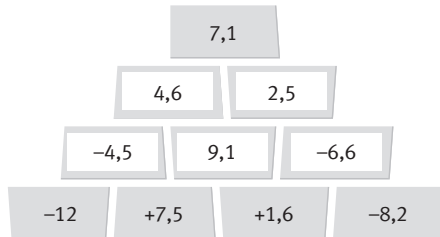
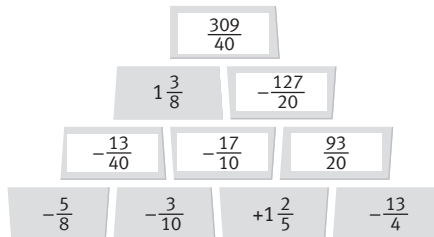


Mit rationalen Zahlen rechnen

KX 1 a)



b)



KX 2 a) richtig: 4 b) richtig: 3 c) richtig: 2, 3

Mit reellen Zahlen rechnen

KX 3 a) $L = \{-7; 7\}$

b) $L = \{-1,5; 1,5\}$

c) $L = \{0\}$

d) $L = \{-4; 4\}$

e) $L = \emptyset$

f) $L = \left\{-\frac{3}{7}; \frac{3}{7}\right\}$

g) $L = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$

h) $L = \emptyset$

i) $L = \emptyset$

KX 4 a) $\sqrt{25 \cdot 9} = 5 \cdot 3 = 15$

b) $\sqrt{196 \cdot 16} = 14 \cdot 4 = 56$

c) $\sqrt{361 \cdot 9} = 19 \cdot 3 = 57$

d) $\sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

e) $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{7}{8}$

f) $\sqrt{\frac{81 \cdot 16}{121}} = \frac{9 \cdot 4}{11} = 3 \frac{3}{11}$

KX 5 a) $\sqrt{18a^2} = 3 \cdot \sqrt{2}a$

b) $\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

c) $\sqrt{\frac{8b^2}{9a^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}b}{3a}$

d) $\frac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt{ab}} = \sqrt{a^2} = a$

e) $\sqrt{\frac{0,4a^2}{0,625}} = \sqrt{0,64a^2} = 0,8a$

f) $\sqrt{\frac{12a}{3a^3}} = \sqrt{\frac{4}{a^2}} = \frac{2}{a}$

g) $\frac{\sqrt{54a}}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{2a^3}}{\sqrt{3b}} = \sqrt{\frac{36a^4}{b^2}} = \frac{6a^2}{b}$

h) $\sqrt{\frac{45a^3}{2b}} \cdot \sqrt{\frac{32a}{5b^5}} = \sqrt{\frac{144a^4}{b^6}} = \frac{12a^2}{b^3}$

K5 6 a) $2\sqrt{3}x = 8\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1,5 \Rightarrow L = \{1,5\}$

b) $15 - 6\sqrt{5} + \sqrt{5}x = 20 - 6\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5}x = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \Rightarrow L = \{\sqrt{5}\}$

Potenzgesetze anwenden

K5 7 a) $4^{3+0-5} = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

b) $4^{-2+3-(-2)} = 4^3 = 64$

c) $2^{-3+4} + 2^{-2+4} = 2 + 2^2 = 6$

d) $1,2^{4-3} - 1,2^{4-4} = 1,2 - 1 = 0,2$

e) $(-2)^{8-4-2} = (-2)^2 = 4$

f) $2^{4-7-(-3)} = 2^0 = 1$

K5 8 a) $\frac{2^{10} \cdot a^5}{2^9 \cdot a^{10}} = \frac{2}{a^5}$

b) $\frac{6^4 \cdot a^5}{6^3 \cdot a^3} = 6a^2$

c) $\frac{6x^9}{6x^5} = x^4$

d) $\frac{1}{\left(\frac{x^4y}{x^2y^3}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{x^8y^2}{x^4y^6}\right)} = \frac{x^4y^6}{x^8y^2} = \frac{y^4}{x^4} = \left(\frac{y}{x}\right)^4$

e) $\frac{125x^6 + 27x^6}{16x^6} = \frac{152x^6}{16x^6} = \frac{19}{2} = 9,5$

f) $5x^5 + 5x^9 = 5x^5(1 + x^4)$

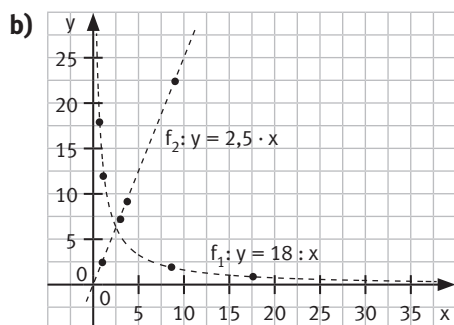
g) $x^0 - x^{-1} + x^{-2} - x^{-3} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$

h) $\frac{-1}{2-x} + \frac{3(2-x)}{2-x} - \frac{(1-x)}{2-x} = \frac{4-2x}{2-x} = \frac{2(2-x)}{2-x} = 2$

Proportionalitäten

- 9 a)** 1 Wegen der Produktgleichheit ($3 \cdot 6 = 9 \cdot 2 = 18$) liegt eine indirekte Proportionalität vor.
2 Wegen der Quotientengleichheit ($9 : 3,6 = 7,5 : 3 = 2,5$) liegt eine direkte Proportionalität vor.

1	x	1	1,5	3	9	18
	y	18	12	6	2	1
2	x	1	3,6	3	9	18
	y	2,5	9	7,5	22,5	45



- c) Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:
- 1 Ein Arbeiter braucht für eine bestimmte Aufgabe 18 Stunden. Drei Arbeiter erledigen die Aufgabe in 6 Stunden.
 - 2 Ein Kilogramm Äpfel kostet 2,50 €, drei Kilogramm kosten 7,50 €.

- 10 a)** Indirekte Proportionalität, mögliche Arbeiter-Stunden-Zahlenpaare sind: (1|18); (2|9); (3|6).
b) Weder direkte noch indirekte Proportionalität. Nimmt man z. B. ein Becken mit 100 m^3 Wasser, aus dem pro Stunde 10 m^3 abfließen, dann sind die Stunden- m^3 -Zahlenpaare: (0|100); (1|90); (2|80); (3|70); (4|60); ...; (9|10); (10|0). Die Zuordnung ist linear.
c) Auch hier liegt weder eine direkte noch eine indirekte Proportionalität vor.

- 11** $15 \text{ d} \cdot 45 \text{ km} = x \text{ d} \cdot 27 \text{ km} \Leftrightarrow x \text{ d} = \frac{15 \text{ d} \cdot 45 \text{ km}}{27 \text{ km}} \Leftrightarrow x = 25$
Wenn täglich 27 km gefahren werden, reicht die Tankfüllung 25 Tage.

Prozent- und Zinsrechnung

- 12** $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}x\right) = 54 \Leftrightarrow x = \frac{16}{9} \cdot 54 = 96$
Die Schuhe kosteten ursprünglich 96 €.

13

	a)	b)	c)	d)
Kapital in €	8400	12 600	24 120	1000
Jahreszins in €	100,8	189	651,24	8,5
Zinssatz p. a. in %	1,2	1,5	2,7	0,85

- 14** Die Stückelung des Geldes spielt keine Rolle, es kommt nur auf den Zinssatz an, und der ist bei Bank A höher als bei Bank B. Daher sollte Oma Schwarz sich für das Angebot der Bank A entscheiden.
Bank A: $K_3 = 15\,000 \text{ €} \cdot 1,035^3 = 16\,630,77 \text{ €}$
Die Zinsen bei Anlage von 15 000 € für 3 Jahre bei Bank A betragen 1630,77 €.

Lineare Funktionen

KX

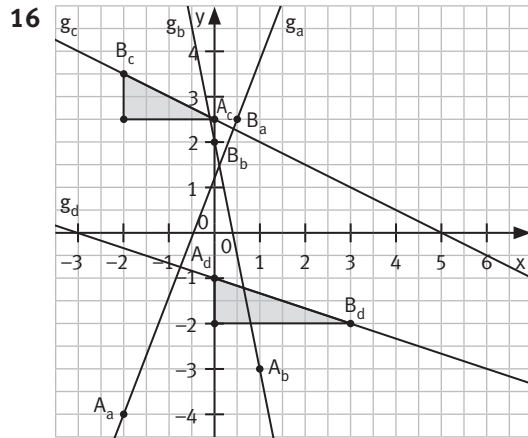
15 a) $g: y = x + 2$

b) $g: y = 2$

c) $g: y = -2x$

d) $g: y = -x - 2$

KX



a) $m_a = \frac{2,5 + 4}{0,5 + 2} = 2,6$

$-4 = 2,6 \cdot (-2) + t_a \Leftrightarrow t_a = 1,2$

$g_a: y = 2,6x + 1,2$

b) $-3 = m_b + 2 \Leftrightarrow m_b = -5$

$g_b: y = -5x + 2$

c) $3,5 = -0,5 \cdot (-2) + t_c \Leftrightarrow t_c = 2,5$

$g_c: y = -0,5x + 2,5$

d) $g_d: y = -\frac{1}{3}x - 1$

KX

17 Wegen $m \cdot m^* = -1$ gilt:

a) $2 = \frac{1}{2} \cdot 5 + t \Leftrightarrow t = -0,5$

Die Funktionsgleichung von g^* lautet: $y = \frac{1}{2}x - 0,5$.

b) $2 = -4 \cdot 0 + t \Leftrightarrow t = 2$

Die Funktionsgleichung von g^* lautet: $y = -4x + 2$.

Lineare Gleichungen und Ungleichungen

KX

18 a) $x = -\frac{1}{21}$ $\mathbb{N}: L = \emptyset$ $\mathbb{Z}: L = \emptyset$ $\mathbb{R}: L = \left\{-\frac{1}{21}\right\}$

b) $a = -1\frac{13}{17}$ $\mathbb{N}: L = \emptyset$ $\mathbb{Z}: L = \emptyset$ $\mathbb{R}: L = \left\{-1\frac{13}{17}\right\}$

c) $c = -2$ $\mathbb{N}: L = \emptyset$ $\mathbb{Z}: L = \{-2\}$ $\mathbb{R}: L = \{-2\}$

d) $x = 1$ $\mathbb{N}: L = \{1\}$ $\mathbb{Z}: L = \{1\}$ $\mathbb{R}: L = \{1\}$

KX

19 Die Situation wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$1200\text{€} - 1200\text{€} \cdot \frac{x}{100} = 800\text{€} + 800\text{€} \cdot \frac{x}{100} \Leftrightarrow x = 20$

Der Händler hat also 20 % nachgelassen und der Käufer 20 % mehr geboten.

Der Preis des Teppichs beträgt $800\text{€} \cdot 1,2 = 960\text{€}$.

KX

20 a) $x = 8$

b) $x < 3,2$

c) $x = 5$

d) $x = \frac{15}{68}$

e) $x < \frac{19}{85}$

f) $x = 9$

Bruchterme und Bruchgleichungen

KX

21 a) $\frac{1}{(a-1) \cdot (a+1)} \cdot \frac{a+1}{1} = \frac{1}{a-1}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

b) $\frac{3}{(x+3)^2} \cdot \frac{(x-3) \cdot (x+3)}{6} = \frac{x-3}{2 \cdot (x+3)}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

c) $\frac{5x}{(x-3)^2} \cdot \frac{(x-3) \cdot (x+3)}{x^2} = \frac{5 \cdot (x+3)}{x \cdot (x-3)}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$

d) $\frac{2 \cdot (x+3)}{3 \cdot (x-3)} \cdot \frac{5x-3}{8 \cdot (x+3)} = \frac{5x-3}{12 \cdot (x-3)}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

e) $\frac{x-2}{x} \cdot \frac{x}{x+2} = \frac{x-2}{x+2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$

f) $\frac{(y-2) \cdot (y+2)}{(3-y) \cdot (3+y)} \cdot \frac{2 \cdot (y-3)}{2 \cdot (y+2)} = \frac{(y-2) \cdot (y-3)}{(3-y) \cdot (3+y)} = \frac{2-y}{3+y}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; 3\}$

g) $\frac{x}{x \cdot (x-1)} \cdot \frac{2}{x \cdot (x-1)} = \frac{2+x}{x \cdot (x-1)}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

h) $\frac{y}{y+1} - \frac{(y+1) \cdot (y-1)}{y \cdot (y-1)} = \frac{y}{y+1} - \frac{y+1}{y} = \frac{y^2 - (y+1)^2}{y \cdot (y+1)} = \frac{-(2y+1)}{y \cdot (y+1)}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$

- KX** 22 a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 2\}$ $3 \cdot (x+5) = -8 \cdot (x-2) \Leftrightarrow x = \frac{1}{11}$ $L = \left\{\frac{1}{11}\right\}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}; 0\right\}$ $12x^2 = (4x+4) \cdot (3x+1) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$ $L = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ $(2x-3) \cdot (x-1) = 2x \cdot (x-1,5) \Leftrightarrow x = 1,5$ $L = \{1,5\}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 4\}$ $2x \cdot (x+1) = (8x+8) \cdot (0,25x-1) \Leftrightarrow x = -1$ $L = \emptyset$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ $x \cdot (x-5) = 5 \cdot (x-5) \Leftrightarrow x = 5$ $L = \emptyset$
 f) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $(x+1) \cdot (x-2) = -3 \cdot (2-x) \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ $L = \emptyset$

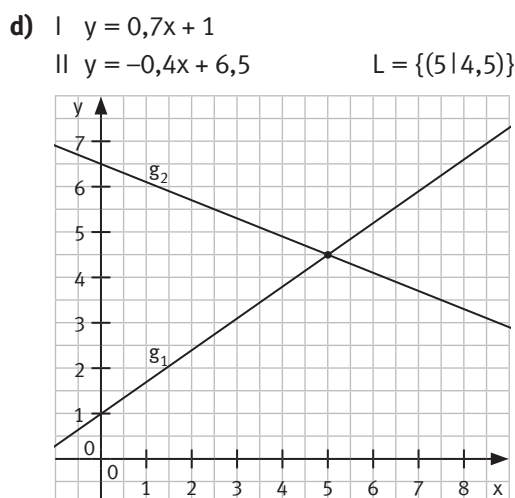
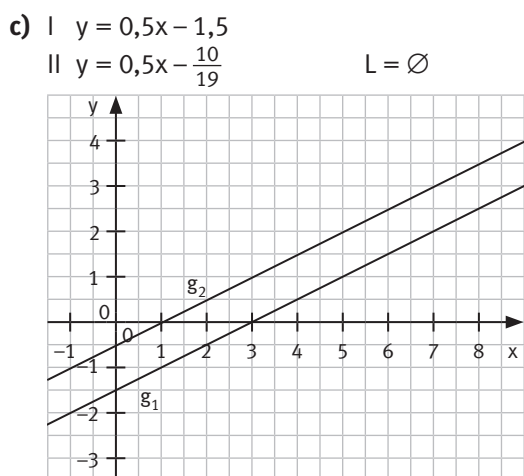
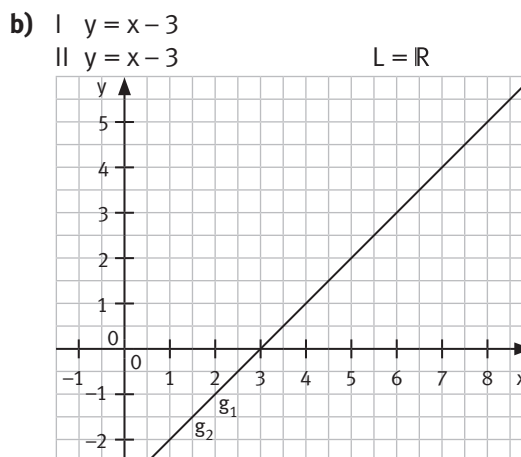
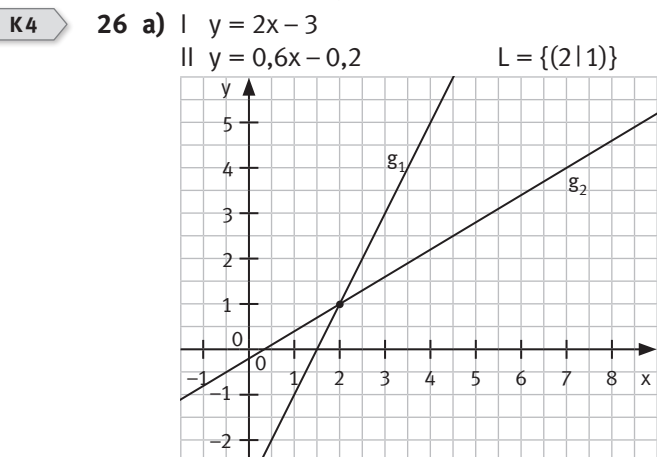
Mit Summentermen rechnen

- KX** 23 a) $a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - b^2) = 2b^2 + 2ab$
 b) $16s^2 - 9u^2 - (9u^2 + 24us + 16s^2) = -18u^2 - 24su$
 c) $36r^2 - 60r + 25 - (36r^2 - 25) = -60r + 50$
 d) $64x^2 - 36y^2 - (36x^2 + 96xy + 64y^2) = 28x^2 - 96xy - 100y^2$

- KX** 24 a) $x^2 - x + 0,25$ b) $y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}$ c) $x^4 + 4x^2 + 4$ d) $4a^4 - 4a^2 + 1$ e) $121x^2 - 196y^2$

- KX** 25 $A_{\text{Quadrat}}(x) = x^2 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{Rechteck}}(x) = (x-2) \text{ cm} \cdot (x+2) \text{ cm} = (x^2 - 4) \text{ cm}^2 = A_{\text{Quadrat}}(x) - 4 \text{ cm}^2$
 Der Flächeninhalt des Rechtecks ist um 4 cm^2 kleiner als der des Quadrats.

Lineare Gleichungssysteme



K4 27 Es sind individuelle Lösungswege möglich.

a) z. B. Einsetzungsverfahren:

$$\text{II } x = 22,5 - 2y$$

$$\text{II in I: } 3y + 9(22,5 - 2y) + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 14,5; x = -6,5$$

$$L = \{(-6,5 | 14,5)\}$$

c) z. B. Additionsverfahren:

$$\text{I} + \text{II: } 9x = -9$$

$$\Leftrightarrow x = -1; y = -12$$

$$L = \{(-1 | -12)\}$$

b) z. B. Einsetzungsverfahren:

$$\text{I in II: } 3y = 1,5(5y - 27) - 4,5$$

$$\Leftrightarrow y = 10; x = 23$$

$$L = \{(23 | 10)\}$$

d) z. B. Gleichsetzungsverfahren:

$$\text{Umformen ergibt: I } y = -\frac{4}{7}x + 1$$

$$\text{II } y = -\frac{4}{7}x + 1$$

Die beiden Geraden sind identisch.

$$L = \mathbb{R}$$

K3 28 Die Längen der beiden Katheten betragen a cm bzw. b cm. $A_{\text{neu}} = A + 10$

$$\text{Mit } \frac{a}{b} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow a = 3b \text{ und } A = \frac{1}{2}ab \text{ gilt:}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (a + 2) \cdot (b + 2) = \frac{1}{2}ab + 10$$

$$\frac{1}{2} \cdot (3b + 2) \cdot (b + 2) = \frac{1}{2} \cdot 3b \cdot b + 10$$

$$3b^2 + 8b + 4 = 3b^2 + 20$$

$$b = 2; a = 6$$

Die Längen der Katheten betragen 2 cm und 6 cm.

K3 29 I $1 + 6 + x + 7 + y + 0 = 28 \Leftrightarrow x = 14 - y$

$$\text{II } \frac{1 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + x \cdot 3 + 7 \cdot 4 + y \cdot 5 + 0 \cdot 6}{28} = 3,25$$

$$x \text{ in II: } 41 + 3 \cdot (14 - y) + 5y = 91 \Leftrightarrow y = 4; x = 10$$

Zehn Schüler erhielten die Note 3 und vier Schüler die Note 5.

Quadratische Funktionen

K5 30 a) $S(-1 | 3)$ b) $S(3,4 | 0)$ c) $S(0 | -5,6)$ d) $S(-2,3 | 8)$

K5 31 a) $y = (x + 1)^2 + 2$ $S(-1 | 2)$ nicht gestaucht und nicht gestreckt
 b) $y = -0,5(x - 8)^2 + 44$ $S(8 | 44)$ gestaucht
 c) $y = -4(x - 2)^2 + 10$ $S(2 | 10)$ gestreckt
 d) $y = -2(x + 1,5)^2 + 2$ $S(-1,5 | 2)$ gestreckt

K6 32 a) $y = (x + 1)^2 - 4$ $S(-1 | -4)$ nach oben geöffnet $p(-2) = -3 \neq -5; A \notin p$
 b) $y = -0,5(x + 4)^2 + 20$ $S(-4 | 20)$ gestaucht, nach unten geöffnet $p(3) = -4,5 \neq -4; A \notin p$
 c) $y = -x^2 + 8$ $S(0 | 8)$ nach unten geöffnet $p(0) = 8; A \in p$

Quadratische Gleichungen und quadratische Gleichungssysteme

KX 33 a) $L = \{3; 4\}$ b) $L = \{-2; 2\}$ c) $L = \{-1,5; 1,2\}$
 d) $L = \{3\}$ e) $L = \{\}$ f) $L = \left\{\frac{2}{3}; 1\frac{1}{3}\right\}$

KX

34 a) $x^2 - 1,5x - 1 = 0$
 $x_{1/2} = \frac{1,5 \pm \sqrt{1,5^2 + 4}}{2} = \frac{1,5 \pm 2,5}{2}$
 $x_1 = -0,5; x_2 = 2$

b) Pia hat die Parabelgleichung $p_p: y = x^2 - 1,5x - 1$ umgeformt in $p_p: y = (x - 0,75)^2 - 1,5625$ und den Graphen der Parabel gezeichnet; anschließend hat sie die Schnittpunkte P_1 und P_2 von p_p mit der x-Achse und damit deren x-Koordinaten als Lösungen erhalten.

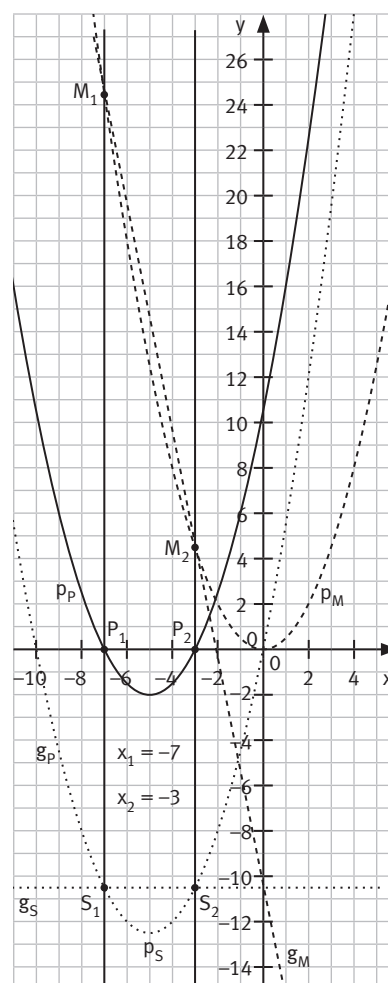
Marcel hat die Gleichung $x^2 - 1,5x - 1 = 0$ umgeformt in $x^2 = 1,5x + 1$, dann die Parabel $p_M: y = x^2$ und die Gerade $g_M: y = 1,5x + 1$ gezeichnet. Mit den Schnittpunkten M_1 und M_2 von p_M mit g_M hat er die gesuchten Lösungen erhalten.

Sebastian hat $x^2 - 1,5x - 1 = 0$ umgeformt in $x^2 - 1,5x = 1$ und dann

$p_S: y = x^2 - 1,5x = (x - 0,75)^2 - 0,5625$ gezeichnet; anschließend hat er den Graphen von p_S und die Gerade $g_S: y = 1$ gezeichnet und die Lösungen mithilfe der Schnittpunkte S_1 und S_2 von p_S mit g_S erhalten.

- c) $p_p: y = 0,5x^2 + 5x + 10,5 \cap g_p: y = 0 = \{P_1; P_2\}$
 $p_M: y = 0,5x^2 \cap g_M: y = -5x - 10,5 = \{M_1; M_2\}$
 $p_S: y = 0,5x^2 + 5x \cap g_S: y = -10,5 = \{S_1; S_2\}$
 Die Schnittpunkte P_1 und P_2 , M_1 und M_2 , S_1 und S_2 haben die x-Koordinaten $x_1 = -7$ und $x_2 = -3$, d. h.: $L = \{-7; -3\}$.

zu c)



KX

35 a) $x^2 - 2,5x - 6 = 0$ $L = \left\{ \frac{2,5 \pm \sqrt{30,25}}{2} \right\} = \{-1,5; 4\}$
 b) $2x^2 + 4x - 4 = 0$ $L = \{-1 \pm \sqrt{3}\} = \{-2,73; 0,73\}$

Statistische Kennwerte

KX

36 a) Es sind unterschiedliche Lösungen möglich, beispielsweise: 1; 2; 3; 6; 8:
 arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{1+2+3+6+8}{5} = 4$; Zentralwert/Median: $z = 3$
 oder: 1; 1; 3; 7; 8:

arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{1+1+3+7+8}{5} = 4$; Zentralwert/Median: $z = 3$

b) Die Zahlenfolge 3, 3, 3, 8, 8 hat den Zentralwert $z = 3$ und liefert das größte arithmetische Mittel von fünf Zahlen aus G, nämlich:

$$\bar{x} = \frac{3+3+3+8+8}{5} = 5$$

- KX** 37 Zunächst wird man die kleinste Körpergröße festlegen, z. B. 169 cm. Daraus ergibt sich durch die gegebene Spannweite die zweite Körpergröße, hier 181 cm. Die dritte Körpergröße ergibt sich mithilfe des arithmetischen Mittels:

$$(169 \text{ cm} + 181 \text{ cm} + x \text{ cm}) : 3 = 174 \text{ cm} \Rightarrow x \text{ cm} = (522 - 169 - 181) \text{ cm} = 172 \text{ cm}.$$

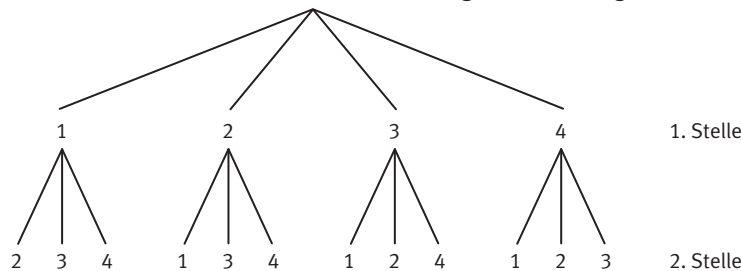
Wenn man die erste Körpergröße ungünstig wählt, z. B. 172 cm, kann es sein, dass sich durch die dritte Größe die Spannweite ändert: Mit 172 cm und 184 cm als erster und zweiter Größe erhält man mithilfe des arithmetischen Mittels als dritte Größe $x \text{ cm} = (522 - 172 - 184) \text{ cm} = 166 \text{ cm}$. Die Spannweite zwischen dem kleinsten und größten Wert beträgt dann $(184 - 166) \text{ cm} = 18 \text{ cm}$. Es sind also nur wenige Lösungen möglich, wenn man die erste Körpergröße mit ganzen Zentimetern angibt.

1. Körpergröße	2. Körpergröße	3. Körpergröße	arithmetisches Mittel	Spannweite	Lösung
164 cm	176 cm	182 cm	174 cm	18 cm	nein
165 cm	177 cm	180 cm	174 cm	15 cm	nein
166 cm	178 cm	178 cm	174 cm	12 cm	ja
167 cm	179 cm	176 cm	174 cm	12 cm	ja
168 cm	180 cm	174 cm	174 cm	12 cm	ja
169 cm	181 cm	172 cm	174 cm	12 cm	ja
170 cm	182 cm	170 cm	174 cm	12 cm	ja
171 cm	183 cm	168 cm	174 cm	15 cm	nein
172 cm	184 cm	166 cm	174 cm	18 cm	nein

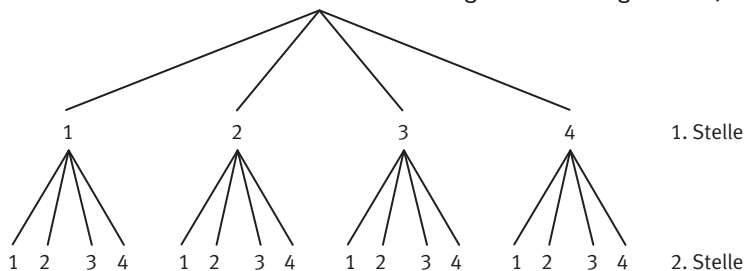
Die Körpergrößen der drei Personen könnten damit folgendermaßen ausfallen (in cm):
166|178|178; 167|176|179; 168|174|180; 169|172|181; 170|170|182.

Zufallsexperimente darstellen

- KX** 38 a) Es sind $4 \cdot 3 = 12$ verschiedene zweistellige Zahlen möglich: 12, 13, ..., 42, 43



- b) Es sind $4 \cdot 4 = 16$ verschiedene zweistellige Zahlen möglich: 11, 12, 13, ..., 42, 43, 44



Empirisches Gesetz der großen Zahlen

- KX** 39 Die relative Häufigkeit, dass eine Person „Zahl“ geworfen hat, würde sich bei allen fünf Personen näher bei 0,5 einpendeln: Je öfter der Versuch durchgeführt wird, desto stärker stabilisiert sich die relative Häufigkeit des Ergebnisses „Zahl“ um einen festen Zahlenwert.

Laplace-Wahrscheinlichkeit

- KX** 40 a) $P(15\text{-jähriger Junge}) = \frac{6}{25}$
b) $P(\text{Schülerin, die älter als 15 ist}) = \frac{9}{25}$

Umfang und Flächeninhalt ebener Figuren

KX

41 $A = 12 \text{ FE}$ mit $D(3|4,5)$

KX

42 $u = a + b + c + d$

$$21 \text{ cm} = a + 4 \text{ cm} + c + 5 \text{ cm}$$

$$a + c = 21 \text{ cm} - 9 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$$

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

$$h = A : \left(\frac{a+c}{2} \right)$$

$$h = 19,2 \text{ cm}^2 : \left(\frac{12 \text{ cm}}{2} \right) = 3,2 \text{ cm}$$

KX

43 Die Länge der kurzen Seite des Rechtecks sei $x \text{ m}$, die Länge der langen Seite $(x + 3) \text{ m}$.

$$A_{\text{alt}}(x) = x \cdot (x + 3) \text{ m}^2 = (x^2 + 3x) \text{ m}^2$$

$$A_{\text{neu}}(x) = (x + 2) \cdot (x + 5) \text{ m}^2 = (x^2 + 7x + 10) \text{ m}^2$$

$$A_{\text{alt}}(x) + 26 \text{ m}^2 = A_{\text{neu}}(x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 26 = x^2 + 7x + 10$$

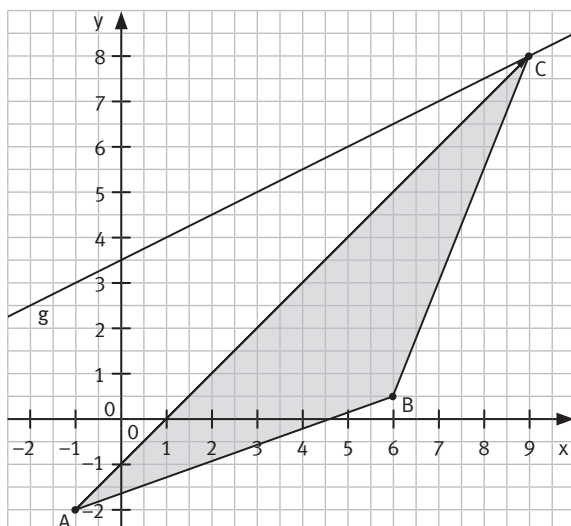
$$\Leftrightarrow 16 = 4x$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

Die Seitenlängen des alten Rechtecks betragen 4 m und 7 m , die des neuen Rechtecks 6 m und 9 m .

KX

44



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2,5 \end{pmatrix}; \vec{AC} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 0,5x+5,5 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} (7 \cdot (0,5x + 5,5) - 2,5 \cdot (x + 1)) \text{ FE}$$

$$= \left(\frac{1}{2}x + 18 \right) \text{ FE}$$

$$\frac{1}{2}x + 18 = 22,5 \Leftrightarrow x = 9$$

$$\Rightarrow C(9|8)$$

Berechnungen am Kreis

KX

45 a) $r = 3 \text{ mm}$ $d = 6 \text{ mm}$ $u \approx 18,85 \text{ mm}$ $A \approx 28,27 \text{ mm}^2$

b) $r = 1,2 \text{ cm}$ $d = 2,4 \text{ cm}$ $u \approx 7,54 \text{ cm}$ $A \approx 4,52 \text{ cm}^2$

c) $r \approx 8,276 \text{ m}$ $d \approx 16,552 \text{ m}$ $u = 52 \text{ m}$ $A \approx 215,18 \text{ m}^2$

d) $r = 1,5 \text{ m}$ $d = 3,0 \text{ m}$ $u = 9,3 \text{ m}$ $A = 6,9 \text{ m}^2$

KX

46

	a)	b)	c)	d)
r	4 cm	1,2 cm	2,00 m	45,8 dm
μ	42°	118,4°	64°	60°
b	2,93 cm	2,48 cm	2,23 m	48 dm
A_S	5,86 cm ²	1,49 cm ²	2,23 m ²	1098,3 dm ²
u_S	10,93 cm	4,88 cm	6,23 m	139,6 dm

KX 47 a) 1 $A_{\text{Ring}} = \pi \cdot [R^2 - r^2] = \pi \cdot [(4 \text{ cm})^2 - (2 \text{ cm})^2] = \pi \cdot 12 \text{ cm}^2$
 $\approx 37,7 \text{ cm}^2$

2 $A_{\text{Ringstück}} = \frac{3}{4} \pi \cdot [(4 \text{ cm})^2 - (2 \text{ cm})^2] = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 12 \text{ cm}^2$
 $\approx 28,3 \text{ cm}^2$

b) Da das Ringstück aus 2 aus einem Grundkreis mit $\frac{3}{4}$ der Fläche des Grundkreises aus 1 besteht,

gilt: $\frac{A_{\text{Ringstück}}}{A_{\text{Ring}}} = \frac{\frac{3}{4} \pi (R^2 - r^2)}{\pi (R^2 - r^2)} = \frac{3}{4}$.

Zusammenhänge in Dreiecken

KX 48 a) $\beta = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

$\alpha = \gamma = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$

$\delta = 180^\circ - 70^\circ - 60^\circ = 50^\circ$

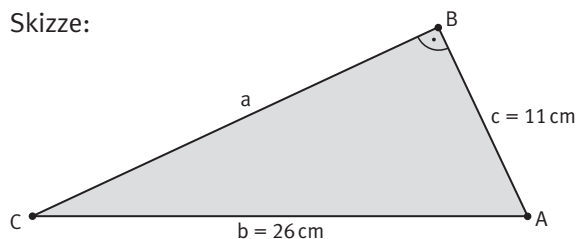
b) $\beta = 180^\circ - 90^\circ - 44^\circ = 46^\circ$

$\gamma = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 68^\circ$

$\alpha = \gamma - \beta = 68^\circ - 46^\circ = 22^\circ$

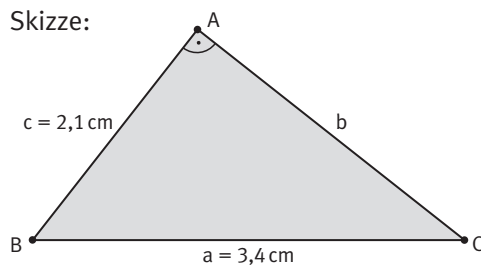
KX 49 a) wahr b) wahr c) falsch

KX 50 a) Skizze:



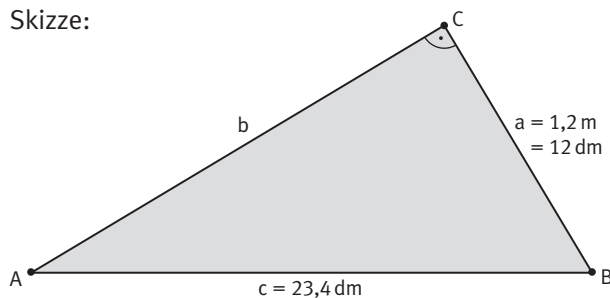
Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 - c^2} = 23,6 \text{ cm}$

b) Skizze:



Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = 2,7 \text{ cm}$

c) Skizze:



Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = 20,1 \text{ dm}$

KX 51 Die Formeln für die Flächendiagonalen e_1 , e_2 und e_3 sind eine direkte Anwendung des Satzes des Pythagoras. Für die Raumdiagonale gilt: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

a) $e_1 = 5,6 \text{ cm}$; $e_2 = 7,8 \text{ cm}$; $e_3 = 8,3 \text{ cm}$; $d = 9,0 \text{ cm}$

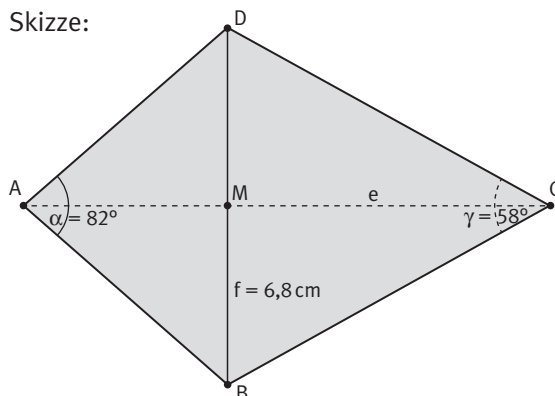
b) $e_1 = 60,1 \text{ m}$; $e_2 = 45,2 \text{ m}$; $e_3 = 75,0 \text{ m}$; $d = 75,1 \text{ m}$

KX

- 52 a) $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{3,6 \text{ cm}}{8,5 \text{ cm}} \Rightarrow \alpha = 25,1^\circ$
 $\beta = 90^\circ - 25,1^\circ = 64,9^\circ$
 $\cos \alpha = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = c \cdot \cos \alpha = 8,5 \text{ cm} \cdot \cos 25,1^\circ \approx 7,7 \text{ cm}$
 b) $\sin \alpha = \frac{a}{b} = \frac{4 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = 0,5 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$
 $\gamma = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$
 $\cos \alpha = \frac{c}{b} \Leftrightarrow c = b \cdot \cos \alpha = 8 \text{ cm} \cdot \cos 30^\circ \approx 6,9 \text{ cm}$

KX

- 53 a) Skizze:



- b) Der Schnittpunkt der Diagonalen (mit M bezeichnet) teilt das Drachenviereck in vier bei M rechtwinklige Teildreiecke.

Im Dreieck ABM gilt:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{f}{2}}{|\overline{AB}|} \Rightarrow |\overline{AB}| = \frac{f}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 5,2 \text{ cm} = |\overline{AD}|$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{|\overline{AM}|}{|\overline{AB}|} \Rightarrow |\overline{AM}| = |\overline{AB}| \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 3,9 \text{ cm}$$

Im Dreieck BCM gilt:

$$\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{f}{2}}{|\overline{BC}|} \Rightarrow |\overline{BC}| = \frac{f}{2 \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = 7,0 \text{ cm} = |\overline{CD}|$$

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{|\overline{MC}|}{|\overline{BC}|} \Rightarrow |\overline{MC}| = |\overline{BC}| \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 6,1 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow e = |\overline{AM}| + |\overline{MC}| = 3,9 \text{ cm} + 6,1 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

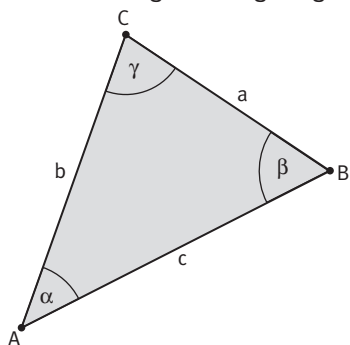
- c) $A = \frac{1}{2}ef = \frac{1}{2} \cdot 6,8 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 34 \text{ cm}^2$

$$u = 2 \cdot |\overline{AB}| + 2 \cdot |\overline{BC}| = 2 \cdot 5,2 \text{ cm} + 2 \cdot 7,0 \text{ cm} = 24,4 \text{ cm}$$

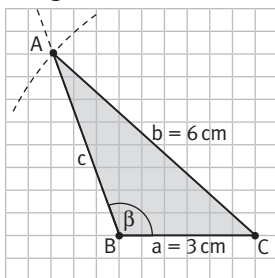
Kongruenzsätze für Dreiecke

K5

- 54 Allen Teilaufgaben liegt folgende Planfigur zugrunde:

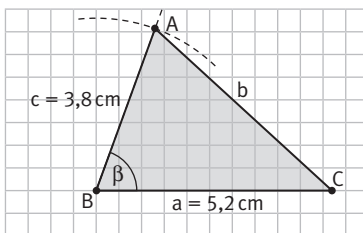


a) Kongruenzsatz SsW



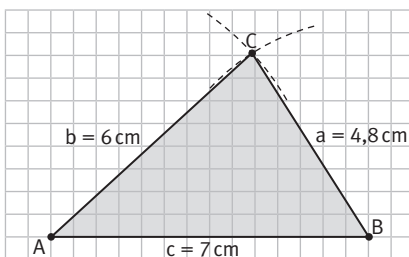
1. Zeichne die Strecke $\overline{BC}$ mit $a = 3 \text{ cm}$.
2. Trage den Winkel $\beta = 110^\circ$ bei B an.
3. Der Schnittpunkt dieser Halbgeraden mit dem Kreis um C mit Radius $b = 6 \text{ cm}$ ist der Punkt A.

b) Kongruenzsatz SWS



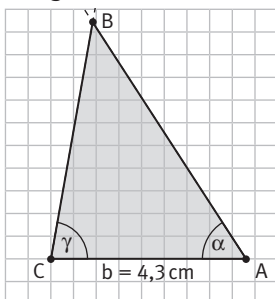
1. Zeichne die Strecke $\overline{BC}$ mit $a = 5,2 \text{ cm}$.
2. Trage den Winkel $\beta = 70^\circ$ bei B an.
3. Der Schnittpunkt dieser Halbgeraden mit dem Kreis um B mit Radius $c = 3,8 \text{ cm}$ ist der Punkt A.

c) Kongruenzsatz SSS



1. Zeichne die Strecke $\overline{AB}$ mit $c = 7 \text{ cm}$.
2. Trage einen Kreis um A mit dem Radius $b = 6 \text{ cm}$ und einen Kreis um B mit dem Radius $a = 4,8 \text{ cm}$ ein.
3. Der Schnittpunkt der beiden Kreise ist der Punkt C.

d) Kongruenzsatz WSW

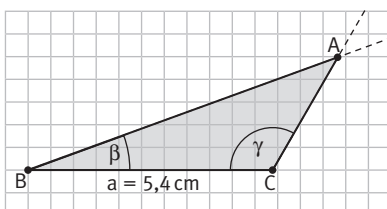


1. Zeichne die Strecke $\overline{CA}$ mit $b = 4,3 \text{ cm}$.
2. Trage den Winkel $\gamma = 80^\circ$ bei C und den Winkel $\alpha = 57^\circ$ bei A ab.
3. Der Schnittpunkt der freien Schenkel bei C und A ist der Punkt B.

e) Kongruenzsatz WSW

$$\gamma = 3\alpha = 6\beta \quad \text{und} \quad \alpha = 2\beta$$

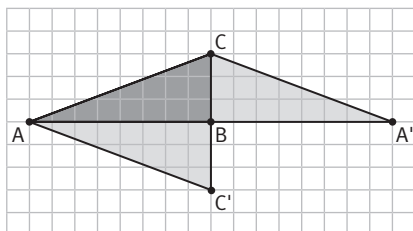
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\beta + \beta + 6\beta = 180^\circ \Leftrightarrow \beta = 20^\circ; \gamma = 120^\circ; \alpha = 40^\circ$$



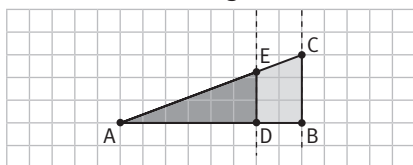
1. Zeichne die Strecke $\overline{BC}$ mit $a = 5,4 \text{ cm}$.
2. Trage den Winkel $\beta = 20^\circ$ bei B und den Winkel $\gamma = 120^\circ$ bei C ab.
3. Der Schnittpunkt dieser beiden Halbgeraden ist der Punkt A.

KX

- 55 a) Die Aussage ist falsch, wie man durch ein Gegenbeispiel zeigen kann:
Die beiden Dreiecke $AA'C$ und $AC'C$ setzen sich zusammen aus dem Dreieck ABC und einer Spiegelung des Dreiecks ABC an der Seite $\overline{BC}$ bzw. an der Seite $\overline{AB}$. Damit haben sie den gleichen Flächeninhalt und sind gleichschenkelig, da $|\overline{AC}| = |\overline{A'C}| = |\overline{AC'}|$; sie sind jedoch nicht kongruent.



- b) Die Aussage ist wahr, es ist der Kongruenzsatz WSW.
c) Die Aussage ist falsch: Die Dreiecke sind ähnlich, aber nicht zwingend kongruent zueinander. Gegenbeispiel sind zwei Dreiecke ABC und ADE , wobei D auf $\overline{AB}$ und E auf $\overline{AC}$ liegt und DE parallel zu BC ist: Die Winkel der beiden Dreiecke sind gleich groß, die Seitenlängen jedoch nicht – die Dreiecke sind nicht kongruent.



- d) Die Aussage ist wahr, es ist der Kongruenzsatz SWS.

KX

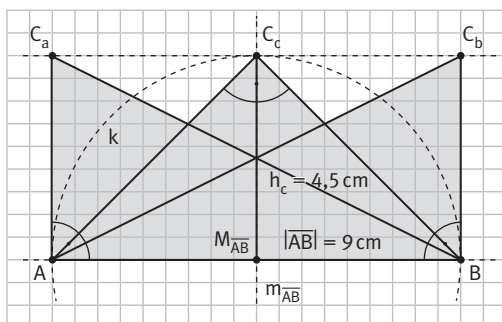
- 56 Lösungsmöglichkeit:

- Planfigur mit gleichschenkeligem Dreieck ABC , Grundseite $\overline{AB}$, Mittelpunkt M und Lotfußpunkten D und E von M auf die Schenkel, s. Schulbuch.
- Voraussetzung:
 - Das Dreieck ABC ist gleichschenkelig.
 - Der Punkt M ist Mittelpunkt von $\overline{AB}$.
 - Die Dreiecke MCD und MCE sind rechtwinklig bei D bzw. E .
- Behauptung: $|\overline{MD}| = |\overline{ME}|$
- Beweis:
Die Dreiecke CAM und CBM sind kongruent (SWS).
In den Dreiecken MCD und MCE sind die Winkel bei D bzw. E und die Winkel bei C maßgleich (Voraussetzung 1 und 3), die beiden Dreiecke haben drei maßgleiche Winkel (Innenwinkelsumme im Dreieck).
Die Dreiecke MCD und MCE haben eine gleich lange Seite: $|\overline{MC}| = |\overline{MC}|$.
Die Dreiecke MCD und MCE sind kongruent (WSW).
Aus der Kongruenz der Dreiecke MCD und MCE folgt die Behauptung: $|\overline{MD}| = |\overline{ME}|$.

Satz des Thales

KX

57



Insgesamt gibt es drei Lösungen mit dem rechten Winkel in A , B oder C :

Es gibt eine Lösung mit dem 90° -Winkel in C :
Der Thaleskreis über $\overline{AB}$ mit $|\overline{AB}| = 9\text{ cm}$ schneidet die Parallele zu AB im Abstand von $4,5\text{ cm}$ in C .

Weitere Lösungen sind die beiden Dreiecke mit dem 90° -Winkel in A bzw. in B mit $|\overline{AC_a}| = h_c = 4,5\text{ cm}$ bzw. mit $|\overline{BC_b}| = h_c = 4,5\text{ cm}$.

KX 58 a) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CDB = 90^\circ$, da A und D auf dem Thaleskreis über $\overline{BC}$ liegen.

$$\gamma = \sphericalangle ACB = 180^\circ - 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$$

$$\beta = \sphericalangle CBA = 180^\circ - 90^\circ - 73^\circ = 17^\circ$$

b) $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, da C auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$ liegt.

$$\beta = \sphericalangle CBM = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 136^\circ) = 22^\circ, \text{ da Dreieck } \triangle MBC \text{ ein gleichschenkliges Dreieck ist.}$$

$$\alpha = \sphericalangle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ, \text{ da } \triangle ABC \text{ ein rechtwinkliges Dreieck ist.}$$

Zentrische Streckung

KX 59 a) $A'(0|-3)$; $B'(8|-1)$; $C'(7|2)$ b) $A'(7|6)$; $B'(2|3,5)$; $C'(9,5|1)$ c) $A'(6,5|3)$; $B'(10,5|5)$; $C'(4,5|7)$

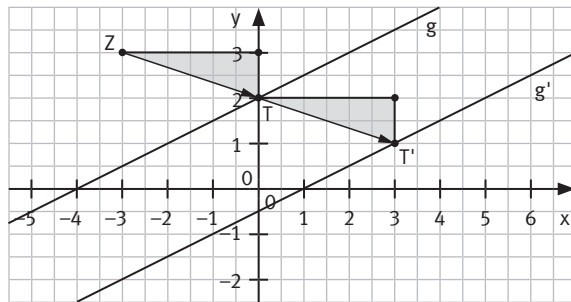
KX 60 a) $\vec{ZQ'} = k \cdot \vec{ZQ} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0-x_z \\ 5-y_z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0-x_z \\ 2-y_z \end{pmatrix}$

$$I \quad -x_z = -2x_z \Leftrightarrow x_z = 0$$

$$II \quad 5 - y_z = 4 - 2y_z \Leftrightarrow y_z = -1$$

$$\Rightarrow Z(0|-1)$$

KX 61

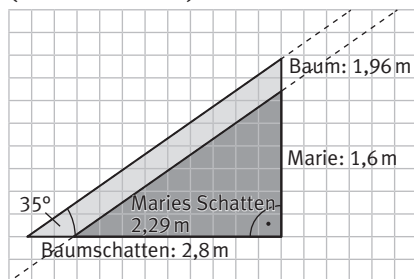


Man wählt einen beliebigen Punkt auf g und bildet ihn durch zentrische Streckung als Element von g' ab; hierfür bietet sich $T(0|2)$ an, dessen Koordinaten aus der Geradengleichung von g ablesbar sind. Durch die zentrische Streckung von $T(0|2)$ um das Zentrum $Z(-3|3)$ mit $k = 2$ wird T auf $T'(3|1)$ abgebildet. Die Steigungen von g und von g' sind gleich: $m_g = m_{g'} = 0,5$.

$T'(3|1)$ in $y = 0,5x + t_{g'}$ einsetzen:

$$1 = 0,5 \cdot 3 + t_{g'} \Leftrightarrow t_{g'} = -0,5 \Rightarrow g': y = 0,5x - 0,5$$

KX 62 (Maßstab 1 : 50)



a) Der Baum ist 1,96 m hoch.

$$b) \frac{x}{1,6 \text{ m}} = \frac{2,8 \text{ m}}{1,96 \text{ m}} \Rightarrow x \approx 2,29 \text{ m}$$

Der Schatten von Marie ist 2,29 m lang.

Strahlensätze

KX 63 a) $c = 4 \text{ cm} - b = 1 \text{ cm}$

$$\frac{b}{b+c} = \frac{e}{e+f} \Leftrightarrow \frac{3 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = \frac{e}{6 \text{ cm}} \Leftrightarrow e = 4,5 \text{ cm}; f = 1,5 \text{ cm}$$

$$b) \frac{b}{b+c} = \frac{e}{e+f} \Leftrightarrow \frac{5 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = \frac{e}{e+4,5 \text{ cm}} \Leftrightarrow e = 7,5 \text{ cm}$$

$$\frac{e}{d} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{7,5 \text{ cm}}{d} = \frac{5 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} \Leftrightarrow d = 3 \text{ cm}$$

$$c) \frac{b}{b+c} = \frac{e}{e+f} \Leftrightarrow \frac{2,5 \text{ cm}}{4,5 \text{ cm}} = \frac{e}{7,2 \text{ cm}} \Leftrightarrow e = 4 \text{ cm}$$

- KX** 64 Mit dem Strahlensatz ergibt sich folgendes Verhältnis:

$$\frac{x}{2\text{ m}} = \frac{406\text{ m}}{2,8\text{ m}} \Leftrightarrow x = 290\text{ m}$$

Der Olympiaturm ist etwa 290 m hoch.

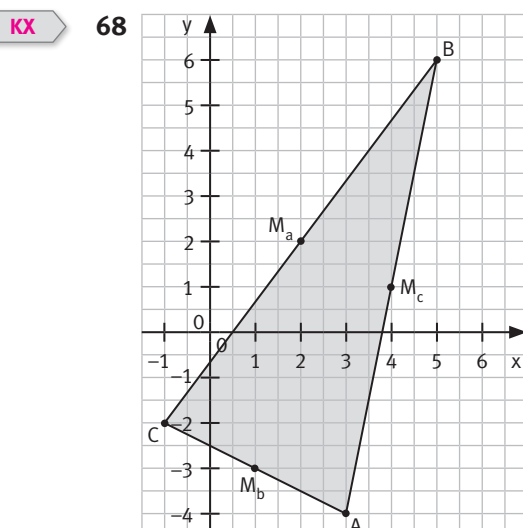
Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

- KX** 65 Wegen $|\overline{AB}| = \frac{1}{2}|\overline{BD}|$, $|\overline{BT}_3| = \frac{1}{2}|\overline{BC}|$ und $\sphericalangle T_3BA = \sphericalangle CBD = 90^\circ$ ist das Dreieck ABT_3 nach dem Kongruenzsatz SWS ähnlich zum Dreieck BCD.

Vektoren

	a)	b)	c)
$\vec{v} = \overrightarrow{PP'}$	$\begin{pmatrix} -1,5 \\ 6,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
Gegenvektor $\vec{v}^*$	$\begin{pmatrix} 1,5 \\ -6,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$
P(x y)	(-1,5 -2)	(2 1,5)	(1 0)
P'(x' y')	(-3 4,5)	(-2 1,5)	(4 4)

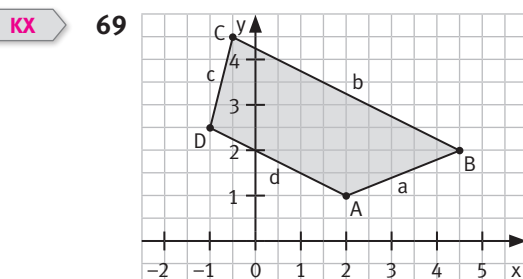
- KX** 67 $x = -2$ und $y = 13$



$$M_a\left(\frac{5-1}{2} \mid \frac{6-2}{2}\right) = M_a(2 \mid 2)$$

$$M_b\left(\frac{-1+3}{2} \mid \frac{-2-4}{2}\right) = M_b(1 \mid -3)$$

$$M_c\left(\frac{3+5}{2} \mid \frac{-4+6}{2}\right) = M_c(4 \mid 1)$$



$$A_{ABCD} = A_{ABD} + A_{CDB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4,5-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 2,5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \vec{d}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1-(-0,5) \\ 2,5-4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4,5-(-0,5) \\ 2-4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2,5 \end{pmatrix} = \vec{b}$$

$$A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a_x & d_x \\ a_y & d_y \end{vmatrix} \text{ FE} = \frac{1}{2} \cdot (a_x \cdot d_y - a_y \cdot d_x) \text{ FE} = \frac{1}{2} \cdot [2,5 \cdot 1,5 - 1 \cdot (-3)] \text{ FE} = 3,375 \text{ FE}$$

$$A_{CDB} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} c_x & b_x \\ c_y & b_y \end{vmatrix} \text{ FE} = \frac{1}{2} \cdot (c_x \cdot b_y - c_y \cdot b_x) \text{ FE} = \frac{1}{2} \cdot [(-0,5) \cdot (-2,5) - (-2) \cdot 5] \text{ FE} = 5,625 \text{ FE}$$

$$A_{ABCD} = A_{ABD} + A_{CDB} = 3,375 \text{ FE} + 5,625 \text{ FE} = 9 \text{ FE}$$

Es handelt sich um ein Trapez mit Flächeninhalt $A_{ABCD} = 9 \text{ FE}$.

Rotationskörper

KX

70 a) Quadratische Pyramide mit $|\overline{AB}| = |\overline{BS}| = |\overline{AS}| = a$

Diagonale $\overline{AC}$ mit $|\overline{AC}| = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

Pyramidenhöhe h mit $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

Als Rotationskörper entsteht ein Kegel mit $s = |\overline{AS}| = a$, $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ und $r = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

$$O = G + M = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \pi \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot a = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot a^2 \approx 3,8 \cdot a^2$$

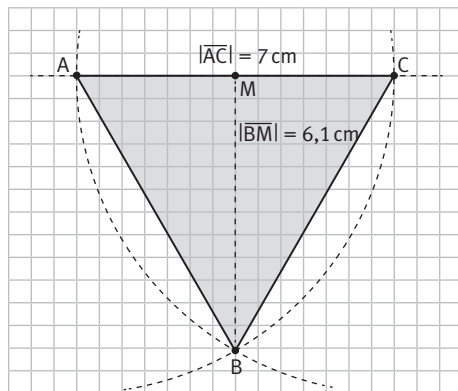
$$b) V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot \sqrt{3} \cdot a^3 \approx 0,45a^3$$

Mit $a = 6 \text{ cm}$ gilt: $V \approx 98 \text{ cm}^3$

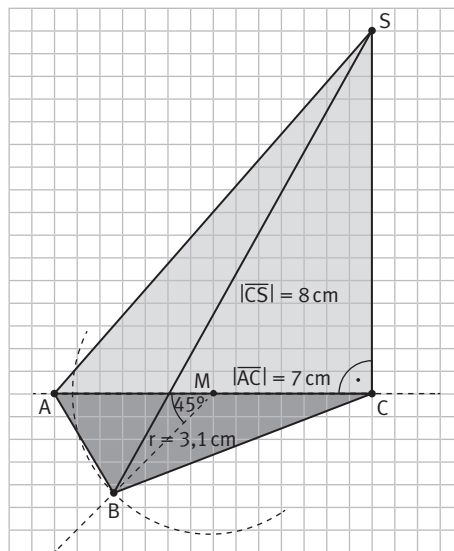
Darstellungen im Raum

KX

71



Die Länge der Höhe $\overline{BM}$ beträgt im gleichseitigen Dreieck 6,1 cm und im Schrägbild $0,5 \cdot 6,1 \text{ cm} \approx 3,1 \text{ cm}$.



Zuerst wird die Strecke $\overline{AC}$ mit $|\overline{AC}| = 7 \text{ cm}$ gezeichnet, dazu der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AC}$.

Die Halbgerade b erhält man, indem man in M an AC 45° anträgt.

B ist der Schnittpunkt der Halbgeraden b mit dem Kreis um M mit Radius $r = 3,1 \text{ cm}$.

Die Höhe $\overline{CS}$ mit $|\overline{CS}| = 8 \text{ cm}$ wird senkrecht zu AC in C eingezeichnet.

KX

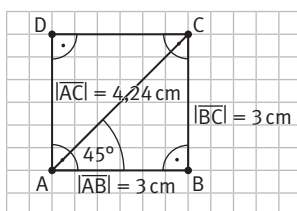
72 a) $\overline{BH}$, $\overline{CE}$ und $\overline{DF}$ haben die gleiche Länge wie die Raumdiagonale $\overline{AG}$.

b) Die Dreiecke EHD und AHD sind kongruent zum Dreieck ADE : Sie sind rechtwinklig bei H bzw. D und haben die Kathetenlängen 4 cm und 6 cm.

c) Die Dreiecke EGB , EGD und BDE sind kongruent zum Dreieck ACH : Ihre Seitenlängen stimmen mit den Längen $|\overline{AC}|$, $|\overline{AH}|$ und $|\overline{CH}|$ in drei Seitenlängen überein.

d) $|\overline{AC}| \approx 6,40 \text{ cm}$ $|\overline{AG}| \approx 8,77 \text{ cm}$ $|\overline{EN}| \approx 6,80 \text{ cm}$ $|\overline{MN}| \approx 6,50 \text{ cm}$

KX 73 a) und b)

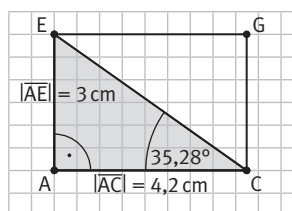


Zeichne das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 3 cm.

Miss das Maß des Winkels $\sphericalangle$ BAC und die Länge der Strecke $\overline{AC}$, dies ergibt:

$$\sphericalangle BAC = 45^\circ \quad |\overline{AC}| = 4,24 \text{ cm}$$

c)



Zeichne das Rechteck AEGC (bzw. CAEG) mit den Seitenlängen $|\overline{AE}| = 3 \text{ cm}$ und $|\overline{AC}| = 4,2 \text{ cm}$.

Miss das Maß des Winkels ECA (bzw. ACE), dies ergibt:

$$\sphericalangle ECA = 35,28^\circ \quad (\sphericalangle ACE = 35,28^\circ)$$

KX 74 Da der Würfel in jeder der drei Dimensionen eine Symmetrieebene hat, müssen die Winkel zwischen den Raumdiagonalen maßgleich sein.

Volumen und Oberflächeninhalt geometrischer Körper

KX 75 $G = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = \frac{11 \cdot 12}{2} \text{ cm}^2 = 66 \text{ cm}^2$

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{e^2 + f^2} = \frac{1}{2} \sqrt{265} \text{ cm} \approx 8,14 \text{ cm}$$

$$M = 4 \cdot a \cdot h = 4 \cdot 8,14 \cdot 45 \text{ cm}^2 = 1465 \text{ cm}^2$$

$$O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot 66 \text{ cm}^2 + 1465 \text{ cm}^2 = 1597 \text{ cm}^2$$

$$V = G \cdot h = 66 \cdot 45 \text{ cm}^3 = 2970 \text{ cm}^3$$

KX 76

	a)	b)	c)
r	5 cm	4,3 cm	0,7 dm
h	6 cm	8,0 cm	3,6 dm
G	78,54 cm ²	58 cm ²	1,54 dm ²
M	188,50 cm ²	216,14 cm ²	15,8 dm ²
O	345,58 cm ²	332,14 cm ²	19 dm ²

KX 77 a) $h_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{7,2^2 + \left(\frac{4,5}{2}\right)^2} \text{ cm} \approx 7,54 \text{ cm}$

$$G = a^2 = (4,5 \text{ cm})^2 = 20,25 \text{ cm}^2$$

$$M = 2 \cdot a \cdot h_a = 2 \cdot 4,5 \cdot 7,54 \text{ cm}^2 = 67,86 \text{ cm}^2$$

$$O = G + M = 20,25 \text{ cm}^2 + 67,86 \text{ cm}^2 = 88,11 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 20,25 \cdot 7,2 \text{ cm}^3 = 48,6 \text{ cm}^3$$

b) $h = \sqrt{h_a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{0,6^2 - 0,4^2} \text{ m} \approx 0,45 \text{ m}$

$$G = a^2 = (0,8 \text{ m})^2 = 0,64 \text{ m}^2$$

$$M = 2 \cdot a \cdot h_a = 2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 \text{ m}^2 = 0,96 \text{ m}^2$$

$$O = G + M = 0,64 \text{ m}^2 + 0,96 \text{ m}^2 = 1,6 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 0,64 \cdot 0,45 \text{ m}^3 = 0,096 \text{ m}^3$$

c) $h_a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{6,2^2 - \left(\frac{3,3}{2}\right)^2} \text{ m} \approx 5,98 \text{ m}$
 $h = \sqrt{h_a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{5,98^2 - \left(\frac{3,3}{2}\right)^2} \text{ m} \approx 5,75 \text{ m}$
 $G = a^2 = 3,3^2 \text{ m}^2 = 10,89 \text{ m}^2$
 $M = 2 \cdot a \cdot h_a = 2 \cdot 3,3 \cdot 5,98 \text{ m}^2 = 39,47 \text{ m}^2$
 $O = G + M = 10,89 \text{ m}^2 + 39,47 \text{ m}^2 = 50,36 \text{ m}^2$
 $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 10,89 \cdot 5,75 \text{ m}^3 = 20,87 \text{ m}^3$

d) $a = 2 \cdot \sqrt{h_a^2 - h^2} = 2 \cdot \sqrt{1^2 - 0,8^2} \text{ m} = 1,2 \text{ m}$
 $G = a^2 = 1,2^2 \text{ m}^2 = 1,44 \text{ m}^2$
 $M = 2 \cdot a \cdot h_a = 2 \cdot 1,2 \cdot 1,0 \text{ m}^2 = 2,4 \text{ m}^2$
 $O = G + M = 1,44 \text{ m}^2 + 2,4 \text{ m}^2 = 3,84 \text{ m}^2$
 $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1,44 \cdot 0,8 \text{ m}^3 = 0,384 \text{ m}^3$

KX

78

	a)	b)	c)
r	5,2 cm	7,55 cm	0,7 dm
h	16 cm	8,0 cm	13,05 dm
s	16,82 cm	11 cm	13,07 dm
G	84,95 cm ²	179,08 cm ²	1,54 cm ²
V	453,07 cm ³	477,55 cm ³	6,7 dm ³

KX

79 a) $r = 4,3 \text{ cm}$ $O = 232,35 \text{ cm}^2$ $V = 333,04 \text{ cm}^3$
b) $r = 4,42 \text{ cm}$ $O = 246 \text{ cm}^2$ $V = 361,71 \text{ cm}^3$
c) $r = 6,2 \text{ m}$ $O = 483,1 \text{ m}^2$ $V = 998,31 \text{ m}^3$
d) $r = 3,3 \text{ cm}$ $O = 136,8 \text{ cm}^2$ $V = 152 \text{ cm}^3$

KX

80 Volumen eines Tetraeders: $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$
 $V_{\text{Rest}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot [(5,8 \text{ cm})^3 - (3,2 \text{ cm})^3] \approx 19,1 \text{ cm}^3$

KX

81 Berechnung der Höhe von Kegel bzw. Pyramide (die Einheit cm wurde in der Berechnung weggelassen).
 $h^2 = (3x)^2 - x^2$
 $h = \sqrt{9x^2 - x^2} = \sqrt{8} \cdot x$
 $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \pi x^2 \cdot \sqrt{8} \cdot x = \frac{4}{3} \pi \cdot \sqrt{8} \cdot x^3 \approx 11,85 \cdot x^3$
 $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot (2x)^2 \cdot \sqrt{8} \cdot x = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{8} \cdot x^3 \approx 3,77 \cdot x^3$
 $V_{\text{Gesamt}} = V_{\text{Kegel}} + V_{\text{Pyramide}} = \frac{4}{3} \sqrt{8} \cdot x^3 (\pi + 1) \approx 15,62 \cdot x^3$

((Vakat-Seite))

Startklar

Potenzgesetze anwenden

1 a) $a^{-4} \cdot b^3 = \frac{b^3}{a^4}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \frac{a^{12}}{b^{24}}$

c) $\frac{36a^6}{2a^2} = 18a^4$

d) $a \cdot b^3 \cdot c^2 \cdot u^{-7}$

2 a) $a = \sqrt{56,25} = 7,5$

$a^3 = 421,875$

b) $a = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

$a^2 = \frac{1}{4}$

Rechenregeln anwenden

3 a) $4 \cdot 3 + 4 \cdot 5^2$
 $\downarrow$ Potenz vor Punkt
 $= 4 \cdot 3 + 4 \cdot 25$
 $\downarrow$ Punkt vor Strich
 $= 12 + 100 = 112$

b) $4 \cdot (3 + 4) \cdot 5^2$
 $\downarrow$ Klammer zuerst
 $= 4 \cdot 7 \cdot 5^2$
 $\downarrow$ Potenz vor Punkt
 $= 4 \cdot 7 \cdot 25 = 700$

c) $4 \cdot (3 + 4 \cdot 5)^2$
 $\downarrow$ Klammer zuerst
 $\downarrow$ Punkt vor Strich
 $= 4 \cdot (3 + 20)^2$
 $\downarrow$ Klammer zuerst
 $= 4 \cdot 23^2$
 $\downarrow$ Potenz vor Punkt
 $= 4 \cdot 529 = 2116$

d) $(4 \cdot 3 + 4) \cdot 5^2$
 $\downarrow$ Klammer zuerst
 $\downarrow$ Punkt vor Strich
 $= (12 + 4) \cdot 5^2$
 $\downarrow$ Klammer zuerst
 $= 16 \cdot 5^2$
 $\downarrow$ Potenz vor Punkt
 $= 16 \cdot 25 = 400$

e) $(4 \cdot 3 + 4 \cdot 5)^2$
 $\downarrow$ Klammer zuerst
 $\downarrow$ Punkt vor Strich
 $= (12 + 20)^2$
 $\downarrow$ Klammer zuerst
 $= 32^2 = 1024$

f) $4 \cdot [(3 + 4) \cdot 5]^2$
 $\downarrow$ Klammer zuerst
 $= 4 \cdot [7 \cdot 5]^2$
 $\downarrow$ Klammer zuerst
 $= 4 \cdot 35^2$
 $\downarrow$ Potenz vor Punkt
 $= 4 \cdot 1225 = 4900$

- 4 a) Die Potenz zweier Zahlen ist immer größer oder gleich dem Produkt zweier Zahlen. Mit 9^{99} erhält man das Produkt $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \dots$, welches aus insgesamt $9^9 = 387\,420\,489$ Faktoren besteht. Weil 9 die größte einstellige natürliche Zahl ist, ergibt sich so die größtmögliche natürliche Zahl.
- b) 0, da $0^2 = 0^3 = 0$ 1, da $1^2 = 1^3 = 1$ 2, da $2^2 = 4$ und $2^3 = 8$ 4, da $4^2 = 16$ und $4^3 = 64$
- c) Für $n = 1$ und $n = 2$ ergeben sich die Quadratzahlen $1^1 = 1$ und $2^2 = 4$.
 Für jede gerade Zahl n ist n^n eine Quadratzahl:
 Für die $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) ist $n^n = (2m)^{2m} = (2m)^m \cdot (2m)^m$ eine Quadratzahl mit der Wurzel $n^{0,5n}$.
 Außerdem ist n^n eine Quadratzahl, wenn bereits n eine Quadratzahl ist in der Form $n = m^2$:
 $n^n = (m^2)^{m^2} = m^{2m^2} = (m^{m^2})^2$
- d) $(2^3)^4 \cdot (5^4)^3 = (2 \cdot 5)^{12} = 10^{12}$ (eine Zahl mit führender 1 und 12 Nullen, also 13 Stellen)
- e) $0 = 6a^2 = 73,5 \text{ cm}^2$ $a = \sqrt{\frac{73,5}{6}} \text{ cm}^2 = 3,5 \text{ cm}$

Funktionen untersuchen

- 5 (Abbildung im Schulbuch-Anhang auf Seite 233)

a) $D = \mathbb{R}$ $W = \mathbb{R}$
 $S_1(1,5|0); S_2(0|\frac{3}{4})$

b) $D = \mathbb{R}$ $W = \{y | y \geq -3\}$
 $S_1(-3|0); S_2(-1|0); S_3(0|9)$

c) $D = \mathbb{R}$ $W = \{y | y \leq 4,5\}$
 $S_1(-4|0); S_2(2|0); S_3(0|4)$

- 6 1 - D 2 - C 3 - A 4 - B

1 Potenzen und Potenzfunktionen

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:

Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K6

■ Lösungsmöglichkeit:

lineare Funktionen: Start eines Flugzeugs, ...

quadratische Funktionen: Torbogen, Brücke, Flugkurve eines Balles, ...

K3

■

Hyperbeln als Graphen von
Potenzfunktionen mit negativen
ganzzahligen Exponenten

Exponentialfunktionen,
Potenzfunktionen

Sinus- und Kosinusfunktion

Potenzfunktionen

Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.

Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Entdecken

Kx

- Bei dem im Reim beschriebenen Sachverhalt handelt es sich um eine Begegnung von „ich“ und einem Mann mit 7 Frauen mit je 7 Säcken, darin je 7 Katzen mit je 7 Kätzchen, also: 1 („I“) plus 1 („a man“) plus 7 (wives) plus $7 \cdot 7$ (sacks) plus $7 \cdot 7 \cdot 7$ (cats) plus $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ (kits). Der dazugehörige Term lautet: $1 + 1 + 7 + (7 \cdot 7) + (7 \cdot 7 \cdot 7) + (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7)$.

Kx

- Der vereinfachte Term lautet: $1 + 7^0 + 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 1 + 1 + 7 + 49 + 343 + 2401 = 2802$

Kx

- Die Antwort auf die Frage „how many ...?“ lautet: 1. Begründung: Nur der Erzähler, „I“, geht nach Saint Ives. Allen anderen begegnet der Erzähler, d. h. sie gehen nicht nach Saint Ives, sondern sie kommen von Saint Ives (oder sie leben in Saint Ives).
Eine andere mögliche Antwort auf die Frage lautet: 0. Begründung: Es wird nach „kits, cats, sacks and wives, ... going to Saint Ives“ gefragt ist und der Erzähler ist weder kit, cat, sack noch the man's wife, also wird er nicht gezählt. Alle anderen („kits, cats, sacks and wives“) kommen von Saint Ives, sind also nicht auf dem Weg nach Saint Ives.
Hinweis: Im Internet findet sich die Diskussion zu „Saint Ives Question“, „Saint Ives Problem“ oder „Saint Ives Riddle“, z. B. https://en.wikipedia.org/wiki/As_I_was_going_to_St_Ives (aufgerufen am 19.09.2022).

Nachgefragt

K6

- $4 \cdot 6$ beschreibt ein Produkt aus den Zahlen 4 und 6 mit dem Ergebnis 24.
 6^4 beschreibt die vierte Potenz der Zahl 6, also den Term $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$.

K1

- Nach den Rechengesetzen für Potenzen mit gleichen Basen gilt: $a^m \cdot a^m = a^{m+m} = a^{2m}$.
Nach den Rechengesetzen für Potenzen mit gleichen Exponenten und dem Potenzieren von Potenzen gilt aber auch: $a^m \cdot a^m = (a \cdot a)^m = (a^2)^m = a^{2m}$.
Beide Aussagen sind also richtig und es gilt: $a^{2m} = (a \cdot a)^m = a^m \cdot a^m$.

Aufgaben

K5

- 1 a) $2,43 \cdot 10^{10}$ b) $6,7 \cdot 10^{14}$ c) $1 \cdot 10^7 = 10^7$ d) $4,7 \cdot 10^{-11}$
e) $2,00412 \cdot 10^{-5}$ f) $6,1 \cdot 10^{-8}$ g) $5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

K5

- 2 a) 34 500 b) 4 350 000 000 000 c) 80 900 000 d) 0,0902
e) 0,000000000188 f) 0,00000000006025 g) 83 200 000 Menschen

K4

- 3 a) $4,0817323 \cdot 10^{-6}$ b) $3,121428273 \cdot 10^6$ c) $1,2091 \cdot 10^{12}$

K3

- 4 a) $10^{12} \text{ Byte} = 10^9 \text{ kB} = 10^6 \text{ MB} = 10^3 \text{ GB} = 1 \text{ TB}$
oder: $1 \text{ Byte} = 10^{-3} \text{ kB} = 10^{-6} \text{ MB} = 10^{-9} \text{ GB} = 10^{-12} \text{ TB}$
b) USB-Stick: 128 GB M-Disc: 100 GB Festplatte: 2,5 TB = 2500 GB
Die Speicherkapazität des USB-Sticks ist um 28 % größer als die der M-Disc. Die Festplatte hat etwa die 20-fache Speicherkapazität des USB-Sticks.
c) Es gilt: $12,5 \text{ GB} \cdot 225 = 2812,5 \text{ GB} \approx 2,8 \text{ TB} > 2 \text{ TB}$
Eine 2-TB-Platte reicht nicht.

d) $16 \text{ GB} = 16\,000\,000 \text{ kB}$

$$\frac{16\,000\,000 \text{ kB}}{4 \text{ kB}} = 4\,000\,000$$

Auf einem USB-Stick mit 16 GB Speicherkapazität lassen sich rund 4 Millionen solcher Seiten speichern.

e) $8,5 \text{ GB} = 8\,500\,000\,000 \text{ Byte}$

$$\frac{8\,500\,000\,000 \text{ Byte}}{175 \frac{\text{Byte}}{\text{min}}} \approx 48\,571\,429 \text{ min} \approx 92,41 \text{ Jahre}$$

Eine Schreibkraft würde etwa 92 Jahre und 5 Monate dafür brauchen.

K5 5 Die Ergebnisse sind teils gerundet.

a) $2 \cdot 10^{-12}$

b) $9,54 \cdot 10^{-10}$

c) -64

d) $3 \cdot 10^{-13}$

e) $2,32 \cdot 10^{-4}$

f) $-5,96 \cdot 10^8$

g) $3,79 \cdot 10^9$

h) $5,57 \cdot 10^{-10}$

i) -79

K5 6 a) $16,2 \cdot \frac{10^8 \cdot 10^{-4}}{10^5} = 16,2 \cdot 10^{-1} = 1,62$ b) $16,2 \cdot 10^1 = 162$

c) $16,2 \cdot 10^{-9}$

d) $16,2 \cdot 10^0 = 16,2$

e) $16,2 \cdot 10^{10}$

f) $16,2 \cdot 10^9$

K5 7 a) a^6 b) x c) $0,6yz^2$ d) $36a^3b^5c^{-6}$ e) $3m^{-3}n^{-1}$
 f) $\left(\frac{(2x+b) \cdot (2x-b)}{2x+b}\right)^{3+n} = (2x-b)^{3+n}$ g) $(xy)^{2a+2}$ h) $a^{-1}b^{-1}xy$

K3 8 a) Das Wasservolumen beträgt $800\,000\,000 \text{ cm}^3$.

b) $800 \text{ m}^3 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \approx 2,52 \cdot 10^{10} \text{ m}^3$

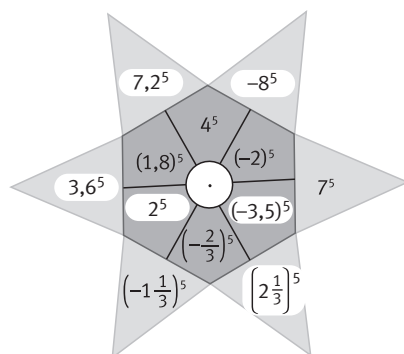
In einem Jahr würden etwa 25 Milliarden Kubikmeter Wasser durch den Rhein fließen.

K5 9 a) a^{12} b) x^{-2} c) b d) c^5 e) y^7 f) s^{11}
 g) $\left(\frac{w}{f}\right)^{23}$ h) b^{-20} i) $(ab)^3$ j) g^{15} k) e^{-12} l) h^{12}

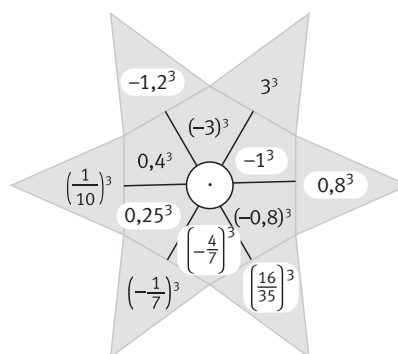
K5 10 a) $50^2 = 2500$ b) $2^2 = 4$ c) $6^2 = 36$ d) $4^3 = 64$
 e) $8^2 = 64$ f) $(-10)^4 = 10\,000$ g) $3^3 = 27$ h) $3^4 = 81$
 i) $1^8 = 1$ j) $\left(\frac{5}{2}\right)^1 = \frac{5}{2}$ k) $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$ l) $2^4 = 16$

K5 11 a) $(3,5 \cdot 4,1)^2 \approx 205,923$ b) $2,2^{11} \approx 5843,183$ c) $1,6^{-1} = 0,625$
 d) $0,9^3 = 0,729$ e) $8,3^{27} \approx 6,533 \cdot 10^{24}$ f) $(-2 \cdot 5)^4 = 10\,000$
 g) $2,05^{35} \approx 8,154 \cdot 10^{10}$ h) $8,3^4 \approx 4745,832$ i) $0,3^8 = 6,561 \cdot 10^{-5}$
 j) $\frac{12}{7} \approx 1,714$ k) $\left(-\frac{5}{8}\right)^2 \approx 0,391$ l) $2^{11} = 2048$

K5 12 a)



b)



K5 13 a) $a^2b^2c^2d^2$ b) $\frac{x \cdot y}{d^4e}$ c) $\frac{k^3}{g^2h \cdot l^2}$
d) $\frac{a^2b}{c^4d^3}$ e) $\frac{m^{12}}{o^{14}p^{-22}} = \frac{m^{12} \cdot p^{22}}{o^{14}}$ f) $\frac{6a^n}{6a^n} = 1$

K3 14 a) $2,36 \cdot 10^{12} \text{ €}$
b) Der Betrag, um den sich die Staatsverschuldung bis Ende 2022, also 215 Tage später, erhöht, lässt sich wie folgt berechnen:
 $3650 \text{ €} \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 215 = 6,78024 \cdot 10^{10} \text{ €}$
Für jedes weitere Jahr kommt nochmal folgender Betrag dazu:
 $3650 \text{ €} \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365 = 1,151064 \cdot 10^{11} \text{ €}$

Hinweis: Es empfiehlt sich, aktuelle Daten bereitzustellen oder ermitteln zu lassen und mit den Schülerinnen und Schülern die tatsächliche Situation der Staatsverschuldung in Deutschland zu diskutieren.

K3 15 a) täglich: $13,1 \cdot 10^6 \cdot 1,5 \text{ l} = 19,65 \cdot 10^6 \text{ l} = 19\,650\,000 \text{ l}$
jährlich: $19,65 \cdot 10^6 \text{ l} \cdot 365 = 7,17225 \cdot 10^9 \text{ l} = 7\,172\,250\,000 \text{ l}$
b) ① Die Anzahl der Flaschen beträgt $\frac{7,17225 \cdot 10^9 \text{ l}}{0,7} \approx 1,0246 \cdot 10^{10}$.
② Neben Leitungswasser werden auch andere Getränke konsumiert, welche nicht in Flaschen abgefüllt werden müssen. Zudem benötigt man im Mehrwegsystem deutlich weniger Flaschen.

K3 16 Im Blut befinden sich $4 \cdot 1000 \cdot 5 \cdot 10^9 = 2 \cdot 10^{13}$ rote Blutkörperchen.
Für die Länge der Strecke gilt somit $l = 2 \cdot 10^{13} \cdot 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ m} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ km}$.
Die Anzahl der roten Blutkörperchen nebeneinander aufgereiht würde eine Länge von 150 000 km ergeben.

K3 17 a) $1,719 \cdot 10^8 \cdot 60 \text{ kg} = 10,314 \cdot 10^9 \text{ kg} = 1,0314 \cdot 10^7 \text{ t}$
Im Jahr 2020 wurden insgesamt rund $1,0314 \cdot 10^7 \text{ t}$ Kaffee geerntet.
b) $\frac{10,314 \cdot 10^9 \text{ kg}}{7,8 \cdot 10^9} \approx 1,322 \text{ kg} = 1322 \text{ g}$
Für jeden Menschen wurden im Durchschnitt etwa 1322 g Kaffee geerntet.

K3 18 Für die Geschwindigkeit v und die Weglänge s kann mit der Formel $t = \frac{s}{v}$ die Zeit t berechnet werden:
 $t = \frac{4,3 \cdot 10^5 \text{ km}}{63\,000 \frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 6,83 \text{ h}$
Der Asteroid würde auf direktem Weg zur Erde rund 7 Stunden brauchen.

K2 19 Bei einem jährlichen Rückgang um 20 % gilt für den Anteil x der Population in 20 Jahren:
 $x = 0,8^{20} \approx 0,01 = \frac{1}{100}$
Nach 20 Jahren ist also nur noch 1 % des Tierbestandes übrig.

K6 20 Sabines Vorschlag entspricht der Notation $\frac{\left(\left((5^2)^2\right)^2\right)}{5} = \frac{5^{16}}{5} = 5^{15}$.
Sabine hat somit Recht.

K3 21 a) In den 10 Kartons befinden sich $10 \cdot 3^3 = 270$ Seifen.
b) Insgesamt hat die Drogerie $10 \cdot 3^2 = 90$ Geschenkpäckungen. Nachdem 54 Geschenkpäckungen verkauft wurden, bleiben noch 36 Packungen übrig.

Entdecken

K4

- Hat ein Würfel das Volumen 1 cm^3 , so werden 8 (27, 64, 125) Würfel für einen zusammengesetzten Würfel mit einem Volumen von 8 cm^3 (27 cm^3 , 64 cm^3 , 125 cm^3) benötigt. Die Kanten sind dabei so lang, dass deren Länge dreimal mit sich selbst multipliziert das Volumen ergibt: 2 cm (3 cm, 4 cm, 5 cm). Dies sind die Kubikwurzeln der Volumina.

Kx

- Ein Würfel mit einem Volumen von $a^3 \text{ cm}^3$ hat eine Kantenlänge von $a \text{ cm}$; so hat z. B. ein Würfel mit einem Volumen von $4^3 \text{ cm}^3 = 64 \text{ cm}^3$ eine Kantenlänge von 4 cm.

Ein Würfel mit einem Volumen von $x \text{ cm}^3$ hat eine Kantenlänge von $\sqrt[3]{x} \text{ cm}$; so hat z. B. ein Würfel mit einem Volumen von $15,625 \text{ cm}^3$ eine Kantenlänge von $\sqrt[3]{15,625} \text{ cm} = 2,5 \text{ cm}$.

Nachgefragt

K1

- Für ein a , welches nicht Element der positiven reellen Zahlen ist, würde der Exponent $\frac{1}{n}$ das Ziehen der n -ten Wurzel aus einer negativen Zahl bedeuten. Im Bereich der reellen Zahlen ist dies nicht möglich.

K1

- $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = x^{\frac{n+m}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{x^{n+m}} \neq \sqrt[n \cdot m]{x}$.

Gegenbeispiel mit $n = m = 3$, $x = 8$:

$$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} = 4, \text{ aber } \sqrt[3 \cdot 3]{8} = \sqrt[3]{2} \approx 1,26.$$

Aufgaben

K4

- 1 a) $3^2 > 3^{\frac{1}{2}}$ b) $2^{\frac{1}{2}} > 2^{-\frac{1}{2}}$ c) $7^{\frac{2}{3}} > 7^{\frac{2}{5}}$ d) $5^{-\frac{1}{2}} > 5^{-2}$ e) $3^{\frac{1}{3}} > 2^{\frac{1}{3}}$ f) $2^{-\frac{1}{3}} > 3^{-\frac{1}{3}}$
 g) und h): Negative Basen sind gemäß „Verstehen“ nicht zugelassen. Deshalb sind drei der Potenzen in diesen beiden Teilaufgaben nicht definiert und können nicht verglichen werden.

K5

- 2 $\sqrt[3]{75} \approx 4,22$ $\sqrt[5]{125} \approx 2,63$ $\sqrt[1,3]{175} \approx 53,14$ $\sqrt[6]{222} \approx 2,46$
 $\sqrt[3]{729} = 9,00$ $\sqrt[3]{125} \approx 16,24$ $\sqrt[25]{25} \approx 1,14$

K5

- 3 a) $x^{\frac{62}{45}} = \sqrt[45]{x^{62}}$ b) $y^{\left(\frac{-5}{12}\right)} = \sqrt[12]{y^{-5}}$ c) $6^{\frac{-1}{6}} = \sqrt[6]{6^{-1}}$ d) $m^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{m^7}$
 e) $\sqrt[5]{4^{-1}} \cdot \sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{4}$ f) $1^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{1^3} = 1$ g) $9^{\frac{-1}{2}} = \sqrt[2]{9^{-1}} = \frac{1}{3}$ h) $4^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{4^3} = \sqrt[4]{2^3}$
 i) $4^{\frac{-2}{9}} = \sqrt[9]{4^{-2}}$ j) $c^1 = \sqrt[1]{c} = c$ k) $2^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{5}{4}} = \sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[4]{a^5}$ l) $(2a)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2a}$

K5

- 4 a) a^4 b) $\left(x^{\frac{m}{a}}\right)^{an} = x^{mn}$ c) x^{-8m} d) $b^{\frac{-an}{m}} = \sqrt[m]{b^{-an}}$
 e) $n^{\frac{x}{nx}} = n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n}$ f) $\left(x^{\frac{-0,3}{1,2}}\right)^8 = x^{\frac{-2,4}{1,2}} = x^{-2}$ g) $x^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{x^5}$ h) y
 i) $x^{\frac{181}{63}} = \sqrt[63]{x^{181}}$ j) $a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$ k) $b^{\frac{11}{6}} = \sqrt[6]{b^{11}}$ l) $a^3 \sqrt[2]{a}$
 m) $(32a \cdot b)^{\frac{-1}{4}} = \sqrt[4]{(32ab)^{-1}}$ n) $1^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{1} = 1$ o) $a^{\frac{28}{9}} = \sqrt[9]{a^{28}}$
 p) $(2m^2n)^{\frac{1}{3}} \cdot (4mn^2)^{\frac{1}{3}} = (8m^3n^3)^{\frac{1}{3}} = 2mn$ q) $\sqrt[4]{a^4} = a$ r) $a^{\frac{-31}{4}} = \sqrt[4]{a^{-31}}$

K5 5 a) $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2$ b) $\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^5 = a$ c) $\left(y^{\frac{5}{2}}\right)^4 = y^{10}$ d) $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{2a} = 4$
e) $\sqrt{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{4}}$ f) $\sqrt[5]{x^{\frac{5}{2}}} = x^{\frac{1}{2}}$ g) $\left(ax^{12}\right)^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{12}}x$ h) $\left(a^6b^3\right)^{\frac{1}{6}} = ab^{\frac{1}{2}}$

K5 6 R $2x^5 = 64$ $D = \mathbb{R}_0^+$ $L = \{2\}$ R $x^{-3} = 0,125$ $D = \mathbb{R}^+$ $L = \{2\}$
O $x^3 = 125$ $D = \mathbb{R}_0^+$ $L = \{5\}$ A $x^{-4} + 2 = 83$ $D = \mathbb{R}^+$ $L = \left\{\frac{1}{3}\right\}$
U $x^0 = 35$ $D = \mathbb{R}^+$ $L = \emptyset$ S $3x^{-5} = 96$ $D = \mathbb{R}^+$ $L = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
E $\frac{1}{3}x^4 = 27$ $D = \mathbb{R}_0^+$ $L = \{3\}$ T $\frac{1}{2}x^4 = 128$ $D = \mathbb{R}_0^+$ $L = \{4\}$
O $x^3 - 125 = 0$ $D = \mathbb{R}_0^+$ $L = \{5\}$ Q $10 \cdot x^{10} = 1 \cdot 10^{11}$ $D = \mathbb{R}_0^+$ $L = \{10\}$

Das Lösungswort lautet: SQUARE ROOT (engl. für „Quadratwurzel“)

K1 7 a) Es sind individuelle Lösungen möglich.
b) Weiteres Potenzgesetz, z. B.:
Für $a, x, y \in \mathbb{R}_0^+$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $a^{\frac{1}{m}} : a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}$
Es sei $x = a^{\frac{1}{m}}$ und $y = a^{\frac{1}{n}}$.
Beweis: $x^m = a^1 \quad \wedge \quad y^n = a^1$
 $(x^m)^n = (a^1)^n \quad \wedge \quad (y^n)^m = (a^1)^m$
 $\Leftrightarrow x^{m \cdot n} = a^n \quad \wedge \quad y^{m \cdot n} = a^m$
Es gilt: $x^{m \cdot n} : y^{m \cdot n} = a^n : a^m$
 $(x : y)^{m \cdot n} = a^{n-m}$
 $x : y = a^{\frac{n-m}{m \cdot n}}$
Somit: $a^{\frac{1}{m}} : a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{n-m}{m \cdot n}} = a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}$

Entdecken

K6

- C – 1 mit den Paaren (1|6), (2|12), (3|18), (4|24), (5|30) für Seitenflächeninhalt in cm^2 und Oberflächeninhalt in cm^2
- B – 2 mit den Paaren (1|6), (2|24), (3|54), (4|96), (5|150) für Kantenlänge in cm und Oberflächeninhalt in cm^2
- A – 3 mit den Paaren (1|1), (2|8), (3|27), (4|64), (5|125) für Kantenlänge in cm und Volumen in cm^3
- Mit den Bezeichnungen V = Volumen des Würfels, O = Oberflächeninhalt des Würfels, A_S = Seitenfläche des Würfels, K_S = Seitenkante des Würfels gilt: $V = A_S \cdot K_S = K_S^3$ und $O = 6 \cdot A_S = 6 \cdot K_S^2$.

Nachgefragt

K1

- Individuelle Antworten möglich.
Eigenschaften gerader Funktionen:
 - für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, keine negativen Funktionswerte
 - achsensymmetrisch zur y-Achse
 - gemeinsame Punkte aller geraden Funktionen: A (1|1), B (-1|1) und O (0|0)
 - für negative x-Werte fällt die Funktion
 - für positive x-Werte steigt die Funktion
- Eigenschaften ungerader Funktionen:
 - für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, die Wertemenge ist $\mathbb{R}$
 - punktsymmetrisch zum Ursprung
 - gemeinsame Punkte aller ungeraden Funktionen: A (1|1), C (-1|-1), O (0|0)
 - ungerade Funktionen steigen für alle x-Werte

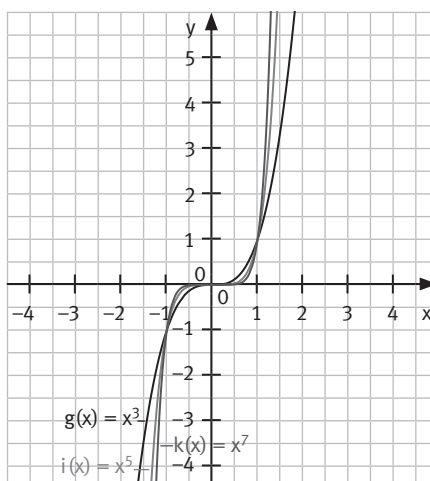
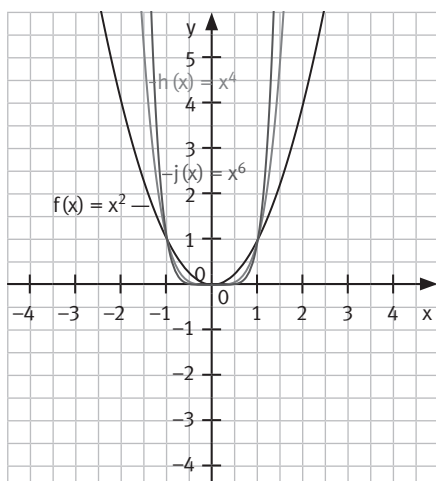
K1

- Begründungen:
 - 1 Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Es gilt: $f(1) = 1^n = 1$.
 - 2 Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, $n \neq 0$, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m$. Es gilt:
 $f(-1) = (-1)^n = (-1)^{2m} = ((-1)^2)^m = 1^m = 1$.
 - 3 Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade, $n \neq 0$, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m + 1$. Es gilt:
 $f(-1) = (-1)^n = (-1)^{2m+1} = (-1)^{2m} \cdot (-1)^1 = ((-1)^2)^m \cdot (-1) = 1^m \cdot (-1) = -1$.

Aufgaben

K5

1 a)



b) Potenzfunktionen	Merkmale
Alle Exponenten	• Definitionsmenge $\mathbb{R}$ • ähnlicher Verlauf nahe dem Ursprung • gemeinsame Punkte $(0 0)$, $(1 1)$ • alle Funktionen weisen eine Symmetrie auf
Gerade Exponenten	• Wertemenge $\mathbb{R}_0^+$ • zusätzlicher gemeinsamer Punkt $(-1 1)$ • Achsensymmetrie • steigend für $x \in \mathbb{R}_0^+$ • fallend für $x \in \mathbb{R}^-$
Ungerade Exponenten	• Wertemenge $\mathbb{R}$ • zusätzlicher gemeinsamer Punkt $(-1 -1)$ • Punktsymmetrie zum Ursprung • steigend für alle $x \in \mathbb{R}$

- c) Funktionen mit geradem Exponenten sind fallend für $x \leq 0$ und steigend für $x \geq 0$.
Funktionen mit ungeraden Exponenten sind steigend auf ganz $\mathbb{R}$.

d) Potenzfunktionen	gemeinsame Punkte
Alle Exponenten	$(0 0)$, $(1 1)$
Gerade Exponenten	$(-1 1)$
Ungerade Exponenten	$(1 -1)$

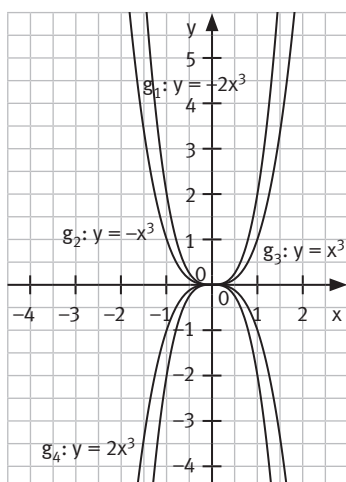
K4 2 1 – g, 2 – i, 3 – f, 4 – h

- K5 3 a) $a = 3^2 = 9$
 $b = (-2,5)^2 = 6,25$
 $c^2 = 20,25 \Rightarrow c = \pm\sqrt{20,25} = \pm 4,5$
 $d^2 = \frac{6}{19} \Rightarrow d = \pm\sqrt{\frac{6}{19}} \approx \pm 0,56$
- b) $a = (-2)^3 = -8$
 $b = 1,4^3 = 2,74$
 $c^3 = 0,125 \Rightarrow c = \sqrt[3]{0,125} = 0,5$
 $d^3 = -3^9 \Rightarrow d = -\sqrt[3]{3^9} = -27$
- c) $a = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32} = -0,03125$
 $b = 5^5 = 3125$
 $c^5 = -2^{15} \Rightarrow c = -\sqrt[5]{2^{15}} = -2^3 = -8$
 $d^5 = \frac{1}{243} \Rightarrow d = \sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3^5}} = \frac{1}{3}$
- d) $a = \left(\frac{1}{5}\right)^6 = \frac{1}{15625} \approx 0,00006$
 $b = (3^2)^6 = 3^{12} = 531441$
 $c^6 = 10^{-6} \Rightarrow c = \sqrt[6]{10^{-6}} = 10^{-1} = 0,1$
 $d^6 = -1$ Da der Exponent gerade ist, existiert ein solches d nicht.

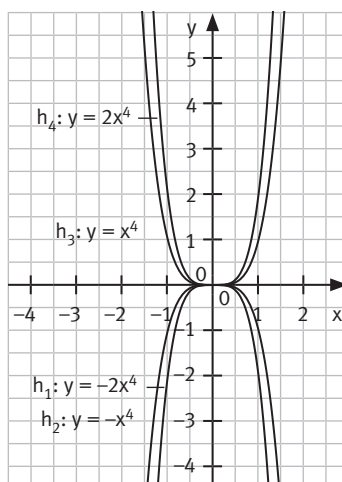
- K5 4 a) Beide Exponenten sind ungerade, also sind A $(0|0)$, B $(1|1)$ und C $(-1|-1)$ die gemeinsamen Punkte.
b) Beide Exponenten sind gerade, also sind A $(0|0)$, B $(1|1)$ und C $(-1|1)$ die gemeinsamen Punkte.
c) Es liegen ein ungerader und ein gerader Exponent vor, also sind A $(0|0)$ und B $(1|1)$ die gemeinsamen Punkte.
d) Es liegen ein ungerader und ein gerader Exponent vor, also sind A $(0|0)$ und B $(1|1)$ die gemeinsamen Punkte.

K1

5 a)



b)



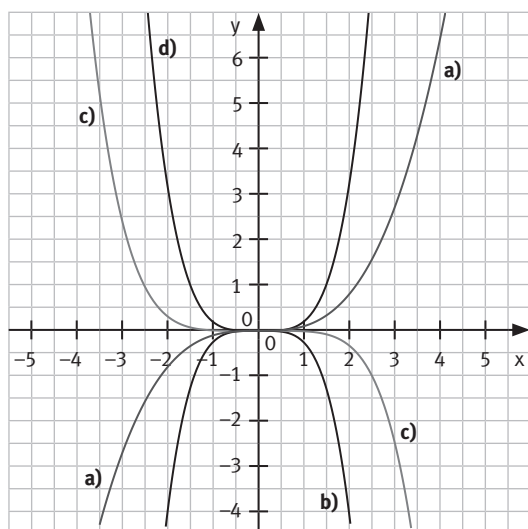
Beobachtungen zu a) und b):

Ein negativer Koeffizient ($a = -2$ oder $a = -1$) bewirkt eine Spiegelung an der x-Achse, ein positiver Koeffizient ($a = 1$ oder $a = 2$) bewirkt keine Spiegelung an der x-Achse.

Ein Koeffizient, der betragsmäßig größer als 1 ist ($a = -2$ oder $a = 2$) führt zu einer Streckung des Graphen mit Faktor a in y-Richtung. Ein Koeffizient, der betragsmäßig gleich 1 ist ($a = -1$ und $a = 1$) führt weder zu einer Stauchung noch zu einer Streckung des Graphen.

