Zylinder-Volumen.
In seine Berechnung fließen der quadrierte Grundflächenradius (= r^2) , die Kreiszahl π und die „Körperhöhe" (= r) ein.
Ordnung nach der Größe

$$\underbrace{\text{Kegelvolumen}}_{\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot r} < \underbrace{\text{Halbkugelvolumen}}_{\frac{?}{3} \cdot r^3 \cdot \pi} < \underbrace{\text{Zylindervolumen}}_{r^2 \cdot \pi \cdot r}$$

$$\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot r \;\downarrow\; \frac{1}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \qquad \frac{?}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \;\downarrow\; \frac{?}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \qquad r^2 \cdot \pi \cdot r \;\downarrow\; r^3 \cdot \pi$$

2 a) Zylinderförmiges Glas: 3-mal kegelförmiges Glas
Halbkugelförmiges Glas: 2-mal kegelförmiges Glas
- Das konkrete Umfüllen ergibt sinnigerweise, dass das Halbkugelvolumen doppelt so groß ist wie das Kegelvolumen.
- Folglich ist das Volumen einer ganzen Kugel viermal so groß wie das Kegelvolumen. Demnach ist der gesuchte Bruchfaktor $4 \cdot \frac{1}{3}$, also $\frac{4}{3}$!

b) $V_{Kugel} = 2 \cdot V_{Halbkugel} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

3 a) $V_{Ku} = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}25^3 \approx 1\,595{,}45\ (cm^3)$
b) $V_{Ku} = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}55^3 \approx 15{,}59\ (cm^3)$
c) $V_{Ku} = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 9^3 = 3\,052{,}08\ (mm^3)$
d) $V_{Ku} = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}3^3 \approx 332{,}87\ (dm^3)$
e) $V_{Ku} = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}8^3 \approx 2{,}14\ (m^3)$
f) $V_{Ku} = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 12{,}5^3 \approx 8\,177{,}08\ (cm^3)$
g) $V_{Ku} = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}14^3 \approx 129{,}62\ (cm^3)$
h) $V_{Ku} = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 12{,}5^3 \approx 8{,}18\ (m^3)$

4 a) Erklärung (Beispiel):

Yusuf löst die Formel zur Volumenberechnung nach dem gesuchten Radius auf. Dazu teilt er das gegebene Volumen zunächst durch $\frac{4}{3}$, anschließend durch π (= 3,14) und zieht letztendlich vom erhaltenen Wert die dritte Wurzel $\sqrt[3]{\ldots}$.

Vervollständigte Rechnung:

Geg.: $V_{Ku} = 381{,}51\ cm^3$ Ges.: r

$$\begin{aligned} V_{Ku} &= \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\ 381{,}51 &= \tfrac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3 &&| : \tfrac{4}{3} \\ 286{,}1325 &= 3{,}14 \cdot r^3 &&| : 3{,}14 \\ 91{,}125 &= r^3 &&| \sqrt[3]{\ } \\ 4{,}5 &= r \end{aligned}$$

b) Ⓐ Geg.: $V_{Ku} = 69{,}4\ cm^3$ Ges.: r

$$\begin{aligned} V_{Ku} &= \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\ 69{,}4 &= \tfrac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3 &&| : \tfrac{4}{3} \\ 52{,}05 &= 3{,}14 \cdot r^3 &&| : 3{,}14 \\ 16{,}58 &= r^3 &&| \sqrt[3]{\ } \\ 2{,}55\ (cm) &\approx r \end{aligned}$$

Ⓑ Geg.: $V_{Ku} = 1{,}44\ m^3$ Ges.: r

$$\begin{aligned} V_{Ku} &= \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\ 1{,}44 &= \tfrac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3 &&| : \tfrac{4}{3} \\ 1{,}08 &= 3{,}14 \cdot r^3 &&| : 3{,}14 \\ 0{,}34 &= r^3 &&| \sqrt[3]{\ } \\ 0{,}70\ (m) &\approx r \end{aligned}$$

Ⓒ Geg.: $V_{Ku} = 195\,333\ mm^3$ Ges.: r

$$\begin{aligned} V_{Ku} &= \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\ 195\,333 &= \tfrac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3 &&| : \tfrac{4}{3} \\ 146\,499 &= 3{,}14 \cdot r^3 &&| : 3{,}14 \\ 46\,655{,}97 &= r^3 &&| \sqrt[3]{\ } \\ 36{,}0\ (mm) &\approx r \end{aligned}$$

Ⓓ Geg.: $V_{Ku} = 54\ dm^3$ Ges.: r

$$\begin{aligned} V_{Ku} &= \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\ 54 &= \tfrac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3 &&| : \tfrac{4}{3} \\ 40{,}5 &= 3{,}14 \cdot r^3 &&| : 3{,}14 \\ 12{,}90 &= r^3 &&| \sqrt[3]{\ } \\ 2{,}35\ (dm) &\approx r \end{aligned}$$

Ⓔ Geg.: $V_{Ku} = 50{,}94\ cm^3$ Ges.: r

$$\begin{aligned} V_{Ku} &= \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\ 50{,}94 &= \tfrac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3 &&| : \tfrac{4}{3} \\ 38{,}21 &= 3{,}14 \cdot r^3 &&| : 3{,}14 \\ 12{,}17 &= r^3 &&| \sqrt[3]{\ } \\ 2{,}30\ (cm) &\approx r \end{aligned}$$

Ⓕ Geg.: $V_{Ku} = 0{,}5\ cm^3$ Ges.: r

$$\begin{aligned} V_{Ku} &= \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\ 0{,}5 &= \tfrac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3 &&| : \tfrac{4}{3} \\ 0{,}38 &= 3{,}14 \cdot r^3 &&| : 3{,}14 \\ 0{,}12 &= r^3 &&| \sqrt[3]{\ } \\ 0{,}49\ (cm) &\approx r \end{aligned}$$

5

	a)	b)	c)	d)
Radius	16,1 mm	1,8 cm	≈ 2,77 dm	5,7 mm
Durchmesser	32,2 mm	3,6 cm	≈ 5,54 dm	11,4 mm
Volumen	≈ 17 472,14 mm^3	≈ 24,42 cm^3	89,4 dm^3	≈ 775,34 mm^3

6 $V_{\text{große Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 30^3 = 113\,040\ (cm^3)$

$V_{\underline{\text{eine}}\text{ kleinere Kugel}} = 113\,040 : 50 = 2\,260{,}8\ (cm^3)$

Radius der kleineren Kugel:

$$\begin{aligned} V_{Ku} &= \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\ 2\,260{,}8 &= \tfrac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3 &&| : \tfrac{4}{3} \\ 1\,695{,}6 &= 3{,}14 \cdot r^3 &&| : 3{,}14 \\ 540 &= r^3 &&| \sqrt[3]{\ } \\ 8{,}14\ (cm) &\approx r \end{aligned}$$

$d_{\text{kleinere Kugel}} = 2 \cdot r \approx 16{,}28\ (cm)$

7 Rechenweg: Ermittlung des Volumens der kleinsten und größten Wettkampfkugel mit Hilfe der Dichte $7{,}68\ \frac{g}{cm^3}$).

3-kg-Kugel: $V_{3\,kg} = 3\,000 : 7{,}68 = 390{,}625\ (cm^3)$

$$V_{3\,kg} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$
$$390{,}625 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3 \quad |:\frac{4}{3}$$
$$292{,}97 = 3{,}14 \cdot r^3 \quad |:3{,}14$$
$$93{,}30 = r^3 \quad |\sqrt[3]{\ }$$
$$4{,}53\ (cm) \approx r$$
$$d_{3\,kg} \approx 9\ cm$$

6-kg-Kugel: $V_{6\,kg} = 6\,000 : 7{,}68 = 781{,}25\ (cm^3)$

$$V_{6\,kg} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$
$$781{,}25 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3 \quad |:\frac{4}{3}$$
$$585{,}94 = 3{,}14 \cdot r^3 \quad |:3{,}14$$
$$186{,}60 = r^3 \quad |\sqrt[3]{\ }$$
$$5{,}71\ (cm) \approx r$$
$$d_{3\,kg} \approx 11\ cm$$

8 Rechenweg: Das jeweilige Kellen-Volumen wird verdoppelt und dann mit der bekannten Formel der Radius und schließlich der Durchmesser ermittelt:

Schöpfkellen–Volumen	Radius	Durchmesser
$V = \frac{1}{4}\ l = 0{,}25\ dm^3$	$r \approx 0{,}3908\ dm$	$d \approx 0{,}781\ dm \approx 7{,}81\ cm$
$V = \frac{1}{2}\ l = 0{,}5\ dm^3$	$r \approx 0{,}4924\ dm$	$d \approx 0{,}9849\ dm \approx 9{,}85\ cm$
$V = \frac{3}{4}\ l = 0{,}75\ dm^3$	$r \approx 0{,}5637\ dm$	$d \approx 1{,}127\ dm \approx 11{,}27\ cm$

9 Eine Würfelkante ist so lang wie der doppelte Radius, also 17 cm.

$$V_{\text{Zwischenraum Kugel – Schachtel}} = V_{\text{Würfel}} - V_{\text{Kugel}} = (2 \cdot r)^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$
$$= (2 \cdot 8{,}5)^3 - \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (8{,}5)^3$$
$$\approx 2\,341{,}86\ (cm^3)$$

10 a) $V_{Erde} = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 12\,756^3 \approx 1{,}086 \cdot 10^{12}\ (km^3)$

$V_{Mond} = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 3\,476^3 \approx 2{,}198 \cdot 10^{10}\ (km^3)$

$V_{Sonne} = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 1\,392\,000^3 \approx 1{,}41 \cdot 10^{18}\ (km^3)$

$V_{Sonne} : V_{Erde} = 1{,}41 \cdot 10^{18} : 1{,}086 \cdot 10^{12} \approx 1{,}3 \cdot 10^6$

Das Volumen der Sonne ist ca. 1,3 Millionen mal größer als das der Erde.

$V_{Erde} : V_{Mond} = 1{,}086 \cdot 10^{12} : 2{,}198 \cdot 10^{10} \approx 49$

Das Volumen der Erde ist ca. 49-mal größer als das des Mondes.

b) $V_{Jupiter} = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 143\,600^3 \approx 1{,}550 \cdot 10^{15}\ (km^3)$

$V_{Merkur} = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 4\,800^3 \approx 5{,}78 \cdot 10^{10}\ (km^3)$

$V_{Jupiter} : V_{Merkur} = 1{,}550 \cdot 10^{15} : 5{,}78 \cdot 10^{10} \approx 26\,817$

Der Jupiter ist ca. 26 817-mal größer als der Merkur.

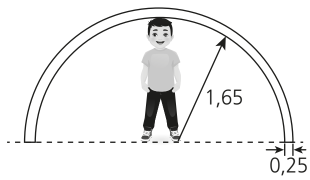
11

Melonen-Ausformung	Volumen	Gewicht
„ganz“: $r = 21$ cm	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 21^3$ $= 38\,772{,}72\ (\text{cm}^3)$	$m = V_{ganz} \cdot \rho = 38\,772{,}72 \cdot 1{,}1$ $\approx 42{,}65\ (\text{kg})$
„halbiert“: $r = 17$ cm	$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 17^3$ $\approx 10\,284{,}55\ (\text{cm}^3)$	$m = V_{halbiert} \cdot \rho = 10\,284{,}55 \cdot 1{,}1$ $\approx 11{,}31\ (\text{kg})$
„geviertelt“: $r = 19$ cm	$V = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 19^3$ $\approx 7\,179{,}09\ (\text{cm}^3)$	$m = V_{geviertelt} \cdot \rho = 7\,179{,}09 \cdot 1{,}1$ $\approx 7{,}90\ (\text{kg})$

12 Anzahl der Eiskugeln = $\frac{V_{Eisbehälter}}{V_{Eiskugel}}$

$\frac{2\,500\ \text{cm}^3}{\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot (4\ \text{cm})^3} = \frac{2\,500\ \text{cm}^3}{33{,}493333} \approx 74{,}64 \approx 75$ (Kugeln)

13 Jeremys Körpergröße entspricht dem Innenradius des Kinderiglus.
Das Igluvolumen entspricht einer halben Hohlkugel mit
$r_{innen} = 1{,}65$ m und
$r_{außen} = (1{,}65 + 0{,}25) = 1{,}9$ m.



Das Igluvolumen entspricht dem verbauten Schneevolumen:
$V_{Schnee} = V_{Iglu} = V_{außen} - V_{innen} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (r_a - r_i)^3 = \frac{2}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}90^3 - 1{,}65)^3 \approx 4{,}95\ (\text{m}^3)$

14 a) $V_{Wasser} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 36^3 = 97\,666{,}56\ (\text{cm}^3) \approx 97{,}7\ (\text{dm}^3) \approx 97{,}7\ (\text{l})$

b) Individuelle Schülerantworten

Gewicht ohne Wasser = $V_{halbe\ Hohlkugel} \cdot$ Dichte

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (46 - 36)^3 \cdot 8{,}73 = 926\,166{,}86\ (\text{g}) \approx 926{,}2\ (\text{kg})$

Gewicht mit Wasser (1 l Wasser wiegt etwa 1 kg): $926{,}2 + 97{,}7 \approx 1\,023{,}9$ (kg)

15 Individuelle Schülerantworten, z. B.:

- Wie verändert sich das Kugelvolumen in den Situationen A (= 16 kleinere Kugeln) bis C (64 ganz kleine Kugeln)?
- Wird der Zwischenraum zwischen Würfelbox bei B und C im Vergleich zu A größer oder kleiner?
- …

Erklärung:

- Das Würfelvolumen ist in den Fällen A, B und C jeweils gleich:
  $V_{Würfel} = a^3 = (16\ \text{cm})^3 = 4\,096\ \text{cm}^3$
- Kugelvolumen bei A: $V_{1\ Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 8^3 = 2\,143{,}573\ \text{cm}^3$
- Kugelvolumen bei B: $V_{8\ Kugeln} = 8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = 2\,143{,}573\ \text{cm}^3$
- Kugelvolumen bei C: $V_{64\ Kugeln} = 64 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = 2\,143{,}573\ \text{cm}^3$
- Ergebnis: das Volumen der Kugeln bleibt in allen drei Fällen gleich!

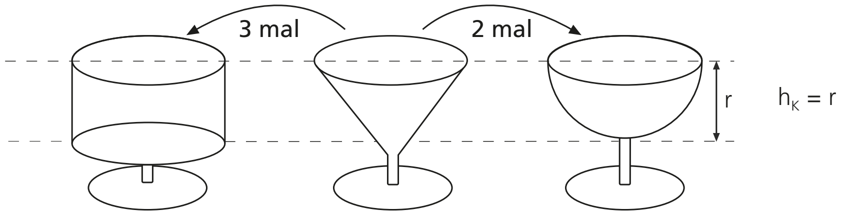
Z

K XX

Volumen der Kugel

Einsatzhinweis: Die Abbildungen der Kopiervorlage entsprechen denen im Schülerbuch.

Einsatzmöglichkeit:
- Strukturierte Vorlage für die Erarbeitung der Formel
- Ergebnissichernder Eintrag ins (Regel-) Heft



$V_{Zylinder} = 3 \cdot V_{Kegel}$ $\quad$ $V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot 3{,}14 \cdot h_K$ $\quad$ $V_{Halbkugel} = 2 \cdot V_{Kegel}$

$V_{Zylinder} = 3{,}14 \cdot r^3 \quad \Leftarrow \quad V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{V_{Halbkugel} = \frac{2}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3}$

$V_{Kugel} = 2 \cdot V_{Halbkugel}$

$\boxed{V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3}$

L

1 Erklärung:

- Eine Kugel lässt sich in viele kleine Pyramiden zerlegen.
- Die Pyramidenspitze zeigt zum Kugelmittelpunkt.
- Für jede Pyramide gilt: $V_{Py} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_K$
- Alle Pyramiden zusammen ergeben ungefähr das Volumen der Kugel.
- Wenn man die Grundflächen der Pyramiden immer kleiner werden lässt, erhält man zum Schluss den Kugel-Oberflächeninhalt.
- Anstelle der Pyramidenhöhe h_K kann der Kugelradius eingesetzt werden.
- In der an der Tafel notierten Formel können die unendlich vielen Pyramidengrundflächen durch die Oberfläche "O_{Ku}" ersetzt werden:

$$V_{Ku} = \frac{1}{3} \cdot (G + G + G + \ldots + G) \cdot h_K \qquad (h_K = r)$$
$$V_{Ku} = \frac{1}{3} \cdot O_{Ku} \cdot r$$
$$\Rightarrow O_{Ku} = \boxed{}$$

- Die jetzt entstandene Formel $V_{Ku} = \frac{1}{3} \cdot O_{Ku} \cdot r$ kann nach O aufgelöst werden:

$$V_{Ku} = \frac{1}{3} \cdot O_{Ku} \cdot r \qquad | \cdot 3 \quad : r$$
$$\frac{3 \cdot V_{Ku}}{r} = O_{Ku}$$
$$\frac{3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}{r} = O_{Ku}$$
$$O_{Ku} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = d^2 \cdot \pi$$

2 a) $O_{Ku} = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}2^2 \approx 18{,}09$ (m²) b) $O_{Ku} = 3{,}14 \cdot 3{,}8^2 \approx 45{,}34$ (mm²)
c) $O_{Ku} = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}8^2 \approx 8{,}04$ (cm²) d) $O_{Ku} = 3{,}14 \cdot 60^2 \approx 11\,304$ (mm³)

3 a) Lea möchte den Kugelradius ermitteln. Dazu setzt sie den gegebenen Wert (= 254,34 cm²) in die Formel ein. Es entsteht eine Gleichung mit der Unbekannten „r".
Lea teilt zunächst durch 4, anschließend durch π und zieht letztendlich die Quadratwurzel.
Sie erhält $r = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5$ cm.
Vervollständigte Rechnung:

Geg.: $O_{Ku} = 254{,}34 \text{ cm}^2$ Ges.: r
$$O_{Ku} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$
$$254{,}34 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \qquad |:4$$
$$63{,}585 = 3{,}14 \cdot r^2 \qquad |:3{,}14$$
$$20{,}25 = r^2 \qquad |\sqrt{\ }$$
$$4{,}5 \text{ cm} = r$$

b) Ⓐ Geg.: $O_{Ku} = 156 \text{ m}^2$ Ges.: r
$$O_{Ku} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$
$$156 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \qquad |:4$$
$$39 = 3{,}14 \cdot r^2 \qquad |:3{,}14$$
$$12{,}42 = r^2 \qquad |\sqrt{\ }$$
$$3{,}52 \text{ (cm)} \approx r$$

Ⓑ Geg.: $O_{Ku} = 1\,256 \text{ m}^2$ Ges.: r
$$O_{Ku} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$
$$1\,256 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \qquad |:4$$
$$314 = 3{,}14 \cdot r^2 \qquad |:3{,}14$$
$$100 = r^2 \qquad |\sqrt{\ }$$
$$10 \text{ (cm)} = r$$

Ⓒ Geg.: $O_{Ku} = 1\,600 \text{ mm}^2$ Ges.: r
$$O_{Ku} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$
$$1\,600 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \qquad |:4$$
$$400 = 3{,}14 \cdot r^2 \qquad |:3{,}14$$
$$127{,}4 = r^2 \qquad |\sqrt{\ }$$
$$11{,}29 \text{ (mm)} \approx r$$

Ⓓ Geg.: $O_{Ku} = 50{,}24 \text{ m}^2$ Ges.: r
$$O_{Ku} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$
$$50{,}24 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \qquad |:4$$
$$12{,}56 = 3{,}14 \cdot r^2 \qquad |:3{,}14$$
$$4 = r^2 \qquad |\sqrt{\ }$$
$$2 \text{ (cm)} = r$$

Die Berechnungsformel der Oberfläche einer Kugel wird hergeleitet. In variablen Aufgaben zur Berechnung von Oberflächeninhalt, Durchmesser oder Radius einer Kugel wird sie angewendet.