K4

6



Zugehörige Wertetabelle:

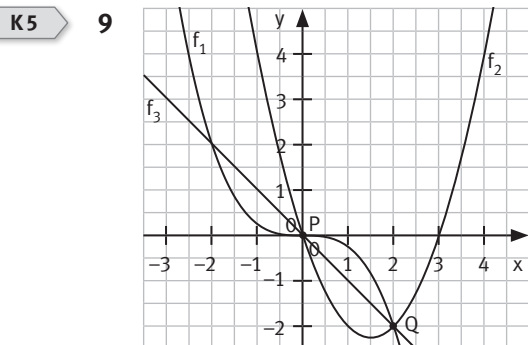
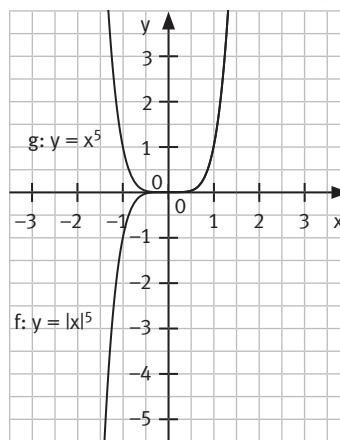
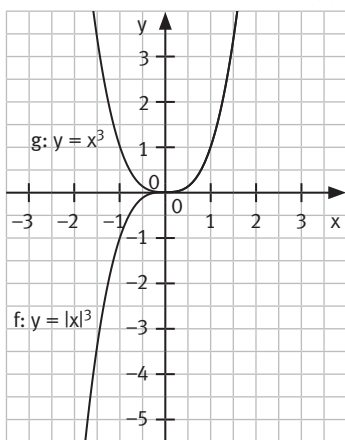
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
a) $f: y = 0,1x^3$	-2,7	-0,8	-0,1	0	0,1	0,8	2,7
b) $f: y = -0,25x^4$	-20,25	-4	-0,25	0	-0,25	-4	-20,26
c) $f: y = -0,01x^5$	2,43	0,32	0,01	0	-0,01	-0,32	-2,43
d) $f: y = 0,2x^4$	16,2	3,2	0,2	0	0,2	3,2	16,2

K1

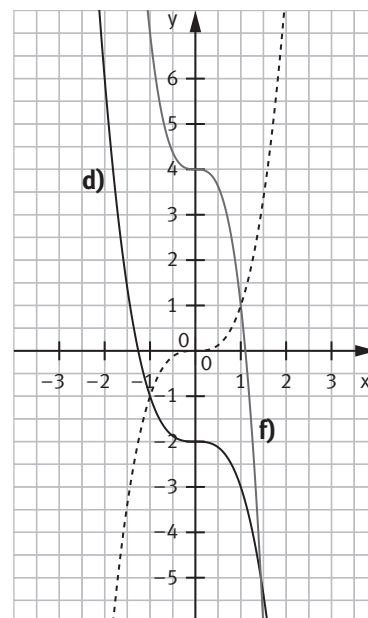
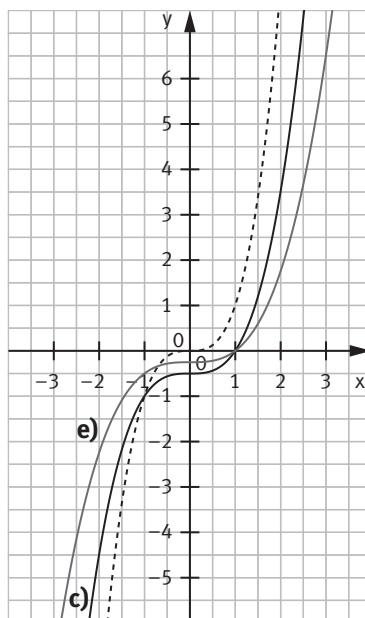
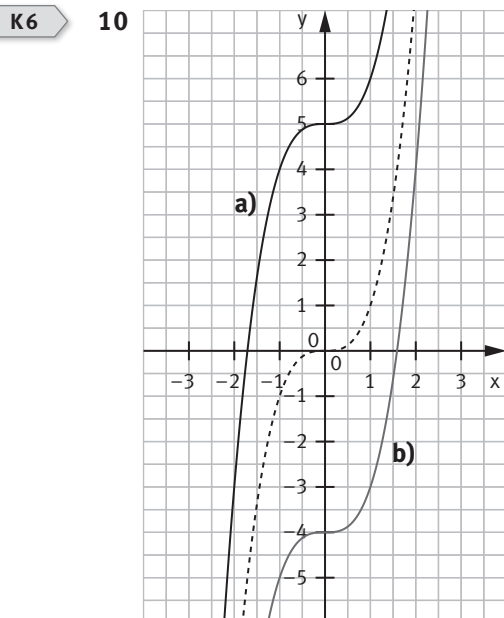
7

- a) Die Differenzen sind 1 positiv, 2 negativ, 3 negativ, 4 positiv.
b) Die Quotienten sind 1 kleiner als 1, 2 größer als 1, 3 kleiner als 1, 4 gleich 1.
c) Individuelle Lösungen möglich, z. B.: 1 $4^5 - 5^5$, 2 $4^5 : 5^5$, 3 $5^5 : 5^5$, 4 $5^5 : 4^5$.

- K1** 8 a) Sei im Folgenden $f: y = |x|^3$ und $g: y = x^3$.
- Fall: $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = x^3 = g(x)$
 - Fall: $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$
- b) Sei im Folgenden $f: y = |x|^5$ und $g: y = x^5$.
- Fall: $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = x^5 = g(x)$
 - Fall: $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = (-x)^5 = -x^5 = -g(x)$



- a)
- | x | -2 | -1 | -0,5 | 0 | 1 | 2 | 2,5 |
|----------------------------|----|------|-------|---|-------|----|-------|
| $f_1(x) = -\frac{1}{4}x^3$ | 2 | 0,25 | 0,031 | 0 | -0,25 | -2 | -3,91 |
- b) $x^2 - 3x = 0 \quad L = \{(0; 3)\}$
Die Nullstellen der Funktion sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.
- c) Schnittpunkte der Graphen von f_1 und f_2 sind $P(0|0)$ und $Q(2|-2)$. Für die Gleichung der Gerade f_3 , die durch P und Q verläuft, ergibt sich die Steigung $m = -1$. Wegen $P(0|0)$ ist der y-Achsenabschnitt $t = 0$. Somit ist $f_3: y = -x$.



Gegenüber der Potenzfunktion $y = x^3$ ist der Funktionsgraph ...

- um 5 Einheiten entlang der y-Achse verschoben.
- um -4 Einheiten entlang der y-Achse verschoben.
- um den Faktor 0,5 gestaucht und um -0,5 Einheiten entlang der y-Achse verschoben.
- an der x-Achse gespiegelt und um -2 Einheiten entlang der y-Achse verschoben.

- e) um den Faktor 0,25 gestaucht und um $-0,25$ Einheiten entlang der y-Achse verschoben.
f) um den Faktor 4 gestreckt, an der x-Achse gespiegelt und um 4 Einheiten entlang der y-Achse verschoben.

K6 11 Gegenüber der Potenzfunktion $p: y = x^3$ ist der Graph der Funktion $f: y = x^3 + 2$ um 2 Einheiten entlang der y-Achse verschoben, während der Graph der Funktion $g: y = (x + 2)^3$ um -2 Einheiten entlang der x-Achse verschoben ist.

K6 12 Gegenüber der Potenzfunktion $y = x^3$ bzw. $y = x^4$ ist der Funktionsgraph um ...

- a) 2 Einheiten entlang der x-Achse verschoben.
b) -1 Einheit entlang der x-Achse verschoben.
c) 1 Einheit entlang der x-Achse verschoben.
d) $-0,5$ Einheiten entlang der x-Achse verschoben.

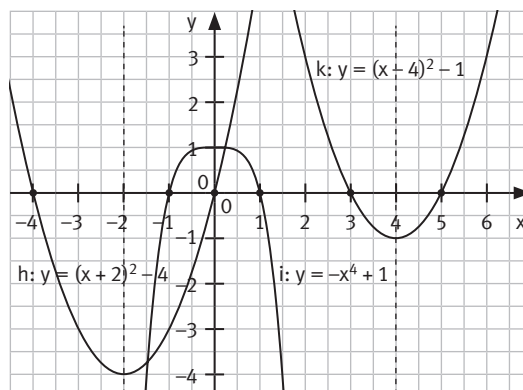
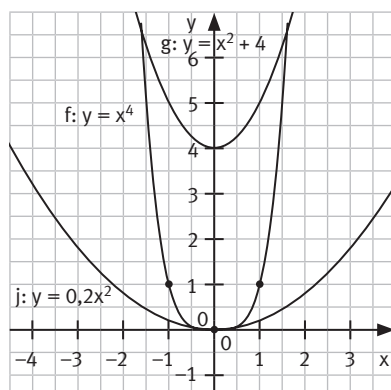
Allgemein gilt: Ersetzt man die Variable x in der Potenzfunktion $f(x) = a \cdot x^n$ durch die Summe aus x und einer Konstanten s zum Funktionsterm $f(x) = a \cdot (x + s)^n$, so wird die Parabel um $-s$ Einheiten entlang der x-Achse verschoben.

K4 13 a) 1 – B 2 – E 3 – A 4 – D

b) C $f_5: y = (x - 2)^3$

c) Der Graph ist monoton fallend für $x \leq 2$ und monoton steigend für $x \geq 2$. Der Scheitelpunkt der Parabel ist $S(2|3)$. Die Parabel ist achsensymmetrisch zu $x = 2$ und gegenüber $g(x) = x^4$ um 2 Einheiten entlang der x-Achse und 3 Einheiten entlang der y-Achse verschoben. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $g(x) \geq 3$.

K3 14



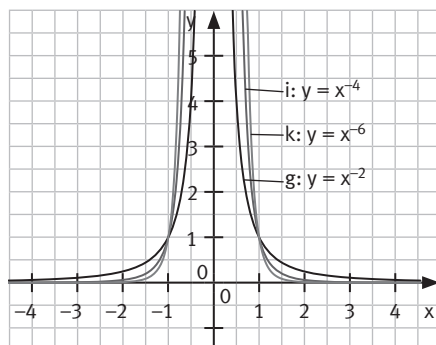
Zuordnung der Funktionsgleichungen und ihrer Eigenschaften:

- 1 k: $(x - 4)^2 - 1$ fallend/steigend bzgl. $x = 4$
2 h: $y = (x + 2)^2 - 4$ achsensymmetrisch bzgl. $x = -2$
3 i: $-x^4 + 1$ Nullstellen $x_1 = -1, x_2 = 1$
4 g: $y = x^2 + 4$ als einzige keine Nullstelle
5 f: $y = x^4$ durch $A(-1|1)$ und $B(1|1)$
6 j: $y = 0,2x^2$ gestauchte Normalparabel

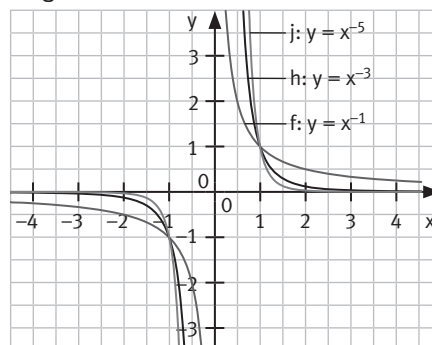
Entdecken

K5

■ Gerade Funktionen



Ungerade Funktionen



K1

■ Potenzfunktionen

Merkmale

Potenzfunktionen	Merkmale
Alle Funktionen	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ - gemeinsamer Punkt $(1 1)$ - Funktionswerte immer ungleich Null - für x gegen ∞ und x gegen $-\infty$ nähern sich die Funktionswerte der Null - für x von rechts gegen Null gehen die Funktionswerte gegen ∞
Gerade Funktionen	- Wertemenge $\mathbb{R}^+$ - für x von links gegen Null gehen die Funktionswerte gegen ∞ - zusätzlicher gemeinsamer Punkt $(-1 1)$ - steigend für $x < 0$; fallend für $x > 0$; Achsensymmetrie
Ungerade Funktionen	- Wertemenge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ - für x von links gegen 0 gehen Funktionswerte gegen $-\infty$ - zusätzlicher gemeinsamer Punkt $(-1 -1)$ - fallend für $x \in D$; Punktsymmetrie zum Ursprung

Nachgefragt

K1

- $f: y = x^{-n}$ kann zu $f: y = \frac{1}{x^n}$ umgeschrieben werden und für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist $0^n = 0$. Division durch Null ist jedoch nicht definiert. Somit ist $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ nicht definiert.

K1

- Grundsätzlich gilt: ① $x^0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ② $0^x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Folgt man ①, so gälte $0^0 = 1$, folgt man ②, so würde man $0^0 = 0$ annehmen.

Die Frage, wie 0^0 zu bewerten ist, ist aber keine Frage von „wahr“ oder „falsch“, sondern eine Frage, die sich am vorliegenden Zusammenhang orientiert, bzw. eine Frage von „zweckmäßig“ oder „nicht zweckmäßig“. Hier gilt: Wenn man sich der 0 von links her beliebig nähert, dann sind die Funktionswerte jeweils 1. Bei Annäherung von rechts gilt dasselbe. Also kann hier mit guten Gründen festgelegt werden:

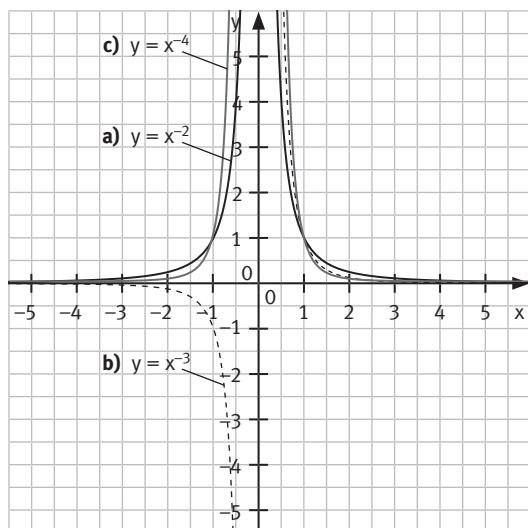
$0^0 = 1$, sodass die angesprochene Äquivalenz gilt: $f: y = x^0$ ist äquivalent zu $f: y = 1$.

K1

- Gehört bei einer Funktion zum Doppelten, zur Hälfte, ..., zum r -Fachen der einen Größe die Hälfte, das Doppelte, ..., der r -te Teil der anderen Größe, so heißt die Funktion umgekehrt proportional. Bei einer umgekehrt proportionalen Funktion sind die Produkte $x \cdot f(x)$ zugeordneter Größen gleich. Ist dieser Produktwert gleich p , so lautet die Funktionsgleichung $f: y = \frac{p}{x} = p \cdot x^{-1}$. Den Graphen einer solchen Funktion nennt man Hyperbel. Die Potenzfunktion $f: y = x^{-1}$, also eine umgekehrt proportionale Funktion, ist ein Spezialfall einer Potenzfunktion mit der Gleichung $f: y = x^{-n}$.

Aufgaben

K4 1

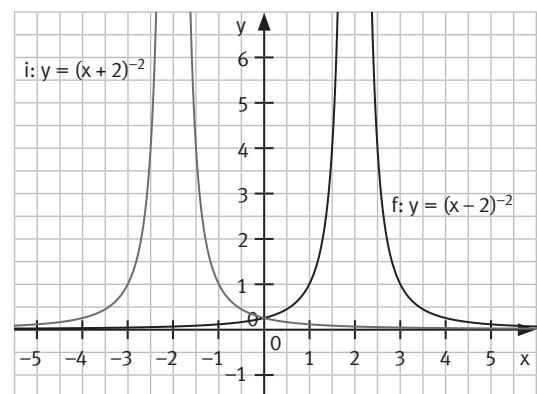
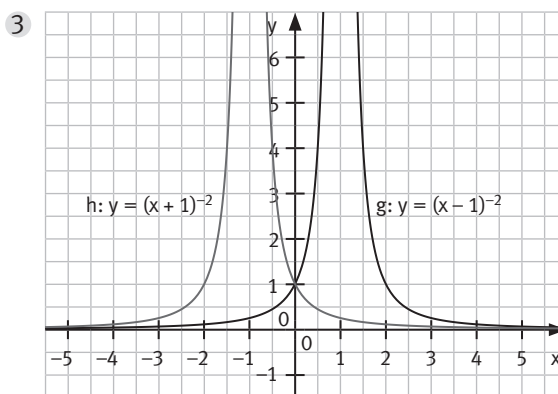
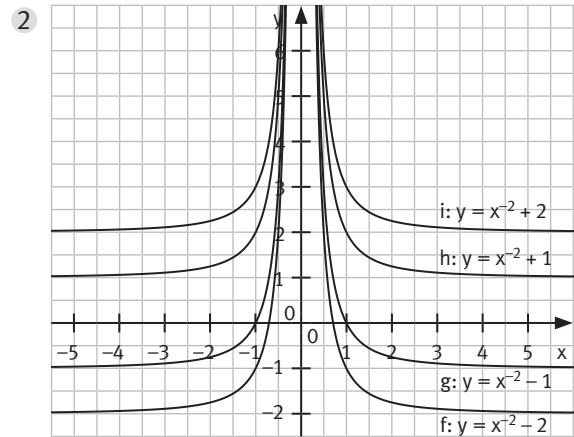
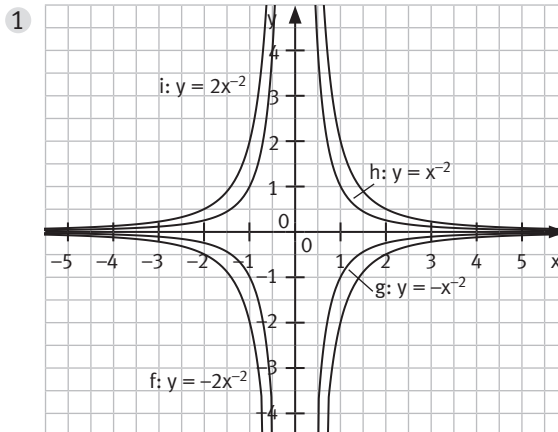


	a) $y = x^{-2}$	b) $y = x^{-3}$	c) $y = x^{-4}$
Definitionsmenge	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Wertemenge	$f(x) \in \mathbb{R}^+$	$f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f(x) \in \mathbb{R}^+$
Monotonie	steigend für $x < 0$ fallend für $x > 0$	fallend für $x < 0$ fallend für $x > 0$	steigend für $x < 0$ fallend für $x > 0$
Nullstellen	keine	keine	keine
Schnittpunkte mit der y-Achse	keine	keine	keine
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-Achse	punktsymmetrisch zu S(0 0)	achsensymmetrisch zur y-Achse

- K4 2 a) 1 Alle drei Graphen gehören zu Potenzfunktionen mit ungeradem Exponenten, da sie punktsymmetrisch sind zu (0|0).
 2 Alle vier Graphen gehören zu Potenzfunktionen mit geradem Exponenten, da sie achsensymmetrisch sind zur y-Achse.
- b) 1 rot: $f: y = x^1$ grün: $f: y = x^{-1}$ blau: $f: y = x^3$
 2 rot: $f: y = x^2$ grün: $f: y = x^0$ blau: $f: y = x^4$ orange: $f: y = x^{-2}$

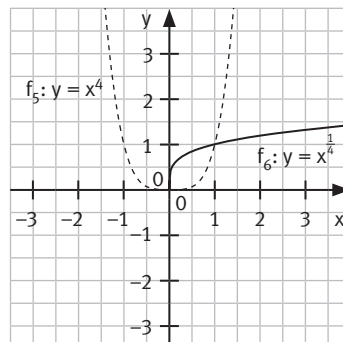
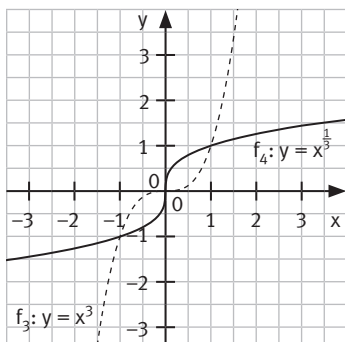
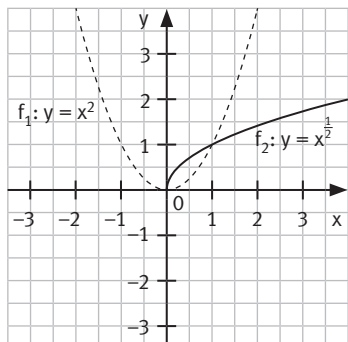
- K5 3 1 $f_1: y = x^2$ A, K, R, M liegen auf dem Graphen von $f_1 \Rightarrow$ MARK
 2 $f_2: y = x^3$ A, X, M liegen auf dem Graphen von $f_2 \Rightarrow$ MAX
 3 $f_3: y = x^{-1}$ A, X, E, L liegen auf dem Graphen von $f_3 \Rightarrow$ AXEL / ALEX
 4 $f_4: y = x^4$ A, K, I, M liegen auf dem Graphen von $f_4 \Rightarrow$ MAIK / MIKA

- K6** 4 a) Für die Verschiebung, Stauchung oder Streckung einer Funktion ist es nicht von Bedeutung ob der Exponent rational, ganzzahlig oder natürlich ist.
- b) Individuelle Lösungen für die Wahl von n möglich.
Für $n = 2$ ergibt sich:



Entdecken

KX



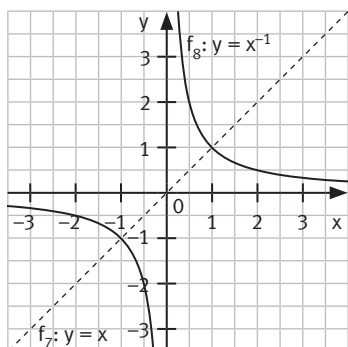
KX

- Mögliche Antwort: Die Funktionenpaare einer Farbe (f_1 und f_2 ; f_3 und f_4 ; f_5 und f_6) besitzen einen ähnlichen Verlauf, wurden jedoch an der Winkelhalbierenden $w_{I/III}: y = x$ gespiegelt. Bei den geraden Funktionen (f_1 und f_5) wurde dabei nur der im 1. Quadranten liegende Ast des Graphen gespiegelt.

KX

- Gemeinsame Punkte aller Funktionspaare sind $(0|0)$ und $(1|1)$; die Funktionen f_3 und f_4 haben zusätzlich zu $(0|0)$ und $(1|1)$ den gemeinsamen Punkt $(-1|-1)$.

KX



Das Funktionenpaar f_7 und f_8 hat die gemeinsamen Punkte $(1|1)$ und $(-1|-1)$.

Bei f_7 handelt es sich um eine Ursprungsgerade; bei f_8 dagegen handelt es sich um eine Hyperbel.

Nachgefragt

K6

- Der Punkt $P(1|1)$ liegt auf dem Graphen aller erwähnten Potenzfunktionen, da für $x = 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f(1) = 1^{\frac{1}{n}} = 1$ bzw. $f(1) = 1^{-\frac{1}{n}} = 1$.

K1

- $y = x^{\frac{1}{n}}$ kann auch als $y = \sqrt[n]{x}$ geschrieben werden.

Aufgaben

K5

1 a) 1

x	0	0,2	0,25	0,75	1	2	2,5	4
$y = x^{\frac{1}{3}}$	0	0,58	0,63	0,91	1	1,26	1,36	1,59

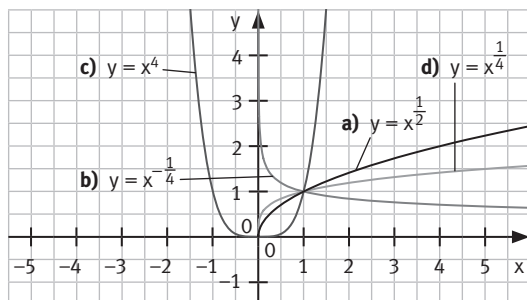
x	0,1	0,2	0,3	1	1,2	2,1	3	4,5
$y = x^{-\frac{1}{3}}$	2,15	1,71	1,49	1	0,94	0,78	0,69	0,61

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3	3,5	5
$y = x^{-\frac{1}{2}}$	3,16	1,41	1	0,82	0,71	0,58	0,53	0,45

x	0	0,5	1,5	2	3	3,5	4	5
$y = x^{\frac{1}{12}}$	0	0,94	1,03	1,06	1,1	1,11	1,12	1,14

- b) Die Werte für $x = 0$ und $x = 1$ müssen nicht mit dem Taschenrechner berechnet werden, da $0^a = 0$ (außer für $a = 0$) und $1^a = 1$ ist.

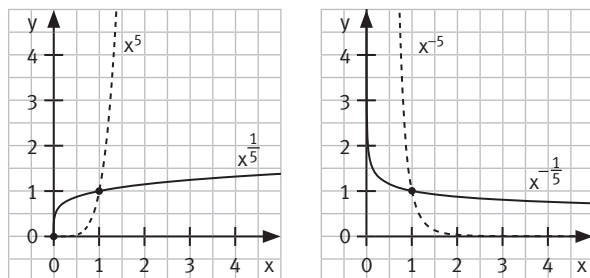
K3 2



	a) $y = x^{\frac{1}{2}}$	b) $y = x^{-\frac{1}{4}}$	c) $y = x^4$	d) $y = x^{\frac{1}{4}}$
Definitionsmenge D	$x \in \mathbb{R}_0^+$	$x \in \mathbb{R}^+$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}_0^+$
Wertemenge W	$y \in \mathbb{R}_0^+$	$y \in \mathbb{R}^+$	$y \in \mathbb{R}_0^+$	$y \in \mathbb{R}_0^+$
Monotonie	steigend für $x > 0$	fallend für $x > 0$	fallend für $x < 0$ steigend für $x > 0$	steigend für $x > 0$
Nullstellen	N (0 0)	keine	N (0 0)	N (0 0)
Asymptoten	keine	Koordinatenachsen	keine	keine
Gleichung der Umkehrfunktion	$y = x^2$	$y = x^{-4}$	$y = x^{\frac{1}{4}}$	$y = x^4$

- K4 3 Der rote und der blaue Graph gehören zu Potenzfunktionen mit negativen Exponenten, da für $x > 0$ beide Graphen monoton fallen und die Koordinatenachsen den Asymptoten entsprechen. Die anderen beiden Graphen sind Potenzfunktionen mit positiven Exponenten, da beide Graphen eine Nullstelle im Ursprung haben und für $x > 0$ monoton steigend sind.

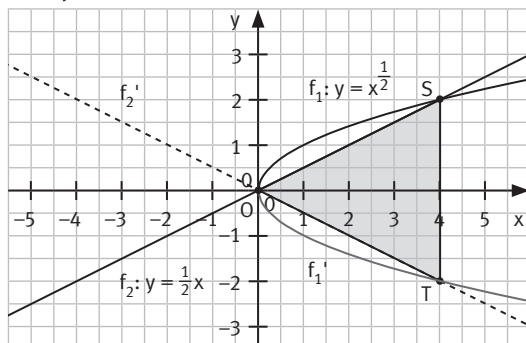
KX 4



Alle Graphen verlaufen durch den Punkt (1|1). Die Graphen von $f: y = x^5$ und von $h: y = x^{\frac{1}{5}}$ haben zusätzlich zu (1|1) den gemeinsamen Punkt (0|0).

Der Graph von $f: y = x^5$ ergibt gespiegelt an der ersten Winkelhalbierenden den Graphen von $h: y = x^{\frac{1}{5}}$. Die beiden Funktionen f und h sind Umkehrfunktionen zueinander. Der Graph von $g: y = x^{-5}$ ergibt gespiegelt an der ersten Winkelhalbierenden den Graphen von $i: y = x^{-\frac{1}{5}}$. Die beiden Funktionen g und i sind Umkehrfunktionen zueinander.

K5 5 a) bis d)



zu c) S(4|2): Schnittpunkt von f_1 und f_2

T(4|-2): Schnittpunkt von f_1' und f_2'

O(0|0): gemeinsamer Punkt aller Graphen

zu d) Die Punkte S, O und T spannen ein gleichschenkliges Dreieck auf. Die Basis dieses Dreiecks ist $\overline{ST}$, die zugehörige Höhe verläuft auf der x-Achse.

Mit $|\overline{ST}| = 4$ LE und $h = 4$ LE gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \text{ FE} = 8 \text{ FE}$$

Der Flächeninhalt der geometrischen Figur beträgt 8 Flächeneinheiten.

K6

6 a) 1

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$y = x^{\frac{2}{3}}$	0	0,63	1	1,31	1,59	1,84	2,08	2,31

2

x	0,1	0,2	0,3	1	1,2	2,1	3	4,5
$y = x^{-\frac{2}{3}}$	4,64	2,92	2,23	1	0,89	0,61	0,48	0,37

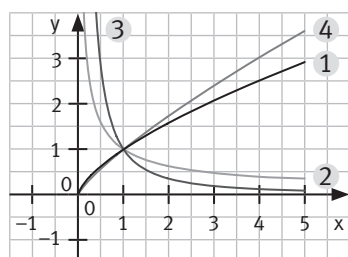
3

x	0,1	0,2	0,3	1	1,2	2,1	3	4,5
$y = x^{-\frac{3}{2}}$	31,62	11,18	6,09	1	0,76	0,33	0,19	0,1

4

x	0	0,1	0,3	1	1,2	2,1	3	4,5
$y = x^{\frac{4}{5}}$	0	0,16	0,38	1	1,16	1,81	2,41	3,33

b)



c) Es sind individuelle Antworten möglich.

d) Funktion 3 hat als Exponenten den Umkehrbruch des Exponenten aus Funktion 2. Dadurch fällt der Graph von Funktion 3 steiler (von 31,62 bei $x = 0,1$ bis 0,1 bei $x = 4,5$) als der von Funktion 2 (von 4,64 bei $x = 0,1$ bis 0,37 bei $x = 4,5$).

K1

7 Lösungsmöglichkeit mit Beispielen aus Aufgabe 6:

- $y = x^{\frac{2}{3}}$ und $y = x^{\frac{4}{5}}$
- $y = x^{-\frac{3}{2}}$ und $y = x^{-\frac{2}{3}}$
- $y = x^{-\frac{3}{2}}$ und $y = x^{-\frac{2}{3}}$
- alle genannten Potenzfunktionen

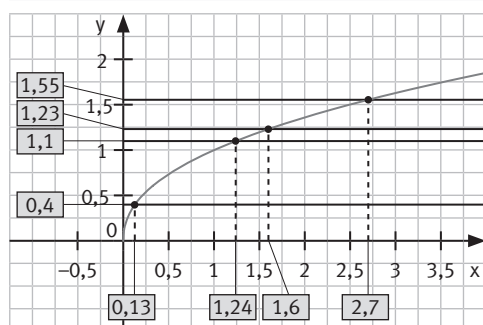
K5

8 a) Definitionsmenge: $x \in \mathbb{R}_0^+$ Wertemenge: $y \in \mathbb{R}_0^+$

b)

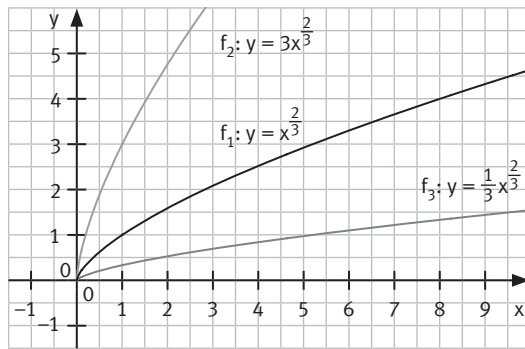
x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
y	0	0,49	0,67	0,8	0,91	1	1,08	1,16	1,23	1,3	1,36	1,42	1,48	1,53	1,58	1,63

c)



- d) 1 $x = 0,13$ $y = 0,4$ 2 $x = 1,24$ $y = 1,1$ 3 $x = 1,6$ $y = 1,23$ 4 $x = 2,7$ $y = 1,55$

K4 9

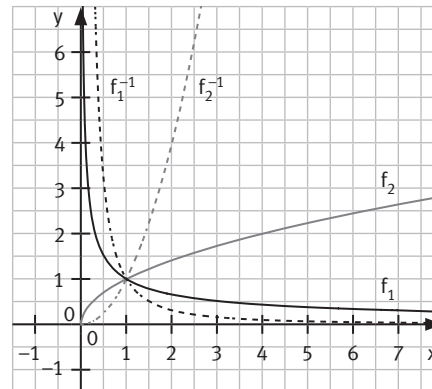


Ist $0 < a < 1$ ist der Graph der Funktion gestaucht. Für $a > 1$ ist der Graph der Funktion gestreckt.

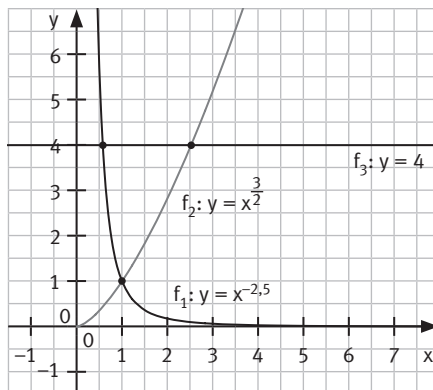
K5 10 a) $a \approx 6,998 \approx 7$ b) $a \approx 6,996 \approx 7$ c) $a = 7$ d) $a \approx 6,991 \approx 7$

K5 11 a) n beliebig b) $n = \frac{1}{2}$ c) $n = \frac{1}{2}$ d) $n = \frac{1}{2}$

K4 12 a) $f_1: y = \sqrt[5]{x^{-3}}$ $f_2: y = \sqrt[2]{x}$
 b) $f_1^{-1}: y = x^{-\frac{5}{3}}$ $f_2^{-1}: y = x^2$
 c) 1 $y = x^{-\frac{3}{5}} + 6$
 2 $y = x^{0,5} - 4$
 3 $y = (x+3)^{-\frac{3}{5}}$
 4 $y = (x-2)^{0,5}$
 5 $y = (x+0,5)^{-\frac{3}{5}} + 3$



K5 13 a)



	f_1	f_2	f_3
Definitionsmenge	$x \in \mathbb{R}^+$	$x \in \mathbb{R}_0^+$	$x \in \mathbb{R}$
Wertemenge	$y \in \mathbb{R}^+$	$y \in \mathbb{R}_0^+$	$y = 4$

c) Schnittpunkt der Graphen von ...

f_1 und f_2 : $S(1|1)$

f_1 und f_3 : $S(0,57|4)$

f_2 und f_3 : $S(2,52|4)$

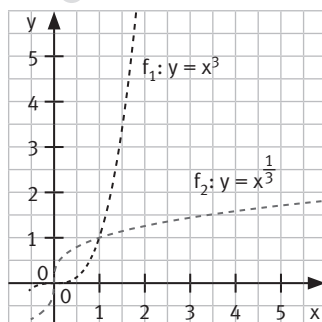
K1 14 Beim Vergleich der Eigenschaften der Graphen sind individuelle Lösungen möglich.

	a) $y = x^{1,8}$	b) $y = x^{-\frac{3}{2}}$	c) $y = x^{-0,3}$	d) $y = x^{0,125}$	e) $y = x^{-3}$
Definitionsmenge	$x \in \mathbb{R}_0^+$	$x \in \mathbb{R}^+$	$x \in \mathbb{R}^+$	$x \in \mathbb{R}_0^+$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Wertemenge	$y \in \mathbb{R}_0^+$	$y \in \mathbb{R}^+$	$y \in \mathbb{R}^+$	$y \in \mathbb{R}_0^+$	$y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Asymptoten	keine	Koordinatenachsen	Koordinatenachsen	keine	Koordinatenachsen
Nullstellen	$N(0 0)$	keine	keine	$N(0 0)$	keine
Monotonie	steigend	fallend	fallend	steigend	fallend für $x < 0$ steigend für $x > 0$

Entdecken

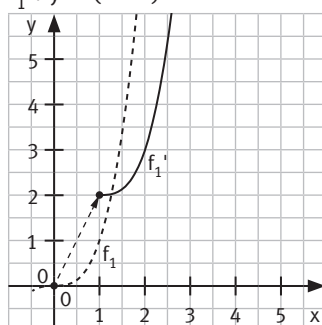
KX

- 1 und 2

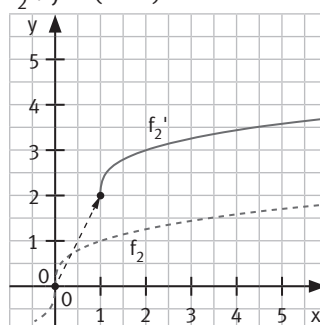


KX

- 1
- $f_1': y = (x-1)^3 + 2$



- 2
- $f_2': y = (x-1)^{1/3} + 2$



KX

- Die Spiegelung des Graphen 1 an der Winkelhalbierenden
- $w_{I/III}$
- ergibt den Graph zu 2 und umgekehrt.

Nachgefragt

KX

- Mögliche Antwort:

Die Verschiebung des Graphen einer Funktion mit einem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ entspricht dem Verschieben des Graphen entlang der x-Achse um b bzw. der Addition von $-b$ zur Basis der Potenzfunktion und anschließendem Verschieben entlang der y-Achse um d bzw. der Addition von d zum Funktionsterm. Zur Funktion $f(x)$ erhält man die Bildfunktion: $f(x-b) + d$.

Aufgaben

K5

1

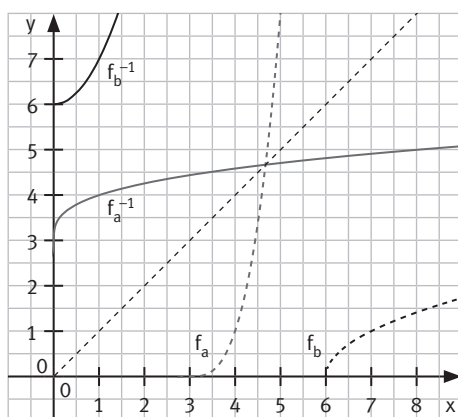
	1 $f_1: y = \sqrt[3]{x}$	2 $f_2: y = \sqrt[4]{x}$	3 $f_3: y = x^{-3}$	4 $f_4: y = x^{-4}$
a)	$f': y = \sqrt[3]{x-3} + 2$	$f': y = \sqrt[4]{x-3} + 2$	$f': y = (x-3)^{-3} + 2$	$f': y = (x-3)^{-4} + 2$
b)	$f': y = \sqrt[3]{x-7} + 1,5$	$f': y = \sqrt[4]{x-7} + 1,5$	$f': y = (x-7)^{-3} + 1,5$	$f': y = (x-7)^{-4} + 1,5$
c)	$f': y = \sqrt[3]{x-b} + 2b$	$f': y = \sqrt[4]{x-b} + 2b$	$f': y = (x-b)^{-3} + 2b$	$f': y = (x-b)^{-4} + 2b$
d)	$f': y = \sqrt[3]{x+b} + b$	$f': y = \sqrt[4]{x+b} + b$	$f': y = (x+b)^{-3} + b$	$f': y = (x+b)^{-4} + b$

- KX** 2 a) Die Gleichung der Umkehrfunktion f^{-1} einer (Potenz-)Funktion f erhält man, indem man x und y in der Ausgangsgleichung vertauscht und die neue Gleichung dann nach y auflöst. Hierbei ist darauf zu achten, dass die Definitionsmenge von f geeignet eingeschränkt wird und die Wertemenge von f als Definitionsmenge von f^{-1} passend übernommen wird.

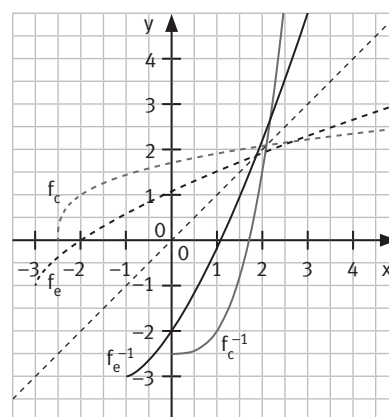
b) $f: y = x^{\frac{m}{n}}$ | x und y vertauschen
 $f^{-1}: x = y^{\frac{m}{n}}$ | nach y auflösen
 $x^{\frac{n}{m}} = y$ $\Rightarrow f^{-1}: y = x^{\frac{n}{m}}$

- KX** 3 Individuelle Lösungen, z. B.: Zu Beginn wird in der Gleichung der Ursprungsfunktion x und y vertauscht und anschließend nach y aufgelöst. Bevor die 5. Wurzel aus $(x+2)$ gezogen werden kann, muss die Definitionsmenge der Ursprungsfunktion berücksichtigt werden; dies ergibt, dass $y \leq -1$ und $(x+2)$ negativ ist. Daher wird umgeformt, indem man beide Seiten mit (-1) multipliziert, man erhält: $-(y+1)^5 = -(x+2)$. Nun kann die 5. Wurzel gezogen werden, man erhält schließlich: $y = -\sqrt[5]{-(x+2)} - 1$, wobei die Definitionsmenge der Umkehrfunktion die Bedingung $x \leq -2$ enthält. Dies entspricht der Wertemenge der Ursprungsfunktion.

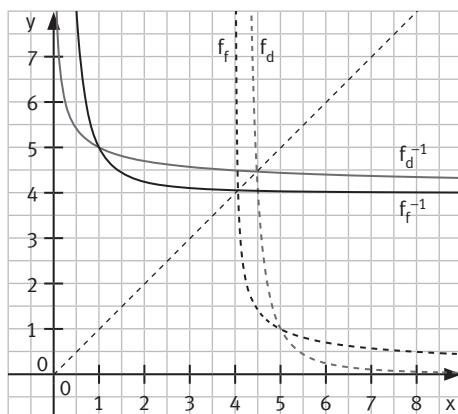
- K4** 4 a) und b)



- c) und e)



- d) und f)



	a) $f^{-1}: y = x^{\frac{1}{3}} + 3$	b) $f^{-1}: y = x^2 + 6$	c) $f^{-1}: y = \frac{x^3 - 5}{2}$
Definitionsmenge	$x \in \mathbb{R}_0^+$	$x \in \mathbb{R}_0^+$	$x \in \mathbb{R}_0^+$
Wertemenge	$y \in \mathbb{R}^+$ mit $y \geq 3$	$y \in \mathbb{R}^+$ mit $y \geq 6$	$y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq -2,5$
Monotonie	steigend	steigend für $x > 0$	steigend
Asymptoten	keine	keine	keine

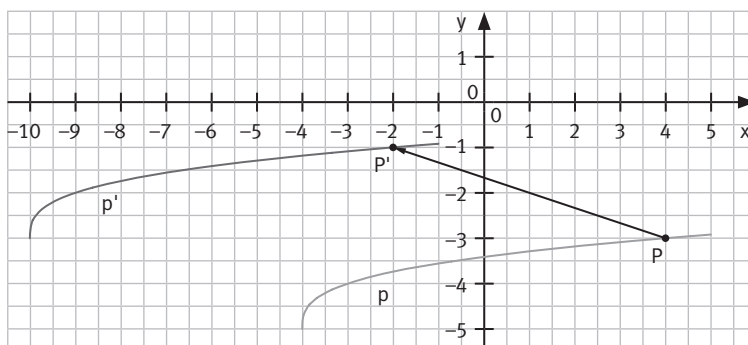
	d) $f^{-1}: y = x^{-\frac{1}{2}} + 4$	e) $f^{-1}: y = (x+1)^{\frac{3}{2}} - 3$	f) $f^{-1}: y = x^{-2} + 4$
Definitionsmenge	$x \in \mathbb{R}^+$	$x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$	$x \in \mathbb{R}^+$
Wertemenge	$y \in \mathbb{R}^+$ mit $y > 4$	$y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq -3$	$y \in \mathbb{R}^+$ mit $y > 4$
Monotonie	fallend	steigend	fallend
Asymptoten	$x = 0$; $y = 4$	keine	$x = 0$; $y = 4$

K5

- 5 a)
- $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$
- $W = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -5\}$

b)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (x + 4)^{\frac{1}{3}} - 5$	-5	-4	-3,7	-3,6	-3,4	-3,3	-3,2	-3,1	-3	-2,9



- c) Nullstelle:
- $x_0 = 5^3 - 4 = 121$

$$y_S = 4^{\frac{1}{3}} - 5 \approx -3,4$$

Schnittpunkt mit der y-Achse: S(0|-3,4)

- d) Der Graph geht durch eine Verschiebung um den Vektor
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$
- aus dem Graphen der Parabel
- p_0
- mit
- $y = x^{\frac{1}{3}}$
- hervor.

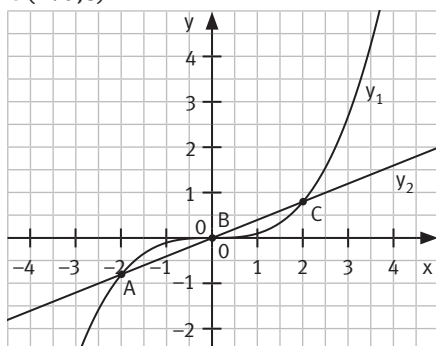
- e) p muss um den Vektor
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$
- verschoben werden.
- $p': y = (x + 10)^{\frac{1}{3}} - 3$

- K5** 1 a) $1 \cdot 10^{-9} \text{ km}$ b) $1 \cdot 10^{-12} \text{ km}^2$ c) $1 \cdot 10^9 \text{ B}$ d) $3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ e) $1,6726 \cdot 10^{-21} \text{ mg}$
- K5** 2 a) -27 b) $\frac{9}{16}$ c) $0,16$ d) $0,000001$ e) $\frac{5}{3}$
f) $-0,064$ g) $\frac{4}{9}$ h) $0,00000001$ i) $-0,125$ j) -1
- K5** 3 a) $x^0 = 1$ b) $20a^7$ c) $9c^{-1}$ d) a^2 e) y^{2n}
f) $0,2d^2$ g) a^{-2-4n} h) $36a^{-6}$ i) $\frac{b^{x-2}}{2^{2x} \cdot b^{-x}} = \frac{b^{2x-2}}{2^{2x}}$
- K5** 4 a) a^{-x-4} Werte eingesetzt: $0,015625 = 2^{-6}$ b) $-\frac{9}{7}y^{-5} + \frac{0,027}{7}y^{-8}$ Werte eingesetzt: $\frac{9001}{1701}$
c) $\frac{3}{8}c - \frac{5}{32}c^3 - \frac{25}{16}c^{-2}$ Werte eingesetzt: $\frac{-941}{288}$ d) $\frac{a}{a^2 + a + 1}$ Werte eingesetzt: $-\frac{2}{3}$
- K5** 5 a) $a^{11} - a^6$ b) $4 + 2b - 5b^2$ c) $a - a^2 + a^4$
d) $21a - 32a$ e) $-1 - 2xy^{-3}$ f) $-10c - 6c^3 + 25c^{-1}$
- K5** 6 a) 5^2 b) $5^{\frac{1}{12}}$ c) $2^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{6}}$ d) $2^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{9}} b$ e) $a^{\frac{7}{6}}$
f) a g) $a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{4}{3}} c$ h) $3 \cdot (2a)^{\frac{7}{10}}$ i) $\frac{64}{\sqrt{27}} a^6 \cdot b^3$
- K5** 7 a) $3^{\frac{1}{4}}$ b) $27^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}}$ c) $64^{\frac{1}{6}} = 2$ d) $216^{\frac{1}{3}} a = 6a$
e) $8^{\frac{1}{3}} ab^2 = 2ab^2$ f) $512^{\frac{1}{6}} a^{\frac{1}{2}} = (8a)^{\frac{1}{2}}$ g) $2^2 \cdot 8^2 = 256$ h) $12 \cdot 3^{-2} \cdot 2^{-\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}$
i) $16^3 \cdot (-8)^6 = 32^6$ j) $-2 \cdot 4^{-12} \cdot 2^{48} = -2^{25}$ k) $2a^{\frac{2}{3}} + xa^{\frac{2}{3}}$ l) $x + 1$
- K5** 8 a) $a^{\frac{4}{5}} - 2 \cdot (ab)^{\frac{2}{5}} + b^{\frac{4}{5}}$ b) $a^{\frac{4}{7}} - 2(ab)^{\frac{2}{7}} + b^{\frac{4}{7}}$ c) $b^{\frac{3}{4}} - 2(ab)^{\frac{3}{8}} + a^{\frac{3}{4}}$
d) $a^{\frac{4}{3}} - b^{\left(\frac{4}{5}\right)}$ e) $a^{-1} + 2 \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{2}}$ f) $a^{\frac{1}{4}} + (ab)^{-\left(\frac{1}{2}\right)} + a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{2}} + 1$
- K1** 9 Diese Gleichheit gilt für alle reellen Zahlen.
- K3** 10 a) Man müsste $\frac{1}{3 \cdot 10^{-8}} = 33\,333\,333$ Moleküle aneinander reihen.
b) Die Kette wäre $28,9 \cdot 10^{18} \cdot 3 \cdot 10^{-8} = 8,67 \cdot 10^{11} \text{ cm}$ lang.
- K3** 11 a) Ein Eimer hat 25 Sträube. Somit bräuchte er 4 Eimer.
b) Er muss 500 Blumen schneiden, da ein Strauß jeweils 5 Blumen hat.
- K5** 12 Punkte, die nicht auf der jeweiligen Funktion liegen:
a) G b) A c) U d) S e) S
Der Name des Mathematikers lautet (Carl Friedrich) Gauß (1777–1885).

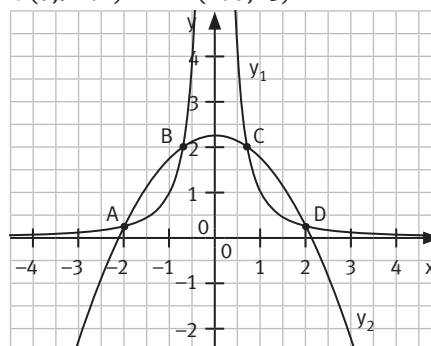
K4

13 Die Koordinaten sind teils auf zwei Dezimalen gerundet.

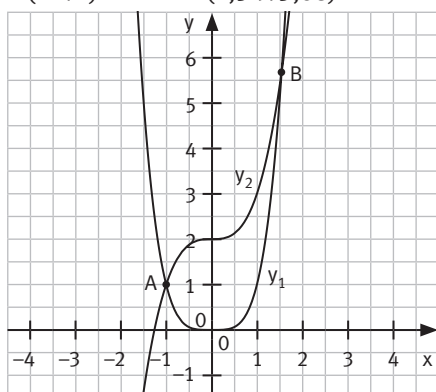
a) A(-2|-0,8) B(0|0)
C(2|0,8)



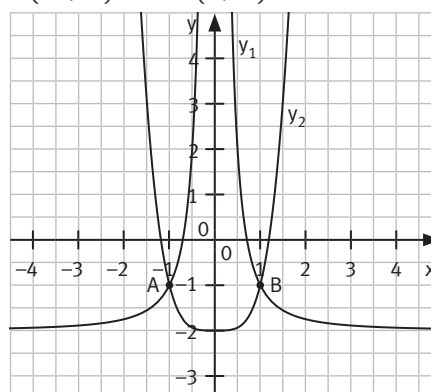
b) A(-2|0,25) B(-0,71|2)
C(0,71|2) D(2|0,25)



c) A(-1|1) B(1,54|5,68)

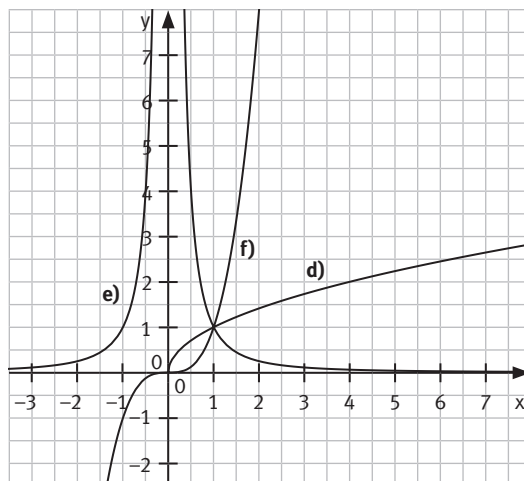
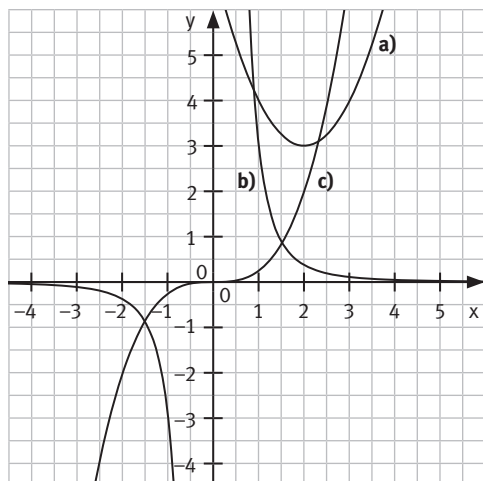


d) A(-1|-1) B(1|-1)



K5

14



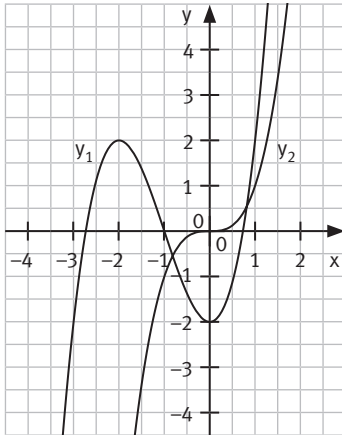
	a)	b)	c)
Funktionsmenge	$y = (x-2)^2 + 3$	$y = 3x^{-3}$	$y = 0,25x^3$
Definitionsmenge	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \in \mathbb{R}$
Wertebereich	$y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 3$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y \in \mathbb{R}$
Nullstellen	keine	keine	$x = 0$
	d)	e)	f)
Funktionsgleichung	$y = \sqrt{x}$	$y = x^{-2}$	$y = x^3$
Definitionsmenge	$x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}$
Wertemenge	$y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$	$y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$	$\mathbb{R}$
Nullstellen	$x = 0$	keine	$x = 0$

K6

15 a)

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
y ₁	-2	1,125	2	1,375	0	-1,375	-2	-1,125	2	8,125

a) und b)



Beide Funktionen haben $\mathbb{R}$ als Definitions- und Wertemenge und beide Funktionen verlaufen monoton steigend bei genügend kleinen und genügend großen x -Werten (mit $x \leq -2$ und $x \geq 0$). Weiterhin schneiden sie beide Achsen mindestens einmal.

KX

16 a) Der Graph b gehört nicht zu einer Funktion, denn bei einer Funktion wird einem x -Wert genau ein y -Wert zugeordnet, was hier jedoch nicht der Fall ist.

b) 1 e Es handelt sich um den Parabelast der Wurzelfunktion.

2 h Es handelt sich um eine Hyperbel, die für $x > 0$ langsamer gegen null geht als der Graph a der Funktion 3.

3 a Es handelt sich um eine Hyperbel, die für $x > 0$ schneller gegen null geht als der Graph h der Funktion 2.

4 d Es handelt sich um einen Parabelast, der sehr nahe an der Geraden $y = x$ ist.

5 g Es handelt sich um die Gerade, die allen x -Werten den y -Wert 1 zuordnet.

6 b Es handelt sich um die Senkrechte auf der x -Achse für $x = 1$.

7 f Es handelt sich um einen Parabelast, der langsamer steigt als der Graph e der Funktion 1. Die zugehörige Funktion muss also einen kleineren Exponenten als die Funktion 1 besitzen.

8 c Es handelt sich um einen Parabelast, der schneller steigt als der Graph d der Funktion 4. Die zugehörige Funktion muss also einen größeren Exponenten besitzen als die Funktion zu 4.

KX

17 Zuordnung der Graphen mit den Funktionstermen und den Definitions- und Wertemengen:

a 4 A b 3 E c 2 D d 5 C e 1 B

K4

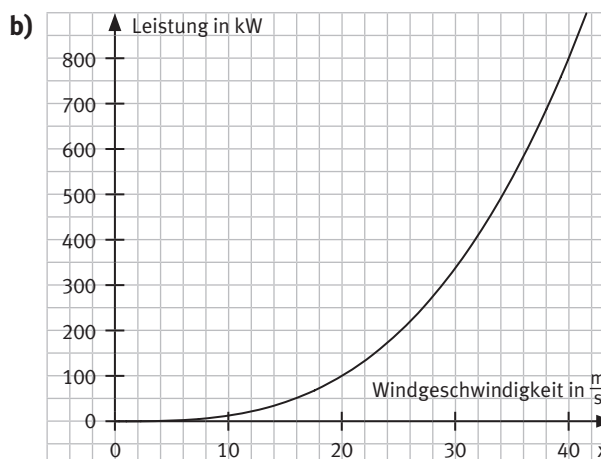
18

	a)	b)	c)
Funktionsgleichung	$y = x^{-2}$	$y = x^2 - 1$	$y = x^3$
Definitionsmenge	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Wertemenge	$y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$	$y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq -1$	$\mathbb{R}$
Nullstellen	keine	$x_1 = -1; x_2 = 1$	$x = 0$
Symmetrie	symmetrisch zur y -Achse	symmetrisch zur y -Achse	punktsymmetrisch zu O (0 0)
Monotonie	steigend für $x < 0$ fallend für $x > 0$	fallend für $x < 0$ steigend für $x > 0$	steigend

	d)	e)	f)
Funktionsgleichung	$y = \frac{4}{3}x - 2$	$y = x^4$	$y = x^{-1}$
Definitionsmenge	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Wertemenge	$\mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R} \text{ mit } y \geq 0$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Nullstellen	$x = 1,5$	$x = 0$	keine
Symmetrie	keine	symmetrisch zur y-Achse	punktsymmetrisch zu O (0 0)
Monotonie	steigend	fallend für $x < 0$ steigend für $x > 0$	fallend für $x < 0$ fallend für $x > 0$

K3 19 a) $12,5 = a \cdot 10^3 \Leftrightarrow a = 0,0125$

c) für 60 kW: $16,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
für 100 kW: $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$



K3 20 a) $r = \sqrt[3]{\frac{1,0832 \cdot 10^{12}}{\frac{4}{3} \cdot \pi}} \text{ km} = 6370 \text{ km}$

$$O = 4 \cdot \pi \cdot 6370^2 \text{ km}^2 = 509\,904\,364 \text{ km}^2$$

b) Es sind $\frac{509\,904\,364}{100} \cdot 71 \text{ km}^2 = 362\,032\,098 \text{ km}^2$ Landfläche.

c) $m = \rho \cdot V$

$$m = 5,52 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 1,0832 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$$

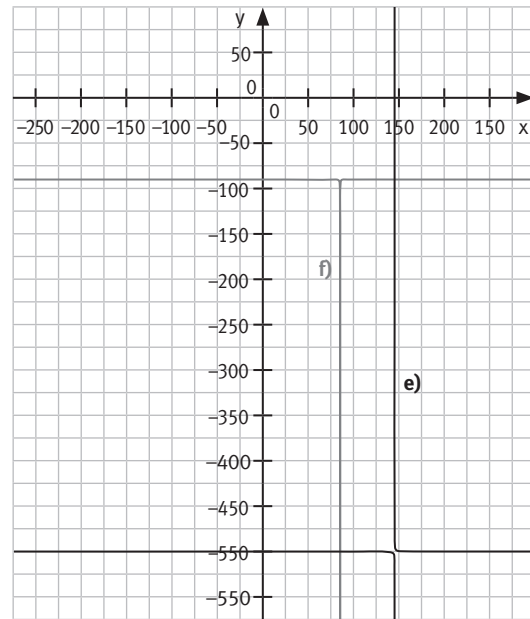
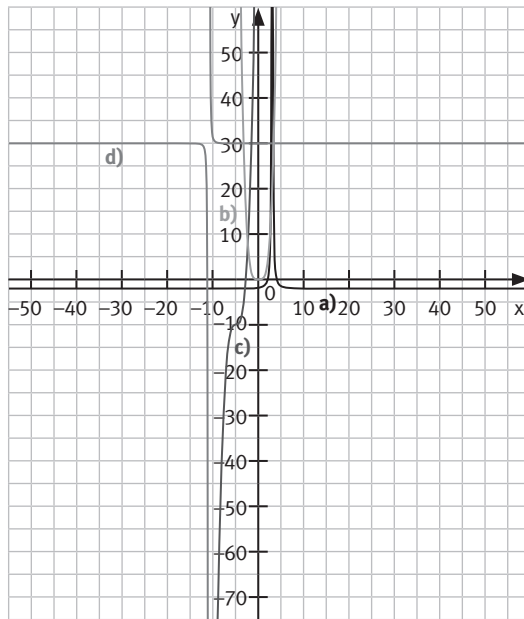
$$m = 5,52 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} \cdot 1,0832 \cdot 10^{12} \cdot (1000 \text{ m})^3 = 5,52 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} \cdot 1,0832 \cdot 10^{12} \cdot 10^9 \text{ m}^3$$

$$m \approx 5,98 \cdot 10^{21} \text{ t}$$

K5 21 a) und b)

	1	2	3	4	5	6
Definitionsmenge	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}_0^+$	$x \in \mathbb{R}^+$	$x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 3$	$x \in \mathbb{R}$ mit $x > 2$
Wertemenge	$y \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}_0^+$	$y \in \mathbb{R}_0^+$	$y \in \mathbb{R}^+$	$y \in \mathbb{R}_0^+$	$y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 1$
Asymptoten	keine	keine	keine	Koordinatenachsen	keine	$x = 2$ $y = 1$
	7	8	9	10	11	12
Definitionsmenge	$x \in \mathbb{R}$ mit $x > 1$	$x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -2$	$x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$	$x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$x \in \mathbb{R}$
Wertemenge	$y \in \mathbb{R}^+$	$y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq -1$	$y \in \mathbb{R}_0^+$	$y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 1$	$y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$	$y \in \mathbb{R}$
Asymptoten	$x = 1$ $y = 0$	keine	keine	keine	$x = -1$ $y = 2$	keine

K4 22



	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Definitionsmenge	$x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{-11\}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{120\}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{60\}$
Wertemenge	$y \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$	$y \in \mathbb{R}_0^+$	$y \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R} \setminus \{30\}$	$y \in \mathbb{R} \setminus \{-500\}$	$y \in \mathbb{R}$ mit $y < -90$
Asymptoten	$x = 3$ $y = -2$	keine	keine	$x = -11$ $y = 30$	$x = 120$ $y = -500$	$x = 60$ $y = -90$

K1 23 a) Definitionsmenge: $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- b) Dies ist nicht möglich, da dafür der Bruch im Funktionsterm $\frac{-3}{(x-1)^2} + 3$ gleich Null sein müsste. Der Graph der Funktion hat $x = 1$ und $y = 3$ als Asymptoten.
- c) Der Funktionsterm ist eine Summe aus zwei Summanden, von denen der eine 3 ist und der andere eine negative Zahl. Addiert man diese beiden Summanden, ist die Summe nie größer als 3.
- d) Erhöht man die x -Werte, so wird der Nenner des Bruches immer größer, sodass der Bruch insgesamt kleiner wird, er nähert sich der Null an. In Summe nähern sich die Werte des Funktionsterms also der Zahl 3 an.

K5 24 a) $f: y = (x+4)^{\frac{1}{3}} + 2$

b) $f: y = (x-3)^{\frac{1}{3}}$

K5 25 a) $n = 0,5$

b) $n = -3$

c) $n = \frac{1}{4}$

d) $n = -0,25$

e) $n = \frac{1}{3}$

f) $n = -0,5$

g) $n = -4$

h) $n = 1,5$

K5 26 a) $y = x^{\frac{1}{4}}$

b) $y = x^{\frac{6}{5}}$

c) $y = x^3$

d) $y = x^{\frac{3}{8}}$

e) $y = x^{\frac{10}{3}}$

f) $y = x^{-\frac{1}{3}}$

g) $y = x^{-1}$

h) $y = x^{-\frac{4}{7}}$

i) $y = x^{-8}$

j) $y = x$

k) $y = x^{-\frac{4}{3}}$

l) Umkehrfunktion existiert nicht.

Aufgaben zur Einzelarbeit

- K5** 1 a) $2,9243 \cdot 10^{12}$ b) $1,6 \cdot 10^{-9}$
 c) 288 000 d) 0,0000000000701
 e) $42,195 \cdot 10^3 \text{ m} = 4,2195 \cdot 10^4 \text{ m}$ f) $120 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
 g) $883 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 8,83 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ h) $1200 \cdot 10^6 \text{ Byte} = 1,2 \cdot 10^9 \text{ Byte}$

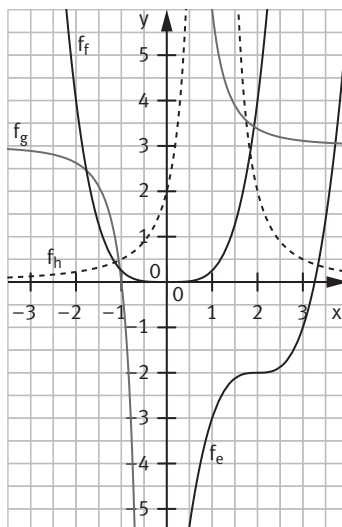
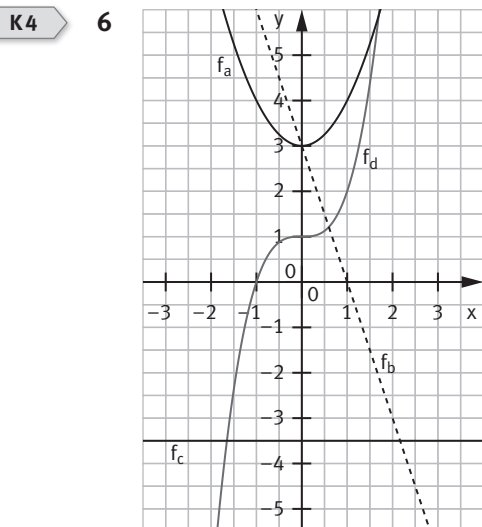
- K5** 2 a) $2 \cdot 10^{-10}$ b) $\approx 4,336 \cdot 10^{-7}$
 c) $-177\,147 = -1,77147 \cdot 10^5$ d) $6 \cdot 10^{-7}$
 e) $-256 = -2,56 \cdot 10^2$ f) $4\,520\,400 = 4,5204 \cdot 10^6$
 g) $\approx 3,011 \cdot 10^{-9}$ h) $0,432 = 4,32 \cdot 10^{-1}$

- K5** 3 a) $x^{\frac{7}{6}}$ b) $x^{\frac{41}{12}}$ c) $x^{\frac{5}{6}}$ d) $x^{\frac{7}{2}}$ e) x^6 f) $\frac{1}{7^{21}} \cdot x^4$

K5 4

	Potenz	Wurzel
a)	$2^8 = 256$	$\sqrt[8]{256} = 2$
b)	$6^4 = 1296$	$\sqrt[4]{1296} = 6$
c)	$8^6 = 262\,144$	$\sqrt[6]{262\,144} = 8$
d)	$9^5 = 59\,049$	$\sqrt[5]{59\,049} = 9$

- K3** 5 a) $3,26 \cdot 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m} = 3,084 \cdot 10^{16} \text{ m} = 3,084 \cdot 10^{13} \text{ km}$
 Ein Parsec misst $3,084 \cdot 10^{13} \text{ km}$.
 b) $197 \cdot 3,26 \text{ Lj} = 642,2 \text{ Lj}$



K4 7 a) 1

	Funktionsgleichung
a (rot)	$y = x^{-2}$
b (blau)	$y = x^3$
c (grün)	$y = -2x - 2$
d (orange)	$y = -(x - 2)^2 - 1$

2

	Funktionsgleichung
a (rot)	$y = 2x^{-1}$
b (blau)	$y = x^4$
c (grün)	$y = \frac{1}{2}x + 1$
d (orange)	$y = (x - 2)^2 - 3$

b) 1

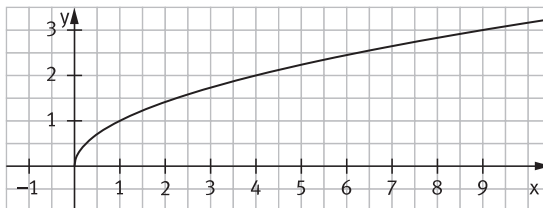
	D	W	Nullstellen
a (rot)	$x \in \mathbb{R}; x \neq 0$	$y \in \mathbb{R}; y > 0$	keine
b (blau)	$x \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$	$x_0 = 0$
c (grün)	$x \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$	$x_0 = -1$
d (orange)	$x \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}; y \leq -1$	keine

2

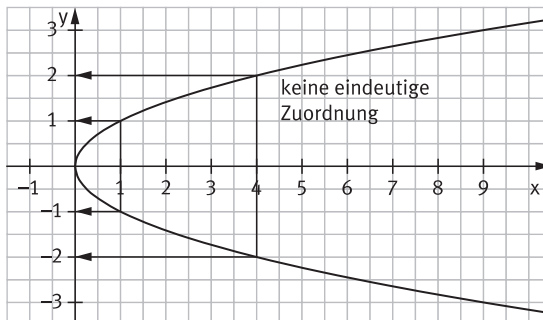
	D	W	Nullstellen
a (rot)	$x \in \mathbb{R}; x \neq 0$	$y \in \mathbb{R}; y \neq 0$	keine
b (blau)	$x \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}; y \geq 0$	$x_0 = 0$
c (grün)	$x \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$	$x_0 = -2$
d (orange)	$x \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}; y \geq -3$	$x_1 = 2 - \sqrt{3} \approx 0,27$ $x_2 = 2 + \sqrt{3} \approx 3,73$

K5

8 a)



- b) Die Definitionsmenge muss eingeschränkt werden, da $\sqrt{x}$ für negative x-Werte nicht definiert ist.
- c) Beim beschriebenen Vorgehen entsteht eine Kurve, die nicht der Graph einer Funktion ist. So würden beispielsweise zu $x = 4$ die beiden Werte $y_1 = 2$ und $y_2 = -2$ gehören, die Zuordnung wäre nicht mehr eindeutig. Damit läge keine Funktion vor.



- d) Die Funktion $y = \sqrt{x}$ ist über ihre gesamte Definitionsmenge monoton steigend.

K1

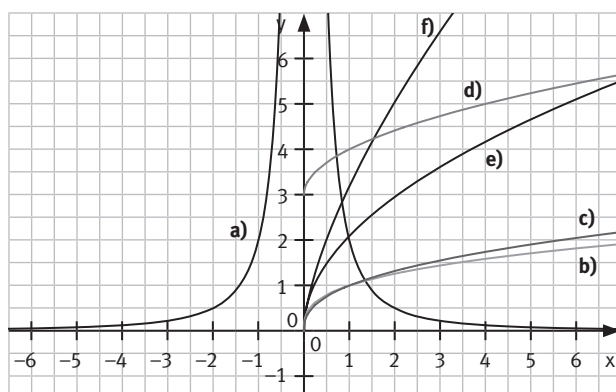
- 9 a) Gerade b) Parabel c) Gerade
d) Parabel e) Hyperbel f) Parabel
g) Parabel h) Gerade i) Hyperbel

K5

- 10 a) $y = x^{-2}$ A(-2|0,25) B(3,4|0,09) $C_1\left[-\frac{10}{7}|0,49\right]$ oder $C_2\left[\frac{10}{7}|0,49\right]$
b) $y = x^3 - 3$ D(-2,5|-18,63) E(1,9|3,86) F(3,21|30)
c) $y = x^{\frac{1}{7}}$ G(4|1,22) H(2,5|1,14) I(128|2)
d) $y = x^{-1}$ J(-4|-0,25) K(2,6|0,38) L(-5|-0,2)
e) $y = \sqrt{x}$ M(5|2,24) N(0,81|0,9) O(0|0)
f) $y = x^{-\frac{1}{3}}$ P(3|0,69) Q(10|0,46) R(8|0,5)

K5

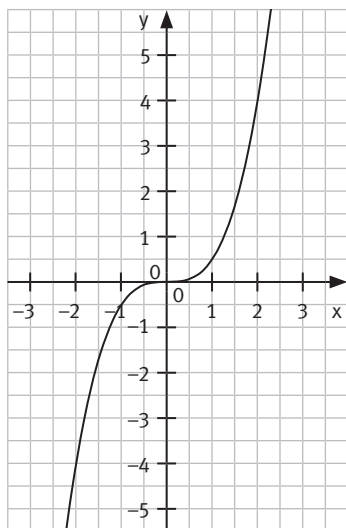
11



K5

12 a)

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	-13,5	-7,81	-4	-1,69	-0,5	-0,06	0	0,06	0,5	1,69	4	7,81	13,5

b) Es muss überprüft werden, ob $f(-x) = -f(x)$ ist.

$$f(-x) = 0,5 \cdot (-x)^3 = -0,5x^3$$

$$-f(x) = -0,5x^3$$

Damit ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung.

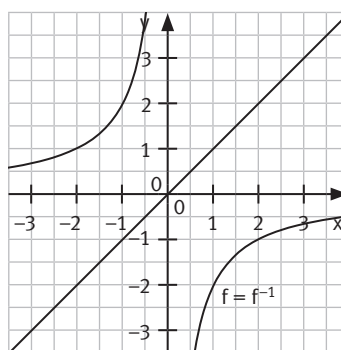
K1

13 a) Eine Funktion ist achsensymmetrisch zur Winkelhalbierenden $w_{I/III}$, wenn man in der Funktionsgleichung x und y vertauschen kann, ohne dass sich dadurch der Funktionsterm ändert.Vertauschung von x und y in $y = x^{-1}$:

$$\begin{aligned} x &= y^{-1} & | \cdot y \\ \Leftrightarrow x \cdot y &= 1 & | \cdot x^{-1} \\ \Leftrightarrow y &= x^{-1} \end{aligned}$$

Der Graph ist also achsensymmetrisch zur Winkelhalbierenden $w_{I/III}$.b) Die Umkehrfunktion erhält man, indem im Funktionsterm $y = -2 \cdot x^{-1}$ x und y miteinander vertauscht werden.

$$\begin{aligned} x &= -2 \cdot y^{-1} & | \cdot y \\ \Leftrightarrow x \cdot y &= -2 & | \cdot x^{-1} \\ \Leftrightarrow y &= -2 \cdot x^{-1} \end{aligned}$$

Somit ist f^{-1} identisch mit f .

K5

14 $f': y = (x - 0,5)^{-\frac{1}{5}} - 0,5$

Aufgaben für Lernpartner

- K1/6** A Die Aussage ist falsch. Die Potenzgesetze gelten für alle Exponenten.
- K1/6** B Die Aussage ist richtig. Umgeformt lautet die Funktionsgleichung: $y = -x^3 + 4$.
- K1/6** C Die Aussage ist richtig.
- K1/6** D Die Aussage ist falsch; z. B. ist zur Grundmenge $\mathbb{R}$ für die Funktion $f: y = x^2$ die Definitionsmenge ebenfalls $\mathbb{R}$.
- K1/6** E Die Aussage ist richtig, denn $(-2)^{-3} + 1 = \frac{7}{8}$.
- K1/6** F Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Die Potenzfunktion $y = x^2 + 1$ hat keine Nullstelle.

Potenzgesetze

- KX** 1 $b^e = p$
- KX** 2 Richtig sind die Ansätze 2 und 3.
- KX** 3 a) $\frac{1}{16}$ b) 1 c) 16 d) 1
- KX** 4 Antwort A: null
- KX** 5 $(9^9)^9 \approx 1,966 \cdot 10^{77}$

Potenzfunktionen

- KX** 6 a) Parabel (außer für $n = 1$, dann ist f eine Gerade.) b) Hyperbel
c) Parabel d) Hyperbel
- KX** 7 Im Vergleich zum Graphen der Funktion f ist der Graph von g ...
a) ... um 1 Einheit entlang der y -Achse nach oben verschoben.
b) ... um 1 Einheit entlang der x -Achse nach links verschoben.
c) ... um 1 Einheit entlang der x -Achse nach rechts und um 1 Einheit entlang der y -Achse nach unten verschoben.
- KX** 8 Gesucht ist eine Parabel dritter Ordnung, die entlang der x -Achse um 1 Einheit nach rechts verschoben ist und durch die Punkte $(0|-0,5)$, $(1|0)$ und $(2|0,5)$ verläuft. Dies wird erfüllt von **D**: $y = 0,5 \cdot (x - 1)^3$.
- KX** 9 a) ... verlaufen durch den Punkt $(1|1)$.
b) ... haben eine Asymptote, wenn $\frac{a}{b} < 0$.
c) ... sind für $\frac{a}{b} > 0$ Parabeläste.
d) ... sind für $\frac{a}{b} < 0$ Hyperbeläste.

Startklar

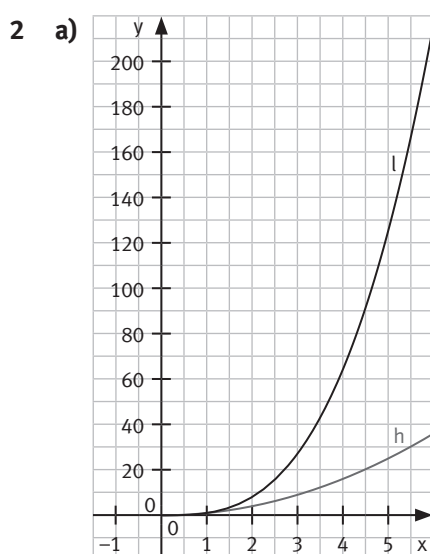
Graphen von Funktionen zeichnen

K1/4

- 1 a) (Abb. der Geraden $f: y = 2x - 2$ und $g: y = -x + 7$ s. Anhang im Schulbuch auf S. 236)

- b) Die Funktion f besitzt die Steigung $m = 2$, die Funktion g hat eine Steigung von $m = -1$. In beiden Fällen handelt es sich um lineares Wachstum.

K1/4



- b) Die Funktion $h(x)$ ist die quadratische Funktion $h(x) = x^2$. Die Differenz zweier benachbarter Werte $h(x)$ und $h(x+1)$ beträgt $2x+1$.

x	0	1	2	3	4
h(x)	0	1	4	9	16
		+ 1	+ 3	+ 5	+ 7

Die Funktion $l(x)$ ist die kubische Funktion $l(x) = x^3$. Die Differenz zweier benachbarter Werte $l(x)$ und $l(x+1)$ beträgt $3x^2 + 3x + 1$.

x	0	1	2	3	4
l(x)	0	1	8	27	64
		+ 1	+ 7	+ 19	+ 37

Ergänzung: Aus aufeinanderfolgenden „Blöcken“ von einer, zwei, drei, ... ungeraden Zahlen, lassen sich durch Addition die Kubikzahlen erzeugen:

1	3, 5	7, 9, 11	13, 15, 17, 19	...
1	8	27	64	...

Lineare Funktionen bestimmen

KX

- 3 a) 1 m gibt die Steigung der Geraden an. Die Gerade wird steiler, wenn m größer wird. Sie wird flacher, wenn m kleiner wird. Bei negativem m fällt die Gerade.
 2 t entspricht dem y-Wert des Schnittpunktes der Geraden mit der y-Achse. Die Gerade verschiebt sich entlang der y-Achse nach oben, wenn t größer wird. Sie verschiebt sich entlang der y-Achse nach unten, wenn t kleiner wird. Bei negativem t ist der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse unterhalb der x-Achse.
 b) $g: y = -\frac{1}{3}x + 3$ $h: y = \frac{3}{2}x$

Quadratische Funktionen bestimmen

KX

- 4 a) 1 Die Parabel wird gestreckt, wenn a größer wird. Sie wird gestaucht, wenn a kleiner wird. Die Parabel ist nach unten geöffnet, wenn a mit -1 multipliziert wird.
 2 Die Parabel verschiebt sich entlang der x-Achse nach rechts, wenn x_s größer wird. Sie verschiebt sich nach links, wenn x_s kleiner wird. Der x-Wert des Scheitelpunktes wechselt das Vorzeichen, wenn x_s mit -1 multipliziert wird.
 3 Die Parabel verschiebt sich entlang der y-Achse nach oben, wenn y_s größer wird. Sie verschiebt sich nach unten, wenn y_s kleiner wird. Der y-Wert des Scheitelpunktes wechselt das Vorzeichen, wenn y_s mit -1 multipliziert wird.
 b) $p_1: y = -1 \cdot x^2$ $p_2: y = 2 \cdot (x-1)^2 - 2$

2 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:

Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K3

- Mögliche Antwort mit Daten der Deutschen Stiftung Weltbevölkerung (DSW) zum Thema „Weltbevölkerung zum Jahreswechsel 2021/2022“

(<https://www.dsw.org/weltbevoelkerung-zum-jahreswechsel-2021-2022-7-920-278-000-menschen-leben-auf-der-erde/>, aufgerufen am 8.9.2022):

„In der Nacht zum 1. Januar 2022 leben 7.920.278.000 Menschen auf der Erde. (...) Nach Angaben der Vereinten Nationen (UN) wächst die Weltbevölkerung aktuell jedes Jahr um etwa 1,09 Prozent. Damit hat sich das relative Wachstum in den letzten 50 Jahren beinahe halbiert.“

Stand zu Beginn des Jahres 2022 laut DSW, Jan. 2022: 7 920 278 000 Menschen
Wachstum bei einer Rate von 1,09%:

Jan. 2023: 8 006 609 030 Menschen $(1,0109^1 \cdot 7\,920\,278\,000 = 8\,006\,609\,030)$

Jan. 2024: 8 093 881 069 Menschen $(1,0109^2 \cdot 7\,920\,278\,000 = 8\,093\,881\,069)$

Jan. 2032: 8 827 188 300 Menschen $(1,0109^{10} \cdot 7\,920\,278\,000 = 8\,827\,188\,300)$

Abhängig von neuen Erhebungen und Entwicklungen sind andere Antworten möglich.

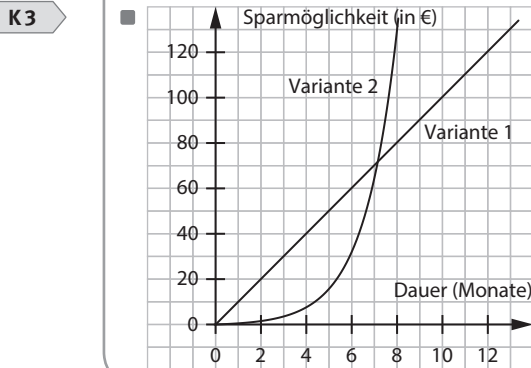
Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.

Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Entdecken

- K3** ■ Wenn Emil lange genug durchhält, lohnt sich die zweite Variante („... im ersten Monat 50 ct und verdopple jeden Monat den Betrag ...“) gegenüber der ersten Variante („... jeden Monat 10 € ...“).
- K3** ■ Bei Variante 1 hat Emil nach dem 3. Monat 30 €, nach dem 6. Monat 60 €, nach dem 9. Monat 90 € und nach dem 12. Monat 120 €.
- Bei Variante 2 hat Emil nach dem 3. Monat 3,50 €, nach dem 6. Monat 31,50 €, nach dem 9. Monat 255,50 € und nach dem 12. Monat 2047,50 €.



Nachgefragt

- K1** ■ Mögliche Antwort: Tims Aussage ist unklar, da er nicht weiter ausführt, ob er von einer Zunahme der Werte ausgeht oder unter „Wachstum“ auch die Abnahme von Werten versteht.
- Geht man von einer Zunahme der Werte aus, so hat Tim Recht: Auf lange Sicht gesehen verläuft lineares Wachstum langsamer als exponentielles.
- Begründung: Beim linearen Wachstum kommt immer ein konstanter Wert hinzu. Beim exponentiellen Wachstum wird der Wert, der hinzukommt, ständig größer, und irgendwann übersteigt dieser Wert den konstanten Summanden.
- Geht man von einer Abnahme der Werte aus, so hat Tim (auf lange Sicht gesehen) nicht Recht: Bei linearer Abnahme wird immer derselbe Wert subtrahiert. Bei exponentieller Abnahme wird der Wert, der subtrahiert wird, stets kleiner.

Aufgaben

- K5** 1 a) linear
b) exponentiell
c) linear
d) exponentiell
e) linear
f) exponentiell

- K6** 2 a) exponentiell (Werte gerundet)

Zeitraum (Jahre)	0	1	2	3
Lohn (€)	10,00	10,20	10,40	10,61

- b) exponentiell

Zeitraum (Jahre)	0	1	2	3
Wert (€)	54 000	40 500	30 375	22 781,25

- c) linear

Zeitraum (min)	0	1	2	3
Länge (cm)	10	9,6	9,2	8,8

- d) exponentiell

Zeitraum (h)	0	1	2	3
Masse (g)	0,5	2	8	32

- K6** 3 a) Exponentielles Wachstum: Pro Zeiteinheit (eine Woche) verdoppelt sich die Anzahl der Algen. Zwei Wochen später kann man von einer Vervierfachung ausgehen. Es liegt also eine Multiplikation mit einem konstanten Faktor zugrunde.
 b) Lineares Wachstum: Jeden Monat wird derselbe Geldbetrag (Summand) addiert.
 c) Exponentielles Wachstum: Es wird mit dem Faktor 3 vervielfacht.

- K1** 4 a) – 4: Der Graph (Pulsanstieg) steigt gleichmäßig bis zu einem bestimmten Niveau an und verläuft dann konstant weiter.
 b) – 2: Der Graph (Wertverlust des Autos) beginnt beim Maximum und nimmt dann zuerst stark und mit der Zeit immer weniger ab.
 c) – 1: Der Graph (Bakteriumvermehrung) steigt exponentiell bis (fast) zu einem Maximum an und bleibt dann auf diesem Niveau. Das Maximum existiert wegen des abgeschlossenen Gefäßes.
 d) – 3: Die Geschwindigkeit ist konstant, daher nimmt die Anzahl der verbleibenden Kilometer linear ab.

Entdecken

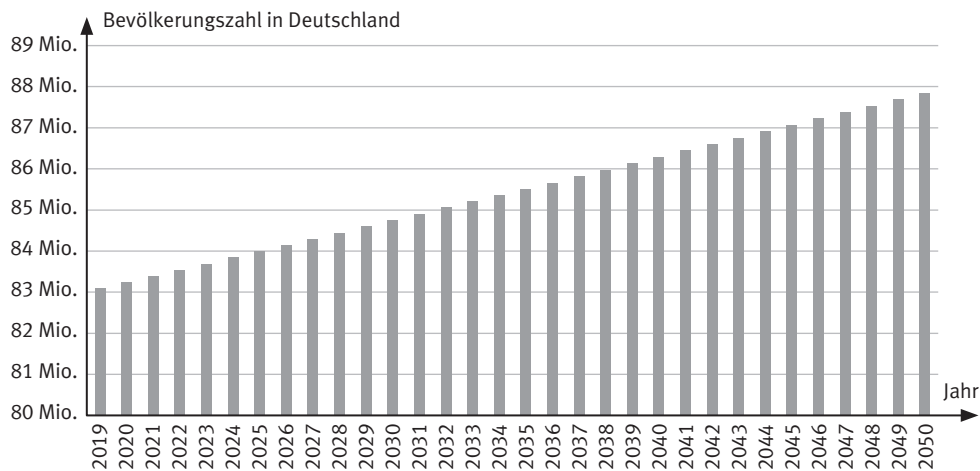
KX

- Berechnung der Wachstumsrate: $\frac{83,24 \text{ Millionen}}{83,09 \text{ Millionen}} \approx 1,00181$; Zunahme um 0,181 %.
Berechnung mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms, ausgehend von 83,09 Millionen Menschen im Jahr 2019 und einer Wachstumsrate von 0,181 %.
Term für die Berechnung in n Jahren nach 2019: $83,09 \cdot 10^6 \cdot 1,00181^n$

Jahr	Bevölkerungszahl in Deutschland
2019	83,09 Millionen
2020	83,24 Millionen
2021	83,39 Millionen
2022	83,54 Millionen
2023	83,69 Millionen
2024	83,84 Millionen
2025	84,00 Millionen
2026	84,15 Millionen
2027	84,30 Millionen
...	... Millionen
2047	87,41 Millionen
2048	87,56 Millionen
2049	87,72 Millionen
2050	87,88 Millionen

KX

- Das Diagramm zeigt den Anstieg der Bevölkerungszahl bei konstanter Wachstumsrate von 0,181 %.



Nachgefragt

K6

- Für $b = 1$ ist der Graph eine Parallele zur x-Achse mit y-Achsenabschnitt 1. Es liegt keine Exponentialfunktion vor, da der Graph nicht ansteigt und nicht abnimmt, sondern konstant auf einem Niveau bleibt.

K1

- Zur Begründung von Linas Behauptung können einige Funktionswerte herangezogen werden. Man erkennt: Für $x > 4$ sind die Funktionswerte von $f(x)$ größer als die von $g(x)$. Allgemein gilt: Eine Potenzfunktion wächst auf lange Sicht gesehen langsamer als eine Exponentialfunktion.

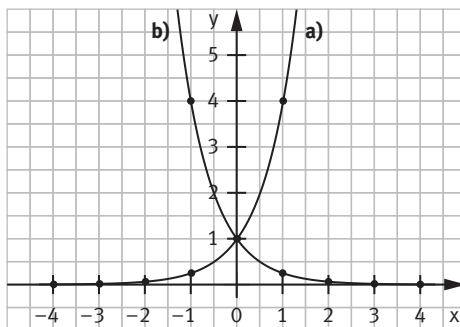
x	0	1	2	3	4	5	6	7
f: $y = 2^x$	1	2	4	8	16	32	64	128
g: $y = x^2$	0	1	4	9	16	25	36	49

Aufgaben

K4/5

1

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
a) $f: y = 2^x$	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16
b) $f: y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	0,00390625	0,015625	0,0625	0,25	1	4	16	64	256



K4/5

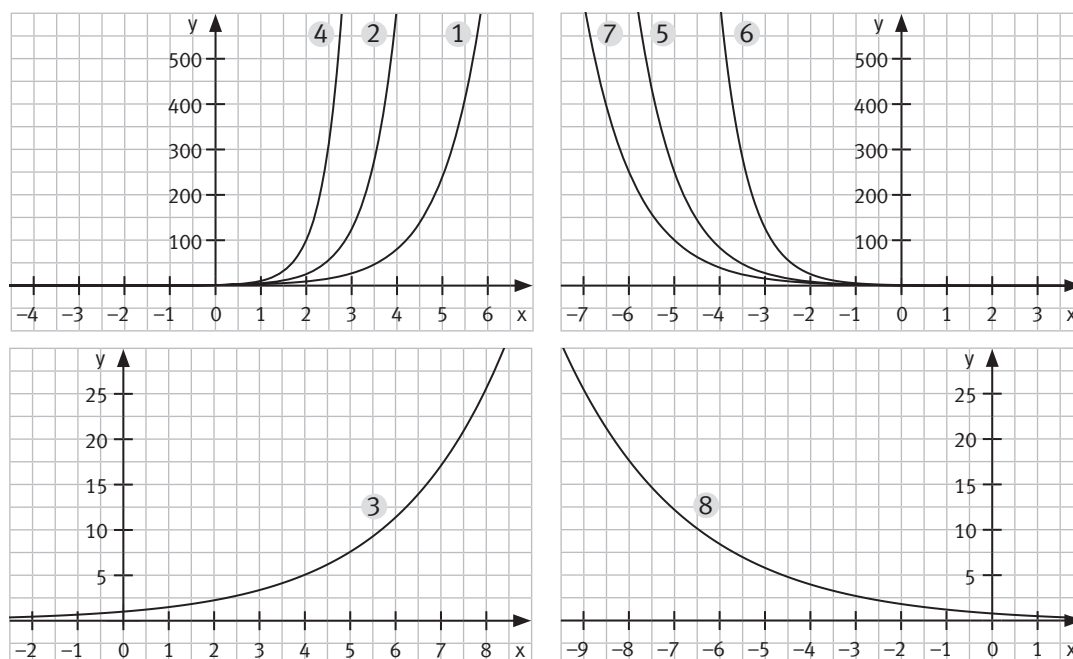
- 2 Die Funktionen $f: y = a^x$ und $g: y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ haben den Schnittpunkt $S(0|1)$. Der Graph der Funktion f ist steigend, der Graph der Funktion g ist fallend. Beide Funktionen haben keine Nullstelle, die x -Achse ist Asymptote. Zudem ist die y -Achse ihre Spiegelachse.

K5

3 a)

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
1	0,04	0,06	0,11	0,19	0,33	0,58	1	1,73	3	5,20	9	15,59	27
2	0,008	0,02	0,04	0,09	0,2	0,45	1	2,24	5	11,18	25	55,90	125
3	0,30	0,36	0,44	0,54	0,67	0,82	1	1,22	1,5	1,84	2,25	2,76	3,38
4	0,001	0,003	0,01	0,03	0,1	0,32	1	3,16	10	31,6	100	316,23	1000
5	27	15,59	9	5,20	3	1,73	1	0,58	0,33	0,19	0,11	0,06	0,04
6	125	55,90	25	11,18	5	2,24	1	0,45	0,20	0,09	0,04	0,02	0,01
7	15,63	9,88	6,25	3,95	2,5	1,58	1	0,63	0,4	0,25	0,16	0,10	0,06
8	2,92	2,44	2,04	1,71	1,43	1,20	1	0,84	0,7	0,59	0,49	0,41	0,34

b)



Für alle Funktionen gilt: $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}^+$.

Der Graph von $y = 0$ (x-Achse) ist waagrechte Asymptote.

Probleme bereitet das Zeichnen sehr großer und sehr kleiner Funktionswerte, z. B. bei 4 die Werte von 1000 bis 0,001.

- K5** 4 Aufgrund der Definition einer Exponentialfunktion, die im Schulbuch vorgenommen wurde, entfällt bei der Lösung der Gleichung $y = a^x$ eine etwaige negative Lösung.

a) $y = a^x$

$$4 = a^2$$

$$a = \sqrt{4}$$

$$a = 2$$

$$f: y = 2^x$$

b) $y = a^x$

$$0,04 = a^2$$

$$a = \sqrt{0,04}$$

$$a = 0,2$$

$$f: y = 0,2^x$$

c) $y = a^x$

$$7 = a^3$$

$$a = \sqrt[3]{7}$$

$$f: y = (\sqrt[3]{7})^x$$

d) $y = a^x$

$$0,0256 = a^4$$

$$a = \sqrt[4]{0,0256}$$

$$a = 0,4$$

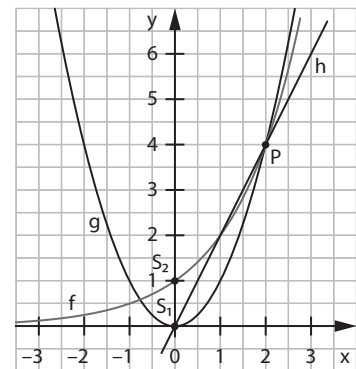
$$f: y = 0,4^x$$

- KX** 5 Gemeinsamkeiten:

- Die drei Graphen schneiden sich im Punkt P(2|4).
- Die drei Graphen haben einen Schnittpunkt mit der y-Achse.

Unterschiede:

- Die Graphen von g und h haben eine Nullstelle, der Graph von f hat keine Nullstelle.
- Die Graphen von g und h haben $S_1(0|0)$ als gemeinsamen Schnittpunkt mit der x- und der y-Achse, der Graph von f hat $S_2(0|1)$ als Schnittpunkt mit der y-Achse.
- Der Graph von f hat die x-Achse als Asymptote, die Graphen von g und h haben keine Asymptote.
- Die Graphen von f und h sind monoton steigend, der Graph von g hat $S_1(0|0)$ als Scheitelpunkt.



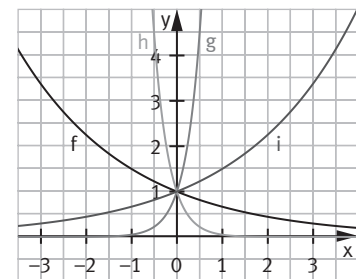
- K6** 6 Hier wurden die Werte $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, 20 und $\frac{1}{20}$ für a gewählt.

Für Werte von a größer 1 gilt, dass der Graph monoton steigt, während er für a-Werte zwischen 0 und 1 monoton fällt. Eine Gemeinsamkeit aller solcher Funktionen ist, dass sie durch den Punkt (0|1) verlaufen und einen positiven Wertebereich ($W = \mathbb{R}^+$) besitzen.

Schließlich fallen Symmetrien zur y-Achse auf:

$f: y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ entsteht durch Spiegelung von $i: y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ an der y-Achse (und umgekehrt).

$h: y = \left(\frac{1}{20}\right)^x$ entsteht durch Spiegelung von $g: y = 20^x$ an der y-Achse (und umgekehrt).



- K1** 7 a) Der Funktionswert von $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ wird ...

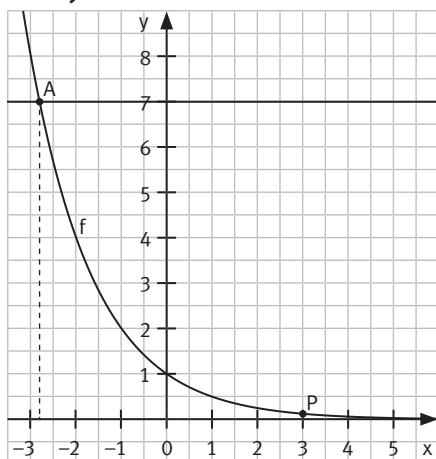
- 1 halbiert, da $f(x+1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2} \cdot f(x)$ ist.
- 2 vervierfacht, da $f(x-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \cdot f(x)$ ist.
- 3 mit $\sqrt{2}$ multipliziert, da $f(x-0,5) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-0,5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-0,5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{2} \cdot f(x)$ ist.
- 4 quadriert, da $f(2x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2 = [f(x)]^2$ ist.
- 5 Aus dem Funktionswert wird die Quadratwurzel gezogen, da $f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0,5x} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{0,5} = \sqrt{f(x)}$ ist.
- 6 Vom Funktionswert wird der Kehrwert genommen, da $f(-x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x} = \frac{1}{f(x)}$ ist.

b) Der Funktionswert von $f: y = a^x$ wird ...

- 1 mit a multipliziert.
- 2 durch a^2 dividiert.
- 3 durch $\sqrt{a}$ dividiert.
- 4 quadriert.
- 5 Aus dem Funktionswert wird die Quadratwurzel gezogen.
- 6 Vom Funktionswert wird der Kehrwert genommen.

- K4** 8 a) Einsetzen von $P(3|y_p)$ in die Funktionsgleichung von f ergibt:
 $y_p = 0,5^3 = 0,125$ $P(3|0,125)$ liegt auf dem Graphen von f .

b) und c)



$D = \mathbb{R}$ und $W = \mathbb{R}^+$

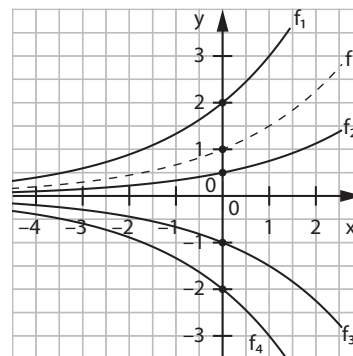
Der Graph von f ist fallend und besitzt die waagrechte Asymptote $y = 0$.

Der Graph von f schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = 7$ ungefähr im Punkt $A(-2,8|7)$.

Probe mit dem Taschenrechner: $0,5^{-2,8} = 6,96 \approx 7$

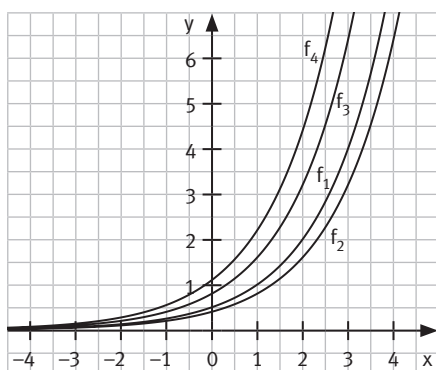
- KX** 9 Die Graphen der Funktionen $f: y = k \cdot 1,5^x$ entstehen durch Streckung, Stauchung oder Spiegelung.

- 1 Der Graph von f_1 entsteht durch Streckung des Graphen von f .
- 2 Der Graph von f_2 entsteht durch Stauchung des Graphen von f .
- 3 Der Graph von f_3 entsteht durch Spiegelung des Graphen von f an der x -Achse.
- 4 Der Graph von f_4 entsteht durch Spiegelung des Graphen von f_1 an der x -Achse.



- K5** 10 a)

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
1 $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$	0,06	0,09	0,13	0,18	0,25	0,35	0,5	0,71	1	1,41	2	2,83	4
2 $y = 0,4 \cdot 2^x$	0,05	0,07	0,1	0,14	0,2	0,28	0,4	0,57	0,8	1,13	1,6	2,26	3,2
3 $y = 0,8 \cdot 2^x$	0,1	0,14	0,2	0,28	0,4	0,57	0,8	1,13	1,6	2,26	3,2	4,53	6,4
4 $y = 1,1 \cdot 2^x$	0,14	0,19	0,28	0,39	0,55	0,78	1,1	1,56	2,2	3,11	4,4	6,22	8,8

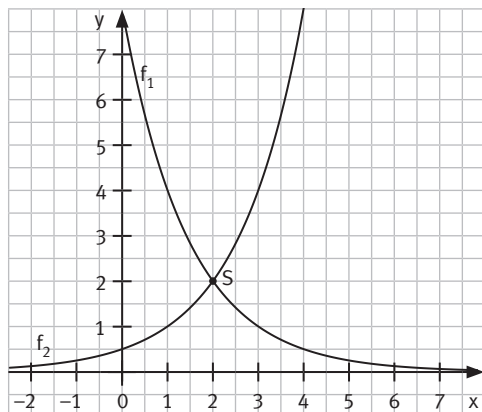


b)

	D	W	Asymptote	Im Vergleich zu $y = 2^x$...
1 $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$y = 0$	gestaucht
2 $y = 0,4 \cdot 2^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$y = 0$	gestaucht
3 $y = 0,8 \cdot 2^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$y = 0$	gestaucht
4 $y = 1,1 \cdot 2^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$y = 0$	gestreckt

K4

11



$$f_1: y = 8 \cdot 0,5^x$$

$$f_2: y = 0,5 \cdot 2^x$$

Der Schnittpunkt von f_1 und f_2 ist $S(2|2)$.

Rechnerische Überprüfung durch jeweiliges Einsetzen von S in die Funktionsgleichungen von f_1 und f_2 :

$$f_1(2) = 8 \cdot 0,5^2 = 8 \cdot 0,25 = 2$$

$$f_2(2) = 0,5 \cdot 2^2 = 0,5 \cdot 4 = 2$$

KX

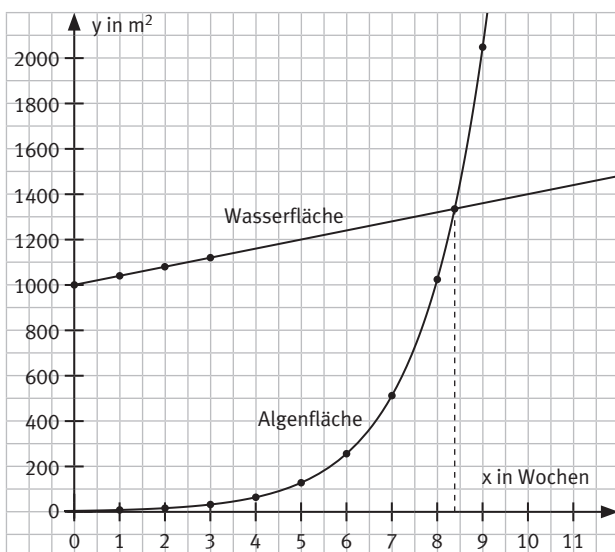
12 Individuelle Antwort, z. B.:

- a) Beim beschriebenen Vorgang handelt es sich um eine exponentielle Abnahme mit $a = \frac{5}{6}$ und $k = 60$. Hierzu wird die Wertetabelle erstellt und der Graph gezeichnet.
- b) Die Funktionsgleichung für die Beschreibung der noch vorhandenen Masse m in Abhängigkeit von Tag x ist $m: y = 60 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^x$.
- c) Dem Graphen kann man entnehmen, dass sich die Masse nach ungefähr 3,8 Tagen halbiert (von anfangs 60 g auf 30 g).