Ⓔ Geg.: $O_{Ku} = 113{,}04\ mm^2$ Ges.: r

$$O_{Ku} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$
$$113{,}04 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \quad |:4$$
$$28{,}26 = 3{,}14 \cdot r^2 \quad |:3{,}14$$
$$9 = r^2 \quad |\sqrt{}$$
$$3\ (mm) = r$$

Ⓕ Geg.: $O_{Ku} = 0{,}75\ m^2$ Ges.: r

$$O_{Ku} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$
$$0{,}75 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \quad |:4$$
$$0{,}19 = 3{,}14 \cdot r^2 \quad |:3{,}14$$
$$0{,}06 = r^2 \quad |\sqrt{}$$
$$0{,}24\ (m) \approx r$$

4

	a)	b)	c)	d)
Radius	0,14 m	2,45 cm	1,95 dm	≈ 0,65 m
Durchmesser	0,28 m	4,9 cm	3,9 dm	≈ 1,30 m
Oberfläche	$\approx 0{,}25\ m^2$	$75{,}3914\ cm^2$	$\approx 47{,}76\ dm^2$	$5{,}36\ m^2$

5 a) $O_{Fußball} = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10{,}8^2 \approx 1\,465\ (cm^2)$ b) $O_{Basketball} = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 12^2 = 1\,808{,}64\ (cm^2)$

c) $O_{Tennisball} = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}2^2 \approx 128{,}61\ (cm^2)$

6 Radius des Kreises: $r = \sqrt{\frac{63{,}585\ cm^2}{\pi}} \approx 4{,}5\ (cm)$

$O_{Kugel} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}5^2 = 254{,}34\ (cm^2)$

7
$$O_{Ku} = d^2_{außen} \cdot \pi$$
$$4\,245 = d^2_{außen} \cdot 3{,}14 \quad |:3{,}14$$
$$1\,392 = d^2_{außen} \quad |\sqrt{}$$
$$36{,}77\ (m) = d_{außen}$$
$$d_{innen} = d_{außen} - 2 \cdot 0{,}2\ m \approx 36{,}37\ m$$

8 a)

Kugel Nr.	1	2
Radius	7,5 cm	15 cm
Oberfläche	$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}5^2$ $= 706{,}5\ cm^2$	$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 15^2$ $= 2\,826\ cm^2$

⇒ Die Oberflächeninhalte verhalten sich nicht im Verhältnis 1 : 2, sondern im Verhältnis 1 : 4

$\frac{706{,}5}{2\,826} = \frac{1}{4}$

b)

Kugelradius wird …	Ⓐ halbiert	Ⓑ verdreifacht	Ⓒ verzehnfacht	Ⓓ geviertelt
Oberflächen-inhalt wird …	Ⓐ geviertelt	Ⓑ verneunfacht	Ⓒ verhundertfacht	Ⓓ gesechzehntelt

9 a) Ermittlung Erdradius aus Äquator: $r = \frac{40\,095}{2 \cdot \pi} \approx 6\,384{,}55\ km$

Erdoberfläche: $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot (6\,384{,}55\ km)^2$

$= 511\,976\,732{,}5\ km^2 \approx 5{,}12 \cdot 10^8\ km^2$

b) Flächeninhalt Kartensegment = $5{,}12 \cdot 10^8\ km^2 : 8 = 63\,997\,091{,}56\ km^2 \approx 6{,}4 \cdot 10^7\ km^2$

10 a) $O_{Orange} = \pi \cdot d^2 = 3{,}14 \cdot 12^2 = 452{,}16\ cm^2$

b) Flächeninhalt Einwickelpapier = $1{,}35 \cdot 452{,}16\ cm^2 \approx 610{,}42\ cm^2$

Seitenlänge des Quadrates $a = \sqrt{(610{,}42\ cm^2)} \approx 24{,}70\ cm \approx 25\ cm$

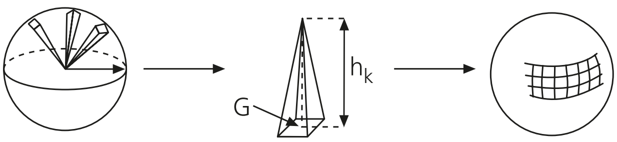
Kirche	Kloster Ettal	St. Blasien	St. Pauls Cathedral
Radius der Innenkuppel (m)	12,5	18	24
Kuppel-Innenfläche (m^2)	$4 \cdot \pi \cdot r^2 = 1\,962{,}5$	4 069,44	7 234,56
Prozentualer Unterschied im Vergleich (Bezugsgröße Kloster Ettal)	100%	208,73% ⇒ mehr als doppelt so groß ⇒ Flächeninhalt um 2 106,94 m^2 größer	368,64% ⇒ dreieinhalbmal so groß wie Ettal ⇒ Flächeninhalt um 5 272,06 m^2 größer

Z

Oberfläche der Kugel

K XX

Einsatzhinweis: Die Abbildungen der Kopiervorlage entsprechen denen im Schülerbuch.



$V_{Kugel} = \frac{1}{3} \cdot (G + G + G + \ldots + G) \cdot h_k$

$h_k = r : V_{Kugel} = \frac{1}{3} \cdot \text{Oberfläche}_{Kugel} \cdot r$

$\Rightarrow \text{Oberfläche}_{Kugel} = V_{Kugel} : \left(\frac{1}{3} \cdot r\right) = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3 \cdot 3 : r$

$\text{Oberfläche}_{Kugel} = 4 \cdot 3{,}14 \cdot r^2$

Oberfläche einer Kugel mit dem Durchmesser d:

$r = \frac{d}{2} : \text{Oberfläche}_{Kugel} = 4 \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{d^2}{4}$

$\text{Oberfläche}_{Kugel} = 3{,}14 \cdot d^2$

Die Lernenden berechnen Volumen und Oberflächen von Kugeln und anderen Körpern in verschiedenen Sachzusammenhängen

L

1 $\text{Volumen}_{\text{Knetmassenblock}} = a \cdot b \cdot c = 130 \cdot 55 \cdot 40 = 286\,000\ (\text{mm}^3) = 286\ (\text{cm}^3)$

Volumen einer Halbkugel $= 0{,}5 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 0{,}5 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5^3 = 7{,}065\ (\text{cm}^3)$

Anzahl möglicher Halbkugeln: $286 : 7{,}065 \approx 40$ Halbkugeln

Anzahl ganzer Kugeln: $40 : 2 = 20$

2 Das verdrängte Wasservolumen hat die Form eines Zylinders (mit $r = 3$ cm und $h_k = 0{,}5$ cm).

^ Berechnung verdrängtes Wasservolumen:

$V = G \cdot h_k = r^2 \cdot \pi \cdot h_k = 3^2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5 = 14{,}13\ (\text{cm}^3)$

Aus dem ermittelten Zahlenwert wird der Kugeldurchmesser – durch Formelumstellung – berechnet:

$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$\rightarrow\ 14{,}13\ \text{cm}^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$\rightarrow\ r = \sqrt[3]{\frac{14{,}13 \cdot 3}{4 \cdot 3{,}14}} = 1{,}5\ (\text{cm})$

$\rightarrow\ d = 3$ cm

3 a) Radius des Wetterballons:

$O_{\text{Wetterballon}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$15\,386 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \quad | : 4 \quad : 3{,}14$

$1\,225 = r^2$

$r = 35\ (\text{cm})$

Volumen des Wetterballons:

$V_{\text{Wetterballon}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 35^3 = 179\,503{,}3\ (\text{cm}^3) \approx 179{,}50\ (\text{dm}^3)$

b) Volumen in 1 km Höhe:

$V_{\text{neu}} = 179{,}50\ \text{dm}^3 \cdot 1{,}25 = 224{,}375\ \text{dm}^3 = 224\,375\ \text{cm}^3$

Radius in 1 km Höhe:

$r_{\text{neu}} = \sqrt[3]{\frac{224\,375 \cdot 3}{4 \cdot 3{,}14}} \approx 37{,}70$ cm

$O_{\text{neu}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 37{,}70^2 \approx 17\,851{,}40\ \text{cm}^2$

4 In der Tabelle sind jeweils die gerundeten Ergebnisse angegeben.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
r	5,7 cm	≈ 2,1 cm	4,25 cm	1,20 cm	4,1 cm	21,5 m	1,03 dm
V	775,3 cm^3	39,5 cm^3	321,9 cm^3	7,23 cm^3	288,55 cm^3	5 805,86 cm^3	4,6 l = 4,6 dm^3
O	408,1 cm^2	55,39 cm^2	226,87 cm^2	18,3 cm^2	212,5 cm^2	41 608,66 cm^2	13,32 dm^2

5 Rechenweg:

Volumen Würfel : $V = 20 \cdot 20 \cdot 20 = 8\,000\ (\text{cm}^3)$

Volumen Kugel: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 \approx 4\,186{,}7\ (\text{cm}^3)$

Volumen Wasser $= 20 \cdot 20 \cdot 10 = 4\,000\ (\text{cm}^3)$

$\text{Volumen}_{\text{überlaufendes Wasser}} = (V_{\text{Kugel}} + V_{\text{Wasser}}) - V_{\text{Würfel}}$

$= (4\,000 + 4\,186{,}7) - 8\,000$

$= 187{,}6\ (\text{cm}^3)$

6 a) $\text{Oberfläche}_{\text{Discokugel}}$: $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 20^2 = 5\,024\ (cm^2)$

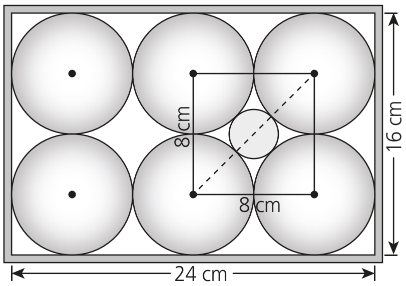
$\text{Anzahl}_{\text{Spiegelmosaikstücke}}$: $5\,024 : 1 = 5\,024$

b) $\text{Volumen}_{\text{Discokugel}}$: $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 20^3 \approx 33\,493{,}3\ (cm^3)$

7 a) Durchmesser einer Boccia-Kugel: 24 : 3 Kugeln = 8 (cm)

b) Ermittlung mit Satz des Pythagoras: (siehe Grafik unten)

- Die Mittelpunkte von 4 Boccia-Kugeln bilden in der Draufsicht ein Quadrat.
- Die Seitenlänge des Quadrates ist $2 \cdot r$!
- Die grün eingezeichnete Diagonale d dieses Quadrates besteht aus $r + r + x$, wobei x der Durchmesser der Holzkugel ist!
- Die Diagonale d lässt sich mit Hilfe des Pythagoras-Satzes berechnen:
  $d = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11{,}31$ cm.



- Ermittlung des Holzkugel-Durchmessers:
  $d = 2 \cdot r + x$
  $11{,}31 = 2 \cdot 4 + x \quad | -8$
  $3{,}31\ (cm) = x$
  Der Durchmesser einer Holzkugel beträgt 3,31 cm, folglich beträgt der Radius gerundet 1,66 cm.

c) $\text{Gesamtgewicht} = \text{Gewicht}_{6\ \text{Stahlkugeln}} + \text{Gewicht}_{2\ \text{Buchenholzkugeln}} + \text{Gewicht}_{\text{Kasten}}$

$= 6 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot 7{,}4 \quad + 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot 0{,}7 \quad + 2\,000$

$= \quad 11\,896{,}832 \quad + \quad 26{,}81 \quad + 2\,000$

$\approx \quad 13\,923{,}64\ (g)$

8 a) Flächeninhalt einzelne Lederflicken

- Weiße Sechsecke (Kantenlänge a = 4 cm)
  $A_{\text{Sechseck}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4^2 \approx 41{,}57\ (cm^2)$
- Schwarze Fünfecke (Kantenlänge a = 4 cm)
  $A_{\text{Fünfeck}} = \frac{\sqrt{25 + 10 \cdot \sqrt{5}}}{4 \cdot a^2} = \frac{\sqrt{25 + 10 \cdot \sqrt{5}}}{4 \cdot 4^2} \approx 27{,}53\ (cm^2)$

b) $\text{Oberflächeninhalt} = 20 \cdot A_{\text{Sechseck}} + 12 \cdot A_{\text{Fünfeck}} = 19 \cdot 41{,}57 + 12 \cdot 27{,}53 \approx 1\,161{,}76\ (cm^2)$

Durchmesser: $d = \sqrt{\frac{O}{\pi}} = \sqrt{\frac{1\,161{,}76}{3{,}14}} \approx 19{,}2\ (cm)$

Volumen: $V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 19{,}2^3 \approx 3\,704{,}09\ (cm^3)$

9 a) $\text{Gewicht}_{\text{Barren}} = V \cdot \rho = 45{,}5 \cdot 22{,}5 \cdot 17 \cdot 19{,}3 = 335\,892{,}375\ (g) \approx 336\ (kg)$

b) Durchmesser einer Goldkugel mit gleichem Volumen:

$V_{\text{Barren}} = V_{\text{n Kugel}}$

$17\,403{,}75\ cm^3 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3$

$\Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{17\,403{,}75 \cdot 6}{\pi}} \approx 32{,}16\ (cm)$

10 a) Individuelle Schätzungen der Schüler

Berechnung: $\text{Gewicht} = V \cdot \rho = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3 \cdot 2{,}4 = 157\,000\ (g) = 157\ (kg)$

b) Individuelle Schülerschätzungen und Lösungen

11 a) Volumen eines Tanks: $228\,000\ m^3 : 4 = 57\,000\ m^3$

Gewicht des Gases: $V \cdot \rho = 57\,000\ m^3 \cdot 0{,}51 = 29\,070$ (t)

b) Durchmesser Innenraum:

$d_{Gas} = \sqrt[3]{\frac{57\,000 \cdot 6}{\pi}} = 47{,}7564$ (m)

$d_{Gastank} = d_{Gas} + 2 \cdot 0{,}15\ m + 2 \cdot 0{,}55\ m = 49{,}15\ m \approx 49$ (m)

12 a) $d_{außen} = d_{innen} + 2 \cdot \text{Wandstärke} = 2 \cdot 15{,}5 + 2 \cdot 0{,}03 = 31{,}06$ (m)

$O = \pi \cdot (d_{außen})^2 = 3{,}14 \cdot 31{,}06^2 \approx 3\,029{,}23\ (m^2)$

b) $V_{Gastank} = V_{außen} - V_{innen} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (r_a^3 - r_i^3) = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (15{,}53^3 - 15{,}5^3)$

$\approx 90{,}70\ (m^3)$

Gewicht Stahlschrott: $V_{Gastank} \cdot 7{,}4 \approx 671$ (t)

13 Volumina:

Ⓐ $V = V_{Zylinder} - V_{Halbkugel} + V_{Kegel}$

$= r^2 \cdot \pi \cdot h_K - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_K$

$= 1{,}5^2 \cdot 3{,}14 \cdot 8 - \frac{2}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5^3 + \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5^2 \cdot 4$

$= 56{,}52 - 7{,}06 + 9{,}42$

$= 58{,}88\ (cm^3)$

Ⓑ $V = V_{Würfel} - 2 \cdot V_{Halbkugel}$

$= a^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$= 15^3 - \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5^3$

$= 3\,375 - 64{,}417 \approx 3\,310{,}58\ (cm^3)$

Ⓒ $V = V_{Halbkugel\ groß} + 2 \cdot V_{Halbkugel\ klein}$

$= \frac{2}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 8^3 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 2^3$

$\approx 1\,071{,}79 + 33{,}49$

$= 1\,105{,}28\ (cm^3)$

Oberflächeninhalte:

Ⓐ $O = O_{Halbkugel} + Mantel_{Zylinder} + Mantel_{Kegel}$

Mantellinie s über Pythagoras:

$s = \sqrt{4^2 + 1{,}5^2} \approx 4{,}27$ cm

$O = \frac{\pi \cdot d^2}{2} + d \cdot \pi \cdot 8 + r \cdot \pi \cdot s$

$= 14{,}13 + 75{,}36 + 20{,}11 \approx 109{,}6\ (cm^2)$

Ⓑ $O = O_{Würfel} - A_{2\ Kreise} + 2 \cdot O_{Halbkugel}$

$= 6 \cdot 15^2 - 2 \cdot 2{,}5^2 \cdot 3{,}14 + 3{,}14 \cdot 5^2 \approx 1\,389{,}25\ (cm^2)$

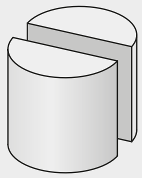
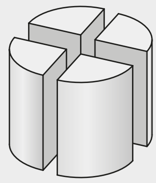
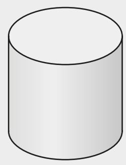
Ⓒ $O = O_{Halbkugel} + A_{großer\ Kreis} - A_{2\ Kreise} + 2 \cdot O_{kleine\ Halbkugel}$

$= 0{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 16^2 + 8^2 \cdot 3{,}14 - 2 \cdot 2^2 \cdot 3{,}14 + 3{,}14 \cdot 4^2 = 628\ (cm^2)$

L

1 Die gesuchten Körper sind in den Feldern Nr. 6, 8, 15 und 19 dargestellt.

2 a)/b)

	Ⓑ 	Ⓒ 	Ⓐ 
Oberfläche	421,44 cm^2	270,72 cm^2	602,88 cm^2
Volumen	565,2 cm^3	282,6 cm^3	1 130,4 cm^3

c) Volumen:
$565{,}2 \cdot 2 = 282{,}6 \cdot 4 = 1\,130{,}4\ (cm^3)$
Die Volumina der Teilkörper ergeben jeweils zusammen das Volumen des Gesamtkörpers.
Oberfläche:
$421{,}44 \cdot 2 > 602{,}88\ (cm^2)$ $270{,}72 \cdot 4 > 602{,}88\ (cm^2)$
Bei der Oberflächenberechnung kommen jeweils die entsprechenden Schnittflächen dazu.

3

Körper	a)	b)
Volumen (+ Rechenweg)	$V = V_W + V$ $= 6^3 + \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 6$ $= 288\ (cm^3)$	$V = V_{HK} + V_{Zy} + V_{Ke}$ $= \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}25^3 + 3{,}25^2 \cdot 3{,}14 \cdot 8 +$ $\frac{2}{3} \cdot 3{,}25^2 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}5$ $\approx 420{,}11\ (cm^3)$
Oberflächeninhalt	O = 5 · Würfelseite + 4 · Manteldreieck $= 5 \cdot 6^2 + 4 \cdot 0{,}5 \cdot 6 \cdot 6{,}70$ $\approx 260{,}40\ (cm^2)$	$O = O_{HK} + M_{Zy} + Mantel_{Ke} = 0{,}5 \cdot 4 \cdot$ $3{,}25^2 \cdot 3{,}14 + 6{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 8$ $+ 3{,}25 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}17$ $= 313{,}04\ (cm^2)$
Körper	c)	d)
Volumen (+ Rechenweg)	$V = V_W - V_{HK}$ $= 9^3 - \frac{2}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}5^3$ $\approx 538{,}24\ (cm^3)$	$V = V_{Zy} - V_{HK}$ $= 46^2 \cdot 3{,}14 \cdot 36 - \frac{2}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 36^3$ $\approx 141{,}52\ (cm^3)$
Oberflächeninhalt	$O = O_{Würfel} - A_{Kreis} + O_{HK}$ $= 6 \cdot 9^2 - 4{,}5^2 \cdot 3{,}14 + 0{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 9^2$ $\approx 549{,}59\ (cm^2)$	$O = G_{Zyl} + Mantel_{Zy} + A_{Kreisring} + O_{HK}$ $= 4{,}6^2 \cdot 3{,}14 + 2 \cdot 4{,}6 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}6 +$ $(4{,}6 - 3{,}6)^2 \cdot 3{,}14 + 0{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}2^2$ $= 254{,}968\ cm^2 \approx 277{,}58\ (cm^2)$

4 a) Es passen die Formeln auf den Kärtchen ① und ④, weil bei diesen beiden Rechenwegen die verdeckten Quader-Grundflächen berücksichtigt werden.

b) Die Kärtchen mit den Formeln ② und ③ passen nicht.
Fehler: die verdeckten, nicht sichtbaren Quadergrundflächen werden nicht abgezogen.

c) $Volumen_{Werkstück} = V_{Halbkugel} + V_{Quader} + V_{Kegel}$
$= 0{,}5 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 3^3 + 2 \cdot 2 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 3{,}14 \cdot 4$
$= 56{,}52 + 20 + 37{,}68 = 114{,}2\ (cm)$
$Masse_{Werkstück} = V \cdot \rho = 114{,}2 \cdot 7{,}4 \approx 845{,}1\ g$
$Oberflächeninhalt_{Werkstück} = O_{Halbkugel} + O_{Kegel} + M_{Quader} - 2 \cdot G_{Quader}$
$= 84{,}78 + 75{,}36 + 40 - 2 \cdot 4 = 192{,}14\ cm^2$

Die Lernenden berechnen Größen an zusammengesetzten Körpern. Die gesuchten Größen sind teilweise aus den bekannten Volumens- und Oberflächenformen abgeleitet.

Die dargestellten Körper sind aus verschiedenen Grundkörpern zusammengesetzt. Die Aufgaben sind in verschiedene Sachsituationen eingebettet.

5 a) $O_{innen} = 2 \cdot \pi \cdot r^2$

$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{O_{innen}}{2 \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{353{,}25}{2 \cdot 3{,}14}} = 7{,}5$ (m)

b) Parabolschüssel-Flächeninhalt innen und außen:

$O = O_{innen} + A_{Kreisring} + O_{außen}$

$= 353{,}25 + 4{,}74 + 362{,}73 \approx 720{,}72\ m^2 \approx 721\ (m^2)$

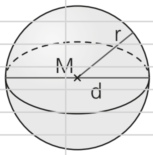
L

1 a) Formel für Zelle C5: =(4/3)*3,14*C3^3
Formel für Zelle C10: = 4*3,14*C3^2

b) Ibrahims Formeln für C17: = ((3*C15)/(4*3,14))^(1/3)
Ibrahim ermittelt den Kugelradius bei gegebenem Volumen mit folgender Formel:
$r = \sqrt[3]{\frac{V}{4 \cdot \pi}}$;
Ibrahim löst die Formel für das Volumen nach der gesuchten Größe r auf.
Ibrahims Formel für C24: =WURZEL((C22)/(4*3,14))
Ibrahim ermittelt den Kugelradius bei gegebenem Oberflächeninhalt mit folgender Formel:
$r = \sqrt{\frac{O}{4 \cdot \pi}}$
Ibrahim löst die Formel für den Oberflächeninhalt nach der gesuchten Größe r auf.

c) Individuelle Lösungen
Beispiel für ein Tabellenblatt:

	A	B	C	D	E
1	**Berechnung Volumen Kugel**				
2					
3	gegeben:	Kugelradius r	10,0	cm	
4					
5	gesucht:	Volumen V_{Ku}	4186,7	cm^3	
6					
7					
8	**Berechnung Oberflächeninhalt Kugel**				
9					
10	gegeben:	Oberflächeninhalt O_{Ku}	1256,0	cm^2	
11					
12					
13	**Berechnung Kugelradius aus V_{Ku}**				
14					
15	gegeben:	Volumen V_{Ku}	2550,0	cm^3	
16					
17	gesucht:	Kugelradius r	8,5	cm	
18					
19					
20	**Berechnung Kugelradius aus O_{Ku}**				
21					
22	gegeben:	Oberflächeninhalt O_{Ku}	1014,0	cm^2	
23					
24	gesucht:	Kugelradius r	9,0	cm	
25					



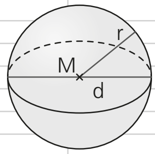
d) Verdopplung von Ausgangsgröße r:
- Das Volumen verachtfacht sich, weil $2^3 = 8$ ist.
- Der Oberflächeninhalt vervierfacht sich, weil $2^2 = 4$ ist

Verdreifachung von Ausgangsgröße r:
- Das Volumen versiebenundzwanzigfacht sich, weil $3^3 = 27$ ist.
- Der Oberflächeninhalt verneunfacht sich, weil $3^2 = 9$ ist.

Vervierfachung von Ausgangsgröße r:
- Das Volumen vervierundsechzigfacht sich, weil $4^3 = 64$ ist.
- Der Oberflächeninhalt versechzehnfacht sich, weil $4^2 = 16$ ist.