K3

13 a)

x in Wochen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wasserfläche in m^2	1000	1040	1080	1120	1160	1200	1240	1280	1320	1360
Algenfläche in m^2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048



- b) Wasserfläche: $y = 1000 + 40x$
Algenfläche: $y = 4 \cdot 2^x$

- c) Die beiden Graphen schneiden sich bei $x \approx 8,4$.
Die Alge bedeckt nach etwa 8 bis 9 Wochen den ganzen See.
Bemerkung: Die Rechnung stellt nur ein theoretisches Modell dar. In der Praxis fehlt der Alge irgendwann der Sauerstoff, sodass sie sich nicht mehr mit der angegebenen Geschwindigkeit ausbreiten kann.

K3

- 14 a) Das Kapital nimmt jedes Jahr um den Faktor $1 + \frac{p}{100}$ zu, da zu dem Kapital (100 % bzw. 1) jedes Jahr ein gewisser Prozentsatz ($p\%$ bzw. $\frac{p}{100}$) addiert wird:

$$K(n+1) = K(n) + p\% \cdot K(n) = K(n) \cdot (1 + p\%) = K(n) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

b)

n (Jahre)	1	2	3	4	5
K(n) in €	15 300,00	15 606,00	15 918,12	16 236,48	16 561,21

n (Jahre)	6	7	8	9	10
K(n) in €	16 892,44	17 230,29	17 574,89	17 926,39	18 284,92

c)

n (Jahre)	11	12	13	14	15	20	30	35
K(n) in €	18 650,61	19 023,63	19 404,10	19 792,18	20 188,03	27 289,21	27 170,42	29 998,34

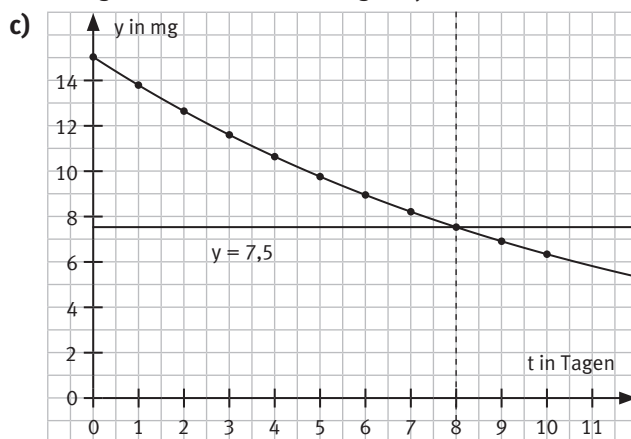
Nach ungefähr 15 Jahren beträgt das Guthaben 20 000 €, nach 35 Jahren hat es sich verdoppelt.

K3

- 15 a) Für die verbleibende Menge y des Jods in mg nach x Tagen gilt: $y = 15 \cdot 0,917^x$.

- b) Menge des Jods nach 10 Tagen: $y = 15 \cdot 0,917^{10} \approx 6,31$ mg

Menge des Jods nach 20 Tagen: $y = 15 \cdot 0,917^{20} \approx 2,65$ mg



Die Halbwertszeit des Isotops beträgt 8 Tage.

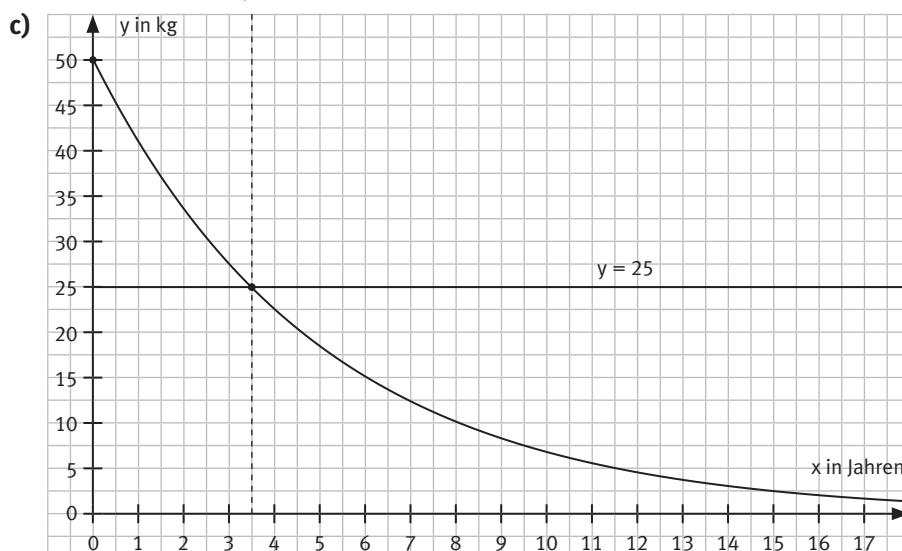
K3

- 16 a) $y = 50 \cdot 0,819^x$

x in Jahren	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y in kg	40,95	33,54	27,47	22,50	18,42	15,09	12,36	10,12	8,29	6,79

- b) Nach 12 Jahren: $y = 50 \cdot 0,819^{12} \approx 4,55$ (kg)

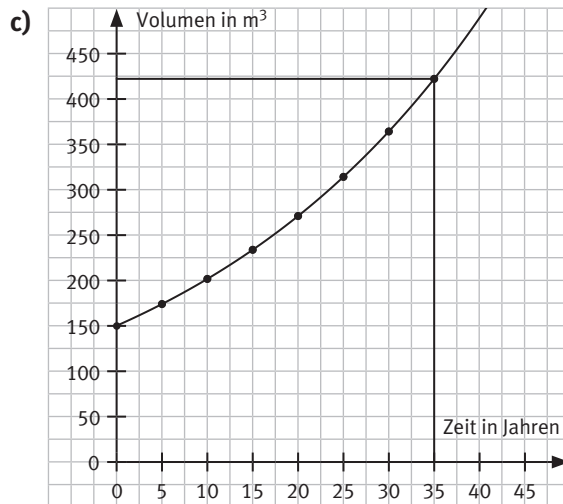
Nach 16 Jahren: $y = 50 \cdot 0,819^{16} \approx 2,05$ (kg)



Die Halbwertszeit beträgt ca. 3,5 Jahre bzw. 3 Jahre und 183 Tage.

K3 17 a) Für den Holzbestand y in m^3 nach x Jahren gilt: $y = 150 \cdot 1,03^x$.

b)	x in Jahren	0	5	10	15	20	25	30	35	40
	y in m^3	150	173,89	201,59	233,70	270,92	314,07	364,09	422,08	489,31



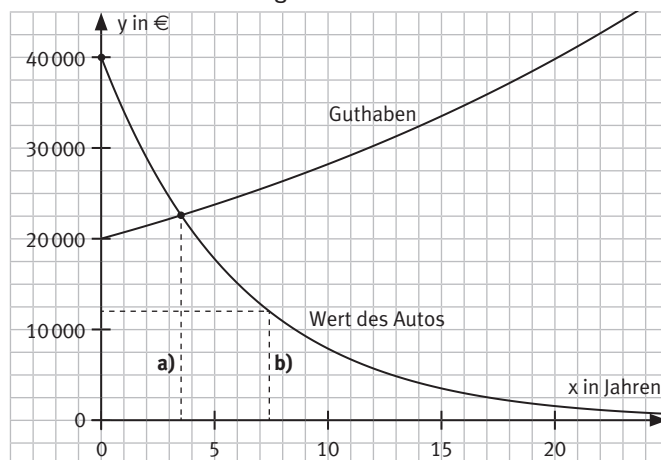
Das Holzvolumen nach 35 Jahren beträgt etwa 420 m^3 .

K4 18 a) Für das Guthaben nach x Jahren gilt: $y = 20\,000 \cdot 1,035^x$

Für den Wert des Wagens nach x Jahren gilt: $y = 40\,000 \cdot 0,85^x$

Nach etwa 3,5 Jahren hat das momentane Guthaben den Wert des Autos erreicht.

b) 30% des Werts des Wagens sind 12 000 €.



Nach etwa 7,4 Jahren hat der Wert des Wagens um 70% abgenommen (d. h. der Wagen hat nur noch 30% seines ursprünglichen Wertes).

K4

19 a) 1 $f(0) = \frac{1}{16} = k \cdot a^0 \Leftrightarrow \frac{1}{16} = k \cdot 1$

$$f(4) = 1 = k \cdot a^4 \Rightarrow 1 = \frac{1}{16} \cdot a^4 \Leftrightarrow 16 = a^4 \Leftrightarrow \pm\sqrt[4]{16} = a \Leftrightarrow a_{1,2} = \pm 2$$

Da $a > 0$ sein muss, ist $a = 2$ und die Funktionsgleichung lautet: $\Rightarrow f(t) = \frac{1}{16} \cdot 2^t$

2 $f(2) = \frac{1}{9} = k \cdot a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{9k} = a^2$

$$f(6) = 9 = k \cdot a^6 \Rightarrow 9 = k \cdot (a^2)^3 \Leftrightarrow 9 = k \cdot \frac{1}{9^3 k^3} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{9^3 k^2} \Leftrightarrow 9^4 = \frac{1}{k^2}$$

$$9^4 \cdot k^2 = 1 \Leftrightarrow k_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{9^4}} \Leftrightarrow k_{1,2} = \pm\frac{1}{81}$$

$\Rightarrow 9 = a^2$ oder $-9 = a^2$ wobei die zweite Gleichung keine (reelle) Lösung hat.

Daher gilt: $a_{1,2} = \pm 3$.

Da $a > 1$ gelten muss (exponentielles Wachstum), lautet also die Funktionsgleichung:

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{81} \cdot 3^t$$

3 $f(3) = 0,2 = k \cdot a^3 \Leftrightarrow \frac{0,2}{a^3} = k$

$$f(5) = 5 = k \cdot a^5 \Rightarrow 5 = \frac{0,2}{a^3} \cdot a^5 \Leftrightarrow 5 = 0,2 \cdot a^2 \Leftrightarrow 25 = a^2 \Leftrightarrow a_{1,2} = \pm 5$$

Auch hier muss $b > 1$ gelten, daher ist $a = 5$ und damit $k = \frac{0,2}{5^3} = \frac{1}{625}$.

Die Funktionsgleichung lautet also: $\Rightarrow f(t) = \frac{1}{625} \cdot 5^t$

b) $\frac{1}{16} \cdot 2^{t^*} = \frac{1}{81} \cdot 3^{t^*} \Leftrightarrow \frac{81}{16} = \frac{3^{t^*}}{2^{t^*}} \Leftrightarrow \frac{3^4}{2^4} = \frac{3^{t^*}}{2^{t^*}} \Leftrightarrow t^* = 4$

$$\frac{1}{16} \cdot 2^{t^*} = \frac{1}{625} \cdot 5^{t^*} \Leftrightarrow \frac{625}{16} = \frac{5^{t^*}}{2^{t^*}} \Leftrightarrow \frac{5^4}{2^4} = \frac{5^{t^*}}{2^{t^*}} \Leftrightarrow t^* = 4$$

$$\frac{1}{81} \cdot 3^{t^*} = \frac{1}{625} \cdot 5^{t^*} \Leftrightarrow \frac{625}{81} = \frac{5^{t^*}}{3^{t^*}} \Leftrightarrow \frac{5^4}{3^4} = \frac{5^{t^*}}{3^{t^*}} \Leftrightarrow t^* = 4$$

Da jeweils $t^* = 4$ gilt, erreichen die Wachstumsprozesse bei $t^* = 4$ alle den gleichen Bestand $f(4) = 1$.

c) Durch Probieren:

1 $1000 = \frac{1}{16} \cdot 2^t \Leftrightarrow 16000 = 2^t \Rightarrow t \approx 14,0$

2 $1000 = \frac{1}{81} \cdot 3^t \Leftrightarrow 81000 = 3^t \Rightarrow t \approx 10,3$

3 $1000 = \frac{1}{625} \cdot 5^t \Leftrightarrow 625000 = 5^t \Rightarrow t \approx 8,3$

K1

20 a) $y = 0,5^x \text{ m} \quad x \geq 0; x \in \mathbb{N}$

b) $0,5^x \text{ m} < 0,001 \text{ m}$

$$0,5^x < 0,001$$

$$x \cdot \lg 0,5 < \lg 0,001$$

$$x > 9,97$$

Nach 10 Teilungen ist zum ersten Mal eine Strecke erreicht, deren Länge weniger als 1 mm beträgt.

c) 2 m: $y = 2 \cdot 0,5^x \text{ m}$

4 m: $y = 4 \cdot 0,5^x \text{ m}$

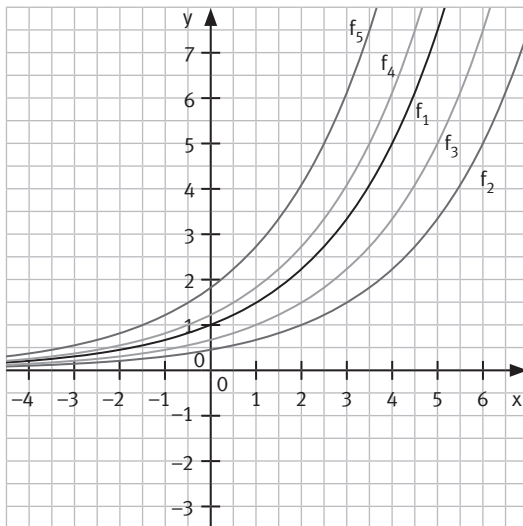
5 m: $y = 5 \cdot 0,5^x \text{ m}$

8 m: $y = 8 \cdot 0,5^x \text{ m}$

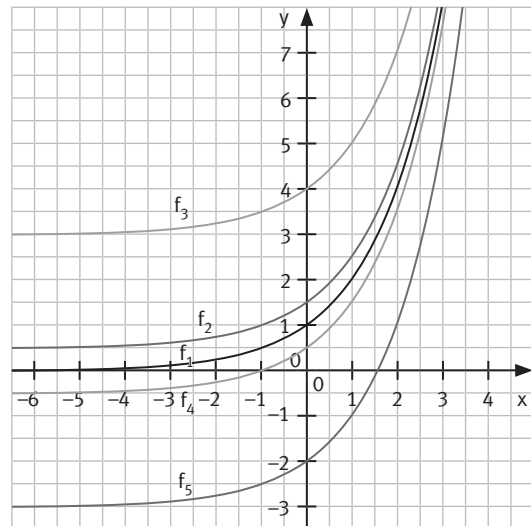
Bei einer Strecke, die s Meter lang ist, kommt zur Gleichung aus a) noch ein Vorfaktor s hinzu.

KX

- 21 a) Die Graphen aller Funktionen gleichen einander: Sie sind beispielsweise alle monoton steigend und haben die x-Achse als Asymptote. Allerdings sind sie alle gegeneinander in x-Richtung verschoben, was der Parameter b in der Funktionsgleichung $y = 1,5^{x-b}$ bewirkt.



- b) Die Graphen aller Funktionen gleichen einander: Sie sind beispielsweise alle monoton steigend und haben eine Asymptote. Allerdings sind sie alle gegeneinander in y-Richtung verschoben, was der Parameter c in der Funktionsgleichung $y = 1,5^x + c$ bewirkt.



KX

- 22 a) Karim hat Recht, in beiden Fällen haben die Parameter die gleiche Wirkung:
- Multiplikation mit einer Konstanten: Stauchung bzw. Streckung des Graphen in y-Richtung
 - Addition einer Konstanten: Verschiebung des Graphen entlang der y-Achse
 - Veränderung des Arguments der Funktion durch Addition einer Konstanten: Verschiebung in x-Richtung
- b) Salaa hat nicht Recht: Es kann keine Exponentialfunktion geben, die durch alle vier Quadranten verläuft, da eine Exponentialfunktion der vorliegenden Form immer eine waagrechte Asymptote besitzt und entweder monoton steigend oder monoton fallend ist.

Folgende Übersicht zeigt die vom Graphen einer Exponentialfunktion der Form $y = k \cdot a^{x-b} + c$ durchlaufenen Quadranten:

		Funktion monoton ...	
		steigend	fallend
Asymptote	$y > 0$	Quadranten I und II	Quadranten I, II und IV
	$y < 0$	Quadranten I, III und IV	Quadranten III und IV

KX

- 23 a) f_1 : schwarz f_2 : rot f_3 : grün

- b) Der Parameter b verschiebt den Funktionsgraphen entlang der x-Achse.
Der Parameter c verschiebt den Funktionsgraphen entlang der y-Achse.

- c) 1 Schnittpunkte mit den Achsen

Der Parameter b beeinflusst die Schnittpunkte mit beiden Achsen:

- Verschiebt sich der Graph in x-Richtung, so ändert sich in gleichem Maße auch die Nullstelle.
- Auch auf den Schnittpunkt mit der y-Achse hat b Einfluss.

Der Parameter c beeinflusst die Schnittpunkte mit beiden Achsen:

- Verschiebt sich der Graph in y-Richtung, so ändert sich in gleichem Maße auch die y-Koordinate des Schnittpunkts mit der y-Achse.
- Auch auf den Schnittpunkt mit der x-Achse hat c Einfluss. Je nach Funktionsgleichung kann es sogar vorkommen, dass es keinen solchen Schnittpunkt mehr gibt.

- 2 Definitions- und Wertemenge
 - Der Parameter b hat weder Einfluss auf die Definitions- noch auf die Wertemenge.
 - Die Definitionsmenge bleibt vom Parameter c unbeeinflusst, die Wertemenge ändert sich allerdings, weil die Asymptoten von c abhängen.
- 3 Verhalten im Unendlichen
Das Verhalten im Unendlichen wird lediglich durch c , nicht aber durch b beeinflusst: c hat Auswirkungen auf die Asymptoten des Graphen.

- KX** 24 a) Der Funktionswert wird verdoppelt, da $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ ist.
 b) Der Funktionswert vervierfacht sich, da $2^{x+2} = 4 \cdot 2^x$ ist.
 c) Der Funktionswert quadriert sich, da $2^{2x} = (2^x)^2$ ist.

- K5** 25 a) In den Abbildungen betrachtet man das Verhalten der Graphen jeweils in die Richtung $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$. Die Graphen nähern sich entweder rechts oder links einer unsichtbaren Geraden, ihrer waagrechten Asymptoten an, berühren diese jedoch nie.
- 1 Für $x \rightarrow +\infty$ geht der Graph von f gegen $+\infty$, da die Werte immer weiter steigen.
Für $x \rightarrow -\infty$ läuft der Graph von f gegen -1 , seine waagrechte Asymptote.
 - 2 Für $x \rightarrow -\infty$ geht der Graph von f gegen $-\infty$, da die Werte immer kleiner werden.
Für $x \rightarrow +\infty$ läuft der Graph von f gegen $+1$, seine waagrechte Asymptote.
 - 3 Für $x \rightarrow +\infty$ geht der Graph von f gegen $+\infty$, da die Werte immer größer werden.
Für $x \rightarrow -\infty$ läuft der Graph von f gegen -2 , seine waagrechte Asymptote.
- b) Man kann die Asymptote in diesen Fällen aus den Funktionsgleichungen ablesen: Für sehr kleine x (1 und 3) bzw. sehr große x (2) werden diejenigen Summanden in den Funktionstermen, die den exponentiellen Teil enthalten, unendlich klein. Übrig bleibt das sogenannte Absolutglied, also eine Konstante, die die Gleichung der Asymptoten ergibt. Im Folgenden ist derjenige Teil der Funktionsgleichung, der sich der Null annähert, grau hinterlegt:
- 1 $f: y = 2^x - 1$ Asymptote: $y = -1$
 - 2 $g: y = -0,1^x + 1$ Asymptote: $y = 1$
 - 3 $h: y = \frac{1}{2}(3^x - 4) = \frac{1}{2} \cdot 3^x - 2$ Asymptote: $y = -2$

- K1** 26 a) $y \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow \infty$
 $y \rightarrow -8$ für $x \rightarrow -\infty$
 Asymptote $y = -8$
- b) $y \rightarrow 3$ für $x \rightarrow \infty$
 $y \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow -\infty$
 Asymptote $y = 3$
- c) $y \rightarrow -4,5$ für $x \rightarrow \infty$
 $y \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow -\infty$
 Asymptote $y = -4,5$
- d) $y \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow \infty$
 $y \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$
 Asymptote $y = 0$
- e) $y \rightarrow -4$ für $x \rightarrow \infty$
 $y \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow -\infty$
 Asymptote $y = -4$
- f) $y \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow \infty$
 $y \rightarrow 10$ für $x \rightarrow -\infty$
 Asymptote $y = 10$
- g) $y \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow \infty$
 $y \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$
 Asymptote $y = 0$
- h) $y \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$
 $y \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow -\infty$
 keine Asymptote
- i) $y \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$
 $y \rightarrow -2$ für $x \rightarrow -\infty$
 Asymptote $y = -2$

- KX** 27 a) Es kommt nur auf den Parameter c an, dieser muss 3 lauten.
 Lösungsmöglichkeit: $f: y = 2^x + 3$
- b) Hier kann eine Exponentialfunktion der Form $y = a^x$ betragsmäßig weniger als eine Einheit nach unten verschoben werden, damit sie auch durch den III. Quadranten verläuft.
 Lösungsmöglichkeit: $f: y = 2^x - 0,5$
 Ebenso kann eine Exponentialfunktion der Form $y = a^x$ an der x - und y -Achse gespiegelt und dann nach oben verschoben werden.
 Lösungsmöglichkeit: $g: y = -2^{-x} + 3$

- c) Eine Exponentialfunktion der Form $y = a^x$ kann an der y-Achse gespiegelt und dann betragsmäßig weniger als eine Einheit nach unten verschoben werden, sodass sie durch den IV. Quadranten verläuft, aber nicht durch den III.

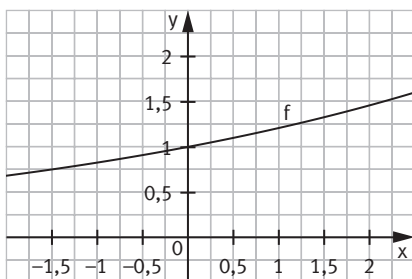
Lösungsmöglichkeit: $f: y = 2^{-x} - 0,5$

Verschiebt man den Graphen um mehr als eine Einheit nach unten, so muss man ihn zusätzlich noch nach rechts verschieben, damit er nicht durch den III. Quadranten verläuft.

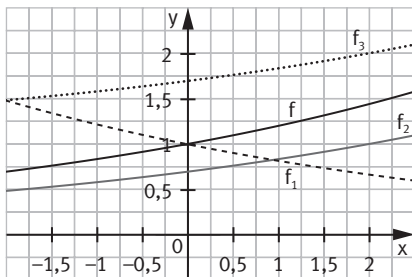
Lösungsmöglichkeit: $g: y = 2^{-x+5} - 4$

- K5** 28 Da Sabine weiß, dass $f(x) = k \cdot 2^x + c$ eine Asymptote bei $y = 0$ hat, kann sie die Funktion mit $c = 2$ um 2 Einheiten nach oben verschieben, wodurch die Funktion bei $y = 2$ eine waagrechte Asymptote hat. Anschließend setzt sie den gegebenen Punkt, durch den der Funktionsgraph verläuft, in die Funktionsgleichung ein. Mit $c = 2$ und Auflösen nach k erhält sie den konstanten Vorfaktor k . Somit kann sie die Funktionsgleichung vollständig angeben.

K4 29 a)



b)



- K5** 30 1 Der Graph von g verläuft durch die Punkte $(0|3)$ und $(1|1,5)$.

$$y = k \cdot 0,5^x + c$$

$$I \quad 3 = k \cdot 0,5^0 + c$$

$$II \quad 1,5 = k \cdot 0,5^1 + c$$

$$\Rightarrow c = 0; k = 3$$

$$g(x) = 3 \cdot 0,5^x$$

$k = 3$ bewirkt eine Streckung des Graphen von f .

- 2 Der Graph von h verläuft durch die Punkte $(0|0)$ und $(2|1,5)$.

$$y = k \cdot 0,5^x + c$$

$$I \quad 0 = k \cdot 0,5^0 + c$$

$$II \quad 1,5 = k \cdot 0,5^2 + c$$

$$\Rightarrow k = -2; c = 2$$

$$h(x) = -2 \cdot 0,5^x + 2$$

$k = -2$ bewirkt eine Streckung des Graphen und gleichzeitig eine Spiegelung an der x-Achse.

$c = 2$ bewirkt eine Verschiebung um 2 Einheiten in positive y-Richtung.

- 3 Der Graph von i verläuft durch die Punkte $(0|5)$ und $(3|1,5)$.

$$y = k \cdot 0,5^x + c$$

$$I \quad 5 = k \cdot 0,5^0 + c$$

$$II \quad 1,5 = k \cdot 0,5^3 + c$$

$$\Rightarrow k = 4; c = 1$$

$$i(x) = 4 \cdot 0,5^x + 1$$

$k = 4$ bewirkt eine Streckung des Graphen, $c = 1$ bewirkt eine Verschiebung um 1 Einheit in positive y -Richtung.

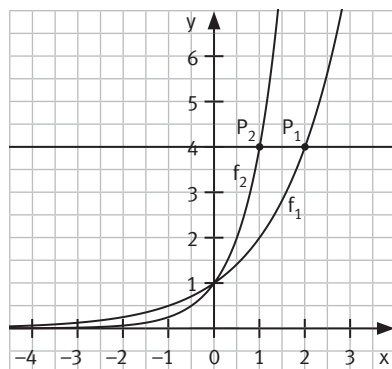
KX

- 31 a) $f: y = 0,5 \cdot 4^x + 1,5$ b) $g: y = 4 \cdot 1,2^x - 4,8$

K5

- 32 a)

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f_1: y = 2^x$	0,25	0,35	0,5	0,71	1	1,41	2	2,83	4
$f_2: y = 4^x$	0,06	0,13	0,25	0,5	1	2	4	8	16



- b) 1 Lösungsmöglichkeit:

$$y = 4: f_1: 4 = 2^x \Leftrightarrow x = 2$$

$$f_2: 4 = 4^x \Leftrightarrow x = 1$$

$$y = 16: f_1: 16 = 2^x \Leftrightarrow x = 4$$

$$f_2: 16 = 4^x \Leftrightarrow x = 2$$

Die Entfernung zwischen P_1 und P_2 ist jeweils genauso groß wie der Abstand von P_2 zur y -Achse.

- 2 Anhand der Beispiele erkennt man, dass f_1 bei doppeltem x -Wert immer denselben Funktionswert besitzt wie f_2 . Es gilt also: $y = 4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$.

K4

- 33 a) grüner Graph: $y = 2^{-x} - 4$

$$\text{roter Graph: } y = 2^x - 4$$

- b) blauer Graph: $y = 2,5^x$

$$\text{gelber Graph: } y = 2,5^{-x}$$

- grüner Graph: $y = -2,5^x$

$$\text{roter Graph: } y = -2,5^{-x}$$

- c) I. und II. Quadrant:

$$\text{roter Graph: } y = \frac{1}{3} \cdot 4^x + 1$$

$$\text{blauer Graph: } y = \frac{1}{3} \cdot 4^x + \frac{1}{3}$$

$$\text{grüner Graph: } y = \frac{1}{3} \cdot 4^x$$

- III. und IV. Quadrant:

$$\text{roter Graph: } y = -\frac{1}{3} \cdot 4^{-x} - 1$$

$$\text{blauer Graph: } y = -\frac{1}{3} \cdot 4^{-x} - \frac{1}{3}$$

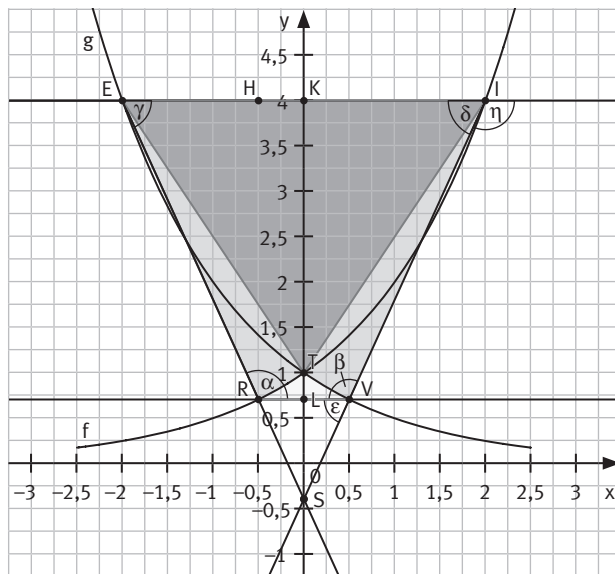
$$\text{grüner Graph: } y = -\frac{1}{3} \cdot 4^{-x}$$

K4

- 34 a) $f: y = 4 \cdot 2^{-x} - 4 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4$

- b) $f: y = -2 \cdot 2^{x-1} + 4$

KX 35 Hinweis: Zur besseren Übersicht wurde die Darstellung vergrößert.



a) Für den Flächeninhalt A des Trapezes folgt mit $H(-0,5 | 4)$:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (|RV| + |EI|) \cdot |HR| = \frac{1}{2} \cdot (1 \text{ cm} + 4 \text{ cm}) \cdot (4 \text{ cm} - f(-0,5) \text{ cm})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ cm} \cdot (4 \text{ cm} - 2^{-0,5} \text{ cm}) \approx 8,2 \text{ cm}^2$$

Für die Umfangslänge u des Trapezes folgt mit dem Satz des Pythagoras:

$$u = |EI| + 2 \cdot |ER| + |RV| = |EI| + 2 \cdot \sqrt{|EH|^2 + |HR|^2} + |RV|$$

$$= 4 \text{ cm} + 2 \cdot \sqrt{(1,5 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm} - 2^{-0,5} \text{ cm})^2} + 1 \text{ cm} \approx 12,2 \text{ cm}$$

Flächeninhalt Dreieck ETI mit $K(0 | 4)$:

$$A_{ETI} = \frac{1}{2} \cdot |EI| \cdot |KT| = \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt Dreieck RVT mit $L(0 | f(-0,5))$:

$$A_{RVT} = \frac{1}{2} \cdot |RV| \cdot |LT| = \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ cm} \cdot (1 \text{ cm} - f(-0,5) \text{ cm}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ cm} \cdot (1 \text{ cm} - 2^{-0,5} \text{ cm}) \approx 0,1 \text{ cm}^2$$

Anteil zum Viereck:

$$\frac{A_{ETI} + A_{RVT}}{A_{VIER}} = \frac{6 \text{ cm}^2 + 0,1 \text{ cm}^2}{8,2 \text{ cm}^2} \approx 74 \%$$

Die beiden Dreiecke nehmen zusammen ca. 74 % des Flächeninhalts des Trapezes ein.

b) $\gamma = \delta$ und $\alpha = \beta$

$$\tan \gamma = \tan \frac{|HR|}{|EH|} = \frac{4 \text{ cm} - f(-0,5) \text{ cm}}{1,5 \text{ cm}} = \frac{4 \text{ cm} - 2^{-0,5} \text{ cm}}{1,5 \text{ cm}} \Rightarrow \gamma = \delta \approx 65,5^\circ$$

$$\alpha = \beta = 180^\circ - \gamma \approx 114,5^\circ$$

c) Zweiter Strahlensatz:

$$\frac{|SL|}{|SK|} = \frac{|LV|}{|KI|} \text{ mit } \overline{SL} = x \text{ cm}$$

$$\frac{x}{x + (4 - 2^{-0,5})} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \quad | \cdot 4$$

$$\frac{4x}{x + 4 - 2^{-0,5}} = 1 \quad | \cdot (x + 4 - 2^{-0,5})$$

$$4x = x + 4 - 2^{-0,5} \quad | - x$$

$$3x = 4 - 2^{-0,5} \quad | : 3$$

$$x \approx 1,1$$

$$y_S = y_L - 1,1 = 0,7 - 1,1 = -0,4$$

$$S(0 | -0,4)$$

δ und ϵ sind Stufenwinkel, β und η sind Wechselwinkel.

K3

36 $T(12) = 20 + 40 \cdot 2^{-0,06 \cdot 12} \approx 44,3 \text{ (}^\circ\text{C)}$

Alfredos Kaffee ist noch nicht kalt.

Wissen

KX

- Die Tabelle entspricht der Tabelle im Schulbuch.
- **a)** Man kann z. B. mit einem Computerprogramm eine lineare Funktion finden, die gut zu den Tabellenwerten passt. Hierbei berechnet man entweder mithilfe zweier Wertepaare die Parameter der linearen Funktion oder nutzt spezielle Befehle des Computerprogramms für das Verfahren der sogenannten (linearen) Regression. Als x-Werte verwendet man am besten nicht 1960, 1980 usw., sondern zählt die Zeit, die seit 1960 vergangen ist, sodass die Funktionsterme „einfacher“ werden. Damit ändern sich die x-Werte für 1960, 1980, 2000 und 2020 zu 0, 20, 40 und 60. Eine mit einem Computerprogramm erstellte lineare Funktion lautet:
 $f: y = 0,0798x + 2,956$ (x in Jahren seit 1960, y in Milliarden)
Wie viele Menschen im Jahr 2040 auf der Erde leben werden, kann man dann mit $f(80)$ abschätzen und erhält $f(80) = 9,34$ Mrd.
- **b)** Um eine gute exponentielle Funktion zu finden, geht man analog wie bei der Suche nach einer linearen Funktion vor. Man erhält beispielsweise die folgende, mit einem Computerprogramm erstellte Funktion:
 $g: y = 3,139 \cdot 1,0159^x$ und es würden $g(80) \approx 11,09$ Mrd. Menschen im Jahr 2040 auf der Erde leben.

Entdecken

K3

- Mit der Halbwertszeit von 5730 Jahren ergibt sich für das Alter des Ötzi:

$$\frac{\log 0,533 \cdot 5730 \text{ Jahre}}{-\log 2} \approx 0,908 \cdot 5730 \text{ Jahre} \approx 5202 \text{ Jahre}$$

Ötzi ist vor ungefähr 5200 Jahren gestorben.

Nachgefragt

K1

- 1 $\log_a a$ ist per Definition diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um a zu erhalten.
Mit $a^1 = a$ gilt: $\log_a a = 1$.
2 $\log_a 1$ ist per Definition diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um 1 zu erhalten.
Mit $a^0 = 1$ gilt: $\log_a 1 = 0$.

K1

- $\log_{10} 10 = 1$
 $\log_{10} 100 = 2$
 $\log_{10} 1000 = 3$
Es fällt auf, dass der Logarithmus zur Basis 10 einer Zehnerpotenz gleich dem Exponenten dieser Zehnerpotenz ist: $\log_{10} 10^n = n$.

KX

- Die Gleichung $x^3 = 27$ kann nicht mit dem Logarithmus gelöst werden, sondern mit der dritten Wurzel $x = \sqrt[3]{27} = 3$. Wenn das gesuchte x im Exponenten steht, dann verwendet man den Logarithmus.

Aufgaben

K5

1

	a)	b)	c)	d)
Potenz	$4^3 = 64$	$17,5^2 = 306,25$	$7^3 = 343$	$5^6 = 15\,625$
Wurzel	$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt{306,25} = 17,5$	$\sqrt[3]{343} = 7$	$\sqrt[6]{15\,625} = 5$
Logarithmus	$\log_4 64 = 3$	$\log_{17,5} 306,25 = 2$	$\log_7 343 = 3$	$\log_5 15\,625 = 6$

K5

2

- a) 4; 9; 1; 4; 5 b) -2; -4; -6; -3; -1

K5

3

- a) $5^x = 125$; $x = 3$ b) $8^2 = x$; $x = 64$
c) $x^3 = 216$; $x = 6$ d) $10^x = 1000$; $x = 3$
e) $10^x = 0,00001$; $x = -5$ f) $x^5 = 3125$; $x = 5$

K5

4

- a) 4 b) 1,45 c) 3,26
d) -2,02 e) -2

K5

5

- a) 1,5850 b) 1,3652 c) 0,8340 d) 3,1699
e) 2,3103 f) 3,9147 g) 3,0192 h) 0,7325

K1

6

- a) $\lg 3 \approx 0,48$ $\lg 30 \approx 1,48$ $\lg 300 \approx 2,48$ $\lg 3000 \approx \dots$
Es gilt: $\lg(3 \cdot 10^n) = \lg 3 + n \approx 0,48 + n$
b) $\lg 0,5 \approx -0,3$ $\lg 0,05 \approx -1,3$ $\lg 0,005 \approx -2,3$ $\lg 0,0005 \approx \dots$
Es gilt: $\lg(0,5 \cdot 10^{-n}) = \lg 0,5 - n \approx -0,3 - n$

- KX** 7 a) Zu Beginn wird die Differenz als Logarithmus eines Quotienten umgeschrieben, sodass man den Wert innerhalb des Logarithmus als Bruch schreiben und kürzen kann. So erhält man $\frac{1}{8}$ im Logarithmus, was als Potenz umgeschrieben werden kann zu 2^{-3} . Zum Schluss verwendet man die Regel des Logarithmus einer Potenz, um $-3 \cdot \log_2 2 = -3$ zu erhalten.
- b) Zu Beginn wird die Differenz als Logarithmus eines Quotienten umgeschrieben, sodass man den Wert innerhalb des Logarithmus als Bruch und anschließend unter nur eine Wurzel schreiben kann. Der Bruch kann nun gekürzt werden und man erhält im Logarithmus $\sqrt{25} = 5$. So kann der Logarithmus schließlich berechnet werden zu $\log_5 5 = 1$.
- c) Zu Beginn werden die beiden Summanden als Logarithmus einer Potenz umgeschrieben, $3 \log_a x = \log_a x^3$ und $2 \log_a y = \log_a y^2$. Im Anschluss können die Summanden als Logarithmus eines Produktes geschrieben werden $\log_a (x^3 \cdot y^2)$.

- KX** 8 Im ersten Schritt wird der Quotient aus den beiden Logarithmen lediglich als Bruch umgeschrieben. Im nächsten Schritt wird der Basiswechsel vollzogen, sodass die beiden Logarithmen als einer geschrieben werden können. Im letzten Schritt wird dann der Logarithmus bestimmt, den man in dem Fall im Kopf bestimmen kann.

- K4** 9 a) $\lg \frac{x}{y}$ b) $\lg \frac{xy^3}{z^2}$
 c) $\lg \frac{a}{b}$ d) $\lg x^2 y$
 e) $\lg 10a$ f) Es ist keine weitere Vereinfachung möglich.
 g) $\log 3a^2$ h) $\lg 6$
 i) $\log_2 \frac{a}{b}$ j) $\frac{1}{8}$
 k) 0 l) $\log \frac{x+y}{x}$
 m) $\log_a \frac{b^2}{c}$ n) $\log \frac{1}{3}$

- K4** 10 a) $\lg a + \lg b + \lg c + \lg d$ b) $\lg a + \lg b - \lg c$ c) $2 \lg a + \lg b$
 d) $4 \cdot (\lg a + \lg b)$ e) $3 \cdot (\lg a + \lg b)$ f) $\lg a + \lg b - \lg 2c$
 g) $\lg a + \frac{1}{2} \lg b - \lg c$ h) $\lg b - \frac{1}{3} \lg a$ i) $\frac{1}{2} \cdot (5 \lg 2 + 7 \lg a)$

- K4** 11 a) $\log_2 4 = \log_3 9$ b) $\log 10 < \log_2 10$ c) $\log_2 10 > \log_3 10$
 d) $\log_5 125 = \log_3 27$ e) $\log_5 35 < \log_3 35$ f) $\log_6 108 < \log_2 12$
 g) $\log 1000 < \log_2 16$ h) $1 + \log_2 8 < \log_2 32$ i) $(\log_2 2)^2 = (\log_4 4)^4$

- K4/5** 12 a) Lucas verwendet die Definition des Logarithmus:
 Jede Gleichung der Form $b^x = y$ ist äquivalent zu $x = \log_b y$.
 Damit hat Lucas die Gleichung schon nach x aufgelöst.
 Laura wendet auf beiden Seiten den Logarithmus zur Basis 10 an: $\log_{10} b^x = \log_{10} y$.
 Danach wendet Laura ein Logarithmusgesetz an und zieht den Exponenten x als Faktor vor:
 $x \cdot \log_{10} b = \log_{10} y$
 Anschließend teilt sie durch $\log_{10} b$ und erhält $x = \frac{\log_{10} y}{\log_{10} b}$.
 Beide Vorgehensweisen sind richtig, deshalb kann man die Ergebnisse von Lucas und Laura gleichsetzen:
 $\log_b y = \frac{\log_{10} y}{\log_{10} b}$
 Damit haben sie gemeinsam eine neue Formel gefunden, wie man einen beliebigen Logarithmus mithilfe des Logarithmus zur Basis 10 ausrechnen kann, z. B.:
 $\log_{0,305} 29 = \frac{\log_{10} 29}{\log_{10} 0,305}$
 Das kann etwa hilfreich sein, wenn es auf dem Taschenrechner nur eine Taste für den Logarithmus zur Basis 10 gibt.
 Übrigens: Laura hätte jeden beliebigen Logarithmus verwenden können, nicht nur zur Basis 10!

K1 13 a) Es sind individuelle Lösungen möglich.

b) 1 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Sei $b = a^m \Leftrightarrow m = \log_a b$

$c = a^n \Leftrightarrow n = \log_a c$

$\log_a \left(\frac{a^m}{a^n} \right) = \log_a a^{m-n}$

$\log_a \left(\frac{a^m}{a^n} \right) = m - n$

$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$

2 $\log_a b^c$

Sei $b = a^m \Leftrightarrow m = \log_a b$

$\log_a b^c = \log_a (a^m)^c = \log_a a^{m \cdot c} = c \cdot m = c \cdot \log_a b$

K4 14 a) $\log_3 (x^2 + 2xy + y^2) = \log_3 [(x+y)^2] = 2 \log_3 (x+y) = 2 \cdot 2 = 4$

b) $\log_3 \sqrt{x+y} = 0,5 \cdot \log_3 (x+y) = 0,5 \cdot 2 = 1$

c) $\log_3 \frac{1}{x+y} = \log_3 1 - \log_3 (x+y) = 0 - 2 = -2$

d) $x+y = 3^2 = 9$

e) $(x+y)^{x+y} = 9^9 \approx 3,87 \cdot 10^8$

f) $3 \cdot \log_3 (x+y) = 3 \cdot 2 = 6$

K2 15 a) Es sind individuelle Antworten für die Begründung möglich, z. B.:

Nach einem Jahr: $K(1) = K_0 + K_0 \cdot 3\% = K_0 \cdot (1 + 0,03) = K_0 \cdot 1,03$

Nach zwei Jahren: $K(2) = K(1) + K(1) \cdot 3\% = K(1) \cdot 1,03 = (K_0 \cdot 1,03) \cdot 1,03 = K_0 \cdot 1,03^2$

Nach drei Jahren: $K(3) = K(2) + K(2) \cdot 3\% = K(2) \cdot 1,03 = (K_0 \cdot 1,03^2) \cdot 1,03 = K_0 \cdot 1,03^3$

...

Nach n Jahren: $K(n) = K(n-1) + K(n-1) \cdot 3\% = (K_0 \cdot 1,03^{n-1}) \cdot 1,03 = K_0 \cdot 1,03^n$

b) Mit der Gleichung $10\,000 \text{ €} \cdot 1,03^n = 1\,000\,000 \text{ €}$ wird der Zuwachs des Kapitals von $10\,000 \text{ €}$ bis zu einer Million € dargestellt. Gesucht ist nun die Zahl n, sodass $10\,000 \text{ €} \cdot 1,03^n = 1\,000\,000 \text{ €}$ gilt. Durch Logarithmieren lässt sich der Exponent n, d. h. die gesuchte Anzahl an Jahren, bestimmen.

c) $K_0 = 10\,000 \text{ €}$, Zinssatz von 0,5 %. Gesucht ist n, sodass gilt:

$10\,000 \text{ €} \cdot 1,005^n = 1\,000\,000 \text{ €}$

$1,005^n = 100$

$n = \log_{1,005} 100$

$n \approx 923,3$

Mit $10\,000 \text{ €}$ und 0,5 % Zinsen wäre man nach gut 923 Jahren Millionär.

KX 16 Für den Holzbestand $h(x)$ des Waldes in m^3 (x in Jahren) lässt sich folgende Formel aufstellen:

$h(x) = 50\,000 \cdot 1,023^x$

Wenn der Holzbestand $60\,000 \text{ m}^3$ betragen soll, gilt also:

$60\,000 = 50\,000 \cdot 1,023^x$

$\Leftrightarrow 1,023^x = \frac{60\,000}{50\,000} = \frac{6}{5}$

$\Leftrightarrow x = \log_{1,023} \frac{6}{5} \approx 8$

Nach ca. 8 Jahren beträgt der Holzbestand $60\,000 \text{ m}^3$.

K3 17 a) 3 $15 \cdot 0,917^t$

b) $15 \text{ mg} \cdot 0,917^t = 7,5 \text{ mg} \Leftrightarrow 0,917^t = 0,5 \Leftrightarrow t = \log_{0,917} 0,5 \approx 8$

Nach ca. 8 Tagen befindet sich nur noch 50 % des Jods im Körper des Patienten.

c) $15 \text{ mg} \cdot 0,917^t = 1 \text{ mg} \Leftrightarrow 0,917^t = \frac{1}{15} \Leftrightarrow t = \log_{0,917} \frac{1}{15} \approx 31,25$

Nach 32 Tagen beträgt die Masse des Jods weniger als 1 mg.

K5

18 a) $4 \cdot 0,5^x = 2 \quad | : 4$

$$0,5^x = 0,5$$

$$x = 1,00$$

b) $20 \cdot 0,9^x = 10 \quad | : 20$

$$0,9^x = 0,5$$

$$x = \frac{\log 0,5}{\log 0,9} \approx 6,58$$

c) $8 \cdot 0,06^x = 4 \quad | : 8$

$$0,06^x = 0,5$$

$$x = \frac{\log 0,5}{\log 0,06} \approx 0,25$$

d) $100 \cdot 0,75^x = 50 \quad | : 100$

$$0,75^x = 0,5$$

$$x = \frac{\log 0,5}{\log 0,75} \approx 2,41$$

KX

19 a) 1 Wachstumsgleichung:

$$y = m_0 \cdot 0,917^x \text{ (Ausgangsmasse } m_0, \text{ Zeit } x \text{ in Tagen)}$$

Berechnet werden soll die Zeit, nach der nur noch die Hälfte der Ausgangsmasse m_0 vorhanden ist:

$$0,5m_0 = m_0 \cdot 0,917^x \quad | : m_0$$

$$0,5 = 0,917^x$$

$$x = \frac{\lg 0,5}{\lg 0,917} \approx 8,00 \text{ d}$$

2 $m = 1000 \text{ g} \cdot 0,917^{120} \approx 31 \text{ mg}$

b) Wachstumsgleichung:

$$y = m_0 \cdot a^x \text{ (Ausgangsmasse } m, \text{ Zeit in } x \text{ in Jahren)}$$

Nach 33 Jahren ist die Hälfte des Cäsium-137 zerfallen:

$$0,5m_0 = m_0 \cdot a^{33} \quad | : m_0$$

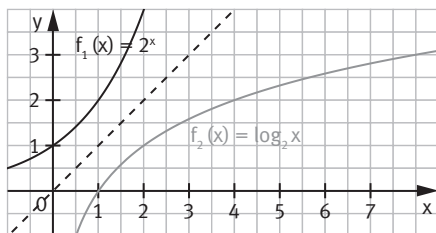
$$0,5 = a^{33} \quad | \sqrt[33]{}$$

$$a \approx 0,979$$

x in Jahren	10	20	30	100
Bestand Cäsium-137 in %	80,9	65,4	52,9	12,0

Entdecken

K3



K3

K3

- f_1 und f_2 sind symmetrisch bzgl. der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.
- f_1 erhält man aus f_2 (und umgekehrt f_2 aus f_1) durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.

Nachgefragt

K1

K3

- Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten entspricht der Vertauschung von Funktionswert und Argument.
- Das erste Logarithmusgesetz 1 ist beispielsweise bei der Darstellung der Funktion $f_5(x) = \log_{10}(5 \cdot x)$ hilfreich, denn es genügt im Grunde, den Funktionsverlauf der Funktion $f(x) = \log_{10}x$ zu kennen. Der Graph von f_5 ergibt sich dann durch eine Verschiebung entlang der y-Achse um die Konstante $\log_{10}5$:

$$f_5(x) = \log_{10}(5 \cdot x) = \log_{10}5 + \log_{10}x = \log_{10}5 + f(x).$$

Allgemein ausgedrückt, gilt für eine beliebige Konstante a und $c = \log_b a$:

$$f(a \cdot x) = \log_b(a \cdot x) = \log_b a + \log_b x = f(x) + c.$$

Eine Veränderung des Arguments x durch einen Parameter a entspricht also der Verschiebung der Funktion in y-Richtung (um $\log_b a$ Einheiten).

K3

- Sei $a > 0$. Es gilt: $P(a|b) \in G_f \Leftrightarrow b = \log_3 a \Leftrightarrow 3^b = a \Leftrightarrow Q(b|a) \in G_g$.
Die Einschränkung $a > 0$ ist nötig, da die Logarithmusfunktion nur für positive Zahlen definiert ist.

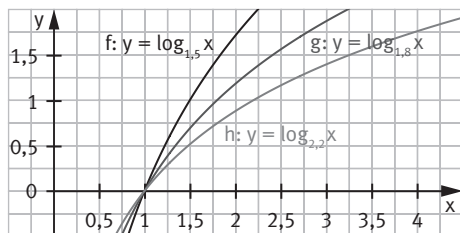
Aufgaben

K5

1 a)

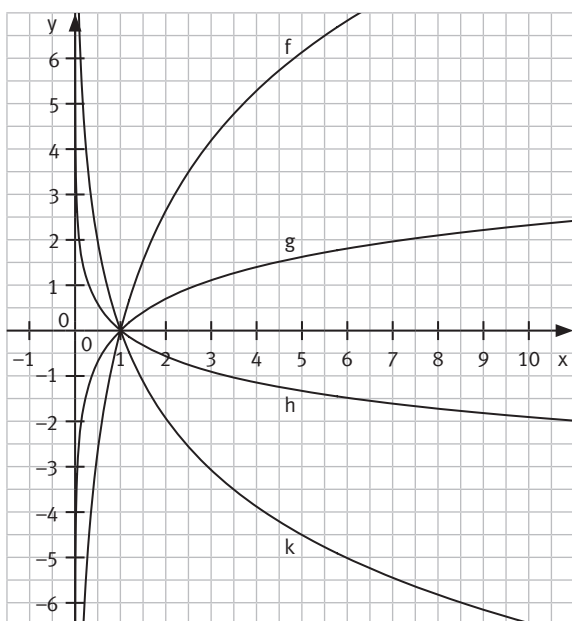
x	0,1	0,2	0,3	1	1,2	2,1	3	5
f: $y = \log_{1,5}x$	-5,68	-3,97	-2,97	0	0,45	1,83	2,71	3,97
g: $y = \log_{1,8}x$	-3,92	-2,74	-2,05	0	0,31	1,26	1,87	2,74
h: $y = \log_{2,2}x$	-2,92	-2,04	-1,53	0	0,23	0,94	1,39	2,04

b)



K6

2



	$f: y = \log_{1,3} x$	$g: y = \log_{2,7} x$	$h: y = \log_{0,3} x$	$k: y = \log_{0,7} x$
D	$]0; \infty[$	$]0; \infty[$	$]0; \infty[$	$]0; \infty[$
W	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Monotonie	monoton steigend	monoton steigend	monoton fallend	monoton fallend
Asymptote	negative y-Achse	negative y-Achse	positive y-Achse	positive y-Achse
Gleichung der Umkehrfunktion	$f^{-1}: y = 1,3^x$	$g^{-1}: y = 2,7^x$	$h^{-1}: y = 0,3^x$	$k^{-1}: y = 0,7^x$

K1

3 1 - r, 2 - p, 3 - q, 4 - g, 5 - h, 6 - f

K5

4 a) $y = \log_{2\sqrt{2}} x$ b) $y = \log_{\sqrt[8]{2}} x$ c) $y = \log_2 x$ d) $y = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x$ e) Jedes beliebige $a \in \mathbb{R}$ ist möglich.f) $y = \log_{\sqrt[6]{10}} x$

K6

5 Die Graphen der Funktionen entstehen jeweils durch Multiplikation der Funktionswerte einer anderen Funktion. Die Eigenschaften zur Monotonie, zu Asymptoten etc. können einem Graphen entnommen werden.

$$\text{a) } g(x) = \log_9 x = \frac{\lg x}{\lg 9} = \frac{\lg x}{\lg(3 \cdot 3)} = \frac{\lg x}{2 \cdot \lg 3} = \frac{1}{2} \cdot \log_3 x = \frac{1}{2} \cdot f(x)$$

$$h(x) = \log_{27} x = \frac{\lg x}{\lg 27} = \frac{\lg x}{\lg(3 \cdot 3 \cdot 3)} = \frac{\lg x}{3 \cdot \lg 3} = \frac{1}{3} \cdot \log_3 x = \frac{1}{3} \cdot f(x)$$

$$\text{b) } g(x) = \log_8 x = \frac{\lg x}{\lg 8} = \frac{\lg x}{\lg(2 \cdot 2 \cdot 2)} = \frac{\lg x}{3 \cdot \lg 2} = \frac{1}{3} \cdot \log_2 x = \frac{1}{3} \cdot f(x)$$

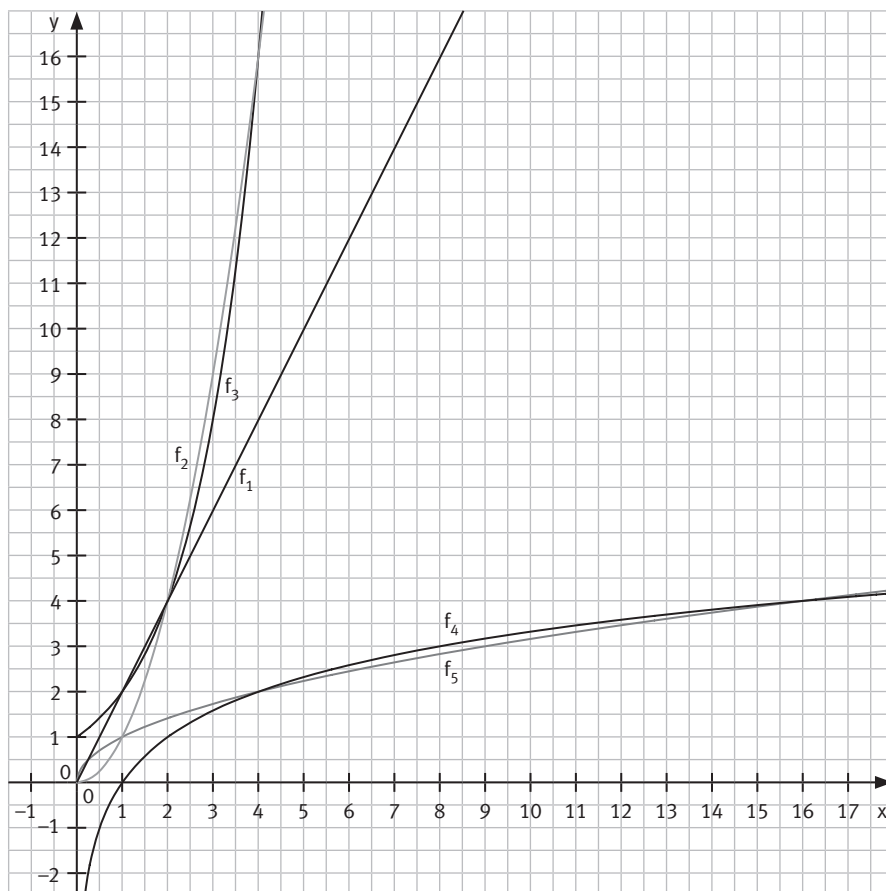
$$h(x) = \log_{64} x = \frac{\lg x}{\lg 64} = \frac{\lg x}{\lg(8 \cdot 8)} = \frac{\lg x}{2 \cdot \lg 8} = \frac{1}{2} \cdot \log_8 x = \frac{1}{2} \cdot g(x) = \frac{1}{6} \cdot f(x)$$

$$\text{c) } g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x = \frac{\lg x}{\lg \frac{1}{4}} = \frac{\lg x}{\lg(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2})} = \frac{\lg x}{2 \cdot \lg(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{2} \cdot f(x)$$

$$h(x) = \log_{\frac{1}{8}} x = \frac{\lg x}{\lg \frac{1}{8}} = \frac{\lg x}{\lg(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2})} = \frac{\lg x}{3 \cdot \lg(\frac{1}{2})} = \frac{1}{3} \cdot \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{3} \cdot f(x) = \frac{2}{3} \cdot g(x)$$

KX

6 Lösungsmöglichkeit:



Grundsätzlich kann man unterscheiden zwischen dem Funktionswert einer Funktion an einer bestimmten Stelle und der Steigung des Graphen an dieser Stelle. Bei linearen Funktionen kann die Steigung einfach angegeben werden, weil sie konstant ist. Bei allen anderen hier verwendeten Funktionstypen muss man sich mit der Anschauung begnügen. Bei kleinen x -Werten, also solchen an oder nahe der Stelle 0, haben die Funktionen f_4 und f_5 eine sehr große Steigung. Mit größer werdenden x -Werten nehmen diese Steigungen aber schnell ab, während die zunächst „moderaten“ Steigungen der Funktionen f_2 und f_3 immer stärker ansteigen. Mit zunehmender Steigung vergrößern sich dann auch die absoluten Funktionswerte, sodass ab $x = 4$ die Exponentialfunktion $f_3: y = 2^x$ die größten Funktionswerte hat. Die Logarithmusfunktion $f_4: y = \log_2 x$ hat ab $x = 16$ die kleinsten Funktionswerte.

Alternativ kann man eine Wertetabelle anlegen und dann das eben Formulierte daraus ableiten.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1: y = 2x$	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$f_2: y = x^2$	0	1	4	9	16	25	36	49	64
$f_3: y = 2^x$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$f_4: y = \log_2 x$	–	0	1	1,58	2	2,32	2,58	2,81	3
$f_5: y = \sqrt{x}$	0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83

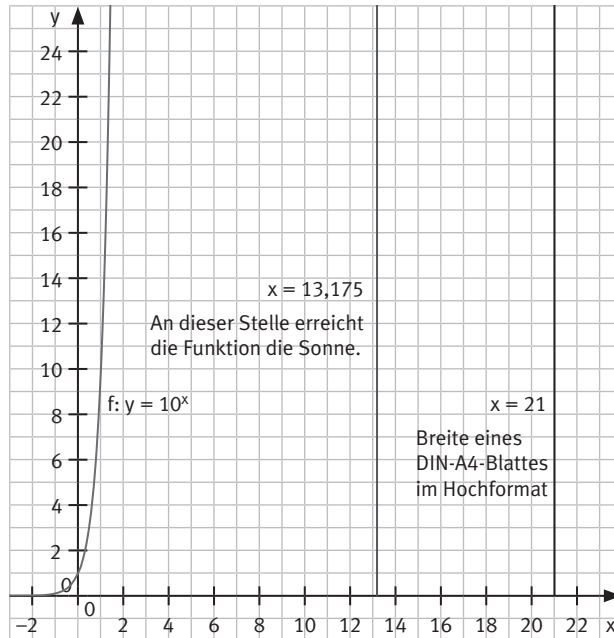
	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$f_1: y = 2x$	18	20	22	24	26	28	30	32	34
$f_2: y = x^2$	81	100	121	144	169	196	225	256	289
$f_3: y = 2^x$	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072
$f_4: y = \log_2 x$	3,17	3,32	3,46	3,58	3,7	3,81	3,91	4	4,09
$f_5: y = \sqrt{x}$	3	3,16	3,32	3,46	3,61	3,74	3,87	4	4,12

Hinweis: Jede streng monoton steigende Exponentialfunktion wächst im Übrigen unabhängig von der Wahl der Basis auf lange Sicht schneller als jede beliebige Potenzfunktion.

- KX** 7 a) mittlere Entfernung der Erde von der Sonne: $149,6 \cdot 10^6 \text{ km} = 149,6 \cdot 10^{11} \text{ cm}$
 $10^x = 149,6 \cdot 10^{11}$

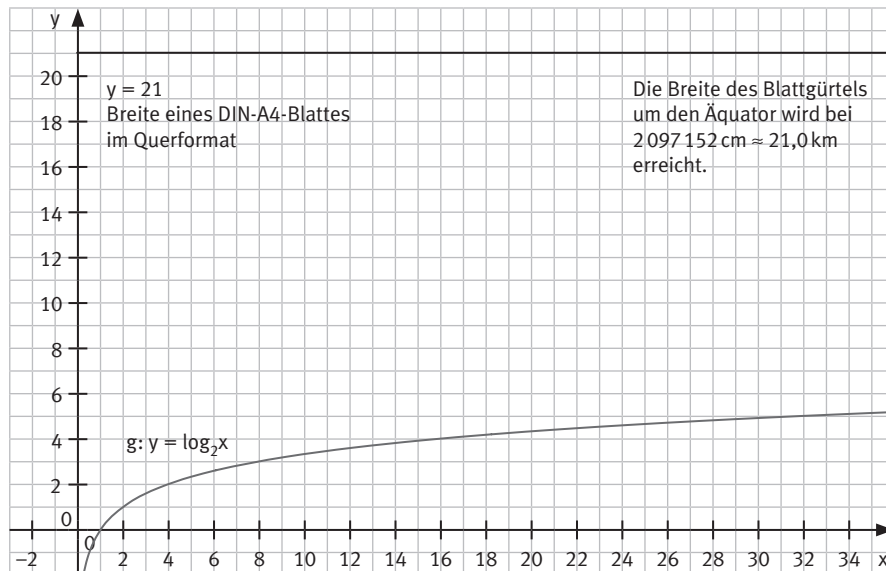
$$x = \lg(149,6 \cdot 10^{11}) = \lg 149,6 + \lg 10^{11} \approx 2,17 + 11 = 13,17 \text{ (cm)}$$

Die Funktion „erreicht an der Stelle 13,175 cm die Sonne“. Der x-Wert entspricht bei Weitem nicht der Breite eines DIN-A4-Blattes.



- b) Erdumfang am Äquator: $40\,075 \text{ km} = 40,075 \cdot 10^3 \text{ km} = 40,075 \cdot 10^8 \text{ cm}$
 $\log_2(40,075 \cdot 10^8) \approx 31,9 \text{ (cm)}$

Ein DIN-A4-Blatt ist 21 cm breit, also könnte man den Funktionsgraphen von $g: y = \log_2 x$ nicht auf dem Blattgürtel darstellen. Ab einem x-Wert von $2\,097\,152 \text{ cm} \approx 21,0 \text{ km}$ würden die Funktionswerte nicht mehr auf die Blätter passen.



KX

8 a) 1 Gegenüber dem Graphen von f ist der Graph von ...

- g mit dem Faktor 2 gestreckt.
- h mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gestaucht.
- i mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gestaucht und zusätzlich an der x -Achse gespiegelt.
- k mit dem Faktor 2 gestreckt und zusätzlich an der x -Achse gespiegelt.

2 Gegenüber dem Graphen von f ist der Graph von ...

- g um 1 LE nach links verschoben.
- h um 3 LE nach oben verschoben.
- i um 1 LE nach unten verschoben.
- k um 2 LE nach rechts verschoben.

b) 1		$f: y = \log_2 x$	$g: y = 2 \log_2 x$	$h: y = \frac{1}{2} \log_2 x$	$i: y = -\frac{1}{2} \log_2 x$	$k: y = -2 \log_2 x$
D		$x \in \mathbb{R}^+$	$x \in \mathbb{R}^+$	$x \in \mathbb{R}^+$	$x \in \mathbb{R}^+$	$x \in \mathbb{R}^+$
W		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Monotonie		steigend	steigend	steigend	fallend	fallend
Asymptote		(negative) y-Achse	(negative) y-Achse	(negative) y-Achse	(positive) y-Achse	(positive) y-Achse

2		$f: y = \log_2 x$	$g: y = \log_2 (x + 1)$	$h: y = \log_2 x + 3$	$i: y = \log_2 x - 1$	$k: y = \log_2 (x - 2)$
D		$x \in \mathbb{R}^+$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$	$x \in \mathbb{R}^+$	$x \in \mathbb{R}^+$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
W		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Monotonie		steigend	steigend	steigend	steigend	steigend
Asymptote		(negative) y-Achse	$x = -1$	(negative) y-Achse	(positive) y-Achse	$x = 2$

KX

9 Der Graph von g ist gegenüber dem Graphen von f ...

- um den Faktor k gestreckt bzw. gestaucht.
- um b Einheiten in positive x -Richtung verschoben.
- um c Einheiten in positive y -Richtung verschoben.
- um den Faktor k gestreckt bzw. gestaucht. Anschließend wurde er um b Einheiten in positive x -Richtung und um c Einheiten in positive y -Richtung verschoben.

KX

- Der Graph zu f_1 wurde gegenüber f um 2,5 LE nach rechts und 1,5 LE nach oben verschoben. Der Graph zu f_2 wurde gegenüber f um 5,5 LE nach rechts und 2,5 LE nach oben verschoben.
- Der Graph zu f_1 wurde gegenüber f um 1 LE nach links verschoben. Der Graph zu f_2 wurde gegenüber f um 3 LE nach rechts und 1 LE nach oben verschoben.
- Der Graph zu f_1 wurde gegenüber f um den Faktor 2 gestreckt und anschließend um 2 LE nach rechts und 3 LE nach oben verschoben. Der Graph zu f_2 wurde gegenüber f um 6 LE nach rechts und 5 LE nach oben verschoben.

b) 1		$f: y = \log_4 x$	$f_1: y = \log_4 (x - 2,5) + 1,5$	$f_2: y = \log_4 (x - 5,5) + 2,5$
D		$x \in \mathbb{R}^+$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2,5\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5,5\}$
W		$y \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$
Asymptote		$x = 0$	$x = 2,5$	$x = 5,5$

2		$f: y = \log_2 x$	$f_1: y = \log_2 (x + 1)$	$f_2: y = \log_2 (x - 3) + 1$
D		$x \in \mathbb{R}^+$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
W		$y \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$
Asymptote		$x = 0$	$x = -1$	$x = 3$

3	$f: y = \log_5 x$	$f_1: y = 2 \log_5 (x - 2) + 3$	$f_2: y = \log_5 (x - 6) + 5$
D	$x \in \mathbb{R}^+$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$
W	$y \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$
Asymptote	$x = 0$	$x = 2$	$x = 6$

c) 1 $\log_4 (x - 2,5) + 1,5 = \log_4 (x - 5,5) + 2,5$

$$\log_4 (x - 2,5) - \log_4 (x - 5,5) = 2,5 - 1,5$$

$$\log_4 \left(\frac{x-2,5}{x-5,5} \right) = 1$$

$$\frac{x-2,5}{x-5,5} = 4$$

$$x - 2,5 = 4 \cdot (x - 5,5)$$

$$x - 2,5 = 4x - 22$$

$$19,5 = 3x$$

$$x = 6,5$$

$$\log_4 (6,5 - 2,5) + 1,5 = \log_4 4 + 1,5 = 1 + 1,5 = 2,5$$

$$\Rightarrow S(6,5 \mid 2,5)$$

3 $2 \log_5 (x - 2) + 3 = \log_5 (x - 6) + 5$

$$\log_5 (x - 2)^2 - \log_5 (x - 6) = 2$$

$$\log_5 \left(\frac{(x-2)^2}{x-6} \right) = 2$$

$$\frac{(x-2)^2}{x-6} = 5^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = 25 \cdot (x - 6)$$

$$x^2 - 4x + 4 = 25x - 150$$

$$x^2 - 29x + 154 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{29^2 - 4 \cdot 1 \cdot 154}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{29 \pm 15}{2}$$

$$x_1 = 7$$

$$2 \log_5 (7 - 2) + 3$$

$$= 2 \log_5 5 + 3$$

$$= 2 + 3 = 5$$

$$\Rightarrow S_1(7 \mid 5)$$

$$x_2 = 22$$

$$2 \log_5 (22 - 2) + 3$$

$$= 2 \log_5 20 + 3$$

$$\approx 3,72 + 3 = 6,72$$

$$\Rightarrow S_2(22 \mid 6,72)$$

2 $\log_2 (x + 1) = \log_2 (x - 3) + 1$

$$\log_2 (x + 1) - \log_2 (x - 3) = 1$$

$$\log_2 \left(\frac{x+1}{x-3} \right) = 1$$

$$\frac{x+1}{x-3} = 2$$

$$x + 1 = 2x - 6$$

$$x = 7$$

$$\log_2 (7 + 1) = \log_2 8 = 3$$

$$\Rightarrow S(7 \mid 3)$$

Entdecken

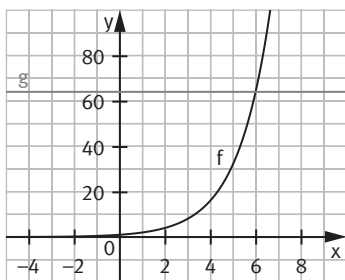
- K3** ■ Die Miete wird durch die Gleichung $m(t) = 650 \cdot 1,06^t$ und das Gehalt durch $g(t) = 3800 \cdot 1,025^t$ beschrieben. Das bedeutet, dass die Miete nach 52,6 Jahren dem Gehalt von Herrn Meyer entspricht.
- K3** ■ Nach fünf Jahren entspricht die Miete 20,2% des Einkommens von Herrn Meyer. Nach 10 Jahren sind es 23,9% und nach 20 Jahren bereits 33,4%.

Nachgefragt

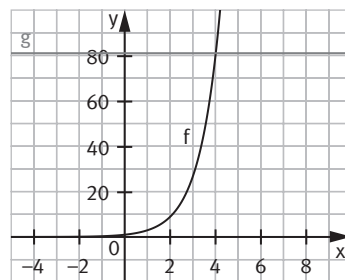
- K6** ■ 1 $x = 0$ 2 $x = 2$

Aufgaben

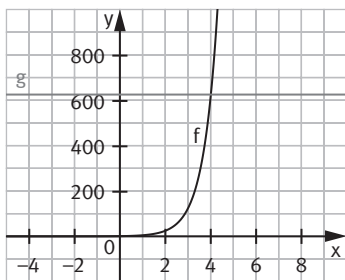
- K5** 1 a) $x = 6$



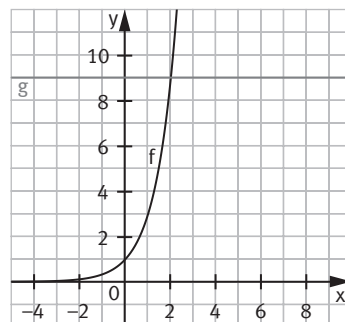
- b) $x = 4$



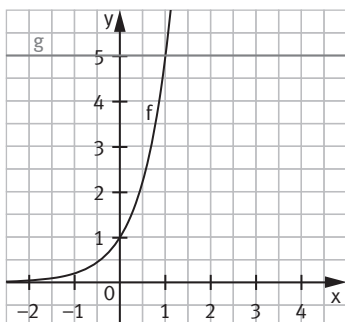
- c) $x = 4$



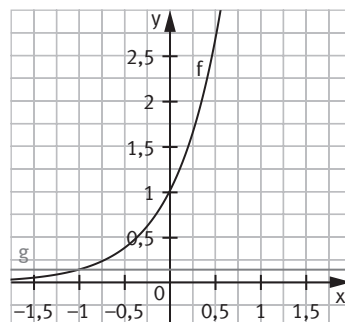
- d) $3^x = 9 \Rightarrow x = 2$



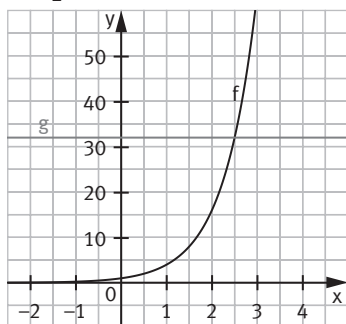
- e) $5^x = 5 \Rightarrow x = 1$



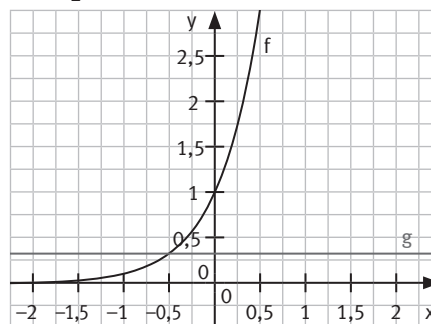
- f) $7^x = \frac{1}{7} = 7^{-1} \Rightarrow x = -1$



g) $x = \frac{5}{2}$



h) $x = -\frac{1}{2}$



KX

2 a) $x = \pm \sqrt[4]{625} = \pm 5$

$L = \{-5; 5\}$

d) $y = \pm \sqrt[10]{72} \approx \pm 1,53$

$L = \{-1,53; 1,53\}$

g) $n = \log_{0,5} 0,05 \approx 4,32$

$L = \{4,32\}$

b) $a = \pm \sqrt[8]{6561} = \pm 3$

$L = \{-3; 3\}$

e) $x = \log_4 256 = 4$

$L = \{4\}$

h) $y = \log_{0,2} 15 \approx -1,68$

$L = \{-1,68\}$

c) $m = \sqrt[5]{120} \approx 2,61$

$L = \{2,61\}$

f) $b = \log_5 100 \approx 2,86$

$L = \{2,86\}$

K5

3 a) $x = 0,5$

d) $x = 2$

g) $x = 4$

b) $x = -1,5$

e) $x = \{\}$

h) $x = -1$

c) $x = -1$

f) $x = \{\}$

i) $x = 9$

KX

4 a) $L = \{8\}$

d) $L = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

b) $L = \{5\}$

e) $L = \mathbb{R}$

c) $L = \{-3\}$

f) $L = \{7\}$

KX

5 a) $x = \log_3 7 \approx 1,77$

$L = \{1,77\}$

c) $x = \log_{12} 15 \approx 1,09$

$L = \{1,09\}$

e) $5^{2x} + 3 \cdot 25^x = 0,8$

$25^x + 3 \cdot 25^x = 0,8$

$4 \cdot 25^x = 0,8 \quad | : 4$

$25^x = 0,2 \quad | \lg()$

$\lg 25^x = \lg 0,2$

$x \cdot \lg 25 = \lg 0,2 \quad | : \lg 25$

$x = \frac{\lg 0,2}{\lg 25} = -\frac{1}{2}$

$L = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Alternativer Lösungsweg:

$5^{2x} + 3 \cdot 5^{2x} = 0,8$

$4 \cdot 5^{2x} = 0,8 \quad | : 4$

$5^{2x} = 0,2$

$5^{2x} = 5^{-1}$

Exponentenvergleich:

$2x = -1$

$x = -\frac{1}{2}$

$L = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

b) $x = \log_6 1,2 \approx 0,10$

$L = \{0,10\}$

d) $x = -\log_5 0,6 \approx 0,32$

$L = \{0,32\}$

f) $\frac{2}{3^x} \cdot 3^{3x} - 9^x = 243$

$\frac{2}{3^x} \cdot (3^x)^3 - 9^x = 243$

$2 \cdot (3^x)^2 - 9^x = 243$

$2 \cdot 3^{2x} - 9^x = 243$

$2 \cdot 9^x - 9^x = 243$

$9^x = 243 \quad | \lg()$

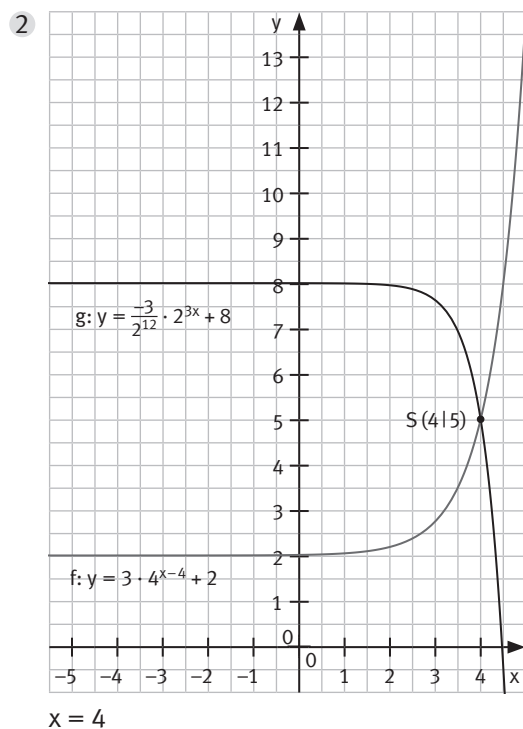
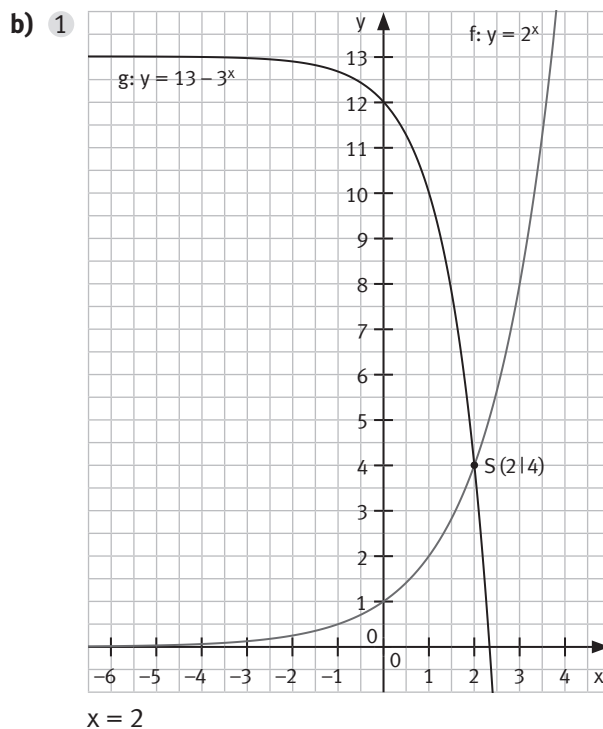
$x = \frac{\lg 243}{\lg 9} = 2,5$

$L = \{2,5\}$

- | | | | |
|---------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| g) $L = \{2, 10\}$ | h) $L = \{0, 85\}$ | i) $L = \{0, 05\}$ | j) $L = \{-3, 07\}$ |
| k) $L = \{2, 68\}$ | l) $L = \{-0, 02\}$ | m) $L = \{2\}$ | n) $L = \{4, 30\}$ |
| o) $L = \{-8, 14\}$ | p) $L = \{\}$ | q) $L = \{\frac{1}{3}\}$ | r) $L = \{-1\}$ |

- K6** 6 a) Der letzte Schritt ist falsch, denn von gleichen Exponenten kann man nicht generell auf die gleiche Basis schließen: $a^0 = 1$, unabhängig von der Wahl von a . Im vorliegenden Beispiel wissen wir, dass unterschiedliche Basen vorliegen ($3 \neq 4$), deshalb muss der Exponent gleich null sein, also $x = -5$.
- b) Der letzte Schritt ist falsch, denn $\lg \frac{1}{3}$ ist eine negative Zahl. Dividiert man aber beide Seiten einer Ungleichung durch eine negative Zahl, so dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

- K6** 7 a) Die Gleichung wurde zeichnerisch gelöst. Die x-Koordinate des Schnittpunkts ist die Lösung der Gleichung.



- | | | | | |
|--------------------------------|--------------------|--------------------------|--------------------|-------------------|
| KX 8 a) $L = \{-0, 5\}$ | b) $L = \{-1\}$ | c) $L = \{1\}$ | d) $L = \{3\}$ | e) $L = \{0, 5\}$ |
| f) $L = \{0, 3\}$ | g) $L = \{3, 58\}$ | h) $L = \{0, 0001; 10\}$ | i) $L = \{-1; 1\}$ | |

- | | | |
|---|---|--|
| KX 9 a) lineare Gleichung
$L = \{\frac{1}{27}\}$ | b) Exponentialgleichung
$L = \{\}$ | c) Exponentialgleichung
$L = \{0, 5\}$ |
| d) Gleichung dritten Grades
$L = \{\frac{1}{3}\}$ | e) Exponentialgleichung
$L = \{4\}$ | f) Exponentialgleichung
$L = \{\frac{2}{3}\}$ |
| g) lineare Gleichung
$L = \{4\}$ | h) Exponentialgleichung
$L = \{16\}$ | i) Exponentialgleichung
$L = \{\log_2 3\} \approx \{1, 58\}$ |
| j) Exponentialgleichung
$L = \{4\}$ | k) Exponentialgleichung
$L = \{\lg 64\} \approx \{1, 81\}$ | l) Exponentialgleichung
$L = \{-\frac{\lg 6,4}{2}\} \approx \{-0, 40\}$ |
| m) Exponentialgleichung
$L = \{\lg 14\} \approx \{1, 15\}$ | n) Exponentialgleichung
$L = \{1\}$ | o) quadratische Gleichung
$L = \{-7; -8\}$ |
| p) quadratische Bruchgleichung
$L = \{4; 5\}$ | q) Wurzelgleichung
$L = \{-\sqrt{40}; \sqrt{40}\} \approx \{-6, 32; 6, 32\}$ | r) quadratische Gleichung
$L = \{\}$ |

KX

- 10 a)** Bei der grafischen Lösung 1 wurde sowohl die linke als auch die rechte Seite der Gleichung als separate Funktion betrachtet und jeweils deren Graph gezeichnet. Die x-Koordinate des Schnittpunkts beider Funktionsgraphen ergibt (näherungsweise) die Lösung der Gleichung.
Bei der rechnerischen Lösung 2 wurde zuerst der Logarithmus isoliert, also in diesem Fall mit 23 multipliziert. Anschließend wurden gemäß der Definition des Logarithmus beide Seiten der Gleichung in den Exponenten genommen und mithilfe der Logarithmusgesetze weiter vereinfacht. Zum Schluss musste nach x aufgelöst werden, in diesem Fall mithilfe einer Subtraktion von 3.
- b)** Bei der grafischen Lösung 1 kann der x-Wert des Schnittpunkts nur näherungsweise abgelesen werden.
Bei der rechnerischen Lösung 2 dagegen wird die Lösung berechnet, wobei am Ende die Lösung eventuell gerundet angegeben wird.
Durch Ungenauigkeiten beim Zeichnen und/oder Ablesen von Werten bei der grafischen und Rundungen bei der rechnerischen Lösung kann es passieren, dass die beiden Lösungen nur näherungsweise übereinstimmen.
- c)** Exponentialgleichungen können ebenfalls grafisch und rechnerisch gelöst werden.
Beim grafischen Lösen geht man gleichermaßen vor.
Beim rechnerischen Lösen ist die Herangehensweise ähnlich zur rechnerischen Lösung der Logarithmusgleichung. Im „entscheidenden Moment“ allerdings, also nach der Isolation des Terms mit dem exponentiellen Anteil, wendet man den Logarithmus an. Anschließend wird weiter vereinfacht.

KX

- | | | |
|---|--|---|
| 11 a) $D = \mathbb{R}^+$
$L = \{9\}$ | b) $D = \mathbb{R}^+$
$L = \left\{\frac{1}{125}\right\}$ | c) $D = \mathbb{R}^+$
$L = \{2\}$ |
| d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
$L = \{2\}$ | e) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{5}\right\}$
$L = \{1\}$ | f) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$
$L = \{0\}$ |
| g) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
$L = \{-3; 3\}$ | h) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -6\}$
$L = \{21\}$ | i) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$
$L = \{8\}$ |
| j) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$
$L = \{1048572\}$ | k) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{21}\}$
$L \approx \{-11; 11\}$ | l) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
$L = \{4\}$ |

KX

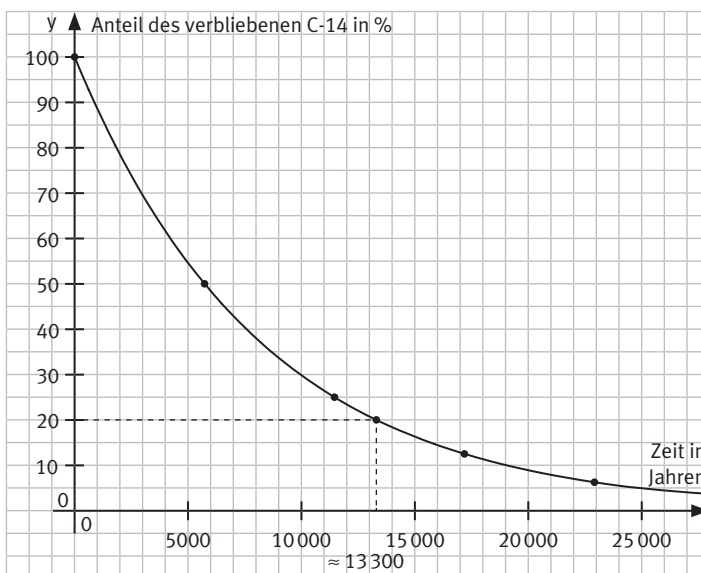
- 12 a)** $D = \mathbb{R}^+$
 $\lg(x+1) - \lg x = \lg\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1 \quad | \text{log-Def.}$
 $\frac{x+1}{x} = 10 \quad | \cdot x$
 $x+1 = 10x \quad | -x$
 $1 = 9x \quad | : 9$
 $x = \frac{1}{9}$
 $L = \left\{\frac{1}{9}\right\}$
- b)** $D = \mathbb{R}^+$
 $\log_2 x + \log_2(x+2) = \log_2(x \cdot (x+2)) = 3 \quad | \text{log-Def.}$
 $x \cdot (x+2) = 2^3 = 8 \quad | -8$
 $x^2 + 2x - 8 = 0 \quad | \text{allgemeine Formel für quadratische Gleichungen}$
 $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-8)}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = -1 \pm 3$
 $x_1 = -4 \notin \mathbb{R}^+$
 $\Rightarrow x = x_2 = 2$
 $L = \{2\}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\} \setminus \{0\}$
 $\log_2 x^2 = 2 \log_2 (x+5)$
 $\log_2 x^2 = \log_2 (x+5)^2 \quad | \log\text{-Def.}$
 $x^2 = (x+5)^2$
 $x^2 = x^2 + 10x + 25 \quad | -x^2$
 $0 = 10x + 25 \quad | -25$
 $10x = -25 \quad | :10$
 $x = -2,5$
 $L = \{-2,5\}$

KX

13 a)

Anzahl der Halbwertsperioden	0	1	2	3	4
Anzahl der Jahre	0	5730	11 460	17 190	22 920
Anteil des verbleibenden C-14	1 = 100%	$\frac{1}{2} = 50\%$	$\frac{1}{4} = 25\%$	$\frac{1}{8} = 12,5\%$	$\frac{1}{16} = 6,25\%$



- b) 1 Dem Graphen kann man ein ungefähres Alter des Fossils von 13 300 Jahren entnehmen.
2 $m = m_0 \cdot 0,5^n \Leftrightarrow \frac{m}{m_0} = 0,5^n$
 $\frac{m}{m_0}$ ist dabei der Anteil des verbleibenden C-14, n ist die Anzahl der dabei vergangenen Halbwertszeiten.
 $20\% = 0,2 = 0,5^n \quad | \lg()$
 $\lg 0,2 = n \cdot \lg 0,5$
 $n = \frac{\lg 0,2}{\lg 0,5} \approx 2,322$
 $2,322 \cdot 5730 \text{ a} \approx 13\,300 \text{ a}$
Das Fossil ist etwa 13,3 Jahrtausende alt.

c) $0,533 = 0,5^n \quad | \lg()$
 $\lg 0,533 = n \cdot \lg 0,5$
 $n = \frac{\lg 0,533}{\lg 0,5} \approx 0,9078$
 $0,9078 \cdot 5730 \text{ a} \approx 5200 \text{ a}$
 Ötzi ist vor etwa 52 Jahrhunderten gestorben.

d) $0,67 = 0,5^n \quad | \lg()$
 $\lg 0,67 = n \lg 0,5$
 $n = \frac{\lg 0,67}{\lg 0,5} \approx 0,5578$
 $0,5578 \cdot 5730 \text{ a} \approx 3300 \text{ a}$
 Tutanchamun ist vor etwa 33 Jahrhunderten gestorben.

- K3** 14 a) n_0 ist die Anzahl der Bakterien zu Beginn der Messung; n ist das Zehnfache von n_0 , also $n = 10 \cdot n_0$; der Wachstumsfaktor beträgt 2; gesucht ist die Zeit x in h.

$$n = n_0 \cdot 2^x$$

$$10 \cdot n_0 = n_0 \cdot 2^x \quad | : n_0$$

$$10 = 2^x; x \approx 3,3$$

Nach etwa 3,3 h hat sich die Anzahl der Bakterien verzehnfacht.

- b) m_0 ist die Masse zu Beginn der Messung; m ist das Doppelte von m_0 nach 80 Minuten (bzw. $\frac{4}{3}$ h); a ist der Wachstumsfaktor, der zunächst zu bestimmen ist.

$$m = m_0 \cdot a^{\frac{4}{3}}$$

$$2 \cdot m_0 = m_0 \cdot a^{\frac{4}{3}} \quad | : m_0$$

$$2 = a^{\frac{4}{3}} \quad a = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8} \approx 1,68$$

Berechnung der Zeit x , bis die Masse das 100-Fache von m_0 beträgt:

$$100 \cdot m_0 = m_0 \cdot 1,68^x \quad | : m_0$$

$$100 = 1,68^x; x \approx 8,9$$

Nach knapp 9 h ist die Masse auf das 100-Fache angestiegen.

- c) n_0 ist der Bestand des Bakteriums zu Beginn der Messung; der Wachstumsfaktor pro Stunde beträgt 1,6. Gesucht ist die Zeit x für die Verdopplung, d. h. die Zeit x , sodass gilt: $2 \cdot n_0 = n_0 \cdot 1,6^x$.

$$2 \cdot n_0 = n_0 \cdot 1,6^x \quad | : n_0$$

$$2 = 1,6^x; x \approx 1,47$$

Nach etwa 1,5 h hat sich der Bestand verdoppelt.

- K3** 15 a) $15\,000 = 12\,500 \cdot 1,013^x$

$$\Leftrightarrow 1,2 = 1,013^x \quad | \lg()$$

$$\Leftrightarrow \lg 1,2 = \lg 1,013^x$$

$$\Leftrightarrow \lg 1,2 = x \cdot \lg 1,013 \quad | : \lg 1,013$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg 1,2}{\lg 1,013} = x \quad \Rightarrow x \approx 14,12 \text{ Jahre}$$

- b) $25\,000 = 12\,500 \cdot 1,013^x$

$$\Leftrightarrow 2 = 1,013^x \quad | \lg()$$

$$\Leftrightarrow \lg 2 = \lg 1,013^x$$

$$\Leftrightarrow \lg 2 = x \cdot \lg 1,013 \quad | : \lg 1,013$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg 2}{\lg 1,013} = x \quad \Rightarrow x \approx 53,66 \text{ Jahre}$$

c) $1000000 = 12500 \cdot 1,013^x$

$$\Leftrightarrow 80 = 1,013^x \quad | \lg()$$

$$\Leftrightarrow \lg 80 = \lg 1,013^x$$

$$\Leftrightarrow \lg 80 = x \cdot \lg 1,013 \quad | : \lg 1,013$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg 80}{\lg 1,013} = x \quad \Rightarrow x \approx 339,27 \text{ Jahre}$$

d) $7000000 = 12500 \cdot 1,013^x$

$$\Leftrightarrow 560 = 1,013^x \quad | \lg()$$

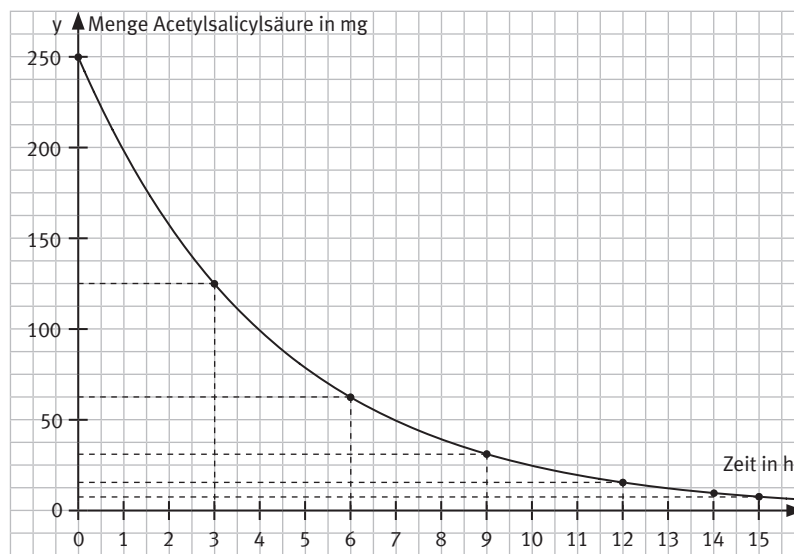
$$\Leftrightarrow \lg 560 = \lg 1,013^x$$

$$\Leftrightarrow \lg 560 = x \cdot \lg 1,013 \quad | : \lg 1,013$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg 560}{\lg 1,013} = x \quad \Rightarrow x \approx 490 \text{ Jahre}$$

K3

16 a)



b) $250 \text{ mg} \cdot a^3 = 125 \text{ mg}$

$$a^3 = \frac{1}{2}$$

$$a = \sqrt[3]{0,5}$$

$$a \approx 0,794$$

$$f: y = 250 \cdot 0,794^t$$

$$10 = 250 \cdot 0,794^t$$

$$t = \log_{0,794} \frac{1}{25}$$

$$= \log_{0,794} 0,04$$

$$\approx 13,95$$

Nach ca. 14 Stunden befinden sich noch 10 mg im Körper.

KX

17 $100 \text{ ppm} \cdot 0,85^n \leq 20 \text{ ppm} \quad | : 100 \text{ ppm}$

$$0,85^n \leq 0,2 \quad | \lg()$$

$$n \cdot \lg 0,85 \leq \lg 0,2$$

$$n \geq \frac{\lg 0,2}{\lg 0,85} \approx 9,9$$

Das Badeverbot darf erst nach etwa 10 Wochen wieder aufgehoben werden.

K5	1	Zeit t in h	0	1	2	3	4	5	6	10
	a)	Volumen einer Bakterienkultur in mm^3 : $f(t) = 2 \cdot 3^t$	2	6	18	54	162	486	1458	118098
	b)	Anzahl der Personen, die von einem Gerücht erfahren haben: $f(t) = 4^t$	1	4	16	64	256	1024	4096	1048576
	c)	Füllhöhe eines Wasserbeckens in cm: $f(t) = 20 + 10 \cdot t$	20	30	40	50	60	70	80	120

- K6** **2** a) Prozentuale Zunahme: 10% b) Prozentuale Zunahme: 5%
 c) Prozentuale Abnahme: 0,7% d) Prozentuale Zunahme: 3%
 e) Prozentuale Abnahme: 50% f) Prozentuale Zunahme: 10%

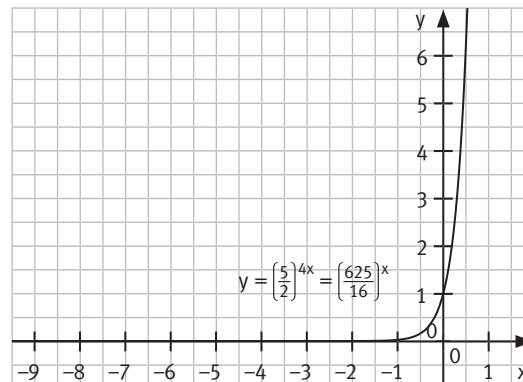
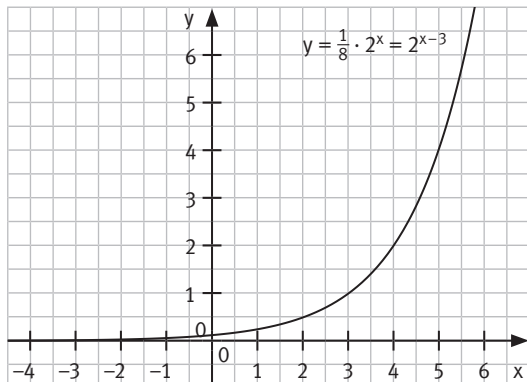
- K6** **3** a) 1,035 b) 0,948 c) 1,1 d) 0,99

- K1** **4** a) Exponentiell: Der Graph hat eine Asymptote bei $y = 8$ und ist monoton fallend.
 b) Nicht exponentiell: Der Graph ist zwar monoton wachsend, hat aber keine Asymptote.
 c) Exponentiell: Der Graph hat eine Asymptote bei $y = 0$ und ist monoton fallend.

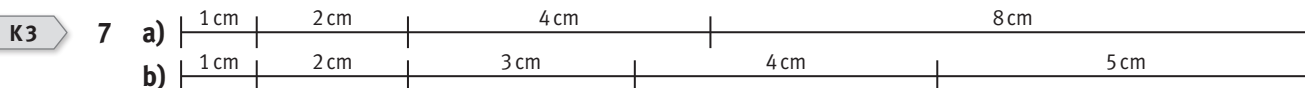
- K5** **5** Die Graphen sind identisch, was man jeweils anhand der Potenzgesetze zeigen kann:

a) $y = \frac{1}{8} \cdot 2^x = 2^{-3} \cdot 2^x = 2^{x-3}$

b) $y = \left(\frac{5}{2}\right)^{4x} = \left(\left(\frac{5}{2}\right)^4\right)^x = \left(\frac{625}{16}\right)^x$



- K5** **6** a) $x = 3$ b) $x = 59049$ c) $x = 5$ d) $x \approx -2,63$ e) $x = 343$ f) $x = 8$



- K5** **8** Die Werte sind auf zwei Nachkommastellen gerundet.

- a) 0 b) 0,43 c) 1,43 d) 3 e) -1,43
 f) -0,86 g) -0,57 h) -0,43 i) 1 j) 1,09

- K5** **9** a) 6,55 Potenzieren b) 2,31 Wurzel ziehen c) 0,32 Logarithmieren
 d) -0,63 Logarithmieren e) 0,96 Wurzel ziehen f) 4,29 Potenzieren
 g) 3,68 Wurzel ziehen h) 0,42 Logarithmieren

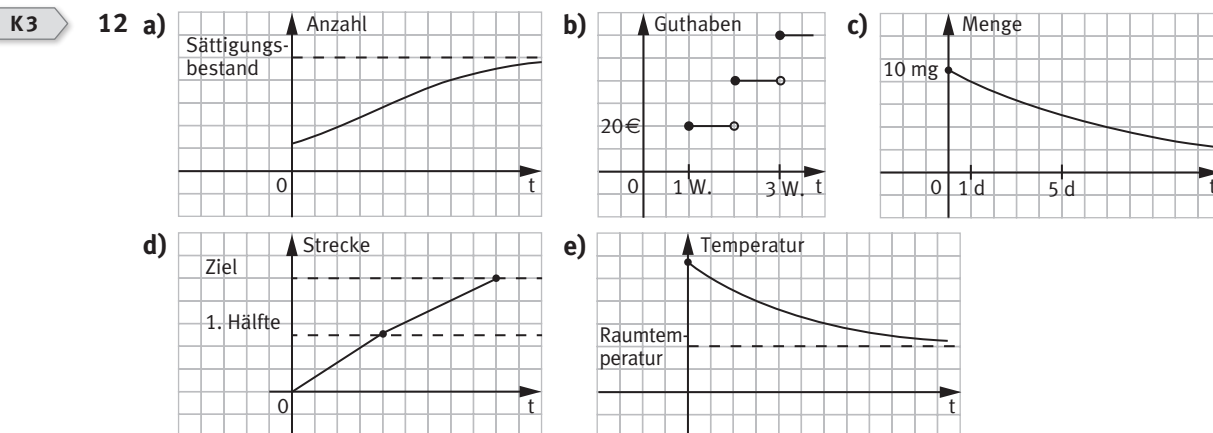
- K2** 10 a) $f: y = x^3$ (nichtlineares, nichtexponentielles Wachstum) b) $f: y = 1,2x$ (lineares Wachstum)
 c) $f: y = 3^x$ (exponentielles Wachstum) d) $f: y = 15 - 3,5x$ (lineares Wachstum)

K3 11 a)

	x	0	1	2	3	4
1	$y = 40 - 4x$	40	36	32	28	24
2	$y = 40 \cdot 0,9^x$	40	36	32,4	29,2	26,2

b)

	x	0	1	2	3	4
1	$y = -6x + 28$	28	22	16	10	4
2	$y = 64 \cdot 0,5^x$	64	32	16	8	4



- K3** 13 a) $x = \log_6 12 \approx 1,39$ b) $x = \log_{2,5} 6 - 1,5 \approx 0,46$ c) $x = \frac{1}{2} \cdot (\log_9 10 + 3) \approx 2,02$
 d) $x = \log_{0,75} \frac{2,7}{1 - 0,75^2} \approx -4,33$ e) $x = \frac{1}{3} \log_5 \frac{21}{4} \approx 0,34$ f) $x = \frac{1}{3} \cdot \log_3 \frac{134}{3^2 - 3^{-1,5}} \approx 0,83$

- KX** 14 Beide Graphen gehören zu Exponentialfunktionen und haben die x-Achse als waagrechte Asymptote. Sie gehen durch eine Spiegelung an der y-Achse auseinander hervor.
 Für $a > 1$ ist der Graph von $f_1: y = a^x$ monoton steigend, entsprechend fällt der Graph von $f_2: y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.
 Für $0 < a < 1$ ist die Monotonie umgekehrt, also f_1 monoton fallend und f_2 monoton steigend.
 Beide Graphen haben den Punkt $(0|1)$ als gemeinsamen Punkt und Schnittpunkt mit der y-Achse.