Zur Berechnung von Volumen, Oberflächeninhalt oder auch Radius einer Kugel bietet sich die Tabellenkalkulation an. Die Formeln müssen nur einmal eingegeben werden und können dann für beliebig viele Berechnungen verwendet werden.

e) Lösungsmöglichkeit für S. 52, Nr. 4a, 4b und 4d:

	A	B	C	D	E
1	**Berechnung Volumen Kugel**				
2					
3	gegeben:	Kugelradius r	5,7	cm	
4					
5	gesucht:	Volumen V_{Ku}	775,3	cm^3	
6					
7					
8	**Berechnung Oberflächeninhalt Kugel**				
9					
10	gegeben:	Oberflächeninhalt O_{Ku}	408,1	cm^2	
11					
12					
13	**Berechnung Kugelradius aus V_{Ku}**				
14					
15	gegeben:	Volumen V_{Ku}	39,5	cm^3	
16					
17	gesucht:	Kugelradius r	2,1	cm	
18					
19					
20	**Berechnung Kugelradius aus O_{Ku}**				
21					
22	gegeben:	Oberflächeninhalt O_{Ku}	18,3	cm^2	
23					
24	gesucht:	Kugelradius r	1,2	cm	
25					

2 a) Darias Formel für die Zellen lauten:

C5 =(4/3)*3,14*C3^3*0,5

C6 =(4*3,14*C3^2*0,5)+C3^2*3,14

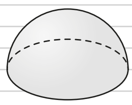
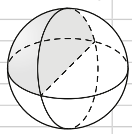
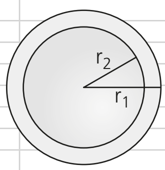
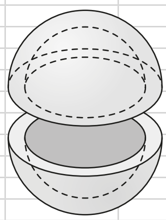
C13 =(1/3)*3,14*C11^3

C14 =2*3,14*C11^2

C30 = ((4*3,14*(C27^3-C28^3))/3)

b) Individuelle Lösungen

Beispiel für ein Tabellenblatt:

	A	B	C	D	E
1	**Berechnung Volumen und Oberflächeninhalt einer Halbkugel**				
2					
3	gegeben:	Halbkugelradius r	3,5	cm	
4					
5	gesucht:	Volumen $V_{Halbkugel}$	89,8	cm^3	
6		Oberflächeninhalt $O_{Halbkugel}$	115,4	cm^2	
7					
8					
9	**Berechnung Volumen und Oberflächeninhalt einer Viertelkugel**				
10					
11	gegeben:	Viertelkugelradius r	4,8	cm	
12					
13	gesucht:	Volumen $V_{Viertelkugel}$	112,2	cm^3	
14		Oberflächeninhalt $O_{Viertelkugel}$	141,7	cm^2	
15					
16					
17		Halbkugel	Viertelkugel		
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					
25	**Berechnung Volumen einer Hohlkugel**				
26					
27	gegeben:	äußerer Radius r_1	8,0	cm	
28		innerer Radius r_2	4,0	cm	
29					
30	gesucht:	Volumen $V_{Hohlkugel}$	1875,6	cm^3	
31					
32					
33					
34					
35					
36					
37					
38					
39					
40					
41					
42					

c) Beispiel Halbkugel-Berechnung: Vervielfachung der Ausgangsgröße r
⇒ Veränderung der Endergebnisse

	Verdopplung von r	Verdreifachung von r	Vervierfachung von r
Volumen	… **verachtfacht** sich, weil $2^3 = 8$ ist	… **versiebenundzwanzigfacht** sich, weil $3^3 = 27$ ist	… **vervierundsechzigfacht** sich, weil $4^3 = 64$ ist
Oberflächeninhalt	… **vervierfacht** sich, weil $2^2 = 4$ ist	… **verneunfacht** sich, weil $3^2 = 9$ ist	… **versechzehnfacht** sich, weil $4^2 = 16$ ist

Beispiel Viertelkugel-Berechnung: Vervielfachung der Ausgangsgröße r:
⇒ Veränderung der Endergebnisse: gleiches Erscheinungsbild wie bei der Halbkugel-Berechnung
Beispiel Hohlkugel-Berechnung Vervielfachung der Ausgangsgrößen r_1 und r_2:
⇒ Veränderung der Endergebnisse: gleiches Erscheinungsbild wie bei der Halbkugel- und Viertelkugelberechnung
Begründung: die grundsätzliche Berechnungsformel bleibt gleich, nur der zusätzliche Faktor (beispielsweise „2“ bei der Verdopplung) wird quadriert.

d) Beim Eingeben der gegebenen Größen aus Aufgabe 11 und 12 von S. 53 liefert das Tabellenblatt die Lösungsangaben in der Randspalte
Bild Tabellenblatt mit Größen aus Nr. 11

	A	B	C	D	E
1	**Berechnung Volumen Kugel**				
2					
3	gegeben:	Kugelradius r	23,8782	cm	
4					
5	gesucht:	Volumen V_{Ku}	56999,8	cm^3	
6					
7					
8	**Berechnung Oberflächeninhalt Kugel**				
9					
10	gegeben:	Oberflächeninhalt O_{Ku}	7161,3	cm^2	
11					
12					
13	**Berechnung Kugelradius aus V_{Ku}**				
14					
15	gegeben:	Volumen V_{Ku}	57000,00	cm^3	
16					
17	gesucht:	Kugelradius r	23,8782	cm	

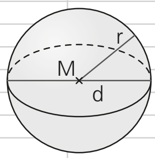
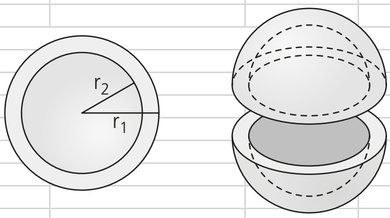


Bild Tabellenblatt mit Größen aus Nr. 12 b

	A	B	C	D	E
1	**Berechnung Volumen einer Hohlkugel**				
2					
3	gegeben:	äußerer Radius r_1	15,53	m	
4		innerer Radius r_2	15,50	m	
5					
6	gesucht:	Volumen $V_{Hohlkugel}$	90,70	m^3	
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					



3 a) Tabellenblatt für die Berechnung von Iorgas Werkstück auf Seite 54:
Das Volumen wird mit folgendem Rechenweg ermittelt:
$V_{ges} = V_{Halbkugel} + V_{Quader} + V_{Kegel}$

b) Siehe Tabellenblatt unteres Drittel

	A	B	C	D
1	**Berechnung Volumen Halbkugel**			
2				
3	gegeben:	Halbkugelradius r	3,0	cm
4				
5	gesucht:	Volumen $V_{Halbkugel}$	56,52	cm³
6				
7				
8	**Berechnung Volumen Quader**			
9				
10	gegeben:	Kantenlänge (a = b)	2,00	cm
11		Kantenlänge c (= Körperhöhe h_K)	5,00	cm
12				
13	gesucht:	$Volumen_{Quader}$	20,00	cm³
14				
15				
16	**Berechnung Volumen Kegel**			
17				
18	gegeben:	Kegelradius r	3,00	cm
19		Kegelhöhe h_K	4,00	cm
20				
21	gesucht:	$Volumen_{Kegel}$	37,68	cm³
22				
23				
24	**Gesamtvolumen Werkstück**			
25				
26		V_{gesamt}	114,20	cm³
27				
28				
29	**Gewicht Werkstück bei verschiedenen Metallen**			
30				
31		Aluminium ρ = 2,71 g/cm³	309,48	g
32		Messing ρ = 8,3 g/cm³	947,86	g
33		Kupfer ρ = 8,82 g/cm³	1018,66	g
34		Blei ρ = 11,34 g/cm³	1295,03	g
35		Gold ρ = 19,3 g/cm³	2204,06	g
36		Platin ρ = 21,45 g/cm³	2449,59	g
37				

L

1 a) Ⓐ k = 1,5; Maßstab 3 : 2 Ⓑ k = 0,5; Maßstab 1 : 2

b) Anton dividiert jeweils eine Seite der Bildfigur durch die entsprechende Seite des Originals. Als Ergebnis erhält er bei allen Seiten k bzw. den Maßstab.

$\frac{a'}{a} = \frac{4,5}{3} = 1,5$ $\frac{b'}{b} = \frac{6}{4} = 1,5$ $\frac{c'}{c} = \frac{7,5}{5} = 1,5$

c) Die Winkel der Bildfigur sind genauso groß wie die entsprechenden Winkel der Originalfigur.

d) $\frac{a'}{a} = \frac{6}{3} = 2$ $\frac{b'}{b} = \frac{5}{2,5} = 2$ $\frac{c'}{c} = \frac{3}{1,5} = 2$ $\frac{d'}{d} = \frac{4}{2} = 2$

Einander entsprechende Winkel sind bei Bildfigur und Originalfigur gleich groß.

2 Zwei Figuren sind ähnlich, wenn die Seitenverhältnisse sich entsprechender Seiten gleich sind und wenn sich entsprechende Winkel gleich groß sind.

3 a) $\frac{a'}{a} = \frac{12}{5} = 2,4$; $\frac{b'}{b} = \frac{9}{3} \neq 2,4$ ⇒ Die Dreiecke sind nicht ähnlich.

b) $\frac{a'}{a} = \frac{10}{5} = 2$; $\frac{b'}{b} = \frac{6}{3} = 2$; $\frac{c'}{c} = \frac{12}{6} = 2$ ⇒ Die Dreiecke sind ähnlich.

c) $\frac{a'}{a} = \frac{9}{5} = 1,8$; $\frac{b'}{b} = \frac{5,4}{3} = 1,8$; $\frac{c'}{c} = \frac{10,8}{6} = 1,8$ ⇒ Die Dreiecke sind ähnlich.

d) $\frac{a'}{a} = \frac{6,25}{5} = 1,25$; $\frac{c'}{c} = \frac{7,25}{6} \neq 1,25$ ⇒ Die Dreiecke sind nicht ähnlich.

4 Ⓐ $\frac{2,5}{2} \neq \frac{1,5}{1}$ ⇒ Die Figur ist nicht ähnlich zum Original.

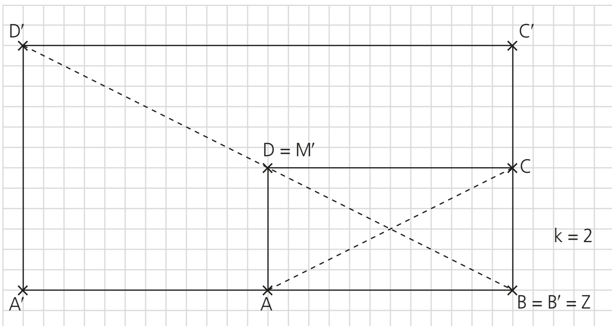
Ⓑ $\frac{3}{2} = \frac{1,5}{1}$ ⇒ Die Figur ist ähnlich zum Original.

Ⓒ $\frac{3}{2} \neq \frac{2}{1}$ ⇒ Die Figur ist nicht ähnlich zum Original.

5 Die Dreiecke Ⓐ, Ⓒ und Ⓓ sind ähnlich, da sich entsprechende Winkel gleich groß sind (57°; 86°; 37°).

6 a) $k = \frac{a'}{a} = \frac{9}{3} = 3$

b) $b' = k \cdot b = 3 \cdot 4 = 12$ (cm)



7 a) $k = \frac{2,5}{3,5} = \frac{5}{7}$

$a = 2,6 : \frac{5}{7} \approx 3,6$ (cm)

$b' = 2,1 \cdot \frac{5}{7} = 1,5$ (cm)

b) $k = \frac{4}{2,5} = 1,6$

$c' = 1,1 \cdot 1,6 \approx 1,8$

$d' = b' = 3$ (cm)

$d = b = 3 : 1,6 \approx 1,9$ (cm)

Über den Maßstab, der den Lernenden bereits bekannt ist, wird die Ähnlichkeit eingeführt. Die Lernenden stellen fest, dass zwei Figuren ähnlich sind, wenn einander entsprechende Winkel gleich groß sind oder die Längenverhältnisse zusammengehöriger Seiten gleich sind.

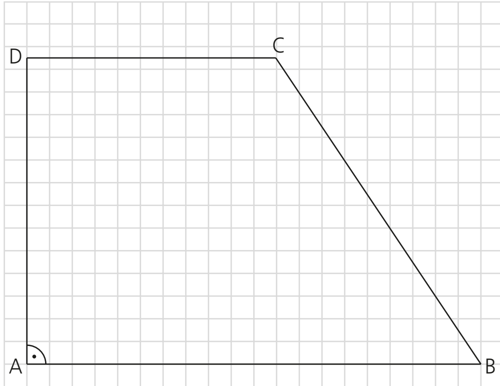
8 a) $a' = 4 + 6 = 10$ (cm)

$k = \frac{10}{4} = 2,5$

b) $b' = 3,2 \cdot 2,5 = 8$ (cm)

$c' = 2,2 \cdot 2,5 = 5,5$ (cm)

$d' = 2,7 \cdot 2,5 = 6,75$ (cm)



9 a) Alina hat recht. Bei Quadraten sind alle Winkel gleich groß (90°) und alle Seiten gleich lang, daher sind zwei Quadrate immer ähnlich.

Daniels Aussage stimmt nicht, weil die beiden anderen Winkel in zwei rechtwinkligen Dreiecken unterschiedlich groß sein können. Es ist nur ein Winkel (90°) gleich.

b) Kreise, gleichseitige Dreiecke

10 Die drei Dreiecke sind ähnlich, da gilt

∢ABD = ∢BDC = ∢BCE

und ∢ADB = ∢ECD = ∢EBC.

11 a) Dreieck AED ist ähnlich zu Dreieck EBC, da gilt ∢DAE = ∢EBC, ∢AED = ∢BEC und ∢ADE = ∢BCE.

Dreieck AEB ist ähnlich zu Dreieck DEC, da gilt ∢BAE = ∢ECD, ∢AEB = ∢DEC und ∢ABE = ∢EDC.

Dreieck ABD ist ähnlich zu Dreieck ABC, da gilt ∢DAB = ∢ABC, ∢BDA = ∢BCA und ∢ABD = ∢BAC.

Dreieck ACD ist ähnlich zu Dreieck BCD, da gilt ∢DAC = ∢DBC, ∢ACD = ∢BDC und ∢CDA = ∢BCD.

b) Dreieck ABC, Dreieck ADF, Dreieck DBE, Dreieck FDE und Dreieck FEC sind zueinander ähnlich, da gilt:

∢DFA = ∢BED = ∢ECF = ∢FDE = 90°, da DECF ein Rechteck ist, und

∢FAD = ∢BDE = ∢EFC = ∢DEF, da AB∥FE und FD∥BC.

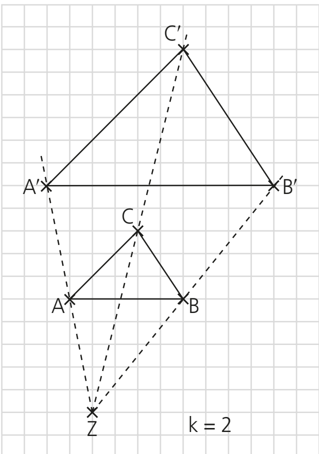
L

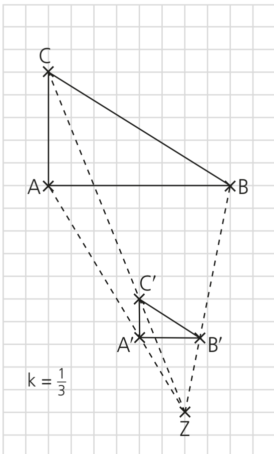
1 **Wie entsteht das Schattenbild?**
Das Schattenbild entsteht, wenn die Lichtstrahlen einer punktförmigen Lichtquelle an einem Körper vorbei auf eine Wand fallen. Der Bereich, in dem die Lichtstrahlen durch den Körper daran gehindert werden, die Wand zu erreichen, erscheint dunkler und ist als Schatten sichtbar.
Wie ändert sich die Bildgröße, wenn die Leinwand näher an die Lichtquelle rückt?
Das Bild wird kleiner.
Wie ändert sich die Bildgröße, wenn das Original näher an die Bildquelle rückt?
Das Bild wird größer.
Was lässt sich jeweils über die Form von Original und Bild aussagen?
Original und Bild haben in etwa dieselbe Form.
Was bedeutet eine Vergrößerung im Maßstab 2:1?
Eine Vergrößerung im Maßstab 2:1 bedeutet, dass das Bild doppelt so groß ist, wie das Original.

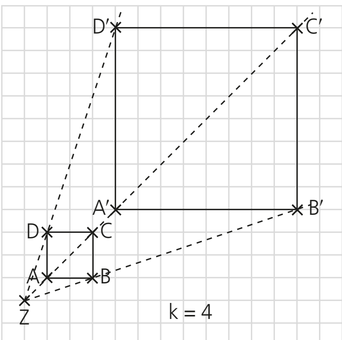
2 $|\overline{ZB'}| = 6$ cm $|\overline{ZB}| = 2$ cm
$|\overline{ZC'}| = 6{,}9$ cm $|\overline{ZC}| = 2{,}3$ cm
$|\overline{ZD'}| = 5{,}9$ cm $|\overline{ZD}| = 1{,}95$ cm

3 a) Ⓐ Dreieck A'B'C' ist durch Vergrößerung aus Dreieck ABC entstanden.
Ⓑ Dreieck A'B'C' ist durch Verkleinerung aus Dreieck ABC entstanden.
b) Ⓐ Maßstab 2 : 1 Ⓑ Maßstab 1 : 2
c)

	$\lvert\overline{ZA}\rvert$	$\lvert\overline{ZA'}\rvert$	$\lvert\overline{ZB}\rvert$	$\lvert\overline{ZB'}\rvert$	$\lvert\overline{ZC}\rvert$	$\lvert\overline{ZC'}\rvert$
Ⓐ	1,4 cm	2,8 cm	2,4 cm	4,8 cm	2,6 cm	5,2 cm
Ⓑ	1,3 cm	2,6 cm	1,5 cm	1,5 cm	1,8 cm	3,6 cm

4 a)


b)


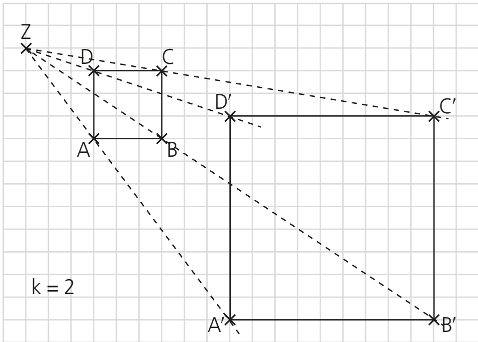
c)


Durch vom Beamer erzeugte Schattenfiguren wird die zentrische Streckung eingeführt. Die Lernenden erkennen, dass sich Originalfigur und zentrisch gestreckte Figur ähnlich sind.

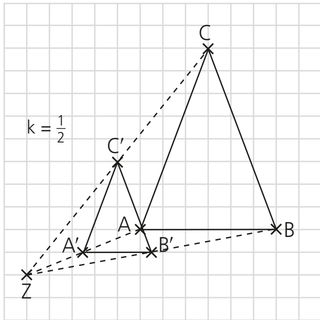
5 Für k > 1 liegt eine Vergrößerung vor, für 0 < k < 1 eine Verkleinerung.

a) Vergrößerung b) Verkleinerung c) Verkleinerung d) Vergrößerung
e) identisch f) Verkleinerung g) Vergrößerung h) Verkleinerung

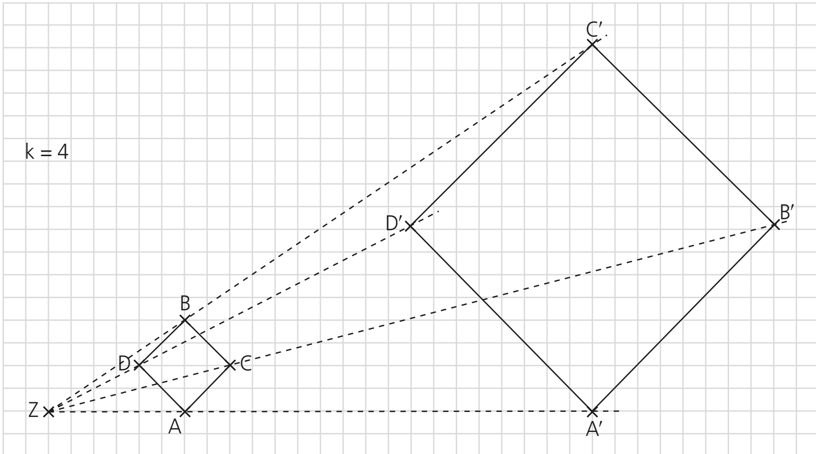
6 a)



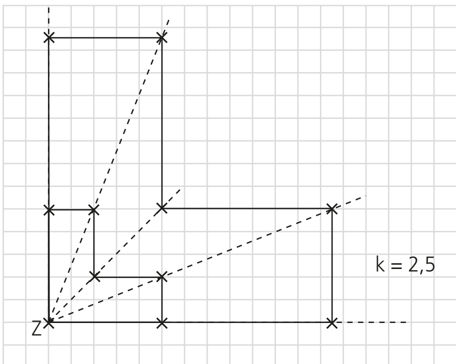
b)



c)

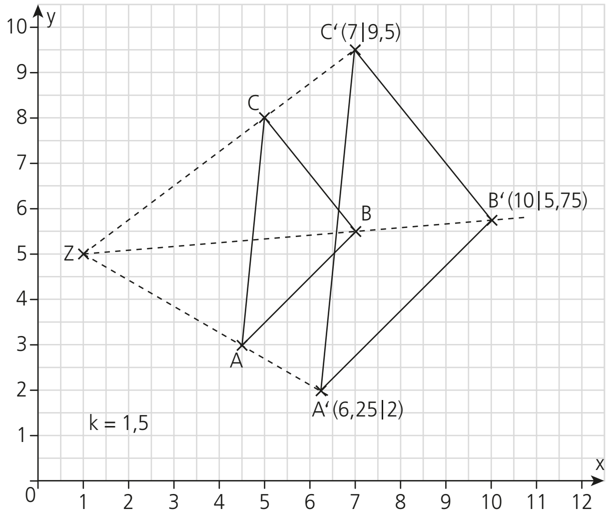


d)