K5 15 a)

	1	2	3	4	5	6
D	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
W	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	$\{y \in \mathbb{R} x > 5,5\}$	$\{y \in \mathbb{R} y > -3\}$	$\{y \in \mathbb{R} y > -5\}$	$\{y \in \mathbb{R} y > 7\}$
Asymptote	$y = 0$	$y = 0$	$y = 5,5$	$y = -3$	$y = -5$	$y = 7$
Nullstelle	keine	keine	keine	$S(2,71 0)$	$S(0,84 0)$	keine

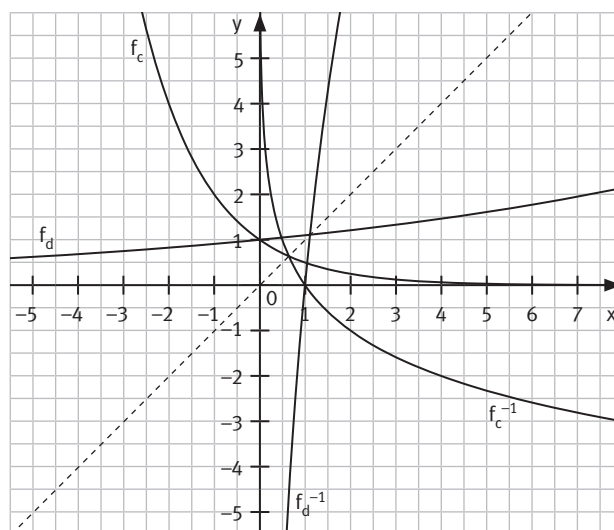
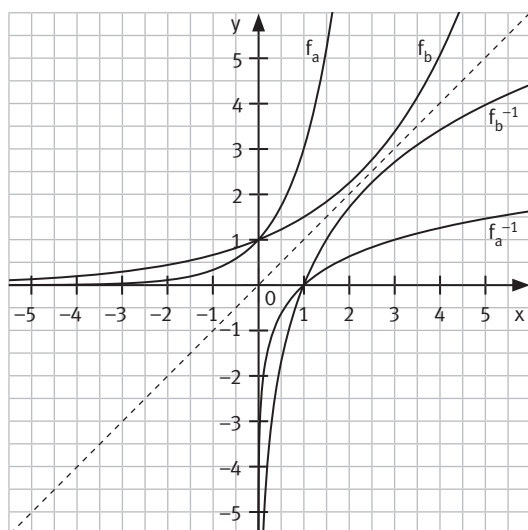
b)

	1	2	3	4	5	6
D	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	$\{x \in \mathbb{R} x > 2\}$	$\{x \in \mathbb{R} x > 5\}$	$\{x \in \mathbb{R} x > -4\}$	$\{x \in \mathbb{R} x > 1,5\}$
W	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Asymptote	$x = 0$	$x = 0$	$x = 2$	$x = 5$	$x = -4$	$x = 1,5$
Nullstelle	$S(1 0)$	$S(243 0)$	$S(3 0)$	$S(6 0)$	$S(-3,996 0)$	$S(2,044 0)$

- K5** 16 a) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > -3\}$
 $W = \mathbb{R}$
 Asymptote: $x = -3$
 Nullstelle:
 $0 = \log_5 (x + 3) - 5$
 $5 = \log_5 (x + 3)$
 $5^5 = x + 3$
 $x = 3122 \Rightarrow N(3122|0)$
- b) $f^{-1}: y = 5^{x+5} - 3$
 $D = \mathbb{R}$
 $W = \{y \in \mathbb{R} | y > -3\}$
 Asymptote: $y = -3$
- c) $\log_5 (x + 3) - 5 = \log_5 (x - 1) - 4$
 $\log_5 (x + 3) - \log_5 (x - 1) = 1$
 $\log_5 \left(\frac{x+3}{x-1}\right) = 1$
 $\frac{x+3}{x-1} = 5$
 $x + 3 = 5x - 5$
 $4x = 8$
 $x = 2$
 $S(2|-4)$

K4

17



	a)		b)	
	$f: y = 3^x$	$f^{-1}: y = \log_3 x$	$f: y = 1,5^x$	$f^{-1}: y = \log_{1,5} x$
D	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
W	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$
Asymptote	$y = 0$	$x = 0$	$y = 0$	$x = 0$

	c)		d)	
	$f: y = 0,5^x$	$f^{-1}: y = \log_{0,5} x$	$f: y = 1,1^x$	$f^{-1}: y = \log_{1,1} x$
D	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
W	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$
Asymptote	$y = 0$	$x = 0$	$y = 0$	$x = 0$

K5

18 a)

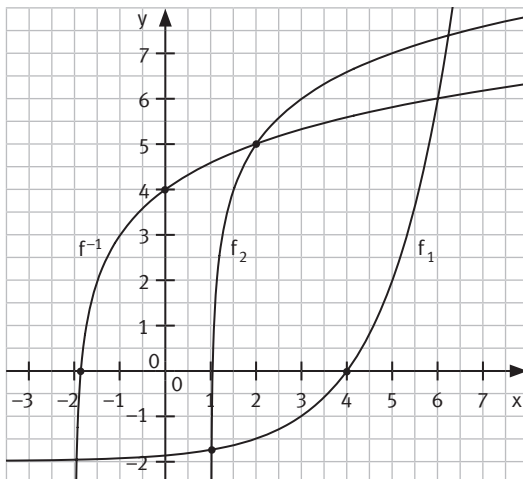
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_1: y = 0,25 \cdot 0,5^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$
$f_2: y = 0,5 \cdot 0,5^x$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
$f_3: y = 1 \cdot 0,5^x$	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
$f_4: y = 2 \cdot 0,5^x$	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
$f_5: y = 4 \cdot 0,5^x$	128	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

- b) Bei den Funktionen f_1 bis f_5 handelt es sich um Funktionen vom Typ $y = k \cdot 0,5^x$. Da sich k von Funktion zu Funktion verdoppelt, verdoppeln sich auch die Funktionswerte. Gegenüber dem Graphen von f_3 sind die Graphen von f_1 und f_2 gestaucht und die Graphen von f_4 und f_5 gestreckt. Zusätzlich kann man sehen, dass die Graphen der Funktionen jeweils durch eine Verschiebung auseinander hervorgehen: Den Graphen von f_2 erhält man, indem man denjenigen von f_1 um eine Einheit in positive x -Richtung verschiebt. Verschiebt man f_2 eine Einheit weiter, entsteht der Graph von f_3 , dann der von f_4 und schließlich der von f_5 .

K3

19 a) $k = 3; a = 0,4$ b) $k = 0,5; a = 4$ c) $k = 3; a = 2$ d) $k = 3; a = 2$

K5 20 a)



$$D = \mathbb{R}$$

$$W = \{y \in \mathbb{R} \mid y > -2\}$$

$$\text{Asymptote: } y = -2$$

 Nullstelle der Funktion f_1 :

$$0 = 2^{x-3} - 2$$

$$2 = 2^{x-3}$$

$$x - 3 = 1$$

 Nullstelle bei $N(4 \mid 0)$

$$\text{b) } f^{-1}: y = \log_2(x + 2) + 3$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$$

$$W = \mathbb{R}$$

$$\text{Asymptote: } x = -2$$

- c) Der Graph von f_1 hat den Schnittpunkt mit der x-Achse bei $N(4 \mid 0)$, also schneidet f^{-1} die y-Achse bei $(0 \mid 4)$.

 Nullstelle der Funktion f^{-1} :

$$0 = \log_2(x + 2) + 3$$

$$-3 = \log_2(x + 2)$$

$$2^{-3} = x + 2$$

$$x = -1,875$$

Nullstelle des Graphen von f^{-1} bei $(-1,875 \mid 0)$, also schneidet der Graph von f_1 die y-Achse in $(0 \mid -1,875)$.

- d) Schnittpunkt der Graphen von f^{-1} und f_2 :

$$\log_2(x + 2) + 3 = \log_2(x - 1) + 5$$

$$\log_2(x + 2) - \log_2(x - 1) = 2$$

$$\log_2\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = 2$$

$$\frac{x+2}{x-1} = 2^2$$

$$x = 2$$

$$f^{-1}(2) = \log_2(4) + 3 = 5$$

Die Graphen schneiden sich in $(2 \mid 5)$.

 KX 21 a) Zerfallsgleichung: $h = k \cdot a^t$

 mit Wertepaar $(0 \mid 16,8)$ folgt:

$$16,8 = k \cdot a^0 \Rightarrow k = 16,8$$

 mit Wertepaar $(60 \mid 5,0)$ folgt:

$$5,0 = 16,8 \cdot a^{60}$$

$$\Leftrightarrow a^{60} = \frac{5,0}{16,8}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt[60]{\frac{5,0}{16,8}} \approx 0,98$$

$$\Rightarrow h = 16,8 \cdot 0,98^t$$

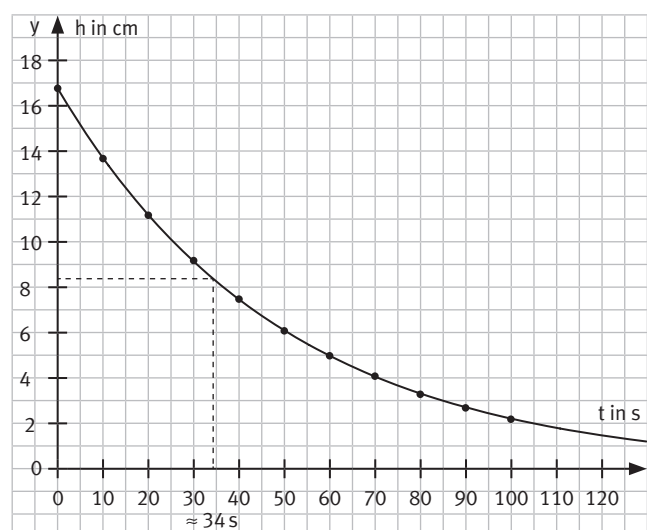
Die Gleichung beschreibt den tatsächlichen Schaumzerfall sehr gut, weil alle Punkte im Rahmen einer geringen Toleranz auf dem Graphen der berechneten Funktion liegen.

- b) $16,8 \cdot 0,98^t = 0,5 \cdot 16,8$

$$\Leftrightarrow 0,98^t = 0,5$$

$$\Rightarrow t = \log_{0,98} 0,5 \approx 34,3$$

Die Halbwertszeit betrug 34,3 s, was man näherungsweise auch aus der Grafik in a) ablesen könnte.



K3

- 22 a)** Zu Beginn bedecken die Seerosen eine Fläche von $0,5 \text{ m}^2$ des Teichs. Dies entspricht dem Zeitpunkt $x = 0$. Setzt man $x = 0$ in die Gleichung ein, erhält man den Startwert $0,5 \cdot 2^0 = 0,5$. Nach einer Zeiteinheit (14 Tage) nehmen die Teichseerosen die doppelte Fläche ein, das entspricht 1 m^2 . Dies erhält man, indem $x = 1$ für eine Zeiteinheit in die Gleichung eingesetzt wird: $0,5 \cdot 2^1 = 0,5 \cdot 2 = 1$. Also kann das Wachstum durch die angegebene Gleichung $y = 0,5 \cdot 2^x$ beschrieben werden.
- b)** 35 Tage entsprechen 2,5 Zeiteinheiten von jeweils 14 Tagen.
 $f(2,5) = 0,5 \cdot 2^{2,5} \approx 2,83$
 Die Blätter bedecken nach 35 Tagen eine Fläche von $2,83 \text{ m}^2$.
- c)** $10 = 0,5 \cdot 2^x$
 $20 = 2^x$
 $x = \log_2 20 \approx 4,32$
 Nach 4,32 Zeiteinheiten von je 14 Tagen, also nach gut 60 Tagen, ist der Teich völlig zugewachsen.

KX

- 23 a)** $(3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ Substitution: $3^x = y$

$$y^2 - 10 \cdot y + 9 = 0$$

$$y_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$$y_1 = 9; y_2 = 1$$

Rücksubstitution:

$$9 = 3^{x_1} \Rightarrow x_1 = 2$$

$$1 = 3^{x_2} \Rightarrow x_2 = 0$$

$$L = \{0; 2\}$$

- b)** $(4^y)^2 - 4,25 \cdot 4^y + 1 = 0$ Substitution: $4^y = x$

$$x^2 - 4,25x + 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{4,25 \pm \sqrt{4,25^2 - 4}}{2} = \frac{4,25 \pm 3,75}{2}$$

$$x_1 = 4; x_2 = \frac{1}{4}$$

Rücksubstitution:

$$4 = 4^{y_1} \Rightarrow y_1 = 1$$

$$\frac{1}{4} = 4^{y_2} \Rightarrow y_2 = -1$$

$$L = \{-1; 1\}$$

- c)** $144^x = 12^{2x} = 12^6$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$L = \{3\}$$

- d)** Substitution: $\lg z = x; z > 0$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -6$$

Rücksubstitution:

$$1 = \lg z_1 \Rightarrow z_1 = 10$$

$$-6 = \lg z_2 \Rightarrow z_2 = 10^{-6}$$

$$L = \{10^{-6}; 10\}$$

- e)** $L = \{1\}$

- f)** $\frac{1}{2} \cdot \lg z = \sqrt{\lg z}$ Substitution: $\lg z = x$

$$\frac{1}{2}x = \sqrt{x} \quad | \text{Quadrieren}$$

$$\frac{1}{4}x^2 = x \quad (x = 0 \text{ entfällt, da } \lg z = x > 0)$$

$$\frac{1}{4}x = 1 \Rightarrow x = 4$$

Rücksubstitution:

$$4 = \lg z \Rightarrow z = 10^4 = 10\,000$$

$$L = \{10\,000\}$$

K6/5 24 a) Korrektur: $\log_3 x = 9 \Leftrightarrow x = 3^9 \Leftrightarrow x = 19683$

b) Korrektur: $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

c) Hier wurde korrekt umgeformt.

d) Korrektur: $x^4 = \frac{625}{16} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{625} = \pm 2,5$ (Das „Vorzeichen“ $\pm$ fehlt vor der Wurzel.)

e) Korrektur: $\log_2 x = 64 \Leftrightarrow x = 2^{64} \Leftrightarrow x = 18446744073709551616$

f) Korrektur: $3^x = 64 \Leftrightarrow \log_3 64 = x \Leftrightarrow x \approx 3,79$

K3 25 a) $f: y = k \cdot a^x$

Mit dem Wertepaar (0|0,2) erhält man: $0,2 = k \cdot a^0 = k \cdot 1 = k$

Mit (0,5|0,17818) als weiterem Wertepaar ergibt sich:

$0,17818 = 0,2 \cdot a^{0,5}$, also $a = 0,79370$

$f: y = 0,2 \cdot 0,79370^x$

$f(1) = 0,15874$

$f(2) = 0,12599$

$f(2,5) = 0,11225$

$f(5) = 0,06300$

$f(10) = 0,01984$

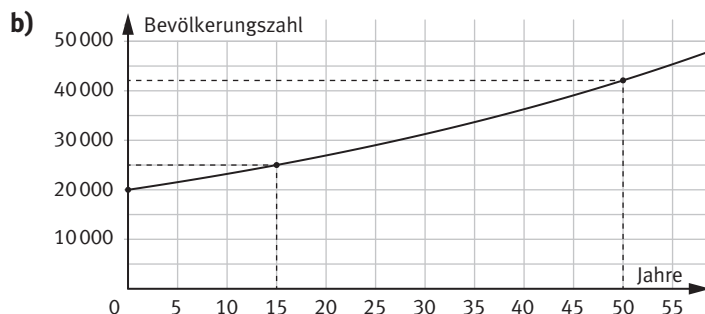
b) $0,1 = 0,2 \cdot 0,79370^x$

$0,5 = 0,79370^x$

$x \approx 3,000$

Die Halbwertszeit beträgt ca. 3 Minuten.

K3 26 a) Der Bevölkerungszuwachs kann durch die Funktion $f: y = 20000 \cdot 1,015^x$ beschrieben werden.



c) $f(50) = 20000 \cdot 1,015^{50} \approx 42000$

In 50 Jahren wird die Bevölkerung 42 000 Menschen umfassen.

d) $25000 = 20000 \cdot 1,015^x$

$1,25 = 1,015^x$

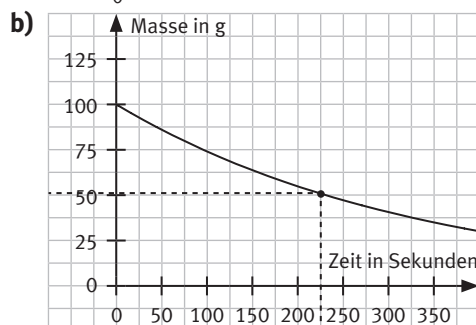
$x = \log_{1,015} 1,25$

$x \approx 15$

Nach 15 Jahren ist die Bevölkerungszahl auf 25 000 gestiegen.

K3 27 a) Bei 100 g Ausgangsmasse ergibt sich nach einer Sekunde $100 \text{ g} - 0,3 \text{ g} = 99,7 \text{ g}$.

Mit $m_0 = 100 \text{ g}$ und $t = 1$ erhält man $m(1) = 100 \cdot 0,997^1 \text{ g} = 99,7 \text{ g}$.



c) $50 = 100 \cdot 0,997^t$

$0,5 = 0,997^t$

$t = \log_{0,997} 0,5 \approx 230,7$

Die Halbwertszeit beträgt knapp 231 Sekunden.

d) Wenn von 100 g mehr als 95 % zerfallen sind, dann sind weniger als 5 g vorhanden.

$5 = 100 \cdot 0,997^t$

$0,05 = 0,997^t$

$t = \log_{0,997} 0,05 \approx 997$

$997 \text{ s} \approx 16,6 \text{ min}$

Nach 17 min sind mehr als 95 % zerfallen.

Zeit in s	0	50	100	150	200
Masse in g	100	86,05	74,05	63,72	54,83

Aufgaben zur Einzelarbeit

- 1 a) Da der Zuwachs pro Zeiteinheit mit 70 cm pro Tag gleichmäßig ist, handelt es sich hier um lineares Wachstum.
- b) Da der Zuwachs pro Zeiteinheit anteilig vom aktuellen Wert abhängt und der Zuwachs damit Jahr für Jahr größer wird, handelt es sich um exponentielles Wachstum.

2 a) $y = 200 \cdot 1,12^x$

c) $y = 20 \cdot 1,015^x$

b) $y = 5000 \cdot 1,035^x$

d) $y = 3 \cdot 1,2^x$

3 a) $y = 5600 \cdot 0,955^x$

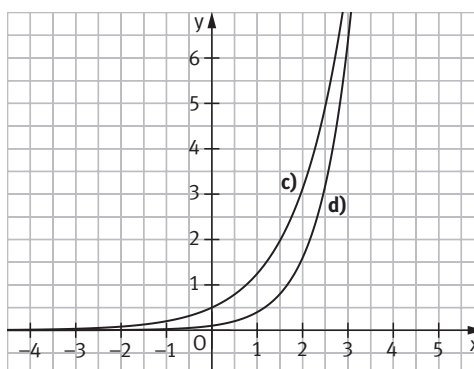
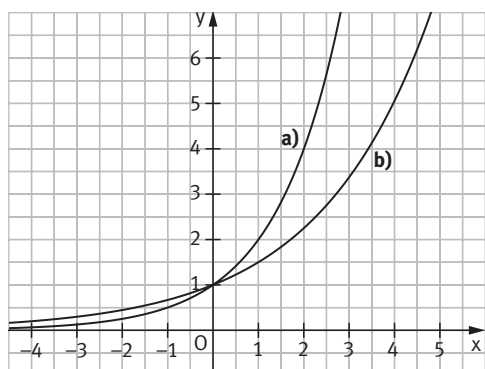
c) $y = 150 \cdot 0,965^x$

b) $y = 35\,000 \cdot 0,845^x$

d) $y = 3000 \cdot 0,87^x$

- 4

	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
a)	$y = 2^x$	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
b)	$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$	0,296	0,44	0,67	1	1,5	2,25	3,38
c)	$y = \frac{2,5^x}{2}$	0,032	0,08	0,2	0,5	1,25	3,13	7,81
d)	$y = 0,1 \cdot 4^x$	0,0016	0,006	0,025	0,1	0,4	1,6	6,4



- 5 a) P in $y = a^x$ eingesetzt ergibt $a = 2$, also $f: y = 2^x$.
b) P in $y = a^x$ eingesetzt ergibt $a = 0,7$, also $f: y = 0,7^x$.
c) P in $y = a^x$ eingesetzt ergibt $a = 0,5$, also $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
d) P in $y = a^x$ eingesetzt ergibt $a^0 = 1$; dies gilt für alle $a \in \mathbb{R}^+$.
Somit besteht die Lösung aus allen Funktionen des Typs $f: y = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.

- 6** Für $x = 0$ erhält man den jeweiligen Schnittpunkt mit der y -Achse.

a) $(0|0,3)$ **b)** $(0|13)$ **c)** $(0|\frac{1}{3})$

b) (0|13)

c) $\left(0 \mid \frac{1}{3}\right)$

d) $(0|5)$ **e)** $(0|0,3)$ **f)** $(0|\frac{3}{5})$

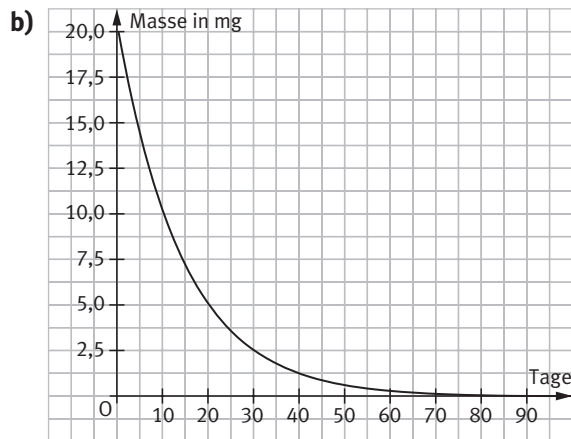
e) $(0 | 0,3)$

f) $\left(0 \mid \frac{3}{5}\right)$

K3

7 a)

Tage	0	10	20	30	40	50
Masse in mg	20	10	5	2,5	1,25	0,625



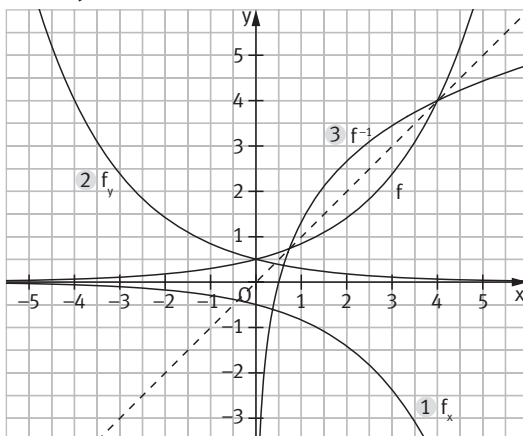
c) Beispielsweise durch Probieren erhält man $p \approx 6,7$.

K5

8 a) $P(0|0,5)$ in $f: y = k \cdot a^x$ eingesetzt liefert $k = 0,5$.
 $Q(4|4)$ in $f: y = 0,5 \cdot a^x$ eingesetzt liefert $a = 8^{0,25} \approx 1,68$.
 $f: y = 0,5 \cdot 8^{0,25x}$

b) $D = \mathbb{R}$ $W = \mathbb{R}^+$ Asymptote: $y = 0$

c) und d)



1 $f_x: y = -0,5 \cdot 8^{0,25x}$

2 $f_y: y = 0,5 \cdot 8^{0,25x}$

3 $f^{-1}: y = 4 \cdot \log_8(2x)$

KX

9 a) $\log_4 256 = 4$

b) $\log_3 27 = 3$

c) $\log_6 216 = 3$

d) $\log_{12} 12^9 = 9$

e) $\log_5 5^8 = 8$

f) $\log_4 1 = 0$

KX

10 $f(x) = 144 \text{ g} \cdot 0,5^x$

Eine Zeiteinheit x entspricht fünf Jahren.

a) 5 Jahre: $f(1) = 72 \text{ g}$

b) 10 Jahre: $f(2) = 36 \text{ g}$

c) 15 Jahre: $f(3) = 18 \text{ g}$

d) 30 Jahre: $f(6) = 2,25 \text{ g}$

e) 100 Jahre: $f(20) \approx 0,00014 \text{ g}$

- K3** 11 a) $50 \cdot 2^x = 1\,000\,000 \Leftrightarrow \log_2 20\,000 \approx 14,29$
 $14,29 \cdot 12 \text{ Stunden} = 171,48 \text{ Stunden} \approx 7 \text{ Tage } 4 \text{ Stunden}$

b) $f(x) = 50 \cdot 2^x$

Eine Zeiteinheit x entspricht 12 Stunden.

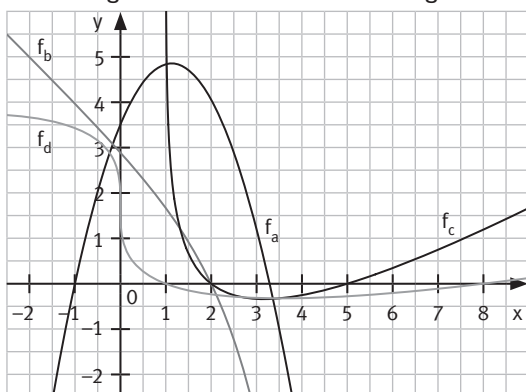
- c) Die Fläche des Teichs ist endlich, weshalb auch die Ressourcen endlich sind. Dadurch wird das Wachstum ab einem bestimmten Punkt gehemmt und ist somit nicht durchgängig exponentiell.

KX 12 $1200 \text{ €} \cdot 0,5^{2,5} \approx 212,13 \text{ €}$

KX 13 $0,2 = 0,85^x \Leftrightarrow \log_{0,85} 0,2 \approx 9,9$
 Die Kamera ist bis in knapp 10 m Tiefe einsatzfähig.

KX 14 a) $x = 3$ b) $x = 59\,049$ c) $x = 5$
 d) $x \approx -2,63$ e) $x = 343$ f) $x = 8$

- KX** 15 Man kann entweder die Graphen von Links- und Rechtsterm der Gleichungen zeichnen und die Schnittpunkte der beiden Graphen bestimmen. Alternativ kann man die Gleichungen auf eine Nullstellenbestimmung zurückführen. Das ist hier geschehen.

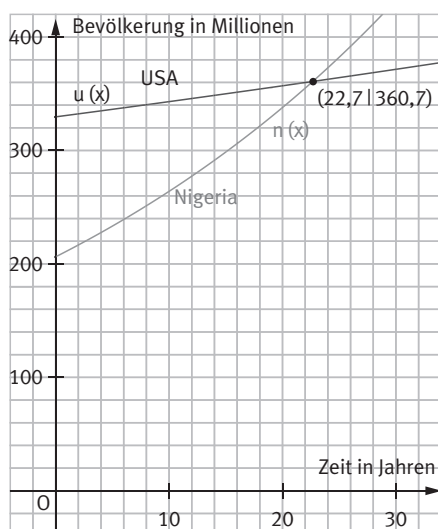


a) $x_1 = -1$ $x_2 = 3,29$
 b) $x = 2$
 c) $x_1 = 2$ $x_2 = 5$
 d) $x_1 = 1$ $x_2 = 8$

- KX** 16 Grafische Lösung:

Nigeria: $n(x) = 206,1 \cdot 1,025^x$

USA: $u(x) = 329,5 \cdot 1,004^x$



Rechnerische Lösung:

$206,1 \cdot 1,025^x = 329,5 \cdot 1,004^x \Leftrightarrow x \approx 22,7$

Nach ca. 23 Jahren leben in beiden Staaten gleich viele Menschen mit jeweils ungefähr 361 Millionen Menschen.

Aufgaben für Lernpartner

- KX** **A** Das ist falsch. Beispielsweise kann auch eine quadratische Funktion einen Wachstumsprozess darstellen.
- KX** **B** Das ist richtig.
- KX** **C** Das ist falsch. 1^x ist keine Exponentialfunktion, sondern eine konstante Funktion: Sie nimmt für jedes x den Wert 1 an.
- KX** **D** Das ist falsch. Eine Exponentialfunktion der Form $y = a^x$ nähert sich asymptotisch der Null.
- KX** **E** Das ist richtig.
- KX** **F** Für $a = 1$ ergibt sich: $y = k \cdot 1^x \Leftrightarrow y = k$
Man erhält als Graph die Gerade $y = k$, jedoch nicht den Graphen einer Exponentialfunktion.
- KX** **G** $\log_a a$ ist per Definition diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um a zu erhalten.
Mit $a^1 = a$ gilt: $\log_a a = 1$.
- KX** **H** Das ist richtig.

Wachstumsformen

- 1**
- a) lineare Abnahme:
Die Größe der Kerze verringert sich stündlich um 2 cm, die Abnahme ist dabei immer gleich hoch.
 - b) exponentielles Wachstum:
Die Salmonellen verdoppeln sich täglich, dabei geht die Verdoppelung immer von einem neuen Ausgangswert aus.
 - c) exponentielle Abnahme:
Die Abnahme innerhalb eines bestimmten Zeitraums geht immer von einem neuen Ausgangswert aus.
 - d) lineares Wachstum:
Der Druck nimmt alle 10 m um 1 bar zu, die Druckzunahme ist dabei immer gleich hoch.
 - e) exponentielles Wachstum:
Die Anzahl der Infizierten wächst wöchentlich um 2 Prozent, dabei geht das Wachstum immer von einem neuen Grundwert aus.
 - f) lineares Wachstum:
Alle zwei Tage legt das Huhn ein Ei, das Wachstum ist dabei immer gleich hoch.

2

Aussage	Prozess	Beispiel
„Der zugehörige Graph ist eine fallende Gerade.“	lineare Abnahme	1 a) Kerze
„Der Wachstumsfaktor ist kleiner als 1, aber größer als 0.“	exponentielle Abnahme	1 c) Uran-238
„Der Prozess kann durch eine Gleichung der Form $y = k \cdot a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$, $a > 1$ und $k \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.“	exponentielles Wachstum	1 b) Salmonellen und 1 e) Infizierte

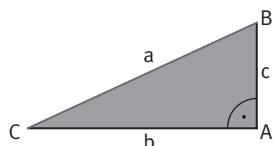
Logarithmus

- 3** „Der Logarithmus von b zur Basis a ist diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten.“
- 4** A $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ B $\log_9 \frac{1}{3} = -0,5$ C $\log_9 3 = 0,5$ D $\log_3 9 = 2$
- 5** $\log_2 \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 2 \cdot \log_2 \frac{1}{8} = 2 \cdot \log_2 2^{-3} = 2 \cdot (-3) = -6$ (Logarithmus einer Potenz)
 $\log_2 \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \log_2 \frac{1}{8^2} = \log_2 \frac{1}{64} = \log_2 1 - \log_2 64 = 0 - 6 = -6$ (Logarithmus eines Quotienten)
- 6** Sowohl Antwort C als auch Antwort D ist richtig:
 C: Die Umkehrung des Potenzierens ist das Wurzelziehen, wenn die Basis gesucht ist.
 D: Die Umkehrung des Potenzierens ist das Logarithmieren, wenn der Exponent gesucht ist.
 Für eine Quizshow ist die Frage mit diesen Antwortmöglichkeiten nicht geeignet, weil die Auswahl der Antwort nicht eindeutig möglich ist.

Startklar

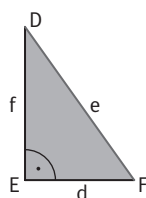
Satz des Pythagoras

1 a)



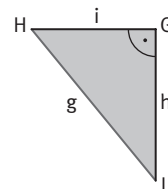
$$b^2 + c^2 = a^2$$

b)



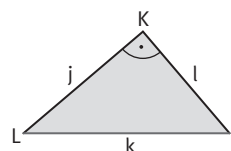
$$d^2 + f^2 = e^2$$

c)



$$i^2 + h^2 = g^2$$

d)



$$j^2 + l^2 = k^2$$

- 2 Lorena hat den Satz des Pythagoras angewendet, obwohl es sich bei dem abgebildeten Dreieck um ein spitzwinkliges Dreieck handelt. Der Satz des Pythagoras gilt nur für rechtwinklige Dreiecke.

Zusammenhänge im Dreieck

- 3 a) Bei den rechtwinkligen Dreiecken 2 und 5 lässt sich der Flächeninhalt direkt berechnen:

Bei rechtwinkligen Dreiecken wird die Grundseitenlänge durch eine der beiden Katheten dargestellt und die Höhe durch die andere Kathete. Damit gilt für die Dreiecke 2 und 5:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \text{Kathete}_1 \cdot \text{Kathete}_2$$

Beim gleichschenkligen Dreieck 3 lässt sich die Höhe h zur Grundseite $g = 7 \text{ cm}$ mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen, indem man das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke mit Hypotenuse $b = 4,8 \text{ cm}$ und einer Kathete mit $3,5 \text{ cm}$ zerlegt. Für die Höhe h erhält man:

$$h = \sqrt{4,8^2 - 3,5^2} \text{ cm} \approx 3,3 \text{ cm}$$

- b) Zur Berechnung des Flächeninhalts der Dreiecke 1 und 4 muss jeweils eine Dreieckshöhe bestimmt werden.

$$A_1 \approx \frac{1}{2} \cdot 6,5 \text{ cm} \cdot 1,9 \text{ cm} = 6,175 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 3,6 \text{ cm} = 9 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 7 \text{ cm} \cdot 3,3 \text{ cm} = 11,55 \text{ cm}^2$$

$$A_4 \approx \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ cm} \cdot 2,8 \text{ cm} = 11,2 \text{ cm}^2$$

$$A_5 = \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$$

4

x	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
α	28,5°	76,3°	60°	90°	18,9°	110°	91°
β	62,5°	90°	60°	19°	5,1°	35°	78°
γ	89°	13,7°	60°	71°	156°	35°	11°
Art	spitzwinklig	rechtwinklig	gleichseitig	rechtwinklig	stumpfwinklig	gleichschenkelig	stumpfwinklig

Bei d) können die Maße von α und γ auch vertauscht sein.

3 Trigonometrie

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:

Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K4

- Sabrina berechnet die Höhe h :

$$\tan 57^\circ = \frac{h}{50\text{ m}} \Rightarrow h = 50\text{ m} \cdot \tan 57^\circ \approx 77\text{ m}$$

Ergebnis: Der Dom ist rund 77 m hoch.

Ausblick

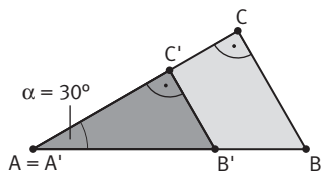
Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.

Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Entdecken

KX

- Es werden verschieden große rechtwinklige Dreiecke ABC und A'B'C' mit $\gamma = 90^\circ$ und $\alpha = 30^\circ$ gezeichnet, z. B. mit $a = 3 \text{ cm}$, $b \approx 5,2 \text{ cm}$ und $c = 6 \text{ cm}$ oder mit $a' = 2 \text{ cm}$, $b' \approx 3,5 \text{ cm}$ und $c' = 4 \text{ cm}$.



KX

KX

- Es sind unterschiedliche Beobachtungen möglich.
- Der Vergleich der Quotienten der Seitenlängen zeigt, dass die Quotienten konstant sind, so gilt im Beispiel mit ABC und A'B'C': $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = 0,5$ bzw. $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \approx 0,87$ und $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \approx 0,58$.

Nachgefragt

K1/6

- Da die Hypotenuse dem rechten und somit dem größten Winkel im Dreieck gegenüberliegt, ist sie die längste der drei Seiten im Dreieck. Somit ist bei beiden Quotienten (von Ankathete und Hypotenuse bzw. von Gegenkathete und Hypotenuse) der Nenner größer als der Zähler und der Wert des Bruchs damit stets kleiner als 1. Insofern ist sogar diese Formulierung passend: „Die Quotientenwerte sind stets kleiner als 1.“

K1/6

- Die Werte von Sinus und Kosinus ändern sich nicht, da bei der Verdoppelung, Halbierung, ... aller Seitenlängen der Faktor sowohl im Zähler als auch im Nenner des Bruchs steht und damit gekürzt werden kann:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{2a}{2c} = \frac{3a}{3c} = \dots$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{2b}{2c} = \frac{3b}{3c} = \dots$$

Aufgaben

K6/4

- 1 a) $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ b) $\sin \alpha = \frac{d}{f}$ $\cos \alpha = \frac{e}{f}$ $\tan \alpha = \frac{d}{e}$
 $\sin \beta = \frac{b}{c}$ $\cos \beta = \frac{a}{c}$ $\tan \beta = \frac{b}{a}$ $\sin \beta = \frac{e}{f}$ $\cos \beta = \frac{d}{f}$ $\tan \beta = \frac{e}{d}$
 c) $\sin \alpha = \frac{r}{t}$ $\cos \alpha = \frac{s}{t}$ $\tan \alpha = \frac{r}{s}$ d) $\sin \alpha = \frac{v}{u}$ $\cos \alpha = \frac{w}{u}$ $\tan \alpha = \frac{v}{w}$
 $\sin \beta = \frac{s}{t}$ $\cos \beta = \frac{r}{t}$ $\tan \beta = \frac{s}{r}$ $\sin \beta = \frac{w}{u}$ $\cos \beta = \frac{v}{u}$ $\tan \beta = \frac{w}{v}$

K5/6

2 a)

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin \alpha$	0,174	0,342	0,5	0,643	0,766	0,866	0,940	0,985	1
$\cos \alpha$	0,985	0,940	0,866	0,766	0,643	0,5	0,342	0,174	0
$\tan \alpha$	0,176	0,364	0,577	0,839	1,192	1,732	2,747	5,671	–

- b) Die Sinus- und die Kosinuswerte liegen für $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$ im Bereich $[0; 1]$.
 Dabei ist $\sin 10^\circ = \cos 80^\circ$; $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$; $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$; $\sin 40^\circ = \cos 50^\circ$; ...
 Die Tangenswerte steigen für $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$ monoton an und entsprechen dem Quotienten aus den Werten für Sinus und Kosinus:

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \sin \alpha : \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

K5/4 3 a) $\sin \alpha = \frac{a}{b} = \frac{5,5}{7,3} \approx 0,75$ $\cos \alpha = \frac{c}{b} = \frac{4,8}{7,3} \approx 0,66$ $\tan \alpha = \frac{a}{c} = \frac{5,5}{4,8} \approx 1,15$
 $\sin \gamma = \frac{c}{b} = \frac{4,8}{7,3} \approx 0,66$ $\cos \gamma = \frac{a}{b} = \frac{5,5}{7,3} \approx 0,75$ $\tan \gamma = \frac{c}{a} = \frac{4,8}{5,5} \approx 0,87$
b) $\sin \alpha = \frac{a}{b} = \frac{56}{65} \approx 0,86$ $\cos \alpha = \frac{c}{b} = \frac{33}{65} \approx 0,51$ $\tan \alpha = \frac{a}{c} = \frac{56}{33} \approx 1,70$
 $\sin \gamma = \frac{c}{b} = \frac{33}{65} \approx 0,51$ $\cos \gamma = \frac{a}{b} = \frac{56}{65} \approx 0,86$ $\tan \gamma = \frac{c}{a} = \frac{33}{56} \approx 0,59$

K5/4 4 a) $\beta = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$
 $\tan 50^\circ = \frac{c}{b} \Leftrightarrow c = b \cdot \tan 50^\circ = 7 \text{ cm} \cdot \tan 50^\circ \approx 8,3 \text{ cm}$
 $\cos 50^\circ = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a = \frac{b}{\cos 50^\circ} = \frac{7 \text{ cm}}{0,64} = 10,9 \text{ cm}$
b) $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{3,2 \text{ cm}}{8,7 \text{ cm}} \Rightarrow \alpha \approx 21,6^\circ$ $\beta \approx 90^\circ - 21,6^\circ = 68,4^\circ$
 $\cos \alpha = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = c \cdot \cos \alpha \approx 8,7 \text{ cm} \cdot \cos 21,6^\circ \approx 8,1 \text{ cm}$
c) $\sin \alpha = \frac{a}{b} = \frac{4 \text{ dm}}{8 \text{ dm}} = 0,5 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$ $\beta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$
 $\cos \alpha = \frac{c}{b} \Leftrightarrow c = b \cdot \cos \alpha = 8 \text{ dm} \cdot \cos 30^\circ \approx 6,9 \text{ dm}$

K5/2 5

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a in cm	6,1	8,2	4,9	6,4	12,6	5,6
b in cm	8,2	4,8	6,6	3,7	5,9	4,4
c in cm	5,5	6,6	8,2	7,4	11,1	7,1
α	48,0°	90,0°	36,6°	60,0°	90,0°	52,0°
β	90,0°	36,0°	53,4°	30,0°	28,0°	38,0°
γ	42,0°	54,0°	90,0°	90,0°	62,0°	90,0°

K3/5 6 $\tan 43^\circ = \frac{x \text{ m} + 10 \text{ m}}{37 \text{ m}} \Leftrightarrow x \text{ m} = 37 \text{ m} \cdot \tan 43^\circ - 10 \text{ m} \approx 34,5 \text{ m} - 10 \text{ m} = 24,5 \text{ m}$
Der Fluss ist 24,5 m breit.

Entdecken

KX

- Abbildung wie im Schulbuch

KX

- Lösungsmöglichkeit:

Bei gegebenem Winkel α entspricht im zugehörigen Dreieck mit dem Punkt $P(x|y)$ auf dem Einheitskreis der Sinuswert von α dem y-Wert von P und der Kosinuswert dem x-Wert von P, d. h.: $P(\cos \alpha | \sin \alpha)$

KX

- Es sind individuelle Beobachtungen und Begründungen möglich, z. B.:
 $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$

KX

- (Ohne Abbildung) Das Dreieck mit dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 45^\circ$ ist ein rechtwinklig gleichschenkeliges Dreieck, d. h.: $\sin \alpha = \cos \alpha$.

KX

- Lösungsmöglichkeit:

Der Punkt $Q(1 | \tan 30^\circ)$ liegt auf der Ursprungsgeraden $y = m \cdot x$, für die mit Einsetzen von $Q(1 | \tan 30^\circ)$ in die Geradengleichung $\tan 30^\circ = m$ gilt.

Nachgefragt

K1

- Die Aussage ist korrekt. Zu jedem $\varphi \geq 360^\circ$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass gilt: $\varphi = n \cdot 360^\circ + \alpha$, wobei $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ]$ ist; d. h.: Nach einer Umdrehung von 360° wiederholen sich die Werte für Sinus, Kosinus und Tangens.

KX

- Lösungsmöglichkeit:

Wie unter „Verstehen“ dargestellt, lässt sich jedem Winkelmaß α eine Steigung m zuordnen, die zur Ursprungsgeraden $y = mx$ gehört. Auf dieser Ursprungsgeraden liegt insbesondere der Punkt $P(\cos \alpha | \sin \alpha)$. Durch Einsetzen von P in die Geradengleichung $y = mx$ erhält man $m = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ und damit $m = \tan \alpha$.

Aufgaben

K4

1

Vorzeichen	I. Quadrant	II. Quadrant	III. Quadrant	IV. Quadrant
$\sin \alpha$	+	+	–	–
$\cos \alpha$	+	–	–	+
$\tan \alpha$	+	–	+	–
Verlauf von g	steigend	fallend	steigend	fallend

K5

2

- a)** 0,47 g: $y = 0,47x$ **b)** nicht def.
c) –1,73 g: $y = -1,73x$ **d)** 0,01 g: $y = 0,01x$
e) –0,04 g: $y = -0,04x$ **f)** –4,75 g: $y = -4,75x$
g) –0,84 g: $y = -0,84x$ **h)** 0 g: $y = 0$

K1

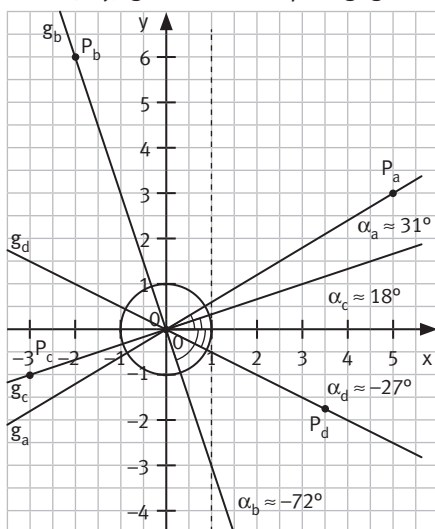
3

Für $\alpha = 90^\circ$ bzw. $\alpha = 270^\circ$ liegt der Punkt $P(x|y)$ auf der y-Achse, $P(0|1)$ bzw. $P(0|-1)$, die Ursprungsgerade durch P ist die y-Achse, diese kann nicht durch $y = mx$ angegeben werden. Insbesondere ist $\tan \alpha$ für $\alpha = 90^\circ$ bzw. $\alpha = 270^\circ$ nicht definiert, da in diesem Fall $\cos \alpha$ gleich null ist und der Bruch $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ für $\cos \alpha = 0$ nicht definiert ist.

- K5** 4 a) $\alpha \in]270^\circ, 360^\circ[$ IV. Quadrant z. B.: $\alpha = 300^\circ$
b) $\alpha \in]180^\circ, 270^\circ[$ III. Quadrant z. B.: $\alpha = 200^\circ$
c) $\alpha \in]0^\circ, 90^\circ[$ I. Quadrant z. B.: $\alpha = 30^\circ$
d) $\alpha \in]90^\circ, 180^\circ[$ II. Quadrant z. B.: $\alpha = 100^\circ$

- K5** 5 1 F 2 U 3 N 4 K 5 T 6 I 7 O 8 N Lösungswort: FUNKTION

- K5** 6 Mit $P(x|y)$ gilt für die Ursprungsgerade $g: y = mx$ bzw. für die Steigung: $m = \tan \alpha = \frac{y}{x}$.



- a) $m = \frac{3}{5} = 0,6$ $g: y = 0,6x$
 $\tan \alpha = 0,6$ $\alpha \approx 31^\circ$
b) $m = \frac{6}{-2} = -3$ $g: y = -3x$
 $\tan \alpha = -3$ $\alpha \approx -72^\circ$
c) $m = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$ $g: y = \frac{1}{3}x$
 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ $\alpha \approx 18^\circ$
d) $m = \frac{-1,75}{3,5} = -0,5$ $g: y = -0,5x$
 $\tan \alpha = -0,5$ $\alpha \approx -27^\circ$

- K5** 7 a) $m = 2,5$ $\tan^{-1} 2,5 \approx 68,2^\circ$

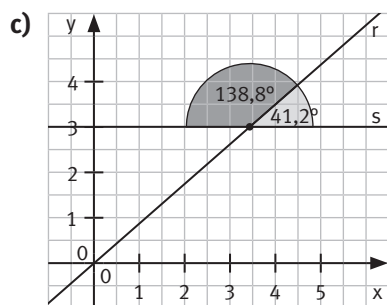
b) $m = 0,2$ $\tan^{-1} 0,2 \approx 11,3^\circ$

c) $m = -0,75$ $\tan^{-1} (-0,75) \approx 323,1^\circ$

d) $m = 0$ $\tan^{-1} 0 = 0^\circ$

- K5** 8 a)
 $\alpha_1 = \tan^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) \approx 33,7^\circ$
 $\alpha_2 = \tan^{-1} (-0,25) \approx -14^\circ$
 $\alpha = \alpha_1 + |\alpha_2| = 33,7^\circ + 14^\circ = 47,7^\circ$
 $\beta = 180^\circ - 47,7^\circ = 132,3^\circ$

- b)
 $\alpha_1 = \tan^{-1} (-5) \approx 78,7^\circ$
 $\alpha_2 = \tan^{-1} (-0,8) \approx 38,7^\circ$
 $\alpha = |\alpha_1| - \alpha_2 = 78,7^\circ - 38,7^\circ = 40^\circ$
 $\beta = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

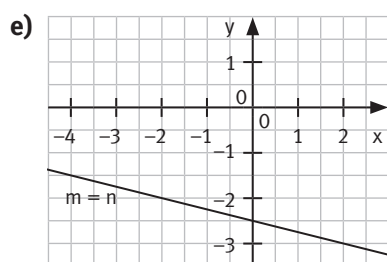


$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left(\frac{7}{8} \right) \approx 41,2^\circ$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} 0 \approx 0^\circ$$

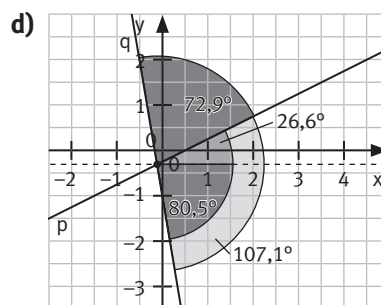
$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 41,2^\circ + 0^\circ = 41,2^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 41,2^\circ = 138,8^\circ$$



Geraden m und n: $m = n$

$$m_1 = m_2 = -0,25$$

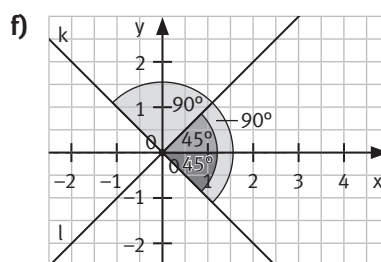


$$\alpha_1 = \tan^{-1} 0,5 \approx 26,6^\circ$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} (-6) \approx -80,5^\circ$$

$$\alpha = \alpha_1 + |\alpha_2| = 26,6^\circ + 80,5^\circ = 107,1^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 107,1^\circ = 72,9^\circ$$



$$\alpha_1 = \tan^{-1} 1 = 45^\circ$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} (-1) \approx -45^\circ$$

$$\alpha = \alpha_1 + |\alpha_2| = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

- K1** 9 In einem bei B rechtwinkligen Dreieck ABC gilt nach dem Satz des Pythagoras (Zeichnung 2):
- $$a^2 + c^2 = b^2$$

In der Zeichnung 1 gilt: $a = \sin \alpha$ und $c = \cos \alpha$

Eingesetzt ergibt sich: $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$

- K6** 10 a) Gesa löst die ihr bekannten Formeln jeweils nach $\cos \alpha$ und $\tan \alpha$ auf, ohne α vorher zu berechnen.

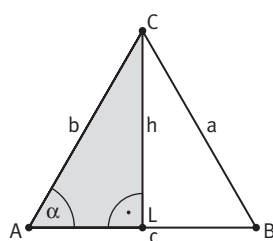
b)

	1	2	3	4	5	6	7
$\sin \alpha$	0,25	0,87	0,71	0,11	0,69	0,50	0,59
$\cos \alpha$	0,97	0,50	0,71	0,99	0,72	0,87	0,81
$\tan \alpha$	0,26	1,74	1,00	0,11	0,96	0,57	0,73

- KX** 11 Lösungsmöglichkeit:

Zu jeder Geraden $g: y = m_g x + b_g$ gibt es eine parallele Ursprungsgerade $g_0: y = m_0 x$, für die gilt: $m_0 = m_g$. Für g_0 lässt sich $m_0 = \tan \alpha$ bestimmen und damit auch m_g . Es gilt: $m_0 = m_g = \tan \alpha$.

- KX** 12



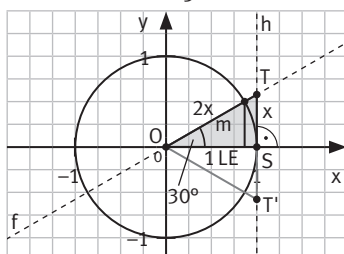
Im gleichseitigen Dreieck ABC haben alle drei Höhen die Länge h . Mit dem Lotfußpunkt L von C auf die Strecke AB erhält man das rechtwinklige Dreieck ALC mit der Hypotenusenlänge $b = a$ und den Dreiecksseiten der Länge $0,5a$ bzw. h . Im rechtwinkligen Dreieck ALC gilt: $\sin \alpha = \frac{h}{a}$.

Wissen

KX

- Das gleichschenklige Dreieck mit $\alpha = 60^\circ$ ist ein gleichseitiges Dreieck. Im gleichseitigen Dreieck mit $a = 1$ (Einheitskreis) gilt:

$$h^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \quad \text{bzw.} \quad h = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$
 Im gleichseitigen Dreieck mit $a = 1$ (Einheitskreis) gilt nach Aufgabe 12:
 $\sin 60^\circ = h = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- Die Sinuswerte für 0° und für 90° ergeben sich direkt anhand des Einheitskreises.
 Für 30° entspricht der Kosinuswert im Einheitskreis der Höhe $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; damit gilt mit Pythagoras:
 $\sin 30^\circ = \sqrt{1 - h^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$
 Für 45° entsprechen sich die Werte für Sinus und Kosinus, d. h.: $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$; mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich im Einheitskreis:
 $(\sin 45^\circ)^2 + (\sin 45^\circ)^2 = 1 \Leftrightarrow (\sin 45^\circ)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- Es sind individuelle Beobachtungen und Erklärungen möglich.
- Bei gegebenen Werten für Sinus und Kosinus erhält man die Tangenswerte mit $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
- Dass $\tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ gilt, sieht man anhand der Dreiecke OST und OT'T:



Wenn man das rechtwinklige Dreieck OST mit $\alpha = 30^\circ$ an der x-Achse spiegelt, erhält man das gleichseitige Dreieck OT'T mit $\alpha' = 60^\circ$ und der Seitenlänge $2x$ mit $x = |\overline{ST}|$. Im rechtwinkligen Dreieck OST mit $\alpha = 30^\circ$ und $|\overline{OS}| = 1 \text{ LE}$, $|\overline{ST}| = x \text{ LE}$ und $|\overline{OT}| = 2x \text{ LE}$ gilt für x :

$$x^2 = |\overline{OT}|^2 - |\overline{OS}|^2 = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$$

$$\text{d. h.: } 1 = 3x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{3}} = x \Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{3} = x$$

Der Wert für $\tan 45^\circ$ ergibt sich anhand des gleichseitigen Dreiecks OST mit $|\overline{OS}| = |\overline{ST}| = 1 \text{ LE}$.
 Der Wert für $\tan 0^\circ$ ist offensichtlich im „Dreieck“ OST mit $|\overline{ST}| = 0 \text{ LE}$. Dass der Tangens für $\alpha = 0^\circ$ nicht definiert ist, ist offensichtlich im „Dreieck“ OST mit $|\overline{OS}| = 0 \text{ LE}$.

Entdecken

KX

- Arbeit mit einem dynamischen Geometrieprogramm als Vorbereitung für das Ablesen der Werte.

KX

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos \alpha$	1	0,9	0,7	0,5	0	-0,5	-0,7	-0,9	-1
$\sin \alpha$	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0
$\tan \alpha$	0	0,6	1	1,7	-	-1,7	-1	-0,6	0

KX

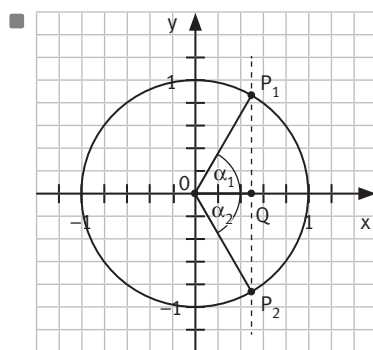
- Individuelle Beobachtungen und Erklärungen.

KX

α	0°	-30°	-45°	-60°	-90°	-120°	-135°	-150°	-180°
$\cos \alpha$	1	0,9	0,7	0,5	0	-0,5	-0,7	-0,9	-1
$\sin \alpha$	0	-0,5	-0,7	-0,9	-1	-0,9	-0,7	-0,5	0
$\tan \alpha$	0	-0,6	-1	-1,7	-	1,7	1	0,6	0

Nachgefragt

K6



Die Gleichung $\cos \alpha = 0,5$ hat im Bereich $]-180^\circ; 180^\circ[$ zwei Lösungen:
 $\cos \alpha = 0,5 \Leftrightarrow \alpha_1 = 60^\circ$ oder $\alpha_2 = -60^\circ$ (wegen $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$)

KX

- Es sind individuelle Beschreibungen möglich, u. a. mithilfe der Beobachtungen unter „Entdecken“ und der Supplementsbeziehungen bzw. der Symmetrie am Einheitskreis.

Aufgaben

K5

- 1 Anwenden der Supplementbeziehungen:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) \quad \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

a) $\sin 170^\circ = \sin(180^\circ - 10^\circ) \Rightarrow \alpha = 10^\circ$

b) $\sin 93,5^\circ = \sin(180^\circ - 86,5^\circ) \Rightarrow \alpha = 86,5^\circ$

c) $\sin 80^\circ = \cos(90^\circ - 80^\circ) \Rightarrow \alpha = 10^\circ$

d) $\cos 38^\circ = \sin(90^\circ - 52^\circ) \Rightarrow \alpha = 52^\circ$

e) $\cos 115^\circ = \cos(180^\circ - 65^\circ) \Rightarrow \alpha = 65^\circ$

f) $\cos 176^\circ = \cos(180^\circ - 4^\circ) \Rightarrow \alpha = 4^\circ$

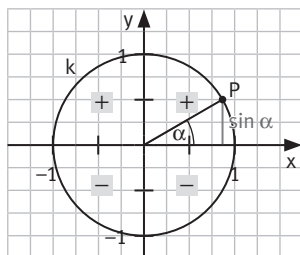
g) $\sin 101^\circ = \sin(180^\circ - 79^\circ) \Rightarrow \alpha = 79^\circ$

h) $\cos 92,7^\circ = \cos(180^\circ - 87,3^\circ) \Rightarrow \alpha = 87,3^\circ$

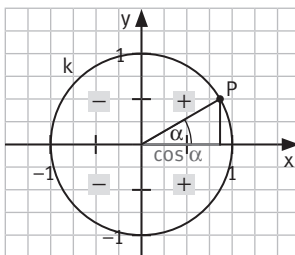
i) $\sin 10^\circ = \cos(90^\circ - 80^\circ) \Rightarrow \alpha = 80^\circ$

KX

- 2 a) $\sin(-30^\circ) = -0,5$ b) $\cos(-125^\circ) = -0,57$ c) $\tan(-89^\circ) = -57,29$ d) $\cos(-312^\circ) = 0,67$
 e) $\tan(-175^\circ) = 0,09$ f) $\sin(-234^\circ) = 0,81$ g) $\sin(-340^\circ) = 0,34$ h) $\cos(-45^\circ) = 0,71$

KX 3 a) Sinuswerte

b) Kosinuswerte



- K1** 4 a) Es gilt: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \Leftrightarrow \sin(90^\circ - \alpha) - \cos \alpha = 0$. Setzt man $\alpha = 11^\circ$ ein, so ergibt sich die gesuchte Beziehung:
 $\sin 79^\circ - \cos 11^\circ = 0$
- b) Es gilt: $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \Leftrightarrow \cos(90^\circ - \alpha) - \sin \alpha = 0$. Addiert man auf beiden Seiten der Gleichung $2 \cdot \sin \alpha$, so erhält man $\cos(90^\circ - \alpha) + \sin \alpha = 2 \cdot \sin \alpha$. Darin $\alpha = 64^\circ$ eingesetzt, ergibt die gesuchte Gleichung:
 $\cos 26^\circ + \sin 64^\circ = 2 \cdot \sin 64^\circ$

- K1** 5 a) Da $\cos 90^\circ = \cos 270^\circ = 0$, ist $\tan \alpha$ nicht definiert, da die Division mit 0 nicht erlaubt ist.

b) ① $\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$

② $\tan(180^\circ + \alpha) = \frac{\sin(180^\circ + \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$

③ $\tan(360^\circ - \alpha) = \frac{\sin(360^\circ - \alpha)}{\cos(360^\circ - \alpha)} = \frac{-\sin(\alpha - 360^\circ)}{\cos(\alpha - 360^\circ)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$

- K5** 6 a) $\alpha \in]90^\circ; 180^\circ[$ b) $\alpha \in]-90^\circ; 0^\circ[$ c) $\alpha \in]-180^\circ; -90^\circ[$

- K5** 7 a) $\sin 40^\circ = \sin 140^\circ$ $\sin(-140^\circ) = \sin(-40^\circ)$ $\sin(-50^\circ) = \sin(-130^\circ)$
 b) $\cos 140^\circ = \cos(-140^\circ)$ $\cos 40^\circ = \cos(-40^\circ)$ $\cos 80^\circ = \cos(-80^\circ)$
 c) $\tan 40^\circ = \tan(-140^\circ)$ $\tan(-40^\circ) = \tan 140^\circ$

- K5** 8 a) $\alpha_1 \approx 41,4^\circ; \alpha_2 \approx -41,4^\circ$ b) $\alpha_1 = 120^\circ; \alpha_2 = -120^\circ$ c) $\beta_1 \approx 72,5^\circ; \beta_2 \approx -72,5^\circ$
 d) $\gamma_1 \approx 33,4^\circ; \gamma_2 \approx 146,6^\circ$ e) $\gamma_1 = -30^\circ; \gamma_2 = -150^\circ$ f) $\beta = -90^\circ$
 g) $\alpha_1 \approx 54,5^\circ; \alpha_2 \approx -125,5^\circ$ h) $\alpha_1 \approx 31,0^\circ; \alpha_2 \approx -149,0^\circ$

- K5** 9 a) $\sin(\alpha - 35^\circ) = 0,7 \Rightarrow \alpha - 35^\circ = 44,4^\circ \Rightarrow \alpha_1 = 79,4^\circ$
 $\sin 44,4^\circ = \sin(180^\circ - 44,4^\circ) = \sin 135,6^\circ = \sin(170,6^\circ - 35^\circ) \Rightarrow \alpha_2 = 170,6^\circ$
 b) $\cos(\alpha - 25^\circ) = 0,5 \Rightarrow \alpha - 25^\circ = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 85^\circ$
 (es gibt keine weitere Lösung $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$)
 c) $\sin(\alpha + 35^\circ) = 0,4 \Rightarrow \alpha + 35^\circ = 23,6^\circ \Rightarrow \alpha_1 = -11,4^\circ \notin [0^\circ; 180^\circ]$
 $\sin 23,6^\circ = \sin(180^\circ - 23,6^\circ) = \sin 156,4^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 121,4^\circ$
 d) $\cos(2\alpha) = 0,5 \Rightarrow 2\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$
 (es gibt keine weitere Lösung $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$)
 e) $\sin(3\alpha + 10^\circ) = 0,9 \Rightarrow 3\alpha + 10^\circ = 64,2^\circ \Rightarrow \alpha_1 = 18,1^\circ$
 $\sin 64,2^\circ = \sin(180^\circ - 64,2^\circ) = \sin 115,8^\circ \Rightarrow 3\alpha + 10^\circ = 115,8^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 35,3^\circ$
 f) $\tan(\alpha - 30^\circ) = 1,1 \Rightarrow \alpha - 30^\circ = 47,7^\circ \Rightarrow \alpha = 77,7^\circ$
 (es gibt keine weitere Lösung $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$)

- K5** 10 a) ① $\tan 35^\circ \cdot \tan 55^\circ = 1$ ② $\tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ = 1$ ③ $\tan 20^\circ \cdot \tan 70^\circ = 1$

b) $\tan \beta \cdot \tan(90^\circ - \beta) = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\cos(90^\circ - \beta)} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = 1$

KX 11 Lösungsmöglichkeit:

a) $\sin(-78^\circ) = -\sin 78^\circ$

d) $-\cos 13^\circ = \cos(180^\circ - 13^\circ)$

g) $\sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ$

j) $\cos 72^\circ = \sin 18^\circ$

b) $\cos(90^\circ - 23^\circ) = \sin 23^\circ$

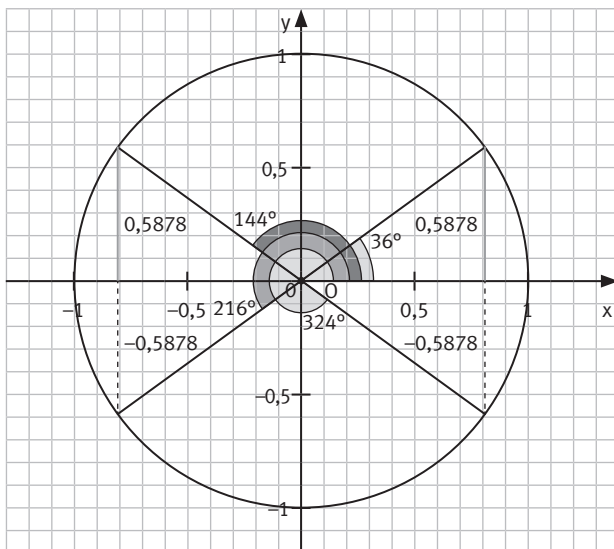
e) $\sin 55^\circ = \cos 35^\circ$

h) $\sin(90^\circ - 14^\circ) = \cos 14^\circ$

c) $-\tan 20^\circ = \tan(-20^\circ)$

f) $\tan(-310^\circ) = +\tan 50^\circ$

i) $\cos(-35^\circ) = +\cos 35^\circ$

KX 12 a)


$\sin 36^\circ = \sin 144^\circ \approx 0,5878$

$\sin 216^\circ = \sin 324^\circ \approx -0,5878$

Dieselben Winkel lassen sich natürlich auch jeweils anders angeben, also beispielsweise $324^\circ \hat{=} -36^\circ$.

Auf die systematische Angabe dieser Winkelmaße verzichten wir hier ebenso wie auf Winkelmaße, die über eine Voll-drehung hinausgehen.

b) Mit der Komplementbeziehung $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ ergibt sich:

$$\sin 36^\circ = \cos(90^\circ - 36^\circ) = \cos 54^\circ \approx 0,5878$$

Am Einheitskreis ergibt sich weiter:

$$\cos(180^\circ - 54^\circ) = \cos 126^\circ \approx -0,5878$$

$$\cos(180^\circ + 54^\circ) = \cos 234^\circ \approx -0,5878$$

$$\cos(360^\circ - 54^\circ) = \cos 306^\circ \approx -0,5878$$

c) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\cos 36^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 36^\circ} \approx 0,8090$$

K5 13 Vorgehen wie im Beispiel, d. h.: Bestimmen des Winkelmaßes mithilfe des Taschenrechners und Bestimmen weiterer Winkelmaße mithilfe der Supplementbeziehungen und der Periode der Funktion unter Beachtung der Grundmenge.

a) $L = \{30^\circ; 150^\circ\}$

b) $L = \{41,4^\circ\}$

c) $L = \{36,9^\circ; 143,1^\circ\}$

d) $L = \{20,7^\circ\}$

e) $L = \{153,4^\circ\}$

f) $L = \{143,1^\circ; 323,1^\circ\}$

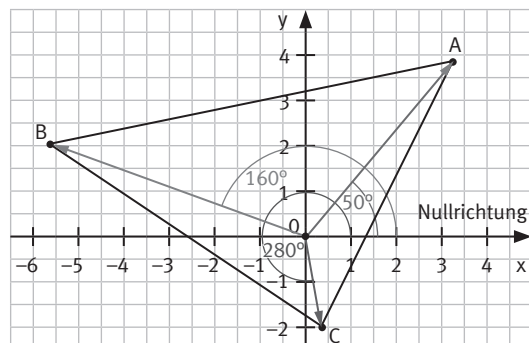
g) $L = \{-38,0^\circ; 52,0^\circ\}$

h) $L = \{123,7^\circ\}$

i) $L = \{-81,6^\circ; 98,4^\circ\}$

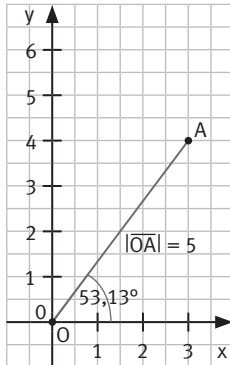
j) $L = \{25,8^\circ\}$

Vertiefung

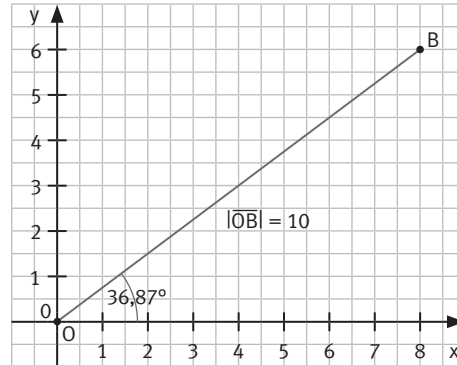
KX


KX

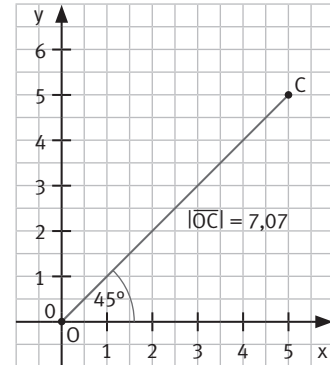
a) A(5|53°)



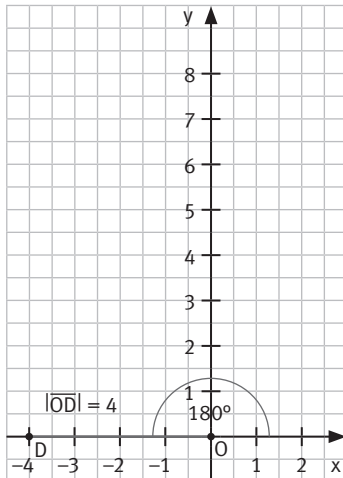
B(10|37°)



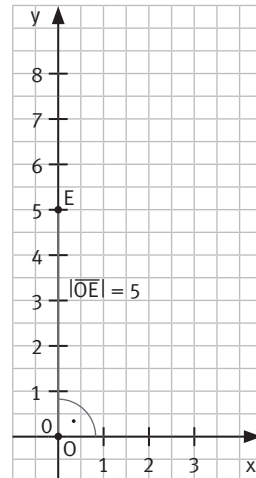
C(7,1|45°)



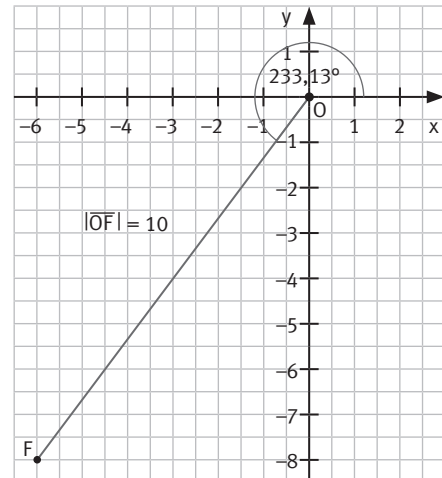
D(4|180°)



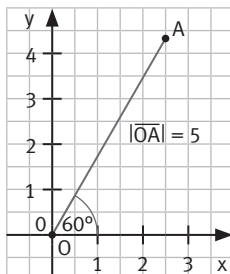
E(5|90°)



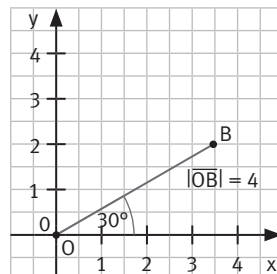
F(10|233°)



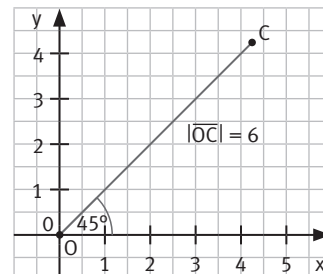
b) A(2,5|4,3)



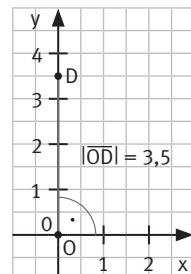
B(3,5|2)



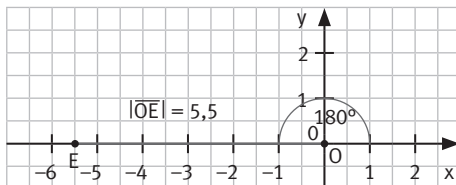
C(4,2|4,2)



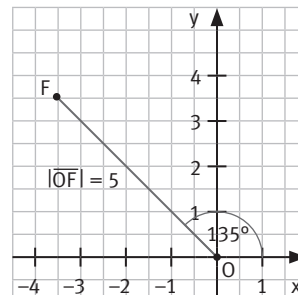
D(0|3,5)



E(-5,5|0)



F(-3,5|3,5)



Entdecken

KX

- Im beschriebenen Fall handelt es sich nicht um ein rechtwinkliges Dreieck, daher lassen sich die gesuchten Längen nicht direkt mittels Sinus, Kosinus oder Tangens bestimmen.

KX

- $h_a = 11,01 \text{ cm}$ bzw. $h_a = 11,01 \text{ m}$

KX

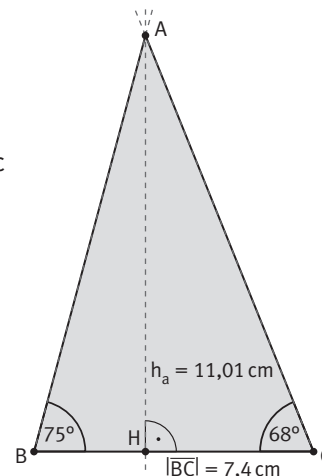
- Durch die Zerlegung des Dreiecks ABC in die Teildreiecke ABH und AHC mit dem Höhenfußpunkt H erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke. Mittels der Winkelmaße β und γ und der Länge a und durch Anwenden des Sinussatzes lassen sich das Winkelmaß α , die Seitenlängen b und c und damit schließlich die Höhe h_a bestimmen.

$$\alpha = 180^\circ - 75^\circ - 68^\circ = 37^\circ$$

$$b = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot a = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 37^\circ} \cdot 7,4 \text{ cm} \approx 11,9 \text{ cm}$$

$$c = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot a = \frac{\sin 68^\circ}{\sin 37^\circ} \cdot 7,4 \text{ cm} \approx 11,4 \text{ cm}$$

$$h_a = \sin \beta \cdot c = \sin 75^\circ \cdot 11,4 \text{ cm} \approx 11,01 \text{ cm}$$



Nachgefragt

K6

- Der Sinussatz für ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C lautet:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin 90^\circ} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = c \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{a}{c} \text{ und } \sin \beta = \frac{b}{c}$$

Das sind die bereits bekannten Zusammenhänge im rechtwinkligen Dreieck.

K1

- Die Aussage ist falsch. Bei gegebenen Seitenlängen des Dreiecks kann man die Maße der Innenwinkel zwar eindeutig bestimmen, jedoch nicht mithilfe des Sinussatzes, sondern mithilfe des Kosinussatzes. Für die Anwendung des Sinussatzes braucht man noch das Maß eines Winkels, um die dann noch fehlenden Winkelmaße zu bestimmen.

Aufgaben

K5

1 a) $\alpha = 46^\circ$

$$a = \sin 46^\circ \cdot \frac{10,8 \text{ cm}}{\sin 78^\circ} \approx 7,9 \text{ cm}$$

$$c = \sin 56^\circ \cdot \frac{10,8 \text{ cm}}{\sin 78^\circ} \approx 9,2 \text{ cm}$$

b) $\alpha = 92^\circ$

$$a = \sin 92^\circ \cdot \frac{3,2 \text{ cm}}{\sin 65^\circ} \approx 3,5 \text{ cm}$$

$$c = \sin 23^\circ \cdot \frac{3,2 \text{ cm}}{\sin 65^\circ} \approx 1,4 \text{ cm}$$

c) $\beta = 29^\circ$

$$b = \sin 29^\circ \cdot \frac{21,3 \text{ cm}}{\sin 108^\circ} \approx 10,9 \text{ cm}$$

$$a = \sin 43^\circ \cdot \frac{21,3 \text{ cm}}{\sin 108^\circ} \approx 15,3 \text{ cm}$$

K5

2 a) $\beta \approx 29,2^\circ; \gamma \approx 112,8^\circ$

b) $\alpha \approx 75,1^\circ; \beta \approx 59,9^\circ$

c) $\alpha \approx 15,8^\circ; \gamma \approx 151,2^\circ$

K5

3 $\sin \gamma = \frac{h_b}{a} \Leftrightarrow h_b = a \cdot \sin \gamma$

$$\sin \alpha = \frac{h_b}{c} \Leftrightarrow h_b = c \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow a \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \alpha \Leftrightarrow \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

K3

4 $a = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$

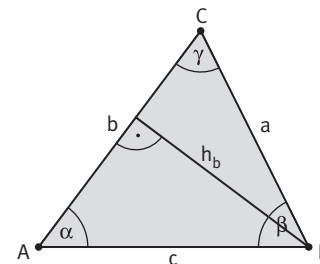
$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{a \cdot \sin \beta}{b} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{a \cdot \sin \gamma}{c} \right)$$

$$b = c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{b \cdot \sin \alpha}{a} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{b \cdot \sin \gamma}{c} \right)$$

$$c = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = b \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$\gamma = \sin^{-1} \left(\frac{c \cdot \sin \alpha}{a} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{c \cdot \sin \beta}{b} \right)$$



K5

5

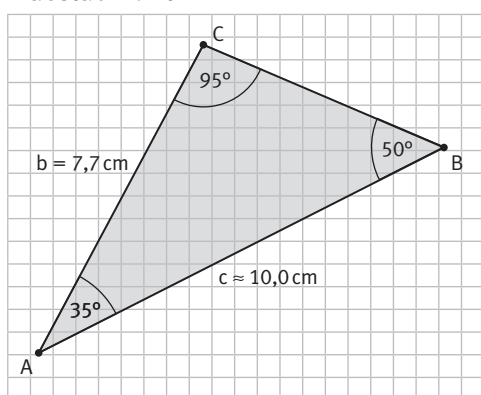
	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a	12 cm	$\approx 4,5$ dm	45,3 mm	5,1 m	$\approx 3,0$ cm	385 mm
b	$\approx 11,3$ cm	3,6 dm	$\approx 46,7$ mm	3,6 m	4,2 cm	≈ 857 mm
c	5,8 cm	$\approx 4,6$ dm	$\approx 9,7$ mm	$\approx 6,6$ m	$\approx 1,6$ cm	721 mm
α	$\approx 82,1^\circ$	$64,8^\circ$	76°	$50,5^\circ$	$36,3^\circ$	$26,5^\circ$
β	$\approx 69,3^\circ$	47°	92°	$\approx 33,0^\circ$	125°	$\approx 96,8^\circ$
γ	$28,6^\circ$	$68,2^\circ$	12°	$\approx 96,5^\circ$	$18,7^\circ$	$\approx 56,7^\circ$

KX

- 6 Er hat Recht. Bei einem nach dem WSW-Satz konstruierbaren Dreieck muss man zuerst über die Innenwinkelsumme das Maß des der Seite gegenüberliegenden Winkels ermitteln.

K5

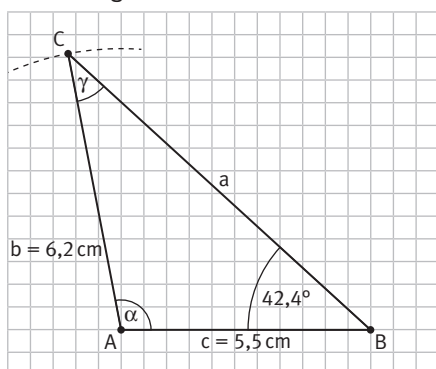
- 7 a) $\beta = 180^\circ - 35^\circ - 95^\circ = 50^\circ$ $c = b \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = 77 \text{ cm} \cdot \frac{\sin 95^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 100 \text{ cm}$
b) Maßstab 1 : 10



K5

- 8 (Ohne Planfigur und ohne Konstruktionsbeschreibung)

a)

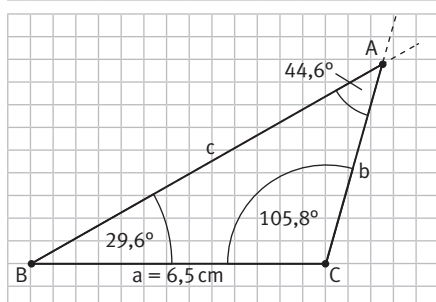


$$\sin \gamma = \frac{c}{b} \cdot \sin \beta = \frac{5,5 \text{ cm}}{6,2 \text{ cm}} \cdot \sin 42,4^\circ \Rightarrow \gamma \approx 36,7^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 42,4^\circ - 36,7^\circ = 100,9^\circ$$

$$a = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha = \frac{6,2 \text{ cm}}{\sin 42,4^\circ} \cdot \sin 100,9^\circ \approx 9,0 \text{ cm}$$

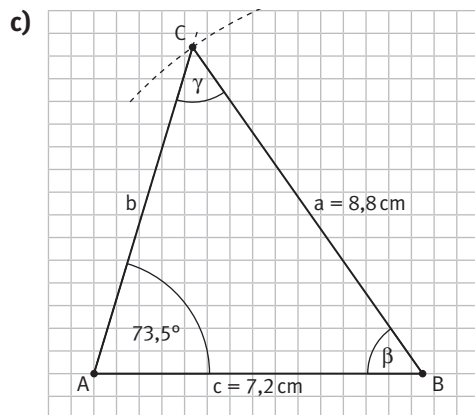
b)



$$\beta = 180^\circ - 44,6^\circ - 105,8^\circ = 29,6^\circ$$

$$b = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta = \frac{6,5 \text{ cm}}{\sin 44,6^\circ} \cdot \sin 29,6^\circ \approx 4,6 \text{ cm}$$

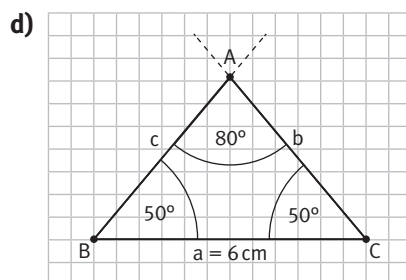
$$c = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \gamma = \frac{6,5 \text{ cm}}{\sin 44,6^\circ} \cdot \sin 105,8^\circ \approx 8,9 \text{ cm}$$



$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{a} \cdot c = \frac{\sin 73,5^\circ}{8,8 \text{ cm}} \cdot 7,2 \text{ cm} \Rightarrow \gamma \approx 51,7^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 73,5^\circ - 51,7^\circ = 54,8^\circ$$

$$b = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta = \frac{8,8 \text{ cm}}{\sin 73,5^\circ} \cdot \sin 54,8^\circ \approx 7,5 \text{ cm}$$

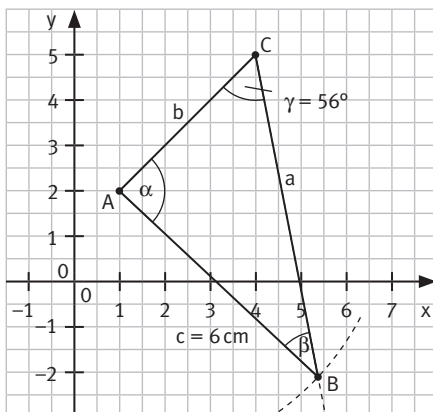


$$\beta = \gamma = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$$

$\Rightarrow$ gleichschenkliges Dreieck ABC

$$c = b = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta = \frac{6 \text{ cm}}{\sin 80^\circ} \cdot \sin 50^\circ \approx 4,7 \text{ cm}$$

K5 9 a) 1



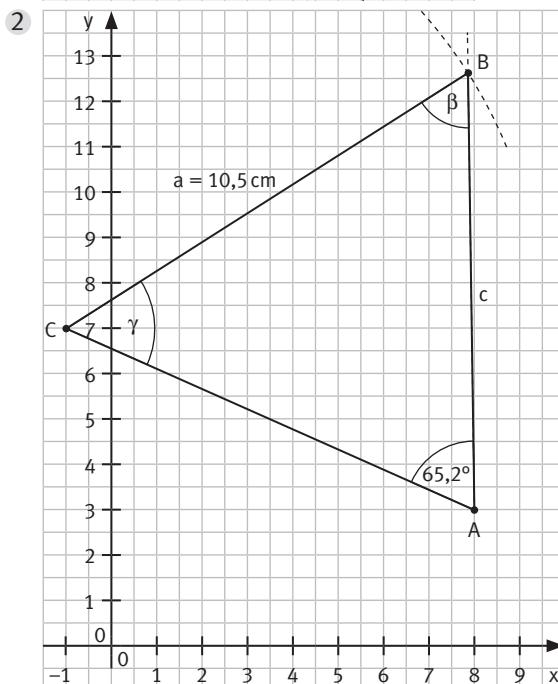
$$c = |\overline{AB}| = 6,0 \text{ cm}$$

$$b = |\overline{AC}| = \sqrt{(3 \text{ cm})^2 + (3 \text{ cm})^2} \approx 4,24 \text{ cm}$$

$$\sin \beta = \frac{\sin \gamma}{c} \cdot b = \frac{\sin 56^\circ}{6 \text{ cm}} \cdot 4,24 \text{ cm} \Rightarrow \beta \approx 35,9^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - \gamma - \beta = 180^\circ - 56^\circ - 35,9^\circ = 88,1^\circ$$

$$a = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha = \frac{4,24 \text{ cm}}{\sin 35,9^\circ} \cdot \sin 88,1^\circ \approx 7,23 \text{ cm}$$



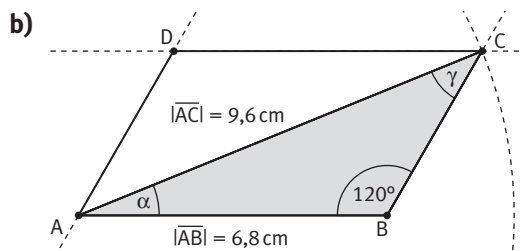
$$a = |\overline{BC}| = 10,5 \text{ cm}$$

$$b = |\overline{AC}| = \sqrt{(9 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2} \approx 9,85 \text{ cm}$$

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{a} \cdot b = \frac{\sin 65,2^\circ}{10,5 \text{ cm}} \cdot 9,85 \text{ cm} \Rightarrow \beta \approx 58,4^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 65,2^\circ - 58,4^\circ = 56,4^\circ$$

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \gamma = \frac{10,5 \text{ cm}}{\sin 65,2^\circ} \cdot \sin 56,4^\circ \approx 9,6 \text{ cm}$$



Zur Bestimmung der Länge von $\overline{BC}$ im Parallelogramm genügt es, das Dreieck ABC zu betrachten mit $c = |\overline{AB}| = 6,8 \text{ cm}$; $b = |\overline{AC}| = 9,6 \text{ cm}$; $\beta = 120^\circ$.

Im Dreieck ABC gilt:

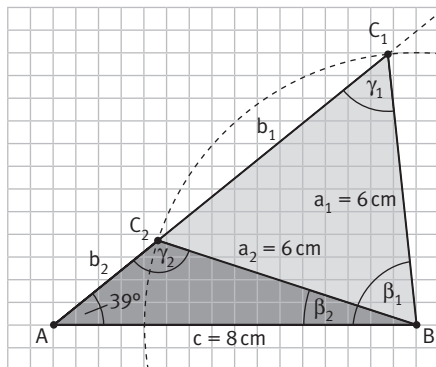
$$\sin \gamma = \frac{\sin \beta}{b} \cdot c = \frac{\sin 120^\circ}{9,6 \text{ cm}} \cdot 6,8 \text{ cm} \Rightarrow \gamma \approx 37,8^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 120^\circ - 37,8^\circ = 22,2^\circ$$

$$|\overline{BC}| = a = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha = \frac{9,6 \text{ cm}}{\sin 120^\circ} \cdot \sin 22,2^\circ \approx 4,2 \text{ cm}$$

K1

10 a)



Der Winkel mit dem Winkelmaß $\alpha = 39^\circ$ liegt nicht der längeren der beiden gegebenen Dreiecksseiten gegenüber. Daher gibt es zwei Schnittpunkte, C_1 und C_2 , des von A ausgehenden Schenkels mit dem Kreis um B mit Radius $r = 6 \text{ cm}$.

b) $\frac{6 \text{ cm}}{\sin 39^\circ} = \frac{8 \text{ cm}}{\sin \gamma} \Leftrightarrow \sin \gamma = \frac{8 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} \cdot \sin 39^\circ \Rightarrow \gamma_1 \approx 57,0^\circ; \gamma_2 = 180^\circ - 57,0^\circ = 123,0^\circ$

Wegen der Supplementbeziehung $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ gibt es zu jedem Winkel zwischen 0° und 180° einen weiteren Winkel mit dem gleichen Sinuswert.

c) $\beta_1 = 180^\circ - 39^\circ - 57,0^\circ = 84^\circ$

$$b_1 = |\overline{AC}_1| = \frac{6 \text{ cm}}{\sin 39^\circ} \cdot \sin 84^\circ \approx 9,5 \text{ cm}$$

$$\beta_2 = 180^\circ - 39^\circ - 123,0^\circ = 18^\circ$$

$$b_2 = |\overline{AC}_2| = \frac{6 \text{ cm}}{\sin 39^\circ} \cdot \sin 18^\circ \approx 2,9 \text{ cm}$$

KX

11 a) ε ist der Gegenwinkel der kleineren Seite, also ist der Kongruenzsatz SsW nicht anwendbar, d. h. das Lösungsdreieck muss nicht eindeutig sein, falls es existiert.

$$\frac{\sin \gamma}{c} = \frac{\sin \varepsilon}{e} \Leftrightarrow \sin \gamma = \frac{c}{e} \cdot \sin \varepsilon \quad \sin \gamma = \frac{8,3}{7,2} \cdot \sin 75^\circ \approx 1,1$$

Da Sinuswerte über 1 nicht möglich sind, gibt es kein solches Dreieck.

b) δ ist der Gegenwinkel der kleineren Seite, also ist der Kongruenzsatz SsW nicht anwendbar, d. h. das Lösungsdreieck muss nicht eindeutig sein, falls es existiert.

$$\frac{\sin \varepsilon}{e} = \frac{\sin \delta}{d} \Leftrightarrow \sin \varepsilon = \frac{e}{d} \cdot \sin \delta \quad \sin \varepsilon = \frac{9,3}{6,8} \cdot \sin 46^\circ \approx 0,98$$

$$\varepsilon_1 \approx 79,7^\circ \quad \varepsilon_2 \approx 180^\circ - 79,7^\circ = 100,3^\circ$$

c) γ ist der Gegenwinkel der größeren Seite, also ist der Kongruenzsatz SsW anwendbar, d. h. das Lösungsdreieck ist eindeutig.

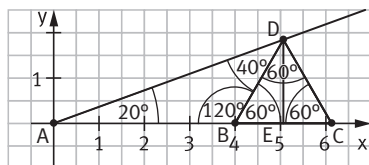
$$\frac{\sin \delta}{d} = \frac{\sin \gamma}{c} \Leftrightarrow \sin \delta = \frac{d}{c} \cdot \sin \gamma \quad \sin \delta = \frac{5}{8} \cdot \sin 52^\circ \approx 0,49$$

$$\delta \approx 29,5^\circ$$

d) Da $c = e$ ist, ist das Dreieck gleichschenkelig. Damit müsste auch $\varepsilon = \gamma$ gelten. Dies ist jedoch im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90^\circ$ nicht möglich; es gibt kein solches Dreieck.

K5

12



a) $\frac{\sin 40^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{4 \text{ cm}}{|\overline{AD}|} \Rightarrow |\overline{AD}| = 4 \text{ cm} \cdot \frac{\sin 120^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 5,4 \text{ cm}$

b) $\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{4 \text{ cm}}{|\overline{BD}|} \Rightarrow |\overline{BD}| = 4 \text{ cm} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 2,1 \text{ cm}$

$$\sin 60^\circ = \frac{|\overline{DE}|}{|\overline{BD}|} \Rightarrow |\overline{DE}| = 2,1 \text{ cm} \cdot \sin 60^\circ \approx 1,8 \text{ cm}$$

Das Dreieck BCD ist gleichseitig (zwei Innenwinkel der Größe $3\alpha = 60^\circ$) mit Seitenlänge 2,1 cm.

$$x_D = 4 \text{ cm} + 1,05 \text{ cm} = 5,05 \text{ cm} \approx 5,1 \text{ cm}$$

$$y_D = 1,8 \text{ cm}$$

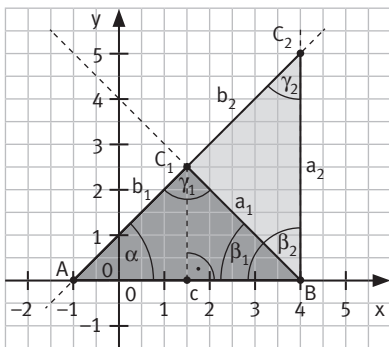
$$D(5,1 | 1,8)$$

$$x_C = 4 \text{ cm} + 2,1 \text{ cm} = 6,1 \text{ cm}$$

$$y_C = 0$$

$$C(6,1 | 0)$$

K5 13 a)


Für beide Dreiecke ist $A(-1|0)$ und $c = 5 \text{ cm}$.

Da g die Steigung $m = 1$ besitzt, ist $\alpha = 45^\circ$.

Daraus folgt:

$$\gamma_1 = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ \text{ und } a_1 = b_1$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ \text{ und } a_2 = c$$

$$\sin 45^\circ = \frac{a_1}{5 \text{ cm}} \Leftrightarrow a_1 = 5 \text{ cm} \cdot \sin 45^\circ \approx 3,5 \text{ cm} = b_1$$

$$a_2 = c = 5 \text{ cm} \text{ und } \sin 45^\circ = \frac{5 \text{ cm}}{b_2} \Leftrightarrow b_2 = \frac{5 \text{ cm}}{\sin 45^\circ} \approx 7,1 \text{ cm}$$

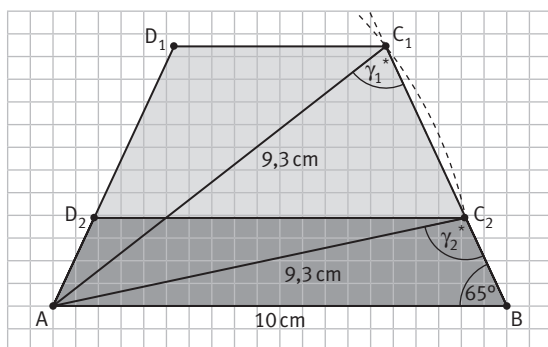
$$C_1(1,5|2,5) \text{ und } a_1 = b_1 = 3,5 \text{ cm}$$

$$C_2(4|5) \text{ und } a_2 = 5 \text{ cm}, b_2 = 7,1 \text{ cm}$$

$$b) A_1 = 0,5 \cdot c \cdot h_1 = 0,5 \cdot 5 \text{ cm} \cdot 2,5 \text{ cm} = 6,25 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 0,5 \cdot c \cdot a_2 = 0,5 \cdot 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 12,5 \text{ cm}^2$$

K5 14



$$\frac{\sin \gamma^*}{10 \text{ cm}} = \frac{\sin 65^\circ}{9,3 \text{ cm}} \Rightarrow \sin \gamma^* = 10 \text{ cm} \cdot \frac{\sin 65^\circ}{9,3 \text{ cm}}$$

$$\gamma_1^* \approx 77,0^\circ$$

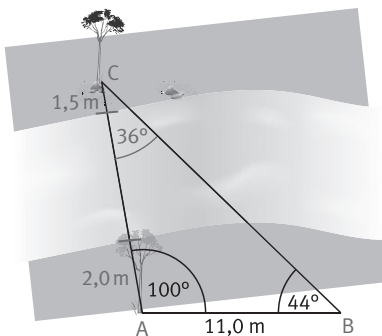
$$\gamma_2^* = 180^\circ - 77,0^\circ = 103^\circ$$

Durch weitere Anwendung des Sinussatzes erhält man folgende Lösungen:

$$b_1 = d_1 \approx 6,3 \text{ cm} \quad c_1 \approx 4,7 \text{ cm}$$

$$b_2 = d_2 \approx 2,1 \text{ cm} \quad c_2 \approx 8,2 \text{ cm}$$

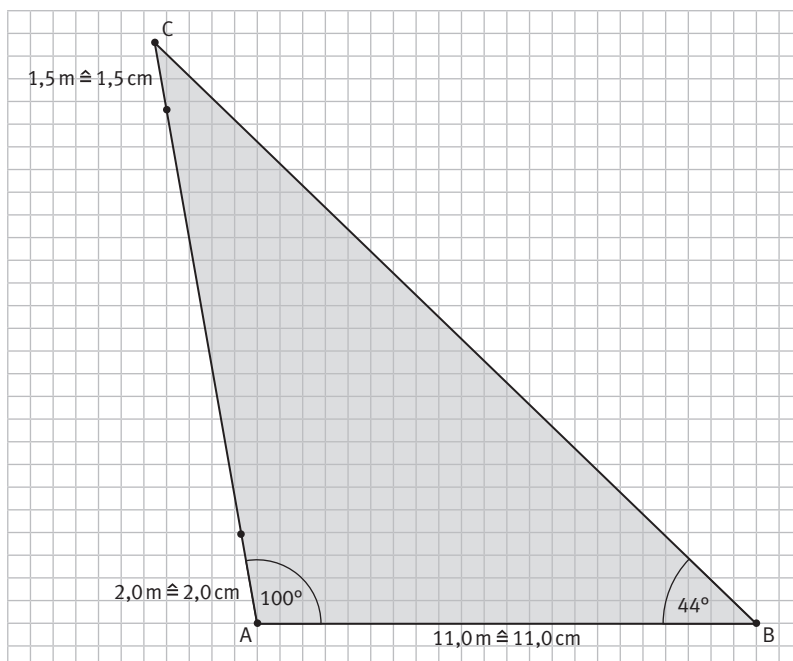
K2 15 a)



$$\frac{\sin 36^\circ}{\sin 44^\circ} = \frac{11,0 \text{ m}}{|AC|} \Rightarrow |AC| = 11,0 \text{ m} \cdot \frac{\sin 44^\circ}{\sin 36^\circ} \approx 13,0 \text{ m}$$

Die Flussbreite beträgt $(13,0 - 2,0 - 1,5) \text{ m} = 9,5 \text{ m}$.

b) Maßstab 1 : 100



Wissen

K1

- Die Maßgleichheit kann mit einem dynamischen Geometrieprogramm schnell festgestellt werden.
- 1 $\frac{c}{2}$ ist eine Kathete, r_u die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ADM.
Für das eingezeichnete γ ergibt sich somit: $\sin \gamma = \frac{\frac{c}{2}}{r_u}$, also $\sin \gamma = \frac{c}{2 \cdot r_u}$.
- 2 Aus $\sin \gamma = \frac{c}{2 \cdot r_u}$ folgt nach Äquivalenzumformung $2r_u = \frac{c}{\sin \gamma}$.
Daraus ergeben sich nach dem Sinussatz auch die anderen Zusammenhänge.
- a) $a \approx 8,7$ m; $\alpha \approx 75,0^\circ$; $\beta \approx 39,3^\circ$; $\gamma \approx 65,7^\circ$
- b) $b \approx 5,8$ m; $\alpha \approx 46,4^\circ$; $\beta \approx 92,7^\circ$; $\gamma \approx 40,9^\circ$
- c) $a \approx 10,2$ m; $b \approx 7,7$ m; $c \approx 8,4$ m; $\beta = 48^\circ$
- d) $a = b = c = 17,3$ m; $\alpha = 60^\circ$

Entdecken

KX

- Lösungsmöglichkeit:
Die Anwendung des Sinussatzes setzt voraus, dass zusätzlich zu den angegebenen Längen mindestens ein Winkelmaß gegeben ist (bzw. sich berechnen lässt) und zu den Seiten mit angegebener Länge auch das Maß eines Gegenwinkels gegeben ist.
- Es sind individuelle Lösungen möglich.
- Individuelle Antwort, analog zur Herleitung für $a^2 = b^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \alpha$

KX

KX

Nachgefragt

K1

- Nach dem Kongruenzsatz SSS kann ein Dreieck bei gegebenen Seitenlängen eindeutig konstruiert werden. Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck gilt: $\alpha, \beta, \gamma \in]0^\circ; 180^\circ[$.
Damit liefert der Kosinussatz eindeutige Werte für α, β und γ :

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

K1

- Die Aussage ist richtig: Für $\gamma = 90^\circ$ entspricht der Kosinussatz dem Satz des Pythagoras:
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 90^\circ \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$

Aufgaben

K1

- Man kann das Quadrat der gesuchten Seite a, b oder c direkt berechnen, indem man die gegebenen Größen in die entsprechende Formel einsetzt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Anschließend wird zur Ermittlung der gesuchten Seitenlänge die Wurzel gezogen.

- $a^2 = (4,3 \text{ cm})^2 + (6,3 \text{ cm})^2 - 2 \cdot 4,3 \text{ cm} \cdot 6,3 \text{ cm} \cdot \cos 36,4^\circ \Rightarrow a \approx 3,8 \text{ cm}$
- $b^2 = (71 \text{ mm})^2 + (48 \text{ mm})^2 - 2 \cdot 71 \text{ mm} \cdot 48 \text{ mm} \cdot \cos 121,4^\circ \Rightarrow b \approx 104,4 \text{ mm}$
- $c^2 = (5,8 \text{ cm})^2 + (8,1 \text{ cm})^2 - 2 \cdot 5,8 \text{ cm} \cdot 8,1 \text{ cm} \cdot \cos 63^\circ \Rightarrow c \approx 7,5 \text{ cm}$
- $c^2 = (4,2 \text{ cm})^2 + (3,8 \text{ cm})^2 - 2 \cdot 4,2 \text{ cm} \cdot 3,8 \text{ cm} \cdot \cos 104^\circ \Rightarrow c \approx 6,3 \text{ cm}$
- $b^2 = (3,8 \text{ cm})^2 + (4,5 \text{ cm})^2 - 2 \cdot 3,8 \text{ cm} \cdot 4,5 \text{ cm} \cdot \cos 35^\circ \Rightarrow b \approx 2,6 \text{ cm}$
- $a^2 = (7 \text{ cm})^2 + (14 \text{ cm})^2 - 2 \cdot 7 \text{ cm} \cdot 14 \text{ cm} \cdot \cos 58^\circ \Rightarrow a \approx 11,9 \text{ cm}$

K5

- Da alle drei Seitenlängen bekannt sind, berechnet Saskia im ersten Schritt mit dem Kosinussatz das Maß des Winkels γ . Im zweiten Schritt berechnet sie mithilfe des Sinussatzes das Maß des Winkels α . Das Maß des Winkels β ermittelt sie im dritten Schritt durch die Winkelsumme im Dreieck.
 - $\alpha \approx 54,7^\circ; \beta \approx 85,9^\circ; \gamma \approx 39,4^\circ$
 - $\alpha \approx 38,6^\circ; \beta \approx 17,3^\circ; \gamma \approx 124,1^\circ$
 - $\alpha \approx 101,2^\circ; \beta \approx 53,5^\circ; \gamma \approx 25,3^\circ$

K6 3 Es sind Abweichungen aufgrund von Rundungsungenauigkeiten möglich.