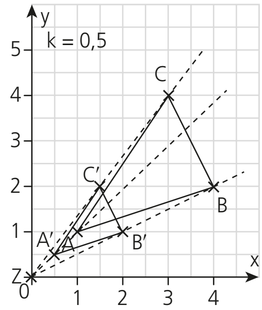


L

1 a)

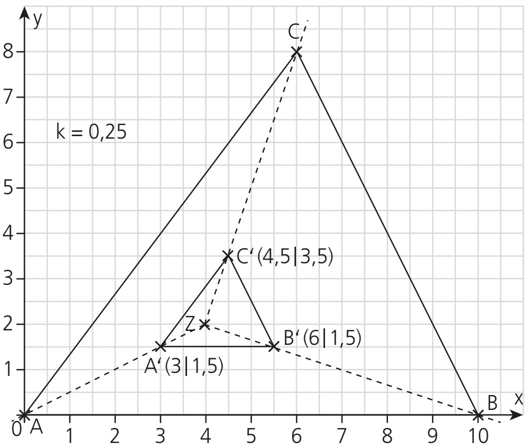


b)

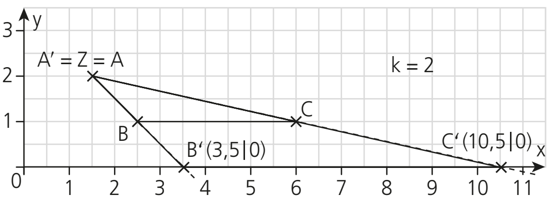


A‘(0,5|0,5);
B‘(2|1);
C‘(1,5|2)

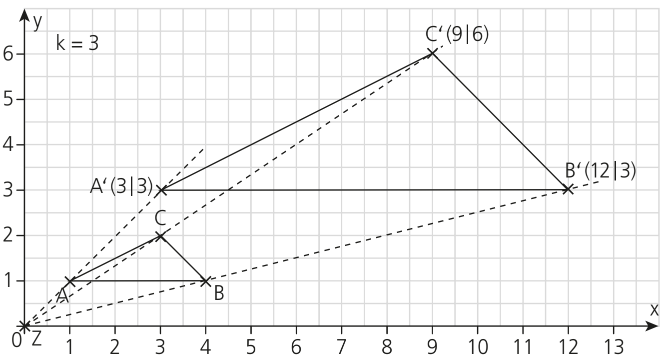
c)



d)

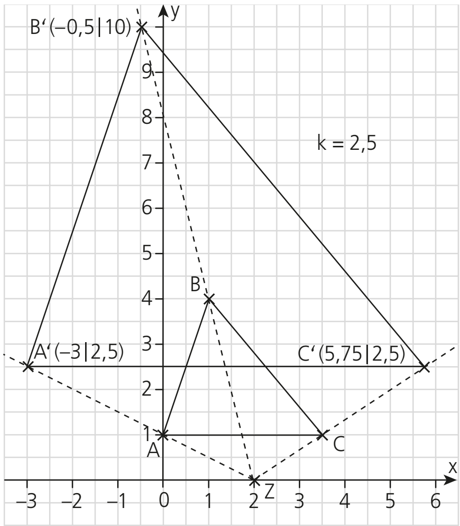


e)

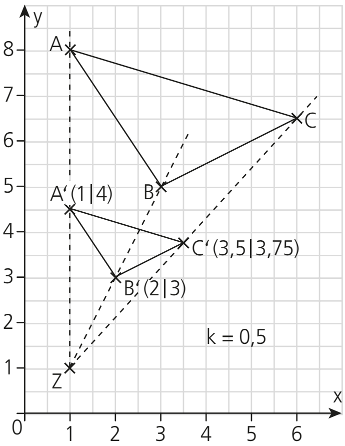


Zunächst führen die Lernenden die zentrische Streckung an vielen Beispielen zeichnerisch durch. Anschließend werden die rechnerische Lösung sowie die Berechnung des Flächeninhalts einer zentrisch gestreckten Figur eingeführt.

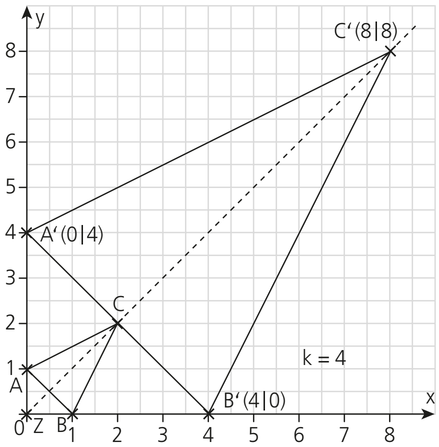
f)


B‘(–0,5|10)
k = 2,5
A‘(–3|2,5)
C‘(5,75|2,5)
A
B
C
Z
x
y

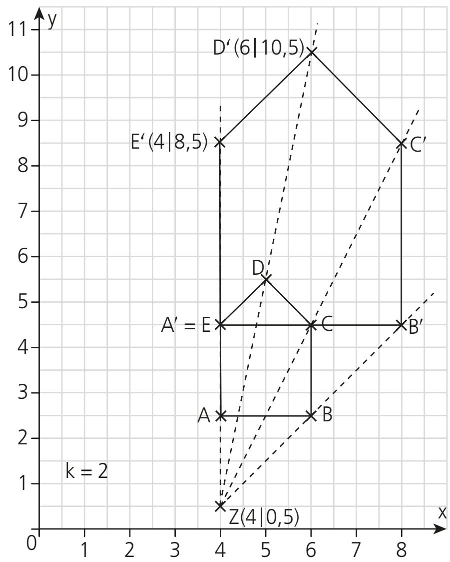
g)


A
C
B
A‘(1|4)
C‘(3,5|3,75)
B‘(2|3)
k = 0,5
Z
x
y

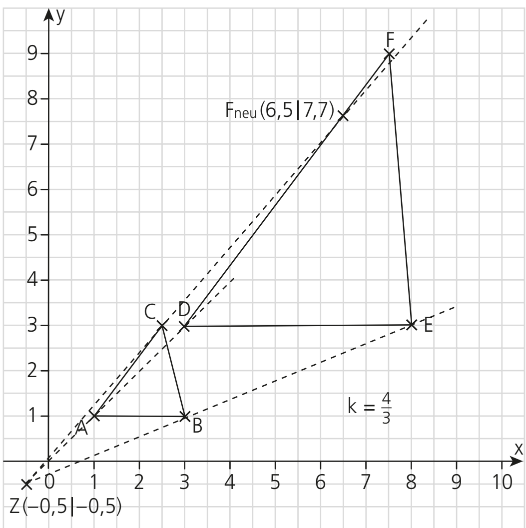
h)


C‘(8|8)
A‘(0|4)
C
A
k = 4
B‘(4|0)
Z
B
x
y

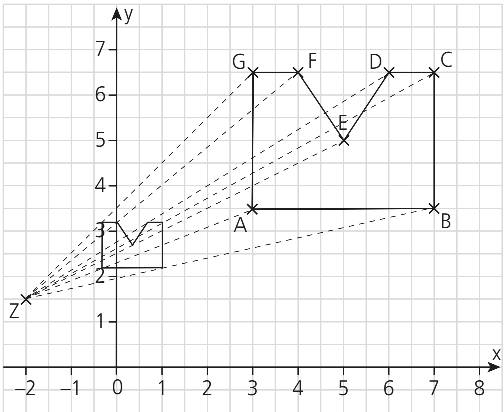
2


D‘(6|10,5)
E‘(4|8,5)
C‘
D
A‘ = E
C
B‘
A
B
k = 2
Z(4|0,5)
x
y

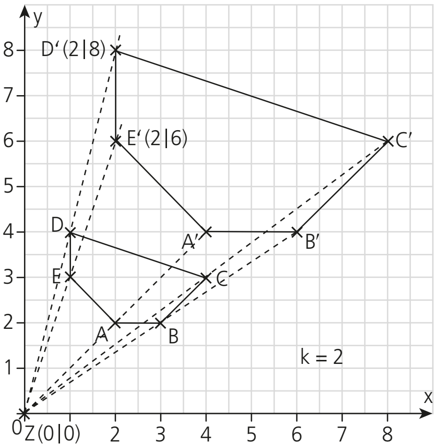
3


F
Fneu (6,5|7,7)
C
D
E
A
B
k = 4/3
Z(–0,5|–0,5)
x
y

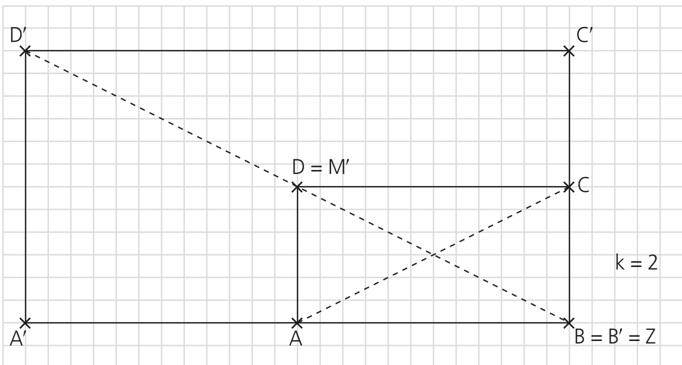
4



5



6 Beispiel:



7 a) $\frac{4,2}{2,8} = \frac{5,25}{3,5} = \frac{6}{4}$
Die Dreiecke sind ähnlich.

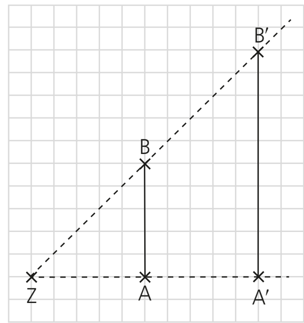
b) $\frac{1,4}{2,8} = \frac{1,75}{3,5} = \frac{2}{4}$
Die Dreiecke sind ähnlich.

c) $\frac{11,76}{2,8} = \frac{14,7}{3,5} = \frac{16,8}{4}$
Die Dreiecke sind ähnlich.

d) $\frac{0,7}{2,8} \neq \frac{0,9}{3,5}$
Die Dreiecke sind nicht ähnlich.

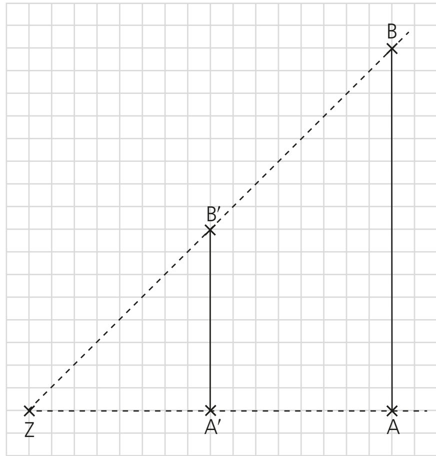
8 a) Für die zeichnerische Lösung wird die Strecke anhand ihrer Endpunkte zentrisch gestreckt. Bei der rechnerischen Lösung wird die Streckenlänge mithilfe des Streckungsfaktors berechnet.

b) Ⓐ



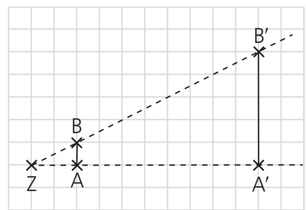
$|\overline{A'B'}| = k \cdot |\overline{AB}| = 2 \cdot 2{,}5 = 5$ (cm)

Ⓑ



$|\overline{A'B'}| = k \cdot |\overline{AB}| = 0{,}5 \cdot 8 = 4$ (cm)

Ⓒ



$|\overline{A'B'}| = k \cdot |\overline{AB}| = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$ (cm)

9 $c' = k \cdot c = 3{,}5 \cdot 3 = 10{,}5$ (cm)

$\beta' = \beta = 70°$

$\alpha' = \alpha = 35°$

$\gamma' = \gamma = 180° - 35° - 70° = 75°$

10

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Originalstrecke $\lvert\overline{AB}\rvert$	25,4 cm	3,12 m	36,2 cm	0,8 dm	9,6 mm	176,73 m
Bildstrecke $\lvert\overline{A'B'}\rvert$	6,35 cm	4,68 m	162,9 m	9,6 cm	240 mm	58,91 m
Streckungsfaktor k	0,25	1,5	4,5	1,2	25	$\frac{1}{3}$

11 a) $a' = k \cdot a = 3 \cdot 2{,}4 = 7{,}2$ (cm)

b) $A = a^2 = 2{,}4^2 = 5{,}76$ (cm²)

$A' = a'^2 = 7{,}2^2 = 51{,}84$ (cm²)

Es gilt: $A' = 9 \cdot A = k^2 \cdot A$

12 a) $c' = k \cdot c = 2 \cdot 6{,}4 = 12{,}8$ (cm)

$h_c' = k \cdot h_c = 2 \cdot 5{,}6 = 11{,}2$ (cm)

b) $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 6{,}4 \cdot 5{,}6 = 17{,}92$ (cm²)

$A' = \frac{1}{2} \cdot c' \cdot h_c' = \frac{1}{2} \cdot 12{,}8 \cdot 11{,}2 = 71{,}68$ (cm²)

Es gilt: $A' = 4 \cdot A = k^2 \cdot A$

13 Parallelogramm:

$A' = k^2 \cdot A = k^2 \cdot a \cdot h_a = 1{,}5^2 \cdot 12{,}2 \cdot 4{,}5 = 123{,}525$ (dm²)

Trapez:

$A' = k^2 \cdot A = k^2 \cdot \frac{a + c}{2} \cdot h_a = 1{,}5^2 \cdot \frac{8{,}8 + 5{,}3}{2} \cdot 4 = 63{,}45$ (cm²)

Dreieck:

$A' = k^2 \cdot A = k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = 1{,}5^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7{,}2 \cdot 6{,}8 = 55{,}08$ (cm²)

14 a) $k = \frac{1}{10\,000}$

Breite auf der Karte: $150 \text{ m} \cdot \frac{1}{10\,000} = 0{,}015 \text{ m} = 1{,}5$ cm

Länge auf der Karte: $300 \text{ m} \cdot \frac{1}{10\,000} = 0{,}03 \text{ m} = 3$ cm

Fläche auf der Karte: $1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$ (cm³)

b) Fläche auf der Karte:

$31\,500 \cdot \left(\frac{1}{10\,000}\right)^2$

$= 0{,}000315$ (m²)

$= 3{,}15$ (cm²)

L

1 a) Andreas multipliziert die Seitenlängen des Bildquaders. Um diese zu erhalten, multipliziert er jede Seitenlänge des Originalquaders mit dem Streckungsfaktor k.

b) Fatima berechnet das Volumen des Bildquaders, indem sie k^3 mit dem Volumen des Originalquaders multipliziert.

c) Ⓐ $V_{Bildkörper} = k^3 \cdot V_{Originalkörper} = 2^3 \cdot 17 = 136\ (cm^3)$

Ⓑ $V_{Bildkörper} = k^3 \cdot V_{Originalkörper} = 0{,}5^3 \cdot 450 = 56{,}25\ (cm^3)$

2

	Seitenlänge a	Seitenlänge b	Seitenlänge c	Streckungsfaktor k	Volumen Original	Volumen Bild
a)	2 cm	3 cm	4 cm	6	24 cm^3	5 184 cm^3
b)	1,5 dm	5,5 dm	8 dm	2,5	66 dm^3	1 031,25 dm^3
c)	4 cm	2 cm	6,25 cm	2	50 cm^3	400 cm^3

3 $V' = k^3 \cdot V = k^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_K = \frac{1}{3} \cdot 3{,}5^3 \cdot 20 \cdot 5 \approx 1\,429{,}2\ (cm^3)$

4 $V' = k^3 \cdot V = k^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot 3{,}14 = 4^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 3{,}14 \approx 33\,493{,}3\ (cm^3)$

5 $V' = k^3 \cdot V$

$V' = k^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_K$ $\qquad h_K = \frac{h_{K'}}{k} = \frac{16}{2} = 8\ (dm)$

$1\,600 = 2^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot G \cdot 8$

$1\,600 = \frac{64}{3} \cdot G \quad | : \frac{64}{3}$

$75\ (cm^2) = G$

6 a)

$V' = k^3 \cdot V$

$3\,375 = k^3 \cdot 125 \quad | : 125$

$27 = k^3 \quad | \sqrt{\ }$

$3 = k$

b)

$V' = k^3 \cdot V$

$325 = k^3 \cdot 2\,600 \quad | : 2\,600$

$0{,}125 = k^3 \quad | \sqrt{\ }$

$0{,}5 = k$

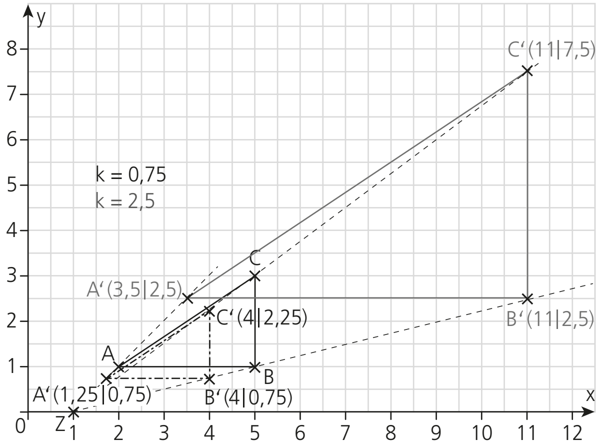
Auch Körper können zentrisch gestreckt werden. Da dies zeichnerisch ohne Computereinsatz nicht sinnvoll umzusetzen ist, beschränkt sich diese Seite auf die Berechnung des Volumens des Bildkörpers.

Auf dieser Seite wird das bisher gelernte wiederholt und gefestigt. Die Lernenden führen die zentrische Streckung von Figuren durch und bestimmen Seitenlänge, Flächeninhalt und Volumen des Bildes oder Originals.

1 a)

	a)	b)	c)	d)
x	48 mm	14 dm	54 m	210 cm
d	12 mm	4 dm	36 m	42 cm
k	4	3,5	1,5	5

2



3

	a′	b′	c′	k
a)	7 dm	10,5 dm	8,75 dm	1,75
b)	3 cm	1,95 cm	4,05 cm	0,25
c)	16,2 cm	21,6 cm	27 cm	1,8

4 a) $V = r^2 \cdot \pi \cdot h_K = 4^2 \cdot 3{,}14 \cdot 9 = 452{,}16\ (\text{cm}^3)$

$O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2r\pi \cdot h_K = 2 \cdot 4^2 \cdot 3{,}14 + 2 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 9 = 326{,}56\ (\text{cm}^2)$

b)

	k	r	h_K	O	V
A	3,5	14 cm	31,5 cm	4 000,36 cm^2	19 386,36 cm^3
B	2	8 cm	18 cm	1 306,24 cm^2	3 617,28 cm^3
C	2,5	10 cm	22,5 cm	2 041 cm^2	7 065 cm^3
D	8	32 cm	72 cm	20 899,84 cm^2	231 505,92 cm^3

5 a) I $a \cdot b = 400$

$a = \frac{400}{b}$

II $2a + 2b = 82$

I in II:

$2 \cdot \frac{400}{b} + 2b = 82 \quad | \cdot b$

$800 + 2b^2 = 82b \quad | : 2$

$b^2 - 41b + 400 = 0$

$\Rightarrow\ b_1 = 25 \qquad b_2 = 16$

$\Rightarrow\ a_1 = 16 \qquad a_2 = 25$

Die Seiten des Originalrechtecks sind 16 dm und 25 dm lang.

b) $u' = 3{,}5 \cdot u = 3{,}5 \cdot 82 = 287\ (\text{dm})$

c) $A' = 3{,}5^2 \cdot 400 = 4\,900\ (\text{dm}^2)$

Prozentuale Zunahme:

$\frac{4\,900}{400} - 1 = 11{,}25 = 1\,125\,\%$

6 a) Die Aussage ist falsch. Die Länge der Strecken des Originalvierecks beträgt ein Drittel der Streckenlänge des Bildvierecks.

b) Die Aussage ist richtig, da $k^2 = 9$.

c) Die Aussage ist falsch. Bei der zentrischen Streckung ändert sich die Winkelgröße nicht.

L

1 Da die Strecke $\overline{A'B'}$ durch zentrische Streckung aus der Strecke $\overline{AB}$ entsteht, sind beide Strecken parallel und es gilt: $k = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{a'}{a}$ und $k = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|} = \frac{b'}{b}$. Zusammengefasst also $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$.

2 a)
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \quad | \cdot a \cdot b$$
$$a'b = b'a \quad | : a' : b'$$
$$\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}$$

b)
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \quad | \cdot a \cdot b$$
$$a'b = b'a \quad | : b : b'$$
$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$$

c)
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \quad | \cdot a \cdot b$$
$$a'b = b'a \quad | - ab$$
$$a'b - ab = b'a - ab$$
$$b(a' - a) = a(b' - b) \quad | : (a' - a) : (b' - b)$$
$$\frac{b}{b - b'} = \frac{a}{a - a'}$$
$$\frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{BB'}|} = \frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{AA'}|}$$

3 a) $\frac{|\overline{ZF}|}{|\overline{ZB}|} = \frac{|\overline{ZE}|}{|\overline{ZA}|}$ b) $\frac{|\overline{ZC}|}{|\overline{CE}|} = \frac{|\overline{ZD}|}{|\overline{DF}|}$ c) $\frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{ZD}|} = \frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{ZC}|}$

d) $\frac{|\overline{ZE}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZF}|}{|\overline{ZB}|}$ e) $\frac{|\overline{ZD}|}{|\overline{BF}|} = \frac{|\overline{ZC}|}{|\overline{AE}|}$ f) $\frac{|\overline{BD}|}{|\overline{DF}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CE}|}$

4 a) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{8}{c} = \frac{7{,}2}{5{,}6}$; $\Rightarrow$ c ≈ 6,2 (cm)
b) $\frac{a}{e} = \frac{b}{f}$; $\frac{6}{9} = \frac{6}{f}$; $\Rightarrow$ f = 9 (cm)
c) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{5}{4} = \frac{3}{d}$; $\Rightarrow$ d = 2,4 (cm)
d) $\frac{e}{c} = \frac{f}{d}$; $\frac{15}{5} = \frac{f}{12}$; $\Rightarrow$ f = 36 (cm)

5 Beim ersten Strahlensatz ist es egal, ob k positiv oder negativ ist, d.h. ob Z zwischen Originalstrecke und Bildstrecke liegt oder nicht. Im Beispiel gilt dann:
$$\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{ZB}|} = \frac{|\overline{ZC}|}{|\overline{ZD}|}$$

6 a) $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$; $\frac{3}{2} = \frac{d}{4}$; $\Rightarrow$ d = 6 (cm)
b) $\frac{c}{a} = \frac{f}{d}$; $\frac{1{,}4}{1{,}96} = \frac{f}{2{,}8}$; $\Rightarrow$ f = 2 (cm)
c) $\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$; $\frac{8{,}8}{4} = \frac{e}{3}$; $\Rightarrow$ e = 6,6 (cm)

7 Da die Strecke $\overline{A'B'}$ durch zentrische Streckung aus der Strecke $\overline{AB}$ entsteht, sind beide Strecken parallel und es gilt: $k = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{a'}{a}$, $k = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|} = \frac{b'}{b}$ und $k = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{y}{x}$.
Zusammengefasst also $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{y}{x}$.

8 a)
$$\frac{a'}{a} = \frac{y}{x} \quad | \cdot a \cdot x$$
$$a'x = ya \quad | : a' : y$$
$$\frac{x}{y} = \frac{a}{a'}$$

b)
$$\frac{b'}{b} = \frac{y}{x} \quad | \cdot b \cdot x$$
$$b'x = yb \quad | : b' : y$$
$$\frac{x}{y} = \frac{b}{b'}$$

c)
$$\frac{a'}{a} = \frac{y}{x} \quad | \cdot a \cdot x$$
$$a'x = ya \quad | : a : x$$
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{a'}$$

9 a) $\frac{x}{y} = \frac{a}{a + b}$ b) $\frac{z}{x} = \frac{d + e + f}{d}$ c) $\frac{d + e}{y} = \frac{d}{x}$

d) $\frac{y}{a + b} = \frac{z}{a + b + c}$ e) $\frac{a}{x} = \frac{a + b + c}{z}$ f) $\frac{z}{d + e + f} = \frac{y}{d + e}$

Auf dieser Doppelseite werden die beiden Strahlensätze eingeführt. Wichtig ist, dass die Lernenden verstehen, wie die Strahlensätze angewandt werden. Für den Anfang kann es sehr hilfreich sein, die beiden Dreiecke in verschiedenen Farben zu markieren, um die einander entsprechenden Strecken zu finden.

10 a) $\frac{a}{x} = \frac{e}{y}$

$\frac{4,5}{x} = \frac{6}{4,4}$

$\Rightarrow$ x = 3,3 (cm)

b) $\frac{b}{f} = \frac{x}{y}$

$\frac{3,5}{14} = \frac{7}{y}$

$\Rightarrow$ y = 28 (cm)

c) $\frac{b}{x} = \frac{f}{y}$

$\frac{6}{9} = \frac{f}{12}$

$\Rightarrow$ f = 8 (cm)

11 Auch beim zweiten Strahlensatz ist es egal, ob k positiv oder negativ ist, d. h. ob Z zwischen Originalstrecke und Bildstrecke liegt oder nicht. Im Beispiel gilt dann:

$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BD}|} = \frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{ZB}|}$

12 a) $\frac{x}{a} = \frac{z}{b + c}$

$\frac{5}{3,2} = \frac{z}{8}$

$\Rightarrow$ z = 12,5 (cm)

b) $\frac{e}{y} = \frac{d}{x}$

$\frac{2}{4,8} = \frac{d}{7,2}$

$\Rightarrow$ d = 3 (cm)

c) $\frac{e + f}{z} = \frac{d}{x}$

$\frac{16}{z} = \frac{6,4}{2,2}$

$\Rightarrow$ z = 5,5 (cm)

L

1 a) $\frac{x}{9} = \frac{10}{6} \Rightarrow x = 15$ b) $\frac{x}{5{,}6} = \frac{1{,}8}{6{,}3} \Rightarrow x = 1{,}6$ c) $\frac{x}{8} = \frac{10{,}5}{7} \Rightarrow x = 12$

d) $\frac{x}{2{,}7} = \frac{8{,}4}{3{,}6} \Rightarrow x = 6{,}3$ e) $\frac{x}{3} = \frac{5{,}5}{2{,}5} \Rightarrow x = 6{,}6$ f) $\frac{x}{2{,}4} = \frac{2{,}8}{2{,}1} \Rightarrow x = 3{,}2$

2 a) $\frac{y}{1{,}6} = \frac{8{,}5}{4} \Rightarrow y = 3{,}4$ Es wurde der 2. Strahlensatz verwendet.

b) $\frac{d}{21{,}75} = \frac{4{,}5}{7{,}25} \Rightarrow d = 13{,}5$ Es wurde der 2. Strahlensatz verwendet.

c) $\frac{a}{7{,}2} = \frac{7{,}2}{5{,}4} \Rightarrow a = 9{,}6$ Es wurde der 1. Strahlensatz verwendet.

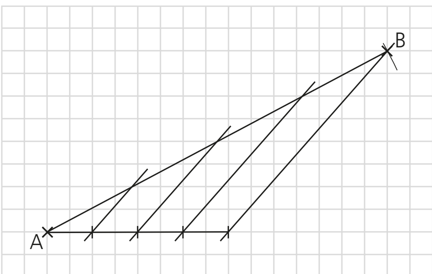
3

	a	b	c	d	e	f	g	h
a)	4 cm	2 cm	6 cm	3,5 cm	1,75 cm	5,25 cm	2,7 cm	4,05 cm
b)	6,76 cm	3,64 cm	10,4 cm	5,2 cm	2,8 cm	8 cm	4,03 cm	6,2 cm
c)	1,6 cm	1,28 cm	2,88 cm	3,4 cm	2,72 cm	6,12 cm	4 cm	7,2 cm

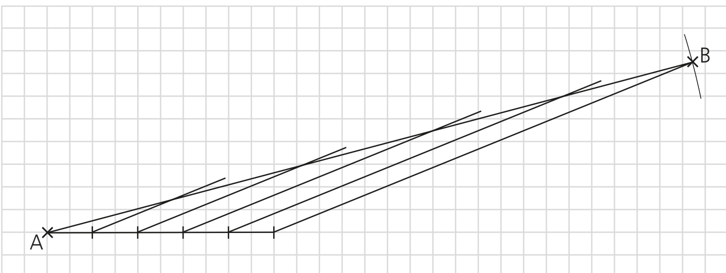
4 a) Man zeichnet von A aus eine Strecke mit 8 cm Länge und unterteilt diese in acht gleich lange Abschnitte die jeweils mit einer Markierung enden. Anschließend verbindet man den Endpunkt der Strecke mit B. Nun zeichnet man sieben Parallelen zu dieser Verbindungslinie, die jeweils durch die Markierungen verlaufen.
Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass die Strecke in genau gleich lange Abschnitte unterteilt werden kann, unabhängig von ihrer Länge.

b) Die fünfte Linie teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 5:3. Links dieser Linie befinden sich fünf Abschnitte, rechts davon drei.

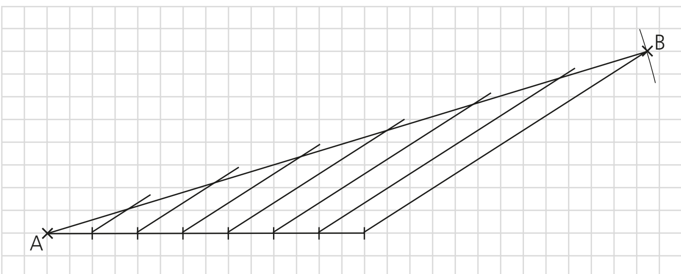
5 a)



b)



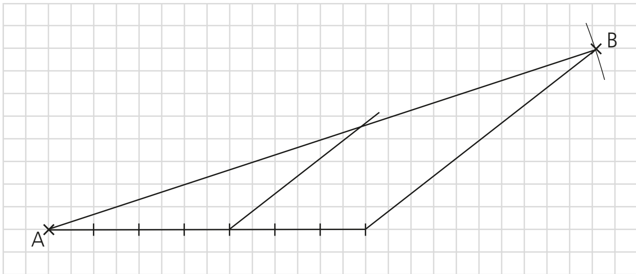
c)



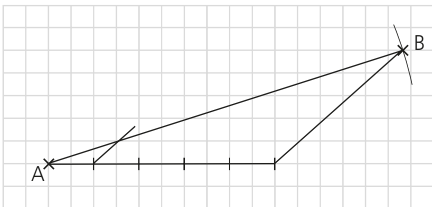
Auf dieser Doppelseite wird die Anwendung der Strahlensätze eingeübt. Die Übungen beginnen mit klassischen Strahlensatzfiguren bevor dann die Streckenteilung und Sachaufgaben bearbeitet werden.

6 a)

b)



c)



7 a)

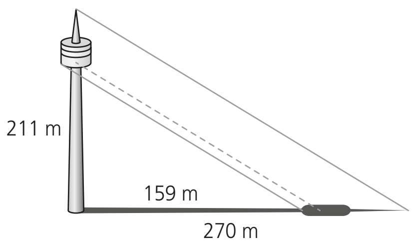
$$\frac{30 + x}{x} = \frac{90}{20} \qquad | \cdot x \cdot 20$$
$$600 + 20x = 90x \qquad | - 20x$$
$$600 = 70x \qquad | : 70$$
$$x = 8{,}57 \text{ (m)}$$

b) $\frac{x}{370} = \frac{50}{310} \Rightarrow x = 59{,}68$ (m)

c)

$$\frac{x}{x - 10} = \frac{4}{3} \qquad | \cdot (x - 10) \cdot 3$$
$$3x = 4x - 40 \qquad | - 4x$$
$$x = 40 \text{ (cm)}$$

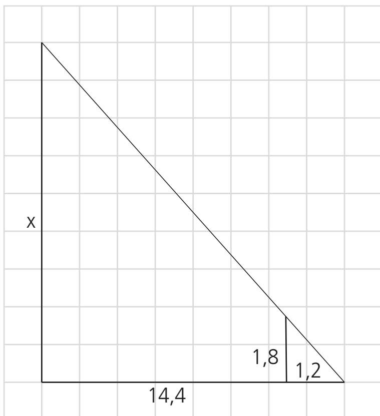
8



$\frac{211}{270} = \frac{x}{159} \Rightarrow x = 124{,}25 \approx 124$ (m)

Die Aussichtsplattform befindet sich in 124 m Höhe.

9



$\frac{x}{14{,}4} = \frac{1{,}8}{1{,}20} \Rightarrow x = 21{,}6$ (m)

Der Baum ist 21,6 m hoch.

10 $\frac{120}{40} = \frac{x + 30}{30}$ | $\cdot\ 30 \cdot 40$

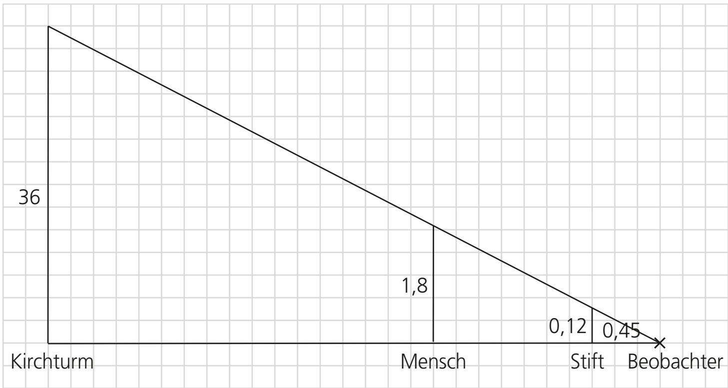
$120 \cdot 30 = 40x + 1\,200$ | $-\ 1\,200$

$2400 = 40x$ | $:\ 40$

$x = 60$ (m)

$A_T = \frac{120 + 40}{2} \cdot 60 = 4\,800$ (m²)

11



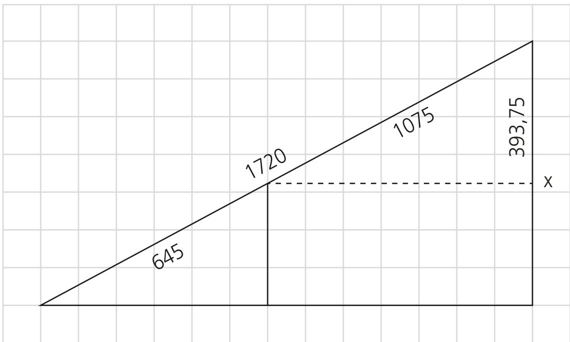
a) $k = \frac{36}{1{,}8} = 20$

Der Beobachter ist zwanzigmal weiter vom Kirchturm entfernt als der Mensch.

b) $\frac{0{,}45}{0{,}12} = \frac{x}{36} \Rightarrow x = 135$ (m)

Der Kirchturm ist 135 m vom Beobachter entfernt.

12



Zurückgelegte Strecke nach 4,5 Minuten:

$1\,720 : 12 \cdot 4{,}5 = 645$ (m)

Höhenunterschied von Tal- und Bergstation:

$\frac{x}{1\,720} = \frac{x - 393{,}75}{645}$ | $\cdot\ 1\,720 \cdot 645$

$645x = 1\,720x - 677\,250$ | $-\ 1\,720x$

$-1\,075x = -677\,250$ | $:\ (-1075)$

$x = 630$ (m)

Zurückgelegte Höhe nach 4,5 Minuten:

$630 - 393{,}75 = 236{,}25$ (m)

Die Gondel schwebt 236,25 m über der Talstation.

Kathetensatz verstehen und anwenden

Mithilfe der zentrischen Streckung wird der Kathetensatz hergeleitet, der neben dem Satz des Pythagoras und dem Höhensatz ein wichtiges Instrument ist, um Längen im rechtwinkligen Dreieck zu berechnen.

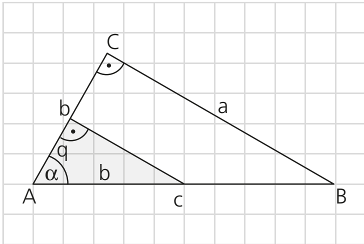
L

1 Die Dreiecke ABC und ACD sind ähnlich, da sie zwei gleiche Winkel (α und den rechten Winkel) haben.

2 a) Es gilt:

$\frac{b}{q} = \frac{c}{b} \quad | \cdot b \cdot q$

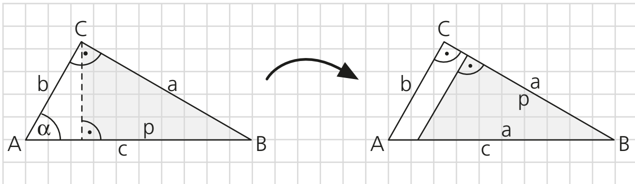
$b^2 = c \cdot q$



b) Es gilt:

$\frac{a}{p} = \frac{c}{a} \quad | \cdot a \cdot p$

$a^2 = c \cdot p$



3 a) $a^2 = c \cdot p$

$2{,}9^2 = c \cdot 1{,}6 \quad |: 1{,}6$

$c \approx 5{,}3$ (cm)

b) $b^2 = c \cdot q$

$5{,}5^2 = 8{,}6 \cdot q \quad |: 8{,}6$

$q \approx 3{,}5$ (cm)

c) $a^2 = c \cdot p$

$3{,}7^2 = 10{,}5 \cdot p \quad |: 10{,}5$

$p \approx 1{,}3$ (cm)

d) $b^2 = c \cdot q$

$b^2 = 4{,}4 \cdot 2{,}3 \quad | \sqrt{\ }$

$b \approx 3{,}2$ (cm)

e) $a^2 = c \cdot p$

$a^2 = 7{,}2 \cdot 1{,}8 \quad | \sqrt{\ }$

$a = 3{,}6$ (cm)

f) $b^2 = c \cdot q$

$5{,}9^2 = c \cdot 3{,}7 \quad |: 3{,}7$

$c \approx 9{,}4$ (cm)

4

	a	b	c	p	q	h
a)	4,6	6,3	7,8	2,7	5,1	3,7
b)	4,7	3,5	5,9	3,8	2,1	2,8
c)	2,6	4,5	5,2	1,3	3,9	2,2

5

	a	b	c	p	q
a)	8 cm	6 cm	10 cm	6,4 cm	3,6 cm
b)	7,4 cm	8,1 cm	11 cm	5 cm	6 cm
c)	13,3 cm	11 cm	17,3 cm	10,3 cm	7 cm
d)	7,3 cm	5,25 cm	9 cm	5,9 cm	3,1 cm
e)	12,4 cm	9,1 cm	15,4 cm	10 cm	5,4 cm

L

Mithilfe des Satzes des Pythagoras und des Kathetensatzes wird der Höhensatz hergeleitet. Anschließend wird die Berechnung von Streckenlängen im rechtwinkligen Dreieck mithilfe des Höhensatzes eingeübt.

1 a) Da das Dreieck mit den Seiten h, p und a rechtwinklig ist, gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$h^2 + p^2 = a^2$

Zudem gilt für das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten a, b und c der Kathetensatz:

$a^2 = c \cdot p$

Setzt man beide Formeln gleich, so erhält man:

$h^2 + p^2 = c \cdot p$ c durch p + q ersetzen

$h^2 + p^2 = (p + q) \cdot p$ Klammer ausmultiplizieren

$h^2 + p^2 = p^2 + q \cdot p$ $| - p^2$

$h^2 = p \cdot q$

b) Da das Dreieck mit den Seiten h, q und b rechtwinklig ist, gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$h^2 + q^2 = b^2$

Zudem gilt für das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten a, b und c der Kathetensatz:

$b^2 = c \cdot q$

Setzt man beide Formeln gleich, so erhält man:

$h^2 + q^2 = c \cdot q$ c durch p + q ersetzen

$h^2 + q^2 = (p + q) \cdot q$ Klammer ausmultiplizieren

$h^2 + q^2 = q^2 + q \cdot p$ $| - p^2$

$h^2 = p \cdot q$

2 a) $h^2 = 3{,}4 \cdot 6{,}2 \Rightarrow h \approx 4{,}6$ (cm)
b) $7{,}9^2 = p \cdot 3{,}2 \Rightarrow p \approx 19{,}5$ (cm)
c) $h^2 = 4{,}5 \cdot (10{,}4 - 4{,}5) \Rightarrow h \approx 5{,}2$ (cm)
d) $5{,}7^2 = 2{,}8 \cdot q \Rightarrow q \approx 11{,}6$ (cm)
$c = 2{,}8 + 11{,}6 = 14{,}4$ (cm)
e) $3^2 = 3{,}1 \cdot q \Rightarrow q \approx 2{,}9$ (cm)
f) $h^2 = (9{,}8 - 2{,}3) \cdot 2{,}3 \Rightarrow h \approx 4{,}2$ (cm)

3

	a	b	c	p	q	h
a)	4,7	3,7	6	3,7	2,3	2,9
b)	4,8	5,5	7,3	3,2	4,1	3,6
c)	7,0	3,9	8	6,1	1,9	3,4

4

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
p	3 cm	5,3 cm	2,25 cm	10 cm	10 cm	0,06 m
q	5 cm	3 cm	9 cm	3,6 cm	14,4 cm	0,34 dm
h	3,9 cm	4 cm	4,5 cm	6 cm	1,2 dm	4,5 cm

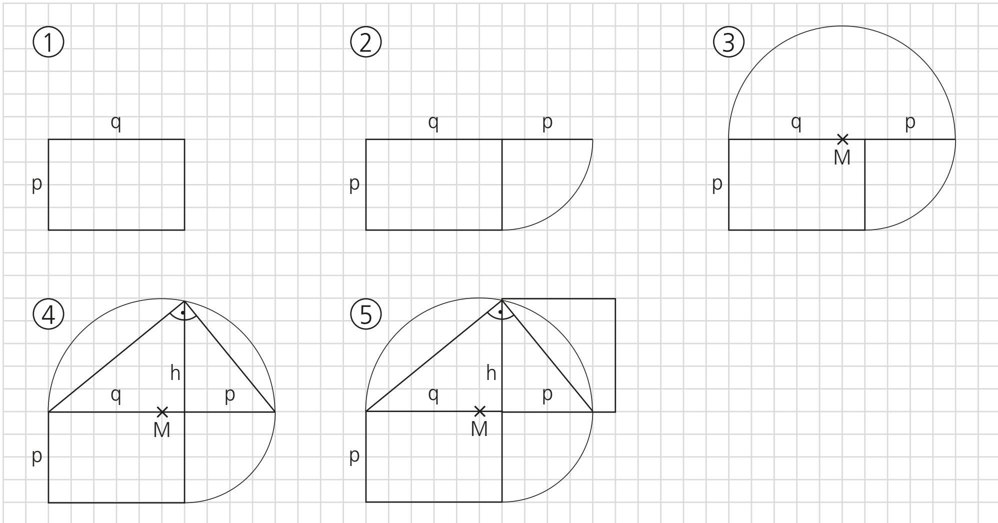
5

$\alpha = 90°$	a	b	c	h_a	p	q
a)	12,5 cm	7,2 cm	10,2 cm	5,9 cm	4,2 cm	8,3 cm
b)	13 cm	5,5 cm	11,8	5,0 cm	2,3 cm	10,7 cm
c)	16,8 cm	5,2 cm	16 cm	5 cm	1,6 cm	15,2 cm

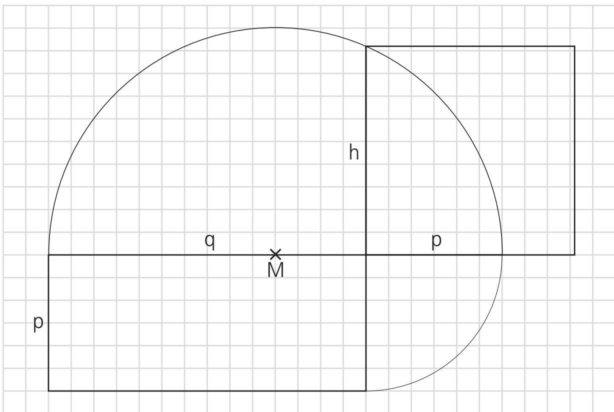
L

Eine wichtige Anwendung des Höhensatzes ist die Konstruktion eines flächengleichen Quadrats aus einem gegebenen Rechteck. Dieses Vorgehen wird anhand der ersten drei Aufgaben eingeübt. Zudem bietet die Seite Sachaufgaben zur Längenberechnung im rechtwinkligen Dreieck.