- a)** Kosinussatz: $\cos \alpha = \frac{(10,5 \text{ cm})^2 + (15,1 \text{ cm})^2 - (7,4 \text{ cm})^2}{2 \cdot 10,5 \text{ cm} \cdot 15,1 \text{ cm}} \Rightarrow \alpha \approx 26,6^\circ$
 Sinussatz: $\sin \beta = b \cdot \frac{\sin \alpha}{a} = 10,5 \text{ cm} \cdot \frac{\sin 26,6^\circ}{7,4 \text{ cm}} \Rightarrow \beta \approx 39,5^\circ$
 Winkelsumme: $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 180^\circ - 26,6^\circ - 39,5^\circ = 113,9^\circ \Rightarrow \gamma \approx 113,9^\circ$
- b)** Kosinussatz: $\cos \alpha = \frac{(8,3 \text{ cm})^2 + (6,5 \text{ cm})^2 - (12,7 \text{ cm})^2}{2 \cdot 8,3 \text{ cm} \cdot 6,5 \text{ cm}} \Rightarrow \alpha \approx 117,7^\circ$
 Sinussatz: $\sin \beta = b \cdot \frac{\sin \alpha}{a} = 8,3 \text{ cm} \cdot \frac{\sin 117,7^\circ}{12,7 \text{ cm}} \Rightarrow \beta \approx 35,4^\circ$
 Winkelsumme: $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 180^\circ - 117,7^\circ - 35,4^\circ = 26,9^\circ \Rightarrow \gamma \approx 26,9^\circ$
- c)** Kosinussatz: $\cos \beta = \frac{(3,8 \text{ cm})^2 + (5,5 \text{ cm})^2 - (7,2 \text{ cm})^2}{2 \cdot 3,8 \text{ cm} \cdot 5,5 \text{ cm}} \Rightarrow \beta \approx 99,8^\circ$
 Sinussatz: $\sin \alpha = a \cdot \frac{\sin \beta}{b} = 3,8 \text{ cm} \cdot \frac{\sin 99,8^\circ}{7,2 \text{ cm}} \Rightarrow \alpha \approx 31,3^\circ$
 Winkelsumme: $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 180^\circ - 31,3^\circ - 99,8^\circ = 48,9^\circ \Rightarrow \gamma \approx 48,9^\circ$
- d)** Wegen $b^2 + c^2 = a^2$ ist das Dreieck rechtwinklig bei A. $\Rightarrow \alpha = 90^\circ$
 Sinussatz: $\sin \beta = b \cdot \frac{\sin \alpha}{a} = 4 \text{ cm} \cdot \frac{\sin 90^\circ}{5 \text{ cm}} \Rightarrow \beta \approx 53,1^\circ$
 Winkelsumme: $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - 53,1^\circ \approx 36,9^\circ \Rightarrow \gamma \approx 36,9^\circ$

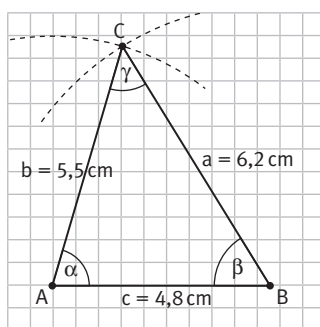
K5 4 $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Der Aufbau ist immer gleich: Das Quadrat der Länge der dem gesuchten Winkel gegenüberliegenden Seite wird von der Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen abgezogen. Dieser Wert wird durch das doppelte Produkt der beiden anderen Seitenlängen dividiert.

K5 5

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a	3,8 cm	18,1 cm	87,3 km	812 m	1,2 dm	3,3 cm
b	7,4 cm	21,2 cm	123,5 km	706 m	2,3 dm	4,4 cm
c	5,6 cm	34,5 cm	47,6 km	582 m	3,4 dm	5,5 cm
α	30,1°	26,2°	32,7°	77,5°	9,9°	36,9°
β	102,2°	31,2°	130,2°	58,1°	19,1°	53,1°
γ	47,7°	122,6°	17,1°	44,4°	151,0°	90,0°

K5 6 a)

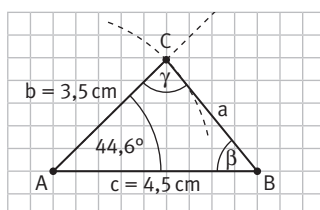


$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(5,5 \text{ cm})^2 + (4,8 \text{ cm})^2 - (6,2 \text{ cm})^2}{2 \cdot 5,5 \text{ cm} \cdot 4,8 \text{ cm}} \Rightarrow \alpha \approx 73,7^\circ$$

$$\sin \beta = b \cdot \frac{\sin \alpha}{a} = 5,5 \text{ cm} \cdot \frac{\sin 73,7^\circ}{6,2 \text{ cm}} \Rightarrow \beta \approx 58,4^\circ$$

$$\gamma \approx 180^\circ - 73,7^\circ - 58,4^\circ = 47,9^\circ \Rightarrow \gamma \approx 47,9^\circ$$

b)

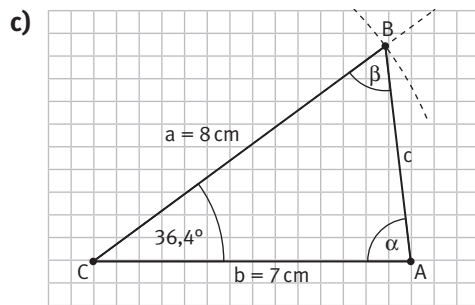


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$= (3,5 \text{ cm})^2 + (4,5 \text{ cm})^2 - 2 \cdot 3,5 \text{ cm} \cdot 4,5 \text{ cm} \cdot \cos 44,6^\circ \Rightarrow a \approx 3,2 \text{ cm}$$

$$\sin \beta = b \cdot \frac{\sin \alpha}{a} = 3,5 \text{ cm} \cdot \frac{\sin 44,6^\circ}{3,2 \text{ cm}} \Rightarrow \beta \approx 50,2^\circ$$

$$\gamma \approx 180^\circ - 44,6^\circ - 50,2^\circ = 85,2^\circ \Rightarrow \gamma \approx 85,2^\circ$$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

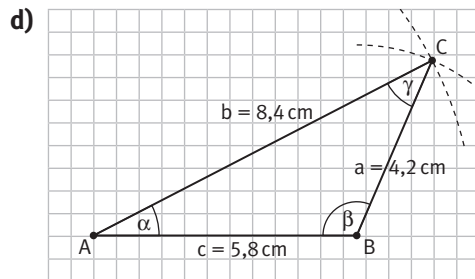
$$= (8 \text{ cm})^2 + (7 \text{ cm})^2 - 2 \cdot 8 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} \cdot \cos 36,4^\circ$$

$$\Rightarrow c \approx 4,8 \text{ cm}$$

$$\sin \alpha = a \cdot \frac{\sin \gamma}{c} = 8 \text{ cm} \cdot \frac{\sin 36,4^\circ}{4,8 \text{ cm}}$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 81,5^\circ$$

$$\beta \approx 180^\circ - 36,4^\circ - 81,5^\circ = 62,1^\circ \quad \Rightarrow \beta \approx 62,1^\circ$$



$$b = 2a = 2 \cdot 4,2 \text{ cm} = 8,4 \text{ cm} \quad \Rightarrow b = 8,4 \text{ cm}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{(4,2 \text{ cm})^2 + (5,8 \text{ cm})^2 - (8,4 \text{ cm})^2}{2 \cdot 4,2 \text{ cm} \cdot 5,8 \text{ cm}}$$

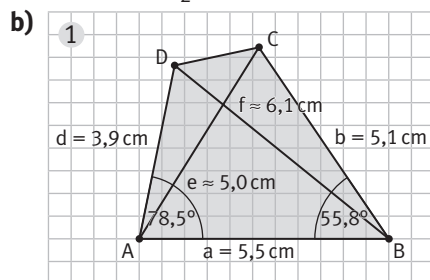
$$\Rightarrow \beta \approx 113,3^\circ$$

$$\sin \alpha = a \cdot \frac{\sin \beta}{b} = 4,2 \text{ cm} \cdot \frac{\sin 113,3^\circ}{8,4 \text{ cm}}$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 27,3^\circ$$

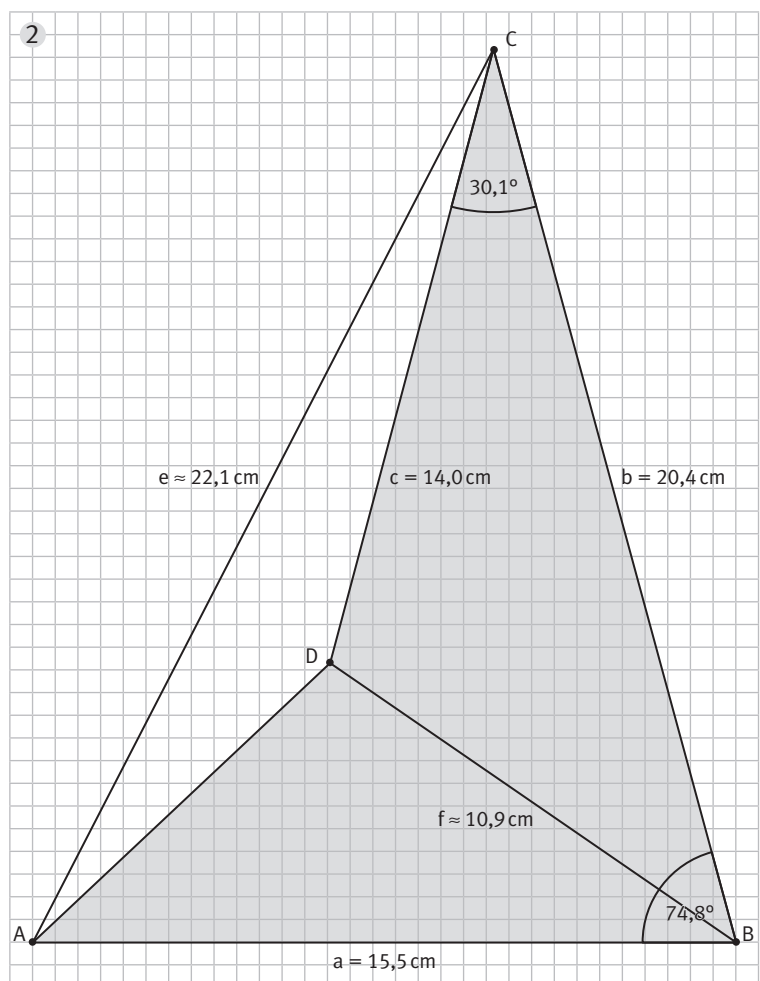
$$\gamma \approx 180^\circ - 27,3^\circ - 113,3^\circ = 39,4^\circ \quad \Rightarrow \gamma \approx 39,4^\circ$$

K5 7 a) $\beta = \delta = \frac{360^\circ - 50^\circ}{2} = 155^\circ$; $|\overline{AC}| \approx 11,1 \text{ cm}$; $|\overline{BD}| \approx 3,5 \text{ cm}$



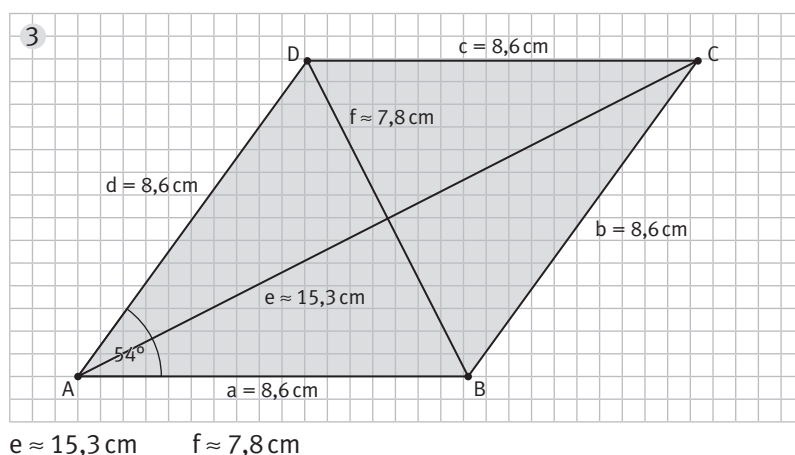
$e \approx 5,0 \text{ cm}$

$f \approx 6,1 \text{ cm}$



$e \approx 22,1 \text{ cm}$

$f \approx 10,9 \text{ cm}$



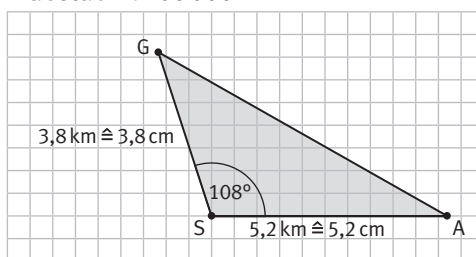
$e \approx 15,3 \text{ cm}$ $f \approx 7,8 \text{ cm}$

- K1** 8 Den Kosinussatz aufzustellen ist für gleichseitige Dreiecke unnötig, da alle Winkelgrößen immer 60° betragen. Wird noch eine der drei gleich langen Seiten angegeben, sind alle Größen ohnehin bekannt, die der Kosinussatz liefern könnte.

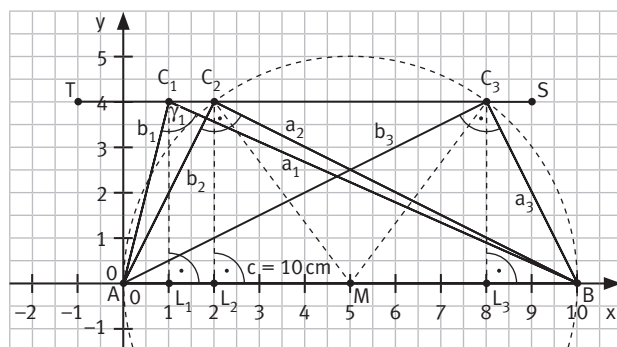
$$a^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos 60^\circ = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot 0,5 = a^2 + a^2 - a^2 = a^2$$

Hier liegt also eine Identität vor, die außer dem Schluss, dass der Kosinussatz auch für gleichseitige Dreiecke gilt, keine weiteren Schlüsse zulässt.

- K5** 9 a) $|\overline{AG}| \approx 7,3 \text{ km}$ b) Maßstab 1 : 100 000



- K5** 10 a) und b)

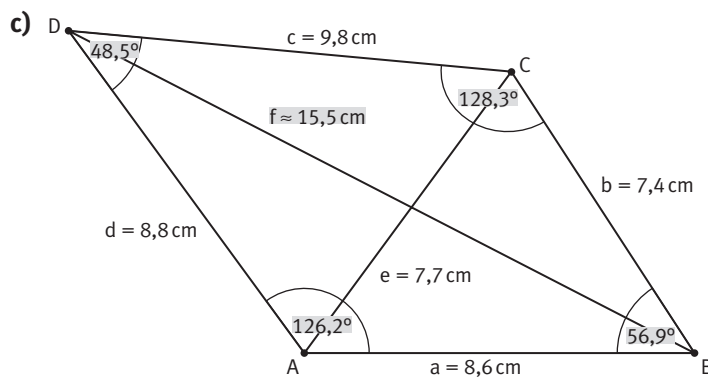
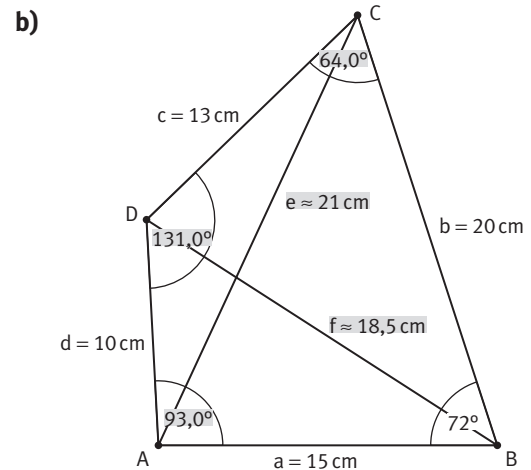
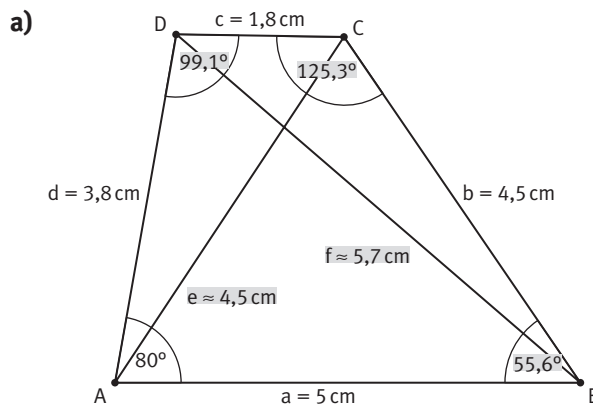


- a) Mit dem Lotfußpunkt $L_1(1|0)$ von C_1 auf $\overline{AB}$ erhält man die rechtwinkligen Dreiecke BC_1L_1 bzw. C_1AL_1 . Mit dem Satz des Pythagoras und dem Kosinussatz ergibt sich:
 $a_1 = |\overline{BC_1}| = \sqrt{(4 \text{ cm})^2 + (9 \text{ cm})^2} \approx 9,85 \text{ cm}$ $b_1 = |\overline{AC_1}| = \sqrt{(4 \text{ cm})^2 + (1 \text{ cm})^2} \approx 4,12 \text{ cm}$
 $\cos \gamma_1 = \frac{a_1^2 + b_1^2 - c^2}{2a_1b_1} = \frac{9,85^2 + 4,12^2 - 10^2}{2 \cdot 9,85 \cdot 4,12} \approx 0,17 \Rightarrow \gamma_1 = 80,07^\circ$
- b) C_2 und C_3 liegen auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$ mit M als Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Mit den Lotfußpunkten L_2 und L_3 von C_2 und C_3 auf $\overline{AB}$ erhält man die rechtwinkligen Dreiecke C_2L_2M und ML_3C_3 mit $|\overline{C_2L_2}| = |\overline{C_3L_3}| = 4 \text{ cm}$ und $|\overline{MC_2}| = |\overline{MC_3}| = |\overline{MA}| = 5 \text{ cm}$. Mit dem Satz des Pythagoras erhält man: $|\overline{ML_2}| = |\overline{ML_3}| = 3 \text{ cm}$. Hieraus ergeben sich die Koordinaten für $C_2(2|4)$ und $C_3(8|4)$.
- c) Für Dreiecke, die bei $C_n(x_n|4)$ stumpfwinklig sind, muss C_n zwischen C_2 und C_3 liegen, d. h. es muss gelten: $x_n \in]2; 8[$.

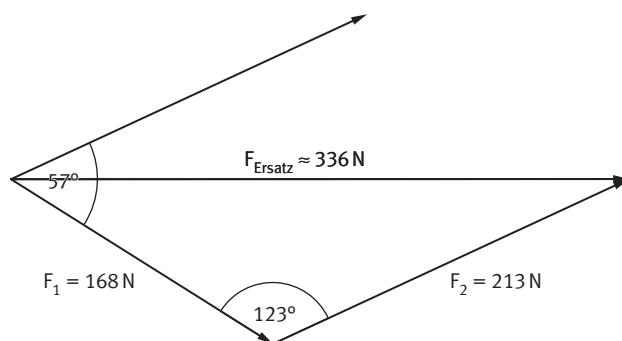
K6 11 $5,5^2 = 8^2 + 6,2^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6,2 \cdot \cos \beta$
 $30,25 = 64 + 38,44 - 99,2 \cdot \cos \beta$ (Paul hat hier die Werte im Subtrahenden ebenfalls quadriert!)
 $\cos \beta \approx 0,728$
 $\beta \approx 43,3^\circ$

K5 12 Die Winkel sind ca. $92,0^\circ$, $52,3^\circ$ und $35,7^\circ$ groß.

K5 13 Der übersichtlichen Darstellung wegen sind hier die Vierecke abgebildet. Es gibt meist unterschiedliche rechnerische Möglichkeiten, die Streckenlängen und Winkelmaße zu berechnen, weswegen hier nur die Ergebnisse (grau unterlegt) angegeben werden. Die Zeichnungen sind jeweils proportional dargestellt, aber nicht mit demselben Maßstab.



K3 14



Die Kräfte F_1 und F_2 bilden ein Kräfteparallelogramm mit Innenwinkeln von 57° bzw. $180^\circ - 57^\circ = 123^\circ$. Der Betrag der resultierenden Kraft lässt sich mithilfe des Kosinussatzes ausrechnen und beträgt ca. 336 N.

Entdecken

KX

■ Mit $\sin \alpha = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow b \cdot \sin \alpha = h_c$ folgt: $A = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha$

KX

■ ① Mit $\sin \beta = \frac{h_c}{a} \Leftrightarrow a \cdot \sin \beta = h_c$ folgt: $A = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta$

② Mit $\sin \gamma = \frac{h_b}{a} \Leftrightarrow a \cdot \sin \gamma = h_b$ folgt: $A = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$

Nachgefragt

K6

■ Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt zweier Dreiecksseiten multipliziert mit dem Sinus des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels.

K1

■ Das rechtwinklige Dreieck habe den rechten Winkel bei C, die Seite $\overline{AC}$ mit der Länge b und die Seite $\overline{BC}$ mit der Länge a stehen senkrecht zueinander, entsprechen also der Grundseite g und der Höhe h. Es gilt: $A = 0,5 \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = 0,5 \cdot a \cdot b \cdot \sin 90^\circ = 0,5 \cdot a \cdot b = 0,5 \cdot g \cdot h$

Aufgaben

K5

1 Es sind Abweichungen aufgrund von Rundungsungenauigkeiten möglich.

	a)	b)	c)	d)	e)
a	6,3 cm	3,5 cm	5,3 cm	4,2 cm	$3b = 25,5 \text{ cm}$
b	5,1 cm	3,2 cm	4,7 cm	7,82 cm	8,5 cm
c	3,26 cm	4,5 cm	6,0 cm	$2a = 8,4 \text{ cm}$	18,63 cm
α	95,3°	50,2°	57,8°	29,75°	136,8°
β	53,7°	44,6°	48,6°	67,5°	13,2°
γ	31,0°	85,2°	73,6°	82,75°	30°
A	8,27 cm ²	5,53 cm ²	12,00 cm ²	16,30 cm ²	54,19 cm ²

K1

2 Es sei $|\overline{DA}| = x$.

Im Dreieck DAC gilt: $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = b \cdot \sin \alpha$

$$\begin{aligned} A_{\text{Dreieck ABC}} &= A_{\text{Dreieck DBC}} - A_{\text{Dreieck DAC}} \\ &= \frac{1}{2} h \cdot (x + c) - \frac{1}{2} h \cdot x = \frac{1}{2} h \cdot c \end{aligned}$$

Mit $h = b \cdot \sin \alpha$ folgt:

$$A_{\text{Dreieck ABC}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

KX

3 $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \sin \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 3,7 \text{ dm} \cdot 2,4 \text{ dm} \cdot \sin 123^\circ \approx 3,72 \text{ dm}^2$

Kosinussatz:

$$e^2 = (3,7 \text{ dm})^2 + (2,4 \text{ dm})^2 - 2 \cdot (3,7 \text{ dm}) \cdot (2,4 \text{ dm}) \cdot \cos 123^\circ \approx 29,1 \text{ dm}^2$$

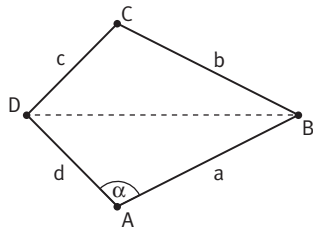
$$e \approx 5,39 \text{ dm}$$

Sinussatz:

$$\delta \approx 21,9^\circ; \gamma \approx 35,1^\circ$$

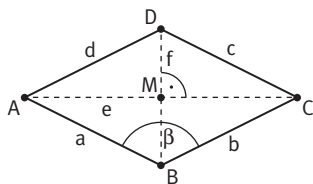
- K5** 4 $A = 0,5 \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta$ liefert mit $\sin \beta = \frac{2 \cdot (15,00 \text{ cm}^2)}{(7,5 \text{ cm}) \cdot (8,0 \text{ cm})} = 0,5$ die Winkelmaße $\beta_1 = 30^\circ$ und $\beta_2 = 150^\circ$.
 Mit $\beta_1 = 30^\circ$ erhält man mit dem Kosinussatz $b \approx 4,04 \text{ cm}$ und mit dem Sinussatz $\alpha \approx 68,2^\circ$ und $\gamma \approx 81,8^\circ$.
 Mit $\beta_2 = 150^\circ$ erhält man mit dem Kosinussatz $b = 15,0 \text{ cm}$ und mit dem Sinussatz $\alpha = 14,5^\circ$ und $\gamma = 15,5^\circ$.

- K5** 5 Skizze:



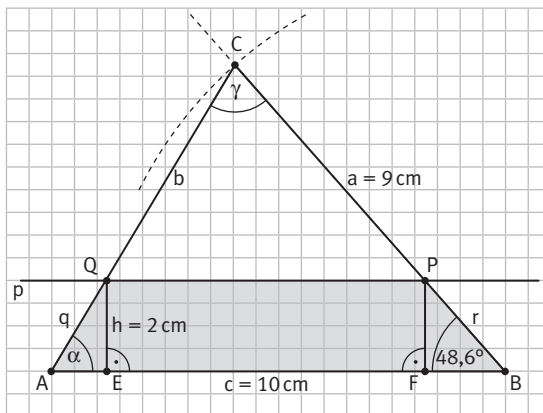
$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= 2 \cdot A_{ABD} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot d \cdot \sin \alpha \\ &= 5 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} \cdot \sin 112^\circ \approx 18,54 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- K5** 6 Skizze:



Im Dreieck ABC gilt:
 $\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab} \Rightarrow \beta \approx 91,2^\circ = \delta$
 $A_{\text{Raute}} = 2 \cdot A_{ABC} = 2 \cdot 0,5 \cdot a \cdot b \cdot \sin 91,2^\circ = 49,0 \text{ cm}^2$
 Im rechtwinkligen Dreieck MCD gilt:
 $\left(\frac{f}{2}\right)^2 = c^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2 = (49 - 25) \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$
 $f = 2 \cdot \sqrt{24} \text{ cm} \approx 9,8 \text{ cm} \quad A_{\text{Raute}} = 0,5 \cdot e \cdot f = 49,0 \text{ cm}^2$

- K5** 7 Es sind Abweichungen aufgrund von Rundungsungenauigkeiten möglich.
 a) und b)



- a) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$
 $= (81 + 100 - 180 \cdot \cos 48,6^\circ) \text{ cm}^2 \approx 61,96 \text{ cm}^2 \Rightarrow b \approx 7,9 \text{ cm}$
 $\sin \alpha = \frac{a}{b} \cdot \sin \beta \approx \frac{9 \text{ cm}}{7,9 \text{ cm}} \cdot \sin 48,6^\circ \Rightarrow \alpha \approx 58,7^\circ$
 $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 180^\circ - 48,6^\circ - 58,7^\circ \Rightarrow \gamma \approx 72,7^\circ$
 $A_{\text{Dreieck}} = 0,5 \cdot 9 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot \sin 48,6^\circ \Rightarrow A_{\text{Dreieck}} \approx 33,8 \text{ cm}^2$
- b) In den rechtwinkligen Dreiecken AEQ und BPF mit $r = |AQ|$ und $r = |BP|$ und $h = 2 \text{ cm}$ gilt:
 $\sin \alpha = \frac{h}{q} \Leftrightarrow q = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{2 \text{ cm}}{\sin 59^\circ} \approx 2,3 \text{ cm} \Rightarrow |QC| = b - q \approx 7,9 \text{ cm} - 2,3 \text{ cm} = 5,6 \text{ cm}$
 $\sin \beta = \frac{h}{r} \Leftrightarrow r = \frac{h}{\sin \beta} = \frac{2 \text{ cm}}{\sin 48,6^\circ} \approx 2,7 \text{ cm} \Rightarrow |PC| = a - r \approx 9 \text{ cm} - 2,7 \text{ cm} = 6,3 \text{ cm}$
 Im Dreieck QPC ergibt sich mit dem Kosinussatz:
 $|PQ|^2 = (5,6 \text{ cm})^2 + (6,3 \text{ cm})^2 - 2 \cdot 5,6 \text{ cm} \cdot 6,3 \text{ cm} \cdot \cos 72,4^\circ \approx 49,7 \text{ cm}^2 \Rightarrow |PQ| \approx 7,1 \text{ cm}$

$$\text{c) } A_{\text{Trapez}} = \frac{10 \text{ cm} + 7,1 \text{ cm}}{2} \cdot 2 \text{ cm} = 17,1 \text{ cm}^2 \quad \frac{A_{\text{Trapez}}}{A_{\text{Dreieck}}} = \frac{17,1 \text{ cm}^2}{33,8 \text{ cm}^2} \approx 0,51$$

Der Anteil der Trapezfläche an der Dreiecksfläche beträgt 51 %.

$$\text{d) } u_{\text{Trapez}} = c + |\overline{BP}| + |\overline{PQ}| + |\overline{AQ}| \approx 10 \text{ cm} + 2,7 \text{ cm} + 7,1 \text{ cm} + 2,3 \text{ cm} = 22,1 \text{ cm}$$

KX

- 8 a) Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 8,5 & 8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \text{ FE} = \frac{1}{2} \cdot (8,5 \cdot 6 - 0 \cdot 8) \text{ FE} = 25,5 \text{ FE}$$

- b) Grundseite $c = |\overline{AB}| = 8,5 \text{ LE}$ und Höhe $h_c = 6 \text{ LE}$:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 8,5 \text{ LE} \cdot 6 \text{ LE} = 25,5 \text{ FE}$$

- c) $c = |\overline{AB}| = 8,5 \text{ LE}$

$$b = \sqrt{8^2 + 6^2} \text{ LE} = 10 \text{ LE}$$

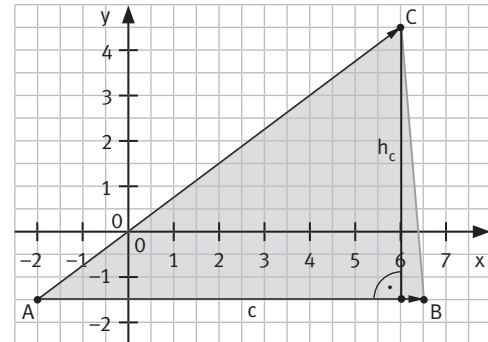
$$a = \sqrt{0,5^2 + 6^2} \text{ LE} \approx 6,02 \text{ LE}$$

$$\sin \alpha = \frac{6}{10} = 0,6 \quad \alpha \approx 36,9^\circ$$

$$\sin \beta = \frac{6}{6,02} = 0,997 \quad \beta \approx 85,3^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - 36,9^\circ - 85,3^\circ \quad \gamma = 57,8^\circ$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ LE} \cdot 8,5 \text{ LE} \cdot \sin 36,9^\circ \approx 25,5^\circ$$

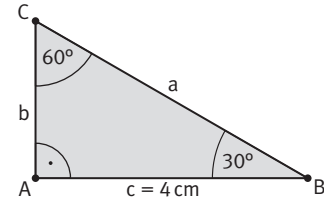


Entdecken

KX

- Georg hat nicht Recht, wenn er die Höhe des Quaders mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnen will. Es ist aber möglich, mit der angegebenen Seitenlänge $c = 4 \text{ cm}$ und den Winkelmaßen $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 30^\circ$ und $\gamma = 60^\circ$ und mithilfe des Sinussatzes die Höhe des Quaders zu berechnen:

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow b = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot c = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} \cdot 4 \text{ cm} \approx 2,31 \text{ cm}$$



Nachgefragt

KX

- Mögliche Antwort:
Wie Beispiel I zeigt, findet man in Körpern Figuren, die rechtwinklig sind, z. B. das Stützdreieck AMD im Prisma ABCDEF.

KX

- Mögliche Antwort:
Rechtwinklige Dreiecke sind Sonderfälle von beliebigen Dreiecken, daher gelten alle Sätze für beliebige Dreiecke auch für rechtwinklige Dreiecke.

Aufgaben

K5

- 1 a) $h = |\overline{BF}| = 4,5 \text{ cm} \cdot \tan 18,4^\circ \approx 1,5 \text{ cm}$
 $V = a \cdot b \cdot h \approx 4,5 \cdot 3,5 \cdot 1,5 \text{ cm}^3 = 23,625 \text{ cm}^3$
Raumdiagonale: $d = |\overline{BH}| = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$
 $\approx \sqrt{4,5^2 + 3,5^2 + 1,5^2} \text{ cm} = \sqrt{34,75} \text{ cm} \approx 5,9 \text{ cm}$
Winkel δ der Raumdiagonalen mit der Grundfläche: $\sin \delta = \frac{h}{d} = \frac{1,5}{5,9} \approx 0,25 \Rightarrow \delta \approx 14,7^\circ$
- b) $b = |\overline{AD}| = 5,5 \text{ cm} \cdot \tan 28,6^\circ \approx 3,0 \text{ cm}$
 $V = a \cdot b \cdot h \approx 5,5 \cdot 3,0 \cdot 2,5 \text{ cm}^3 = 41,25 \text{ cm}^3$
Raumdiagonale: $d = |\overline{AG}| = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$
 $= \sqrt{5,5^2 + 3,0^2 + 2,5^2} \text{ cm} = \sqrt{45,5} \text{ cm} \approx 6,7 \text{ cm}$
Winkel δ der Raumdiagonalen mit der Grundfläche: $\sin \delta = \frac{h}{d} = \frac{2,5}{6,7} \approx 0,37 \Rightarrow \delta \approx 21,9^\circ$

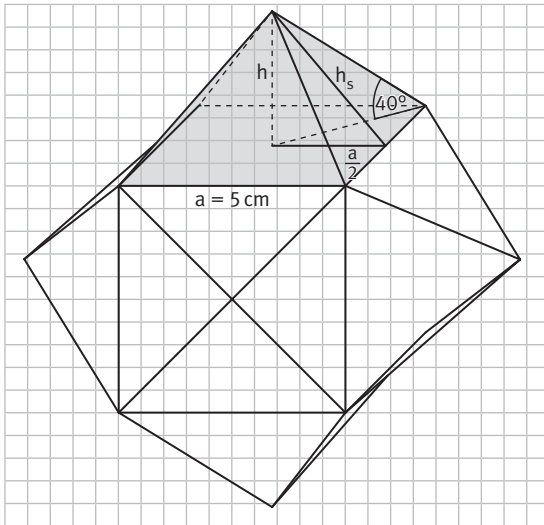
K2

- 2 a) Es gilt: $|\overline{DB}| = \sqrt{(6 \text{ cm})^2 + (5 \text{ cm})^2} = \sqrt{61} \text{ cm}$ und $\tan \beta = \frac{3 \text{ cm}}{\sqrt{61} \text{ cm}} \Rightarrow \beta = 21,0^\circ$
- b) Der Winkel β tritt ebenfalls zwischen den Raumdiagonalen $\overline{AG}$, $\overline{DF}$, $\overline{CE}$ und der Grundfläche ABCD auf sowie zwischen diesen Raumdiagonalen und der Fläche EFGH.

K2

- 3 a) $|\overline{AM}| = \frac{1}{2} \sqrt{(6 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2} = \sqrt{13} \text{ cm}$
 $\tan \alpha = \frac{|\overline{MS}|}{|\overline{AM}|} = \frac{8}{\sqrt{13}} = \frac{8\sqrt{13}}{13} \approx 2,219 \Rightarrow \alpha \approx 65,7^\circ$
- b) Es ist $|\overline{MF}| = 3 \text{ cm}$ und damit $\tan \beta = \frac{|\overline{MS}|}{|\overline{MF}|} = \frac{8}{3} \approx 2,667 \Rightarrow \beta \approx 69,4^\circ$

- K3** 4 Skizze des Körpers mit aufgesetzten 6 Pyramiden nach vorne (und nach hinten), nach links, nach unten, nach rechts und nach oben.



- a) Die Oberfläche des Körpers setzt sich aus $6 \cdot 4 = 24$ kongruenten Dreiecken zusammen.

Man berechnet daher:

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{2} \cdot \tan \alpha = \frac{5 \text{ cm}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \tan 40^\circ \approx 2,97 \text{ cm}$$

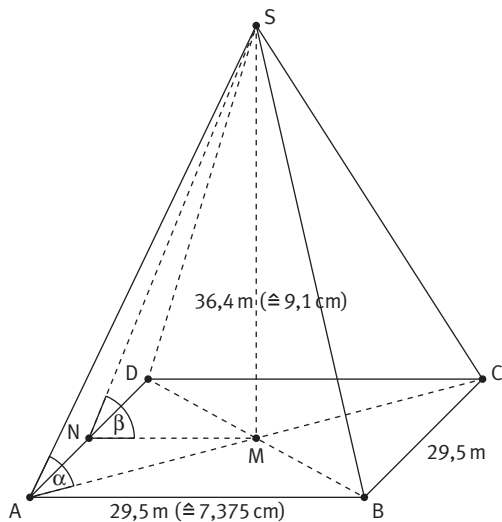
$$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(2,97 \text{ cm})^2 + (2,5 \text{ cm})^2} \approx 3,88 \text{ cm}$$

$$O = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 3,88 \text{ cm} = 232,8 \text{ cm}^2$$

- b) Der Körper besteht aus einem Würfel und 6 identischen Pyramiden mit quadratischer Grundfläche:

$$V = a^3 + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = (5 \text{ cm})^3 + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot (5 \text{ cm})^2 \cdot 2,97 \text{ cm} = 273,5 \text{ cm}^3$$

- K3** 5 a)



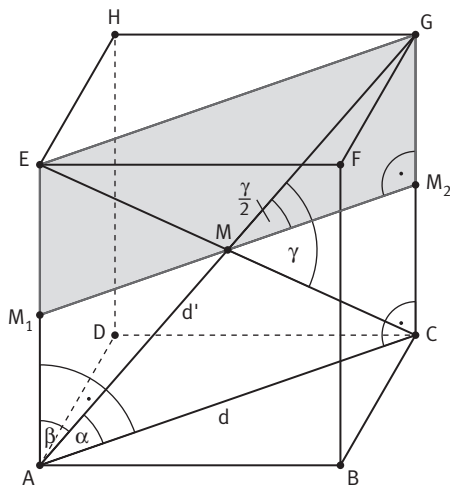
- b) Maß des Neigungswinkels α der Seitenkanten zur Grundfläche:

$$\text{Es gilt: } |AM| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 29,5 \text{ m} \approx 20,9 \text{ m} \text{ und } \tan \alpha = \frac{|MS|}{|AM|} = \frac{36,4 \text{ m}}{20,9 \text{ m}} \Rightarrow \alpha \approx 60,1^\circ$$

Maß des Neigungswinkels β der Seitenflächen zur Grundfläche:

$$\tan \beta = \frac{|MS|}{\frac{|NM|}{2}} = \frac{36,4 \text{ m}}{\frac{29,5 \text{ m}}{2}} \Rightarrow \beta \approx 67,9^\circ$$

- K2** 6 Flächendiagonale: $d = a\sqrt{2} = 8\text{ cm} \cdot \sqrt{2} \approx 11,31\text{ cm}$
 Raumdiagonale: $d' = a\sqrt{3} = 8\text{ cm} \cdot \sqrt{3} \approx 13,86\text{ cm}$



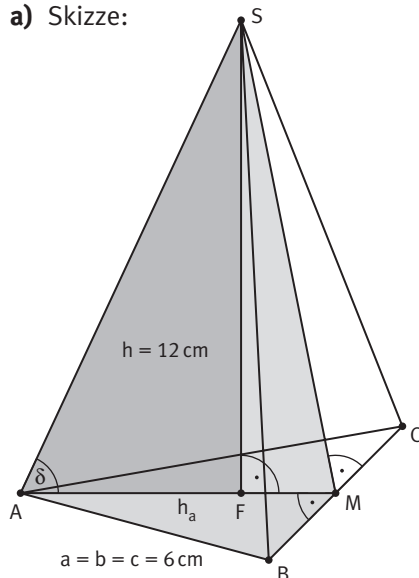
- a) Winkel α zwischen Raum- und Flächendiagonale:
 $\tan \alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha \approx 35,26^\circ$
- b) Winkel β zwischen Raumdiagonale und Würfelkante:
 $\tan \beta = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow \beta = 54,74^\circ$
 (Alternative: $\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 35,26^\circ = 54,74^\circ$)
- c) Schnittwinkel γ zwischen den Diagonalen:
 $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{d'}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = 35,26^\circ \Rightarrow \gamma = 70,52^\circ$
 (Alternative: γ ist das doppelte Winkelmaß von α , d. h.: $\gamma = 2 \cdot \alpha = 2 \cdot 35,26^\circ = 70,52^\circ$)
- d) $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \tan \beta = \sqrt{2} \quad \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $\tan \beta, \tan \alpha$ und $\sin \frac{\gamma}{2}$ sind unabhängig von a .
 Also haben alle Würfel die gleichen Winkelmaße.

- K5** 7 Für beide Pyramiden in a) und b) gilt:

Die Pyramide setzt sich zusammen aus der Grundfläche ABC und den Flächen der Seitendreiecke ABS, BCS, ACS. Das Dreieck ABC ist hierbei gleichseitig mit Seitenlänge $a = 6\text{ cm}$. M sei der Mittelpunkt der Strecke BC mit $|BM| = |CM| = 3\text{ cm}$.

Die Höhen im Dreieck ABC haben die Länge $h_a = |AM| = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3}\text{ cm}$.

a) Skizze:



Der Höhenfußpunkt F ist der Mittelpunkt (Schwerpunkt) des Dreiecks ABC, er teilt die Höhen im Verhältnis 2 : 1.

$$\Rightarrow |FM| = \frac{1}{3} \cdot |AM| = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\text{ cm} = \sqrt{3}\text{ cm}$$

Für das rechtwinklige Dreieck MSF mit den Seitenlängen $|FS| = h = 12\text{ cm}$ und $|FM| = \sqrt{3}\text{ cm}$ gilt:

$$|MS| = \sqrt{12^2 + (\sqrt{3})^2}\text{ cm} = \sqrt{147}\text{ cm} = 7 \cdot \sqrt{3}\text{ cm} \approx 12,12\text{ cm}$$

Pyramidengrundfläche (Dreieck ABC):

$$G = 0,5 \cdot a \cdot h_a = 3\text{ cm} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\text{ cm} = 9\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

Eine Pyramidenseitenfläche (Dreieck BCS):

$$A = 0,5 \cdot a \cdot |MS| = 3\text{ cm} \cdot 7 \cdot \sqrt{3}\text{ cm} = 21\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

Oberfläche der Pyramide ABCS:

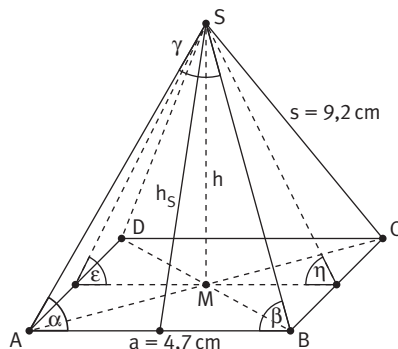
$$O = G + 3 \cdot A = (9\sqrt{3} + 63\sqrt{3})\text{ cm}^2 = 72\sqrt{3}\text{ cm}^2 \approx 124,7\text{ cm}^2$$

Neigungswinkel δ der Seitenkanten zur Grundfläche:

$$\tan \alpha = \frac{|FS|}{|FM|} = \frac{|FS|}{2 \cdot |FM|} = \frac{12}{2 \cdot \sqrt{3}} \approx 3,5 \Rightarrow \delta = 74^\circ$$

- K5** 9 a) $s = \sqrt{(4 \text{ cm})^2 + (6 \text{ cm})^2} = \sqrt{52} \text{ cm} \approx 7,2 \text{ cm}$
 b) $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{r}{s} = \frac{4 \text{ cm}}{7,2 \text{ cm}} \approx 0,556 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} \approx 33,8^\circ \Rightarrow \varphi \approx 67,6^\circ$
 c) Für die Länge des Kreisbogens gilt die Formel $b = \frac{\mu}{360^\circ} \cdot 2\pi s$. Der Kreisbogen stimmt längenmäßig mit dem Radius des Kegels überein, also $b = 2\pi r$. Das Gleichsetzen beider Formeln liefert $\frac{\mu}{360^\circ} \cdot 2\pi s = 2\pi r \Rightarrow \mu = 360^\circ \cdot \frac{r}{s} = 360^\circ \cdot \frac{4 \text{ cm}}{7,2 \text{ cm}} = 200^\circ$.

K5 10



- a) Es gilt $\cos \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{s} = \frac{2,35 \text{ cm}}{9,2 \text{ cm}} \Rightarrow \alpha = \beta \approx 75,2^\circ$ und mit der Innenwinkelsumme im Dreieck $\gamma = 29,6^\circ$.
 b) Der Oberflächeninhalt setzt sich aus der quadratischen Grundfläche und vier zueinander kongruenten Dreiecken zusammen:
 $O = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$. Für die Höhe im Dreieck berechnet man $h_s = \frac{a}{2} \cdot \tan \alpha = \frac{4,7 \text{ cm}}{2} \cdot \tan 75,20^\circ \approx 8,89 \text{ cm}$.
 Eingesetzt in den Oberflächeninhalt ergibt sich
 $O = (4,7 \text{ cm})^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,7 \text{ cm} \cdot 8,89 \text{ cm} = 105,66 \text{ cm}^2$.

- K2** 11 a) Das Dreieck P_1BG mit $P_1 = E$ ist gleichseitig mit $d = 6\sqrt{2} \text{ cm}$ als Seitenlänge.

Für die Höhe h_1 im Dreieck gilt dann $h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6\sqrt{2} \text{ cm} = 3 \cdot \sqrt{6} \text{ cm}$ und damit für den Flächeninhalt:
 $A = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \text{ cm} \cdot 3 \cdot \sqrt{6} \text{ cm} = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 31,18 \text{ cm}^2$

- b) Es ist $|\overline{BG}| = |\overline{EG}| = 6\sqrt{2} \text{ cm}$. Mithilfe von $|\overline{AP}_2| = 3 \text{ cm}$ und $|\overline{EG}| = 6\sqrt{2} \text{ cm}$ berechnet man in den Dreiecken ABP_2 und P_2GE :

$$|\overline{BP}_2| = \sqrt{a^2 + \overline{AP}_2^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} \text{ cm} \approx 6,71 \text{ cm}$$

$$|\overline{GP}_2| = \sqrt{\overline{P}_2E^2 + \overline{EG}^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 3^2} \text{ cm} = 9,0 \text{ cm}$$

$$\tan \varepsilon_2 = \frac{|\overline{AP}_2|}{|\overline{AB}|} = \frac{3 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} \quad \varepsilon_2 \approx 26,57^\circ$$

Eine geometrische Bestimmung des Winkels ε_2 und der Länge $|\overline{P}_2B|$ wäre möglich, da das Dreieck ABP_2 im Schrägbild nicht verzerrt dargestellt wird. Die beiden verbleibenden Dreiecksseiten werden jedoch verzerrt dargestellt, weshalb eine geometrische Bestimmung hier nicht möglich ist.

- c) Im Dreieck ABP_3 mit $\varepsilon_3 = 20^\circ$ gilt:

$$|\overline{AP}_3| = |\overline{AB}| \cdot \tan \varepsilon_3 = 6 \text{ cm} \cdot \tan 20^\circ \approx 2,18 \text{ cm}$$

$$|\overline{EP}_3| = (6 - 2,18) \text{ cm} = 3,82 \text{ cm}$$

$$|\overline{GP}_3| = \sqrt{|\overline{P}_3E|^2 + |\overline{EG}|^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 3,82^2} \text{ cm} \approx 9,31 \text{ cm}$$

- K2** 12 a) Im Dreieck ABP_1 gilt:

$$|\overline{AP}_1| = \frac{|\overline{AB}|}{\cos \alpha_1} = \frac{6 \text{ cm}}{\cos 25^\circ} \approx 6,62 \text{ cm}$$

$$A = |\overline{AP}_1| \cdot |\overline{P}_1Q_1| = 6,62 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 39,72 \text{ cm}^2$$

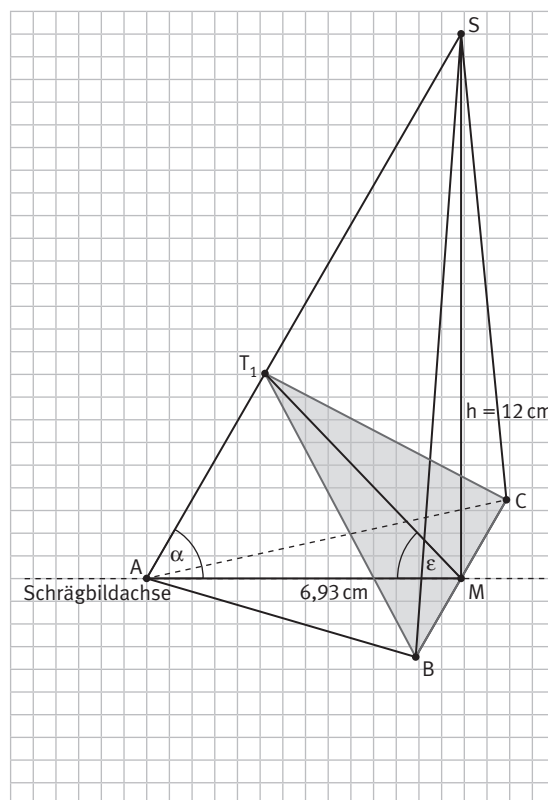
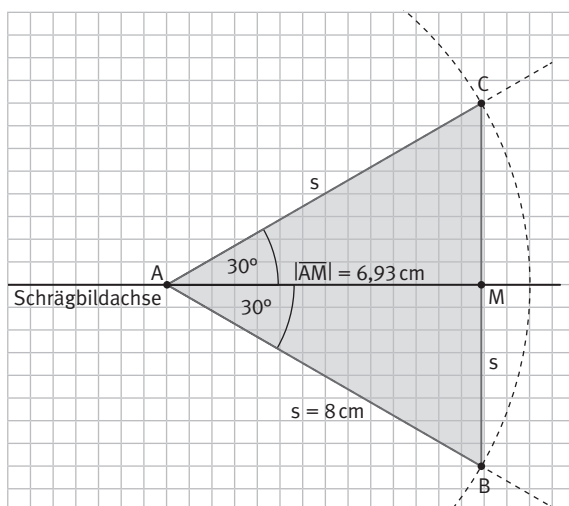
- b) A ist maximal, wenn $|\overline{DQ}_2|$ maximal ist, d. h.: $Q_2 = G$.

- c) Aus $A = |\overline{AP}_3| \cdot |\overline{P}_3Q_3|$ folgt:

$$|\overline{AP}_3| = \frac{A}{|\overline{P}_3Q_3|} = \frac{40 \text{ cm}^2}{6 \text{ cm}} \approx 6,67 \text{ cm}$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AP}_3|} = \frac{6 \text{ cm}}{6,67 \text{ cm}} \approx 0,90 \Rightarrow \alpha_3 \approx 25,8^\circ$$

- K2** 13 a) Im gleichseitigen Dreieck ABC mit $s = 8 \text{ cm}$ hat $\overline{AM}$ die Länge $\cos 30^\circ \cdot 8 \text{ cm} \approx 6,93 \text{ cm}$.



- b) Im Dreieck AMS gilt: $\tan \alpha = \frac{|\overline{MS}|}{|\overline{AM}|} = \frac{12 \text{ cm}}{6,93 \text{ cm}} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$
- c) Es ist $|\overline{AM}| = 6,93 \text{ cm}$ und $\sphericalangle AT_2M = 180^\circ - (\alpha + \varepsilon_2) = 65^\circ$.
Nach dem Sinussatz gilt: $\frac{|\overline{MT_2}|}{|\overline{AM}|} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\sphericalangle AT_2M)} \Rightarrow |\overline{MT_2}| = \frac{\sin \alpha}{\sin(\sphericalangle AT_2M)} \cdot |\overline{AM}| \approx 6,62 \text{ cm}$
 $A = \frac{1}{2} \cdot |\overline{BC}| \cdot |\overline{MT_2}| = \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ cm} \cdot 6,62 \text{ cm} = 26,48 \text{ cm}^2$
- d) $|\overline{MT_n}|$ wird minimal, wenn $\sphericalangle AT_nM = 90^\circ$. In diesem Fall ist $\varepsilon_3 = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 30^\circ$.

- K2** 14 a) Die sechs Mittelpunkte der sechs Seitenflächen des Würfels sind immer gleich weit voneinander entfernt. Somit sind die Verbindungslinien (d. h. die Kanten des neuen Körpers) alle gleich lang:

$$d = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} \sqrt{2}$$

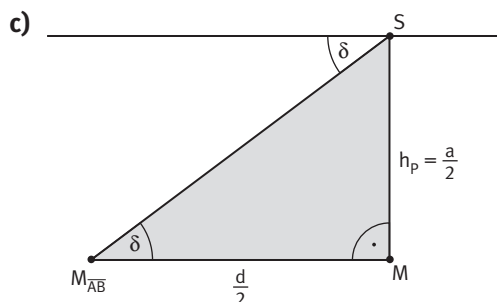
- b) Das Volumen des Oktaeders entspricht dem Volumen von zwei Pyramiden mit quadratischer Grundfläche:

Grundfläche der Pyramide: $a_p = d = \frac{a}{2} \sqrt{2}$ und $A_p = d^2 = \frac{a^2}{2}$

Höhe der Pyramide: $h_p = \frac{a}{2}$

Volumen der Pyramide: $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot d^2 \cdot h_p = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{12}$

Volumen des Oktaeders: $V_{\text{Oktaeder}} = 2 \cdot V_{\text{Pyramide}} = \frac{a^3}{6}$



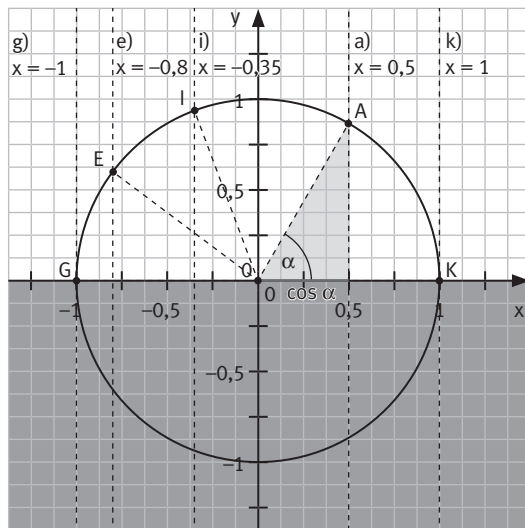
Zu betrachten ist der Winkel, den eine Pyramidenfläche mit der Grundfläche des Würfels bildet. Mit M, dem Mittelpunkt sowohl des Würfels als auch des Oktaeders, und mit A, B, C und D als Eckpunkte der betrachteten quadratischen Pyramiden Grundfläche und mit der Spitze S auf der zugehörigen Würfelfläche betrachte man das rechtwinklige Dreieck $M_{AB}MS$ mit den Kathetenlängen $h_p = \frac{a}{2}$ und $\frac{d}{2} = \frac{a}{4} \sqrt{2}$.

Es gilt: $\tan \delta = \frac{h_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{4} \sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Das Winkelmaß von $\delta \approx 55^\circ$ ist unabhängig von a.

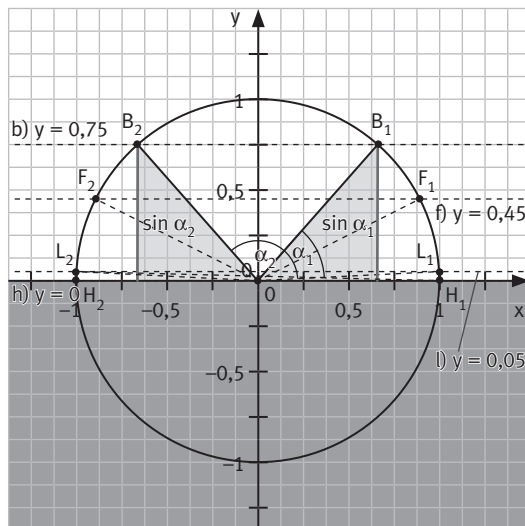
K4

1 Zu a), e), g), i) und k)

Werte für $\cos \alpha$ mit $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$


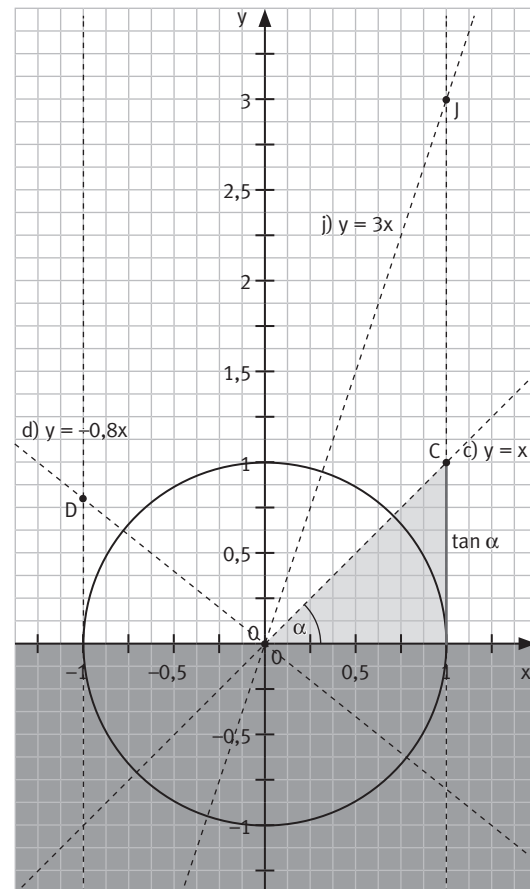
- a) $\cos \alpha$ eine Lösung: $\alpha = 60^\circ$
e) $\cos \alpha$ eine Lösung: $\alpha \approx 143,1^\circ$
g) $\cos \alpha$ eine Lösung: $\alpha = 180^\circ$
i) $\cos \alpha$ eine Lösung: $\alpha \approx 110,5^\circ$
k) $\cos \alpha$ eine Lösung: $\alpha = 0^\circ$

Zu b), f), h) und l):

Werte für $\sin \alpha$ mit $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$


- b) $\sin \alpha$ zwei Lösungen: $\alpha_1 \approx 48,6^\circ$ $\alpha_2 \approx 131,4^\circ$
f) $\sin \alpha$ zwei Lösungen: $\alpha_1 \approx 26,7^\circ$ $\alpha_2 \approx 153,3^\circ$
h) $\sin \alpha$ zwei Lösungen: $\alpha_1 = 0^\circ$ $\alpha_2 = 180^\circ$
l) $\sin \alpha$ zwei Lösungen: $\alpha_1 \approx 2,9^\circ$ $\alpha_2 \approx 177,1^\circ$

Zu c), d) und j)

Werte für $\tan \alpha$ mit $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$


- c) $\tan \alpha$ eine Lösung: $\alpha = 45^\circ$
d) $\tan \alpha$ eine Lösung: $\alpha \approx 141,3^\circ$
j) $\tan \alpha$ eine Lösung: $\alpha \approx 71,6^\circ$

K1

2 (ohne Skizze)

- a) $2\alpha - 20^\circ = 60^\circ$ oder $2\alpha - 20^\circ = -60^\circ \Rightarrow \alpha_1 = 40^\circ \quad \alpha_2 = 160^\circ$
 b) $4\alpha - 20^\circ \approx 48,6^\circ$ oder $4\alpha - 20^\circ \approx 131,4^\circ \Rightarrow \alpha_1 \approx 17,2^\circ \quad \alpha_2 \approx 37,9^\circ \quad \alpha_3 \approx 107,2^\circ \quad \alpha_4 \approx 127,9^\circ$
 c) $2\alpha + 60^\circ \approx 60,9^\circ$ oder $2\alpha + 60^\circ \approx 240,9^\circ \Rightarrow \alpha_1 \approx 0,45^\circ \quad \alpha_2 \approx 90,45^\circ$
 d) $3\alpha \approx 41,3^\circ$ oder $3\alpha \approx 138,7^\circ \Rightarrow \alpha_1 \approx 13,8^\circ \quad \alpha_2 \approx 46,2^\circ \quad \alpha_3 \approx 133,8^\circ \quad \alpha_4 \approx 166,2^\circ$
 e) $2\alpha + 45^\circ \approx 101,5^\circ$ oder $2\alpha + 45^\circ \approx -101,5^\circ \Rightarrow \alpha_1 \approx 28,3^\circ \quad \alpha_2 \approx 106,8^\circ$
 f) $0,5\alpha + 10^\circ \approx 26,7^\circ$ oder $0,5\alpha + 10^\circ \approx 153,3^\circ \Rightarrow \alpha \approx 33,4^\circ$

K1

3 Die Aussagen ergeben sich durch Umformungen mithilfe von $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ bzw. $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ und $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$.

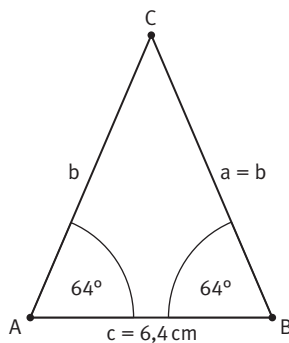
- a) $1 + \cos^2 \alpha = 1 + (1 - \sin^2 \alpha) = 2 - \sin^2 \alpha$
 b) $1 + 4 \cdot \cos^2 \alpha - 5 \cdot \sin^2 \alpha = 1 + 4 \cdot (1 - \sin^2 \alpha) - 5 \cdot \sin^2 \alpha = 5 - 9 \cdot \sin^2 \alpha$
 c) $3 - \cos^2 \alpha - 2 \cdot \sin^2 \alpha = 3 - (1 - \sin^2 \alpha) - 2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha + 2 \cdot \cos^2 \alpha$

K5

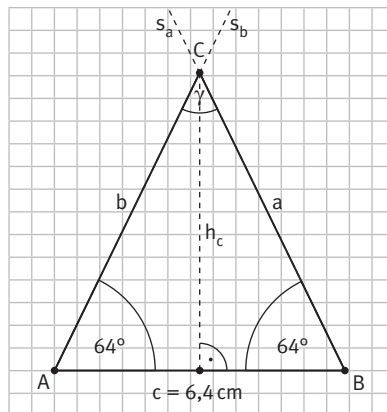
- 4 a) $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{4\sqrt{3}\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ \quad \beta = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$
 b) Im rechtwinkligen Dreieck gilt:
 $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{BC}|$ und $A_{ABC} = 12\text{ FE} \Rightarrow |\overline{BC}| = \frac{24\text{ FE}}{|\overline{AC}|} = \frac{24\text{ FE}}{2,4\text{ LE}} = 10\text{ LE}$
 $\tan \alpha = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{10\text{ LE}}{2,4\text{ LE}} \Rightarrow \alpha \approx 76,5^\circ \quad \beta = 180^\circ - 90^\circ - 76,5^\circ = 13,5^\circ$

K5

5 a) Planfigur:



Zeichnung:



Beschreibung:

1. Zeichne $\overline{AB}$ mit $c = 6,4\text{ cm}$.
2. Zeichne an $\overline{AB}$ im Punkt A bzw. B die Winkel mit dem Maß 64° ; man erhält die Schenkel s_a und s_b .
3. Die Schenkel s_a und s_b schneiden sich in C.

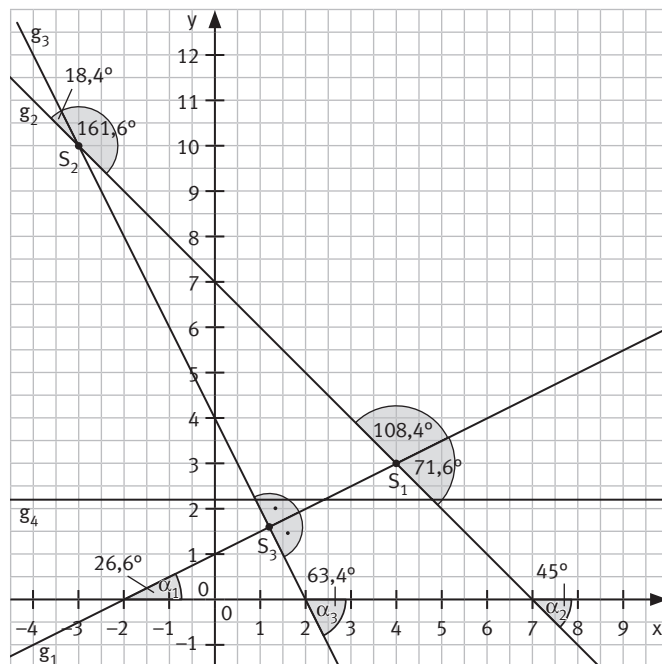
- b) Aus $\alpha = \beta = 64^\circ$ folgt: $\gamma = 180^\circ - 128^\circ = 52^\circ$
 Aus $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}$ folgt: $a = c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = 6,4\text{ cm} \cdot \frac{\sin 64^\circ}{\sin 52^\circ} \approx 7,3\text{ cm} = b$
 Die Schenkellängen a und b des Dreiecks betragen 7,3 cm.
 c) Es sind unterschiedliche Rechenwege möglich, z. B.:
 $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 7,3\text{ cm} \cdot 6,4\text{ cm} \cdot \sin 64^\circ \approx 21,00\text{ cm}^2$

K5

6

	a	b	c	α	β	γ
a)	92 cm	37,5 cm	84 cm	90°	24,1°	65,9°
b)	1,9 m	0,9 m	2,1 m	64,6°	25,4°	90°
c)	0,8 km	1,0 km	0,6 km	54,5°	90°	35,5°

K6 7



- a) 1 $m = \tan \alpha = 0,5 \Rightarrow \alpha = 26,6^\circ$
 2 $m = \tan \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -45^\circ$
 3 $m = -2 = \tan \alpha \Rightarrow \alpha \approx -63,4^\circ$
 4 Da die Gerade $g_4: y = 2,2$ parallel zur x-Achse ist, schließt sie mit dieser keinen Winkel ein.
- b) Winkelmaße zwischen g_1 und g_2 :
 $26,6^\circ + 45^\circ = 71,6^\circ$
 $180^\circ - 71,6^\circ = 108,4^\circ$
 Winkelmaße zwischen g_2 und g_3 :
 $63,4^\circ - 45^\circ = 18,4^\circ$
 $180^\circ - 18,4^\circ = 161,6^\circ$
 Winkelmaße zwischen g_1 und g_3 :
 $26,6^\circ + 63,4^\circ = 90^\circ$
 $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

- c) Die Winkelmaße der Geraden g_1 , g_2 und g_3 mit der zur x-Achse parallelen Geraden $g_4: y = 2,2$ entsprechen den Winkelmaßen, die g_1 , g_2 und g_3 mit der x-Achse haben:
 Winkelmaße zwischen g_1 und g_4 : $26,6^\circ$ und $180^\circ - 26,6^\circ = 153,4^\circ$
 Winkelmaße zwischen g_2 und g_4 : -45° und $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$
 Winkelmaße zwischen g_3 und g_4 : $-63,4^\circ$ und $180^\circ - 63,4^\circ = 116,6^\circ$

K3 8 Kosinussatz:

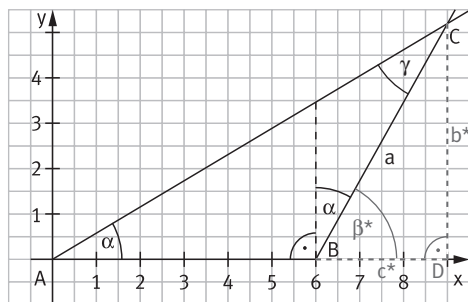
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma} = \sqrt{4,6^2 + 4,1^2 - 2 \cdot 4,6 \cdot 4,1 \cdot \cos 75^\circ} \text{ cm} = \sqrt{28,2} \text{ cm} \approx 5,3 \text{ cm}$$

Sinussatz:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \cdot \sin \gamma = \frac{4,6}{5,3} \cdot \sin 75^\circ \approx 0,84 \quad \alpha \approx 57^\circ \quad \beta = 180^\circ - 75^\circ - 57^\circ = 48^\circ$$

 Die dritte Seite ist ca. 5,3 cm lang, die beiden Winkelmaße betragen ca. 57° bzw. ca. 48° .

K5 9



$$\gamma = 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ$$

 Das Dreieck ABC ist gleichschenkelig mit $a = c = 6 \text{ LE}$.

Das Dreieck BDC ist rechtwinklig bei D.

 Es gilt: $\beta^* = 60^\circ$ und $|BC| = a = 6 \text{ LE}$.

$$\sin \beta^* = \frac{b^*}{a} \Rightarrow b^* = a \cdot \sin \beta^* = 6 \text{ LE} \cdot \sin 60^\circ \approx 5,2 \text{ LE}$$

$$\cos \beta^* = \frac{c^*}{a} \Rightarrow c^* = a \cdot \cos \beta^* = 6 \text{ LE} \cdot \cos 60^\circ = 3 \text{ LE}$$

C(9|5,2)

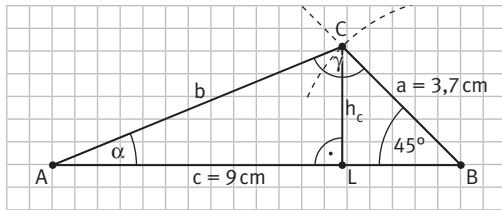
KX 10 Lösungsmöglichkeit:

Die Aussage ist falsch: Der Sinussatz ist nur anwendbar, wenn das Dreieck nach den Kongruenzsätzen SsW oder WSW eindeutig konstruierbar ist.

Der Kosinussatz ist nur anwendbar, wenn das Dreieck nach den Kongruenzsätzen SWS oder SSS eindeutig konstruierbar ist.

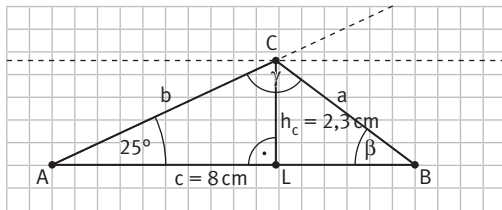
K5

11 a)



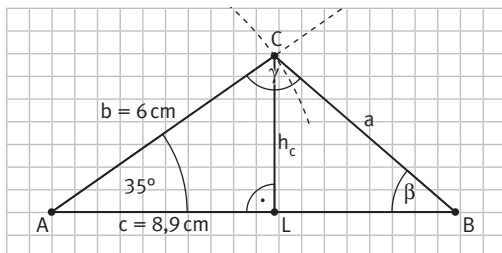
Zeichne $\overline{AB}$ mit der Länge c und den Winkel β an $\overline{AB}$ in B. Der freie Schenkel schneidet den Kreis um B mit $r = a$ in C.

b)



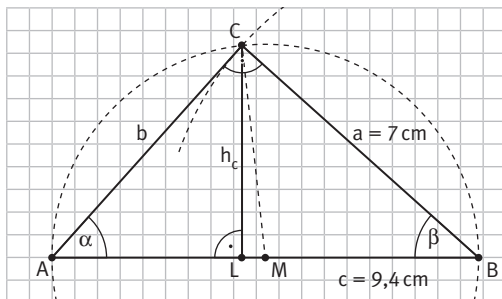
Zeichne $\overline{AB}$ mit der Länge c und den Winkel α an $\overline{AB}$ in A. Der freie Schenkel schneidet die Parallele zu $\overline{AB}$ im Abstand von $d = h_c$ in C.

c)



Zeichne $\overline{AB}$ mit der Länge c und den Winkel α an $\overline{AB}$ in A. Der freie Schenkel schneidet den Kreis um A mit $r = b$ in C.

d)



Zeichne $\overline{AB}$ mit der Länge c und den Mittelpunkt M von $\overline{AB}$. Der Thaleskreis über $\overline{AB}$ schneidet den Kreis um B mit $r = a$ in C.

Kosinussatz im Dreieck ABC:

$$b = \sqrt{3,7^2 + 9^2 - 2 \cdot 3,7 \cdot 9 \cdot \cos 45^\circ} \text{ cm} \approx 6,9 \text{ cm}$$

Sinussatz im Dreieck ABC:

$$\sin \alpha = \frac{3,7 \text{ cm}}{6,90 \text{ cm}} \cdot \sin 45^\circ \Rightarrow \alpha \approx 22,3^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - 22,3^\circ - 45^\circ = 112,7^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow h_c = b \cdot \sin \alpha = 6,9 \text{ cm} \cdot \sin 22,3^\circ \approx 2,6 \text{ cm}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 9 \text{ cm} \cdot 2,6 \text{ cm} \approx 11,7 \text{ cm}^2$$

Sinussatz im Dreieck ALC:

$$\sin \alpha = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow b = \frac{h_c}{\sin \alpha} = \frac{2,3 \text{ cm}}{\sin 25^\circ} \approx 5,44 \text{ cm}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ cm} \cdot 2,3 \text{ cm} \approx 9,2 \text{ cm}^2$$

Kosinussatz im Dreieck ABC:

$$a = \sqrt{5,44^2 + 8^2 - 2 \cdot 5,44 \cdot 8 \cdot \cos 25^\circ} \text{ cm} \approx 3,84 \text{ cm}$$

Sinussatz im Dreieck ABC:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha = \frac{5,44 \text{ cm}}{3,84 \text{ cm}} \cdot \sin 25^\circ$$

$$\Rightarrow \beta \approx 36,8^\circ \quad \gamma \approx 180^\circ - 25^\circ - 36,8^\circ = 118,2^\circ$$

Kosinussatz im Dreieck ABC:

$$a = \sqrt{6^2 + 8,9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8,9 \cdot \cos 35^\circ} \text{ cm} \approx 5,27 \text{ cm}$$

$$A = 0,5 \cdot 6 \cdot 8,9 \cdot \sin 35^\circ \text{ cm}^2 \approx 15,31 \text{ cm}^2$$

Sinussatz im Dreieck ALC:

$$\sin \alpha = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow h_c = b \cdot \sin \alpha = 6 \text{ cm} \cdot \sin 35^\circ \approx 3,44 \text{ cm}$$

Sinussatz im Dreieck ABC:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha = \frac{6}{5,27} \cdot \sin 35^\circ$$

$$\Rightarrow \beta \approx 40,8^\circ \quad \gamma \approx 180^\circ - 35^\circ - 40,8^\circ = 104,2^\circ$$

Satz des Pythagoras im Dreieck ABC:

$$b = \sqrt{9,4^2 - 7^2} \text{ cm} \approx 6,27 \text{ cm}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{7 \text{ cm}}{9,4 \text{ cm}} \Rightarrow \alpha \approx 48,13^\circ$$

$$\beta \approx 180^\circ - 90^\circ - 48,13^\circ = 41,87^\circ$$

$$A = 0,5 \cdot a \cdot b = 0,5 \cdot 7 \cdot 6,27 \text{ cm}^2 \approx 21,95 \text{ cm}^2$$

$$A = 0,5 \cdot c \cdot h_c \Leftrightarrow h_c = \frac{2A}{c} = \frac{2 \cdot 21,95}{9,4} \text{ cm} \approx 4,67 \text{ cm}$$

- K5** 12 Wenn man zweimal den Sinussatz anwendet, kann man die Anwendung des Kosinussatzes vermeiden.

Im Dreieck ABC gilt:

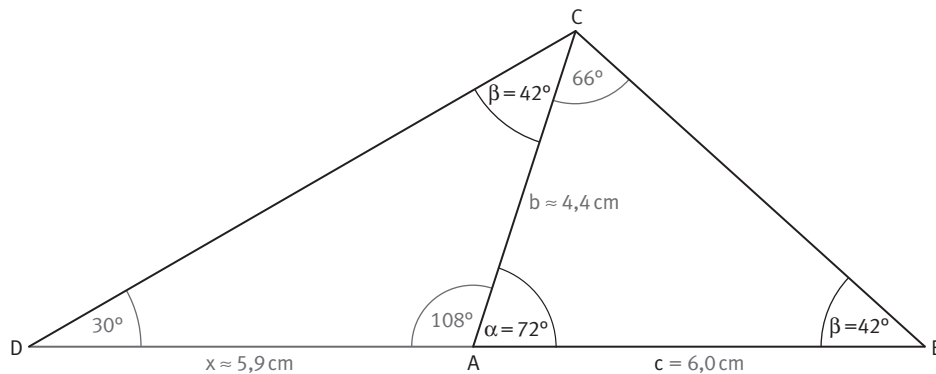
$$\gamma = 180^\circ - 72^\circ - 48^\circ = 66^\circ$$

$$\frac{\sin 66^\circ}{c} = \frac{\sin 42^\circ}{b} \Rightarrow b = c \cdot \frac{\sin 42^\circ}{\sin 66^\circ} = 6,0 \text{ cm} \cdot \frac{\sin 42^\circ}{\sin 66^\circ} \approx 4,4 \text{ cm}$$

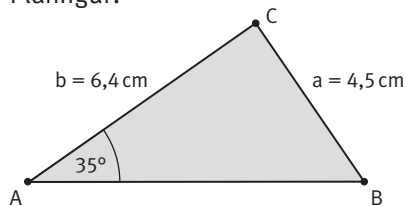
In Dreieck DBC gilt:

$$\delta = 180^\circ - 42^\circ - 108^\circ = 30^\circ$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{b} = \frac{\sin 42^\circ}{x} \Rightarrow x = b \cdot \frac{\sin 42^\circ}{\sin 30^\circ} = 4,4 \text{ cm} \cdot \frac{\sin 42^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 5,9 \text{ cm}$$



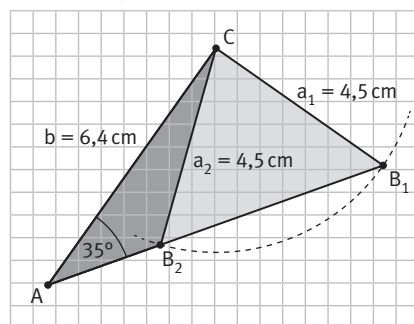
- K5** 13 a) Planfigur:



Beschreibung:

1. Zeichne die Strecke b mit den Eckpunkten A und C.
2. Trage in A den Winkel α an.
3. Zeichne einen Kreisbogen um C mit Radius a.
4. Der Schnittpunkt des freien Schenkels von α und des Kreisbogens ergibt B.

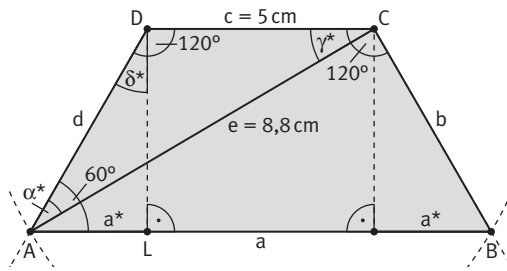
Zeichnung:



- b) Es gibt zwei mögliche Lösungen, da für eine Konstruktion nach SsW der gegebene Winkel der längeren Seite gegenüberliegen müsste. Hier ist das nicht der Fall, denn $a < b$.
- c) $\frac{\sin 35^\circ}{\sin \beta} = \frac{4,5 \text{ cm}}{6,4 \text{ cm}} \Rightarrow \sin \beta = 6,4 \text{ cm} \cdot \frac{\sin 35^\circ}{4,5 \text{ cm}} \Rightarrow \beta_1 \approx 54,7^\circ$
 $\beta_2 = 180^\circ - 54,7^\circ = 125,3^\circ$
- d) $c_1 \approx 7,9 \text{ cm}$; $c_2 \approx 2,6 \text{ cm}$

KX

14



Das Winkelmaß α im Trapez beträgt $\frac{360^\circ - 120^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

Das Winkelmaß δ^* im rechtwinkligen Dreieck ALD beträgt $180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Mit dem Sinussatz gilt im Dreieck ACD für die Winkelmaße α^* und γ^* :

$$\frac{e}{\sin 120^\circ} = \frac{c}{\sin \alpha^*} \Leftrightarrow \sin \alpha^* = \frac{c}{e} \cdot \sin 120^\circ = \frac{5}{8,8} \cdot \sin 120^\circ \Rightarrow \alpha^* \approx 29,5^\circ$$

$$\gamma^* = 180^\circ - 120^\circ - 29,5^\circ = 30,5^\circ$$

Mit dem Sinussatz gilt für $|\overline{AD}| = d$:

$$\frac{5 \text{ cm}}{\sin 29,5^\circ} = \frac{d}{\sin 30,5^\circ} \Leftrightarrow d = \frac{\sin 30,5^\circ}{\sin 29,5^\circ} \cdot 5 \text{ cm} \approx 5,2 \text{ cm}$$

Im rechtwinkligen Dreieck ALD gilt für $|\overline{AL}| = a^*$:

$$a^* = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} \cdot d = \sin 30^\circ \cdot 5,2 \text{ cm} = 2,6 \text{ cm}$$

Im Trapez gilt für $|\overline{AB}| = a$:

$$a = 2a^* + 5 \text{ cm} = 10,2 \text{ cm}$$

$$\alpha = \beta = 60^\circ$$

$$\delta^* = 30^\circ$$

$$\alpha^* \approx 29,5^\circ$$

$$\gamma^* \approx 30,5^\circ$$

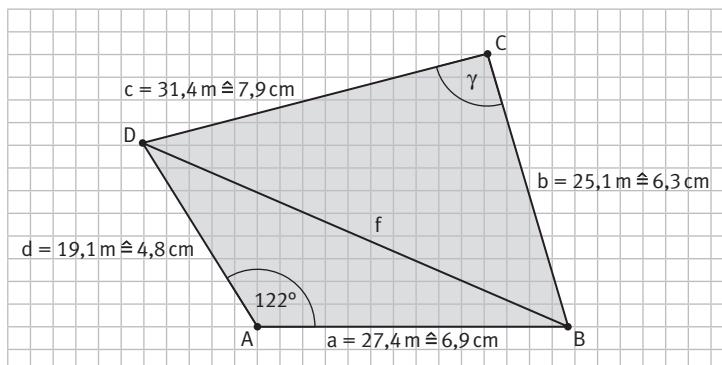
$$b = d \approx 5,2 \text{ cm}$$

$$a^* = 2,6 \text{ cm}$$

$$a = 10,2 \text{ cm}$$

K3

15 a) Maßstab 1 : 400



$$\text{b) } A_{\text{Dreieck ABD}} = \frac{1}{2} \cdot 27,4 \text{ m} \cdot 19,1 \text{ m} \cdot \sin 122^\circ \approx 221,9 \text{ m}^2$$

Kosinussatz im Dreieck ABD:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2a \cdot d \cdot \cos 122^\circ$$

$$= (27,4 \text{ m})^2 + (19,1 \text{ m})^2 - 2 \cdot 27,4 \text{ m} \cdot 19,1 \text{ m} \cdot \cos 122^\circ \approx 1670,2 \text{ m}^2$$

Kosinussatz im Dreieck BCD:

$$f^2 = (31,4 \text{ m})^2 + (25,1 \text{ m})^2 - 2 \cdot 31,4 \text{ m} \cdot 25,1 \text{ m} \cdot \cos \gamma$$

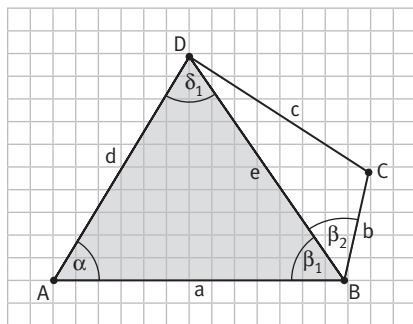
$$1670,2 \text{ m}^2 = (31,4 \text{ m})^2 + (25,1 \text{ m})^2 - 2 \cdot 31,4 \text{ m} \cdot 25,1 \text{ m} \cdot \cos \gamma$$

$$\gamma \approx 92,0^\circ$$

$$A_{\text{Dreieck BCD}} = \frac{1}{2} \cdot 31,4 \text{ m} \cdot 25,1 \text{ m} \cdot \sin 92,0^\circ \approx 393,8 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{gesamt}} = A_{\text{Dreieck ABD}} + A_{\text{Dreieck BCD}} \approx 221,9 \text{ m}^2 + 393,8 \text{ m}^2 = 615,7 \text{ m}^2$$

Der Flächeninhalt des Fischweihers beträgt ca. 616 m².

K5 16 Skizze:


Wegen der Winkelsumme im Dreieck ABD gilt:

$$\delta_1 = 180^\circ - \alpha - \beta_1 = 180^\circ - 58,8^\circ - 55,3^\circ = 65,9^\circ$$

 Mit dem Sinussatz gilt für $e = |BD|$:

$$\frac{e}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \delta_1}$$

$$\Leftrightarrow e = \frac{a}{\sin \delta_1} \cdot \sin \alpha = \frac{320 \text{ m}}{\sin 65,9^\circ} \cdot \sin 58,8^\circ \approx 299,85 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= A_{ABD} + A_{BCD} \\ &= 0,5 \cdot a \cdot e \cdot \sin \beta_1 + 0,5 \cdot e \cdot b \cdot \sin \beta_2 \\ &= 0,5 \cdot 320 \text{ m} \cdot 299,85 \text{ m} \cdot \sin 55,3^\circ + 0,5 \cdot 299,85 \text{ m} \cdot 122 \text{ m} \cdot \sin 47,4^\circ \\ &\approx 39443 \text{ m}^2 + 13464 \text{ m}^2 \\ &= 52907 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

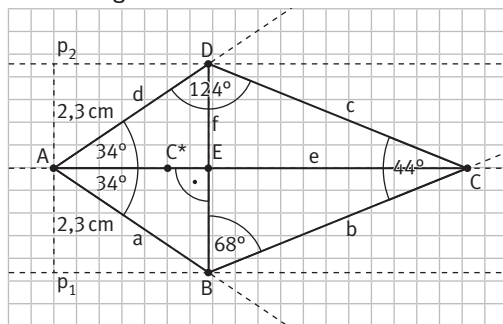
 Es werden 52907 m^2 Ackerland gewonnen.

K5 17 a) Vorüberlegung zur Konstruktion:

 Da AC die Symmetrieachse des Drachenvierecks ist, gilt: $d(B; AC) = d(D; AC) = 0,5f = 2,3 \text{ cm}$.

 Im gleichschenkligen Dreieck BCD gilt: $\beta^* = \delta^* = 0,5 \cdot (180^\circ - \gamma) = 0,5 \cdot (180^\circ - 44^\circ) = 68^\circ$.

Zeichnung:



Konstruktion:

1. Zeichne eine Gerade AC^* ; auf ihr wird C liegen, d. h.: AC^* ist die Symmetrieachse des Drachenvierecks.
2. Zeichne zwei Parallelen p_1 und p_2 zu AC^* im Abstand von $2,3 \text{ cm}$.
3. Zeichne an AC^* in A zwei Winkel mit dem Maß $\alpha^* = 0,5\alpha = 34^\circ$. Die freien Schenkel schneiden p_1 und p_2 in B und D.
4. Zeichne an $\overline{BD}$ in B einen Winkel mit dem Maß $\beta^* = 68^\circ$. Der freie Schenkel schneidet AC^* in C.

b) Im Drachenviereck gilt:

$$\beta = \delta = 0,5 \cdot (360^\circ - \alpha - \gamma) = 0,5 \cdot (360^\circ - 68^\circ - 44^\circ) = 124^\circ$$

 Im rechtwinkligen Dreieck ABE gilt für $|\overline{AB}| = a$:

$$\sin 34^\circ = \frac{2,3 \text{ cm}}{a} \Leftrightarrow a = \frac{2,3 \text{ cm}}{\sin 34^\circ} \approx 4,1 \text{ cm}$$

 Im rechtwinkligen Dreieck BCE gilt für $|\overline{BC}| = b$:

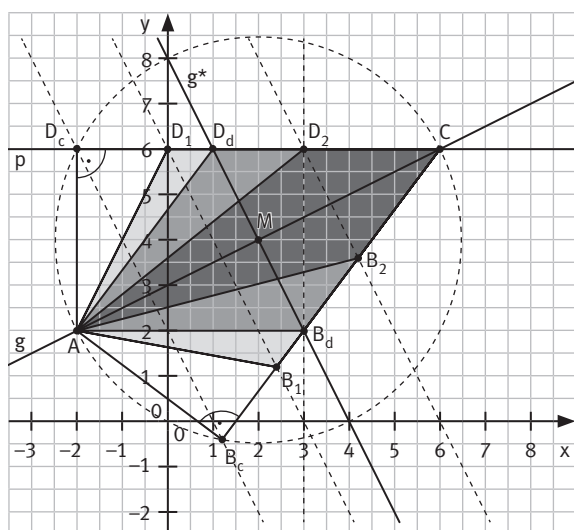
$$\cos 68^\circ = \frac{2,3 \text{ cm}}{b} \Leftrightarrow b = \frac{2,3 \text{ cm}}{\cos 68^\circ} \approx 6,1 \text{ cm}$$

 Mit dem Kosinussatz für das Dreieck ABC gilt für $|\overline{AC}| = e$:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \beta} = \sqrt{4,1^2 + 6,1^2 - 2 \cdot 4,1 \cdot 6,1 \cdot \cos 124^\circ} \text{ cm} \approx 9,1 \text{ cm}$$

K3

18



- a) $x_A = -2$ in $g: y = 0,5x + 3$ einsetzen:
 $y_A = 0,5 \cdot (-2) + 3 = 2 \Rightarrow A(-2|2)$
 $y_C = 6$ in $g: y = 0,5x + 3$ einsetzen:
 $6 = 0,5x_C + 3 \Leftrightarrow x_C = 6 \Rightarrow C(6|6)$
- b) $D_1(0|6); D_2(3|6)$
- c) Der Thaleskreis über $\overline{AC}$ schneidet p in $D_C(-2|6)$. Spiegelt man D_C an g , erhält man B_C .
- d) Die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ schneidet p in $D_d(1|6)$. Spiegelt man D_d an g , erhält man B_d .

Zu c): Die Koordinaten von D_C sind $(-2|6)$, da D_C auf p liegt und AD_C senkrecht zu p ist.

Mit $|\overline{AD_C}| = 4 \text{ cm}$ und $|\overline{D_C C}| = 8 \text{ cm}$ gilt:

$$u = 2 \cdot (|\overline{AD_C}| + |\overline{D_C C}|) = 24 \text{ cm}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{|\overline{CD_C}|}{|\overline{AD_C}|} = \frac{8 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 2 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 63,43^\circ$$

$$\alpha \approx 126,87^\circ$$

$$\gamma = 360^\circ - 180^\circ - 126,87^\circ = 53,13^\circ$$

Zu d): D_d liegt auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$, d. h. auf der Geraden g^* mit der Steigung -2 .

Da $M_{\overline{AC}}(2|4)$ ebenfalls auf g^* liegt, erhält man die Gleichung von g^* , indem man die Koordinaten von $M_{\overline{AC}}$ in $g^*: y = -2x + t$ einsetzt. Man erhält $t = 8$ bzw. $g^*: y = -2x + 8$.

Durch Gleichsetzen von p und g^* erhält man die Koordinaten von D_d :

$$6 = -2x + 8 \Leftrightarrow x = 1 \text{ bzw. } D_d(1|6).$$

Mit der Seitenlänge $|\overline{CD_d}| = 5 \text{ cm}$ gilt:

$$u = 4 \cdot |\overline{CD_d}| = 4 \cdot 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

Mit der Höhe $h = 2 \text{ cm}$ gilt im Dreieck AB_dM :

$$A^* = 0,5 \cdot 5 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 5 \text{ cm}^2$$

Für die Raute AB_dCD_d gilt mit $A = 4 \cdot A^*$:

$$A = 20 \text{ cm}^2$$

Für das Dreieck AB_dD_d gilt:

$$A' = 0,5 \cdot |\overline{AB_d}| \cdot |\overline{AD_d}| \cdot \sin \alpha = 0,5 \cdot 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} \cdot \sin \alpha = 12,5 \text{ cm}^2 \cdot \sin \alpha$$

Mit $A' = 10 \text{ cm}^2$ folgt:

$$12,5 \text{ cm}^2 \cdot \sin \alpha = 10 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow \sin \alpha = 0,8 \Rightarrow \alpha \approx 53,13^\circ$$

$$\alpha = \gamma \approx 53,13^\circ$$

$$\beta = \delta \approx 180^\circ - 53,13^\circ = 126,87^\circ$$

K1

- 19 a) Da B und D auf dem Thaleskreis um M über $\overline{AC}$ liegen, ist das Drachenviereck $ABCD$ bei B und D rechtwinklig. Hier gilt: $\sin \delta = \sin 90^\circ = 1$ und $\cos \beta = \cos 90^\circ = 0$.

$$\text{b) } \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{f}{d} = \frac{e}{a} = \frac{c}{g+h} = \frac{b}{g+h}$$

$$\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{f}{c} = \frac{e}{b} = \frac{d}{g+h} = \frac{a}{g+h}$$

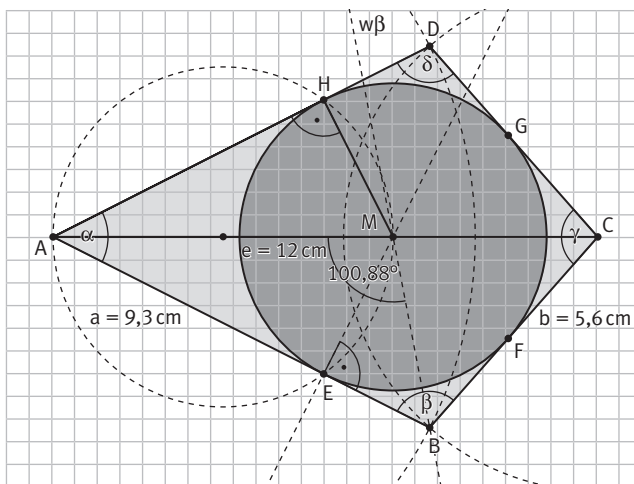
$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{g}{d} = \frac{g}{a} = \frac{d}{g+h} = \frac{a}{g+h}$$

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{h}{c} = \frac{h}{b} = \frac{c}{g+h} = \frac{b}{g+h}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{f}{g} = \frac{e}{g} = \frac{c}{d} = \frac{b}{a}$$

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{f}{h} = \frac{e}{h} = \frac{d}{c} = \frac{a}{b}$$

K3 20 a)



1. Zeichne die Strecke $\overline{AC}$ mit Länge $e = 12 \text{ cm}$.
2. Die Kreise um A mit $r = a = 9,3 \text{ cm}$ und um C mit $r = b = 5,6 \text{ cm}$ schneiden sich in B und D.
3. AC ist Winkelhalbierende der Winkel α und γ , w_β ist Winkelhalbierende des Winkels β .
4. AC und w_β schneiden sich in M, dem Mittelpunkt des Inkreises.
5. Der Thaleskreis über $\overline{AM}$ schneidet $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ in den Inkreispunkten E und H.
6. Zeichne den Inkreis als Kreis um M mit $r = |\overline{ME}|$.

Im Dreieck ABC gilt mit dem Kosinussatz und dem Sinussatz:

$$\cos \beta = \frac{(9,3 \text{ cm})^2 + (5,6 \text{ cm})^2 - (12 \text{ cm})^2}{2 \cdot 9,3 \text{ cm} \cdot 5,6 \text{ cm}} \Rightarrow \beta \approx 104,54^\circ$$

$$\beta = \delta \approx 104,54^\circ$$

$$\frac{\sin \beta}{e} = \frac{\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{b} \Leftrightarrow \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) = b \cdot \frac{\sin \beta}{e} = 5,6 \text{ cm} \cdot \frac{\sin 104,54^\circ}{12 \text{ cm}} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 26,85^\circ$$

$$\alpha \approx 53,70^\circ$$

$$\gamma \approx 360^\circ - 2 \cdot 104,54^\circ - 53,70^\circ$$

$$\gamma \approx 97,22^\circ$$

$$\text{b) } A_{\text{Drachen}} = 2 \cdot A_{\text{ABC}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \beta = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9,3 \text{ cm} \cdot 5,6 \text{ cm} \cdot \sin 104,54^\circ \quad A_{\text{Drachen}} \approx 50,41 \text{ cm}^2$$

$$\text{Im Dreieck ABM gilt: } \angle AMB = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180^\circ - 26,85^\circ - 52,27^\circ = 100,88^\circ$$

$$\text{Mit dem Sinussatz folgt: } \frac{|\overline{MB}|}{\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{9,3 \text{ cm}}{\sin 100,88^\circ} \Leftrightarrow |\overline{MB}| = \sin 26,85^\circ \cdot \frac{9,3 \text{ cm}}{\sin 100,88^\circ} \approx 4,28 \text{ cm}$$

Im rechtwinkligen Dreieck BME gilt für den Inkreisradius $r = |\overline{ME}|$:

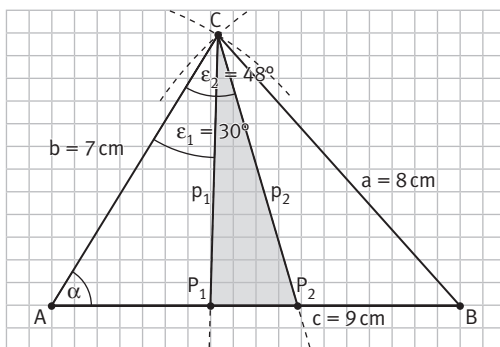
$$\sin \left(\frac{\beta}{2} \right) = \frac{r}{|\overline{MB}|} \Leftrightarrow r = \sin \left(\frac{\beta}{2} \right) \cdot |\overline{MB}| = \sin 52,27^\circ \cdot 4,28 \text{ cm} \approx 3,39 \text{ cm}$$

$$\text{Es folgt für den Flächeninhalt des Inkreises mit } r = 3,39 \text{ cm: } A_{\text{Inkreis}} = (3,39 \text{ cm})^2 \pi \approx 36,10 \text{ cm}^2$$

$$\frac{A_{\text{Inkreis}}}{A_{\text{Drachen}}} = \frac{36,10 \text{ cm}^2}{50,41 \text{ cm}^2} \approx 0,71$$

Die Fläche des Inkreises nimmt 71 % der Fläche des Drachenvierecks ein.

K3 21 a)



b) Mit dem Kosinussatz im Dreieck ABC gilt:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 9^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 9} \Rightarrow \alpha \approx 58,41^\circ$$

c) In den Dreiecken $\triangle AP_1C$ und $\triangle AP_2C$ gilt:

$$\angle AP_1C = 180^\circ - 30^\circ - 58,41^\circ = 91,59^\circ$$

$$\angle AP_2C = 180^\circ - 48^\circ - 58,41^\circ = 73,59^\circ$$

Sinussatz in den Dreiecken $\triangle AP_1C$ und $\triangle AP_2C$:

$$\frac{|\overline{CP_1}|}{\sin 58,41^\circ} = \frac{7 \text{ cm}}{\sin 91,59^\circ} \Leftrightarrow |\overline{CP_1}| = \sin 58,41^\circ \cdot \frac{7 \text{ cm}}{\sin 91,59^\circ} \Rightarrow |\overline{CP_1}| \approx 5,97 \text{ cm}$$

$$\frac{|\overline{CP_2}|}{\sin 58,41^\circ} = \frac{7 \text{ cm}}{\sin 73,59^\circ} \Leftrightarrow |\overline{CP_2}| = \sin 58,41^\circ \cdot \frac{7 \text{ cm}}{\sin 73,59^\circ} \Rightarrow |\overline{CP_2}| \approx 6,22 \text{ cm}$$

d) Für den Flächeninhalt A_c des Dreiecks $\triangle P_2CP_1$ gilt mit $\angle P_1CP_2 = 48^\circ - 30^\circ = 18^\circ$:

$$A_c = \frac{1}{2} \cdot 5,97 \text{ cm} \cdot 6,22 \text{ cm} \cdot \sin 18^\circ \approx 5,74 \text{ cm}^2$$

$$\text{Für den Flächeninhalt } A_{\text{gesamt}} \text{ des Dreiecks ABC gilt: } A_{\text{gesamt}} = \frac{1}{2} \cdot 7 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm} \cdot \sin 58,41^\circ \approx 26,83 \text{ cm}^2$$

$$\text{Anteil: } \frac{A_c}{A_{\text{gesamt}}} = \frac{5,74}{26,83} \approx 0,214 = 21,4 \%$$

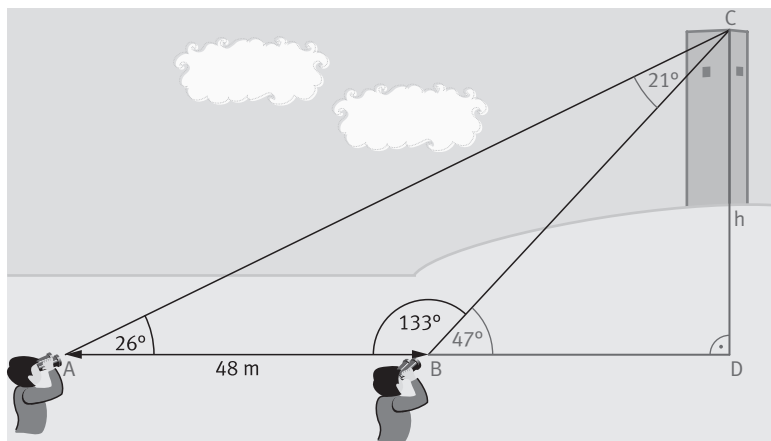
Das Teildreieck $\triangle P_2CP_1$ nimmt 21,4 % an der Gesamtfläche des Dreiecks ABC ein.

 K3 22 $\angle OUS = 180^\circ - (55,5^\circ + 79,4^\circ) = 45,1^\circ$

$$\text{Mithilfe des Sinussatzes erhält man: } |\overline{US}| = 200 \text{ m} \cdot \frac{\sin 79,4^\circ}{\sin 45,1^\circ} \approx 277,5 \text{ m}$$

Die gesuchte Entfernung beträgt ca. 277,5 m.

K2 24



$$\angle ACB = 180^\circ - (133^\circ + 26^\circ) = 21^\circ$$

$$\frac{\sin 21^\circ}{\sin 26^\circ} = \frac{48 \text{ m}}{|BC|}$$

$$\Rightarrow |BC| = 48 \text{ m} \cdot \frac{\sin 26^\circ}{\sin 21^\circ} \approx 58,7 \text{ m}$$

$$\sin 47^\circ = \frac{h}{|BC|}$$

$$\Rightarrow h = |BC| \cdot \sin 47^\circ \approx 42,9 \text{ m}$$

Der Höhenunterschied beträgt ca. 42,9 m.

K3

25 a) Nach dem Brechungsgesetz von Snellius gilt: $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{\sin 37^\circ}{1,6} \Rightarrow \beta \approx 22,09^\circ$

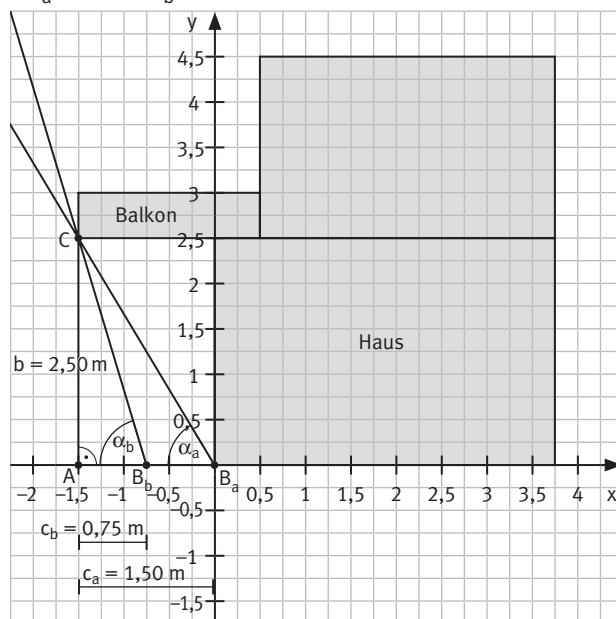
b) Für die Länge s gilt mit Plattendicke $p = 2,5 \text{ cm}$: $\cos \beta = \frac{p}{s} \Leftrightarrow s = \frac{p}{\cos \beta} = \frac{2,5 \text{ cm}}{\cos 22,09^\circ} \approx 2,70 \text{ cm}$

c) Es gilt: $\gamma = \alpha - \beta = 14,91^\circ$ (Wechselwinkel). Da d senkrecht auf dem Einfallsstrahl steht, gilt:

$$\sin \gamma = \frac{d}{s} \Leftrightarrow d = s \cdot \sin \gamma = 2,70 \text{ cm} \cdot \sin 14,91^\circ \approx 0,69 \text{ cm}$$

KX

26 Hinweis: Wir gehen bei der Aufgabe stillschweigend davon aus, dass die Regentropfen geradlinig fallen und der Verlauf eines einzelnen Tropfens dabei in einer Ebene liegt, die senkrecht zu den Fenstern verläuft. Zeichnerisch lässt sich die Situation dann im Querschnitt mit zwei bei A rechtwinkligen Dreiecken AB_aC bzw. AB_bC folgendermaßen darstellen:



a) Mit $b = 2,50 \text{ m}$ und $c_a = 1,50 \text{ m}$ gilt:

$$\tan \alpha_a = \frac{2,50 \text{ m}}{1,50 \text{ m}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \alpha_a = 59,0^\circ$$

b) Mit $b = 2,50 \text{ m}$ und $c_b = 0,75 \text{ m}$ gilt:

$$\tan \alpha_b = \frac{2,50 \text{ m}}{0,75 \text{ m}} = \frac{10}{3} \Rightarrow \alpha_b = 73,3^\circ$$

K2

Vorwärtseinschneiden

a) Es sind individuelle Lösungen möglich.

b) Lösungsmöglichkeit:

$$\text{Sinussatz im Dreieck ABP: } \frac{|\overline{BP}|}{\sin 104^\circ} = \frac{60 \text{ m}}{\sin 46,3^\circ} \Rightarrow |\overline{BP}| \approx 80,5 \text{ m}$$

$$\text{Sinussatz im Dreieck ABQ: } \frac{|\overline{BQ}|}{\sin 59,5^\circ} = \frac{60 \text{ m}}{\sin 37,2^\circ} \Rightarrow |\overline{BQ}| \approx 85,5 \text{ m}$$

Kosinussatz im Dreieck BQP:

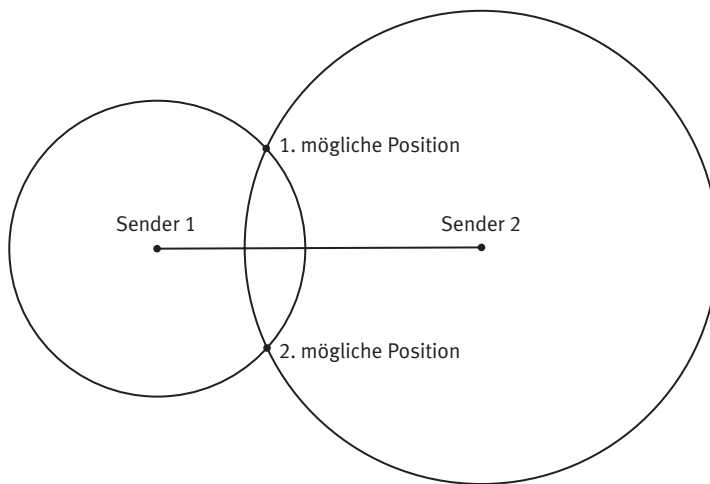
$$|\overline{PQ}|^2 = (80,5 \text{ m})^2 + (85,5 \text{ m})^2 - 2 \cdot 80,5 \text{ m} \cdot 85,5 \text{ m} \cdot \cos 53,6^\circ \Rightarrow |\overline{PQ}| \approx 75,0 \text{ m}$$

c) Es sind individuelle Lösungen möglich.

K2

Standortbestimmung mit Smartphones

a) Wenn man nur zwei Sender hat, gibt es zwei mögliche Positionen für das Handy:



b) Kosinussatz im Dreieck ABS:

$$(6,00 \text{ m})^2 = (10,00 \text{ m})^2 + (12,00 \text{ m})^2 - 2 \cdot 10,00 \text{ m} \cdot 12,00 \text{ m} \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{13}{15} \Rightarrow \alpha \approx 29,9^\circ$$

$$\cos 29,9^\circ = \frac{|\overline{AF}|}{10,00 \text{ m}} \Rightarrow |\overline{AF}| \approx 8,7 \text{ m}$$

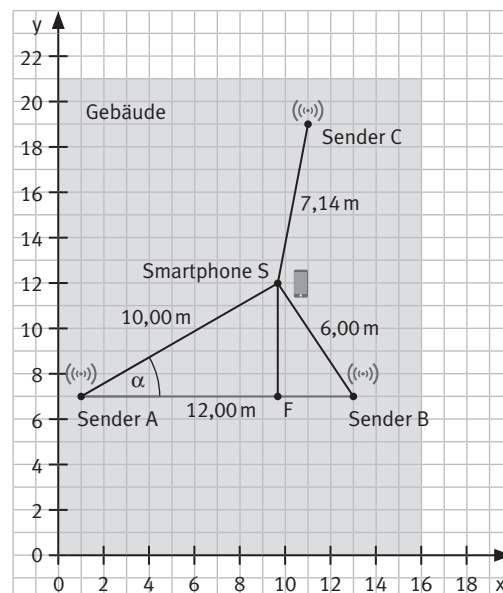
$$\sin 29,9^\circ = \frac{|\overline{SF}|}{10,00 \text{ m}} \Rightarrow |\overline{SF}| \approx 5,0 \text{ m}$$

$$\Rightarrow S_1(9,7 | 12,0) \quad S_2(9,7 | 2,0)$$

Entfernung von S_1 bzw. S_2 von C:

$$|\overline{S_1C}| = \sqrt{(11 - 9,7)^2 + (19 - 12)^2} \text{ m} \approx 7,1 \text{ m}$$

$$|\overline{S_2C}| = \sqrt{(11 - 9,7)^2 + (19 - 2)^2} \text{ m} \approx 17,0 \text{ m}$$



c) Lösungsmöglichkeit:

Berechnung des Winkels $\sphericalangle$ BAD im Hilfsdreieck ABD:

$$\tan \sphericalangle BAD = \frac{1}{6} \Rightarrow \sphericalangle BAD \approx 9,5^\circ$$

Berechnung des Winkels $\sphericalangle$ SAB im Dreieck ASB mithilfe des Kosinussatzes:

$$(6,00\text{ m})^2 = |\overline{AB}|^2 + (10,00\text{ m})^2 - 2 \cdot |\overline{AB}| \cdot 10,00\text{ m} \cdot \cos \sphericalangle SAB$$

$$(6,00\text{ m})^2 = (12,17\text{ m})^2 + (10,00\text{ m})^2 - 2 \cdot 12,17\text{ m} \cdot 10,00\text{ m} \cdot \cos \sphericalangle SAB$$

$$\Rightarrow \cos \sphericalangle SAB \approx 0,871 \Rightarrow \sphericalangle SAB \approx 29,4^\circ$$

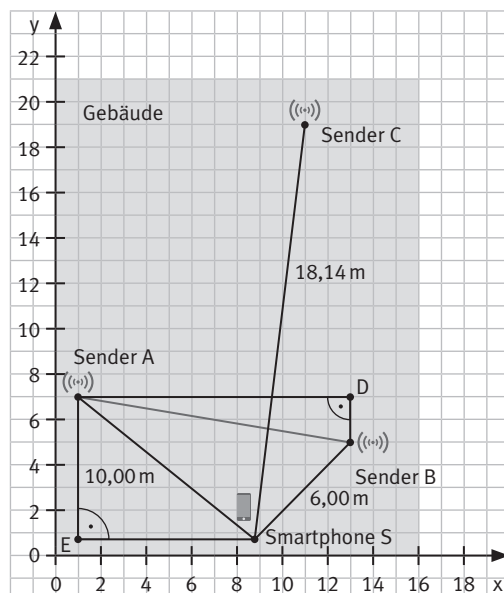
$$\Rightarrow \text{Der Winkel } \sphericalangle EAS \text{ hat das Ma\ss } 90^\circ - 9,5^\circ - 29,4^\circ = 51,1^\circ$$

$$\cos 51,1^\circ = \frac{|\overline{AE}|}{10,00\text{ m}} \Rightarrow |\overline{AE}| \approx 6,3\text{ m}$$

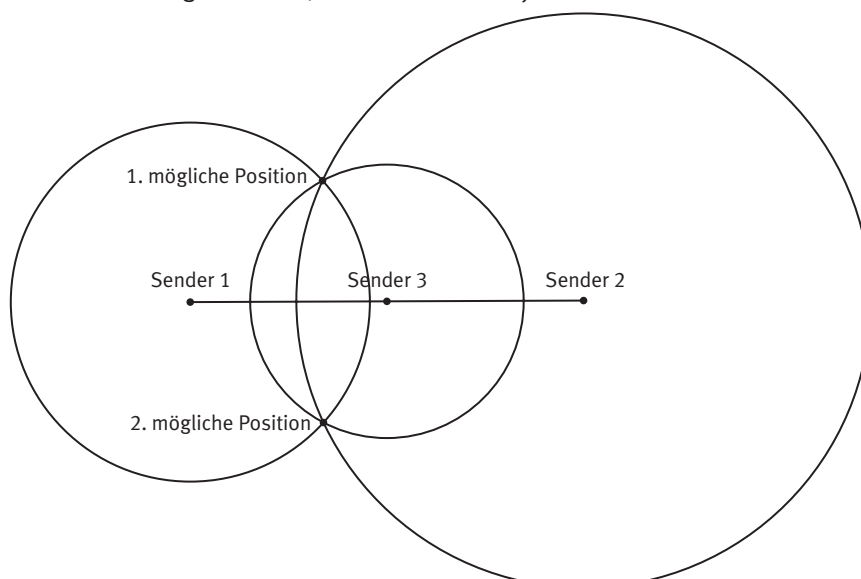
$$\sin 51,1^\circ = \frac{|\overline{ES}|}{10,00\text{ m}} \Rightarrow |\overline{ES}| \approx 7,8\text{ m}$$

$$\Rightarrow S_1(8,8|0,7) \quad S_2(8,8|13,3)$$

Die Bestätigung, dass S_1 der richtige Handy-Standort ist, ergibt sich beispielsweise mithilfe des Satzes von Pythagoras.



d) Wenn die Sender – unabhängig davon, wie viele es sind – auf einer Geraden liegen, dann gibt es immer zwei Möglichkeiten, wo sich das Handy befinden kann.



e) Es sind individuelle Lösungen möglich.

Aufgaben zur Einzelarbeit

- KX** 1 a) $\sin 35^\circ \approx 0,57$
 $\cos 35^\circ \approx 0,82$
 $\tan 35^\circ \approx 0,70$
 d) $\sin (-60,6^\circ) \approx -0,87$
 $\cos (-60,6^\circ) \approx 0,49$
 $\tan (-60,6^\circ) \approx -1,77$
- b) $\sin 270^\circ = -1$
 $\cos 270^\circ = 0$
 $\tan 270^\circ$ (nicht definiert)
 e) $\sin 180^\circ = 0$
 $\cos 180^\circ = -1$
 $\tan 180^\circ = 0$
- c) $\sin 167,5^\circ \approx 0,22$
 $\cos 167,5^\circ \approx -0,98$
 $\tan 167,5^\circ \approx -0,22$
 f) $\sin (-140^\circ) \approx -0,64$
 $\cos (-140^\circ) \approx -0,77$
 $\tan (-140^\circ) \approx 0,84$

- KX** 2 a) $\alpha_1 \approx 73,6^\circ$ $\alpha_2 \approx 156,41^\circ$
 b) $\alpha \approx 96,4^\circ$
 c) $\alpha \approx 121,4^\circ$
 d) $\alpha_1 \approx 17,7^\circ$ $\alpha_2 \approx 102,3^\circ$ $\alpha_3 \approx 137,7^\circ$
 e) $\alpha_1 \approx 17,4^\circ$ $\alpha_2 \approx 49,3^\circ$ $\alpha_3 \approx 137,4^\circ$ $\alpha_4 \approx 169,3^\circ$

- KX** 3 a) $\alpha_1 \approx -306,9^\circ$ $\alpha_2 \approx -233,1^\circ$ $\alpha_3 \approx 53,1^\circ$ $\alpha_4 \approx 126,9^\circ$
 b) $\alpha_1 \approx -168,5^\circ$ $\alpha_2 \approx -11,5^\circ$ $\alpha_3 \approx 191,5^\circ$ $\alpha_4 \approx 348,5^\circ$
 c) $\alpha_1 \approx -270^\circ$ $\alpha_2 \approx 90^\circ$
 d) $\alpha_1 \approx -225,6^\circ$ $\alpha_2 \approx -134,4^\circ$ $\alpha_3 \approx 134,4^\circ$ $\alpha_4 \approx 225,6^\circ$
 e) $\alpha_1 \approx -275,7^\circ$ $\alpha_2 \approx -84,3^\circ$ $\alpha_3 \approx 84,3^\circ$ $\alpha_4 \approx 275,7^\circ$
 f) $\alpha_1 \approx -180^\circ$ $\alpha_2 \approx 180^\circ$
 g) $\alpha_1 \approx -291,8^\circ$ $\alpha_2 \approx -111,8^\circ$ $\alpha_3 \approx 68,2^\circ$ $\alpha_4 \approx 248,2^\circ$
 h) $\alpha_1 \approx -234,5^\circ$ $\alpha_2 \approx -54,5^\circ$ $\alpha_3 \approx 125,5^\circ$ $\alpha_4 \approx 305,5^\circ$

- KX** 4 a) $\alpha_1 \approx 20,5^\circ$ $\alpha_2 \approx 159,5^\circ$ b) $\alpha_1 \approx 56,6^\circ$ $\alpha_2 \approx 123,4^\circ$
 $\alpha_3 \approx 200,5^\circ$ $\alpha_4 \approx 339,5^\circ$ $\alpha_3 \approx 236,6^\circ$ $\alpha_4 \approx 303,4^\circ$
 c) $\alpha_1 \approx 56,3^\circ$ $\alpha_2 \approx 123,7^\circ$ d) $\alpha \in [0^\circ; 30^\circ]$ $\alpha \in]150^\circ; 210^\circ]$
 $\alpha_3 \approx 236,3^\circ$ $\alpha_4 \approx 303,7^\circ$ $\alpha \in]330^\circ; 360^\circ]$

- KX** 5 a) Die Aussage ist wahr, denn:
 $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$
 $\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - 0,64^2 \approx 0,59$
 $\sin \beta = \sqrt{\sin^2 \beta} = \sqrt{0,59} \approx 0,77$
 $\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{0,77}{0,64} \approx 1,2$

- KX** 6 a) $m = \tan 8,5^\circ \approx 0,15$ b) $m = \tan 45^\circ = 1$ c) $m = \tan 60^\circ \approx 1,73$

- KX** 7 a) $y = -x - 2,5$ $m = -1$ $S(-2,5|0)$
 Es gibt keinen Schnittpunkt mit der positiven x-Achse.
 b) $y = \frac{1}{4}x + 1$ $m = \frac{1}{4}$ $S(-4|0)$
 Es gibt keinen Schnittpunkt mit der positiven x-Achse.
 c) $y = -3x + 6$ $m = -3$ $S(2|0)$
 $\tan \alpha = -3 \Leftrightarrow \alpha \approx -71,6^\circ$
 d) $y = 3,5$ $m = 0$
 Die Gerade verläuft parallel zur x-Achse, es gibt keinen Schnittpunkt mit der Achse.

- KX** 8 a) $y = 0,5x$ $m = 0,5$ $\tan \varepsilon = 0,5 \Leftrightarrow \varepsilon \approx 26,6^\circ$
 b) $y = -3x$ $m = -3$ $\tan \varepsilon = -3 \Leftrightarrow \varepsilon \approx -71,6^\circ$
 c) $y = -2x$ $m = -2$ $\tan \varepsilon = -2 \Leftrightarrow \varepsilon \approx -63,4^\circ$

- KX** 9 r: $y = -\frac{5}{3}x$ s: $y = 0,5x$ t: $y = 0,5x - 1,5$

Die Geraden s und t haben beide die Steigung $m = 0,5$ und verlaufen demnach parallel und haben keinen Schnittpunkt.

Die Winkel zwischen r und s sowie zwischen r und t sind identisch, da s und t parallel sind.

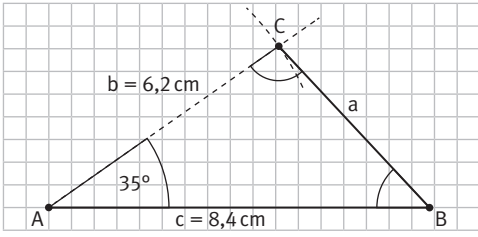
$$m_1 = \tan \alpha_1 = -\frac{5}{3} \Rightarrow \alpha_1 \approx -59,0^\circ$$

$$m_2 = \tan \alpha_2 = 0,5 \Rightarrow \alpha_2 \approx 26,6^\circ$$

$$\alpha = \alpha_1 + |\alpha_2| = 26,6^\circ + 59,0^\circ \approx 85,6^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha = 94,4^\circ$$

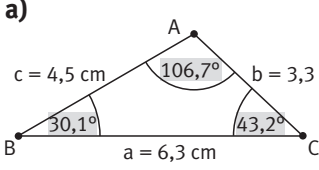
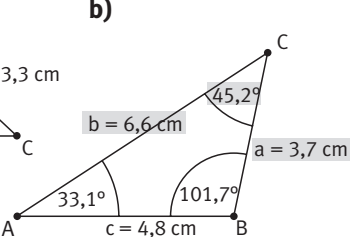
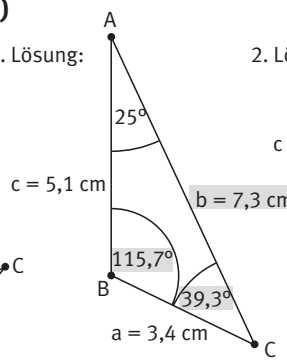
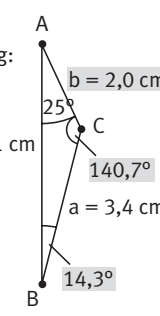
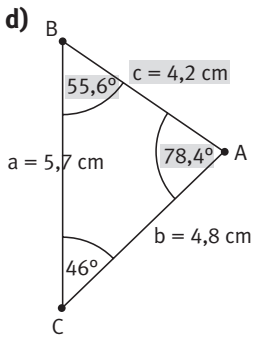
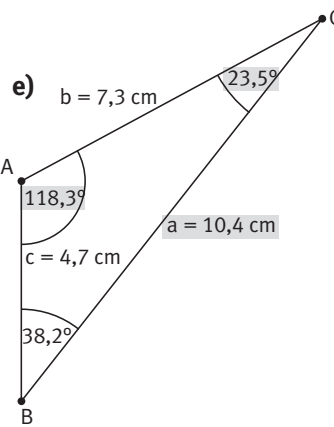
- KX** 10 Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel mit $\alpha = 100^\circ$:
 $\sin 100^\circ \approx 0,98$ und $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$, d. h.: $\sin 100^\circ > \frac{\sqrt{2}}{2}$, aber $\tan 100^\circ \approx -5,67$.

- KX** 11 a)  Zeichne $\overline{AB}$ mit $c = 8,4$ cm und bei A den Winkel mit dem Maß $\alpha = 35^\circ$.
 Der freie Schenkel schneidet den Kreis um A mit $r = b = 6,2$ cm in C.

- b) Mit dem Kosinussatz ergibt sich:
 $a = \sqrt{6,2^2 + 8,4^2 - 2 \cdot 6,2 \cdot 8,4 \cdot \cos 35^\circ} \text{ cm} \approx 4,87 \text{ cm}$

- KX** 12 a) $\alpha = \gamma \approx 53,1^\circ$; $\beta \approx 73,8^\circ$; $h_b = 5,2$ cm
 b) $A = \frac{1}{2} \cdot 7,8 \text{ cm} \cdot 5,2 \text{ cm} = 20,3 \text{ cm}^2$
 $A = \frac{1}{2} \cdot (6,5 \text{ cm})^2 \cdot \sin 73,8^\circ \approx 20,3 \text{ cm}^2$

- KX** 13 $\sin \alpha = \frac{h}{a} \Rightarrow a = b = c = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{8,9 \text{ cm}}{\sin 60^\circ} \approx 10,3 \text{ cm}$

- KX** 14 a)  b)  c) 1. Lösung:  2. Lösung:  d)  e) 

KX

- 15 a) $A \approx 4,6 \text{ cm}^2$
 b) $A \approx 662,7 \text{ mm}^2$
 c) $A \approx 16,1 \text{ cm}^2$

Bei c) berechnet man zuerst mithilfe des Sinussatzes den Winkel α , anschließend anhand der Winkelsumme im Dreieck den Winkel γ , bevor man dann mit a, b und γ den Flächeninhalt bestimmt.

KX

- 16 a) Mit rechtwinkligem Dreieck CMF folgt:

$$\frac{h}{|\overline{MC}|} = \tan \alpha = \frac{8,7 \text{ dm}}{5,6 \text{ dm}} \approx 1,5 \quad \alpha \approx 56,9^\circ$$

- b) Mit $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAC = 75^\circ$ folgt $\sphericalangle ACB = 30^\circ$, da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt. Da das Dreieck ABC ein gleichschenkliges Dreieck ist, folgt, dass die Dreiecke MBC und AMC rechtwinklig und zueinander kongruent sind. Es folgt: $\sphericalangle MCB = \sphericalangle ACM = 15^\circ$.

$$\frac{|\overline{MC}|}{|\overline{BC}|} = \cos \sphericalangle MCB$$

$$|\overline{BC}| = \frac{|\overline{MC}|}{\cos \sphericalangle MCB} = \frac{5,6 \text{ dm}}{\cos 15^\circ} \approx 5,8 \text{ dm} \quad |\overline{BF}| = |\overline{AF}| = \sqrt{h^2 + |\overline{BC}|^2} \approx 10,5 \text{ dm}$$

$$|\overline{MF}| = \sqrt{h^2 + |\overline{MC}|^2} \approx 10,3 \text{ dm}$$

$$|\overline{MB}| = |\overline{AM}| = \sqrt{|\overline{BF}|^2 - |\overline{MF}|^2} \approx 2,0 \text{ dm} \quad |\overline{AB}| = |\overline{MB}| + |\overline{AM}| = 4,0 \text{ dm}$$

$$\frac{|\overline{MF}|}{|\overline{BF}|} = \sin \sphericalangle FBM = \frac{10,3 \text{ dm}}{10,5 \text{ dm}} \approx 0,98 \quad \sphericalangle FBM = \sphericalangle FBA = \sphericalangle BAF \approx 78,8^\circ$$

$$\frac{|\overline{MB}|}{|\overline{BF}|} = \sin \sphericalangle MFB = \frac{2,0 \text{ dm}}{10,5 \text{ dm}} \approx 0,19 \quad \sphericalangle MFB \approx 11,0^\circ$$

$$\sphericalangle AFB = 2 \cdot \sphericalangle MFB = 2 \cdot 11,0^\circ = 22,0^\circ$$

((? Aufgaben für Lernpartner würde hier noch auf die Seite passen, dann müsste aber wieder eine Vakant-Seite ans Ende ...))

Aufgaben für Lernpartner

- K1/6** A Das ist richtig.
- K1/6** B Das ist falsch, die Werte von Sinus und Kosinus sind immer kleiner oder gleich 1, der Tangens nimmt auch Werte größer als 1 an.
- K1/6** C Das ist richtig.
- K1/6** D Das ist falsch, die Kosinuswerte wiederholen sich am Einheitskreis alle 360° (Periode 360°).
- K1/6** E Das ist falsch. Gegenbeispiel mit $\gamma = 90^\circ$: $\sin(90^\circ - 90^\circ) \neq \sin 90^\circ$
- K1/6** F Das ist falsch. Gegenbeispiel mit $\beta = 0^\circ$: $\sin^2 0^\circ - \cos^2 0^\circ = -1 \neq 1$
- K1/6** G Das ist falsch, da der Sinussatz bei drei gegebenen Längenmaßen nur einen Wert zum Verhältnis zweier Innenwinkel, aber keinen exakten Wert für einen Innenwinkel liefert.
- K1/6** H Das ist falsch, der Kosinussatz gilt in beliebigen Dreiecken, somit auch in gleichseitigen Dreiecken.

Besondere Winkelmaße und -beziehungen

KX

1

α	30°	150°	210°	330°
$\sin \alpha$	0,5	0,5	-0,5	-0,5
$\cos \alpha$	0,9	-0,9	-0,9	0,9
$\tan \alpha$	0,6	-0,6	0,6	-0,6

K5

2

- a) $\sin(180^\circ - \alpha) = +\sin \alpha$ $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
 b) $\cos(-\alpha) = +\cos \alpha$
 c) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(+\alpha)$ $\cos(180^\circ - \alpha) = +\cos(180^\circ + \alpha)$
 d) $\cos 133^\circ = -\cos(146^\circ - 99^\circ)$
 e) $\tan(\alpha - 180^\circ) = +\tan \alpha$ $\tan(\alpha - 360^\circ) = +\tan \alpha$ $\tan(\alpha - 2\alpha) = -\tan \alpha$

K5

3

- a) $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ b) $\tan 70^\circ > \tan 60^\circ$ c) $\sin 20^\circ < \sin 70^\circ$ d) $\cos 40^\circ > \cos 60^\circ$
 e) $\tan 45^\circ = 1$ f) $\cos 0^\circ + \cos 90^\circ = 1$ g) $\tan 60^\circ > 1$ h) $\sin 90^\circ + \cos 0^\circ = 2$

K1

4

- a) Aus $\sin \alpha = \frac{h}{b}$ und $\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{h}{b}$ folgt $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.
 b) Aus $\cos \alpha = \frac{c}{b} = \frac{c}{2b}$ und $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{c}{b} = \frac{c}{2b}$ folgt $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.

Sinus, Kosinus und Tangens anwenden

K6

5

- a) Rechtwinklige Dreiecke sind: ABM, AMC, ACS, ABS, AMS.
 b) $|\overline{MS}|^2 = |\overline{AS}|^2 + |\overline{AM}|^2$ $(|\overline{AB}|)^2 = |\overline{BM}|^2 + |\overline{AM}|^2$
 c) Dreieck AMS:
 $\sin \sphericalangle ASM = \frac{|\overline{AM}|}{|\overline{SM}|}$ $\cos \sphericalangle ASM = \frac{|\overline{AS}|}{|\overline{SM}|}$ $\tan \sphericalangle ASM = \frac{|\overline{AM}|}{|\overline{AS}|}$
 $\sin \sphericalangle SMA = \frac{|\overline{AS}|}{|\overline{SM}|}$ $\cos \sphericalangle SMA = \frac{|\overline{AM}|}{|\overline{SM}|}$ $\tan \sphericalangle SMA = \frac{|\overline{AS}|}{|\overline{AM}|}$

K6

6

- Sei c die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck ABC, dann gilt:
 $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{\tan \alpha}$

K1/6

7

- Antwort C: Die Anwendung des Kosinussatzes im rechtwinkligen Dreieck ergibt den Satz des Pythagoras.
 Begründung: Mit c als Hypotenuse und $\gamma = 90^\circ$ folgt:
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 90^\circ = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2$
 Der Satz des Pythagoras kann als Sonderfall des Kosinussatzes angesehen werden.

KX

8

- Zerlegt man ein beliebiges Dreieck entlang einer Höhe in zwei Teildreiecke, so kann man die bekannten Zusammenhänge für $\sin \alpha$, $\sin \beta$ und $\sin \gamma$ erkennen, aus denen der Sinussatz folgt. Dass der Sinussatz auch für stumpfwinklige Dreiecke anwendbar ist, wird in Beispiel II zum Sinussatz (Seite 92/93) unter Verwendung der Supplementbeziehung $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ gezeigt.

Startklar

Terme

- 1** Die Terme 3 und 4 und die Terme 5 und 8 sind äquivalent zueinander.

Funktionen

- 2** a) $D = \{-4,5; -4; -3,5; -3; -2,5\}$; $W = \{-3; 0; 2; 2,3\}$
 b) Georg hat Recht, da die Zuordnung jedem $x \in D$ jeweils genau ein $y \in W$ zuordnet.

- 3** a) $f: y = -2,3x$

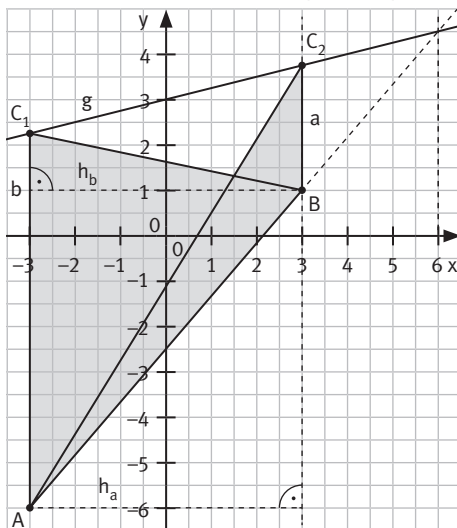
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6,9	4,6	2,3	0	-2,3	-4,6	-6,9	-9,2

- b) Die Nullstelle der Funktion f kann aus der Wertetabelle abgelesen werden, sie liegt bei $x = 0$.

- 4** A – p_5 : nach unten geöffnete und gestauchte Parabel mit $S(-1|0)$
 B – p_3 : Gerade mit y-Achsenabschnitt $t = 1$
 C – p_2 : nach oben geöffnete und gestreckte Parabel mit $S(1|1)$
 D – p_1 : nach oben geöffnete Parabel mit $S(-2|0)$
 E – p_4 : nach unten geöffnete und gestreckte Parabel mit $S(0|-1)$

Funktionale Abhängigkeiten

- 5** a) Es sind individuelle Lösungen möglich, z. B.: b) $C_n(x|0,25x + 3)$



$C_1(-3|2,25)$ mit $b = 8,25$ LE, $h_b = 6$

LE: $A_{ABC_1} = 24,75$ FE

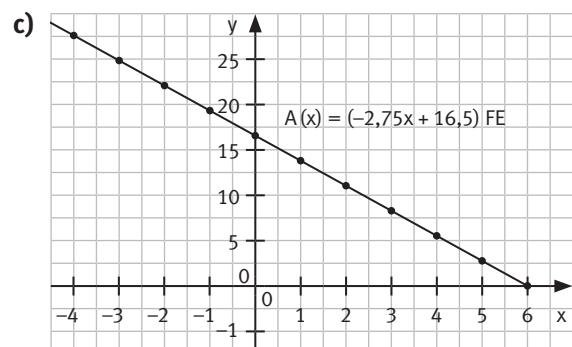
$C_2(3|3,75)$ mit $a = 2,75$ LE, $h_a = 6$

LE: $A_{ABC_2} = 8,25$ FE

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}; \vec{AC_n} = \begin{pmatrix} x+3 \\ 0,25x+9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{ABC_n}(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 6 & x+3 \\ 7 & 0,25x+9 \end{vmatrix} \right| \text{ FE} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1,5x + 54 - 7x - 21) \text{ FE} \\ &= (-2,75x + 16,5) \text{ FE} \end{aligned}$$

Damit $A(x)$ positiv ist, muss gelten:
 $-2,75x + 16,5 > 0 \Leftrightarrow x < 6$



c)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	27,5	24,75	22	19,25	16,5	13,75	11	8,25	5,5	2,75	0

4 Trigonometrische Terme und Funktionen

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:

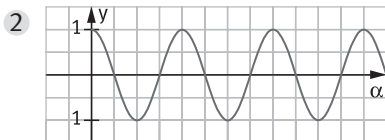
Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K6

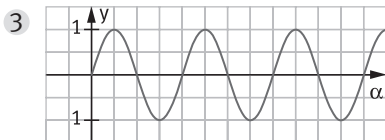
- Der Schatten des Stiftes auf dem Boden bzw. an der Wand beschreibt jeweils eine Strecke der Länge 2 dm.

K1

- Projektion der Bewegung an die Wand: Der Schatten startet bei $y = 1$.



Projektion der Bewegung auf den Boden: Der Schatten befindet sich zunächst bei $y = 0$. Außerdem bewegt er sich bei $y \approx 0$ schneller als bei $y \approx \pm 1$.



Die Kurven 1 und 4 mit „Knicken“ kommen nicht in Frage, weil die Schattenbewegung einer Sinus- bzw. Kosinuskurve folgen muss.

Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.

Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Entdecken

- KX** ■ Lösungsmöglichkeit: Betrachtet man zuerst das Dreieck ACD, so lässt sich jeweils eine Gleichung für den Kosinus und den Sinus von β aufstellen, wobei die Ankathete von β die Strecke $\overline{AC}$ und die Gegenkathete die Strecke $\overline{CD}$ ist. Die Hypotenuse hat die vorgegebene Länge 1 LE.
- Betrachtet man nun das Dreieck ABC und stellt die Gleichung zum Sinus von α auf, so kann die Länge $|\overline{AC}|$ der Hypotenuse mithilfe der obigen Gleichung durch den Kosinus von β ersetzt werden. Diese Gleichung wird anschließend nach $|\overline{BC}|$ aufgelöst.
- Analog geht man beim Betrachten des Dreiecks DFC vor. Hier wird der Kosinus von α berechnet, die Länge der Hypotenuse $|\overline{CD}|$ durch den Sinus von β ersetzt und anschließend nach $|\overline{FD}|$ aufgelöst.
- Zuletzt betrachtet man das Dreieck AED und berechnet den Sinus des Winkels $(\alpha + \beta)$. Die Hypotenuse beträgt wieder 1 LE.
- Die Länge $|\overline{ED}|$ wird aufgeteilt in $|\overline{EF}| + |\overline{FD}|$, wobei $|\overline{EF}|$ aufgrund der Rechtecksform der Länge $|\overline{BC}|$ entspricht. Nun können die Gleichungen von oben eingesetzt werden und man erhält die Endgleichung $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$.
- KX** ■ Betrachte das Dreieck ACD:
 $\cos \beta = \frac{|\overline{AC}|}{1} = |\overline{AC}|$ und $\sin \beta = \frac{|\overline{CD}|}{1} = |\overline{CD}|$
- Betrachte nun das Dreieck ABC:
 $\cos \alpha = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{AB}|}{\cos \beta} \Rightarrow |\overline{AB}| = \cos \alpha \cdot \cos \beta$
- Betrachte das Dreieck DFC:
 $\sin \alpha = \frac{|\overline{FC}|}{|\overline{CD}|} = \frac{|\overline{FC}|}{\sin \beta} \Rightarrow |\overline{FC}| = \sin \alpha \cdot \sin \beta$
- Betrachte das Dreieck AED:
 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AD}|} = \frac{|\overline{AB}| - |\overline{EB}|}{1} = |\overline{AB}| - |\overline{FC}|$
- Es folgt: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$
- KX** ■ Betrachte das Dreieck FCD:
 $\cos \alpha = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{FC}|} = \frac{|\overline{CD}|}{\sin \beta} \Rightarrow |\overline{CD}| = \cos \alpha \cdot \sin \beta$
- Betrachte das Dreieck AEF:
 $\cos \alpha = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AF}|} = \frac{|\overline{AE}|}{\cos \beta} \Rightarrow |\overline{AE}| = \cos \alpha \cdot \cos \beta$
- Betrachte nun das Dreieck ABC:
 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{BD}| - |\overline{CD}|}{1} = |\overline{EF}| - |\overline{CD}| = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{AE}| + |\overline{EB}|}{1} = |\overline{AE}| + |\overline{FD}| = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$

Nachgefragt

- K1** ■ Die Behauptung ist richtig, denn:
 $\cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = \sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 90^\circ = 1$
- KX** ■ $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$

Aufgaben

- K5** 1 a) $\sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$
 $\approx 0,97$ $\approx 0,97$
- b) $\cos(180^\circ + 45^\circ) = \cos 180^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 180^\circ \cdot \sin 45^\circ$
 $\approx -0,71$ $\approx -0,71$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \sin(15^\circ + 25^\circ) &= \underbrace{\sin 15^\circ}_{\approx 0,64} \cdot \underbrace{\cos 25^\circ + \cos 15^\circ \cdot \sin 25^\circ}_{\approx 0,64} \\
 \text{d) } \cos(180^\circ - 60^\circ) &= \underbrace{\cos 180^\circ}_{=-0,5} \cdot \underbrace{\cos 60^\circ + \sin 180^\circ \cdot \sin 60^\circ}_{=-0,5} \\
 \text{e) } \sin(45^\circ - 15^\circ) &= \underbrace{\sin 45^\circ}_{=0,5} \cdot \underbrace{\cos 15^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 15^\circ}_{=0,5} \\
 \text{f) } \cos(30^\circ + 45^\circ) &= \underbrace{\cos 30^\circ}_{\approx 0,26} \cdot \underbrace{\cos 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ}_{\approx 0,26}
 \end{aligned}$$

K5

2 Es sind unterschiedliche Lösungsansätze möglich.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \cos 75^\circ &= \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sin 15^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \cos 75^\circ \stackrel{\text{siehe a)}}{=} \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

Alternativ:

$$\begin{aligned}
 \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \sin 75^\circ = \cos(90^\circ - 75^\circ) = \cos 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \quad (\text{nach Beispiel II})$$

Alternativ unter Verwendung der Additionstheoreme. Zerlegung bspw. in $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$.

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} = \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})
 \end{aligned}$$

Alternativ über Ansatz $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ mit $\alpha = 75^\circ$ und Teilaufgabe a).

$$\text{e) } \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{f) } \sin 105^\circ = \sin(180^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \quad (\text{nach c)})$$

$$\text{g) } \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{h) } \sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{i) } \cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{j) } \cos 180^\circ = -\cos 0^\circ = -1$$

K5

3 a) $\cos(90^\circ + \varepsilon) = \cos 90^\circ \cdot \cos \varepsilon - \sin 90^\circ \cdot \sin \varepsilon = 0 - 1 \cdot \sin \varepsilon = -\sin \varepsilon$

$$\text{b) } \sin(90^\circ + \varepsilon) = \sin 90^\circ \cdot \cos \varepsilon + \cos 90^\circ \cdot \sin \varepsilon = 1 \cdot \cos \varepsilon - 0 = \cos \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \cos(60^\circ - \varepsilon) - 0,5 \cdot \cos \varepsilon &= \cos 60^\circ \cdot \cos \varepsilon + \sin 60^\circ \cdot \sin \varepsilon - 0,5 \cdot \cos \varepsilon \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \cos \varepsilon + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin \varepsilon - 0,5 \cdot \cos \varepsilon \\
 &= 0,5 \cdot \cos \varepsilon + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin \varepsilon \\
 &= \frac{1}{2}(\cos \varepsilon + \sqrt{3} \cdot \sin \varepsilon)
 \end{aligned}$$

$$\text{d) } \sin(\varepsilon + 180^\circ) = \sin \varepsilon \cdot \cos 180^\circ + \cos \varepsilon \cdot \sin 180^\circ = \sin \varepsilon \cdot (-1) + \cos \varepsilon \cdot 0 = -\sin \varepsilon$$

$$\text{e) } \sin(360^\circ + \varepsilon) = \sin \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \cos(150^\circ + \varepsilon) - 0,5 \cdot \sin \varepsilon &= \cos 150^\circ \cdot \cos \varepsilon - \sin 150^\circ \cdot \sin \varepsilon - 0,5 \cdot \sin \varepsilon \\
 &= -\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \cos \varepsilon - \frac{1}{2} \cdot \sin \varepsilon - 0,5 \cdot \sin \varepsilon \\
 &= -\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \cos \varepsilon - \sin \varepsilon
 \end{aligned}$$

K1 4 Mithilfe der Formel $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ergibt sich insgesamt:

$$\sin \alpha = \frac{5}{13} \quad \cos \alpha = \frac{12}{13} \quad \cos \beta = \frac{12}{13} \quad \sin \beta = \frac{5}{13}$$

a) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} + \frac{12}{13} \cdot \frac{5}{13} = \frac{120}{169} \approx 0,71$

b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{12}{13} \cdot \frac{12}{13} - \frac{5}{13} \cdot \frac{5}{13} = \frac{119}{169} \approx 0,70$

c) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} - \frac{12}{13} \cdot \frac{5}{13} = \frac{0}{169} = 0$

d) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{12}{13} \cdot \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \cdot \frac{5}{13} = \frac{169}{169} = 1$

K6 5 a) Tony nummeriert die charakteristischen Winkel $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ und 90° mit den Ziffern $x = 0, 1, 2, 3$ und 4. Um $\sin \alpha$ zu berechnen, kann er einfach den jeweiligen Wert von x in die Formel $\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ einsetzen. Zudem weiß er, dass $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ gilt, sodass er sich die jeweiligen Kosinuswerte erschließen kann.

b) Mithilfe der Additionstheoreme lassen sich aus den Sinus- bzw. Kosinuswerten in Tonys Eselsbrücke bzw. in der Tabelle zu Beispiel II die Werte für $\sin 75^\circ$ und $\cos 75^\circ$ berechnen (siehe Aufgabe 2). Für den Tangens gilt damit:

$$\tan 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{6 + 2\sqrt{6}\sqrt{2} + 2}{6 - 2} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3}$$

c) Tony kann mithilfe von b) den Wert des Terms $\tan 255^\circ$ bestimmen:

$$\tan 255^\circ = \frac{\sin 255^\circ}{\cos 255^\circ} = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

Entdecken

KX

■ Lösungsmöglichkeit:

Zu Beginn vereinfacht Peter die Gleichung mithilfe einer Äquivalenzumformung. Anschließend möchte er den trigonometrischen Zusammenhang des Tangens ($\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$) verwenden.

Hier muss jedoch sichergestellt werden, dass der Nenner nicht null wird, also muss $\cos \alpha \neq 0$ gelten. Der Fall $\cos \alpha = 0$, also $\alpha = 90^\circ$, wird deshalb im Rahmen einer Fallunterscheidung vorab gesondert behandelt, was allerdings nicht zu einer Lösung der Gleichung führt. Im zweiten Fall kann Peter den Tangens dann „ganz normal“ anwenden und erhält die angegebene Lösung.

Nachgefragt

KX

■ Bei der Lösung der Gleichung werden nicht nur Äquivalenzumformungen gemacht (z. B. beim Ausführen der Quadrate im 3. Schritt).

KX

■ Die Funktionswerte der Sinus- und der Kosinusfunktion sind maximal 1. Insofern kann der Funktionswert der Summenfunktion nur dann 2 ergeben, wenn es ein Winkelmaß gibt, für das beide Funktionen gleichzeitig den Wert 1 annehmen. Allerdings existiert kein solches Winkelmaß, also hat die Gleichung keine Lösung.

Aufgaben

K5

- 1 a) $L = \{210^\circ; 330^\circ\}$
 b) $L = \{31,79^\circ; 328,21^\circ\}$
 c) $L = \{143,13^\circ; 323,13^\circ\}$
 d) $L = \{45^\circ; 135^\circ; 225^\circ; 315^\circ\}$
 e) $L = \{39,92^\circ; 139,97^\circ; 219,92^\circ; 319,97^\circ\}$
 f) $L = \emptyset$

K5

- 2 a) $L = \{0^\circ; 180^\circ\}$ b) $L = \{90^\circ; 153,4^\circ; 270^\circ\}$ c) $L = \{0^\circ\}$
 d) $L = \{0^\circ; 180^\circ\}$ e) $L = \{116,6^\circ; 206,6^\circ\}$ f) $L = \emptyset$

K5

- 3 a) $L = \{45^\circ; 225^\circ\}$ b) $L = \{0^\circ; 60^\circ; 180^\circ; 300^\circ; 360^\circ\}$ c) $L = \{38,17^\circ; 141,83^\circ\}$

K1

- 4 a) $\sin \alpha = \pm \sqrt{1,25 - a} + 0,5$
 b) Bedingungen: $-1 \leq \pm \sqrt{1,25 - a} + 0,5 \leq 1 \wedge 1,25 - a \geq 0$
 $L = \{a \mid -1 \leq a \leq 1,25\} = [-1; 1,25]$

K3

- 5 a) I $\tan \alpha = \frac{h}{s+x}$
 II $\tan \beta = \frac{h}{x}$
 I in II: $h(\beta) = \frac{10 \cdot \tan \beta}{\tan \beta - 1} \text{ m}$
 b) $h(60^\circ) = 23,66 \text{ m}$
 c) $\beta = 55,49^\circ$

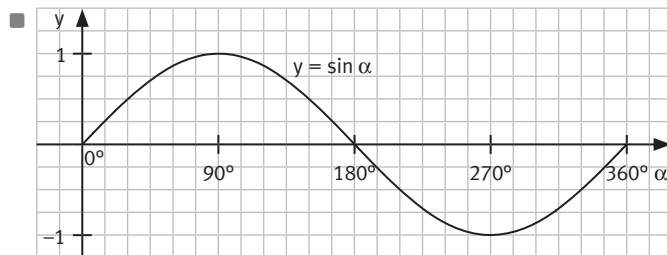
K6

- 6 a) Mittels quadratischer Ergänzung wird der Term auf die Scheitelform gebracht. Da 0,25 zu $\left(\sin \alpha - \frac{1}{2}\right)^2$ addiert wird, reicht es, nur $\left(\sin \alpha - \frac{1}{2}\right)^2$ zu betrachten. Nun bestimmt man diejenigen Winkel α , für die der Term minimal bzw. maximal wird.

- b) 1 $T = 2 \cdot (\cos \alpha + 0,375)^2 + 2,72$
 $T_{\min} = 2,72$ für $\alpha = 112,02^\circ$ $\vee$ $\alpha = 247,96^\circ$
 $T_{\max} = 6,50$ für $\alpha = 0^\circ$ $\vee$ $\alpha = 360^\circ$
- 2 $T = -(\cos \alpha - 0,5)^2 + 2,25$
 $T_{\min} = 0$ für $\alpha = 180^\circ$
 $T_{\max} = 2,25$ für $\alpha = 60^\circ$ $\vee$ $\alpha = 300^\circ$
- 3 $T = (\sin \alpha - 1)^2 - 1$
 $T_{\min} = -1$ für $\alpha = 90^\circ$
 $T_{\max} = 3$ für $\alpha = 270^\circ$
- 4 $T = 0,25 \cdot (\cos \alpha - 1)^2 - 1$
 $T_{\min} = 0$ für $\alpha = 0^\circ$
 $T_{\max} = 1$ für $\alpha = 180^\circ$
- 5 $T = \left(\cos \alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + 0,25$
 $T_{\min} = 0,25$ für $\alpha = 60^\circ$ $\vee$ $\alpha = 300^\circ$
 $T_{\max} = 2,5$ für $\alpha = 180^\circ$
- 6 $T = 3 \cdot \left(\sin \alpha + \frac{1}{4}\right)^2 + 4,8125$
 $T_{\min} = 4,8125$ für $\alpha \approx 345,52^\circ$ $\vee$ $\alpha \approx 194,48^\circ$
 $T_{\max} = 9,5$ für $\alpha = 90^\circ$

Entdecken

KX



K6

- Der Funktionsgraph ist stetig (d. h. man kann ihn mit dem Stift durchgängig, also ohne Abzusetzen zeichnen). Er hat im abgebildeten Intervall Nullstellen bei $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 180^\circ$ und $\alpha_3 = 360^\circ$. Sein Maximum nimmt er im Punkt $(90^\circ | 1)$ und sein Minimum in $(270^\circ | -1)$ an.

Nachgefragt

KX

- Am Einheitskreis stellt $\sin \alpha$ die y-Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis dar, α ist dabei das Winkelmaß, um das der Punkt $P(1 | 0)$ auf dem Einheitskreis gedreht wird. Für $\alpha = 90^\circ$ nimmt $\sin \alpha$ den Extremwert 1 an, der in der Sinuskurve einen Hochpunkt ergibt.

Aufgaben

KX

- 1 a) Periodenlänge 4 b) Periodenlänge 5

K5

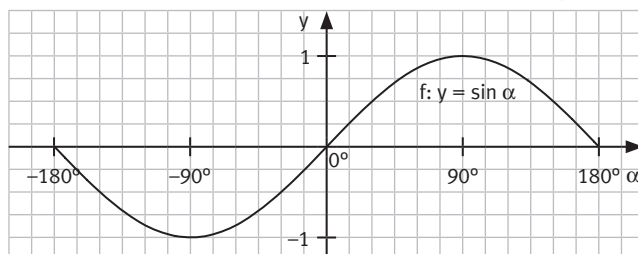
- 2 a) $\alpha_1 = 63,1^\circ$; $\alpha_2 = 116,9^\circ$ b) $\alpha_1 = 15,3^\circ$; $\alpha_2 = 164,7^\circ$
c) $\alpha_1 = -5,0^\circ$ $\alpha_2 = -175,0^\circ$ d) $\alpha_1 = -44,9^\circ$; $\alpha_2 = 135,1^\circ$

KX

- 3 • -275° ; -265° ; 85° und 95°
• -235° ; 55° ; 125° und 415°
• -155° ; -25° ; 205° und 335°

KX

- 4 Neben dieser sind auch andere Achsenskalierungen möglich.

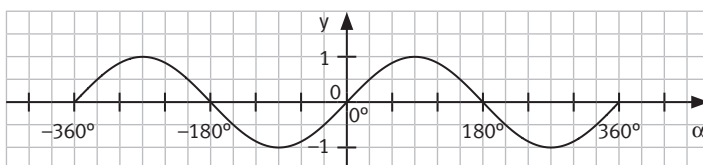


Die Nullstellen von $f: y = \sin \alpha$ sind -180° ; 0° und 180° .

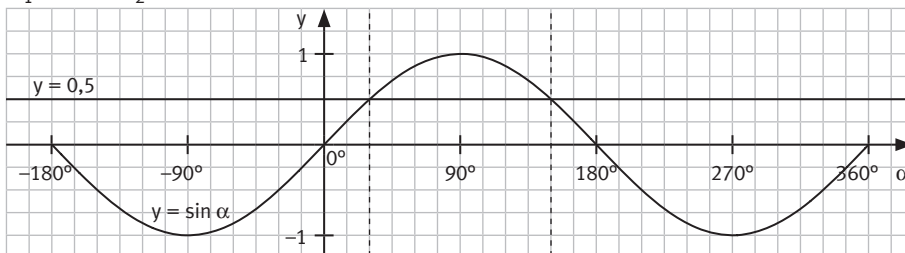
- KX** 5 Verena hat nicht Recht. Die Sinuswerte wiederholen sich zwar bei $k \cdot 360^\circ$, da die Periodenlänge 360° beträgt, jedoch kommen die Sinuswerte innerhalb dieser Periode mehr als einmal vor. Die Werte wiederholen sich also nicht nur nach Vielfachen von 360° .

Dies ist anhand des Graphen der Sinusfunktion gut erkennbar, denn die Werte zwischen 0° und 90° sind auch zwischen 90° und 180° zu finden, nur in „umgekehrter Reihenfolge“. Der Bereich zwischen 0° und 180° ist also achsensymmetrisch zur einer Achse bei 90° . Dies ist ebenfalls zwischen 180° und 360° der Fall mit einer Achse bei 270° .

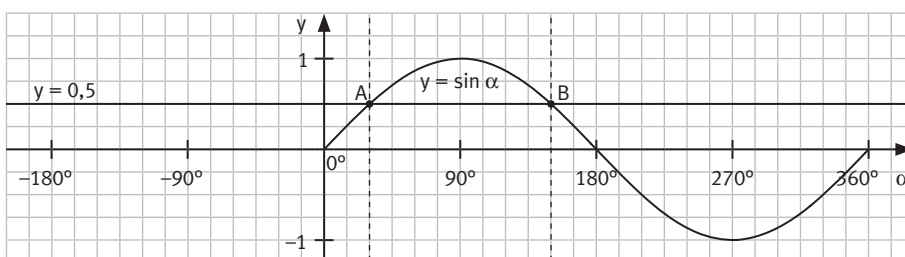
- K6** 6 a) Die y-Achse ist wie üblich skaliert ($1 \cong 2$ Kästchen). Zum einfacheren Zeichnen kann man die x-Achse wie angegeben skalieren, also so, dass gilt: $180^\circ \cong 6$ Kästchen.
b) Für eine schnelle Zeichnung kann man den Graphen am Ursprung spiegeln.



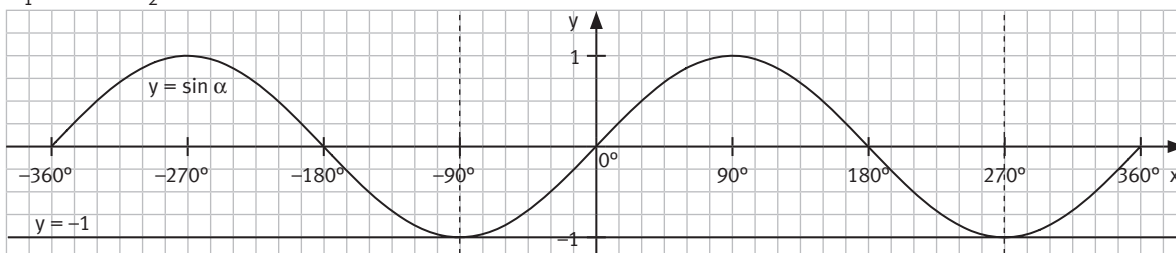
- KX** 7 a) $\alpha_1 = 30^\circ$; $\alpha_2 = 150^\circ$



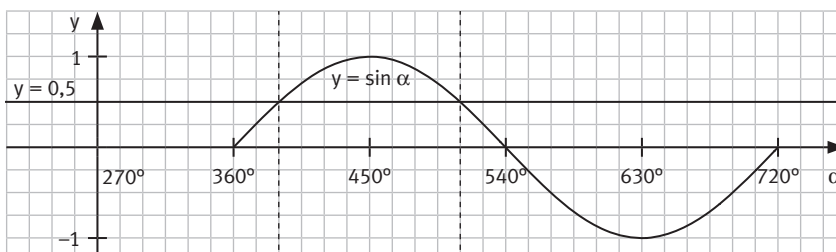
- b) $0^\circ \leq \alpha < 30^\circ$ und $150^\circ < \alpha \leq 360^\circ$



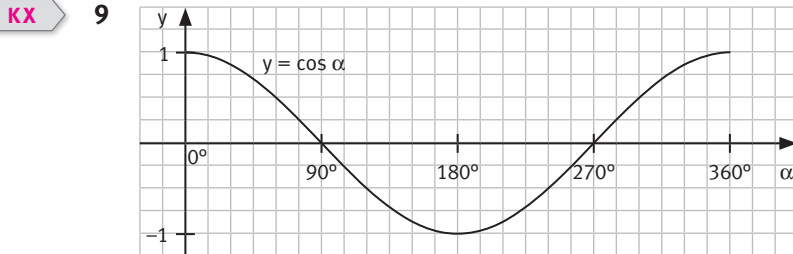
- c) $\alpha_1 = -90^\circ$; $\alpha_2 = 270^\circ$



- d) $390^\circ \leq \alpha \leq 510^\circ$

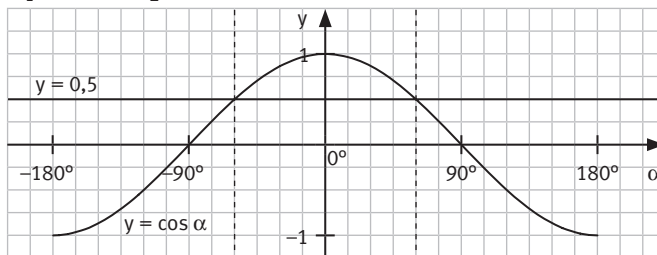


- 8** a) Es sind individuelle Lösungen möglich.
b) Es sind individuelle Lösungen möglich.
c) Gleichung der Funktion: $y = \sin \alpha + 2$

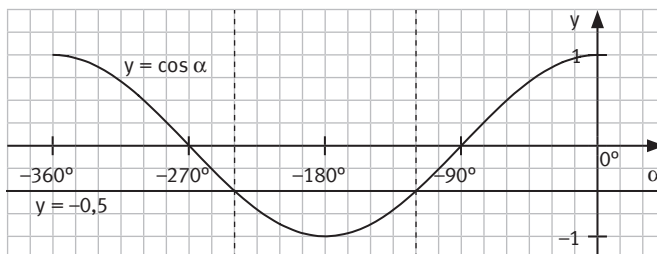


- 10** a) Zu Beginn wird der Graph zur Funktion $\cos \alpha$ in ein Koordinatensystem gezeichnet. Anschließend trägt man den Wert, mit dem der Kosinus gleichgesetzt wurde, als horizontale Gerade beispielsweise bei $y = -0,5$ ein. Die Lösungen der Gleichung ergeben sich aus den Schnittpunkten der beiden Graphen.

- b) 1 $\alpha_1 = -60^\circ$; $\alpha_2 = 60^\circ$

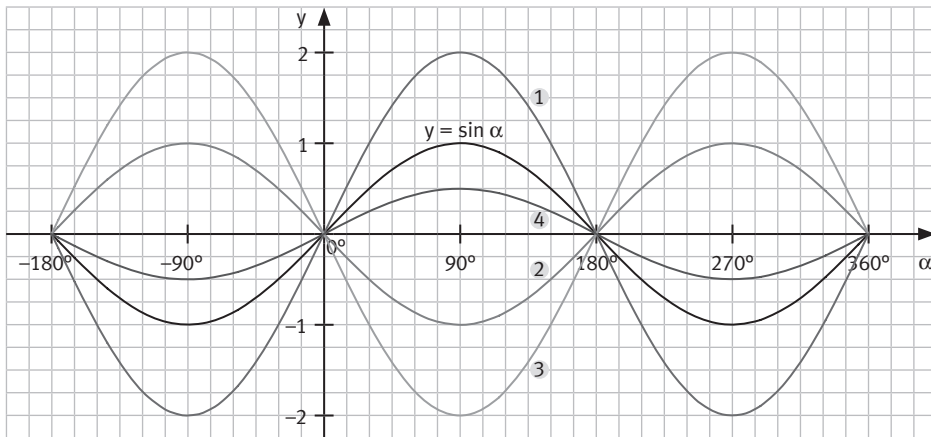


- 2 $-240^\circ \leq \alpha \leq -120^\circ$



- 11** a) Die in Aufgabe 8 gebastelte Schablone kann ebenfalls zum Zeichnen der Kosinusfunktion verwendet werden, da die Kosinusfunktion genau der Sinusfunktion entspricht, welche um 90° in negative α -Richtung verschoben wurde.
b) Es sind individuelle Lösungen möglich.
c) Gleichung der Funktion: $y = \cos \alpha - 1$

KX 12 a)

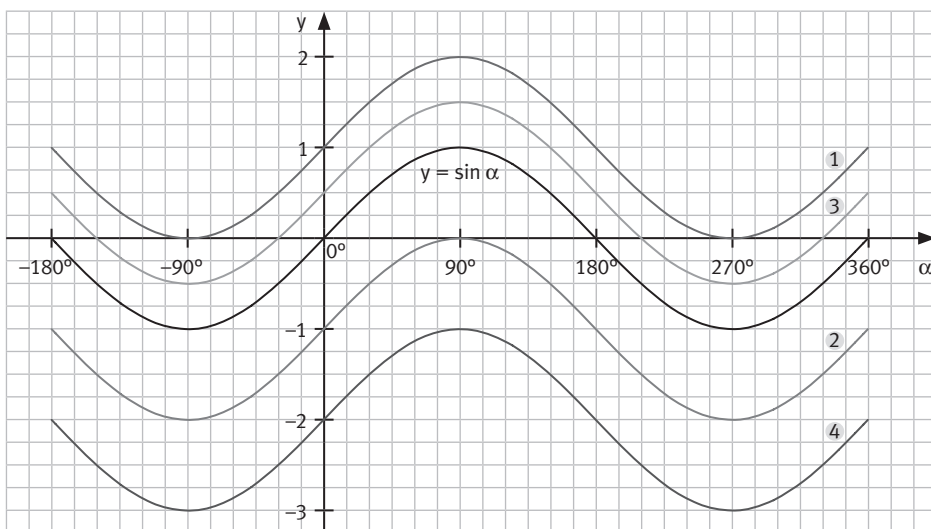


Der ursprüngliche Graph der Sinusfunktion wurde ...

- 1 in Richtung der y-Achse um den Faktor 2 gestreckt.
- 2 an der α -Achse gespiegelt.
- 3 in Richtung der y-Achse um den Faktor 2 gestreckt und an der x-Achse gespiegelt.
- 4 um den Faktor $\frac{1}{2}$ entlang der y-Achse gestaucht.

- b) Bei einer Sinusfunktion der Form $y = a \cdot \sin \alpha$ beschreibt der Faktor a , wie stark die Sinusfunktion gestreckt bzw. gestaucht wird. Der Betrag von a gibt das Maximum der Sinusfunktion an.

KX 13 a)



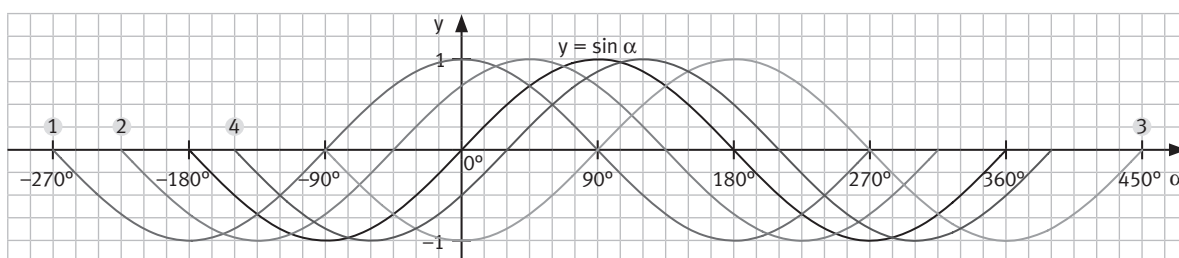
Der ursprüngliche Graph der Sinusfunktion wurde ...

- 1 um eine Längeneinheit entlang der y-Achse nach oben verschoben.
- 2 um eine Längeneinheit entlang der y-Achse nach unten verschoben.
- 3 um eine halbe Längeneinheit entlang der y-Achse nach oben verschoben.
- 4 um zwei Längeneinheiten entlang der y-Achse nach unten verschoben.

- b) Bei einer Sinusfunktion der Form $y = \sin \alpha + c$ beschreibt der Wert c , um wie viele Längeneinheiten der Graph entlang der y-Achse nach oben bzw. nach unten ($c < 0$) verschoben wird.

KX

14 a)



Der ursprüngliche Graph der Sinusfunktion wurde ...

- 1 um 90° entlang der α -Achse nach links verschoben.
 - 2 um 45° entlang der α -Achse nach links verschoben.
 - 3 um 90° entlang der α -Achse nach rechts verschoben.
 - 4 um 30° entlang der α -Achse nach rechts verschoben.
- b) Bei einer Sinusfunktion der Form $y = \sin(\alpha - \varphi)$ beschreibt das Winkelmaß φ , um wie viel Grad die Sinusfunktion entlang der α -Achse nach rechts bzw. nach links ($\varphi < 0$) verschoben wurde.

K2

15 a) $\alpha = \alpha'$

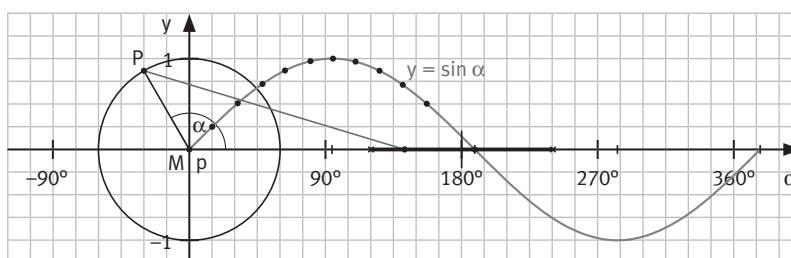
- b) Die Nulllagen $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 180^\circ$ entsprechen auf der Messachse den Werten 1 und -1.
- c) Das Auswertungsprotokoll ist eine Tabelle, in der mit $\Delta x = 15^\circ$ alle vorgegebenen Werte zwischen 0° und 180° eingetragen werden. Die Funktionswerte sind dann die y-Werte der Punkte auf der Kurbelwelle bzw. die x-Werte der Punkte auf der Messachse.

Grundsätzlich gilt: Die y-Werte der Punkte auf der Kurbelwelle sind eindeutig. Die x-Werte der Punkte auf der Messachse sind es nicht, sie hängen von der Position der Messachse ab bzw. von der Länge der Stange, die die Drehbewegung in eine geradlinige Bewegung umsetzt. Die Tabelle zeigt Messwerte für eine Länge der Stange von 3 LE bzw. 5 LE.

α	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
x für Stangenlänge 3 LE	1	0,95	0,82	0,62	0,37	0,10	-0,17
x für Stangenlänge 5 LE	1	0,96	0,84	0,66	0,42	0,16	-0,10
y	0	0,26	0,5	0,71	0,87	0,97	1

α	105°	120°	135°	150°	165°	180°
x für Stangenlänge 3 LE	-0,42	-0,63	-0,79	-0,91	-0,98	-1
x für Stangenlänge 5 LE	-0,35	-0,58	-0,76	-0,89	-0,97	-1
y	0,97	0,87	0,71	0,5	0,26	0

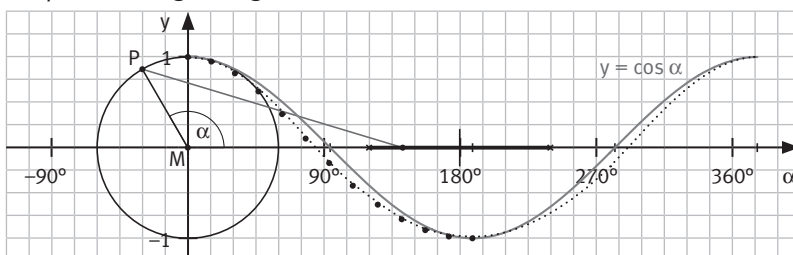
- d) Kurve für die y-Werte: Der Verlauf des Graphen entspricht der Sinuskurve $y = \sin \alpha$.



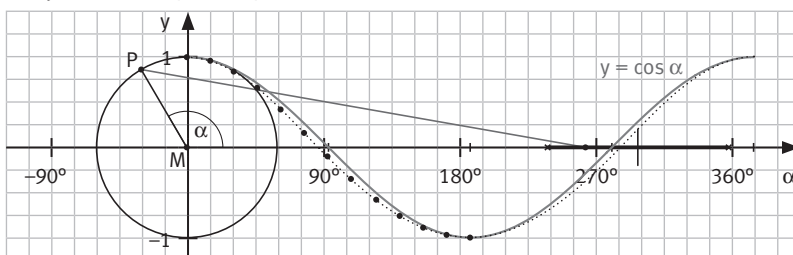
((Kurve und Kreis sind auf 1 skaliert, hoffe das passt so, ansonsten evtl. ein neues GGB senden ...))

Kurve für die x-Werte: Für $\alpha = 0^\circ$ bzw. $\alpha = 180^\circ$ stimmen die x-Werte auf der Messachse mit den „normalen“ Kosinuswerten überein: 1 bzw. -1. Für alle anderen Werte gibt es – je nach Länge der Stange bzw. Position der Messachse – mehr oder weniger große Abweichungen. Je länger die Stange ist, desto geringer sind die Abweichungen der Messwerte von den „normalen“ Kosinuswerten. Grundsätzlich gilt: Die Abweichung kommt zustande, weil die Stange nicht parallel zur Messachse geführt ist, sondern „schräg“.

Graph für Stangenlänge 3 LE:



Graph für Stangenlänge 5 LE:

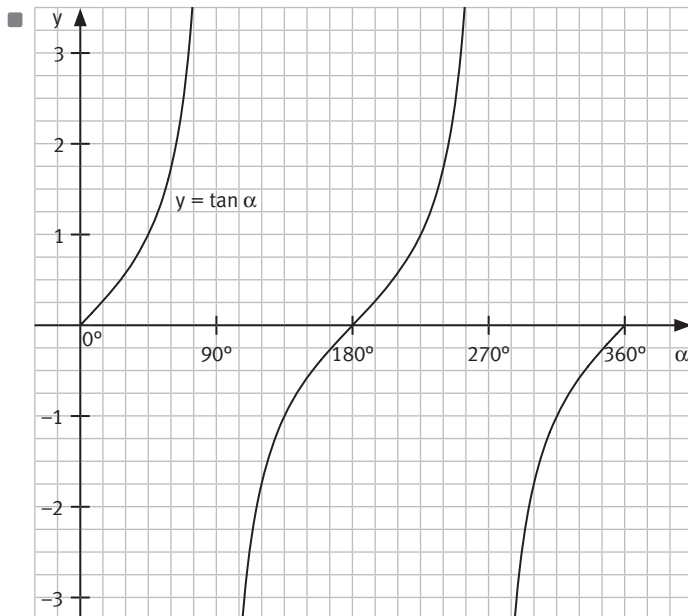


((Kurve und Kreis sind auf 1 skaliert, hoffe das passt so, ansonsten evtl. ein neues GGB senden ...))

- e) Der Graph für die y-Werte ist eine Sinuskurve. Der Graph für die x-Werte ist dem einer Kosinuskurve ähnlich, stimmt aber nicht mit ihr überein. Je länger die Stange ist, desto ähnlicher wird der Graph dem der Kosinuskurve.

Entdecken

KX



KX

- Lösungsmöglichkeit: Am Einheitskreis wurde eine Tangente durch den Punkt (1|0) gezeichnet. Schneidet man die zu einem bestimmten Winkelmaß α gehörende Ursprungsgerade mit dieser Tangente, so ist der y-Wert des Schnittpunkts dieser beiden Graphen der Tangenswert von α . Man erkennt, dass es sich nach 180° wieder um die gleiche Gerade durch den Ursprung handelt, es ergibt sich also der gleiche Schnittpunkt.

Die Tangensfunktion hat somit eine Periodenlänge von 180° . Außerdem besitzt sie mehrere Asymptoten. Die erste bei 90° , die anderen ergeben sich aus der Periodenlänge, haben also jeweils einen Abstand von 180° . Die Asymptoten lassen sich anschaulich dadurch erklären, dass die Geraden durch den Ursprung an diesen Stellen parallel zur Tangente verlaufen und somit keine Schnittpunkte existieren.

Nachgefragt

K1

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Die angegebenen α -Werte sind die Nullstellen von $\cos \alpha$. Somit ist für diese α -Werte $\tan \alpha$ nicht definiert.

K6

- Addiert man 180° zu einem beliebigen Winkelmaß α , so erhält man im Einheitskreis dieselbe Ursprungsgerade wie zuvor. Da der Tangens, visualisiert am Einheitskreis, der Länge der Strecke zwischen dem Punkt mit den Koordinaten (1|0) und dem Schnittpunkt der Geraden und der Tangente an den Kreis im Punkt (1|0) entspricht, hat die Tangensfunktion eine Periodenlänge von 180° . Bei der Sinus- und Kosinusfunktion entsprechen die y- bzw. α -Werte des Punktes auf dem Einheitskreis zum jeweiligen Winkel dem Sinus- bzw. Kosinuswert. Diese Werte wiederholen sich erst nach einer vollen Umdrehung, also ist die Periodenlänge hier 360° .

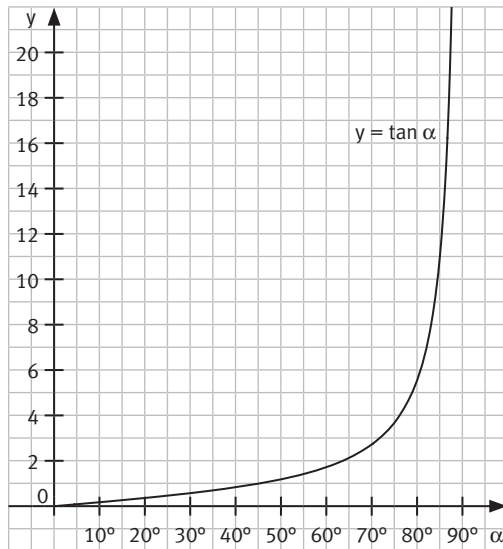
Rechnerische Begründung:

$$\tan(\alpha + 180^\circ) = \frac{\sin(\alpha + 180^\circ)}{\cos(\alpha + 180^\circ)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

Aufgaben

K4 1

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\tan \alpha$	0,00	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,75	5,67	n. d.



KX 2 $k \in \mathbb{Z}$

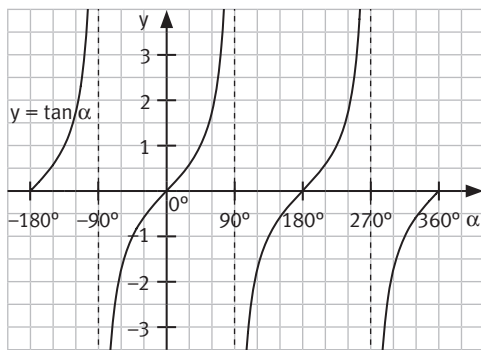
- a) $\tan \alpha = 0,45$: $\alpha \approx 24,2^\circ$; $\alpha_k \approx 24,2^\circ + k \cdot 180^\circ$
- b) $\tan \alpha = 1,97$: $\alpha \approx 63,1^\circ$; $\alpha_k \approx 63,1^\circ + k \cdot 180^\circ$
- c) $\tan \alpha = 3,68$: $\alpha \approx 74,8^\circ$; $\alpha_k \approx 74,8^\circ + k \cdot 180^\circ$
- d) $\tan \alpha = 5,65$: $\alpha \approx 80,0^\circ$; $\alpha_k \approx 80,0^\circ + k \cdot 180^\circ$

K1

- 3
- a) Die Aussage ist richtig. Die Tangensfunktion hat die Periode 180° , also ist sie insbesondere auch 360° -periodisch.
 - b) Die Aussage ist falsch. Die Tangensfunktion ist nicht symmetrisch zur y-Achse.
 - c) Die Aussage ist falsch. Zwar sind Sinus- und Tangensfunktion 360° -periodisch, jedoch kann die Sinusfunktion nicht durch Verschiebung aus der Tangensfunktion hervorgehen.
 - d) Die Aussage ist richtig. Die Tangensfunktion ist 180° -periodisch.

KX

- 4 a) und b) gerundet auf zwei Nachkommastellen



α	-180°	-165°	-150°	-135°	-120°	-105°	-90°	-75°	-60°	-45°
$y = \tan \alpha$	0	0,27	0,58	1	1,73	3,73	–	–3,73	–1,73	–1
α	-30°	-15°	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
$y = \tan \alpha$	–0,58	–0,27	0	0,27	0,58	1	1,73	3,73	–	–3,73
α	120°	135°	150°	165°	180°	195°	210°	225°	240°	255°
$y = \tan \alpha$	–1,73	–1	–0,58	–0,27	0	0,27	0,58	1	1,73	3,73
α	270°	285°	300°	315°	330°	345°	360°			
$y = \tan \alpha$	–	–3,73	–1,73	–1	–0,58	–0,27	0			

- c) Da der Kosinuswert für $\alpha \in \{...; -90^\circ; 90^\circ; 270^\circ; 450^\circ; ...\}$ jeweils 0 ist, ist der Tangens für diese Winkel nicht definiert. Die Definitionslücken treten bei allen ungeradzahligen Vielfachen von 90° auf, d. h. bei $\alpha = (2k - 1) \cdot 90^\circ = \frac{2k-1}{2} \cdot 180^\circ$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

- K6** 5
- 1 Streckung um 2 bzw. Stauchung um 0,5. Für negative Werte ist der Graph zusätzlich an der α -Achse gespiegelt.
 - 2 Verkürzung der Periodenlänge um den Faktor 1,5 bzw. Verlängerung der Periodenlänge um den Faktor $\frac{1}{2}$. Für negative Werte ist der Graph zusätzlich an der α -Achse gespiegelt.
 - 3 Verschiebung des Graphen um 1, -1 , $\frac{1}{2}$ bzw. $-\frac{1}{2}$ entlang der y -Achse.
 - 4 Verschiebung des Graphen um 180° , -180° , 45° bzw. -45° entlang der α -Achse.

Entdecken

KX

- Maß β des Winkels CBA: $\tan \beta = \frac{4}{3} \Rightarrow \beta \approx 53,1^\circ$

KX

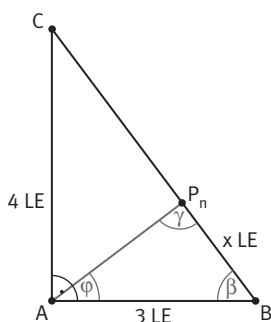
- Verwendung des Kosinussatzes:

$$|\overline{AP_n}|^2 = (x^2 + 3^2 + 2 \cdot x \cdot 3 \cdot \cos \beta) \text{ FE}$$

$$|\overline{AP_n}| \approx \sqrt{x^2 + 9 + 3,6x} \text{ LE}$$

KX

- Gegeben ist bereits der Winkel β ; der Winkel $\angle AP_n B$ mit dem Maß γ lässt sich durch die Innenwinkelsumme berechnen: $\gamma = 180^\circ - 53,1^\circ - \varphi$.



Nun lässt sich der Sinussatz anwenden:

$$\frac{3}{\sin \gamma} = \frac{|\overline{AP_n}|}{\sin \beta}$$

$$|\overline{AP_n}| = 3 \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = 3 \cdot \frac{\sin 53,1^\circ}{\sin (180^\circ - 53,1^\circ - \varphi)}$$

Die minimale Streckenlänge ergibt sich für $\gamma = 90^\circ = 180^\circ - 53,1^\circ - \varphi$, also $\varphi = 36,9^\circ$, da die Strecke $\overline{AP_n}$ so ein Lot auf die Strecke $\overline{CB}$ bildet, was automatisch die kürzeste Streckenlänge ergibt. Diese beträgt dann $|\overline{AP_n}| \approx 2,4 \text{ LE}$.

Nachgefragt

K6

- Da im Zähler des Bruchs $\frac{4}{\sin(\varphi + 30^\circ)}$ eine Konstante steht, genügt es, den Nenner zu betrachten. Der Bruch nimmt dann den kleinsten Wert an, wenn der Nenner den größten Wert annimmt, und umgekehrt. Für $\varphi = 60^\circ$ nimmt der Sinus im Nenner seinen größten Wert, nämlich 1, an, woraus folgt, dass der Bruch $\varphi = 60^\circ$ seinen kleinsten Wert annimmt, d. h., dass sich ein Extremum ergibt.

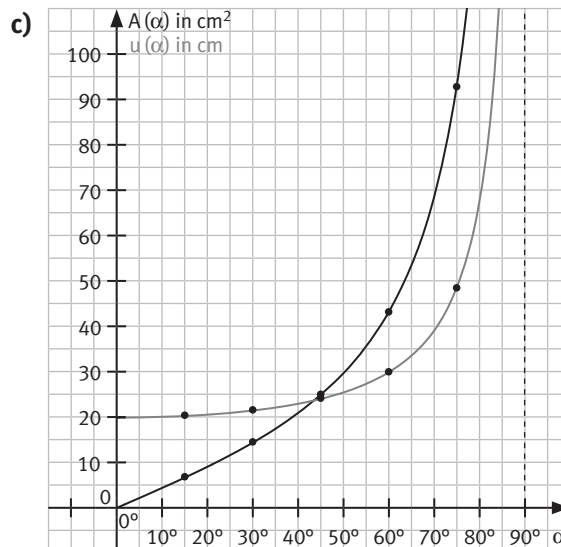
KX

- Es ergibt sich für $\alpha = 60^\circ$ ein minimaler Flächeninhalt von $A(\alpha) = 1,5 \text{ cm}^2$, da der Flächeninhalt minimal wird, wenn der Nenner des Bruchs am größten ist, also muss der Sinus 1 werden.

Aufgaben

K5

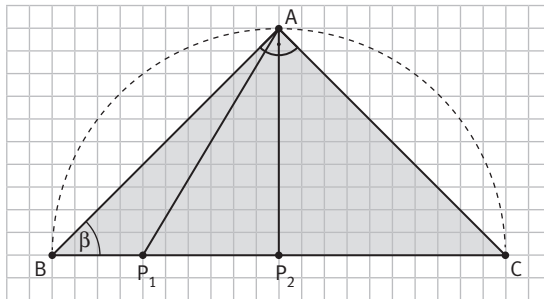
- $\tan \alpha = \frac{h_c}{5 \text{ cm}} \Rightarrow h_c = 5 \text{ cm} \cdot \tan \alpha$
 $A = \frac{1}{2} c \cdot h_c \Rightarrow A(\alpha) = 25 \tan \alpha \text{ cm}^2$.
 Damit die Eigenschaft „gleichschenkelig“ gewährleistet ist, ist für α eine Grundmenge von $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ sinnvoll.
 - $\cos \alpha = \frac{5 \text{ cm}}{|\overline{AC_n}|} \Rightarrow |\overline{AC_n}| = \frac{5 \text{ cm}}{\cos \alpha} = |\overline{BC_n}|$
 $\Rightarrow u(\alpha) = 10 \text{ cm} + 2 \cdot |\overline{AC_n}| = \left(10 + \frac{10}{\cos \alpha}\right) \text{ cm}$



- d) Für $\alpha = 0^\circ$ reduziert sich das Dreieck auf eine Strecke, der „Umfang“ dieser Strecke beträgt also 20 cm, was jedoch ein „theoretischer“ Wert ist, denn von einer Strecke lässt sich i. A. kein Umfang angeben, sondern die Länge der Strecke. Der Flächeninhalt würde hierbei 0 cm^2 betragen. Die beiden Funktionen für den Umfang bzw. für den Flächeninhalt haben bei $\alpha = 0^\circ$ ein Minimum, allerdings existiert für $\alpha = 0^\circ$ kein Dreieck.

Für $\alpha = 90^\circ$ existiert ebenfalls kein Dreieck, da die freien Schenkel an $\overline{AB}$ im Punkt A bzw. B keinen Schnittpunkt haben. Sowohl Umfang als auch Flächeninhalt sind nicht definiert, der Graph von $A(\alpha)$ und $u(\alpha)$ hat an dieser Stelle eine Asymptote. Nähert sich α dem Wert 90° , so werden sowohl Umfang als auch Flächeninhalt unendlich groß.

- K2** 2 a) Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $2 \cdot |\overline{AB}|^2 = (10 \text{ cm})^2 \Rightarrow |\overline{AB}| = \sqrt{50} \text{ cm} \approx 7,07 \text{ cm} = |\overline{AC}|$
 $\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| = 25 \text{ cm}^2$



- b) Eine sinnvolle Grundmenge für x ist $0 < x < 10$.
 c) Da das Dreieck gleichschenkelig-rechtwinklig ist, gilt: $\beta = \gamma = 45^\circ$.

Mithilfe des Kosinussatzes erhält man:

$$|\overline{AP_1}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{BP_1}|^2 - 2 \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{BP_1}| \cdot \cos \beta = 34 \text{ cm}^2 \Rightarrow |\overline{AP_1}| = \sqrt{34} \text{ cm} \approx 5,8 \text{ cm}$$

$$|\overline{AP_2}| = \sqrt{50 - 25} \text{ cm} = \sqrt{25} \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

Mit $|\overline{BP_n}| = x \text{ cm}$ berechnet man:

$$|\overline{AP_n}| = \sqrt{50 + x^2 - 2 \cdot \sqrt{50} \cdot x \cdot \cos 45^\circ} \text{ cm} = \sqrt{x^2 - 10x + 50} \text{ cm}$$

Andere Lösungsmöglichkeit über den Satz des Pythagoras.

- d) Der Wert für $|\overline{AP_n}| = \sqrt{x^2 - 10x + 50} \text{ cm} = \sqrt{(x-5)^2 + 25} \text{ cm}$ wird minimal für $x = 5$ mit:
 $|\overline{AP_0}| = \sqrt{25} \text{ cm} = 5 \text{ cm}$

- e) $|\overline{AP_0}|$ ist der Abstand von A zu $\overline{BC}$ und damit die kürzeste Verbindung zwischen A und $\overline{BC}$. Die Streckenlänge $|\overline{AP_n}|$ wird minimal, wenn $\overline{AP_n} \perp \overline{BC}$, also $x = 5$ bzw. $|\overline{AP_0}| = 5 \text{ cm}$.

- f) Unter Verwendung der allgemeinen Flächenformel für Dreiecke erhält man für das Dreieck ABP_n :

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot x \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \sqrt{50} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}^2 = 2,5x \text{ cm}^2$$

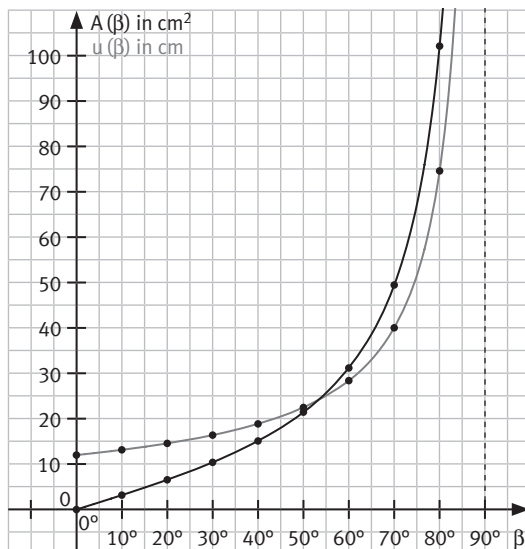
K5 3 a) $\tan \beta = \frac{b}{c} \Rightarrow b = 6 \text{ cm} \cdot \tan \beta$

Es handelt sich um ein rechtwinkliges Dreieck, also gilt:

$$A(\beta) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} \cdot \tan \beta = 18 \cdot \tan \beta \text{ cm}^2$$

b)

β in °	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$A(\beta)$ in cm ²	0	3,2	6,6	10,4	15,1	21,5	31,2	49,5	102,1	–



c) $u = a + b + c$

$$\tan \beta = \frac{b}{c} \Rightarrow b = 6 \text{ cm} \cdot \tan \beta$$

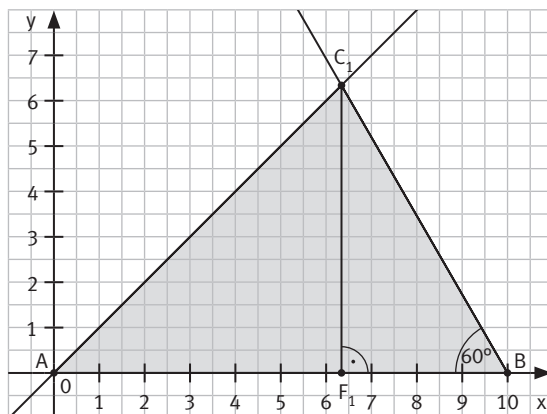
$$\cos \beta = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{6 \text{ cm}}{\cos \beta}$$

$$u = \frac{6 \text{ cm}}{\cos \beta} + 6 \text{ cm} \cdot \tan \beta + 6 \text{ cm}$$

$$u(\beta) = 6 \text{ cm} \left(\frac{1}{\cos \beta} + \tan \beta + 1 \right)$$

d) Zeichnung siehe b)

K2 4 a)



b) Berechne die Koordinaten des Punktes C_n in Abhängigkeit vom Winkel β :

Die Gerade durch B und C_n hat die Steigung $m = -\tan \beta$.

Setze B(10|0) und m in die allgemeine Geradengleichung $y = mx + t$ ein:

$$0 = -\tan \beta \cdot 10 + t \Rightarrow t = 10 \cdot \tan \beta \text{ und damit folgt } y = -\tan \beta \cdot x + 10 \cdot \tan \beta.$$

Die x-Koordinate von C_n folgt aus dem Gleichsetzen beider Geradengleichungen:

$$-\tan \beta \cdot x + 10 \tan \beta = x \Rightarrow x = \frac{10 \tan \beta}{\tan \beta + 1} \text{ und damit ist } C_n \left(\frac{10 \tan \beta}{\tan \beta + 1} \mid \frac{10 \tan \beta}{\tan \beta + 1} \right).$$

Für $\beta = 60^\circ$ erhält man gerundet $C_1(6,34 \mid 6,34)$.

Für den Flächeninhalt des Dreiecks F_1BC_1 gilt:

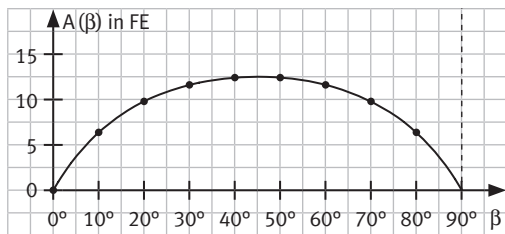
$$A = \frac{1}{2} \cdot |F_1C_1| \cdot |BF_1| = \frac{1}{2} \cdot 6,34 \cdot (10 - 6,34) = 11,6 \text{ (FE)}$$

c) Mit den Zwischenergebnissen aus b) folgt:

$$A(\beta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \tan \beta}{\tan \beta + 1} \cdot \left(10 - \frac{10 \tan \beta}{\tan \beta + 1} \right) = \frac{50 \tan \beta}{\tan \beta + 1} - \frac{50 \tan^2 \beta}{(\tan \beta + 1)^2} = \frac{50 \tan \beta \cdot (\tan \beta + 1) - 50 \tan^2 \beta}{(\tan \beta + 1)^2} = \frac{50 \tan \beta}{(\tan \beta + 1)^2} \text{ (FE)}$$

d)

β in °	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$A(\beta)$ in FE	0	6,4	9,8	11,6	12,4	12,4	11,6	9,8	6,4	–

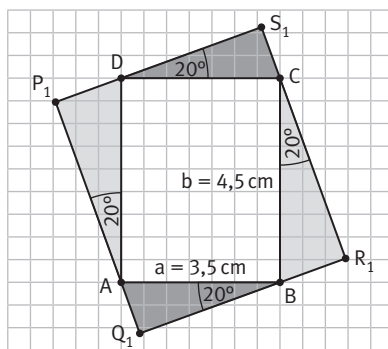


e) $T_1(\beta) = \frac{50 \tan \beta}{(\tan \beta + 1)^2} = \frac{50 \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\left(\frac{\sin \beta}{\cos \beta} + 1 \right)^2} = \frac{50 \sin \beta \cos \beta}{\sin^2 \beta + 2 \sin \beta \cos \beta + \cos^2 \beta} = \frac{50 \sin \beta \cos \beta}{1 + 2 \sin \beta \cos \beta} = \frac{25 \sin 2\beta}{1 + \sin 2\beta} = \frac{25}{\frac{1}{\sin 2\beta} + 1} = T_2(\beta)$

f) T_2 wird maximal, wenn der Nenner minimal wird. Für Winkel zwischen 0° und 90° wird der Nenner minimal, wenn $2\beta = 90^\circ$, also $\beta = 45^\circ$. Die zugehörigen Koordinaten des Punktes sind $C_n(5|5)$; das zugehörige Dreieck mit $F_n(5|0)$, $B(10|0)$ und $C_n(5|5)$ hat den Flächeninhalt 12,5 FE.

K2

5 a)



Im Dreieck Q_1BA bzw. im Dreieck ADP_1 gilt:

$$\cos 20^\circ = \frac{|Q_1B|}{3,5 \text{ cm}} \Rightarrow |Q_1B| = 3,5 \text{ cm} \cdot \cos 20^\circ = 3,29 \text{ cm}$$

$$\sin 20^\circ = \frac{|AQ_1|}{3,5 \text{ cm}} \Rightarrow |AQ_1| = 3,5 \text{ cm} \cdot \sin 20^\circ = 1,20 \text{ cm}$$

$$\cos 20^\circ = \frac{|AP_1|}{4,5 \text{ cm}} \Rightarrow |AP_1| = 4,5 \text{ cm} \cdot \cos 20^\circ = 4,23 \text{ cm}$$

$$\sin 20^\circ = \frac{|P_1D|}{4,5 \text{ cm}} \Rightarrow |P_1D| = 4,5 \text{ cm} \cdot \sin 20^\circ = 1,54 \text{ cm}$$

Damit gilt für die Seitenlängen im Rechteck $P_1Q_1R_1S_1$:

$$|Q_1R_1| = 3,29 \text{ cm} + 1,54 \text{ cm} = 4,83 \text{ cm}$$

$$|R_1S_1| = 4,23 \text{ cm} + 1,20 \text{ cm} = 5,43 \text{ cm}$$

b) Es gilt: $|Q_nR_n| = |P_nS_n|$ und $|Q_nP_n| = |R_nS_n|$.

Im Dreieck Q_nBA bzw. im Dreieck ADP_n gilt:

$$\cos \mu = \frac{|Q_nB|}{3,5 \text{ cm}} \Rightarrow |Q_nB| = 3,5 \text{ cm} \cdot \cos \mu \quad \sin \mu = \frac{|AQ_n|}{3,5 \text{ cm}} \Rightarrow |AQ_n| = 3,5 \text{ cm} \cdot \sin \mu$$

$$\cos \mu = \frac{|AP_n|}{4,5 \text{ cm}} \Rightarrow |AP_n| = 4,5 \text{ cm} \cdot \cos \mu \quad \sin \mu = \frac{|P_nD|}{4,5 \text{ cm}} \Rightarrow |P_nD| = 4,5 \text{ cm} \cdot \sin \mu$$

Daraus folgt:

$$|P_nQ_n|(\mu) = |R_nS_n|(\mu) = |AQ_n| + |AP_n| = (3,5 \cdot \sin \mu + 4,5 \cdot \cos \mu) \text{ cm}$$

$$|Q_nR_n|(\mu) = |P_nS_n|(\mu) = |Q_nB| + |P_nD| = (3,5 \cdot \cos \mu + 4,5 \cdot \sin \mu) \text{ cm}$$

c) $A(\mu) = |Q_nR_n| \cdot |R_nS_n| = (3,5 \text{ cm} \cdot \cos \mu + 4,5 \text{ cm} \cdot \sin \mu) \cdot (3,5 \text{ cm} \cdot \sin \mu + 4,5 \text{ cm} \cdot \cos \mu)$
 $= ((3,5 \text{ cm})^2 + (4,5 \text{ cm})^2) \cdot \sin \mu \cos \mu + 3,5 \text{ cm} \cdot 4,5 \text{ cm} \cdot (\sin^2 \mu + \cos^2 \mu)$
 $= 32,5 \text{ cm}^2 \cdot \sin \mu \cos \mu + 15,75 \text{ cm}^2 = (15,75 + 16,25 \cdot \sin 2\mu) \text{ cm}^2$

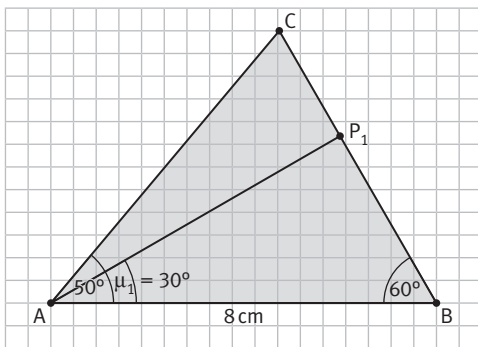
d) $A(\mu) = 1,5 \cdot a \cdot b$

$$\Leftrightarrow 15,75 + 16,25 \cdot \sin 2\mu = 23,625$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\mu \approx 0,485$$

$$\Rightarrow 2\mu = 29,0^\circ \Rightarrow \mu = 14,5^\circ$$

K2 6 a)


 Sinussatz im Dreieck ABP_1 :

$$\frac{|AP_1|}{\sin 60^\circ} = \frac{|AB|}{\sin (180^\circ - 30^\circ - 60^\circ)}$$

$$\Rightarrow |AP_1| = \frac{8 \text{ cm} \cdot \sin 60^\circ}{\sin 90^\circ} = 4\sqrt{3} \text{ cm} \approx 6,93 \text{ cm}$$

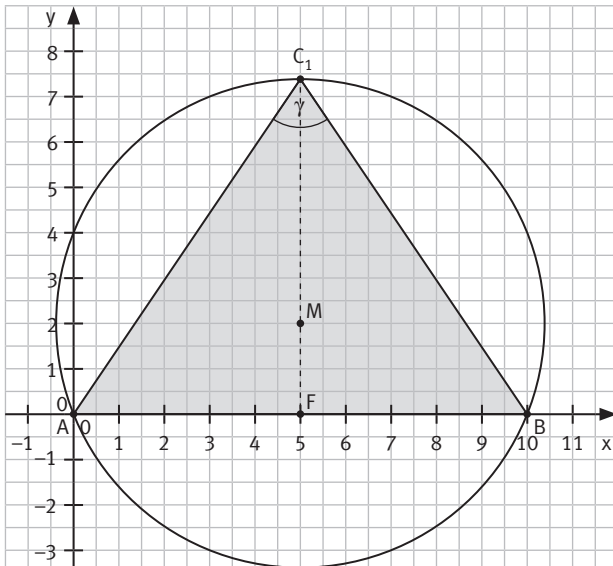
$$\text{b) } \frac{|AP_n|}{\sin 60^\circ} = \frac{|AB|}{\sin (180^\circ - \mu - 60^\circ)}$$

$$\Rightarrow |AP_n|(\mu) = \frac{8 \text{ cm} \cdot \sin 60^\circ}{\sin (120^\circ - \mu)} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin (120^\circ - \mu)} \text{ cm}$$

c) $|AP_n|$ wird minimal, wenn $\sin (120^\circ - \mu)$ maximal wird. Da nur $0 < \mu < 50^\circ$ sinnvoll ist, wird $\sin (120^\circ - \mu)$ maximal für $\mu = 30^\circ$. Der kleinstmögliche Wert für $|AP_n|$ ist $|AP_1| \approx 6,93 \text{ cm}$ (vgl. a).

d) $|AP_n|$ wird minimal, wenn $\angle AP_1B = 90^\circ$, denn in diesem Fall ist $|AP_n|$ der Abstand zwischen A und $\overline{BC}$ und es folgt $\mu = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

K2 7 a)



Nach der Verallgemeinerung des Thalesatzes ist der Winkel γ für alle Punkte auf dem Kreisbogen identisch, man spricht vom Fasskreisbogen.

b) Bestimme zunächst die Koordinaten von C_1 :

$$|MB| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \Rightarrow C_1 \left(5 \mid \underbrace{2 + \sqrt{29}}_{\approx 7,39} \right)$$

$$\text{Im Dreieck } FBC_1 \text{ gilt: } \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{5}{2 + \sqrt{29}} \Rightarrow \gamma = 68,2^\circ.$$

c) Im Dreieck ABC_n gilt der Sinussatz:

$$\frac{|BC_n|}{\sin \alpha} = \frac{|AB|}{\sin 68,2^\circ} \Rightarrow |BC_n| = \frac{|AB|}{\sin 68,2^\circ} \cdot \sin \alpha = 10,77 \cdot \sin \alpha \text{ (LE)}$$

$$\frac{|AC_n|}{\sin \beta} = \frac{|AB|}{\sin 68,2^\circ} \Rightarrow |AC_n| = 10,77 \cdot \sin \beta = 10,77 \cdot \sin (180^\circ - 68,2^\circ - \alpha) = 10,77 \cdot \sin (\alpha + 68,2^\circ) \text{ (LE)}$$

d) Die Steigung von g ist $m = \tan \alpha \Rightarrow g(x) = \tan \alpha \cdot x$.

$$\text{Die Steigung von } h \text{ ist } m = \tan (180^\circ - \gamma - \alpha) = \tan (111,8^\circ - \alpha) \Rightarrow h(x) = \tan (111,8^\circ - \alpha) \cdot x + t.$$

Setze die Koordinaten von B in die Funktionsgleichung ein:

$$0 = \tan (111,8^\circ - \alpha) \cdot 10 + t \Rightarrow t = -10 \tan (111,8^\circ - \alpha)$$

$$\Rightarrow h(x) = \tan (111,8^\circ - \alpha) \cdot x - 10 \tan (111,8^\circ - \alpha)$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } u(\alpha) &= |\overline{AB}| + |\overline{BC_n}| + |\overline{AC_n}| \\
 &= 10 \text{ LE} + 10,77 \cdot \sin \alpha \text{ LE} + 10,77 \cdot \sin(\alpha + 68,2^\circ) \text{ LE} \\
 &= (10 + 10,77 \cdot (\sin \alpha + \sin(\alpha + 68,2^\circ))) \text{ LE} \\
 A(\alpha) &= \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC_n}| \cdot \sin \alpha \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ LE} \cdot 10,77 \cdot \sin(\alpha + 68,2^\circ) \text{ LE} \cdot \sin \alpha \\
 &= 53,85 \cdot \sin(\alpha + 68,2^\circ) \cdot \sin \alpha \text{ FE}
 \end{aligned}$$

f)

α in °	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
$A(\alpha)$ in FE	9,15	18,41	26,65	32,88	36,36	36,65	33,73	27,95	20	10,84	1,59

Das Maximum für $A(\alpha)$ liegt bei α zwischen 50° und 60° .

Der maximale Flächeninhalt ergibt sich geometrisch für den Fall, dass C_n auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ liegt, sodass das Dreieck ABC_n maximal hoch ist. Dann liegt ein gleichschenkliges Dreieck vor, sodass gilt: $\alpha = \frac{180^\circ - 68,2^\circ}{2} = 55,9^\circ$.

Dabei ist $A_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (2 + \sqrt{29}) = 10 + 5\sqrt{29} \approx 36,9$ (FE).

Derselbe Wert ergibt sich, wenn man $\alpha = 55,9^\circ$ in die Formel für den Flächeninhalt bei e) einsetzt.