1 a) ① Gegeben ist ein Rechteck mit den Seiten p und q.
② Verlängere mithilfe eines Viertelkreises mit Radius p die Strecke q um p.
③ Bestimme den Mittelpunkt von p + q und zeichne den Thaleskreis über die Strecke.
④ Zeichne die Höhe h zwischen p und q ein und ergänze zu einem rechtwinkligen Dreieck.
⑤ Zeichne das Quadrat mit der Seitenlänge h.

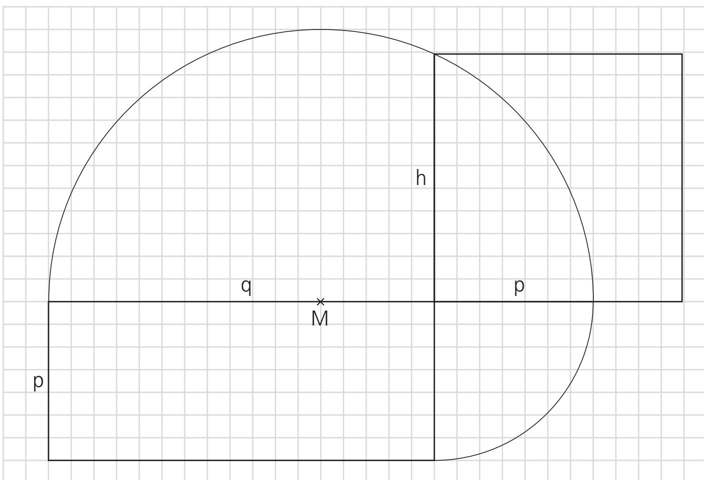


b)

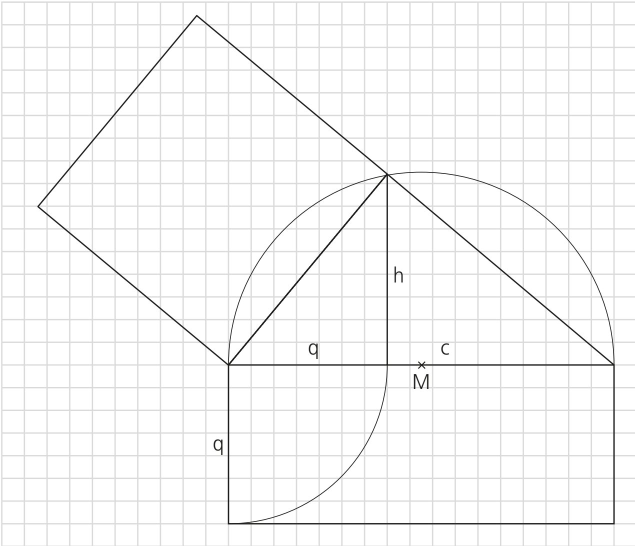


c) $h^2 = 7 \cdot 3 \Rightarrow h \approx 4{,}6$ (cm)
Das entspricht der Länge von h in der Zeichnung.

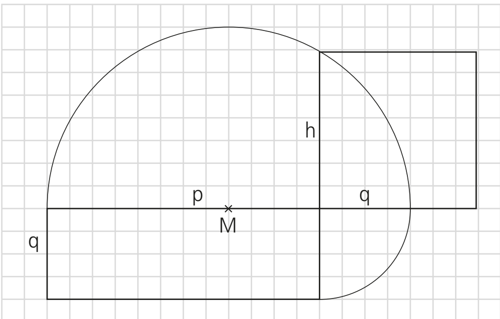
2 a) Höhensatz:



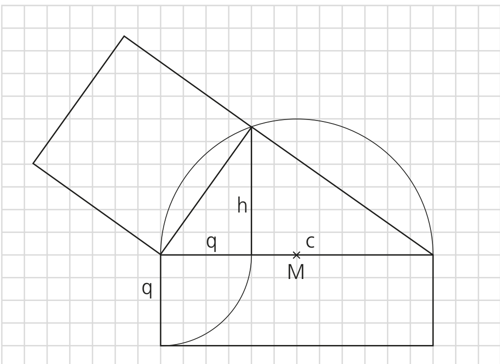
Kathetensatz:



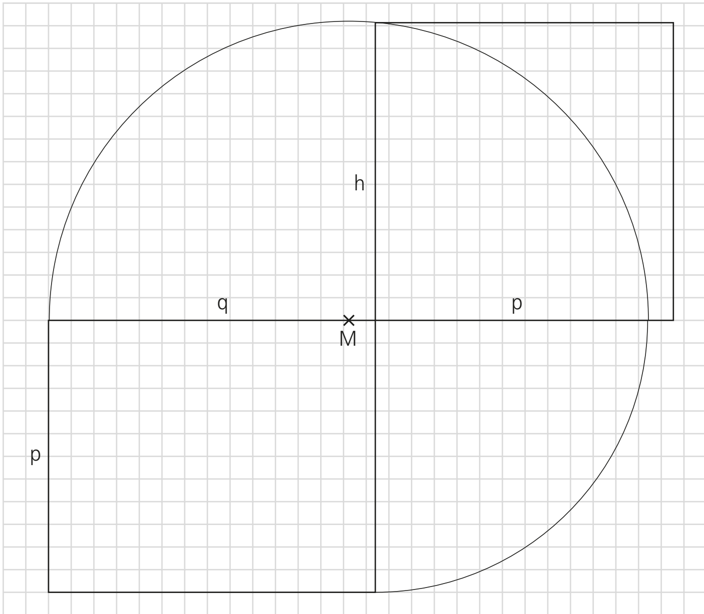
b) Höhensatz:



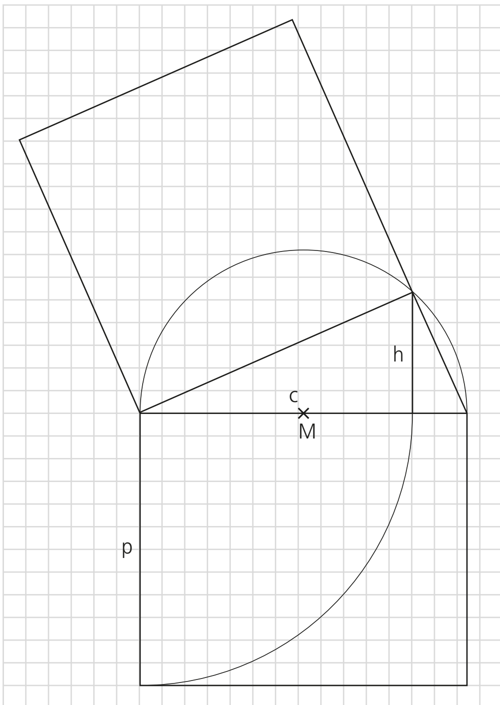
Kathetensatz:



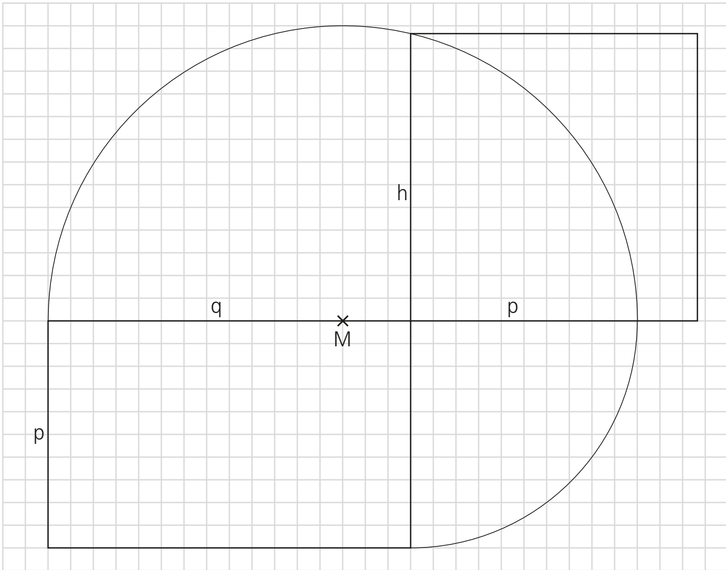
c) Höhensatz:



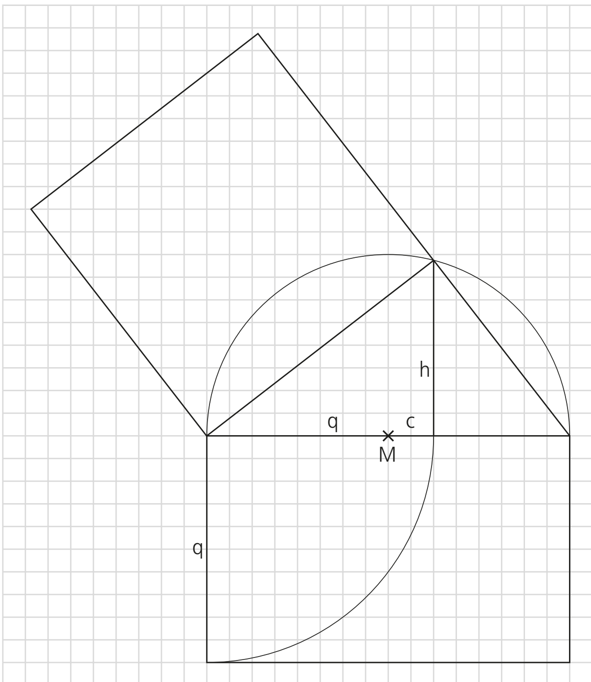
Kathetensatz:



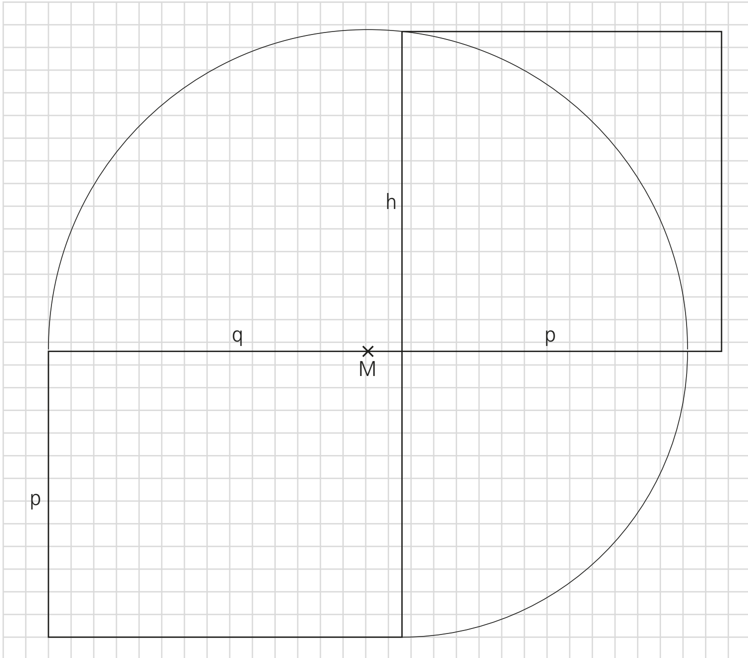
d) Höhensatz:



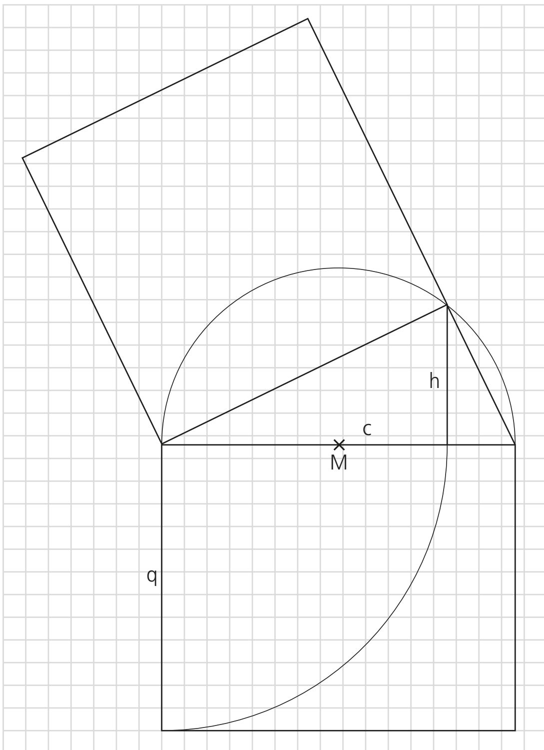
Kathetensatz:



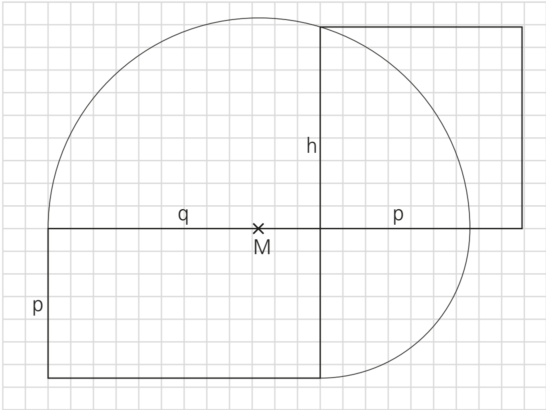
e) Höhensatz:



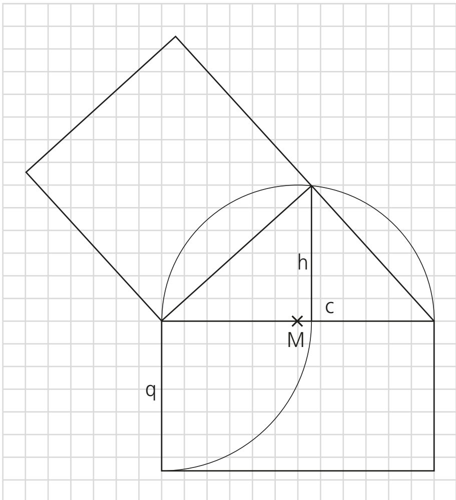
Kathetensatz:



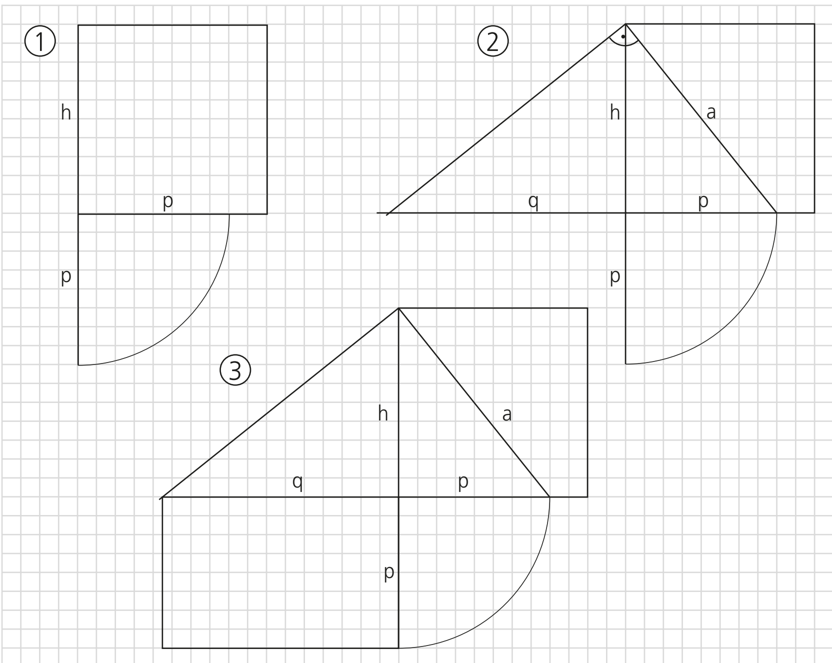
f) Höhensatz:



Kathetensatz:



3 ① Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 cm und trage die Seitenlänge p = 4 cm nach unten ab.
② Zeichne die Seite a ein und trage bei C einen rechten Winkel ab.
③ Zeichne das Rechteck mit den Seitenlängen p und q ein.



Rechnerische Überprüfung:
$h^2 = p \cdot q$
$5^2 = 4 \cdot q \Rightarrow q = 6{,}25$ (cm)
Das Ergebnis stimmt mit der Zeichnung überein.

4 Berechnung der Höhe:
$|\overline{DT}|^2 = 15^2 - 9^2 \Rightarrow |\overline{DT}| = 12$ (dm)
Berechnung des Flächeninhalts:
$A_{Drachen} = (9 + 16) \cdot 12 = 300$ (dm^2)
Berechnung des Umfangs:
$u = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 15 = 70$ (dm)

Berechnung von p:
$12^2 = 9 \cdot |\overline{TC}| \Rightarrow |\overline{TC}| = 16$ (dm)
Berechnung von a:
$|\overline{DC}|^2 = 25 \cdot 16 \Rightarrow |\overline{DC}| = 20$ (dm)

5 Nach dem Kathetensatz gilt:
$|\overline{AC}|^2 = |\overline{AD}| \cdot (|\overline{AD}| + 9)$
Da $\overline{AC}$ doppelt so lang wie $\overline{AD}$ ist gilt:
$(2 \cdot |\overline{AD}|)^2 = |\overline{AD}| \cdot (|\overline{AD}| + 9)$
$4 \cdot |\overline{AD}|^2 = |\overline{AD}|^2 + 9 \cdot |\overline{AD}| \quad | : |\overline{AD}|$
$4 \cdot |\overline{AD}| = |\overline{AD}| + 9 \quad | - |\overline{AD}|$
$3 \cdot |\overline{AD}| = 9 \quad | : 3$
$|\overline{AD}| = 3$ (km)
$|\overline{AC}| = 2 \cdot |\overline{AD}| = 6$ (km)
$|\overline{AB}| = 3 + 9 = 12$ (km)

Nach dem Höhensatz gilt:
$|\overline{CD}|^2 = |\overline{AD}| \cdot |\overline{AB}| \Rightarrow |\overline{CD}| \approx 5{,}2$ (km)

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:
$|\overline{BC}|^2 = |\overline{AB}|^2 - |\overline{AC}|^2$
$|\overline{BC}|^2 = 12^2 - 6^2 \Rightarrow |\overline{BC}| \approx 10{,}4$ (km)

6 Nach dem Kathetensatz gilt:
$|\overline{AD}|^2 = |\overline{BD}| \cdot |\overline{CD}|$
Da $\overline{BC}$ doppelt so lang wie $\overline{CD}$ ist gilt:
$|\overline{AD}|^2 = 3 \cdot |\overline{CD}| \cdot |\overline{CD}|$
$4^2 = 3 \cdot |\overline{CD}|^2$
$\Rightarrow |\overline{CD}| \approx 2{,}3$ (km)
$\Rightarrow |\overline{BC}| \approx 4{,}6$ (km)

Nach dem Höhensatz gilt:
$|\overline{AC}|^2 = |\overline{BC}| \cdot |\overline{CD}|$
$|\overline{AC}|^2 = 4{,}6 \cdot 2{,}3$
$|\overline{AC}| \approx 3{,}3$ (km)
Nach dem Höhensatz gilt:
$|\overline{AB}|^2 = |\overline{BC}| \cdot |\overline{BD}|$
$|\overline{AB}|^2 = 4{,}6 \cdot 6{,}9$
$|\overline{AB}| \approx 5{,}6$ (km)

Länge Rundkurs ABCA: $5{,}6 + 4{,}6 + 3{,}3 = 13{,}5$ (km)
Länge Rundkurs ACDA: $3{,}3 + 2{,}3 + 4 = 9{,}6$ (km)

7 Berechnung des Streckungsfaktors:
$k^2 \cdot A_{ABC} = A_{A'B'C}$
$2{,}25 \cdot A_{ABC} = A_{A'B'C}$
$\Rightarrow k = 1{,}5$

Berechnung der Seitenlängen:
$|\overline{B'C}|^2 = 10{,}5 \cdot 15 \Rightarrow |\overline{B'C}| \approx 12{,}5$ (cm)
$|\overline{A'C}|^2 = 4{,}5 \cdot 15 \Rightarrow |\overline{A'C}| \approx 8{,}2$ (cm)

Berechnung des Umfangs:
$u_{A'B'C} = 1{,}5 \cdot u_{ABC}$
$15 + 12{,}5 + 8{,}2 = 1{,}5 \cdot u_{ABC}$
$\Rightarrow u_{ABC} = 23{,}8$ (cm)

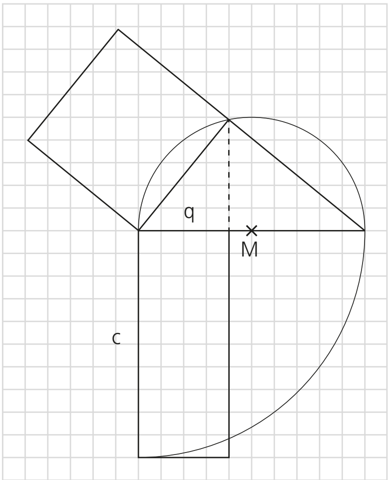
Berechnung der Höhe:
$h^2 = 4{,}5 \cdot 10{,}5 \Rightarrow h \approx 6{,}9$ (cm)

Berechnung des Flächeninhalts:
$A_{A'B'C} = 2{,}25 \cdot A_{ABC}$
$0{,}5 \cdot 6{,}9 \cdot 15 = 2{,}25 \cdot A_{ABC}$
$\Rightarrow A_{ABC} = 23$ (cm^2)

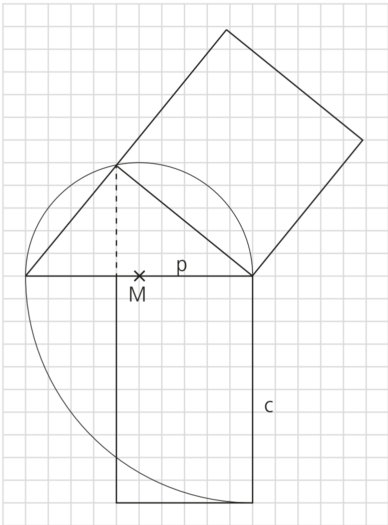
L

1 a) ① Zeichne das Rechteck mit den Seiten q und c.
② Trage die Seite c mithilfe eines Viertelkreises an die Seite q an.
③ Zeichne den Thaleskreis über c und das zugehörige rechtwinklige Dreieck.
④ Zeichne das Quadrat mit der Seitenlänge b ein.

b)



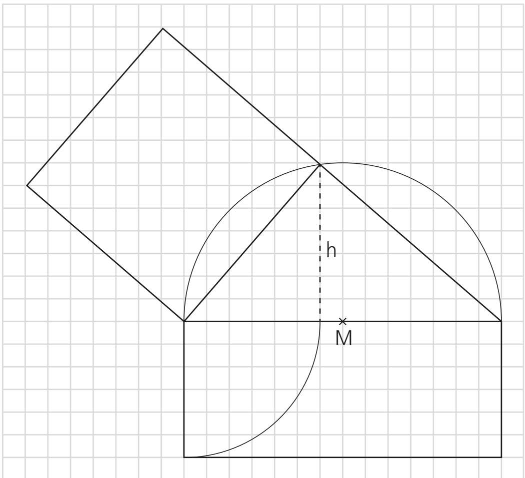
c)



d) $a^2 = 3 \cdot 5 \Rightarrow a \approx 3{,}9$
$b^2 = 2 \cdot 5 \Rightarrow b \approx 3{,}2$
Die berechneten Seitenlängen stimmen mit der Zeichnung überein.