K2

8 a) $\overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC_3} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Für die Koordinaten der Punkte C_n gilt:

$$x = 4 \sin \varepsilon \text{ für } \varepsilon \in [0^\circ; 90^\circ] \Rightarrow \varepsilon = \sin^{-1} \left(\frac{x}{4} \right) \text{ für } x \in [0; 4]$$

Gleichung des Trägergraphen t:

$$t: y = 8 \cos 2\varepsilon = 8 \cos \left(2 \sin^{-1} \left(\frac{x}{4} \right) \right) \text{ mit } y \in [8; -8]$$

c) Wegen des Umlaufsinn im Dreieck ABC_n gilt (gerundet):

$$0 < x < 2,9 \text{ und } -0,6 < y < 8$$

Seitenlängen von AC_2B mit $C_2(2|4)$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{5^2 + 1^2} \text{ LE} = \sqrt{26} \text{ LE}$$

$$|\overline{AC_2}| = \sqrt{4^2 + 2^2} \text{ LE} = \sqrt{20} \text{ LE}$$

$$|\overline{BC_2}| = \sqrt{5^2 + 3^2} \text{ LE} = \sqrt{34} \text{ LE}$$

Mithilfe des Kosinussatzes erhält man:

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{AC_2}|^2 + |\overline{BC_2}|^2 - 2 \cdot |\overline{AC_2}| \cdot |\overline{BC_2}| \cdot \cos(\sphericalangle AC_2B)$$

$$\Rightarrow \sphericalangle AC_2B = \cos^{-1} \left(\frac{|\overline{AB}|^2 - |\overline{AC_2}|^2 - |\overline{BC_2}|^2}{-2 \cdot |\overline{AC_2}| \cdot |\overline{BC_2}|} \right) = 57,5^\circ$$

d) $|\overline{AC_n}| = \sqrt{16 \sin^2 \varepsilon + 64 \cos^2(2\varepsilon)} \text{ LE} = 4 \cdot \sqrt{\sin^2 \varepsilon + 4 \cos^2(2\varepsilon)} \text{ LE}$

e) $|\overline{AC_n}| = 4 \cdot \sqrt{\sin^2 \varepsilon + 4 \cos^2(2\varepsilon)} \text{ LE} = 4 \cdot \sqrt{\sin^2 \varepsilon + 4(\cos^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon)^2} \text{ LE}$

$$= 4 \cdot \sqrt{\sin^2 \varepsilon + 4(1 - 2\sin^2 \varepsilon)^2} \text{ LE} = 4 \cdot \sqrt{\sin^2 \varepsilon + 4 - 16\sin^2 \varepsilon + 16\sin^4 \varepsilon} \text{ LE}$$

$$= 4 \cdot \sqrt{16\sin^4 \varepsilon - 15\sin^2 \varepsilon + 4} \text{ LE} \quad \underline{\hspace{1cm}} = \quad 4 \cdot \sqrt{16x^2 - 15x + 4} \text{ LE}$$

Substitution
 $\sin^2 \varepsilon = x$

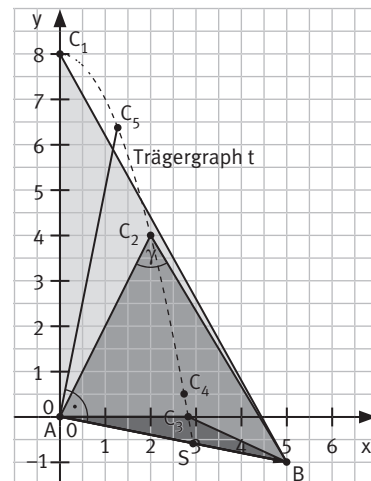
$$= 16 \cdot \sqrt{x^2 - \frac{15}{16}x + \frac{1}{4}} \text{ LE} \quad \underline{\hspace{1cm}} = \quad 16 \cdot \sqrt{x^2 - \frac{15}{16}x + \left(\frac{15}{32}\right)^2 - \left(\frac{15}{32}\right)^2 + \frac{1}{4}} \text{ LE} = 16 \cdot \sqrt{\left(x - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{31}{1024}} \text{ LE}$$

quadratisch
ergänzt

$|\overline{AC_n}|$ nimmt für $x = \frac{15}{32}$ den minimalen Wert $16 \cdot \sqrt{\frac{31}{1024}} \text{ LE} \approx 2,8 \text{ LE}$ an.

Mit $\sin^2 \varepsilon = \frac{15}{32}$ erhält man: $\varepsilon = 43,2^\circ$ und $\overrightarrow{AC_4} = \begin{pmatrix} 2,74 \\ 0,50 \end{pmatrix}$.

($\varepsilon = -43,2^\circ$ entfällt, da $\varepsilon \in [0^\circ; 90^\circ]$.)



- f) Die Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AC}_n$ stehen senkrecht aufeinander, wenn die Steigung von $\vec{AC}_n$ den Wert 5 hat.

$$\frac{8 \cos(2\varepsilon)}{4 \sin \varepsilon} = 5$$

$$\frac{\cos(2\varepsilon)}{\sin \varepsilon} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\cos^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon}{\sin \varepsilon} = \frac{5}{2}$$

$$1 - \sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon = \frac{5}{2} \sin \varepsilon$$

$$0 = 2 \sin^2 \varepsilon + \frac{5}{2} \sin \varepsilon - 1 \quad (\text{Substitution } \sin \varepsilon = x)$$

$$0 = 2x^2 + \frac{5}{2}x - 1$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{57}-5}{8} \approx 0,32 \quad \left[x_2 = \frac{-\sqrt{57}-5}{8} < -1 \text{ entfällt} \right]$$

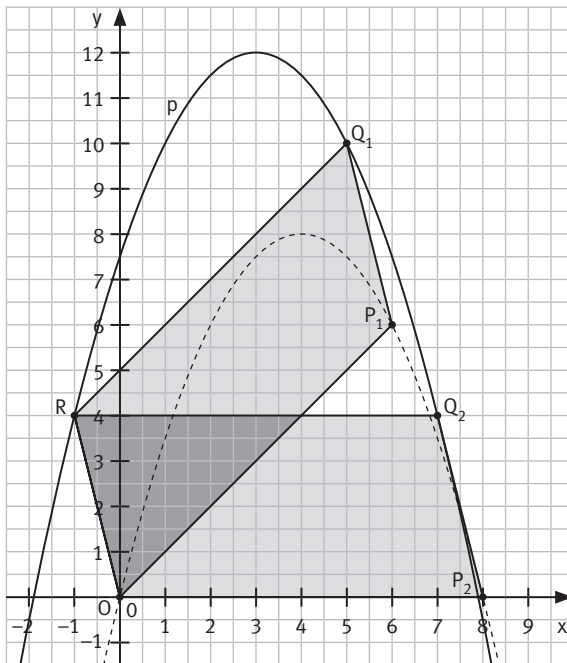
Resubstitution:

$$\sin \varepsilon = 0,32$$

$$\varepsilon = 18,7^\circ \Rightarrow C_5(1,3 | 6,4)$$

K4/5

- 9 a) $\vec{OP}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{OP}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$



b) $4 + 4 \cdot \sin \varphi = 5$

$$\Leftrightarrow \varphi = 14,48^\circ$$

$$\varphi \in [0^\circ; 90^\circ]$$

$$L = \{14,48^\circ\}$$

c) $\vec{OQ}_n = \vec{OP}_n \oplus \vec{P}_n \vec{Q}_n = \vec{OP}_n \oplus \vec{OR}$

$$\vec{OQ}_n(\varphi) = \begin{pmatrix} 4 + 4 \cdot \sin \varphi \\ 8 \cdot \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \in [0^\circ; 90^\circ]$$

$$\vec{OQ}_n(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 + 4 \cdot \sin \varphi \\ 8 \cdot \cos^2 \varphi + 4 \end{pmatrix}$$

$$Q_n(3 + 4 \cdot \sin \varphi | 4 + 8 \cdot \cos^2 \varphi)$$

$$G = \mathbb{R} \in \mathbb{R}; \varphi \in [0^\circ; 90^\circ]$$

d) $x = 3 + 4 \cdot \sin \varphi$

$$\wedge y = 4 + 8 \cdot \cos^2 \varphi$$

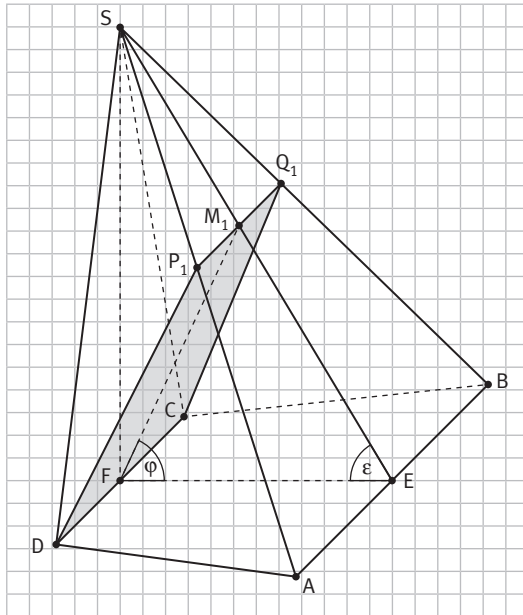
$$\Rightarrow y = 4 + 8 \cdot \left[-\left(\frac{x-3}{4} \right)^2 + 1 \right]$$

$$\Leftrightarrow y = -8 \cdot \left(\frac{x-3}{4} \right)^2 + 12$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 + 12$$

- e) Der Trägergraph der Punkte P_n ist ebenfalls eine Parabel, da die Punkte Q_n aus einer Parallelverschiebung der Punkte P_n hervorgehen.

K2 10 a) und b)



c) $\tan \varepsilon = \frac{|SF|}{|FE|} = \frac{10 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} \Rightarrow \varepsilon = 59,04^\circ$

d) Sinussatz im Dreieck FEM_n :

$$\frac{|EM_n|}{|FE|} = \frac{\sin \varphi}{\sin (180^\circ - (\varphi + 59,04^\circ))}, \text{ und damit } |EM_n| = \frac{6 \sin \varphi}{\sin (\varphi + 59,04^\circ)} \text{ cm}$$

e) Es sind nur Winkel $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ möglich.

$|FM_n|$ ist genau dann minimal, wenn $\angle FM_nE$ ein rechter Winkel ist. Dann gilt:

$$\sin \varepsilon = \frac{|FM_n|}{|FE|} \Rightarrow |FM_n| = 6 \text{ cm} \cdot \sin 59,04^\circ = 5,1 \text{ cm}$$

$$\varphi = 180^\circ - 90^\circ - 59,04^\circ = 30,96^\circ$$

f) Satz des Pythagoras im Dreieck FES:

$$|SE| = \sqrt{(6 \text{ cm})^2 + (10 \text{ cm})^2} = 2\sqrt{34} \text{ cm} \approx 11,7 \text{ cm}$$

Mit Teilaufgabe d) für $\varphi = 30,96^\circ$ gilt:

$$|EM_2| = 3,1 \text{ cm} \Rightarrow |SM_2| = 11,7 \text{ cm} - 3,1 \text{ cm} = 8,6 \text{ cm}$$

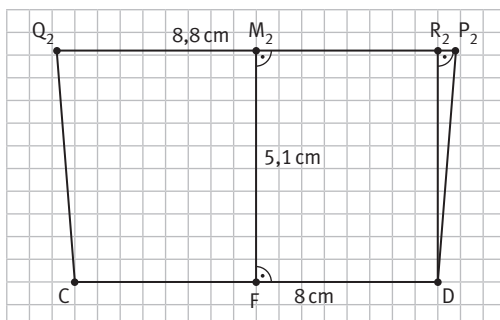
Der Strahlensatz in der rechten Mantelfläche liefert:

$$\frac{|P_2Q_2|}{|AB|} = \frac{|SM_2|}{|SE|} \Rightarrow |P_2Q_2| = |AB| \cdot \frac{|SM_2|}{|SE|} = 8,8 \text{ cm}$$

Für den Flächeninhalt des Trapezes gilt somit:

$$A = |FM_2| \cdot \frac{|P_2Q_2| + |CD|}{2} = 42,8 \text{ cm}^2$$

Bestimmung der Innenwinkel:



Im Trapez CDP_2Q_2 zeichnet man wie angegeben ein Dreieck DP_2R_2 ein. Darin gilt:

$$\tan \angle P_2DR_2 = \frac{|R_2P_2|}{|DR_2|} = \frac{0,4 \text{ cm}}{5,1 \text{ cm}} \Rightarrow \angle P_2DR_2 = 4,48^\circ$$

Es ergeben sich Innenwinkelmaße von $94,48^\circ$ bzw. $85,52^\circ$.

g) Mit $|\overline{SE}| = 2\sqrt{34}$ cm und Teilaufgabe d) folgt:

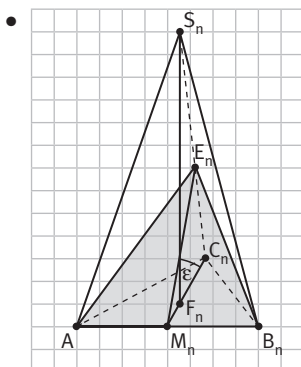
$$|\overline{SM_n}| = \left(2\sqrt{34} - \frac{6 \sin \varphi}{\sin(\varphi + 59,04^\circ)} \right) \text{ cm}$$

Der Strahlensatz in der rechten Mantelfläche der Pyramide liefert:

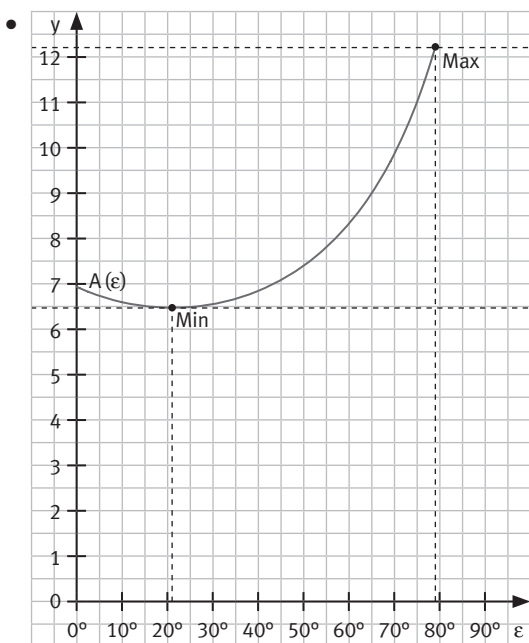
$$\frac{|\overline{P_n Q_n}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{SM_n}|}{|\overline{SE}|} \Rightarrow |\overline{P_n Q_n}| = |\overline{AB}| \cdot \frac{|\overline{SM_n}|}{|\overline{SE}|} = 12 \text{ cm} \cdot \frac{\left(2\sqrt{34} - \frac{6 \sin \varphi}{\sin(\varphi + 59,04^\circ)} \right) \text{ cm}}{2\sqrt{34} \text{ cm}} = \left(12 - \frac{36 \sin \varphi}{\sqrt{34} \sin(\varphi + 59,04^\circ)} \right) \text{ cm}$$

Vertiefung

KX



KX

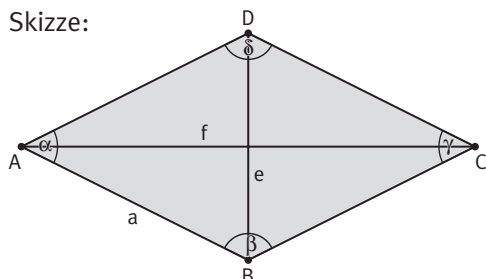


$$A(\epsilon) = \frac{6,464}{\sin(68,95^\circ + \epsilon)} \text{ cm}^2$$

$$A_{\min} \approx 6,5 \text{ cm}^2; A_{\max} \approx 12,2 \text{ cm}^2$$

KX

a) Skizze:



Länge der Diagonalen der Raute (in LE):

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}e}{a} \Rightarrow e(\alpha) = 2a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}f}{a} \Rightarrow f(\alpha) = 2a \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} A(a, \alpha) &= \frac{1}{2}e \cdot f = \frac{1}{2}2a \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2a \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ &= 2a^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot \frac{\alpha}{2} \\ &= a^2 \sin \alpha \text{ (FE)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A(a, \alpha) &= a^2 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{A(a, \alpha)}{a^2} = \frac{18 \text{ cm}^2}{(5 \text{ cm})^2} = 0,72 \Rightarrow \alpha = \gamma = 46,05^\circ \\ &\Rightarrow \beta = \delta = 180^\circ - 46,05^\circ = 133,95^\circ \end{aligned}$$

KX

- 1 ① Additionstheorem
 ② Additionstheorem
 ③ Satz des Pythagoras am Einheitskreis

KX

- 2 Mit $\beta = \alpha$ gilt:
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos(2\alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

K1

- 3 a) $T_2 = \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha \cdot (1 - \sin^2 \beta) - \sin^2 \beta \cdot (1 - \sin^2 \alpha) = T_1$
 b) $T_2 = \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha \cdot (1 - \sin^2 \beta) - \sin^2 \beta \cdot (1 - \cos^2 \alpha) = T_1$

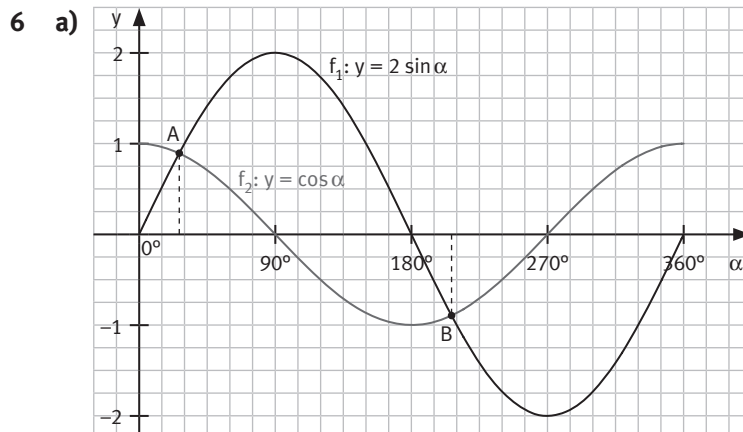
KX

- 4 Für das Winkelmaß α jedes Schnittpunktes gilt: $\sin \alpha = \cos \alpha$.
 Diese Gleichung ist im Bereich $\alpha \in \{-360^\circ; 360^\circ\}$ erfüllt für
 $\alpha_E = 45^\circ$; $\alpha_U = 45^\circ - 360^\circ = -315^\circ$
 $\alpha_F = 45^\circ - 180^\circ = -135^\circ$; $\alpha_R = 45^\circ + 180^\circ = 225^\circ$
 Die gemeinsamen Punkte der Sinus- und Kosinuskurve sind:
 $U\left(-135^\circ \mid \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $F\left(-135^\circ \mid -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $E\left(45^\circ \mid \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ und $R\left(225^\circ \mid -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

KX

- 5 a) Das ist falsch. Mögliches Gegenbeispiel mit $\alpha = 0^\circ$ und $k = 1$:
 $\tan 0^\circ = 0$, aber $\tan 90^\circ$ ist nicht definiert.
 b) Das ist falsch, die Kosinusfunktion entspricht der Sinusfunktion, welche um 90° entlang der α -Achse nach links verschoben wurde. Das gilt ebenso für die Nullstellen.
 c) Das ist falsch, die Funktion $f: y = \cos \alpha$ ist achsensymmetrisch zur y -Achse, da gilt $\cos \alpha = \cos -\alpha$. Sie kann nicht gleichzeitig punktsymmetrisch zu $P(0^\circ \mid 0)$ sein.
 d) Das ist richtig, denn $\sin 225^\circ = \cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

KX



- b) grafische Bestimmung: $A(\approx 27^\circ \mid \approx 0,9)$; $B(\approx 207^\circ \mid \approx -0,9)$
 rechnerische Probe: $2 \cdot \sin 27^\circ \approx 0,9 \approx \cos 27^\circ$
 $2 \cdot \sin 207^\circ \approx -0,9 \approx \cos 207^\circ$

K5

- 7 a) $2 \sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha = 1$
 $1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2} = 2 \cos^2 \alpha$
 $\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$
 $\cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$
 $\alpha_1 = 60^\circ; \alpha_2 = 120^\circ; \alpha_3 = 240^\circ; \alpha_4 = 300^\circ$
 b) $\cos^2 \alpha + 0,5 \cdot \tan \alpha = 0,5 - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow 1 + 0,5 \cdot \tan \alpha = 0,5 \Leftrightarrow \tan \alpha = -1$
 $\alpha_1 = 135^\circ; \alpha_2 = 315^\circ$
 c) $L = \emptyset$
 $3 \sin^2 \alpha + 5 \cos^2 \alpha$ hat seinen kleinsten Wert bei $\alpha = 90^\circ$, da $3 \sin^2 90^\circ + 5 \cdot \cos^2 90^\circ = 3 > 2$
 d) $\alpha_1 = 0^\circ; \alpha_2 = 90^\circ; \alpha_3 = 360^\circ$

K2

- 8 Hinweis: Aus Gründen der Einfachheit werden Längen ohne die Angabe LE angegeben.
- a) D_n ist der Schnittpunkt zweier Halbgeraden. Die erste ist der Schenkel eines Winkels α , den man in A an die x-Achse anträgt. Die zweite ist der Schenkel eines Winkels, den man in B an das Lot auf die x-Achse anträgt. C_n ist der Lotfußpunkt von D_n auf die x-Achse.
- b) Das Dreieck ABD_1 ist gleichschenkelig $\Rightarrow |\overline{BD_1}| = 6 \Rightarrow |\overline{BC_1}| = 6 \cdot \sin 30^\circ = 3$
 $\Rightarrow |\overline{C_1D_1}| = 6 \cdot \cos 30^\circ = 3\sqrt{3} \approx 5,2$
 $\overrightarrow{OC_1} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $C_1(9|0)$
 $\overrightarrow{OD_1} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$, also $D_1(9|5,2)$
- c) $\sphericalangle AD_nB = 90^\circ - 2\alpha$
 Sinussatz im Dreieck ABD_n : $\frac{\sin \alpha}{|\overline{BD_n}|} = \frac{\sin (90^\circ - 2\alpha)}{6} \Rightarrow |\overline{BD_n}| = \frac{6 \sin \alpha}{\sin (90^\circ - 2\alpha)}$
 $\sphericalangle C_nBD_n = 90^\circ - \alpha \Rightarrow |\overline{BC_n}| = \frac{6 \sin \alpha}{\sin (90^\circ - 2\alpha)} \cdot \cos (90^\circ - \alpha)$
 $|\overline{C_nD_n}| = \frac{6 \sin \alpha}{\sin (90^\circ - 2\alpha)} \cdot \sin (90^\circ - \alpha)$
 $\Rightarrow \overrightarrow{OC_n} = \begin{pmatrix} 6 + \frac{6 \sin \alpha}{\sin (90^\circ - 2\alpha)} \cdot \cos (90^\circ - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$, also
 $C_n \left(6 + \frac{6 \sin \alpha}{\sin (90^\circ - 2\alpha)} \cdot \cos (90^\circ - \alpha) \mid 0 \right)$
 $\Rightarrow \overrightarrow{OD_n} = \begin{pmatrix} 6 + \frac{6 \sin \alpha}{\sin (90^\circ - 2\alpha)} \cdot \cos (90^\circ - \alpha) \\ \frac{6 \sin \alpha}{\sin (90^\circ - 2\alpha)} \cdot \sin (90^\circ - \alpha) \end{pmatrix}$, also
 $D_n \left(6 + \frac{6 \sin \alpha}{\sin (90^\circ - 2\alpha)} \cdot \cos (90^\circ - \alpha) \mid \frac{6 \sin \alpha}{\sin (90^\circ - 2\alpha)} \cdot \sin (90^\circ - \alpha) \right)$

K2

9 a) $\overrightarrow{OA_1} = \begin{pmatrix} 2 \cos 0^\circ + 5 \\ \sin^2 0^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $A_1(7|0)$
 $\overrightarrow{OA_2} = \begin{pmatrix} 2 \cos 90^\circ + 5 \\ \sin^2 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $A_2(5|1)$
 $\overrightarrow{OA_3} = \begin{pmatrix} 2 \cos 150^\circ + 5 \\ \sin^2 150^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,27 \\ 0,25 \end{pmatrix}$, also $A_3(3,27|0,25)$

b) $A(\alpha) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \cos \alpha + 5 \\ \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \right| \text{ FE}$
 $= (2 \cos \alpha + 5) \cdot 6 \text{ FE} - (\sin^2 \alpha) \cdot 5 \text{ FE}$
 $= 12 \cos \alpha \text{ FE} + 30 \text{ FE} - 5 \sin^2 \alpha \text{ FE}$
 $= 12 \cos \alpha \text{ FE} + 30 \text{ FE} - 5 \cdot (1 - \cos^2 \alpha) \text{ FE}$
 $= (5 \cos^2 \alpha + 12 \cos \alpha + 25) \text{ FE}$

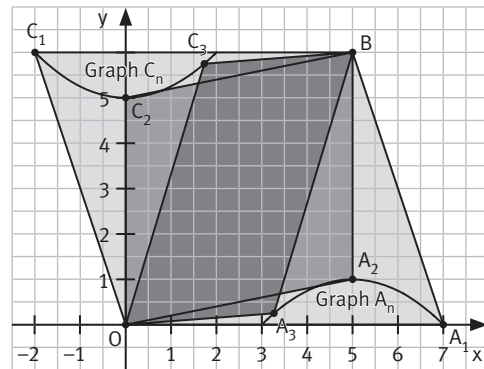
c) $A_n = \begin{pmatrix} 2 \cos \alpha + 5 \\ \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$
 $C_n = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA_n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \cos \alpha + 5 \\ \sin^2 \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cos \alpha \\ 6 - \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$

Graph zu A_n :

$$x = 2 \cos \alpha + 5 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}(x - 5) \quad y = \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}(x - 5)\right)^2 = 1 - \frac{1}{4}(x - 5)^2$$

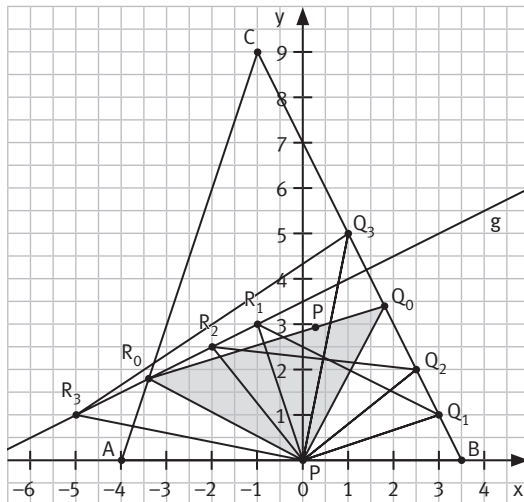
Graph zu C_n :

$$x = -2 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}x \quad y = 6 - \sin^2 \alpha = 5 + \cos^2 \alpha = 5 + \frac{1}{4}x^2$$



K4/5

10 a)



b) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{BC} = -2 \quad BC: y = -2x + 7$

$$BC \perp P; \varphi = 90^\circ \rightarrow g$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -2x + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 7 \\ x \end{pmatrix}$$

c) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{AC} = 3 \quad AC: y = 3x + 12$

Ermittlung der Koordinaten des Punktes R_0 :

$$y = 0,5x + 3,5 \quad \wedge \quad y = 3x + 12$$

$$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}$$

$$g: y = 0,5x + 3,5$$

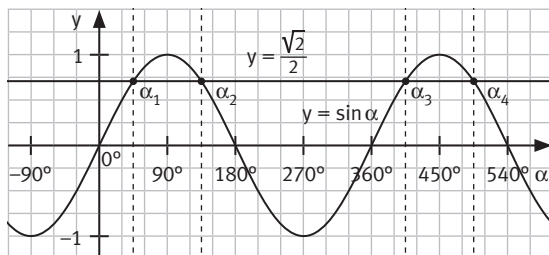
$$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$L = \{(-3,4|1,8)\}$$

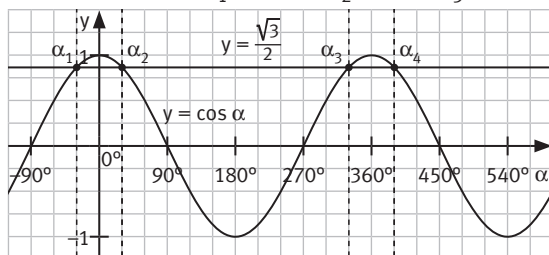
$$R_0(-3,4|1,8)$$

KX

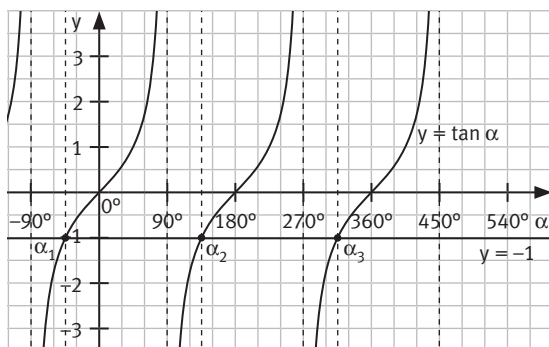
- 1 a) Die Winkelmaße $\alpha \in \{[-90^\circ; 45^\circ]; [135^\circ; 405^\circ]; [495^\circ; 540^\circ]\}$ erfüllen $\sin \alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.



- b) Die Winkelmaße $\alpha_1 = -30^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$, $\alpha_3 = 330^\circ$ und $\alpha_4 = 390^\circ$ erfüllen $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



- c) Die Winkelmaße $\alpha \in \{]-90^\circ; -45^\circ[;]90^\circ; 135^\circ[;]270^\circ; 315^\circ[\}$ erfüllen $\tan \alpha < -1$.



KX

- 2 Lösungsmöglichkeit: Der Graph der Kosinusfunktion entsteht durch Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion um -90° in α -Richtung: $\cos \alpha = \sin(\alpha + 90^\circ)$.

KX

- 3 Bei einer Sinusfunktion mit der Gleichung $f: y = \sin(\alpha - \varphi)$ beschreibt das Winkelmaß φ die Verschiebung des Funktionsgraphen entlang der α -Achse im Vergleich zu $y = \sin \alpha$.

KX

- 4 Lösungsmöglichkeit: Der rote Graph von g entsteht aus dem schwarzen Graphen der Grundfunktion $f: y = \sin \alpha$ durch Spiegelung an der α -Achse. Man erhält als „vorläufigen“ Funktionsterm: $f^*: y = -\sin \alpha$. Anschließend wird der gespiegelte Graph um den Faktor 2 gestreckt. Der Funktionsterm für g lautet $g: y = -2 \cdot \sin \alpha$.

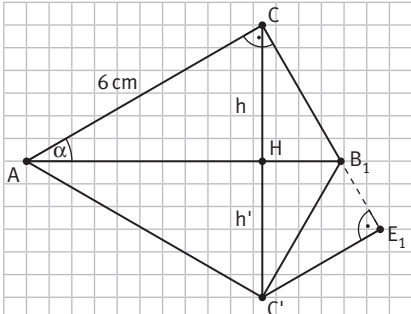
KX

- 5 a) Für $-180^\circ \leq \alpha \leq 0$; $180^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$; $540^\circ \leq \alpha \leq 720^\circ$; ... verläuft der Graph der Sinusfunktion wie der abgebildete Ausschnitt.
Für $-270^\circ \leq \alpha \leq -90^\circ$; $90^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$; $450^\circ \leq \alpha \leq 630^\circ$; ... verläuft der Graph der Kosinusfunktion wie der abgebildete Ausschnitt.
- b) Für $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$; $270^\circ \leq \alpha \leq 450^\circ$; $630^\circ \leq \alpha \leq 810^\circ$; ... verläuft der Graph der Sinusfunktion wie der abgebildete Ausschnitt.
Für $-180^\circ \leq \alpha \leq 0$; $180^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$; $540^\circ \leq \alpha \leq 720^\circ$; ... verläuft der Graph der Kosinusfunktion wie der abgebildete Ausschnitt.

- KX** 6 a) Die Aussage ist wahr, da der Graph der Kosinusfunktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist.
 b) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $\cos(0^\circ) = 1$, aber $\sin(-90^\circ) = -1$.
 c) Die Aussage ist für $k \in \mathbb{Z}$ wahr, da die Kosinusfunktion periodisch ist mit der Periodenlänge 360° .
 d) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $\cos(2 \cdot 0^\circ) = \cos(0^\circ) = 1$, aber $2 \cdot \cos(0^\circ) = 2 \cdot 1 = 2$.

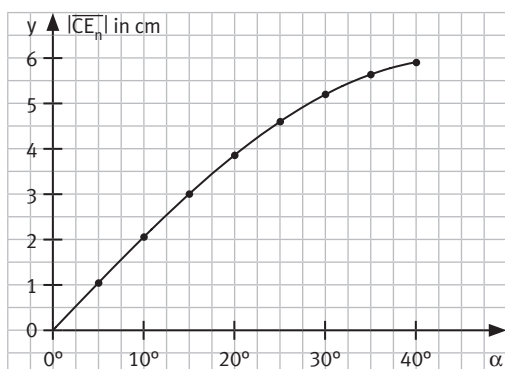
- KX** 7 a) $\cos \alpha = 0,5 \cdot \sin \alpha \quad | \cdot 2$
 $2 \cos \alpha = \sin \alpha \quad | : \cos \alpha$
 $2 = \tan \alpha \quad | \tan^{-1}$
 $\alpha = 63,4^\circ$
 $L = \{63,4^\circ\}$
- b) $2 \cos \alpha = 2 - \sin \alpha \quad | : 2$
 $\cos \alpha = 1 - \frac{\sin \alpha}{2} \quad | \text{quadrieren}$
 $\cos^2 \alpha = \left(1 - \frac{\sin \alpha}{2}\right)^2$
 $1 - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \frac{\sin \alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \quad | - 1$
 $-\sin^2 \alpha = -\sin \alpha + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \quad | + \sin^2 \alpha + \sin \alpha$
 $\sin \alpha = \frac{5}{4} \sin^2 \alpha$
 $\sin \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0^\circ$
 $\sin \alpha_2 \neq 0 \Rightarrow 1 = \frac{5}{4} \sin \alpha_2 \quad | \cdot \frac{4}{5}$
 $\frac{4}{5} = \sin \alpha_2 \quad | \sin^{-1}$
 $\alpha_2 = 53,1^\circ$
 Eine Probe bestätigt beide Lösungen, also $L = \{0^\circ; 53,1^\circ\}$

- KX** 8 Die Aussage ist wahr: Die Gleichung $|\cos \alpha| = \cos 2\alpha - 2$ hat keine Lösung. Es gibt kein Winkelmaß, das die Gleichung erfüllt: Für jedes beliebige Winkelmaß α liegt $|\cos \alpha|$ zwischen 0 und 1, d. h.: $|\cos \alpha| \geq 0$. Umgekehrt liegt $\cos 2\alpha - 2$ für jedes beliebige Winkelmaß α zwischen -3 und -1 , d. h.: $\cos 2\alpha - 2 \leq -1$.

- KX** 9 a) 
- b) Es gilt: $\angle C'CB_n = \alpha$.
 Im Dreieck AHC gilt:
 $\sin \alpha = \frac{h}{6 \text{ cm}} \Rightarrow h = 6 \text{ cm} \cdot \sin \alpha$
 $|\overline{CC'}| = 2 \cdot h = 12 \text{ cm} \cdot \sin \alpha$
 Im Dreieck C'E_nC gilt:
 $\cos \alpha = \frac{|\overline{CE_n}|}{|\overline{CC'}|} = \frac{|\overline{CE_n}|}{12 \text{ cm} \cdot \sin \alpha}$
 $\Rightarrow |\overline{CE_n}| = 12 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \text{ cm}$

c)

α in $^\circ$	5	10	15	20	25	30	35	40
$ \overline{CE_n} (\alpha)$	1,04	2,05	3,00	3,86	4,60	5,20	5,64	5,91



- d) Durch Ablesen am Graphen erhält man $\alpha = 15^\circ$. Die Wertetabelle in c) liefert den gleichen Wert.

KX 10

α in °	-180	-157,5	-135	-112,5	-90	-67,5	-45	-22,5
	0	22,5	45	67,5	90	112,5	135	157,5
	180	202,5	225	247,5	270	292,5	315	337,5
	360	382,5	405	427,5	450	472,5	495	517,5
	540							
$\tan \alpha$	0	0,4	1	2,4	/	-2,4	-1	-0,4

$$D = [-180^\circ; 540^\circ] \setminus \{-90^\circ; 90^\circ; 270^\circ; 450^\circ\}$$

$$\text{Nullstellen: } x_1 = -180^\circ; x_2 = 0^\circ; x_3 = 180^\circ; x_4 = 360^\circ; x_5 = 540^\circ$$

Die Abbildung entfällt aus Platzgründen.

KX 11 Anwenden der Additionstheoreme ergibt:

$$\sin 120^\circ = \sin (70^\circ + 50^\circ) = \sin 70^\circ \cdot \cos 50^\circ + \cos 70^\circ \cdot \sin 50^\circ$$

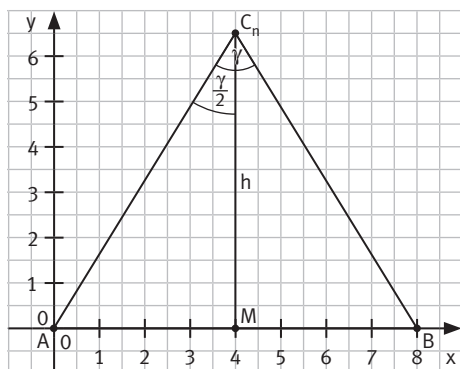
$$\cos 140^\circ = \cos (70^\circ + 70^\circ) = \cos 70^\circ \cdot \cos 70^\circ - \sin 70^\circ \cdot \sin 70^\circ$$

 KX 12 $\sin (2\alpha) = \sin (\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

 KX 13 $A(\epsilon)$ ist minimal, wenn $\sin (120^\circ - \epsilon)$ maximal ist, d. h. mit $\sin (120^\circ - \epsilon) = 1$, also mit $\epsilon = 30^\circ$.

$$A(30^\circ) = \frac{3}{2 \cdot \sin 90^\circ} \cdot \sin 90^\circ \text{ FE} = \frac{3}{2} \text{ FE} = 1,5 \text{ FE}$$

KX 14


 a) Für $\gamma = 60^\circ$ erhält man ein gleichseitiges Dreieck ABC_1 mit $u = 3 \cdot 8 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$.

 Für $\gamma = 90^\circ$ erhält man ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ABC_2 .

$$|\overline{AC_2}|^2 + |\overline{AC_2}|^2 = |\overline{AB}|^2 \Leftrightarrow 2 \cdot |\overline{AC_2}|^2 = 64 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow |\overline{AC_2}| = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$u = 2|\overline{AC_2}| + |\overline{AB}| = 2 \cdot 4\sqrt{2} \text{ cm} + 8 \text{ cm} \approx 19,3 \text{ cm}$$

 b) Es gilt: $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{4 \text{ cm}}{|\overline{AC_n}|} \Rightarrow |\overline{AC_n}| = \frac{4 \text{ cm}}{\sin \frac{\gamma}{2}}$

$$u\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2|\overline{AC_n}| + 8 \text{ cm} = \frac{8 \text{ cm}}{\sin \frac{\gamma}{2}} + 8 \text{ cm}$$

 c) $\frac{8 \text{ cm}}{\sin \frac{\gamma}{2}} + 8 \text{ cm} = 24 \text{ cm} \Leftrightarrow \frac{8 \text{ cm}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = 16 \text{ cm} \Leftrightarrow \sin \frac{\gamma}{2} = 0,5 \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = 30^\circ \Rightarrow \gamma = 60^\circ$

 Das Dreieck ABC_3 stimmt mit Dreieck ABC_1 überein.

Aufgaben für Lernpartner

- K1/6 A** Das ist richtig. Die Periodenlänge der Sinusfunktion ist 360° .
- K1/6 B** Das ist falsch. Die genannte Verschiebung ist nur in negativer Richtung richtig.
- K1/6 C** Das ist falsch. Es gilt: $\sin(\varphi + \alpha) = \sin \varphi \cdot \cos \alpha + \cos \varphi \cdot \sin \alpha$.
- K1/6 D** Das ist falsch. Der Graph der Tangensfunktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.
- K1/6 E** Das ist richtig. Die Periodenlänge beträgt jeweils 360° .
- K1/6 F** Das ist richtig. Für die Definitionsmenge von φ ist $0 \leq \sin(\varphi + 50^\circ) \leq 1$. $\sin(\varphi + 50^\circ)$ nimmt den maximalen Wert 1 für $\varphi = 40^\circ$ an. Damit nimmt $|\overline{A_n B_n}|$ sein Minimum für $\varphi = 40^\circ$ an.
- K1/6 G** Das ist falsch. Richtig ist $W = [-1,5; 2,5]$.
- K1/6 H** Das ist richtig. Für die Definitionsmenge von α ist $0 \leq \sin^2 \alpha \leq 1$ und $0 \leq \cos^2 \alpha \leq 1$, damit gilt $-1 \leq \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \leq 1$.
- K1/6 I** Das ist richtig, die Tangensfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung $O(0^\circ | 0)$.
- K1/6 J** Das ist falsch. Die Nullstellen der Sinusfunktion sind $x = k \cdot 180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$); die Nullstellen der Kosinusfunktion sind $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Periodische Vorgänge im Alltag

- KX** 1 Das Prinzip ist bei diesem Funktionsgraphen dasselbe wie beim Einheitskreis: Bestimmten Winkelmaßen (hier: Minuten) werden die y-Werte der Punkte auf dem Kreis zugeordnet. Konkret bedeutet das: Der Funktionsgraph ist gegenüber dem einer „normalen“ Sinusfunktion um $\frac{135}{2}$ m in y-Richtung verschoben, zusätzlich um den Faktor $\frac{135}{2}$ gestreckt. Außerdem ist die Periode verändert.
- KX** 2 Die Periodenlänge beträgt 12 Stunden: Zweimal täglich gibt es Hoch- und zweimal täglich gibt es Niedrigwasser.

Trigonometrische Funktionen

- KX** 3 Lösungsmöglichkeit:
- Alle drei Funktionen sind periodische Funktionen.
 - Die Sinus- und Kosinusfunktion haben beide die Periodenlänge 360° .
 - Die Funktionswerte der Sinus- und der Kosinusfunktion sind vom Betrag her immer ≤ 1 .
 - Alle drei Funktionen haben eine Nullstelle bei 0° .
 - ...
- KX** 4 Lösungsmöglichkeit:
- a) Die Funktion startet bei -180° mit dem y-Wert -1 . Anschließend steigt sie stetig an und weist bis zu ihrer Nullstelle, welche den Wendepunkt darstellt, eine Linkskrümmung auf. Nach dieser Nullstelle bei -90° ist die Kurve rechtsgekrümmt bis zu ihrer zweiten Nullstelle bei 90° . Der Maximalwert in diesem Bereich liegt bei $(0^\circ | 1)$. Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
 - b) Der Graph der Tangensfunktion besitzt in diesem Bereich drei Asymptoten, bei -90° , 90° und 270° . Zwischen zwei Asymptoten ist der Verlauf des Graphen immer gleich. Er steigt von $-\infty$ an der Asymptote an bis zu seiner Nullstelle bei 0° (bzw. 180°). In diesem Bereich ist der Graph rechtsgekrümmt. Anschließend ist er von 0° (bzw. 180°) bis zur Annäherung an die Asymptote linksgekrümmt. Die Nullstelle ist demnach ein Wendepunkt. Der Verlauf des Graphen innerhalb zweier Asymptoten ist punktsymmetrisch zu seinem Schnittpunkt mit der x-Achse.
 - c) Der Graph hat im angegebenen Intervall drei Nullstellen bei -360° , -180° und 0° . Diese Nullstellen wirken ebenfalls als Wendepunkte. Zwischen -360° und -180° ist der Graph rechtsgekrümmt, zwischen -180° und 0° linksgekrümmt und anschließend nach 0° wieder rechtsgekrümmt. Der Graph besitzt außerdem zwei Maximalwerte mit dem gleichen y-Wert 1 bei -270° und 90° sowie einen Minimalwert -1 bei -90° .
- KX** 5 Das ist richtig, denn der Graph der Kosinusfunktion gleicht dem Graphen der Sinusfunktion bis auf eine Parallelverschiebung um -90° entlang der α -Achse.
- KX** 6
- a) $-360^\circ \leq \alpha \leq -330^\circ$; $-210^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$ oder $150^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$
 - b) $-60^\circ < \alpha < 60^\circ$
 - c) $\alpha = 45^\circ$

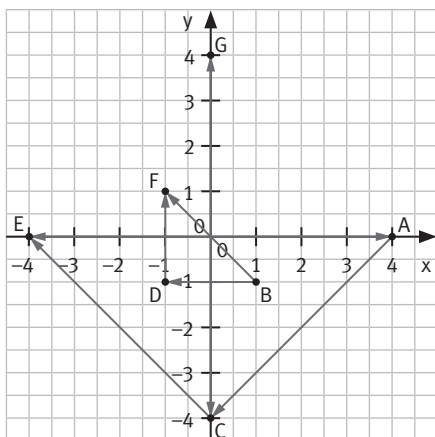
KX

- 7 Mika hat Recht, wenn man sich auf die Grundfunktion $f: y = \sin \alpha$ bezieht: In diesem Fall ändert eine Amplitude $|a|$ mit $f^*: y = a \cdot \sin \alpha$ die Nullstellen tatsächlich nicht.
Mika hat allerdings nicht Recht, wenn man beispielsweise eine Funktion $g: y = \sin \alpha + 1$ betrachtet. Verändert man hier die Amplitude, beispielsweise durch $g^*: y = 2 \sin \alpha + 1$, ändern sich auch die Nullstellen.
Mettes Aussage ist wahr, da man mit dieser Methode das arithmetische Mittel bestimmt, womit man auch bei Verschiebungen der Sinusfunktion entlang der y -Achse die Amplitude bestimmen kann.

Startklar

Vektoren

1



a) $|\vec{AE}| = |\vec{EA}| = |\vec{CG}| = |\vec{GC}| = 8$

b) $\vec{AC} \oplus \vec{CE} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{AE}$

$\vec{BD} \oplus \vec{DF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{BF}$

Mittelpunkt einer Strecke

2 A(4|-1) und B(6|2): $M_{\overline{AB}} \left(\frac{10}{2} \mid \frac{1}{2} \right) = M_{\overline{AB}} (5 \mid 0,5)$

C(3,5|3,5) und D(0,5|2): $M_{\overline{CD}} \left(\frac{4}{2} \mid \frac{5,5}{2} \right) = M_{\overline{CD}} (2 \mid 2,75)$

P(-3|4) und Q(2|-1,5): $M_{\overline{PQ}} \left(\frac{-1}{2} \mid \frac{2,5}{2} \right) = M_{\overline{PQ}} (-0,5 \mid 1,25)$

Abstand und Winkelmaße an Geraden

3 a) $d(P; g) \approx 4,1 \text{ cm}$

b) $d(P; h) \approx 0,8 \text{ cm}$

c) $d(Q; g) \approx 2,1 \text{ cm}$

d) $d(Q; h) \approx 3,1 \text{ cm}$

e) $\sphericalangle(g; h) \approx 108^\circ$ bzw. $\sphericalangle(h; g) \approx 72^\circ$

5 Skalarprodukt von Vektoren

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:

Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K6

- Die Richtungsangaben sind als Pfeile dargestellt, die aus Sicht des Betrachters nach oben (= geradeaus), nach links oder nach rechts zeigen.

K6

- Die abgebildeten Ausfahrten bzw. Pfeile stehen senkrecht aufeinander bzw. zeigen in entgegengesetzte Richtungen. Pfeile kann man als Vertreter von Vektoren auffassen.

Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.

Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Entdecken

KX

KX

KX

- Die Zeichnung im Schulbuch entspricht der, die die Schüler ins Heft übertragen sollen.
- Die x-Komponente des Vektors $\vec{SA}$ vom Betrag a_x wird zur y-Komponente des Vektors $\vec{SA'}$, die Richtung bleibt erhalten, d. h. aus positiver x-Richtung wird eine positive y-Richtung. Die y-Komponente des Vektors $\vec{SA}$ vom Betrag a_y ergibt betragsmäßig, allerdings mit verändertem Vorzeichen, die neue x-Komponente des Vektors $\vec{SA'}$.

- Der Vektor $\vec{SB} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ hat dieselbe Steigung wie $\vec{SA'}$, d. h. man kann ihn schreiben als:

$$\vec{SB} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = k \cdot \vec{SA'} = k \cdot \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \cdot a_y \\ k \cdot a_x \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Insbesondere gilt also:

$$b_x = -k \cdot a_y$$

$$b_y = k \cdot a_x$$

$$\text{Damit gilt: } a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = a_x \cdot (-k \cdot a_y) + a_y \cdot k \cdot a_x = -k \cdot a_x \cdot a_y + k \cdot a_x \cdot a_y = 0$$

Nachgefragt

K6

- Lösungsmöglichkeit: Setzt man nur die Definition für die Orthogonalität von Vektoren voraus, so wird man sagen müssen, dass der Nullvektor senkrecht zu jedem anderen Vektor steht. Allerdings ist die Relation „senkrecht zu“ in dem Fall eine Relation zwischen zwei Pfeilen (also zwischen jeweils eindimensionalen Objekten). Da der Nullvektor aber die Dimension 0 hat (weil ihm keine Länge zugewiesen werden kann), gibt es gute Gründe, hier nicht von „senkrecht“ zu sprechen.

K1

- Ja, für die Skalarmultiplikation von Vektoren gilt das Kommutativgesetz, da die Multiplikation kommutativ ist:

$$\vec{a} \odot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = b_x \cdot a_x + b_y \cdot a_y = \vec{b} \odot \vec{a}.$$

Aufgaben

K5

- $\vec{a} \odot \vec{b} = 6 \cdot 6 + 4 \cdot (-9) = 36 - 36 = 0 \Rightarrow \vec{a}$ steht senkrecht auf $\vec{b}$.
 - $\vec{a} \odot \vec{b} = 12 \cdot 4 + (-8) \cdot (-6) = 48 + 48 = 96 \Rightarrow \vec{a}$ steht nicht senkrecht auf $\vec{b}$.
 - $\vec{a} \odot \vec{b} = 0 \cdot 15 + 8 \cdot 0 = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{a}$ steht senkrecht auf $\vec{b}$.
 - $\vec{a} \odot \vec{b} = (-7) \cdot 5 + 13 \cdot 2 = -35 + 26 = -9 \Rightarrow \vec{a}$ steht nicht senkrecht auf $\vec{b}$.
 - $\vec{a} \odot \vec{b} = 15 \cdot 15 + 4 \cdot (-4) = 225 - 16 = 209 \Rightarrow \vec{a}$ steht nicht senkrecht auf $\vec{b}$.
 - $\vec{a} \odot \vec{b} = \frac{1}{12} \cdot (-12) + 8 \cdot \frac{1}{8} = -1 + 1 = 0 \Rightarrow \vec{a}$ steht senkrecht auf $\vec{b}$.

K5

- $\vec{a} \odot \vec{b} = 0$
 - $\vec{a} \odot \vec{d} = 62$
 - $\vec{c} \odot \vec{d} = 55$
 - $\vec{d} \odot \vec{b} = -17$
 - $\vec{c} \odot \vec{b} = -5$
 - $\vec{c} \odot \vec{e} = 0$
 - $\vec{b} \odot \vec{b} = 10$
 - $\vec{c} \odot \vec{a} = 30$
 - $\vec{b} \odot \vec{d} = -17$
 - $\vec{a} \odot \vec{c} = 30$

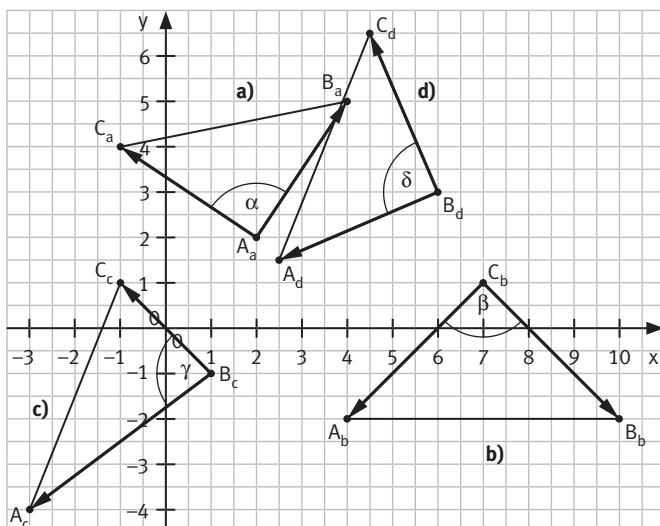
Die Vektoren a und b bzw. c und e sind zueinander orthogonal.

Von den Rechnungen d) und i) bzw. h) und j) kann man sich jeweils eine Rechnung sparen, da gilt:

$$\vec{d} \odot \vec{b} = \vec{b} \odot \vec{d} = 5 \text{ bzw. } \vec{c} \odot \vec{a} = \vec{a} \odot \vec{c} = 30.$$

Außerdem kann man sich noch die Rechnung g) sparen, da das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst immer positiv ist, sofern der Vektor nicht der Nullvektor ist.

- K5** 3 a) $3b_x + 7 \cdot (-3) = 0 \Rightarrow b_x = 7$
 b) $28a_x + 7 \cdot 12 = 0 \Rightarrow a_x = -3$
 c) $\frac{3}{4} \cdot (-16) + 6a_y = 0 \Rightarrow a_y = 2$
 d) $10x + 45 = 0 \Rightarrow a_x = x = -4,5; a_y = x + 5 = 0,5$
 e) $14y - 28 = 0 \Rightarrow b_y = y = 2; a_x = y - 4 = -2$
 f) $0 \cdot (4z - 4) + 0 \cdot (3z + 16) = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

K4 4

Ein möglicher rechter Winkel liegt gegenüber der längsten der drei Dreiecksseiten.
 Vermutungen:

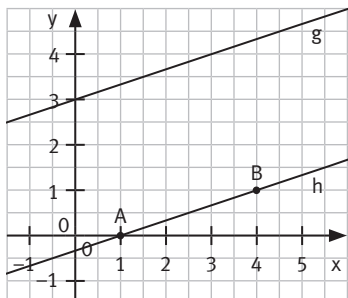
- a) Das Dreieck ist rechtwinklig bei A.
 b) Das Dreieck ist rechtwinklig bei C.
 c) Das Dreieck ist rechtwinklig bei B.
 d) Das Dreieck ist rechtwinklig bei B.

Die Vermutung, dass das Dreieck rechtwinklig ist, wird mithilfe des Skalarprodukts überprüft.

- a) $\vec{AB} \odot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ Das Dreieck ABC ist rechtwinklig bei A.
 b) $\vec{CA} \odot \vec{CB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ Das Dreieck ABC ist rechtwinklig bei C.
 c) $\vec{BA} \odot \vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ Das Dreieck ABC ist nicht rechtwinklig.
 d) $\vec{BA} \odot \vec{BC} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ -1,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -1,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ Das Dreieck ABC ist rechtwinklig bei B.

- K5** 5 a) $b_x = 7$ b) $c_y = -\frac{9}{7}$ c) $c_y = -6$ d) $b_x = 1,5$

- K5** 6 a) Lösungsbeispiele mit den Steigungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ der Geraden g und h.
 1 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{a} \odot \vec{b} = 0 \Rightarrow$ g und h sind zueinander senkrecht.
 2 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{a} \odot \vec{b} = 0 \Rightarrow$ g und h sind zueinander senkrecht.
 3 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{a} \odot \vec{b} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ g und h sind nicht zueinander senkrecht.
 b) Der Vektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix}$ ist ein Steigungsvektor zu einer Geraden mit der Steigung m_1 .
 Der Vektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ ist ein Steigungsvektor zu einer Geraden mit der Steigung m_2 .
 Es muss gelten: $\begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

K4 7

Die Geraden h und g sind offensichtlich nicht senkrecht, sondern parallel zueinander.

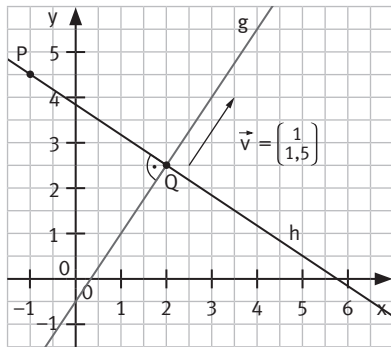
Steigungsvektor $\vec{v}_1$ zu h ist: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Steigungsvektor $\vec{v}_2$ zu g ist: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{v}_1 \odot \vec{v}_2 = 10 \neq 0$$

Entdecken

KX



KX

- Die Zeichnung oben enthält den Punkt Q. Man erhält ihn konstruktiv, indem man eine Hilfsgerade h senkrecht zu g zeichnet, die den Punkt P enthält. Q ist dann der Schnittpunkt von g und h. Ein möglicher Vektor ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \end{pmatrix}$.

KX

$$\begin{aligned} \vec{QP} \odot \vec{v} &= \begin{pmatrix} x_P - x_Q \\ y_P - y_Q \end{pmatrix} \odot \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 - x_Q \\ 4,5 - y_Q \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - x_Q \\ 4,5 - (1,5x_Q - 0,5) \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 - x_Q \\ -1,5x_Q + 5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} = -1 - x_Q + 1,5 \cdot (-1,5x_Q + 5) \\ &= -1 - x_Q - 2,25x_Q + 7,5 \\ &= -3,25x_Q + 6,5 \\ &= 0 \\ 3,25x_Q &= 6,5 \\ x_Q &= 2, \text{ also } Q(2|2,5) \end{aligned}$$

$$|\overline{QP}| = \sqrt{(-1-2)^2 + (4,5-2,5)^2} \text{ LE} = \sqrt{3^2 + 2^2} \text{ LE} = \sqrt{13} \text{ LE} \approx 3,61 \text{ LE}$$

Nachgefragt

K6

- Der Schnittpunkt der beiden Geraden g und h entspricht dem Fußpunkt Q des Lotes von P auf g. Auf die genannte Art lässt sich also auch der Abstand des Punktes P von der Geraden g berechnen.

K1

- Zu den Punkten Q_n auf g und P nicht auf g ist der Abstand gegeben mit $d(P; Q_n) = 0,5x^2 - 2x + 5$.

Um den Abstand von P zu g zu ermitteln, sucht man durch Umformung den minimalen Abstand $d(P; Q_n)$:

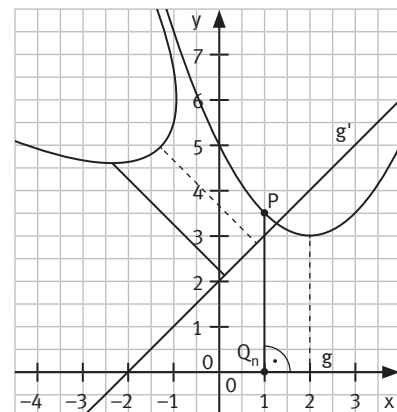
$$0,5x^2 - 2x + 5 = 0,5 \cdot (x^2 - 4x + 4 + 6) = 0,5 \cdot (x-2)^2 + 3$$

Für $x = 2$ ist $d(P; Q_n)$ minimal, es gilt: $d(P; g) = 3$.

Veranschaulichen kann man die Situation mit

g: $y = 0$ und P auf der Parabel $p: 0,5 \cdot (x-2)^2 + 3$

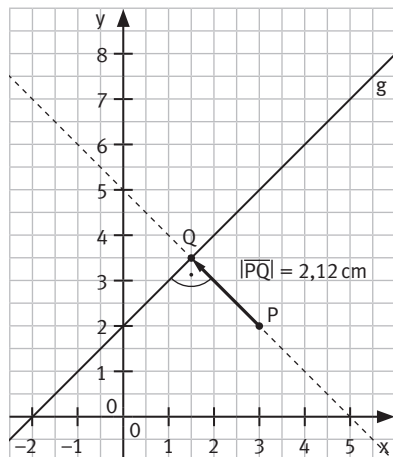
bzw. mit einer Geraden g' und einer parabelformartigen Kurve für P mit dem Abstand $d(P; g) = 3 \text{ LE}$.



Aufgaben

K4

1 a)



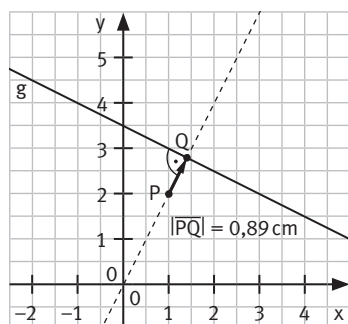
$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} x-3 \\ x \end{pmatrix}$$

$$m = 1, \text{ Steigungsvektor } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} \odot \vec{v} = 0 \Rightarrow Q(1,5 | 3,5)$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{1,5^2 + 1,5^2} \text{ cm} \approx 2,12 \text{ cm}$$

c)



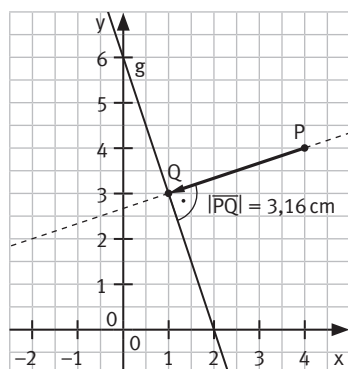
$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} x-1 \\ -0,5x+1,5 \end{pmatrix}$$

$$m = -0,5, \text{ Steigungsvektor } \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} \odot \vec{v} = 0 \Rightarrow Q(1,4 | 2,8)$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{0,4^2 + 0,8^2} \text{ cm} \approx 0,89 \text{ cm}$$

e)



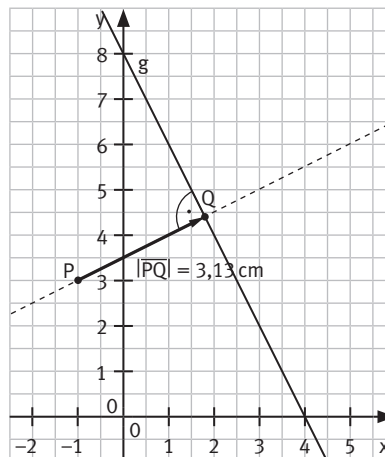
$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} x-4 \\ -3x+2 \end{pmatrix}$$

$$m = -3, \text{ Steigungsvektor } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} \odot \vec{v} = 0 \Rightarrow Q(1 | 3)$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{3^2 + 1^2} \text{ cm} \approx 3,16 \text{ cm}$$

b)



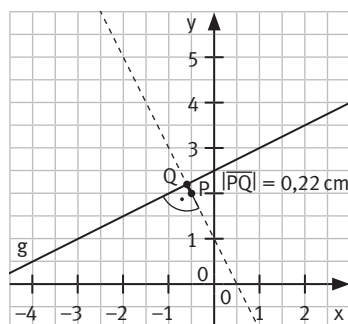
$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} x+1 \\ -2x+5 \end{pmatrix}$$

$$m = -2, \text{ Steigungsvektor } \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} \odot \vec{v} = 0 \Rightarrow Q(1,8 | 4,4)$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{2,8^2 + 1,4^2} \text{ cm} \approx 3,13 \text{ cm}$$

d)



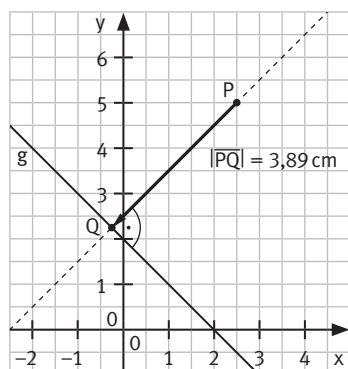
$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} x+0,5 \\ 0,5x+0,5 \end{pmatrix}$$

$$m = 0,5, \text{ Steigungsvektor } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} \odot \vec{v} = 0 \Rightarrow Q(-0,6 | 2,2)$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{0,1^2 + 0,2^2} \text{ cm} \approx 0,22 \text{ cm}$$

f)



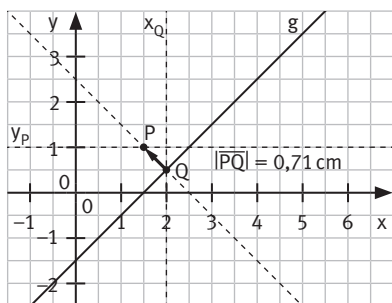
$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} x-2,5 \\ -x-3 \end{pmatrix}$$

$$m = -1, \text{ Steigungsvektor } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} \odot \vec{v} = 0 \Rightarrow Q(-0,25 | 2,25)$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{2,75^2 + 2,75^2} \text{ cm} \approx 3,89 \text{ cm}$$

K5 2



$$y_Q = g(2) = 2 - 1,5 = 0,5 \Rightarrow Q(2|0,5)$$

$$\vec{QP} = \begin{pmatrix} x_P - 2 \\ 1 - 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P - 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

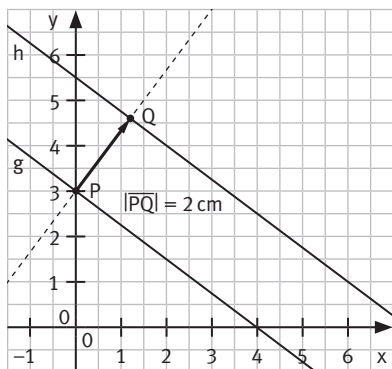
$$m = 1, \text{ Steigungsvektor } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{QP} \odot \vec{v} = 0$$

$$x_P - 2 + 0,5 = 0 \Leftrightarrow x_P = 1,5 \Rightarrow P(1,5|1)$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2} \text{ cm} \approx 0,71 \text{ cm}$$

K5 3



Wähle einen beliebigen Punkt auf einer der Geraden, z. B. P(0|3) auf g, und berechne den Abstand von P zu h nach dem bekannten Muster:

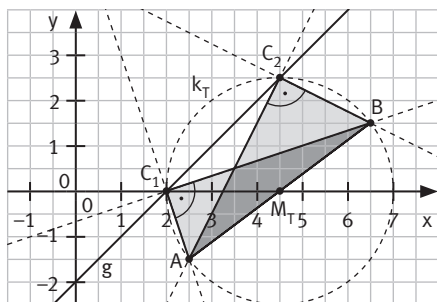
$$Q(x|-0,75x + 5,5) \text{ und } \vec{PQ} = \begin{pmatrix} x \\ -0,75x + 2,5 \end{pmatrix}$$

$$m = -0,75, \text{ Steigungsvektor } \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} \odot \vec{v} = 0 \Rightarrow Q(1,2|4,6)$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{1,2^2 + 1,6^2} \text{ cm} = 2 \text{ cm}$$

K5 4



Konstruktion:

Die Eckpunkte C_1 und C_2 der Dreiecke ABC_1 und ABC_2 werden als Schnittpunkte des Thaleskreises über $\overline{AB}$ mit der Geraden g bestimmt.

Rechnerische Bestimmung der Koordinaten von C_1 und C_2 (mit C für C_1 bzw. C_2):

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} x - 6,5 \\ (x - 2) - 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 6,5 \\ x - 3,5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{AC} = \begin{pmatrix} x - 2,5 \\ (x - 2) + 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2,5 \\ x - 0,5 \end{pmatrix}$$

Da in den Dreiecken ABC_1 und ABC_2 der Winkel bei C_1 und bei C_2 ein rechter Winkel sein soll, gilt: $\vec{BC} \odot \vec{AC} = 0$

$$(x - 6,5) \cdot (x - 2,5) + (x - 3,5) \cdot (x - 0,5) = 0$$

$$2x^2 - 13x + 18 = 0$$

$$x^2 - 6,5x + 9 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{6,5 \pm \sqrt{6,5^2 - 36}}{2}$$

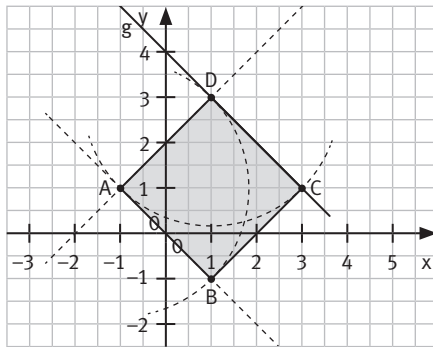
$$x_{1/2} = \frac{6,5 \pm 2,5}{2}$$

$$x_1 = 2; \quad y_1 = 2 - 2 = 0 \Rightarrow C_1(2|0)$$

$$x_2 = 4,5; \quad y_2 = 4,5 - 2 = 2,5 \Rightarrow C_2(4,5|2,5)$$

K4

5



$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} x_D + 1 \\ -x_D + 3 \end{pmatrix} \text{ und Steigungsvektor } \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} \odot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow -x_D - 1 - x_D + 3 = 0 \Leftrightarrow x_D = 1$$

$$y_D = -1 + 4 = 3 \quad \Rightarrow D(1|3)$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow B(1|-2); C(3|1)$$

(Rechnerisch möglich sind auch $B(-3|3)$ und $C(-1|5)$; diese Lösung entfällt, da diese Eckpunkte dem Umlaufsinn im Viereck ABCD widersprechen.)

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{2^2 + 2^2} \text{ cm} = \sqrt{8} \text{ cm} \approx 2,83 \text{ cm}$$

$$A_{ABCD} = |\overrightarrow{AD}|^2 = 8 \text{ cm}^2$$

K6

- 6 Die Aussage ist zwar richtig, allerdings ist das Bestimmen des Abstands von P_1 und P_2 zu h nicht nötig, um zu überprüfen, ob g und h parallel sind. Man muss lediglich die Steigungen der beiden Geraden bestimmen. Für g und h gilt: $m_g = m_h = 2,5$, die beiden Geraden sind parallel.

Entdecken

KX

KX

- Die Zeichnung im Schulbuch entspricht der, die die Schüler ins Heft übertragen sollen.
- $\cos \varphi = \cos(\beta - \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$
 $\cos \alpha$ ist der „Rechtswert“ des zum Winkel α zugehörigen Endpunktes des Vektor $\vec{a}$, der allerdings noch normiert, also auf die Länge 1 gebracht werden, muss. Entsprechendes gilt für $\cos \beta$ und den Vektor $\vec{b}$.
 $\sin \alpha$ und $\sin \beta$ sind „Hochwerte“, auch hier muss normiert werden.
 $\cos \varphi = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$
 $= \frac{a_x}{|\vec{a}|} \cdot \frac{b_x}{|\vec{b}|} + \frac{a_y}{|\vec{a}|} \cdot \frac{b_y}{|\vec{b}|}$
- Nach Multiplikation mit $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ erhält man: $\vec{a} \odot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$.

KX

Nachgefragt

K1

- Damit das Produkt auf der rechten Seite gleich null ist, muss $\cos \varphi = 0$ gelten, da die Beträge der beiden Vektoren ungleich null sind (Nullvektoren sind ausgenommen). Der Kosinus ist für $\varphi \in [0^\circ; 180^\circ]$ nur bei $\varphi = 90^\circ$ gleich null. Hieraus folgt die Orthogonalität der beiden Vektoren.

K6

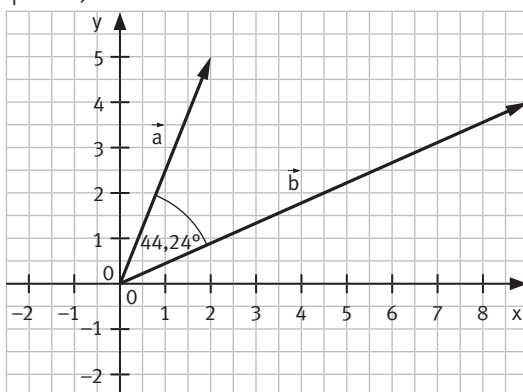
- $\vec{a} \odot \vec{a} = a_x \cdot a_x + a_y \cdot a_y = a_x^2 + a_y^2 = |\vec{a}|^2$

Aufgaben

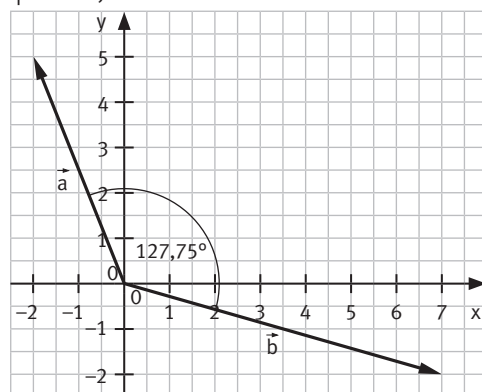
K5

- Berechnung von φ mithilfe von $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$

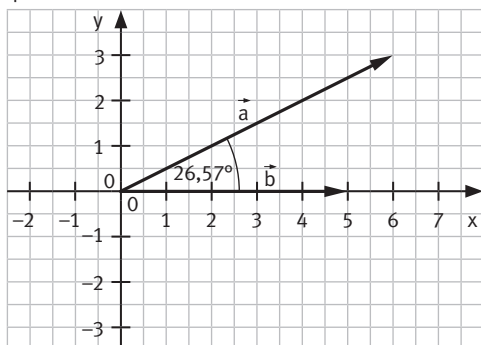
a) $\cos \varphi = \frac{38}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{97}} \approx 0,72$
 $\varphi \approx 44,24^\circ$



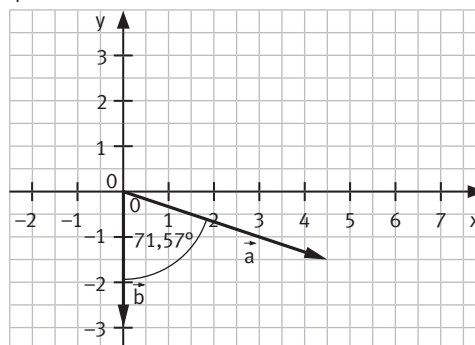
b) $\cos \varphi = \frac{-24}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{53}} \approx -0,61$
 $\varphi \approx 127,75^\circ$



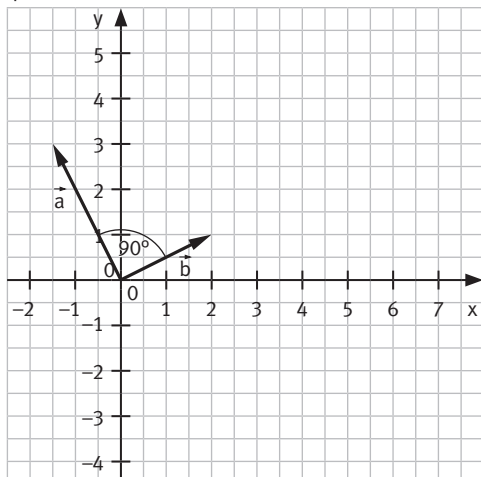
c) $\cos \varphi = \frac{30}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{25}} \approx 0,89$
 $\varphi \approx 26,57^\circ$



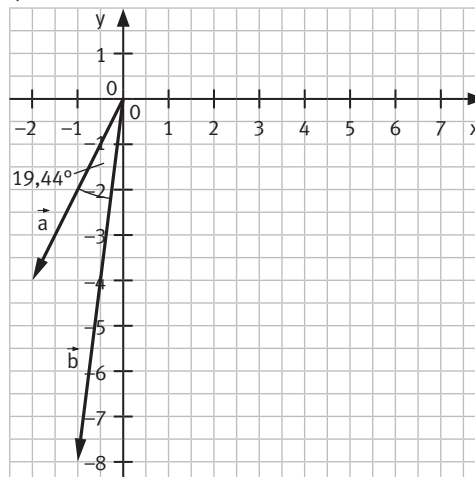
d) $\cos \varphi = \frac{4,5}{\sqrt{22,5} \cdot \sqrt{9}} \approx 0,32$
 $\varphi \approx 71,57^\circ$



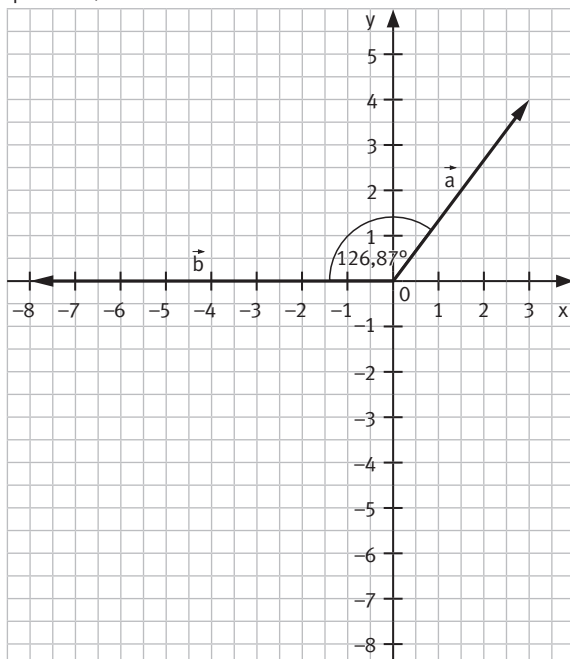
e) $\cos \varphi = \frac{0}{\sqrt{11,25} \cdot \sqrt{5}} = 0$
 $\varphi = 90^\circ$



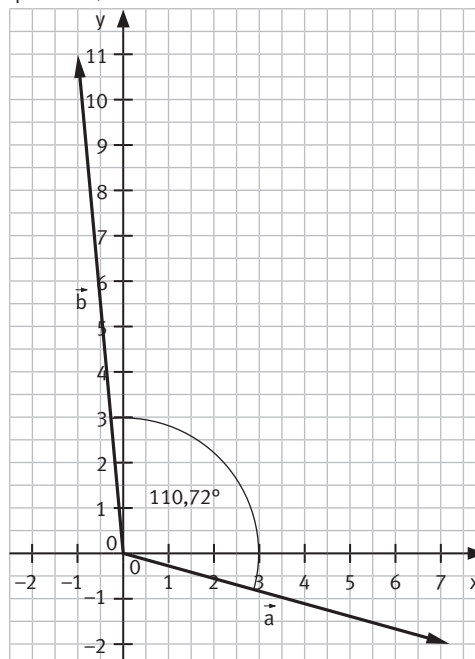
f) $\cos \varphi = \frac{34}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{65}} \approx 0,94$
 $\varphi \approx 19,44^\circ$



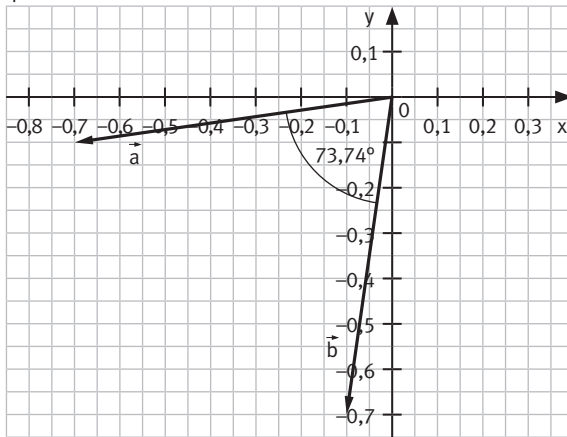
g) $\cos \varphi = \frac{-24}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{64}} \approx -0,6$
 $\varphi \approx 126,87^\circ$



h) $\cos \varphi = \frac{-29,2}{\sqrt{55,84} \cdot \sqrt{122}} \approx -0,35$
 $\varphi \approx 110,72^\circ$

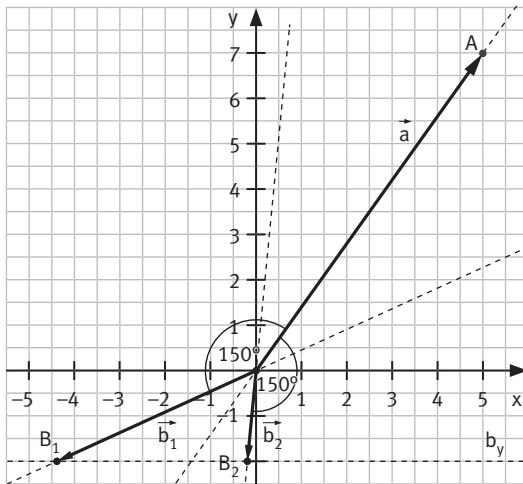


i) $\cos \varphi = \frac{0,14}{\sqrt{0,5} \cdot \sqrt{0,5}} = 0,28$
 $\varphi \approx 73,74^\circ$

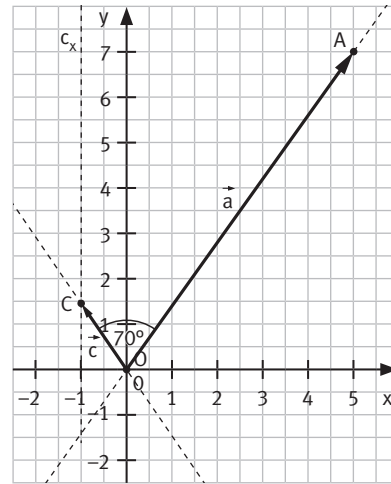


K5

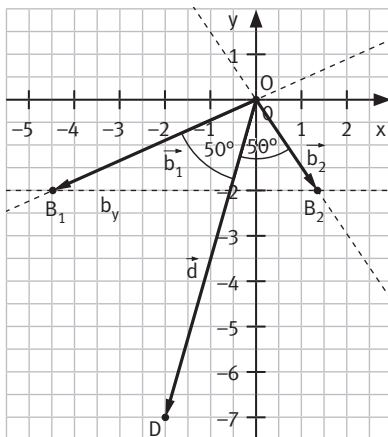
2 a) $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -4,40 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -0,19 \\ -2 \end{pmatrix}$



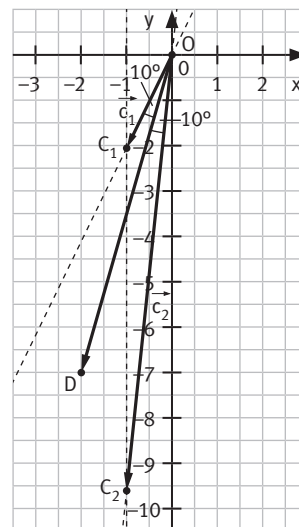
b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1,46 \end{pmatrix}$



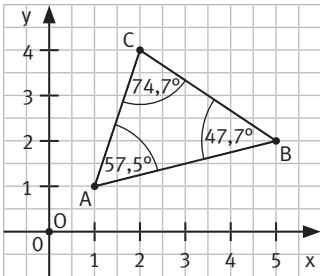
c) $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -4,48 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1,35 \\ -2 \end{pmatrix}$



d) $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2,06 \end{pmatrix}; \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -9,60 \end{pmatrix}$



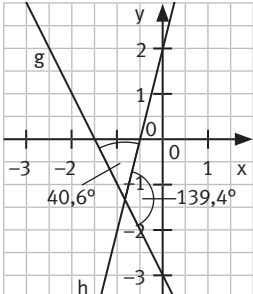
- K5** 3 Berechnung der Innenwinkelmaße mithilfe der Formeln $\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \odot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}$, $\cos \beta = \frac{\vec{BA} \odot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|}$ und $\cos \gamma = \frac{\vec{CA} \odot \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|}$ am Beispiel von Aufgabe a). Analog für die Aufgaben b) bis f).

a)  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \cos \alpha = \frac{4 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{16+1} \cdot \sqrt{1+9}} = \frac{7}{\sqrt{17} \cdot 10} \Rightarrow \alpha \approx 57,5^\circ$
 $\vec{BA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \cos \beta = \frac{(-4) \cdot (-3) + (-1) \cdot 2}{\sqrt{16+1} \cdot \sqrt{9+4}} = \frac{10}{\sqrt{17} \cdot 13} \Rightarrow \beta \approx 47,7^\circ$
 $\vec{CA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}; \vec{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \cos \gamma = \frac{(-1) \cdot 3 + (-3) \cdot (-2)}{\sqrt{1+9} \cdot \sqrt{9+4}} = \frac{3}{\sqrt{10} \cdot 13} \Rightarrow \gamma \approx 74,7^\circ$

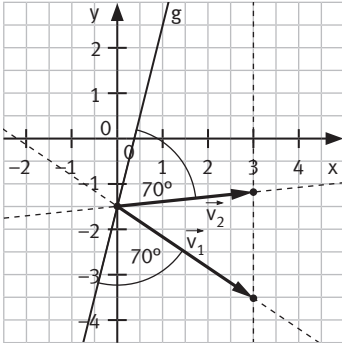
b) $\alpha = 89,3^\circ$ c) $\alpha = 64,4^\circ$ d) $\alpha = 63,4^\circ$ e) $\alpha = 58,4^\circ$ f) $\alpha = 7,1^\circ$
 $\beta = 65,8^\circ$ $\beta = 56,9^\circ$ $\beta = 26,6^\circ$ $\beta = 80,1^\circ$ $\beta = 11,3^\circ$
 $\gamma = 24,9^\circ$ $\gamma = 58,7^\circ$ $\gamma = 90^\circ$ $\gamma = 41,5^\circ$ $\gamma = 161,6^\circ$

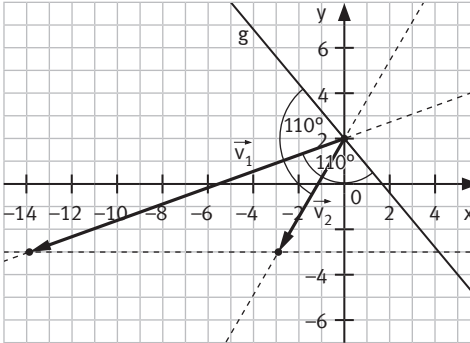
K5 4 a) $\cos \alpha = \frac{5 \cdot 2 + 0 \cdot 2}{\sqrt{25+0} \cdot \sqrt{4+4}} = \frac{10}{\sqrt{25} \cdot 8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ; \beta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$
 $a = \sqrt{25+0} \text{ LE} = 5 \text{ LE}$ $b = \sqrt{4+4} \text{ LE} \approx 2,8 \text{ LE} \neq a \Rightarrow \text{keine Raute}$
b) $\cos \alpha = \frac{3 \cdot (-2) + 3 \cdot 4}{\sqrt{9+9} \cdot \sqrt{4+16}} = \frac{6}{\sqrt{18} \cdot 20} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha = 71,6^\circ; \beta = 180^\circ - 71,6^\circ = 108,4^\circ$
 $a = \sqrt{18} \text{ LE} \approx 4,2 \text{ LE}$ $b = \sqrt{20} \text{ LE} \approx 4,5 \text{ LE} \neq a \Rightarrow \text{keine Raute}$
c) $\cos \alpha = \frac{2 \cdot (-2) + 4 \cdot 4}{\sqrt{4+16} \cdot \sqrt{4+16}} = \frac{12}{\sqrt{20} \cdot 20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = 53,1^\circ; \beta = 180^\circ - 53,1^\circ = 126,9^\circ$
 $a = \sqrt{4+16} \text{ LE} \approx 4,5 \text{ LE}$ $b = \sqrt{4+16} \text{ LE} \approx 4,5 \text{ LE} = a \Rightarrow \text{Raute}$

- K5** 5 Berechnungen mithilfe der Geradensteigungen und Steigungsvektoren m_g und $\vec{v}_g$ bzw. m_h und $\vec{v}_h$ und der Formel $\cos \varphi = \frac{|\vec{v}_g \odot \vec{v}_h|}{|\vec{v}_g| \cdot |\vec{v}_h|}$ am Beispiel von Aufgabe a). Analog für die Aufgaben b) bis h).

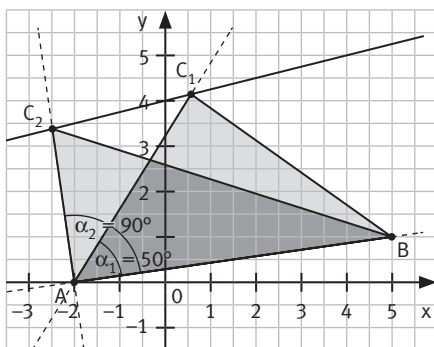
a)  $m_g = -2 \quad \vec{v}_g = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $m_h = 4 \quad \vec{v}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
 $\cos \varphi = \frac{(-1) \cdot 1 + 2 \cdot 4}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{1+16}} = \frac{7}{\sqrt{5} \cdot 17} \Rightarrow \varphi \approx 40,6^\circ (\varphi^* \approx 139,4^\circ)$

- b) $\varphi \approx 28,0^\circ (\varphi^* \approx 152,0^\circ)$ c) $\varphi \approx 4,5^\circ (\varphi^* \approx 175,5^\circ)$ d) $\varphi \approx 69,6^\circ (\varphi^* \approx 110,4^\circ)$
e) $\varphi \approx 78,7^\circ (\varphi^* \approx 101,3^\circ)$ f) $\varphi = 90^\circ (\varphi^* = 90^\circ)$ g) $\varphi \approx 69,4^\circ (\varphi^* \approx 110,6^\circ)$
h) $\varphi \approx 22,4^\circ (\varphi^* \approx 157,6^\circ)$

K5 6 a)  $v_y \in \{-2,03; 0,31\}$
 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2,03 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0,31 \end{pmatrix}$

b)  $v_x \in \{-13,9; -2,9\}$
 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -13,9 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2,9 \\ -5 \end{pmatrix}$

K5 7 a)



- c) Es sind individuelle Antworten möglich, um $C_2(-2,5 | 3,4)$ zu bestimmen.

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|\vec{AB}| = \sqrt{50} \text{ LE}$

$$\vec{AC}_1 = \begin{pmatrix} x+2 \\ 0,25x+4 \end{pmatrix}$$

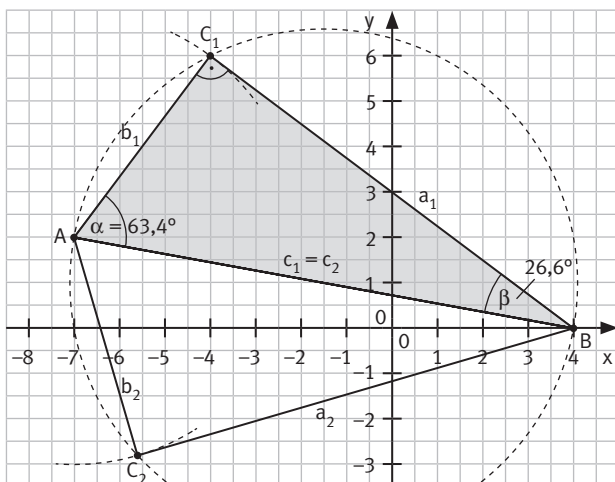
$$|\vec{AC}_1| = \sqrt{(x+2)^2 + (0,25x+4)^2} \text{ LE}$$

$$\cos 50^\circ = \frac{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}_1|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}_1|}$$

$$\Rightarrow x_1 \approx 0,6; y_1 \approx 4,1; C_1(0,6 | 4,1)$$

Rechnerisch möglich ist auch $C_1^*(-5,1 | 2,7)$ auf g, da die Geraden AB und BC_1^* einen Winkel von 50° bilden. Allerdings ist dieser Winkel nicht Innenwinkel des Dreiecks, damit entfällt C_1^* als Lösung.

KX 8 a)



- b) Lösungsmöglichkeit:

Die Koordinaten der Punkte C_1 bzw. C_2 seien $C_n(x | y)$.

$$\vec{AC}_n = \begin{pmatrix} x+7 \\ y-2 \end{pmatrix}; \vec{BC}_n = \begin{pmatrix} x-4 \\ y \end{pmatrix}$$

- 1 Für den Betrag des Vektors $\vec{AC}_n$ gilt: $|\vec{AC}_n| = 5$, also gilt:

$$(x+7)^2 + (y-2)^2 = 25 \text{ bzw.}$$

$$(x+7)^2 + (y-2)^2 - 25 = 0 \quad (\text{Gleichung 1*})$$

- 2 Für den Betrag des Vektors $\vec{BC}_n$ gilt nach dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck

$$ABC_n: |\vec{BC}_n| = 10, \text{ also gilt:}$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 100 \text{ bzw.}$$

$$(x-4)^2 + y^2 - 100 = 0 \quad (\text{Gleichung 2*})$$

Gleichsetzen von 1* und 2*:

$$(x+7)^2 + (y-2)^2 - 25 = (x-4)^2 + y^2 - 100$$

$$x^2 + 14x + 49 + y^2 - 4y + 4 - 25 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 100 \quad | -x^2 - y^2$$

$$14x + 49 - 4y + 4 - 25 = -8x + 16 - 100$$

$$14x - 4y + 28 = -8x - 84 \quad | +8x + 84$$

$$22x - 4y + 112 = 0 \quad | +4y$$

$$4y = 22x + 112 \quad | :4$$

$$y = 5,5x + 28 \quad (\text{Gleichung 3})$$

Die beiden Punkte C_1 und C_2 liegen damit also auf einer Geraden mit der Gleichung $y = 5,5x - 28$.

- 3 Um die x-Werte von C_1 und C_2 zu bestimmen, verwendet man noch die Bedingung, dass die beiden Vektoren $\vec{AC}_n$ und $\vec{BC}_n$ zueinander senkrecht sind. Also ist deren Skalarprodukt 0:

$$\vec{AC}_n \odot \vec{BC}_n = \begin{pmatrix} x+7 \\ y-2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x-4 \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$(x+7) \cdot (x-4) + (y-2) \cdot y = 0$$

Nun setzt man Gleichung 3 in diese Gleichung ein:

$$(x+7) \cdot (x-4) + (5,5x+28-2) \cdot (5,5x+28) = 0$$

$$x^2 + 3x - 28 + (5,5x+26) \cdot (5,5x+28) = 0$$

$$x^2 + 3x - 28 + 30,25x^2 + 297x + 728 = 0$$

$$31,25x^2 + 300x + 700 = 0$$

$$x^2 + 9,6x + 22,4 = 0$$

$$x_1 = -4; x_2 = -5,6$$

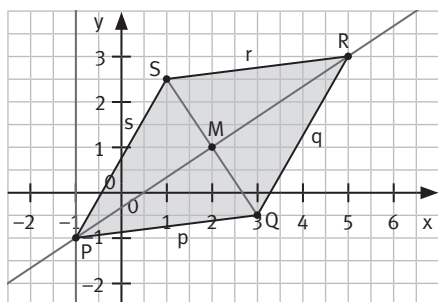
Eingesetzt in die lineare Gleichung 3 erhält man: $C_1(-4|6)$ und $C_2(-5,6|-2,8)$.

$$\text{c) } \cos \alpha = \frac{\vec{AB} \odot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{11^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{33 - 8}{\sqrt{125} \cdot \sqrt{25}} = \frac{25}{25\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\alpha \approx 63,4^\circ; \beta \approx 26,6^\circ$$

KX

9 a)



$P(-1|-1); R(5|3)$

- b) Es genügt zu zeigen, dass das Viereck PQRS eine Raute ist. Dazu zeigen wir (1), dass die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, also $\overline{PR} \perp \overline{QS}$.

Weiterhin zeigen wir (2), dass der Mittelpunkt M von $\overline{QS}$ auch der Mittelpunkt von $\overline{PR}$ ist.

$$\text{(1) } \vec{PR} = \begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{QS} = \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ 2,5 - (-0,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PR} \odot \vec{QS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 = -12 + 12 = 0$$

$$\Rightarrow \overline{PR} \perp \overline{QS}$$

$$\text{(2) } |\overline{PM}| = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (1 - (-1))^2} \text{ LE} = \sqrt{9 + 4} \text{ LE} = \sqrt{13} \text{ LE}$$

$$|\overline{MR}| = \sqrt{(5 - 2)^2 + (3 - 1)^2} \text{ LE} = \sqrt{9 + 4} \text{ LE} = \sqrt{13} \text{ LE}$$

Damit liegt eine Raute vor.

Hinweis: Es sind auch andere Begründungen für eine Raute möglich, beispielsweise kann man zeigen, dass alle Seiten gleich lang sind.

$$\text{c) (1) } \cos \sphericalangle QPS = \frac{\vec{PQ} \odot \vec{PS}}{|\vec{PQ}| \cdot |\vec{PS}|}$$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0,5 \end{pmatrix}; \vec{PS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$

$$\cos \sphericalangle QPS = \frac{4 \cdot 2 + 0,5 \cdot 3,5}{\sqrt{4^2 + 0,5^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3,5^2}} = \frac{9,75}{\sqrt{16,25} \cdot \sqrt{16,25}} = \frac{9,75}{16,25} = 0,6$$

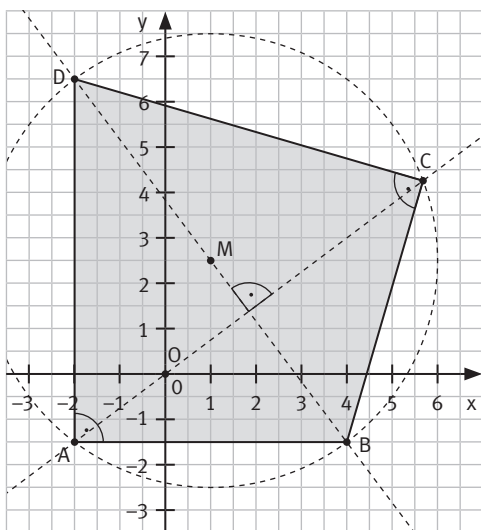
$$\sphericalangle QPS = 53,1^\circ$$

Hinweis: Die zweite Längenberechnung könnte man sich auch sparen, da eine Raute vorliegt.

Mithilfe der Winkelsumme erhält man: $\sphericalangle RQP = 126,9^\circ$.

$$\text{(2) } A_{PQRS} = \left| \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 3,5 \end{pmatrix} \right| \text{ FE} = (4 \cdot 3,5 - 0,5 \cdot 2) \text{ FE} = (14 - 1) \text{ FE} = 13 \text{ FE}$$

K5 10 a)



b) Steigung der Geraden BD:

$$m_1 = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

 Steigung der zu BD senkrechten Geraden AC: $m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{3}{4}$

 Gerade AC mit $m_2 = \frac{3}{4}$ und $(0|0)$ auf AC:

$$g: y = \frac{3}{4}x$$

$$A\left(x \mid \frac{3}{4}x\right); \vec{DA} = \begin{pmatrix} x+2 \\ \frac{3}{4}x-6,5 \end{pmatrix}; \vec{BA} = \begin{pmatrix} x-4 \\ \frac{3}{4}x+1,5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Es muss gelten: } \vec{DA} \odot \vec{BA} = \begin{pmatrix} x+2 \\ \frac{3}{4}x-6,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x-4 \\ \frac{3}{4}x+1,5 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x+2) \cdot (x-4) + \left(\frac{3}{4}x-6,5\right) \cdot \left(\frac{3}{4}x+1,5\right) = 0$$

$$\frac{25}{16}x^2 - 5,75x - 17,75 = 0$$

$$x_1 = -2; y_1 = \frac{3}{4} \cdot (-2) = -1,5$$

$$\Rightarrow A(-2|-1,5)$$

$$x_2 = 5,68; y_2 = \frac{3}{4} \cdot 5,68 = 4,26$$

$$\Rightarrow C(5,68|4,26)$$

 c) Die Berechnung von β über das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{BA} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 1,68 \\ 5,76 \end{pmatrix}$ ergibt $\alpha = \gamma = 90^\circ; \beta = 106^\circ; \delta = 74^\circ$.

 K5 11 $\vec{OD} = \vec{OB} \oplus \vec{BM} \oplus \vec{BM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Steigung der Geraden BD:

$$D(2|3)$$

$$m_1 = -1$$

Steigung der zu BD senkrechten Geraden AC:

$$m_2 = 1$$

Gerade AC mit M auf AC = g

$$g: y = x - 1$$

$$A(x|x-1); \vec{DA} = \begin{pmatrix} x-2 \\ x-4 \end{pmatrix}; \vec{BA} = \begin{pmatrix} x-4 \\ x-2 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$|\vec{BA}| = \sqrt{2x^2 - 12x + 20} \text{ LE}$$

 Im rechtwinkligen Dreieck ABM mit $\alpha_1 = 40^\circ$ und $\beta_1 = 50^\circ$ und $\overline{BM} = \sqrt{2} \text{ LE}$ gilt:

$$\sin 40^\circ = \frac{|\vec{BM}|}{|\vec{AB}|}$$

$$\Rightarrow |\vec{AB}| = \frac{|\vec{BM}|}{\sin 40^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 40^\circ} \text{ LE} \approx 2,2 \text{ LE}$$

$$\sqrt{2x^2 - 12x + 20} = 2,2$$

$$2x^2 - 12x + 20 = 4,84$$

$$x^2 - 6x + 7,58 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1,8; y_1 = 0,8; A(1,8|0,8)$$

$$\Rightarrow x_2 = 4,2; y_2 = 3,2; C(4,2|3,2)$$

 KX 12 a) Um zu zeigen, dass zwei Strecken aufeinander senkrecht stehen, kann die Orthogonalität auch für zwei Vektoren, die parallel zu den entsprechenden Strecken verlaufen, gezeigt werden. Hier genügt es also zu zeigen, dass die Vektoren $\vec{AC}$ und $\vec{BD}$ aufeinander senkrecht stehen.

 In der Rechnung werden die Vektoren $\vec{AC}$ und $\vec{BD}$ dann mithilfe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ geschrieben.

 Mithilfe der Rechengesetze und -regeln für Skalarprodukte wird der Ausdruck weiter vereinfacht und ergibt schließlich 0, woraus folgt: Die beiden Vektoren $\vec{AC}$ und $\vec{BD}$ und damit auch die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ stehen aufeinander senkrecht.

- b) Um zu zeigen, dass die Diagonale $\overline{AC}$ den Winkel BAD halbiert, kann man zeigen, dass das Maß des Winkels BAC gleich dem Maß des Winkels CAD ist.

Zunächst werden die beiden Skalarprodukte $\overrightarrow{AB} \odot \overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AC} \odot \overrightarrow{AD}$ berechnet, indem man die vorkommenden Vektoren mithilfe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrückt. Mithilfe der Rechenregeln für Skalarprodukte ergibt sich die Gleichheit von $\overrightarrow{AB} \odot \overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AC} \odot \overrightarrow{AD}$.

Schließlich kann man die beiden Skalarprodukte mithilfe der Beträge der Vektoren und eines zusätzlichen Faktors $\cos \varphi_1$ bzw. $\cos \varphi_2$ schreiben. Schließlich folgt aus der Gleichheit der Beträge der Vektoren auch die Gleichheit der Werte $\cos \varphi_1$ bzw. $\cos \varphi_2$ und damit die Gleichheit von φ_1 und φ_2 .