2 a) ① Zeichne das Rechteck mit den Seiten q und c.
② Trage die Seite q mithilfe eines Viertelkreises an die Seite c an.
③ Zeichne den Thaleskreis über c und zeichne das rechtwinklige Dreieck ein.
④ Zeichne das Quadrat mit der Seitenlänge b ein.

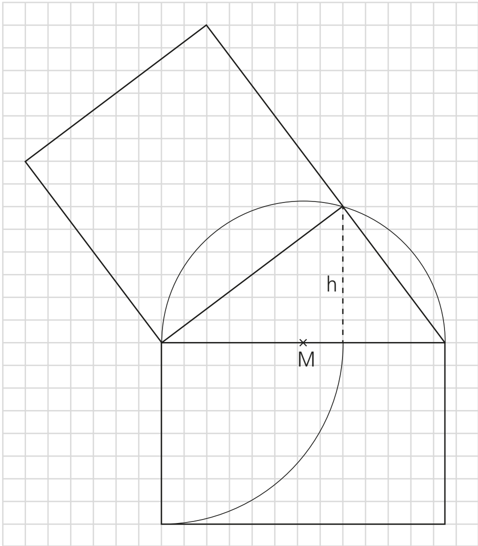
b)



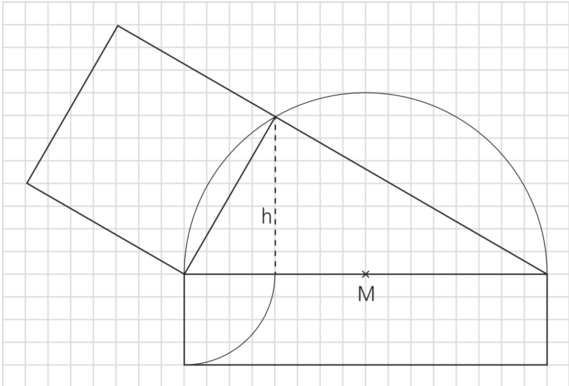
c) $b^2 = 3 \cdot 7 \Rightarrow b \approx 4{,}6$ (cm)
Die berechnete Seitenlänge stimmt mit der Zeichnung überein.

Anliegen dieser Seite ist es, den Lernenden die besonderen Leistungen der antiken Geometrie nahe zu bringen. Thales und Euklid stehen hier für viele andere bedeutende Mathematiker. Gleichzeitig werden der Thaleskreis sowie der Höhen- und Kathetensatz wiederholt.

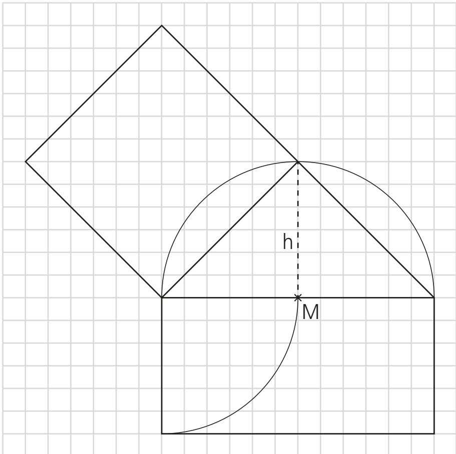
3 Ⓐ



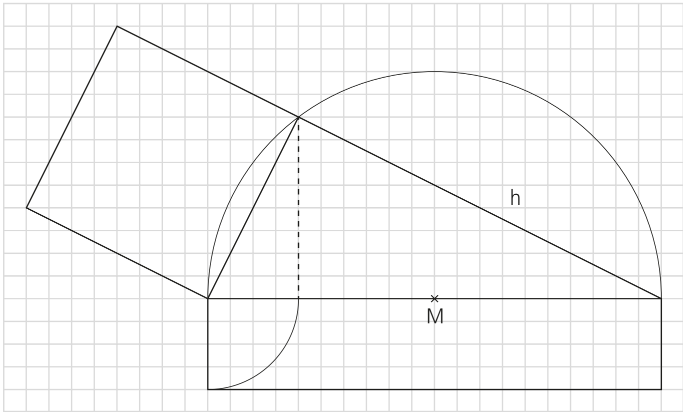
Ⓑ



Ⓒ

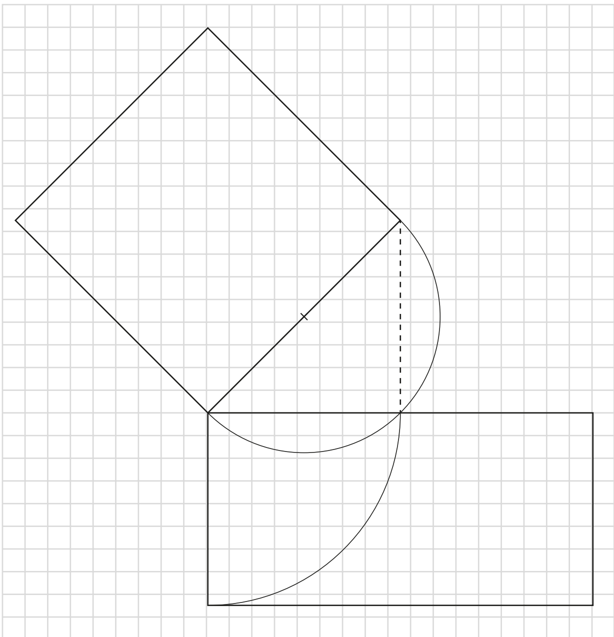


D

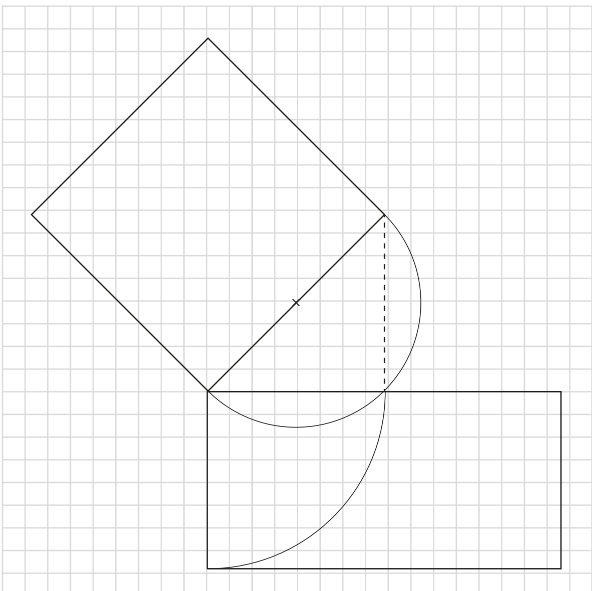


4 Bei allen Teilaufgaben von Aufgabe 4 gibt es unendlich viele Lösungen. Es wird jeweils eine Möglichkeit dargestellt.

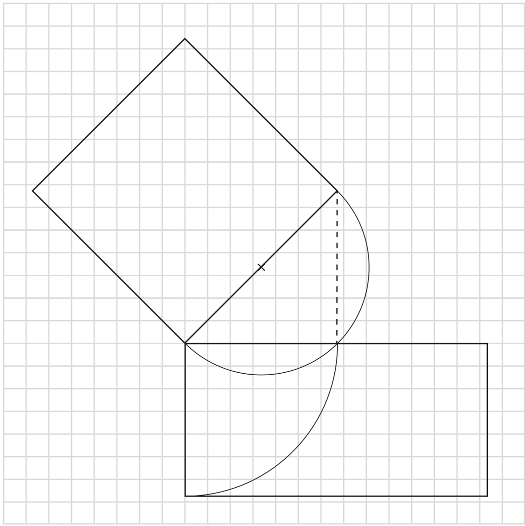
a) A



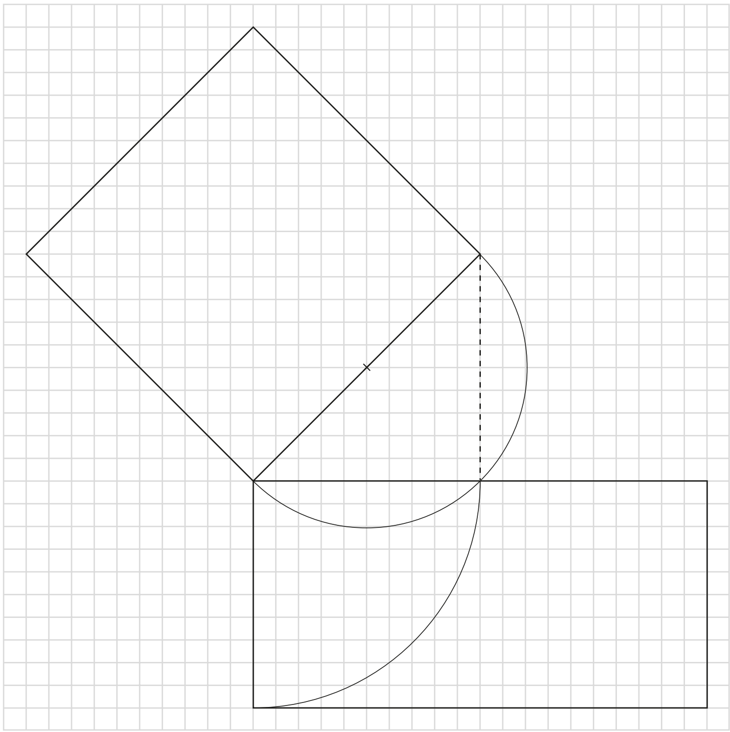
B



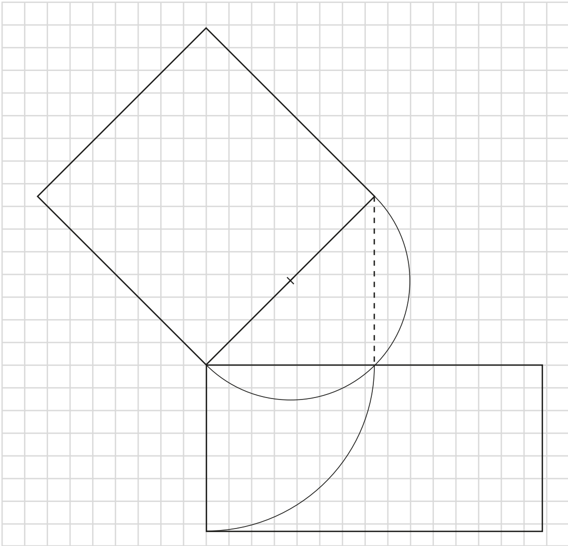
Ⓒ



b) Ⓐ Seitenlänge des Quadrats: $\sqrt{49} = 7$ (cm)



Ⓑ Seitenlänge des Quadrats: $\sqrt{27{,}5625} = 5{,}25$ (cm)



Die wesentlichen Inhalte des Kapitels sind erarbeitet. Inwieweit sind die Schüler darin fit? Wie unterschiedlich ist der Lernstand? Die Zwischenrunde bietet die Möglichkeit, das durch zwei Anforderungsniveaus differenziert zu erfassen. Auch die Schüler können lernen, sich selbst einzuschätzen. Die Lösungen sind dazu im Buch angegeben. Ferner findet sich im Internet ein entsprechender Selbsteinschätzungsbogen. Unter Umständen müssen Inhalte nochmals aufgegriffen werden, um einen gesicherten Wissensstand zu erreichen.

L

1 Volumen von Kugeln berechnen

a) Ⓐ $V_{Ku} = \frac{4}{3} \cdot 6^3 \cdot 3{,}14 = 904{,}32\ (cm^3)$

Ⓑ $V_{Ku} = \frac{4}{3} \cdot 15^3 \cdot 3{,}14 = 14\,130\ (cm^3)$

Ⓒ $V_{Ku} = \frac{1}{6} \cdot 3{,}15 \cdot 9^3 = 381{,}51\ (cm^3)$

Ⓓ $V_{Ku} = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 1^3 \approx 0{,}52\ (cm^3)$

b) Ⓐ $520 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot 3{,}14 \Rightarrow r \approx 4{,}99\ (cm)$

Ⓑ $1\,080 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot 3{,}14 \Rightarrow r \approx 6{,}37\ (cm)$

2 Oberflächeninhalt von Kugeln berechnen

a) Ⓐ $O_{Ku} = 4 \cdot 7{,}5^2 \cdot 3{,}14 = 706{,}5\ (dm^2)$

Ⓑ $O_{Ku} = 4 \cdot 10{,}5^2 \cdot 3{,}14 = 1\,384{,}74\ (dm^2)$

Ⓒ $O_{Ku} = 4 \cdot 2{,}5^2 \cdot 3{,}14 = 78{,}5\ (dm^2)$

Ⓓ $O_{Ku} = 4 \cdot 15{,}5^2 \cdot 3{,}14 = 3\,017{,}54\ (dm^2)$

b) $68 = 2 \cdot r \cdot 3{,}14 \Rightarrow r \approx 10{,}83\ (cm)$

$O = 4 \cdot 10{,}83^2 \cdot 3{,}14 \approx 1\,473{,}15\ (cm^2)$

Menge inklusive Verschnitt:

$1\,473{,}15 : 0{,}85 \approx 1\,733{,}12\ (cm^2)$

Es werden etwa $1\,733{,}12\ cm^2$ Leder benötigt.

3 Größen an zusammengesetzten Körpern berechnen

a) Ⓐ Höhe des Kegels:

$5^2 = 3{,}6^2 + h_K^2 \Rightarrow h_K \approx 3{,}47\ (cm)$

Volumen des Kegels:

$V_{Ke} = \frac{1}{3} \cdot 3{,}6^2 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}47 \approx 47{,}07\ (cm^3)$

Volumen der Halbkugel:

$V_{Ku} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3{,}6^3 \cdot 3{,}14 \approx 97{,}67\ (cm^3)$

Volumen insgesamt:

$V = 47{,}07 + 97{,}67 = 144{,}74\ (cm^3)$

Mantelfläche des Kegels:

$M = 3{,}6 \cdot 5 \cdot 3{,}14 = 56{,}52\ (cm^2)$

Oberflächeninhalt der Halbkugel:

$O_{HK} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}62 \cdot 3{,}14 \approx 81{,}39\ (cm^2)$

Oberflächeninhalt insgesamt:

$O = 56{,}52 + 81{,}39 = 137{,}91\ (cm^2)$

Ⓑ Volumen Quader:

$V_{Qu} = 9 \cdot 18 \cdot 20 = 3\,240\ (cm^3)$

Volumen Halbzylinder:

$V_{HZ} = \frac{1}{2} \cdot 9^2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 = 2\,543{,}4\ (cm^3)$

Volumen insgesamt:

$V = 3\,240 + 2\,543{,}4 = 5\,783{,}4\ (cm^3)$

Oberflächeninhalt Quader:

$O_{Qu} = 2 \cdot 9 \cdot 18 + 2 \cdot 9 \cdot 20 + 18 \cdot 20$
$= 1\,044\ (cm^2)$

Oberflächeninhalt Halbzylinder:

$O_{HZ} = 9^2 \cdot 3{,}14 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9 \cdot 3{,}14 \cdot 20$
$= 819{,}54\ (cm^2)$

Oberflächeninhalt insgesamt:

$O = 1\,044 + 819{,}54 = 1863{,}54\ (cm^2)$

b) Ⓐ Höhe der Pyramide:

$10{,}8^2 = h_K^2 + 5{,}6^2 \Rightarrow h_K \approx 9{,}23\ (cm)$

Volumen Pyramide:

$V_{Py} = \frac{1}{3} \cdot 11{,}2^2 \cdot 9{,}23 \approx 385{,}94\ (cm^3)$

Volumen Halbkugel:

$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 4{,}4^3 \cdot 3{,}14 \approx 178{,}32\ (cm^3)$

Volumen insgesamt:

$V = 385{,}94 - 178{,}32 = 207{,}62\ (cm^3)$

Oberflächeninhalt Pyramide:

$O_{Py} = 11{,}2^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 11{,}2 \cdot 10{,}8$
$= 367{,}36\ (cm^2)$

Oberflächeninhalt Halbkugel:

$O_{Ku} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4{,}4^2 \cdot 3{,}14 \approx 121{,}58\ (cm^2)$

Oberflächeninhalt insgesamt:

$O = 367{,}36 + 121{,}58 - 4{,}4^2 \cdot 3{,}14$
$\approx 428{,}15\ (cm^2)$

Ⓑ Volumen Würfel: $V_W = 9^3 = 729\ (cm^3)$

Volumen Kegel:

$V_{Ke} = \frac{1}{3} \cdot 4{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \approx 105{,}98\ (cm^3)$

Volumen insgesamt:

$V = 729 - 105{,}98 = 623{,}02\ (cm^3)$

Oberfläche Würfel: $6 \cdot 9^2 = 486\ (cm^2)$

Berechnung von s:

$s^2 = 5^2 + 4{,}5^2 \Rightarrow s \approx 6{,}73\ (cm)$

Mantelfläche Kegel:

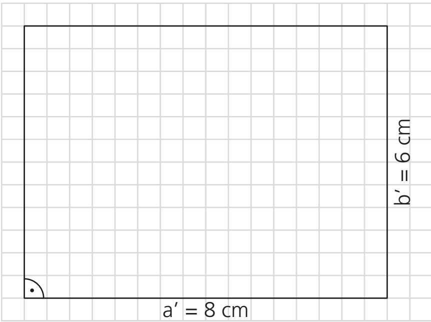
$M_{Ke} = 4{,}5 \cdot 6{,}73 \cdot 3{,}14 \approx 95{,}09\ (cm^2)$

Oberfläche insgesamt:

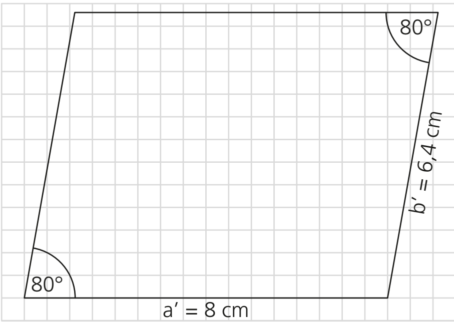
$486 + 95{,}09 \approx 581{,}09\ (cm^2)$

4 Ähnliche Figuren erkennen

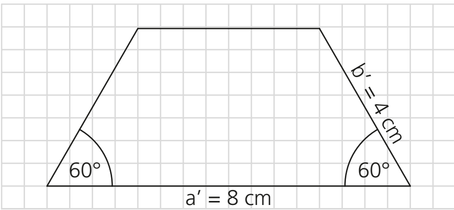
a) Ⓐ



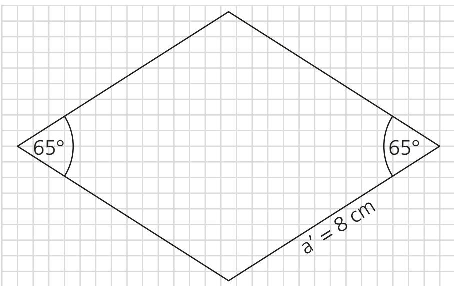
Ⓑ



Ⓒ



Ⓓ

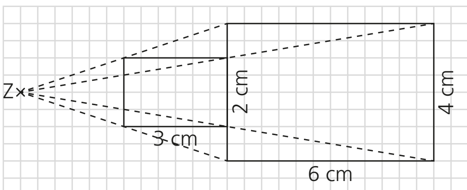


b)

Rechteck	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
a : b	4 : 5	5 : 6	5 : 7	5 : 6
Ähnlich?	nein	ja	nein	ja

5 Figuren zentrisch strecken

a) Ⓐ



Ⓑ $A_R = 4 \cdot 6 = 24$ (cm²)

b) Ⓐ Flächeninhalt des ursprünglichen Dreiecks:

$A_D = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$ (cm²)

Berechnung des Streckfaktors:

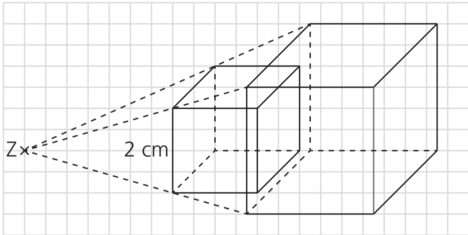
$9 = k^2 \cdot 4 \Rightarrow k = 1{,}5$

Ⓑ Höhe des Bilddreiecks:

$h = 2 \cdot 1{,}5 = 3$ (cm)

6 Körper zentrisch strecken

a) Ⓐ



Ⓑ $V_W = 2^3 \cdot 1{,}5^3 = 27\ (\text{cm}^3)$

b) Ⓐ Volumen ursprünglicher Quader:
$V = 9 \cdot 3{,}6 \cdot 5{,}4 = 174{,}96\ (\text{dm}^3)$
Berechnung des Streckfaktors:
$6{,}48 = 174{,}96 \cdot k^3 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

Ⓑ Seitenlänge a: $9 \cdot \frac{1}{3} = 3$ (dm)

Seitenlänge b: $3{,}6 \cdot \frac{1}{3} = 1{,}2$ (dm)

Seitenlänge c: $5{,}4 \cdot \frac{1}{3} = 1{,}8$ (dm)

7 Mit den Strahlensätzen rechnen

a) Ⓐ

$$\begin{aligned} \frac{9}{15} &= \frac{x}{x+5} && |\cdot (x+5) \\ 0{,}6 \cdot (x+5) &= x \\ 0{,}6x + 3 &= x && |-0{,}6x \\ 3 &= 0{,}4x && |:0{,}4 \\ 7{,}5\ (\text{cm}) &= x \end{aligned}$$

Ⓑ $\frac{x}{6} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = 4{,}8$ (cm)

b) $\frac{x}{15} = \frac{72}{39} \Rightarrow x \approx 27{,}7$ (m)

8 Kathetensatz und Höhensatz anwenden

a) $c = 5 + 3 = 8$ (cm)
$h^2 = 5 \cdot 3 \Rightarrow h \approx 3{,}9$ (cm)
$a^2 = 8 \cdot 3 \Rightarrow a \approx 4{,}9$ (cm)
$b^2 = 5 \cdot 8 \Rightarrow b \approx 6{,}3$ (cm)

b) $|\overline{RH}|^2 = 6 \cdot 2 \Rightarrow |\overline{RH}| \approx 3{,}46$ (cm)

$A_{RPS} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3{,}46 = 13{,}84\ (\text{cm}^2)$

$A_{QPT} = 13{,}84 \cdot 2{,}5^2 = 86{,}5\ (\text{cm}^2)$

Z

Selbsteinschätzungsbogen

Erhältlich unter www.ccbuchner.de/medien (60014-03).

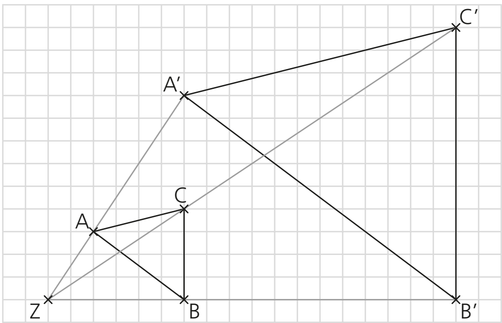
L

1

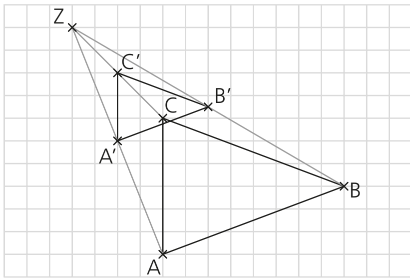
	a)	b)	c)	d)
r	2,4 cm	4,5 cm	0,75 dm	0,84 m
d	4,8 cm	9 cm	1,5 dm	1,68 cm
V_{Ku}	57,88 cm^3	381,51 cm^3	1,77 dm^3	2,5 m^3
OKu	72,35 cm^2	254,34 cm^2	7,07 dm^2	8,86 m^2

2 a) Die Dreiecke haben drei gleiche Winkel (45°; 60°; 75°) und sind daher ähnlich.
b) Das Verhältnis einander entsprechender Seiten beträgt bei allen Seiten $\frac{2}{3}$, die Dreiecke sind daher ähnlich.

3 a)



b)



4 a) $\frac{x}{7,2} = \frac{14}{12} \Rightarrow x = 8,4$ (cm) b) $\frac{y}{14} = \frac{9,6}{24} \Rightarrow y = 5,6$ (cm) c) $\frac{x}{8} = \frac{6}{5} \Rightarrow x = 9,6$ (cm)
d) $\frac{x}{6,3} = \frac{4}{9} \Rightarrow x = 2,8$ (cm) e) $\frac{x}{8,1} = \frac{4,8}{7,2} \Rightarrow x = 5,4$ (cm) f) $\frac{x}{7,5} = \frac{6}{9} \Rightarrow x = 5$ (cm)
$\frac{y}{6} = \frac{7,2}{4,8} \Rightarrow y = 9,0$ (cm)

5 a) Berechnung mit dem Höhensatz:
$h^2 = 1,8 \cdot 5 \Rightarrow h = 3$ (m)
Der Mast ragt 3 m über das Deck.
b) Berechnung mit dem Kathetensatz:
$a^2 = 6,8 \cdot 1,8 \Rightarrow a \approx 3,5$ (m)
$b^2 = 6,8 \cdot 5 \Rightarrow b \approx 5,8$ (m)
Die Spannleinen sind 3,5 m und 5,8 m lang.

6 $\frac{1,85}{7,5} = \frac{a}{6,1} \Rightarrow a \approx 1,5$ (m)
$\frac{1,85}{7,5} = \frac{b}{4,7} \Rightarrow b \approx 1,16$ (m)
$\frac{1,85}{7,5} = \frac{c}{2,9} \Rightarrow c \approx 0,72$ (m)

7 d = 46 m ⇒ r = 23 m
$O = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 23^2 = 3\,322,12\ (m^2)$

8 a) Durchmesser innen: d = 21,5 – 2 · 1,5 = 18,5 (cm)
Radius innen: r = 9,25 cm
$V_{Ku} = \frac{4}{3} \cdot 9,25^3 \cdot 3,14 \approx 3\,313,6\ (cm^3)$
b) Durchmesser innen: d = 34,4 – 2 · 2,1 = 30,2 (cm)
Radius innen: r = 15,1 cm
$V_{HK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 15,1^3 \cdot 3,14 \approx 7\,207\ (cm^3)$

Diese beiden Seiten dienen dem Üben und Vertiefen der neuen Lerninhalte. Dabei sollen die Lernenden überwiegend eigenständig arbeiten. Um das zu ermöglichen, wird zum einen das Merkwissen „Auf einen Blick“ nochmals in der linken Spalte zusammengefasst, zum anderen stehen die Lösungen am Ende des Buches zur Selbstkontrolle zur Verfügung.

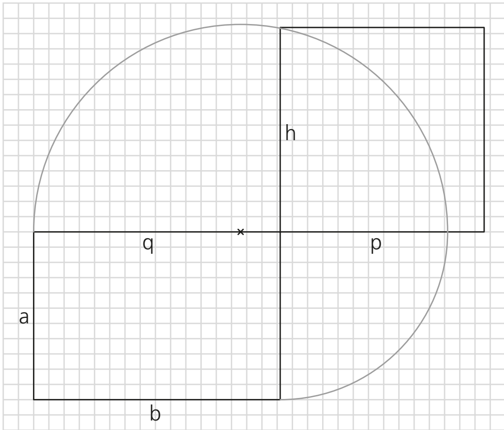
9 Volumen der ursprünglichen Kugel: $V_{Ku} = \frac{606,8}{7,4} = 82$ (cm^3)

Radius der ursprünglichen Kugel: $82 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot 3,14 \Rightarrow r \approx 2,7$ cm

Radius der abgeschliffenen Kugel: $r_{neu} = 2,7 - 0,3 = 2,4$ (cm)

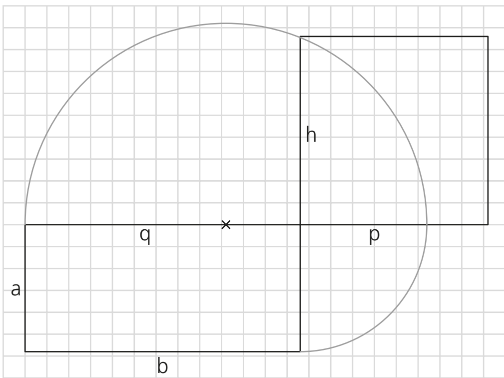
Volumen der abgeschliffenen Kugel: $V_{neu} = \frac{4}{3} \cdot 2,4^3 \cdot 3,14 \approx 57,876$ (cm^3)

10 a)



Rechnerische Überprüfung:
$h^2 = 5,5 \cdot 8,1 \Rightarrow h \approx 6,7$ cm

b)



Rechnerische Überprüfung:
$h_2 = 2,9 \cdot 6,3 \Rightarrow h \approx 4,3$ cm

11 a) Volumen der Halbkugel: $V_{HK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 21^3 \cdot 3,14 = 19\,386,36$ (cm^3)

Volumen des Kegels: $V_{Ke} = \frac{1}{3} \cdot 21^2 \cdot 3,14 \cdot 28 = 12\,924,24$ (cm^3)

Volumen insgesamt: $V = 19\,386,36 + 12\,924,24 = 32\,310,6$ (cm^3)

Oberflächeninhalt der Halbkugel: $O_{HK} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 21^2 \cdot 3,14 = 2\,769,48$ (cm^2)

Berechnung der Mantellinie: $s^2 = 28^2 + 21^2 \Rightarrow s = 35$

Oberflächeninhalt des Kegels: $O_{Ke} = 21 \cdot 3,14 \cdot 35 = 2\,307,9$ (cm^2)

Oberflächeninhalt insgesamt: $O = 2\,769,48 + 2\,307,9 = 5\,077,38$ (cm^2)

b) Volumen der Pyramide: $V_{Py} = \frac{1}{3} \cdot 50^2 \cdot 60 = 50\,000$ (cm^3)

Volumen der Halbkugel: $V_{HK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 10^3 \cdot 3,14 \approx 2\,093,33$ (cm^3)

Volumen insgesamt: $V = 50\,000 - 2\,093,33 \approx 47\,906,67$ (cm^3)

Oberflächeninhalt der Halbkugel: $O_{HK} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 3,14 = 628$ (cm^2)

Berechnung der Höhe: $h^2 = 60^2 + 25^2 \Rightarrow h = 65$ cm

Oberflächeninhalt der Pyramide: $O_{Py} = 50^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 65 = 9\,000$ (cm^2)

Oberflächeninhalt insgesamt: $O = 9\,000 + 628 - 10^2 \cdot 3,14 = 9\,314$ (cm^2)

12 Höhensatz:

$|\overline{BH}|^2 = |\overline{AH}| \cdot |\overline{CH}|$

$|\overline{BH}|^2 = 3 \cdot 7 \Rightarrow |\overline{BH}| \approx 4{,}58$ (cm)

Satz des Pythagoras:

$|\overline{BA}|^2 = |\overline{AH}|^2 + |\overline{BH}|^2$

$|\overline{BA}|^2 = 7^2 + 4{,}58^2 \Rightarrow |\overline{BA}| \approx 8{,}37$ (cm)

Satz des Pythagoras:

$|\overline{AC}|^2 = |\overline{BA}|^2 + |\overline{BC}|^2$

$10^2 = 8{,}37^2 + |\overline{BC}|^2 \Rightarrow |\overline{BC}| \approx 5{,}47$ (cm)

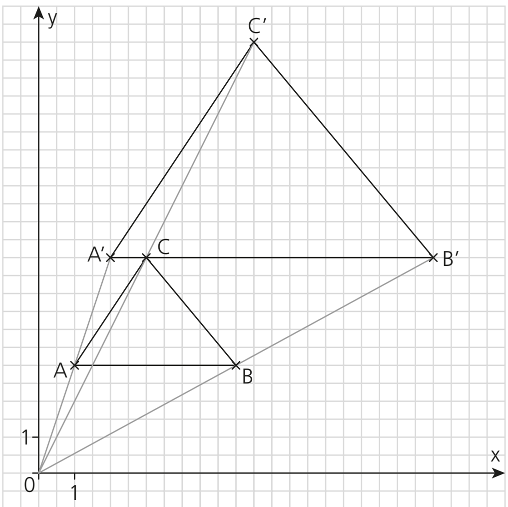
$U_D = 10 + 8{,}37 + 5{,}47 = 23{,}84$ (cm)

13 $V_{Original} = \frac{1}{3} \cdot 26 \cdot 5 \approx 43{,}33$ (cm³)

$V_{Bild} = 43{,}33 \cdot 3{,}5^3 \approx 1\,857{,}77$ (cm³)

$V_{Stumpf} = 1\,857{,}77 - 43{,}33 = 1\,814{,}44$ (cm³)

14 a)



b) $k = \frac{|\overline{OC'}|}{|\overline{OC}|} = \frac{13{,}5}{6{,}75} = 2$

$A_{ABC} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 27 = 6{,}75$ (cm²)

c) $A_{A''B''C''} = 4^2 \cdot 6{,}75 = 108$ (cm²)

Die Abschlussrunde bietet die Möglichkeit, am Ende einer Einheit den Lernstand zu erheben und gegebenenfalls Maßnahmen zu ergreifen, um Defizite zu beheben. Sollte die Lehrkraft eine Testung unabhängig vom Schulbuch wünschen, stehen in click & teach Klassenarbeiten zur Verfügung.

L

1 a) $V_{Ku} = \frac{4}{3} \cdot 4{,}8^3 \cdot 3{,}14 \approx 463{,}01$ (cm³)
$O_{Ku} = 4 \cdot 4{,}8^2 \cdot 3{,}14 \approx 289{,}38$ (cm²)
b) $V_{HK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 7{,}6^3 \cdot 3{,}14 \approx 918{,}92$ (dm³)
$O_{HK} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7{,}6^2 \cdot 3{,}14 + 7{,}6^2 \cdot 3{,}14 \approx 544{,}10$ (dm²)
c) $1\,436{,}03 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot 3{,}14 \Rightarrow r = 7$ cm
$O_{Ku} = 4 \cdot 7^2 \cdot 3{,}14 = 615{,}44$ (cm²)

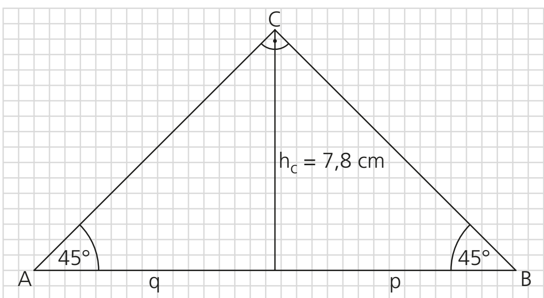
2 a) Ⓐ und Ⓒ sind ähnlich. Es gilt:
Seite a: $6 : 4{,}5 = \frac{4}{3}$
Seite b: $4{,}8 : 3{,}6 = \frac{4}{3}$
Seite c: $8{,}4 : 6{,}3 = \frac{4}{3}$
b) Ⓑ und Ⓒ sind ähnlich, da ihre Winkel gleich groß sind (29°, 67°, 84°).

3 a) $\frac{2}{9{,}2} = \frac{x}{8{,}05} \Rightarrow x = 1{,}75$ (cm)
b) $\frac{5{,}5}{2{,}5} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 6{,}6$ (cm)
$\frac{2{,}5 + 1{,}5}{5{,}5} = \frac{3 + y}{6{,}6} \Rightarrow y = 1{,}8$ (cm)

4 $\frac{1}{10} = \frac{d}{4} \Rightarrow d = 0{,}4$ (cm) Der Draht ist 0,4 cm dick.

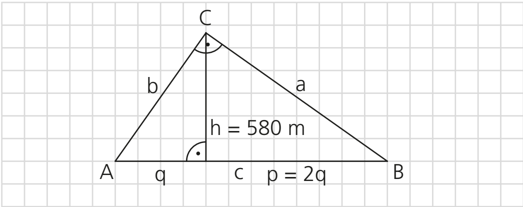
5 a) Berechnung mit dem Kathetensatz:
$b^2 = c \cdot q$
$4{,}7^2 = c \cdot 2{,}1 \Rightarrow c \approx 10{,}5$ (cm)
$c = p + q$
$10{,}5 = p + 2{,}1 \Rightarrow p = 8{,}4$ (cm)
Berechnung mit dem Höhensatz:
$h^2 = p \cdot q$
$h^2 = 8{,}4 \cdot 2{,}1 \Rightarrow h = 4{,}2$ (cm)
b) Berechnung mit dem Höhensatz:
$h^2 = p \cdot q$
$3{,}6^2 = 2{,}5 \cdot q \Rightarrow q \approx 5{,}2$ (cm)
$c = p + q$
$c = 2{,}5 + 5{,}2 = 7{,}7$ (cm)
Berechnung mit dem Kathetensatz:
$b^2 = c \cdot q$
$b^2 = 7{,}7 \cdot 5{,}2 \Rightarrow b \approx 6{,}3$ (cm)
c) $c = p + q$
$c = 4{,}4 + 2{,}3 = 6{,}7$ (cm)
Berechnung mit dem Kathetensatz:
$a^2 = c \cdot p$
$a^2 = 6{,}7 \cdot 4{,}4 \Rightarrow a \approx 5{,}4$ (cm)
$b^2 = c \cdot q$
$b^2 = 6{,}7 \cdot 2{,}3 \Rightarrow b \approx 3{,}9$ (cm)

6



Es gilt p = q (gleichschenkliges Dreieck),
also $h^2 = p \cdot q = p^2 \Rightarrow h = p = 7{,}8$ (cm).
$c = p + q$
$c = 7{,}8 + 7{,}8 = 15{,}6$ (cm)
$a^2 = h^2 + p^2$
$a^2 = 7{,}8^2 + 7{,}8^2 \Rightarrow a \approx 11{,}0$ cm
Es gilt a = b (gleichschenkliges Dreieck),
also b = 11,0 cm.

7



$h^2 = p \cdot q$

$580 = p \cdot q = 2q \cdot q$

$580 = 2q^2 \Rightarrow q \approx 17{,}0$ (m)

$\Rightarrow p \approx 34{,}0$ (m)

$a^2 = c \cdot p$

$a^2 = 51{,}0 \cdot 34{,}0 \Rightarrow a \approx 41{,}6$ (m)

$b^2 = c \cdot q$

$b^2 = 51{,}0 \cdot 17{,}0 \Rightarrow b \approx 29{,}4$ (m)

L

Die Seiten „Kreuz und quer“ greifen im Sinne einer permanenten Wiederholung Lerninhalte früher behandelter Kapitel auf und sichern so nachhaltig Basiskompetenzen.

Zahlen und Operationen

1 a)

	a)	b)	c)	d)	e)
p	0,05	0,013	–0,005	0,043	–0,016
q	1,05	1,013	0,995	1,043	0,984

2 a) lineares Wachstum: Eine Größe nimmt in gleichen Zeiträumen immer um denselben Betrag zu.

b) exponentielles Wachstum: Eine Größe verändert sich in jeweils gleichen Zeiträumen immer um denselben Faktor.

3 a) W_0: Anfangswert   q: Wachstumsfaktor bzw. Zinsfaktor

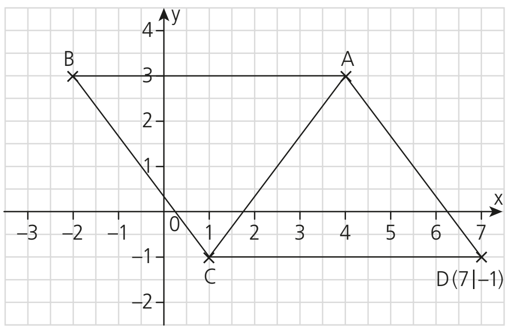
n: Beobachtungszeitraum W_n: Endwert

b)

	W_0	q	n (Jahre)	W_n
Ⓐ	9 000	1,023	5	≈ 10 083,72
Ⓑ	≈ 16 000	0,984	8	14 062,67
Ⓒ	73 000	≈ 0,981	10	60 458
Ⓓ	56 000	0,998	≈ 13	47 879,88

Raum und Form

1 a)/b)



2 a) $V_{Würfel} = 4^3 = 64\ (cm^3)$ $V_{Py1} = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 4 = \frac{64}{3}\ (cm^3)$

$V_{Py2} = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 12 = 64\ (cm^3)$ $V_{Py3} = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 8 = \frac{128}{3}\ (cm^3)$

$V_{Py1} < V_{Py3} < V_{Py2} = V_{Würfel}$

b) Würfel und eine quadratische Pyramide haben dasselbe Volumen, wenn sie gleiche Grundfläche haben und die Pyramide die dreifache Höhe des Würfels besitzt.

Größen und Messen

1

	a)	b)	c)	d)
r	4 cm	4,5 dm	≈ 1,91 m	5 dm
d	8 cm	9 dm	≈ 3,82 m	10 dm
u_K	25,12 cm	28,26 dm	12 m	31,4 dm
A_k	50,24 cm^2	63,585 dm^2	≈ 11,455 m^2	78,5 dm^2

2 a) $102{,}5 = a \cdot 8{,}2$
$\Rightarrow a = 12{,}5$ (m)

b) $31{,}04 = \frac{9{,}7 \cdot h}{2}$
$\Rightarrow h = 6{,}4$ (dm)

c) $1{,}08 = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot c$
$\Rightarrow c = 1{,}2$ (m)

d) $49{,}2 = \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot h_k$
$\Rightarrow 6{,}15$ (m) $= h_k$

e) $9{,}75 = \frac{1}{3} \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot h_k$
$\Rightarrow 13$ m $= h_k$

f) $785 = \frac{1}{3} r^2 \cdot 3{,}14 \cdot 30$
$\Rightarrow 5$ cm $= r$

Daten und Zufall

1 a) Wahrscheinlichkeit, 60 ct zu bekommen: $\frac{1}{4} = 25\,\%$

Wahrscheinlichkeit weniger als 60 ct zu bekommen: $\frac{5}{8} = 62{,}5\,\%$

b) Wahrscheinlichkeit, mehr als 60 ct zu bekommen: $\frac{1}{8} = 12{,}5\,\%$

2 $P(E_1) = 9\,\%$ $P(E_2) = 19\,\%$ $P(E_3) = 25\,\%$ $P(E_4) = 90\,\%$