K1

$$\begin{aligned}
 \text{13 a) } (\vec{a} \oplus \vec{b}) \odot (\vec{c} \oplus \vec{d}) &= (\vec{a} \oplus \vec{b}) \odot \vec{c} \oplus (\vec{a} \oplus \vec{b}) \odot \vec{d} \\
 &= \vec{a} \odot \vec{c} + \vec{b} \odot \vec{c} + \vec{a} \odot \vec{d} + \vec{b} \odot \vec{d} \\
 &= \vec{a} \odot \vec{c} + \vec{a} \odot \vec{d} + \vec{b} \odot \vec{c} + \vec{b} \odot \vec{d} \\
 \text{b) } (\vec{v} \oplus \vec{w})^2 &= (\vec{v} \oplus \vec{w}) \odot (\vec{v} \oplus \vec{w}) \\
 &= \vec{v} \odot \vec{v} + \vec{v} \odot \vec{w} + \vec{w} \odot \vec{v} + \vec{w} \odot \vec{w} \\
 &= v^2 + 2 \cdot \vec{v} \odot \vec{w} + w^2 \\
 &= v^2 + 2 \cdot v \cdot w \cdot \cos \sphericalangle(\vec{v}; \vec{w}) + w^2 \\
 \text{c) } (\vec{v} \oplus (-\vec{w}))^2 &= (\vec{v} \oplus (-\vec{w})) \odot (\vec{v} \oplus (-\vec{w})) \\
 &= \vec{v} \odot \vec{v} + \vec{v} \odot (-\vec{w}) + (-\vec{w}) \odot (-\vec{w}) + (-\vec{w}) \odot \vec{v} \\
 &= \vec{v} \odot \vec{v} + (-1) \cdot (\vec{v} \odot \vec{w}) + (-1) \cdot (\vec{v} \odot \vec{w}) + (-1) \cdot (-1) \cdot (\vec{w} \odot \vec{w}) \\
 &= v^2 - 2 \cdot \vec{v} \odot \vec{w} + w^2 \\
 &= v^2 - 2 \cdot v \cdot w \cdot \cos \sphericalangle(\vec{v}; \vec{w}) + w^2
 \end{aligned}$$

Alternatives Vorgehen analog zur Darstellung im „Merkwissen“:

Man berechnet anhand konkreter Vektoren den dargestellten Zusammenhang, z. B. die Berechnungen für den Zusammenhang unter b) mit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (\vec{v} \oplus \vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \cos \sphericalangle(\vec{v}; \vec{w}) = \cos 90^\circ = 0:$$

$$(\vec{v} \oplus \vec{w})^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$(\vec{v} \oplus \vec{w})^2 = v^2 + 2 \cdot v \cdot w \cdot \cos \sphericalangle(\vec{v}; \vec{w}) + w^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

K1

- 14 Mit $\overline{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} \oplus (-\overrightarrow{CA}))^2$ und $\overline{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$, mit dem Zusammenhang aus 1 b) und mit $|\overrightarrow{CB}| = a$, $|\overrightarrow{CA}| = b$, $|\overrightarrow{AB}| = c$ und $\sphericalangle(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \gamma$ und gilt:

$$\begin{aligned}
 \overline{AB}^2 &= (\overrightarrow{CB} \oplus (-\overrightarrow{CA}))^2 \\
 &= |\overrightarrow{CB}|^2 - 2 \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cos \sphericalangle(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) + |\overrightarrow{CA}|^2 \\
 &= a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma + b^2 \\
 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma = c^2 \text{ (Kosinussatz für das Dreieck ABC)}
 \end{aligned}$$

K1

- 15 Mit $\overrightarrow{PQ} = (-\overrightarrow{RP}) \oplus \overrightarrow{RQ}$ und mit dem Zusammenhang aus 1 c) und mit $|\overrightarrow{RQ}| = p$, $|\overrightarrow{RP}| = q$, $|\overrightarrow{PQ}| = r$ und $\cos \sphericalangle(\overrightarrow{RP}; \overrightarrow{RQ}) = \cos 90^\circ = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \overline{PQ}^2 &= ((-\overrightarrow{RP}) \oplus \overrightarrow{RQ})^2 \\
 &= |\overrightarrow{RP}|^2 - 2 \cdot |\overrightarrow{RP}| \cdot |\overrightarrow{RQ}| \cdot \cos \sphericalangle(\overrightarrow{RP}; \overrightarrow{RQ}) + |\overrightarrow{RQ}|^2 \\
 &= q^2 + p^2 = r^2 \text{ (Satz des Pythagoras für das bei R rechtwinklige Dreieck PQR)}
 \end{aligned}$$

K1

- 16 $\vec{b} \odot \vec{a} = ((-\vec{r}_3) \oplus \vec{r}_1) \odot ((-\vec{r}_3) \oplus \vec{r}_2)$
 $= ((-\vec{r}_3) \oplus (-\vec{r}_2)) \odot ((-\vec{r}_3) \oplus \vec{r}_2)$
 $= \vec{r}_3 \odot \vec{r}_3 - \vec{r}_3 \odot \vec{r}_2 + \vec{r}_2 \odot \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \odot \vec{r}_2$
 $= \vec{r}_3 \odot \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \odot \vec{r}_2$
 $= |\vec{r}_3|^2 - |\vec{r}_2|^2 = 0$
 $\Rightarrow \vec{b} \perp \vec{a}$, d. h. das Dreieck ABC ist bei C rechtwinklig.

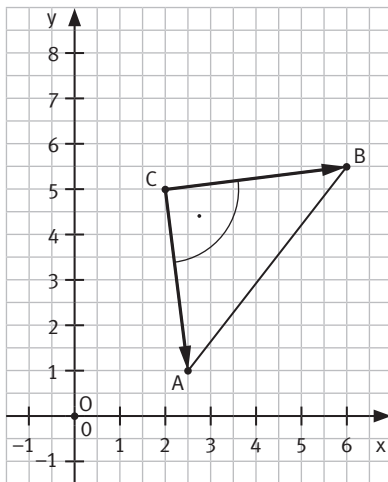
- K5** 1 a) $8 \cdot 7 + 3 \cdot (-4) = 44 \neq 0$
 b) $11 \cdot 5 + (-5) \cdot (-11) = 110 \neq 0$
 c) $7 \cdot 12 + 28 \cdot (-3) = 0$
 d) $(-9) \cdot (-5) + 2,5 \cdot (-18) = 0$
 e) $8 \cdot 9 + 14 \cdot (-4) = 16 \neq 0$
 f) $2,5 \cdot (-6) + 5 \cdot 3 = 0$

$\Rightarrow$ nicht orthogonal
 $\Rightarrow$ nicht orthogonal
 $\Rightarrow$ orthogonal
 $\Rightarrow$ orthogonal
 $\Rightarrow$ nicht orthogonal
 $\Rightarrow$ orthogonal

- K5** 2 a) $9 \cdot u_x + (-3) \cdot 27 = 0$
 b) $12 \cdot v_x + 6 \cdot 9 = 0$
 c) $\frac{1}{5} \cdot (-25) + u_y \cdot 45 = 0$

$\Rightarrow u_x = 9$
 $\Rightarrow v_x = -4,5$
 $\Rightarrow u_y = \frac{1}{9}$

K4 3 a)

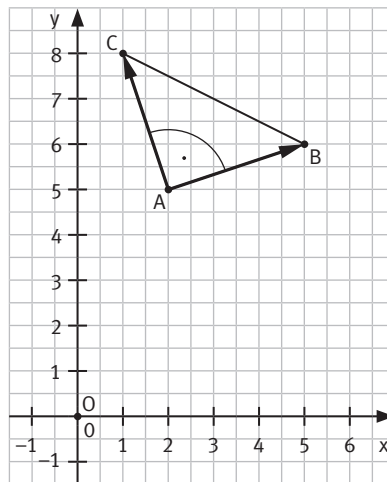


$$\vec{CA} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$0,5 \cdot 4 + (-4) \cdot 0,5 = 0$$

$\Rightarrow$ rechter Winkel bei C

b)

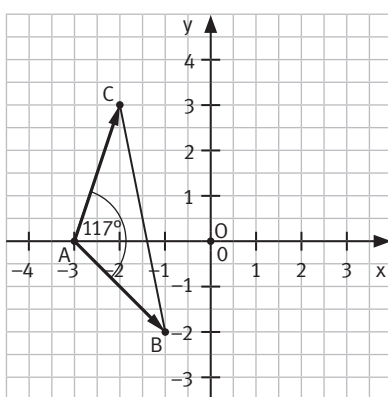


$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 0$$

$\Rightarrow$ rechter Winkel bei A

c)

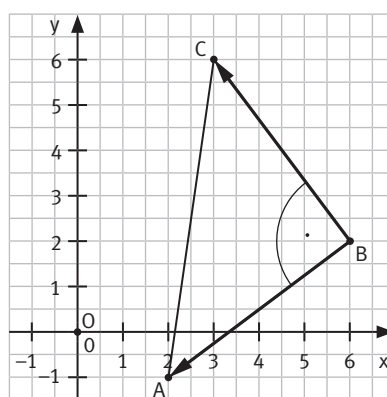


$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 = -4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ kein rechter Winkel im Dreieck ABC

d)



$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{BA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

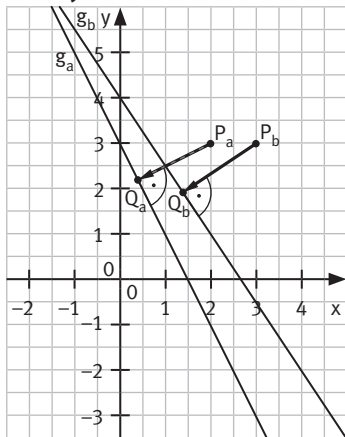
$$(-3) \cdot (-4) + 4 \cdot (-3) = 0$$

$\Rightarrow$ rechter Winkel bei B

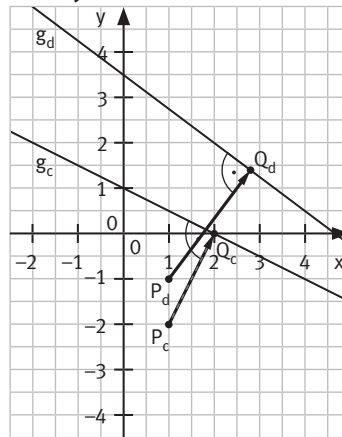
- K5** 4 a) $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_g \odot \vec{v}_h = 1 - 3 \neq 0 \quad \Rightarrow g \text{ und } h \text{ nicht senkrecht}$
 b) $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_g \odot \vec{v}_h = 1 - 0,25 \neq 0 \quad \Rightarrow g \text{ und } h \text{ nicht senkrecht}$
 c) $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \vec{v}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \vec{v}_g \odot \vec{v}_h = 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow g \text{ und } h \text{ senkrecht}$
 d) $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \vec{v}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \vec{v}_g \odot \vec{v}_h = 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow g \text{ und } h \text{ senkrecht}$

K5

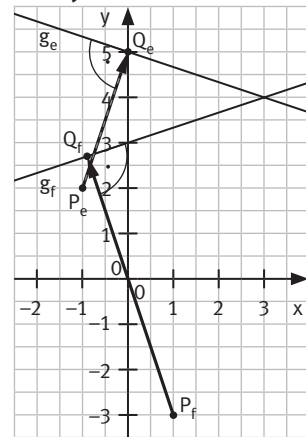
5 a) und b)



c) und d)



e) und f)



Lösung zu a)

$$\vec{QP} = \begin{pmatrix} 2-x \\ 3-(-2x+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x \\ 2x \end{pmatrix} \text{ und } m_g = -2, \text{ Steigungsvektor } \vec{v}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{QP} \odot \vec{v}_g = 0$$

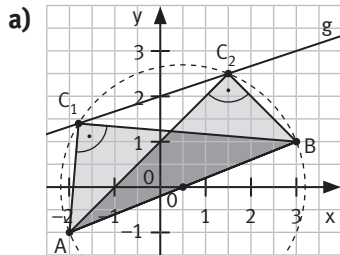
$$\begin{pmatrix} 2-x \\ 2x \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$2 - x - 4x = 0 \quad x = 0,4$$

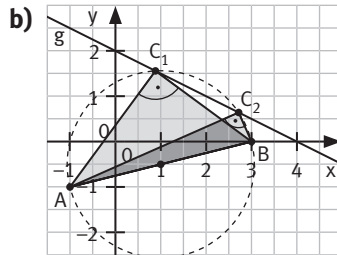
$$\Rightarrow Q(0,4 | 2,2) \quad \vec{QP} = \begin{pmatrix} 1,6 \\ 0,8 \end{pmatrix} \quad |\vec{QP}| = \sqrt{1,6^2 + 0,8^2} \text{ LE} \approx 1,8 \text{ LE}$$

Analog erhält man: b) $|\vec{QP}| \approx 1,9 \text{ LE}$ c) $|\vec{QP}| \approx 2,2 \text{ LE}$ d) $|\vec{QP}| \approx 3 \text{ LE}$ e) $|\vec{QP}| \approx 3,2 \text{ LE}$ f) $|\vec{QP}| \approx 6 \text{ LE}$

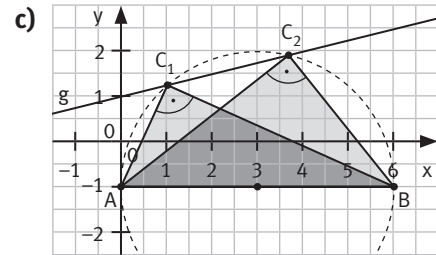
K4

6 Rechnerische Bestimmung der Koordinaten von C_1 und C_2 mithilfe des Skalarprodukts $\vec{AC} \odot \vec{BC} = 0$.

$$C_1(-1,8 | 1,4) \quad C_2(1,5 | 2,5)$$



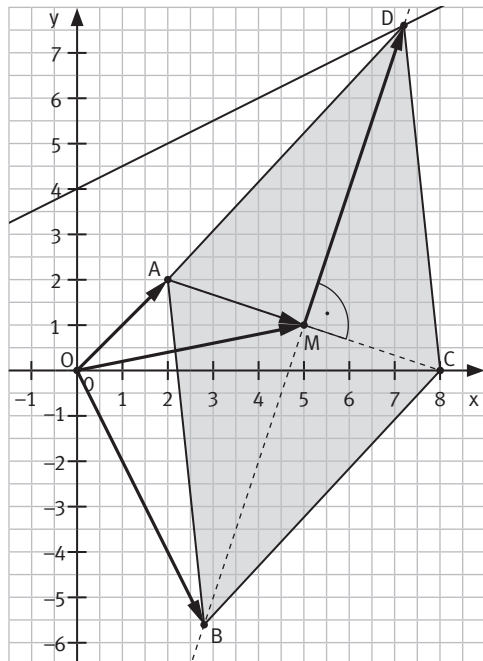
$$C_1(0,9 | 1,6) \quad C_2(2,7 | 0,6)$$



$$C_1(1 | 1,3) \quad C_2(3,7 | 1,9)$$

K4

7



$$\vec{AM} = 0,5 \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OM} = \vec{OA} \oplus \vec{AM} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{MD} = \begin{pmatrix} x-5 \\ 0,5x+3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AM} \odot \vec{MD} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x-5 \\ 0,5x+3 \end{pmatrix} = 0$$

$$3 \cdot (x-5) + (-1) \cdot (0,5x+3) = 0$$

$$2,5x - 18 = 0$$

$$x = \frac{18}{2,5} = 7,2$$

$$y = 7,6 \Rightarrow D(7,2 | 7,6)$$

$$\vec{MD} = \begin{pmatrix} 2,2 \\ 6,6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OB} = -1 \cdot \vec{MD} \oplus \vec{OM}$$

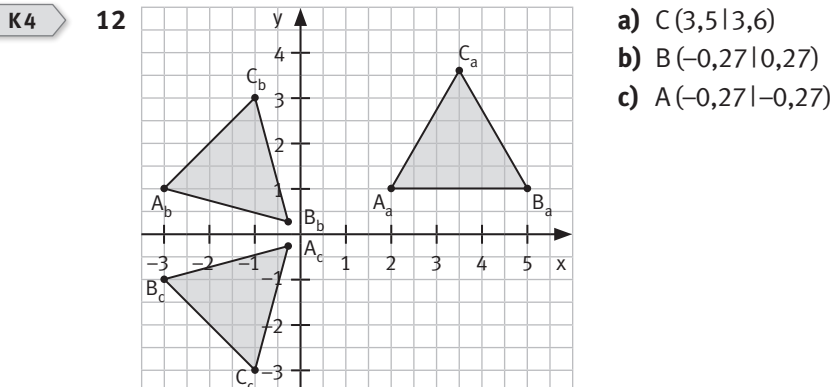
$$\Rightarrow B(2,8 | -5,6)$$

K6 8 Die Aussage ist falsch. Der Winkel lässt sich beispielsweise auch über das Skalarprodukt bestimmen.

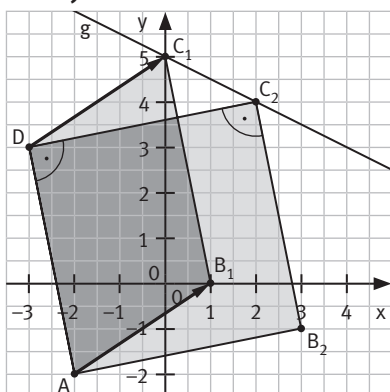
- K5** 9 a) $B(6|-1), Q(x|0,5x+3), \overrightarrow{QB} = \begin{pmatrix} 6-x \\ -0,5x-4 \end{pmatrix}; \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$
 $\overrightarrow{QB} \odot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 6-x-0,25x-2=0 \Rightarrow x=3,2; y=4,6; Q(3,2|4,6)$
 $|\overrightarrow{QB}| = \sqrt{(6-3,2)^2 + (-1-4,6)^2} \text{ LE} = \sqrt{2,8^2 + (-5,6)^2} \text{ LE} \approx 6,3 \text{ LE}$
- b) $g(5) = 5,5 \Rightarrow C_1(5|5,5); \overrightarrow{C_1A} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4,5 \end{pmatrix}; \overrightarrow{C_1B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6,5 \end{pmatrix}$
 $|\overrightarrow{C_1A}| = \sqrt{69,25} \text{ LE} \approx 8,32 \text{ LE}; |\overrightarrow{C_1B}| = \sqrt{43,25} \text{ LE} \approx 6,58 \text{ LE}$
 $\cos \gamma_1 = \frac{\overrightarrow{C_1A} \odot \overrightarrow{C_1B}}{|\overrightarrow{C_1A}| \cdot |\overrightarrow{C_1B}|} = \frac{-7+29,25}{8,32 \cdot 6,58} \approx 0,406 \Rightarrow \gamma_1 \approx 66^\circ$
- c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{BC_2} = \begin{pmatrix} x-6 \\ 0,5x+4 \end{pmatrix}$
 $\overrightarrow{AB} \odot \overrightarrow{BC_2} = 0 \Leftrightarrow 8x-48-x-8=0 \Rightarrow x=8; y=7; C_2(8|7)$

- K5** 10 Berechnungen mit $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
- a) $59,04^\circ$ b) $94,40^\circ$ c) $100,49^\circ$ d) $67,38^\circ$ e) 90° f) $52,13^\circ$

- K5** 11 a) $y=5; C(4|5); \alpha=26,57^\circ; \gamma=108,43^\circ$ b) $x=2; B(2|-1); \alpha=90^\circ; \beta=45^\circ$

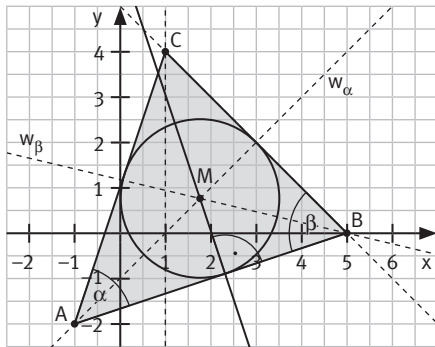


- K5** 13 a) und b)



- b) $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}; \overrightarrow{DC_2} = \begin{pmatrix} x+3 \\ -\frac{x}{2}+2 \end{pmatrix}$
 $\overrightarrow{DA} \odot \overrightarrow{DC_2} = 0 \Leftrightarrow x+3+(-5) \cdot (-0,5x+2) = 0 \Leftrightarrow 3,5x=7$
 $\Rightarrow x=2; y=4 \Rightarrow C_2(2|4)$
 $\overrightarrow{DC_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\overrightarrow{AB_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_2(3|-1)$

K4 14 a) und e)



a) Möglicher Lösungsweg:

B gespiegelt an w_α ist $B^*(1|4)$.

Der Schnittpunkt von $x = 1$ und BB^* ergibt $C(1|4)$.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{AB} \odot \vec{AC}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{12 + 12}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{40}} = \frac{6}{10} = 0,6 \quad \Rightarrow \alpha \approx 53^\circ$$

b) Beliebiger Vektor $\vec{v}$ auf w_α : $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \odot \vec{BC} = 0 \Leftrightarrow y = 4$; $C(1|4)$

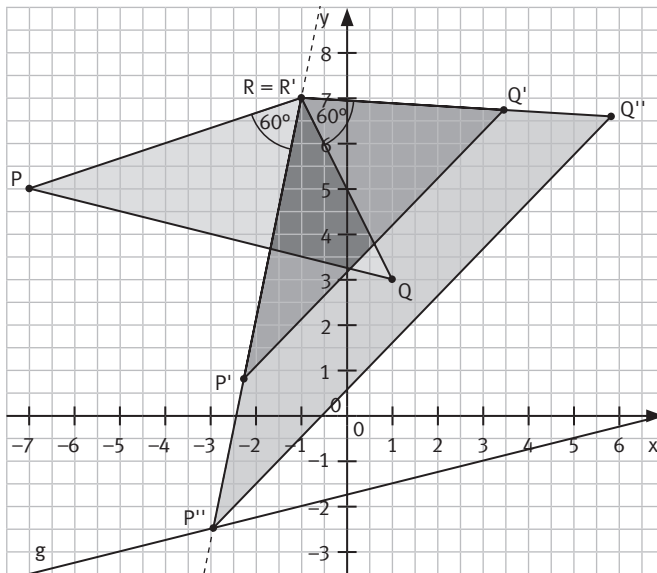
c) $\vec{BA} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$
 $\cos \beta = \frac{|\vec{BA} \odot \vec{BC}|}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{24 - 8}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \beta \approx 63^\circ$

Die Gleichung 4 beschreibt die Winkelhalbierende w_β .

d) M ist der Schnittpunkt von w_α und w_β :
 $x - 1 = -0,24x + 1,18 \Leftrightarrow 1,24x = 2,18$
 $x \approx 1,76$; $y \approx 0,76 \quad \Rightarrow M(1,76|0,76)$

e) Der Radius entspricht dem Abstand von M zu den drei Geraden, die durch die Eckpunkte des Dreiecks verlaufen. Berechnung des Radius als Abstand des Punktes M zu AC: $y = 3x + 1$ ergibt:
 $r \approx 1,75$ LE

K4 15 a)



b) $\vec{RP} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{RP'} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-7 \end{pmatrix}$ mit $P'(x|y)$ und $|\vec{RP}| = |\vec{RP'}| = \sqrt{40}$

$$\cos 60^\circ = \frac{|\vec{RP} \odot \vec{RP'}|}{|\vec{RP}| \cdot |\vec{RP'}|} = \frac{-6x - 6 - 2y + 14}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{40}} = \frac{-6x + 8 - 2y}{40} \quad \Rightarrow y = -3x + 4 - 20 \cdot \cos 60^\circ = -3x - 6$$

$$P'(-2,27|0,80)$$

c) $\vec{RP''} = k \cdot \vec{RP} = k \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\vec{OP''} = \vec{OR} + \vec{RP''} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow P''(-1,27k - 1|-6,2k + 7)$$

P'' in die Geradengleichung von g einsetzen:

$$-6,2k + 7 = 0,25 \cdot (-1,27k - 1) - 1,75$$

$$-6,2k + 7 = -0,3125k - 2$$

$$9 = 5,8875k$$

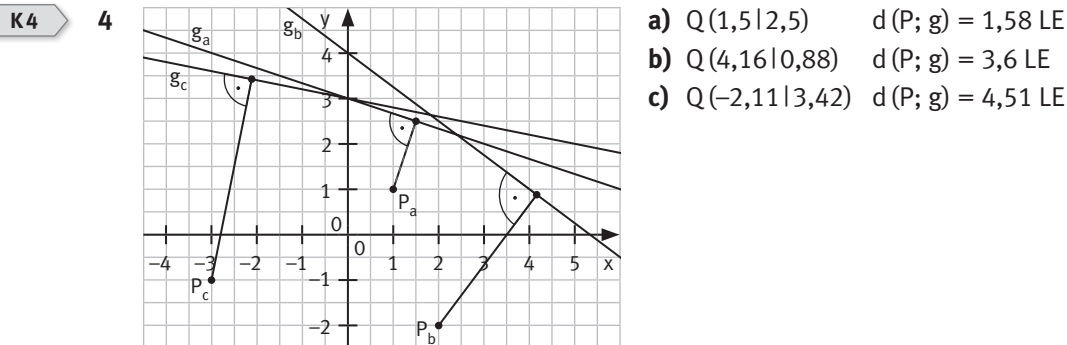
$$\Rightarrow k \approx 1,53; P''(-2,94|-2,49)$$

Aufgaben zur Einzelarbeit

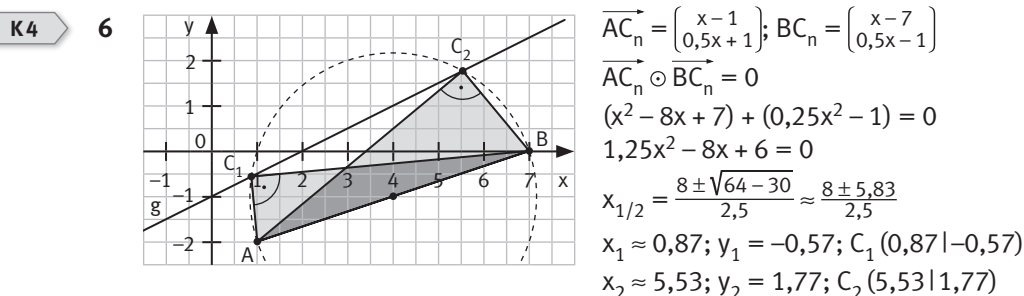
K5 1 a) senkrecht b) nicht senkrecht c) nicht senkrecht d) senkrecht

K5 2 a) $b_x = 14$ b) $a_x = 0,5$

K5 3 a) $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{v}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,3 \end{pmatrix}; \vec{v}_g \odot \vec{v}_h = 1 - 0,9 \neq 0 \Rightarrow$ nicht senkrecht
 b) $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{v}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,25 \end{pmatrix}; \vec{v}_g \odot \vec{v}_h = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ senkrecht



K5 5 Lösungsmöglichkeit mittels des Abstands eines Punktes P auf h von der Geraden g.
 a) z. B. mit $P(0 | 3)$ und $g: y = 0,5x + 0,5$: $d \approx 2,24$ LE
 b) z. B. mit $P(0 | 1)$ und $g: y = -2x - 2$: $d \approx 1,34$ LE



K5 7 a) $b_x = 0; \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ b) $c_y = 2; \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

K5 8 a) $\varphi = 40,24^\circ$ b) $\varphi = 52,13^\circ$ c) $\varphi = 100,3^\circ$ d) $\varphi = 90^\circ$ e) $\varphi = 90^\circ$ f) $\varphi = 180^\circ$

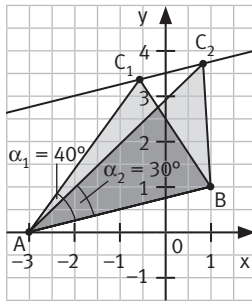
K6 9 Als Steigungsvektoren kann man $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_h = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ wählen. Am Skalarprodukt der beiden Steigungsvektoren sieht man sofort, dass die Geraden senkrecht zueinander sind:
 $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -6 + 6 = 0$

K5 10 a) $\varphi = 32,47^\circ$ b) $\varphi = 63,43^\circ$

K5 11 a) $v_x = 1; \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $v_y = 2; \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

K5

12 a)



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{AC}_n = \begin{pmatrix} x+3 \\ 0,25x+3,5 \end{pmatrix}$$

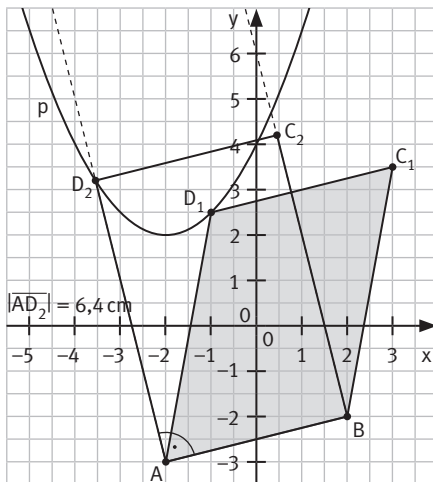
$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \odot \vec{AC}_n}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}_n|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x+3 \\ 0,25x+3,5 \end{pmatrix}}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{(x+3)^2 + (0,25x+3,5)^2}}$$

b) $\alpha_1 = 40^\circ$ $x \approx -0,56$; $y \approx 3,36$ $C_1(-0,56 | 3,36)$

c) $\alpha_2 = 30^\circ$ $x \approx 0,84$; $y \approx 3,71$ $C_2(0,84 | 3,71)$

K4

13 a) und d)



b) $y_D = p(-1) = 2,5 \Rightarrow D_1(-1 | 2,5)$

$$\vec{AD}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5,5 \end{pmatrix}; \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{\vec{AD}_1 \odot \vec{AB}}{|\vec{AD}_1| \cdot |\vec{AB}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 5,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 5,5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{9,5}{\sqrt{31,25 \cdot 17}} \approx 0,41$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \gamma_1 \approx 65,7^\circ; \beta_1 = \delta_1 \approx 114,3^\circ$$

c) $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 0,5x^2 + 2x + 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{AB} \odot \vec{AD} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0,5x^2 + 2x + 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$0,5x^2 + 6x + 15 = 0$$

$$x_{2/3} = -6 \pm \sqrt{6} \approx -6 \pm 2,4$$

$$x_2 \approx -3,6; y_2 = p(-3,6) \approx 3,2$$

$$x_3 \approx -8,4; y_3 = p(-8,4) \approx 22,8$$

$$D_2(-3,6 | 3,2)$$

$$D_3(-8,4 | 22,8)$$

d) $|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}_2| = \sqrt{17} \cdot \sqrt{1,6^2 + 6,2^2} \text{ FE} = \sqrt{17} \cdot \sqrt{41} \text{ FE} \approx 26,4 \text{ FE}$

Der Flächeninhalt des Rechtecks ABC_2D_2 beträgt 26,4 FE.

KX

14 Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel mit $k = 5$ und $\vec{a} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$5 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 5 \cdot (1 + 4) = 25, \text{ aber}$$

$$\left(5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \odot \left(5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 25 + 100 = 125 \neq 25$$

Aufgaben für Lernpartner

K1/6

A Das ist nur richtig für den Fall, dass keiner der beiden Vektoren der Nullvektor ist. Wenn mindestens einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist, dann ist zwar das Skalarprodukt der beiden Vektoren 0, man kann aber nicht von Orthogonalität der beiden Vektoren sprechen.

K1/6

B Das ist falsch. Wenn zwei Geraden senkrecht zueinander sind, dann hat das Skalarprodukt der beiden Steigungsvektoren den Wert 0. Gleichzeitig ist dann das Produkt der Steigungen gleich -1 .

K1/6

C Das ist richtig.

K1/6

D Das ist falsch. Die Skalarmultiplikation ist nicht für Zahlen definiert, sondern für Vektoren. Für die Berechnung des eingeschlossenen Winkels benötigt man die Steigungsvektoren der beiden Geraden.

K1/6 **E** Das ist falsch: Beide Skalarprodukte liefern den gleichen Wert (Kommutativgesetz der Skalarmultiplikation).

K1/6 **F** Das ist richtig.

K1/6 **G** Das ist falsch.

K1/6 **H** Das ist richtig.

Es gilt: $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$

Es sei γ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$, also $\gamma = \alpha - \beta$. Dann gilt:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \gamma = \frac{\vec{e}_1 \odot \vec{e}_2}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2|} = \frac{\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}}{1 \cdot 1} = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Skalarprodukt orthogonaler Vektoren

- KX** 1 a) Das ist wahr: Zwei Vektoren sind orthogonal zueinander, wenn ihr Skalarprodukt -1 ergibt.
 b) Das ist falsch.
 c) Das ist wahr. Zuvor müssen allerdings noch die Koordinaten der betreffenden Vektoren, die den vermeintlichen rechten Winkel miteinander einschließen, berechnet werden.

- KX** 2 • Die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind senkrecht zueinander.
 • Jeder der beiden Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ steht senkrecht auf jedem der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{f}$ und $\vec{i}$.

- KX** 3 a) $g \perp i$
 b) $g \perp h$
 c) $g \perp h$

- KX** 4 $\vec{CA} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 5 \end{pmatrix}; \vec{CB} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ 5 \end{pmatrix}$
 $\vec{CA} \odot \vec{CB} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -3,5 \\ 5 \end{pmatrix} = 7,5 \cdot (-3,5) + 5 \cdot 5 = -1,25$
 Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{CA}$ und $\vec{CB}$ nicht 0 ergibt, liegt bei C kein rechter Winkel vor. Mit dem bloßen Auge kann man das nicht immer zuverlässig beurteilen.

Skalarprodukt beliebiger Vektoren

- KX** 5 a) $\alpha = 180^\circ$
 $\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 + (-1) = -2$
 b) $\alpha = 180^\circ$
 $\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 + (-1) = -2$

- KX** 6 Das ist richtig, wie folgende Rechnung mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ zeigt:
 $\vec{a} \odot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = a_x^2 + a_y^2 = \left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \right)^2 = |\vec{a}|^2$

- KX** 7 Beim zweiten Ausdruck $\vec{BC} \odot \vec{BA} = \sqrt{3^2 + 5^2} \cdot \sqrt{(-8)^2 + (-2)^2} \cdot \cos 45^\circ$ sind die Summanden unter der ersten Wurzel (rein formal) falsch. Es müssten eigentlich die quadrierten Koordinatendifferenzen der x- und y-Koordinaten der Punkte C und B sein:
 $\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(3 - 8)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 3^2}$
 Zusätzlich ist noch die Reihenfolge der Summanden im Vergleich zu den anderen Skalarprodukten vertauscht.
 Obwohl der Ansatz falsch ist, ändert sich am Ergebnis trotzdem nichts, weil bei einer Addition nach dem Kommutativgesetz die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielt und beim Quadrieren etwaige negative Vorzeichen ohnehin verschwinden.

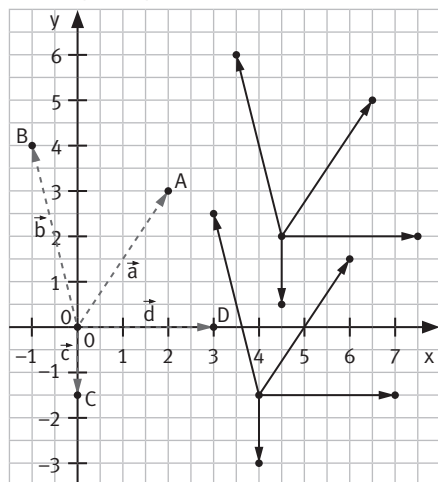
- KX** 8 Torben verwendet beim Skalarprodukt Sinus statt Kosinus. Weil deren Werte aber bei einem Winkelmaß von 45° übereinstimmen (in beiden Fällen $\frac{\sqrt{2}}{2}$), fällt der Fehler nicht weiter auf:
 $\vec{a} \odot \vec{b} = \sqrt{16 + 0} \cdot \sqrt{9 + 9} \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{16} \cdot \sqrt{18} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12$

Startklar

Vektoren

KX

1 Lösungsmöglichkeit:



KX

2

	a)	b)	c)	d)
A	(2 4)	(-2,5 -3,4)	(1 3)	(-2 8)
B	(-3 5)	(-5 2,3)	(2 1)	(-4 10)
$\vec{AB}$	$\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2,5 \\ 5,7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\vec{OA}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2,5 \\ -3,4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

KX

3 a) $\vec{PP'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{P'P} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$
 b) $\vec{PP'} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ -2,6 \end{pmatrix}$ $\vec{P'P} = \begin{pmatrix} -2,4 \\ 2,6 \end{pmatrix}$

Abbildungen

KX

4 Lösungswort: MATRIX

6 Abbildungen

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:

Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

- K6/4** ■ Es liegt eine Achsenspiegelung vor, wobei das Koordinatensystem so gewählt wurde, dass an der x-Achse gespiegelt wird.
- Wesentliche Eigenschaften einer Achsenspiegelung:
- Bild und Urbild sind kongruent, die Achsenspiegelung ist längen- und winkeltreu.
 - Der Umlaufsinn kehrt sich um.

- K6/4** ■ Lösungsmöglichkeit:
- Drehung um einen Punkt Z mit Drehwinkel α :
- Bild und Urbild sind kongruent.
 - Der Umlaufsinn bleibt erhalten.
- Verschiebung um einen Vektor $\vec{v}$:
- Bild und Urbild sind kongruent.
 - Der Umlaufsinn bleibt erhalten.
- Zentrische Streckung mit Streckungsfaktor k von einem Punkt Z aus:
- Bild und Urbild sind zueinander ähnlich, die zentrische Streckung ist verhältnis- und winkeltreu, aber nicht längentreu.
 - Der Umlaufsinn bleibt erhalten.

Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.

Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Entdecken

KX

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

KX

$$\vec{OP'} = \vec{OP} \oplus \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow P' (4|4)$$

Nachgefragt

KX

- Soll eine Parallelverschiebung eines Punktes P um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ rückgängig gemacht werden, so muss der Bildpunkt P' um den Vektor $-\vec{v}$ parallel verschoben werden. Betrachtet man nämlich den Punkt P' $(x + v_x | y + v_y)$, so ergibt sich nach einer Parallelverschiebung mit $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -v_x \\ -v_y \end{pmatrix}$ der Punkt P'' $(x + v_x - v_x | y + v_y - v_y) = P(x|y)$, also erneut der Punkt P.

K6

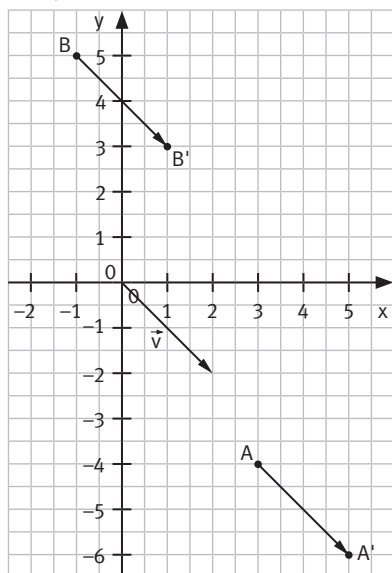
- Die einzige Parallelverschiebung, bei der es Fixpunkte gibt, ist die Verschiebung mit dem Nullvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bei der Parallelverschiebung mit einem beliebigen Vektor $\vec{v}$, der nicht der Nullvektor ist (d. h. $v_x \neq 0$ oder $v_y \neq 0$), gibt es keine Fixpunkte.

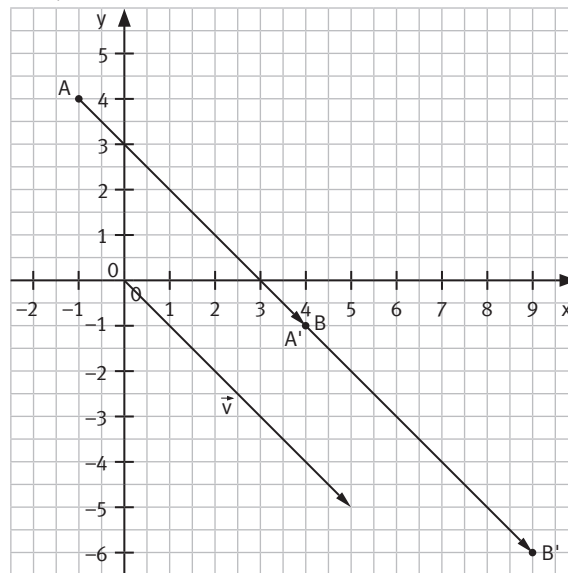
Aufgaben

K5

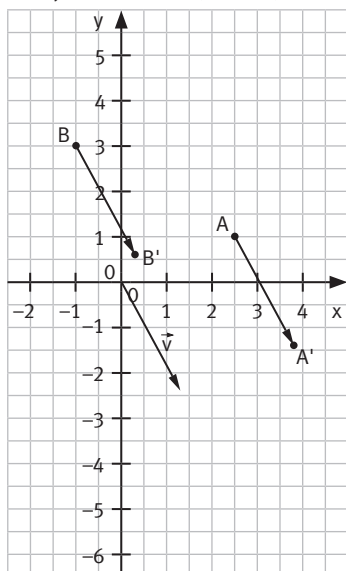
1 a) $A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} \quad A' (5|-6)$
 $B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B' (1|3)$



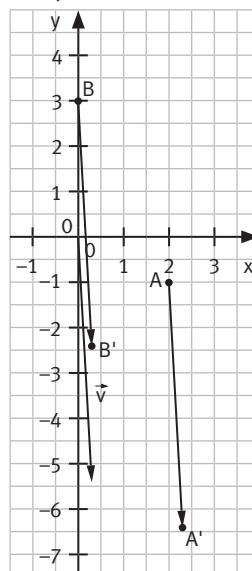
b) $A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A' (4|-1)$
 $B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix} \quad B' (9|-6)$



c) $A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1,3 \\ -2,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,8 \\ -1,4 \end{pmatrix} \quad A' (3,8 | -1,4)$
 $B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1,3 \\ -2,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,6 \end{pmatrix} \quad B' (0,3 | 0,6)$



d) $A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0,3 \\ -5,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,3 \\ -6,4 \end{pmatrix} \quad A' (2,3 | -6,4)$
 $B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0,3 \\ -5,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ -2,4 \end{pmatrix} \quad B' (0,3 | -2,4)$



K5 2

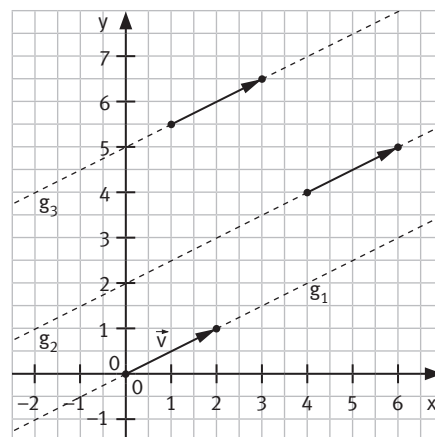
	a)	b)	c)	d)	e)
Verschiebungsvektor	$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -12 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2,5\sqrt{3} \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$
Urpunkt	P (3 -3)	P (1 - \sqrt{2} 0,4)	P (3,2 8)	P (\sqrt{2} 2\sqrt{2})	P (0,5\sqrt{3} -\sqrt{2})
Bildpunkt	P' (5 -5)	P' (1 -1,6)	P' (3,7 -4)	P' (3\sqrt{2} \sqrt{2})	P' (3\sqrt{3} 2\sqrt{2})

K5 3 a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
 $B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad B' (1 | 5)$
 $C: \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C (5 | 1)$
b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$
 $B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+7 \\ 7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad B' (7 | 5)$
 $C: \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-7 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad C (-2 | 2)$
c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-4 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$
 $B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-6 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix} \quad B' (-9 | 4)$
 $C: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \quad C (7 | -3)$
d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1,5 \\ 1-0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$
 $B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0,5 \\ 2+0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} \quad B' (1,5 | 2,5)$
 $C: \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0,5 \\ 3-0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} \quad C (3,5 | 2,5)$

K6 4 Josefs Aussage ist falsch:

Es ist zwar richtig, dass die Parallelverschiebung keine Fixpunkte hat. Es gibt jedoch bei der Parallelverschiebung Fixgeraden (s. Gegenbeispiel):

Jede Gerade in Verschiebungsrichtung ist eine Fixgerade.



K4 5 a) $g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x-4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ 2x-1 \end{pmatrix}$

$$x' = x - 1 \Leftrightarrow x = x' + 1 \quad y' = 2(x' + 1) - 1 = 2x' + 1$$

$$g': y = 2x + 1$$

b) $g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{3}x + 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{3}x - 1 \end{pmatrix}$

$$x' = x \quad y' = \frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{3}x' - 1$$

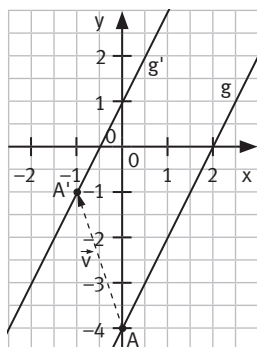
$$g': y = \frac{1}{3}x - 1$$

c) $g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0,2x \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+5 \\ 0,2x+1 \end{pmatrix}$

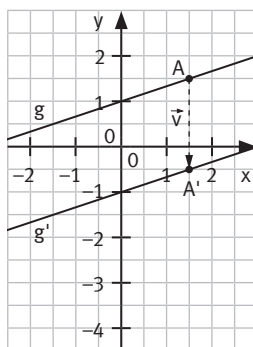
$$x' = x + 5 \Leftrightarrow x = x' - 5 \quad y' = 0,2(x' - 5) + 1 = 0,2x'$$

$$g = g': y = 0,2x$$

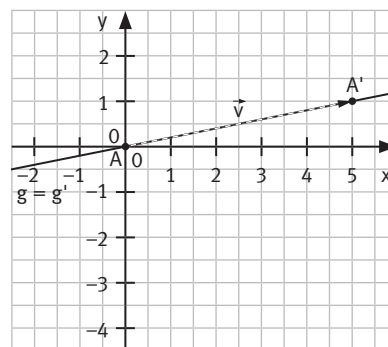
zu a)



zu b)



zu c)



Wie Aufgabe c) zeigt, gibt es bei einer Parallelverschiebung Fixgeraden: Die Geraden g und g' sind identisch.

K1 6 a) $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 + 4 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

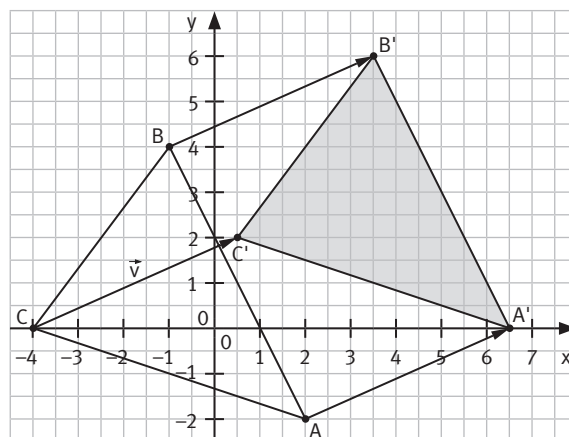
$$A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A' (6,5 | 0)$$

$$B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$B' (3,5 | 6)$$

b) Die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind gleich groß, weil die Parallelverschiebung eine Kongruenzabbildung ist.



Entdecken

KX

- Zu Beginn berechnet man den Vektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dieser Vektor wird mit dem Streckungsfaktor k multipliziert, um den Vektor $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und damit die Koordinaten des Punktes P' (3|4) zu erhalten. Es gilt also: $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP} = k \cdot \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Damit ergibt sich: $1,5k = 3$ und $2k = 4$, was beides $k = 2$ ergibt.

KX

- Allgemein wird der Ortsvektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ von P mit dem Streckungsfaktor k multipliziert und man erhält so den Ortsvektor des Bildpunktes P' :
 $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \end{pmatrix}$ zum Punkt $P' (k \cdot x | k \cdot y)$

Nachgefragt

KX

- Für den Streckungsfaktor $k = -1$ entspricht die zentrische Streckung einer Punktspiegelung am Zentrum Z . Für die Koordinaten $(x' | y')$ des Bildpunktes P' eines Punktes $P(x | y)$ gilt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \Rightarrow P'(-x | -y)$$

KX

- Für den Streckungsfaktor $k = 1$ wird ein Punkt P auf sich selbst abgebildet, also $P = P'$, denn

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \text{ Es liegt also eine Identität vor.}$$

KX

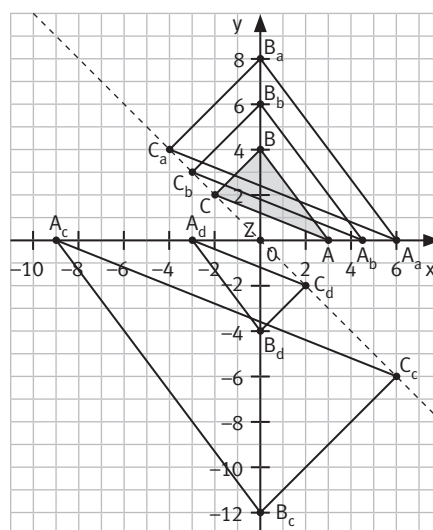
- Um die Gerade g , die durch die Punkte A und B verläuft, durch zentrische Streckung mit dem Zentrum $Z(0|0)$ und $k = 3$ auf die Gerade g' abzubilden, führt man die zentrische Streckung zunächst für die Punkte A und B separat durch. Anschließend berechnet man aus den Bildpunkten A' und B' die Gleichung der Geraden g' .

Alternativ kann man auch das sogenannte Parameterverfahren anwenden, bei dem der ganze Funktionsterm abgebildet wird. In Kapitel 6.5 wird dieses Verfahren näher erläutert.

Aufgaben

K5

- 1 a) $A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(6|0)$
 $B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow B'(0|8)$
 $C': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(-4|4)$
- b) $A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(4,5|0)$
 $B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow B'(0|6)$
 $C': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1,5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(-3|3)$
- c) $A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(-9|0)$
 $B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \end{pmatrix} \Rightarrow B'(0|-12)$
 $C': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(6|-6)$
- d) $A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(-3|0)$
 $B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow B'(0|-4)$
 $C': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(2|-2)$

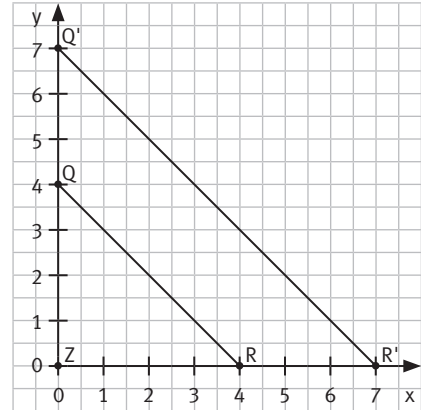


K5 2

	a)	b)	c)	d)
Urpunkt	P(-2 3)	P(-1 $\frac{1}{3}$)	P(1,5 -2)	P(-3 2)
Bildpunkt	P'(-5 7,5)	P'(3 -1)	P'(-3 4)	P'(-0,5 $\frac{1}{3}$)
Streckungs- faktor	2,5	-3	-2	$\frac{1}{6}$

K4 3

- a) $Q': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1,75 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Q'(0|7)$
 $R': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1,75 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R'(7|0)$
- b) Die Streckung um $k = 1,75 = \frac{7}{4}$ hat als Umkehrabbildung die Streckung um $k' = \frac{4}{7}$.
 $Q: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{4}{7} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(0|4)$
 $R: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{4}{7} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(4|0)$



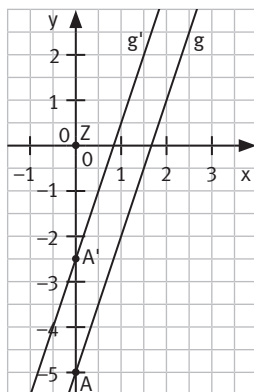
K6 4

- Bei einer zentrischen Streckung mit $Z(0|0)$ und $k \neq 0$ ist $Z(0|0)$ Fixpunkt.
 Alle Geraden durch $Z(0|0)$ sind Fixgeraden, außer bei $k = 1$ gibt es keine Fixpunktgeraden.

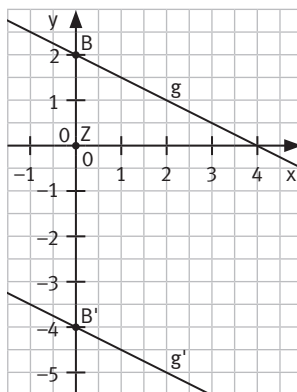
K4 5

- a) $g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0,5 \cdot \begin{pmatrix} x \\ 3x-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5x \\ 1,5x-2,5 \end{pmatrix}$
 $x' = 0,5x \Leftrightarrow x = 2x' \quad y' = 1,5x - 2,5 = 1,5 \cdot 2x' - 2,5 = 3x' - 2,5 \quad g': y = 3x - 2,5$
- b) $g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ -0,5x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ x-4 \end{pmatrix}$
 $x' = -2x \Leftrightarrow x = -0,5x' \quad y' = x - 4 = -0,5x' - 4 \quad g': y = -0,5x - 4$
- c) $g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0,9x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -0,9x \end{pmatrix}$
 $x' = -x \Leftrightarrow x = -x' \quad y' = -0,9x = 0,9x' \quad g': y = 0,9x$

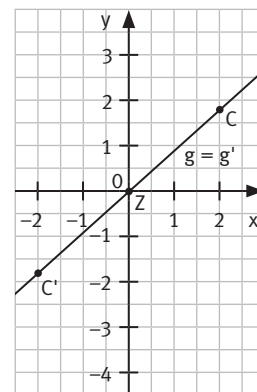
zu a)



zu b)



zu c)



- K1** 6 a) Mit den x-Koordinaten von B und B' lässt sich der Streckungsfaktor ermitteln:

$$k = \frac{x_{B'}}{x_B} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B'(-4|0)$$

$$A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(-2|1)$$

$$C': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(-4|-2)$$

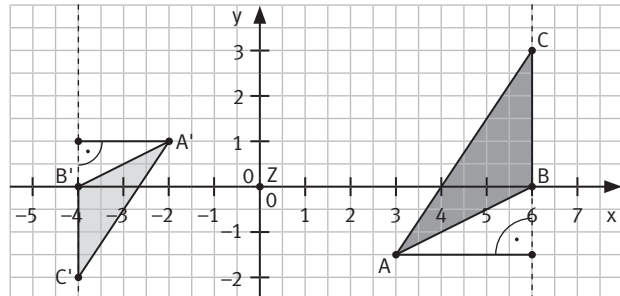
- b) Jede Seitenlänge von A'B'C' ist $\frac{2}{3}$ -mal so lang wie die zugehörige Seitenlänge von ABC, z. B.:

$$|\overline{B'C'}| = \frac{2}{3} \cdot |\overline{BC}| = \frac{2}{3} \cdot 3 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$$

Der Flächeninhalt von A'B'C' ist um den Faktor $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ kleiner als der des ursprünglichen Dreiecks ABC:

$$A_{ABC} = 0,5 \cdot 3 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 4,5 \text{ cm}^2$$

$$A_{A'B'C'} = 0,5 \cdot 2 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 2 \text{ cm}^2 = \frac{4}{9} \cdot A_{ABC}$$



- KX** 7 $g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -3x' - 5 \end{pmatrix} = 0,5 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$x' = 0,5x$$

$$0,5y = -3x' - 5$$

$$0,5y = -3 \cdot (0,5x) - 5$$

$$0,5y = -1,5x - 5 \quad | \cdot 2$$

$$y = -3x - 10$$

$$\Rightarrow g: y = -3x - 10$$

Entdecken

- KX** ■ Es wurde, wie in der Zeichnung zu sehen, ein rechtwinkliges Dreieck OFP mithilfe der Koordinaten von P, also x und y, gebildet. Spiegelt man das komplette Dreieck an der Ursprungsgeraden a, so erhält man das rechtwinklige Dreieck OP'F', welches dieselben Innenwinkel und Seitenlängen besitzen muss. Es gilt also: $|\overline{OF'}| = |\overline{OF}| = x$ und $|\overline{F'P'}| = |\overline{FP}| = y$.

Aus der Innenwinkelsumme des rechtwinkligen Dreiecks OGF' erhält man den Winkel

$$\sphericalangle OF'G = 90^\circ - 2\alpha.$$

Da nun $\sphericalangle OF'P'$ aufgrund der Spiegelung ebenfalls rechtwinklig sein muss, ergibt sich:

$$\sphericalangle EF'P' = 90^\circ - \sphericalangle OF'G = 90^\circ - (90^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$$

- KX** ■ $\overrightarrow{OF'} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos 2\alpha \\ x \cdot \sin 2\alpha \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{F'P'} = \begin{pmatrix} y \cdot \sin 2\alpha \\ -y \cdot \cos 2\alpha \end{pmatrix}$
- $$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OF'} \oplus \overrightarrow{F'P'} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos 2\alpha \\ x \cdot \sin 2\alpha \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y \cdot \sin 2\alpha \\ -y \cdot \cos 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha \\ x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$
- $$\Rightarrow P' (x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha | x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha)$$

- KX** ■ $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$

Nachgefragt

- KX** ■ Die Einträge in der Spiegelungsmatrix können maximal den Wert 1 und minimal den Wert -1 besitzen, da die Einträge aus Sinus- und Kosinuswerten bestehen, die betragsmäßig maximal 1 werden.
- KX** ■ Eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt eine Spiegelung an der y-Achse, da der Winkel α der Ursprungsgeraden 90° beträgt.
- KX** ■ Mit $\cos 2\alpha = 1$ lässt sich der Winkel $\alpha = 0^\circ$ (oder $\alpha = 180^\circ$) berechnen. Es wurde also an der x-Achse gespiegelt. Die Spiegelungsmatrix lautet $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Aufgaben

- K5** 1 a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - 2 \cdot (-6) \\ 3 \cdot 5 - 1 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 21 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \cdot (-2,3) + 0,78 \cdot 8,5 \\ -0,54 \cdot (-2,3) + (-0,23) \cdot 8,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,25 \\ -0,713 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6} \cdot \sqrt{5} + (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \\ 3 \cdot \sqrt{5} + (-1) \cdot (-\sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{30} \\ 3 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7,48 \\ 8,12 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} 5 \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + 64 \\ -5x - 24 \end{pmatrix}$
- I $5 = 6x + 64 \Rightarrow x = -\frac{59}{6} \approx -9,8$
- II $y' = -5x - 24 \Rightarrow y' = \frac{151}{6} \approx 25,2$
- $\begin{pmatrix} 5 \\ \frac{151}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -\frac{59}{6} \\ 8 \end{pmatrix}$
- e) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} + (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \\ -\sqrt{3} \cdot \sqrt{9} + (-1) \cdot (-\sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 2 \\ -3\sqrt{3} + \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3\sqrt{3} + \sqrt{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 8 \\ -3,78 \end{pmatrix}$
- f) $\begin{pmatrix} x' \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,7 \cdot (-5) - 4,5y \\ 5 \cdot 5 - 3,5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33,5 - 4,5y \\ 25 - 3,5y \end{pmatrix}$
- I $4 = 25 - 3,5y \Rightarrow y = \frac{21}{3,5} = 6$
- II $x' = -33,5 - 4,5y = -33,5 - 4,5 \cdot 6 = -60,5$
- $\begin{pmatrix} -60,5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,7 & -4,5 \\ -5 & -3,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$

K1 2 a) bis c)

Es liegt keine Achsenspiegelung vor, da die Matrix nicht mit der Form $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$ übereinstimmt.

d) Es kann eine Achsenspiegelung vorliegen, da die Matrix mit der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ übereinstimmt. Insbesondere ergibt sich für $\alpha = 30^\circ$:

$$\begin{pmatrix} \cos(2 \cdot 30^\circ) & \sin(2 \cdot 30^\circ) \\ \sin(2 \cdot 30^\circ) & -\cos(2 \cdot 30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -0,5 \end{pmatrix}$$

Damit handelt es sich um die Matrix einer Achsenspiegelung an der Geraden $y = \tan 30^\circ \cdot x$ bzw. an $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

K5 3 a) $\cos 2\alpha = 0,34 \Rightarrow \alpha = 35,1^\circ$

$$g: y = \tan 35,1^\circ \cdot x = 0,70x$$

b) $\cos 2\alpha = -0,5 \Rightarrow \alpha = 60,0^\circ$

$$g: y = \tan 60,0^\circ \cdot x = 1,73x$$

c) $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = 22,5^\circ$

$$g: y = \tan 22,5^\circ \cdot x = 0,41x$$

d) $\cos 2\alpha = 0,47 \Rightarrow \alpha = 31,0^\circ$

$$g: y = \tan 31,0^\circ \cdot x = 0,60x$$

K1 4 Andi hat nicht Recht. Gegenbeispiel: Der Punkt A (4|0) wird in einen Fall auf $A_1(3,46|2)$ und im anderen Fall auf $A_2(-3,46|-2)$ abgebildet.

Die erste Matrix beschreibt eine Achsenspiegelung an der Geraden a_1 mit der Gleichung

$a_1: y = \tan 15^\circ \cdot x$ bzw. $a_1: y = 0,27x$. Es gilt:

$$\cos 2\alpha = \cos 30^\circ \approx 0,866 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

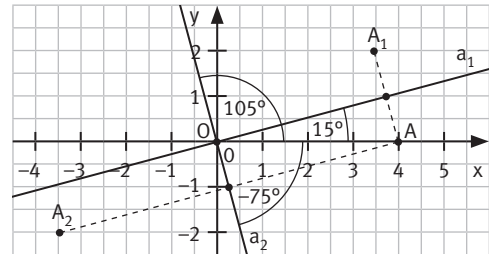
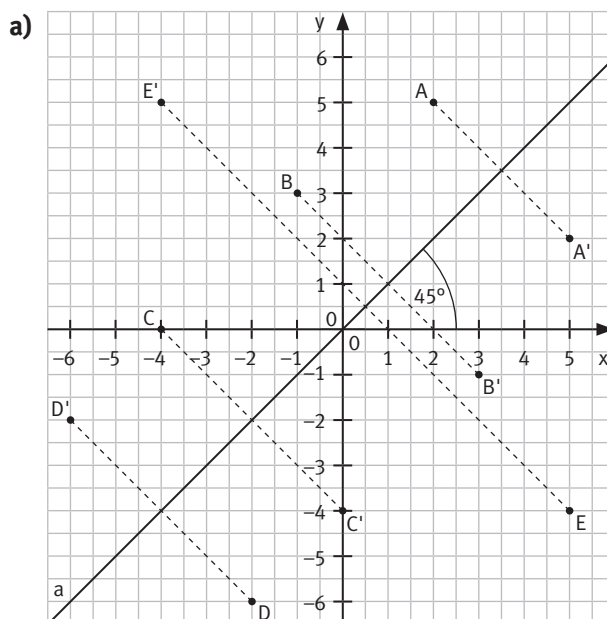
$$\sin 2\alpha = \sin 30^\circ = 0,5$$

Die zweite Matrix beschreibt eine Achsenspiegelung an der Geraden a_2 mit

$a_2: y = \tan(-75^\circ) \cdot x$ (oder $a_2: y = \tan 105^\circ \cdot x$) bzw. $a_2: y = -3,73x$. Es gilt:

$$\cos 2\alpha = \cos(-150^\circ) = \cos 210^\circ \approx -0,866 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2\alpha = \sin(-150^\circ) = \sin 210^\circ = -0,5$$

**K4** 5 Die Berechnung der Koordinaten der Punkte B' bis E' erfolgt jeweils analog zur Berechnung der Koordinaten des Punktes A'.

$$A' (\cos 90^\circ \cdot 2 + \sin 90^\circ \cdot 5 \mid \sin 90^\circ \cdot 2 - \cos 90^\circ \cdot 5)$$

$$A' (0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \mid 1 \cdot 2 - 0 \cdot 5)$$

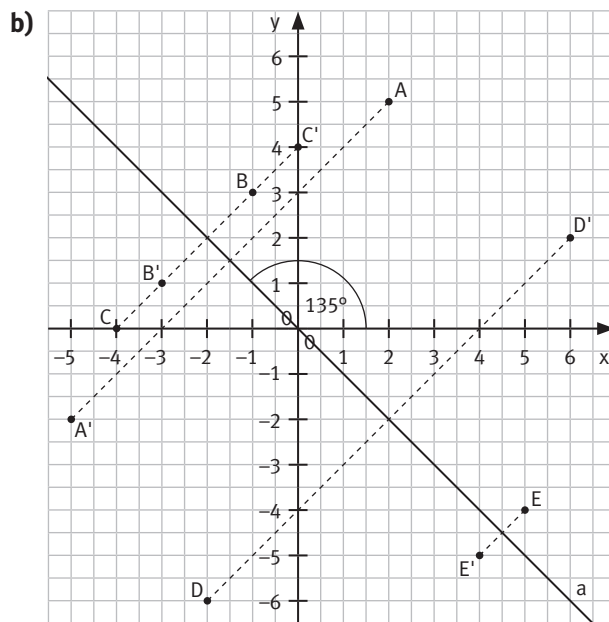
$$A' (5 \mid 2)$$

$$B' (3 \mid -1)$$

$$C' (0 \mid -4)$$

$$D' (-6 \mid -2)$$

$$E' (-4 \mid 5)$$



$$A' (\cos 270^\circ \cdot 2 + \sin 270^\circ \cdot 5 \mid \sin 270^\circ \cdot 2 - \cos 270^\circ \cdot 5)$$

$$A' (0 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \mid (-1) \cdot 2 - 0 \cdot 5)$$

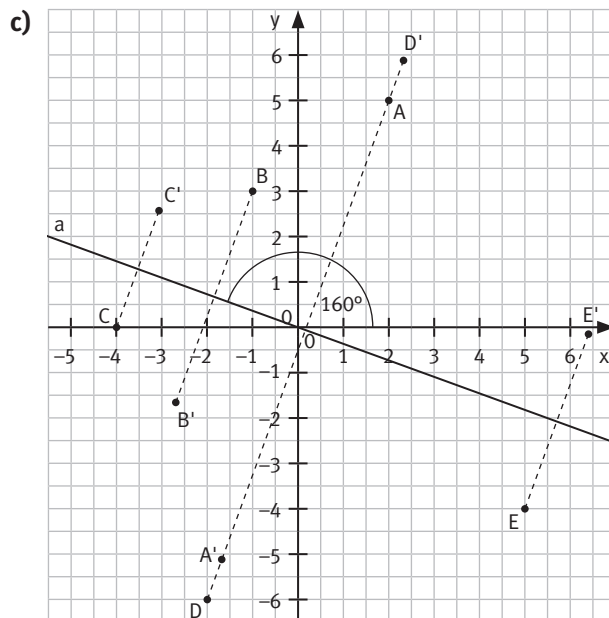
$$A' (-5 \mid -2)$$

$$B' (-3 \mid 1)$$

$$C' (0 \mid 4)$$

$$D' (6 \mid 2)$$

$$E' (4 \mid -5)$$



$$A' (\cos 320^\circ \cdot 2 + \sin 320^\circ \cdot 5 \mid \sin 320^\circ \cdot 2 - \cos 320^\circ \cdot 5)$$

$$A' (0,77 \cdot 2 + (-0,64) \cdot 5 \mid (-0,64) \cdot 2 - 0,77 \cdot 5)$$

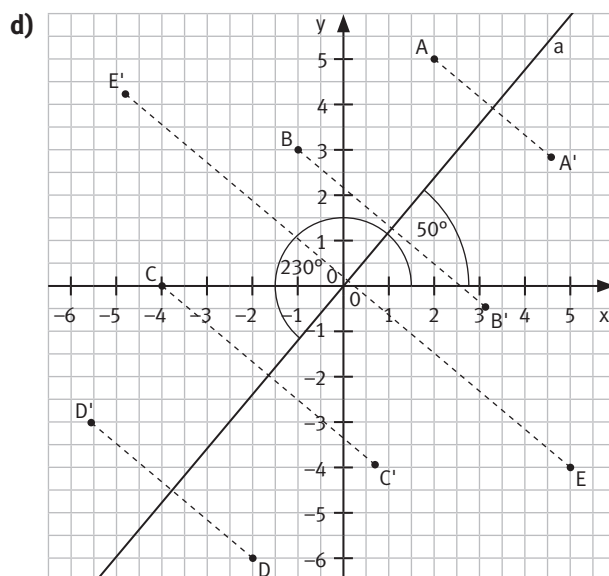
$$A' (-1,68 \mid -5,12)$$

$$B' (-2,69 \mid -1,66)$$

$$C' (-3,06 \mid 2,57)$$

$$D' (2,32 \mid 5,88)$$

$$E' (6,4 \mid -0,15)$$



$$A' (\cos 460^\circ \cdot 2 + \sin 460^\circ \cdot 5 \mid \sin 460^\circ \cdot 2 - \cos 460^\circ \cdot 5)$$

$$A' (\cos 100^\circ \cdot 2 + \sin 100^\circ \cdot 5 \mid \sin 100^\circ \cdot 2 - \cos 100^\circ \cdot 5)$$

$$A' (-0,17 \cdot 2 + 0,98 \cdot 5 \mid 0,98 \cdot 2 - (-0,17) \cdot 5)$$

$$A' (4,58 \mid 2,84)$$

$$B' (3,13 \mid -0,46)$$

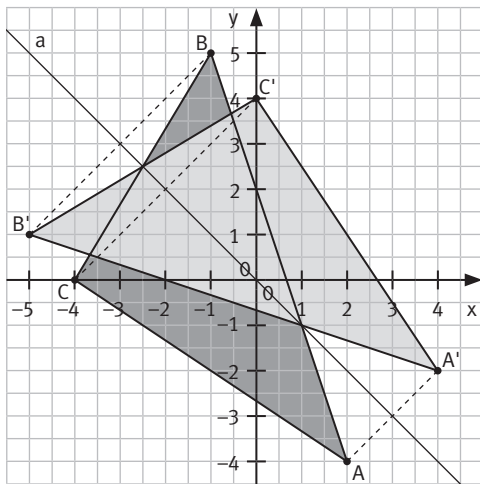
$$C' (0,69 \mid -3,94)$$

$$D' (-5,56 \mid -3,01)$$

$$E' (-4,81 \mid 4,23)$$

K4

6 a)

b) $m = -1 \Rightarrow$ Steigungswinkel $\alpha = -45^\circ$; $2\alpha = -90^\circ$

$$A' (\cos(-90^\circ) \cdot 2 + \sin(-90^\circ) \cdot (-4) \mid \sin(-90^\circ) \cdot 2 - \cos(-90^\circ) \cdot (-4))$$

$$A' (0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) \mid (-1) \cdot 2 - 0 \cdot (-4)) \quad A' (4 \mid -2)$$

$$B' (\cos(-90^\circ) \cdot (-1) + \sin(-90^\circ) \cdot 5 \mid \sin(-90^\circ) \cdot (-1) - \cos(-90^\circ) \cdot 5)$$

$$B' (0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 5 \mid (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 5) \quad B' (-5 \mid 1)$$

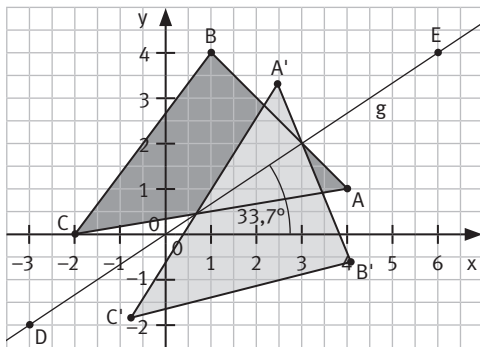
$$C' (\cos(-90^\circ) \cdot (-4) + \sin(-90^\circ) \cdot 0 \mid \sin(-90^\circ) \cdot (-4) - \cos(-90^\circ) \cdot 0)$$

$$C' (0 \cdot (-4) + (-1) \cdot 0 \mid (-1) \cdot (-4) - 0 \cdot 0) \quad C' (0 \mid 4)$$

c) Bei der Spiegelung von $P(x \mid y)$ an $a: y = -x$ gilt für die Koordinaten des Bildpunktes: $P'(-y \mid -x)$.

K4

7 a) und c)

b) $D(-3 \mid -2), E(6 \mid 4) \in g: y = mx + t$

$$\text{Steigung: } m = \frac{4 - (-2)}{6 - (-3)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow g: y = \frac{2}{3}x + t$$

$$4 = \frac{2}{3} \cdot 6 + t \Rightarrow t = 0$$

$$\Rightarrow g: y = \frac{2}{3}x$$

$$\tan \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \frac{2}{3} \approx 33,7^\circ$$

c) $\alpha = 33,7^\circ$; $2\alpha = 67,4^\circ$

$$A' (\cos 67,4^\circ \cdot 4 + \sin 67,4^\circ \cdot 1 \mid \sin 67,4^\circ \cdot 4 - \cos 67,4^\circ \cdot 1)$$

$$A' (0,38 \cdot 4 + 0,92 \cdot 1 \mid 0,92 \cdot 4 - 0,38 \cdot 1)$$

$$A' (2,44 \mid 3,3)$$

$$B' (\cos 67,4^\circ \cdot 1 + \sin 67,4^\circ \cdot 4 \mid \sin 67,4^\circ \cdot 1 - \cos 67,4^\circ \cdot 4)$$

$$B' (0,38 \cdot 1 + 0,92 \cdot 4 \mid 0,92 \cdot 1 - 0,38 \cdot 4)$$

$$B' (4,06 \mid -0,6)$$

$$C' (\cos 67,4^\circ \cdot (-2) + \sin 67,4^\circ \cdot 0 \mid \sin 67,4^\circ \cdot (-2) - \cos 67,4^\circ \cdot 0)$$

$$C' (0,38 \cdot (-2) + 0,92 \cdot 0 \mid 0,92 \cdot (-2) - 0,38 \cdot 0)$$

$$C' (-0,76 \mid -1,84)$$

K4

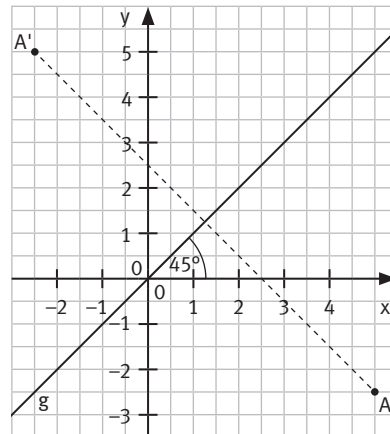
- 8
- | | | | |
|------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1 $\alpha = 0^\circ$ | $x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y = x$ | $y' = 0 \cdot x + (-1) \cdot y = -y$ | $P(x \mid y) \mapsto P'(x \mid -y)$ |
| 2 $\alpha = 90^\circ$ | $x' = -1 \cdot x + 0 \cdot y = -x$ | $y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y = y$ | $P(x \mid y) \mapsto P'(-x \mid y)$ |
| 3 $\alpha = 45^\circ$ | $x' = 0 \cdot x + 1 \cdot y = y$ | $y' = 1 \cdot x + 0 \cdot y = x$ | $P(x \mid y) \mapsto P'(y \mid x)$ |
| 4 $\alpha = -45^\circ$ | $x' = 0 \cdot x + (-1) \cdot y = -y$ | $y' = -1 \cdot x + 0 \cdot y = -x$ | $P(x \mid y) \mapsto P'(-y \mid -x)$ |

KX

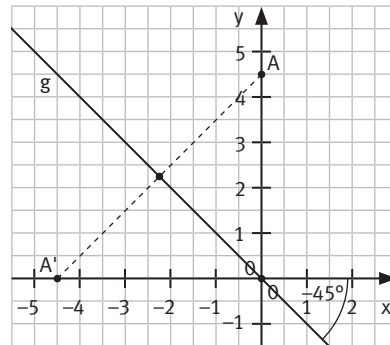
- 9 a) Der Punkt wurde an der y-Achse gespiegelt.
b) Der Punkt wurde an $w_{II/IV}$, also an der Geraden mit der Gleichung $y = -x$, gespiegelt.

K4

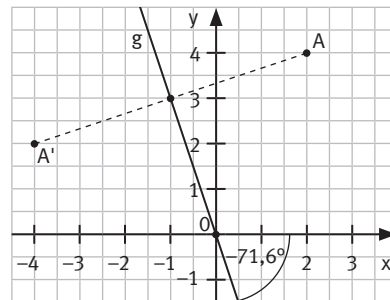
- 10 a)** $A(5|-2,5); g: y = x$
 $\tan \alpha = 1 \quad \alpha = 45^\circ \quad 2\alpha = 90^\circ$
 $\cos 2\alpha = 0$
 $\sin 2\alpha = 1$
 $A'(0 \cdot 5 + 1 \cdot (-2,5) | 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-2,5))$
 $A'(-2,5 | 5)$



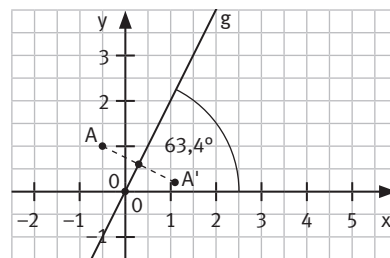
- b)** $A(0|4,5); g: y = -x$
 $\tan \alpha = -1 \quad \alpha = -45^\circ \quad 2\alpha = -90^\circ$
 $\cos 2\alpha = 0$
 $\sin 2\alpha = -1$
 $A'(0 \cdot 0 + (-1) \cdot 4,5 | (-1) \cdot 0 - 0 \cdot 4,5)$
 $A'(-4,5 | 0)$



- c)** $A(2|4); g: y = -3x$
 $\tan \alpha = -3 \quad \alpha = -71,6^\circ \quad 2\alpha = -143,2^\circ$
 $\cos 2\alpha = -0,8$
 $\sin 2\alpha = -0,6$
 $A'(-0,8 \cdot 2 + (-0,6) \cdot 4 | -0,6 \cdot 2 - (-0,8) \cdot 4)$
 $A'(-4 | 2)$



- d)** $A(-0,5|1); g: y = 2x$
 $\tan \alpha = 2 \quad \alpha = 63,4^\circ \quad 2\alpha = 126,8^\circ$
 $\cos 2\alpha = -0,6$
 $\sin 2\alpha = 0,8$
 $A'(-0,6 \cdot (-0,5) + 0,8 \cdot 1 | 0,8 \cdot (-0,5) - (-0,6) \cdot 1)$
 $A'(1,1 | 0,2)$



K5

- 11** M ist der Mittelpunkt der Punkte P und P'. Die Ursprungsgerade a durch M ist die Spiegelachse mit der Steigung m. Mithilfe von m wird das Maß α des Steigungswinkels berechnet.

- a)** $M(-1|-1) \quad m = 1$
 $\alpha = 45^\circ; 2\alpha = 90^\circ \quad \cos 2\alpha = 0$
 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

$a: y = x$
 $\sin 2\alpha = 1$
 Bild des Punktes $Q(-2|-4)$ ist $Q'(-4|-2)$.

- b)** $M(-2,5|2,5) \quad m = -1$
 $\alpha = -45^\circ; 2\alpha = -90^\circ \quad \cos 2\alpha = 0$
 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$

$a: y = -x$
 $\sin 2\alpha = -1$
 Bild des Punktes $Q(3|6)$ ist $Q'(-6|-3)$.

- c) $M(4,5|5,5)$ $m = \frac{11}{9} \approx 1,2$ $a: y = \frac{11}{9}x$
 $\alpha = 50,7^\circ; 2\alpha = 101,4^\circ$ $\cos 2\alpha = -0,2$ $\sin 2\alpha = 1$
 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2 & 1 \\ 1 & 0,2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2x + y \\ x + 0,2y \end{pmatrix}$ Bild des Punktes $Q(-7|3)$ ist $Q'(4,4|-6,4)$.
- d) $M(1,85|1,4)$ $m = \frac{1,4}{1,85} \approx 0,76$ $a: y = 0,76x$
 $\alpha = 37,1^\circ; 2\alpha = 74,2^\circ$ $\cos 2\alpha = 0,27$ $\sin 2\alpha = 0,96$
 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,27 & 0,96 \\ 0,96 & -0,27 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,27x + 0,96y \\ 0,96x - 0,27y \end{pmatrix}$ Bild des Punktes $Q(1|2)$ ist $Q'(2,2|0,4)$.

K1 12 a) $\frac{1-m^2}{1+m^2} = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{\cos^2\alpha}{1} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

$$\frac{2m}{1+m^2} = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = 2 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos^2\alpha}{1} = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$$

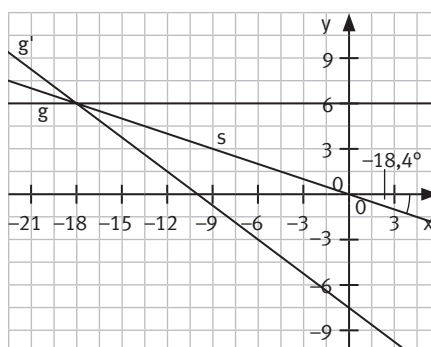
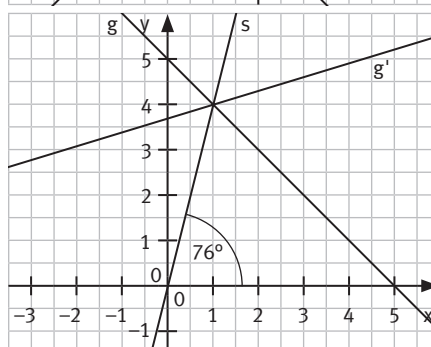
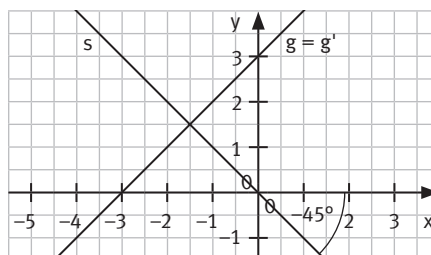
$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & -\frac{1-m^2}{1+m^2} \end{pmatrix}$$

- b) 1 a: $y = x$ $m = 1$ Abbildungsvorschrift: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 2 a: $y = -x$ $m = -1$ Abbildungsvorschrift: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 3 a: $y = 2x$ $m = 2$ Abbildungsvorschrift: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- K5** 13 a) g: $y = x + 3$; P($x|x+3$); s: $y = -x$; $m = -1$;
 $\alpha = -45^\circ; 2\alpha = -90^\circ; \cos(-90^\circ) = 0; \sin(-90^\circ) = -1$
 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ x+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-3 \\ -x \end{pmatrix}$
 $x' = -x - 3$
 $x = -x' - 3$
 $y' = -x = -(-x' - 3) = x' + 3$ $g': y = x + 3; g = g'$

- b) g: $y = -x + 5$; P($x|-x+5$); s: $y = 4x$; $m = 4$;
 $\alpha \approx 76^\circ; 2\alpha \approx 152^\circ; \cos 152^\circ \approx -0,88^\circ; \sin 152^\circ \approx 0,47$
 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,88 & 0,47 \\ 0,47 & 0,88 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -x+5 \end{pmatrix}$
 $x' = -0,88x + 0,47 \cdot (-x+5) = -1,35x + 2,35$
 $x = \frac{x' - 2,35}{-1,35} = -\frac{x'}{1,35} + 1,74$
 $y' = 0,47x + 0,88 \cdot (-x+5) = -0,41x + 4,4$
 $y' = -0,41 \cdot \left(-\frac{x'}{1,35} + 1,74\right) + 4,4 = 0,3x' + 3,69$
 $g': y = 0,3x + 3,69$

- c) g: $y = 6$; P($x|6$); s: $y = -\frac{1}{3}x$; $m = -\frac{1}{3}$;
 $\alpha \approx -18,4^\circ; 2\alpha \approx -36,8^\circ; \cos(-36,8^\circ) = 0,8; \sin(-36,8^\circ) = -0,6$
 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -0,6 & -0,8 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 6 \end{pmatrix}$
 $x' = 0,8x + (-0,6) \cdot 6 = 0,8x - 3,6$
 $x = \frac{x' + 3,6}{0,8} = \frac{x'}{0,8} + 4,5 = 1,25 \cdot x' + 4,5$
 $y' = -0,6x - 0,8 \cdot 6 = -0,6x - 4,8$
 $y' = -0,6 \cdot (1,25 \cdot x' + 4,5) - 4,8 = -0,75x' - 7,5$
 $g': y = -0,75x - 7,5$



K5 14 a) Mit $m = 2$ gilt mit der Formel aus 12 a):

$$\cos 2\alpha = \frac{-3}{5} = -0,6; \sin 2\alpha = \frac{4}{5} = 0,8$$

Die Abbildungsvorschrift an $a: y = 2x$ ist:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jeder Punkt P auf $a: y = 2x$ hat die Koordinaten $P(x|2x)$.

Für die Abbildung eines solchen Punktes $P(x|2x)$ gilt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, \text{ da:}$$

$$x' = -0,6x + 0,8 \cdot 2x = x \text{ und } y' = 0,8x + 0,6 \cdot 2x = 2x$$

Damit wird jeder Punkt P auf a auf sich selbst abgebildet, er ist Fixpunkt der Spiegelung an $a: y = 2x$.

b) Die Abbildung von $g: y = 2x + 3$ an $a: y = 2x$ ergibt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 2x+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2,4 \\ 2x+1,8 \end{pmatrix}$$

Damit gilt für y' mit $x' = x + 2,4$ bzw. $x = x' - 2,4$:

$$y' = 2x + 1,8 = (2x' - 4,8) + 1,8 = 2x' - 3, \text{ d. h.: } g': y = 2x - 3$$

Die Geraden a , g und g' haben die gleiche Steigung $m = 2$, sie sind parallel.

Allgemein:

Das Bild einer zu a parallelen Geraden g ist eine zu a parallele Gerade g' .

Die Abbildung von $h: y = -0,5x + 4$ an $a: y = 2x$ ergibt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -0,5x+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+3,2 \\ 0,5x+2,4 \end{pmatrix}$$

Damit gilt für y' mit $x' = -x + 3,2$ bzw. $x = -x' + 3,2$:

$$y' = 0,5x + 2,4 = 0,5 \cdot (-x' + 3,2) + 2,4 = -0,5x' + 4, \text{ d. h.: } h': y = -0,5x + 4 \text{ und } h' = h.$$

Die Gerade h steht senkrecht zur Spiegelachse, ihr Bild h' ist mit h identisch, h ist eine Fixgerade.

Allgemein:

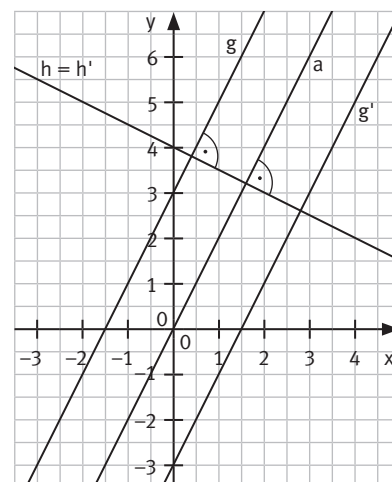
Eine zu a senkrechte Gerade h ist eine Fixgerade.

c) Allgemein gilt für jede zu a senkrechte Gerade $h: y = -0,5x + t$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -0,5x+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+0,8t \\ 0,5x+0,6t \end{pmatrix}$$

Damit gilt für y' mit $x' = -x + 0,8t$ bzw. $x = -x' + 0,8t$:

$$y' = 0,5x + 0,6t = 0,5 \cdot (-x' + 0,8t) + 0,6t = -0,5x' + t, \text{ d. h.: } h': y = -0,5x + t \text{ und } h' = h.$$



K1 15 Verkürzte Antwort: Die Geraden a und g sind senkrecht zueinander, da $m_a \cdot m_g = -1$.

Damit ist g bei der Spiegelung an a eine Fixgerade.

a) Mit $m = -0,25$ gilt $\cos 2\alpha \approx 0,88$; $\sin 2\alpha \approx 0,47$. Man erhält die Abbildungsvorschrift:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,88 & -0,47 \\ -0,47 & -0,88 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 4x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-0,47 \\ -4x-0,88 \end{pmatrix}$$

Mit $x = -x' - 0,47$ gilt: $y' = -4 \cdot (-x' - 0,47) - 0,88 = 4x' + 1$, d. h.: $g': y = 4x + 1$; $g = g'$

Die Gerade g ist bei der Spiegelung an a eine Fixgerade.

b) Mit $m = \frac{4}{3}$ gilt $\cos 2\alpha = -0,28$; $\sin 2\alpha = 0,96$. Man erhält die Abbildungsvorschrift:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,28 & 0,96 \\ 0,96 & 0,28 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -0,75x-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-8,64 \\ 0,75x-2,52 \end{pmatrix}$$

Mit $x = -x' - 8,64$ gilt: $y' = 0,75(-x' - 8,64) - 2,52 = -0,75x' - 9$, d. h.: $g': y = -0,75x - 9$; $g = g'$

Die Gerade g ist bei der Spiegelung an a eine Fixgerade.

K5 16 Die Fixgerade g liegt senkrecht zur Spiegelachse a . Damit gilt für die Steigung m_g :

$$m_g = -\frac{1}{m_a} = -\frac{1}{-2} = 0,5, \text{ d. h.: } g: y = 0,5x + t$$

Mit $P(3|5) \in g$ gilt: $5 = 0,5 \cdot 3 + t \Leftrightarrow t = 3,5$; $g: y = 0,5x + 3,5$

K6 17 Der Fixpunkt $P(x|y)$ und sein Bildpunkt $P'(x'|y')$ liegen auf der Spiegelachse a und haben dieselben Koordinaten, d. h.: $x = x'$ und $y = y' = 0,5x$.

Entdecken

KX

- Es wurde, wie in der Zeichnung zu sehen, ein rechtwinkliges Dreieck OFP mithilfe der Koordinaten von P, also x und y, gebildet. Dreht man das komplette Dreieck um den Winkel α , so erhält man das rechtwinklige Dreieck OF'P', welches dieselben Innenwinkel und Seitenlängen besitzen muss.

Es gilt also $|\overline{OF}| = |\overline{OF'}| = x$ und $|\overline{F'P'}| = |\overline{FP}| = y$.

Aus der Innenwinkelsumme des rechtwinkligen Dreiecks OGF' erhält man den Winkel

$\sphericalangle OF'G = 90^\circ - \alpha$. Da nun $\sphericalangle OF'P'$ ebenfalls rechtwinklig ist, ergibt sich:

$$\sphericalangle EF'P' = 180^\circ - 90^\circ - \sphericalangle OF'G = 90^\circ - 90^\circ + \alpha = \alpha$$

KX

- $\overrightarrow{OF'} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos \alpha \\ x \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{F'P'} = \begin{pmatrix} -y \cdot \sin \alpha \\ y \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OF'} \oplus \overrightarrow{F'P'} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos \alpha \\ x \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -y \cdot \sin \alpha \\ y \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\ x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P' (x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \mid x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha)$$

KX

- $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

Nachgefragt

KX

- Die Abbildung ist eine Drehung um 180° , da sich der Winkel berechnen lässt aus $\cos \alpha = -1$. Es folgt $\alpha = 180^\circ$, was für die anderen Einträge in der Matrix ebenfalls passt, denn $\sin 180^\circ = 0$.

KX

- Bei einer Drehung um den Ursprung mit einem Winkel α , der weder 0° noch ein Vielfaches von 360° beträgt, gibt es nur den Ursprung O(0|0) selbst als Fixpunkt. Wird um 0° bzw. ein Vielfaches von 360° gedreht, liegt eine Identität vor (alle Punkte Fixpunkte).

Aufgaben

K5

- a) $\cos^{-1}(-0,8) = \sin^{-1}0,6$ für $\alpha = 143,13^\circ$ Es handelt sich um eine Drehmatrix.
 - b) $\cos^{-1}0,5 \neq \sin^{-1}0,7$ Es handelt sich nicht um eine Drehmatrix.
 - c) $\cos^{-1}\frac{5}{13} = \sin^{-1}\frac{12}{13}$ für $\alpha = 67,38^\circ$ Es handelt sich um eine Drehmatrix.
 - d) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ für $\alpha = 240^\circ$ Es handelt sich um eine Drehmatrix.

K5

- a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (x - y) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (x + y) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,7 \cdot (x - y) \\ 0,7 \cdot (x + y) \end{pmatrix}$$

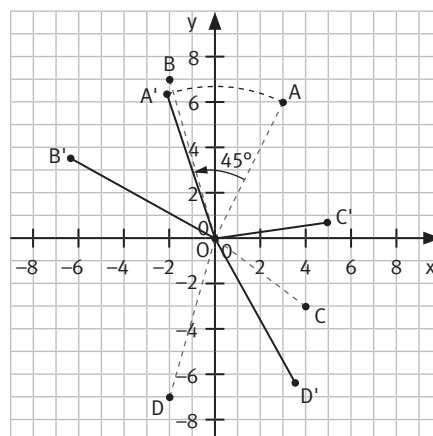
$$P(x|y) \mapsto P'(0,7 \cdot (x - y) \mid 0,7 \cdot (x + y))$$

$$A'(-2,1 \mid 6,3)$$

$$B'(-6,3 \mid 3,5)$$

$$C'(4,9 \mid 0,7)$$

$$D'(3,5 \mid -6,3)$$



$$\begin{aligned} \text{b) } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,5x - \frac{1}{2}\sqrt{3}y \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}x + 0,5y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,5x - 0,9y \\ 0,9x + 0,5y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

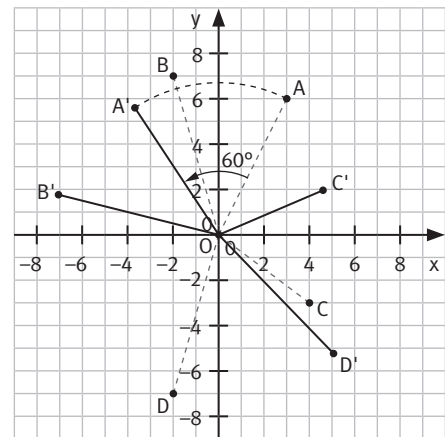
$$P(x|y) \mapsto P'(0,5x - 0,9y | 0,9x + 0,5y)$$

$$A'(-3,9 | 5,7)$$

$$B'(-7,3 | 1,7)$$

$$C'(4,7 | 2,1)$$

$$D'(5,3 | -5,3)$$



$$\begin{aligned} \text{c) } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -0,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0,5x - \frac{1}{2}\sqrt{3}y \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}x - 0,5y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,5x - 0,9y \\ 0,9x - 0,5y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

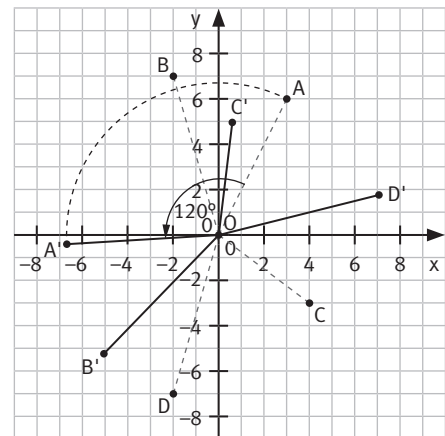
$$P(x|y) \mapsto P'(-0,5x - 0,9y | 0,9x - 0,5y)$$

$$A'(-6,9 | -0,3)$$

$$B'(-5,3 | -5,3)$$

$$C'(0,7 | 5,1)$$

$$D'(7,3 | 1,7)$$



$$\begin{aligned} \text{d) } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 210^\circ & -\sin 210^\circ \\ \sin 210^\circ & \cos 210^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,9x + 0,5y \\ -0,5x - 0,9y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

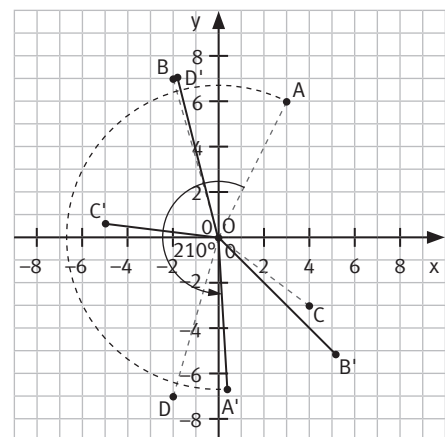
$$P(x|y) \mapsto P'(-0,9x + 0,5y | -0,5x - 0,9y)$$

$$A'(0,3 | -6,9)$$

$$B'(5,3 | -5,3)$$

$$C'(-5,1 | 0,7)$$

$$D'(-1,7 | 7,3)$$



K5

$$3 \quad \text{a) } 5 = \cos \alpha \cdot 4 - \sin \alpha \cdot 3$$

$$25 \sin^2 \alpha + 30 \sin \alpha + 9 = 0$$

$$\sin \alpha = -0,6 \quad \alpha \approx 323^\circ$$

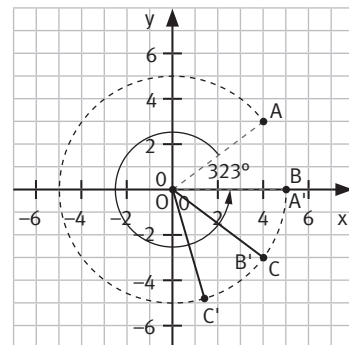
$$x' = \cos 323^\circ \cdot x - \sin 323^\circ \cdot y = 0,8 \cdot x + 0,6 \cdot y$$

$$y' = \sin 323^\circ \cdot x + \cos 323^\circ \cdot y = -0,6 \cdot x + 0,8 \cdot y$$

$$P'(0,8 \cdot x + 0,6 \cdot y | -0,6 \cdot x + 0,8 \cdot y)$$

$$B'(4 | -3)$$

$$C'(1,4 | -4,8)$$



b) $0 = \cos \alpha \cdot 5 - \sin \alpha \cdot 0$

$\cos \alpha = 0 \quad \alpha = 270^\circ$

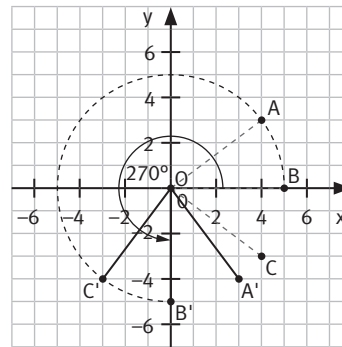
$x' = \cos 270^\circ \cdot x - \sin 270^\circ \cdot y = y$

$y' = \sin 270^\circ \cdot x + \cos 270^\circ \cdot y = -x$

$P'(y|-x)$

$A'(3|-4)$

$C'(-3|-4)$



c) $-3 = \cos \alpha \cdot 4 - \sin \alpha \cdot 3$

$\cos \alpha = 0 \quad \alpha = 90^\circ$

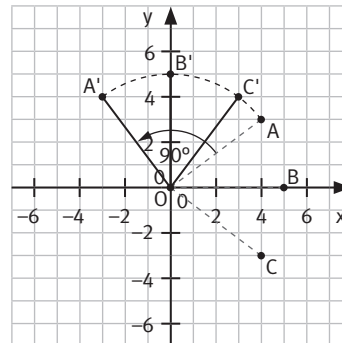
$x' = \cos 90^\circ \cdot x - \sin 90^\circ \cdot y = -y$

$y' = \sin 90^\circ \cdot x + \cos 90^\circ \cdot y = x$

$P'(-y|x)$

$B'(0|5)$

$C'(3|4)$



d) $-4 = \cos \alpha \cdot 4 - \sin \alpha \cdot (-3)$

$\cos \alpha = -1 \quad \alpha = 180^\circ$

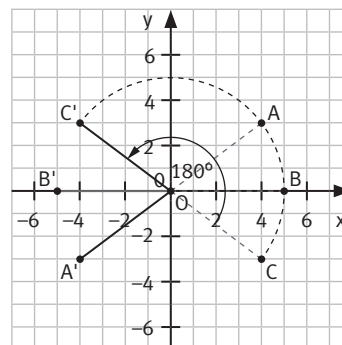
$x' = \cos 180^\circ \cdot x - \sin 180^\circ \cdot y = -x$

$y' = \sin 180^\circ \cdot x + \cos 180^\circ \cdot y = -y$

$P'(-x|-y)$

$A'(-4|-3)$

$B'(-5|0)$



4 a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

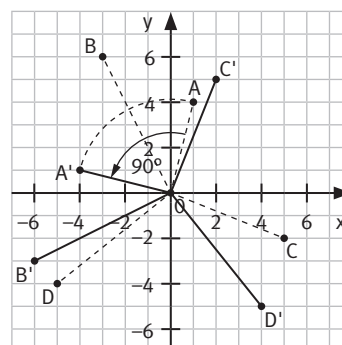
$P(x|y) \mapsto P'(-y|x)$

$A'(-4|1)$

$B'(-6|-3)$

$C'(2|5)$

$D'(4|-5)$



b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

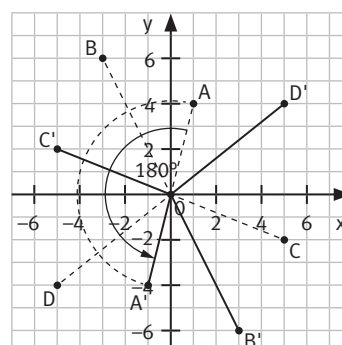
$P(x|y) \mapsto P'(-x|-y)$

$A'(-1|-4)$

$B'(3|-6)$

$C'(-5|2)$

$D'(5|4)$



$$c) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

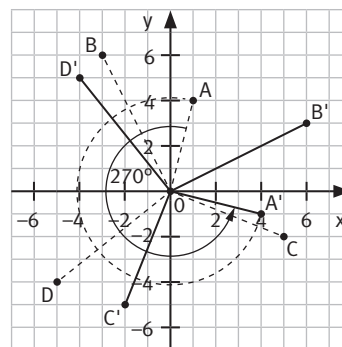
$$P(x|y) \mapsto P'(y|-x)$$

$$A'(4|-1)$$

$$B'(6|3)$$

$$C'(-2|-5)$$

$$D'(-4|5)$$



- K1** 5 Das stimmt: Eine Umkehrabbildung hat die Eigenschaft, dass eine ausgeführte Abbildung wieder rückgängig gemacht wird. Die Ausführung der Abbildung und der anschließenden Umkehrabbildung ist die Identität:

$$\alpha + (360^\circ - \alpha) = 360^\circ; \text{ eine Drehung um } 360^\circ \text{ ergibt die Identität.}$$

Ein Punkt P' , der aus der Drehung des Punktes P mit dem Winkelmaß α entstanden ist, wird bei der Drehung mit dem Winkelmaß $360^\circ - \alpha$ auf den ursprünglichen Punkt P abgebildet. Eine Drehung mit dem Winkelmaß α wird mit einer Drehung um $360^\circ - \alpha$ rückgängig gemacht.

- K5** 6 $\alpha = 90^\circ$

Abbildung:

$$x' = -y \wedge y' = x$$

Abbildung von $B(-1|3)$:

$$B'(-3|-1)$$

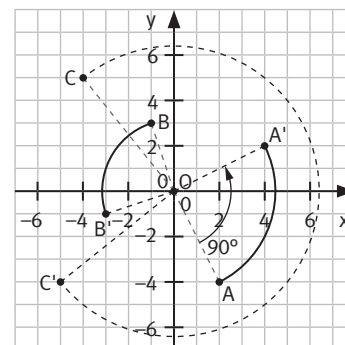
$$\alpha' = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$$

Umkehrabbildung:

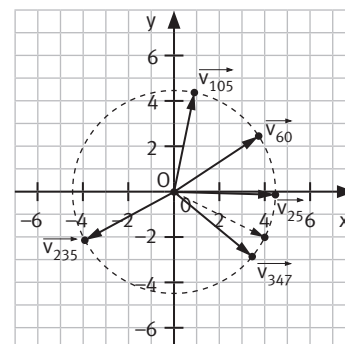
$$x'' = y' \wedge y'' = -x'$$

Umkehrabbildung von $C'(-5|-4)$:

$$C''(-4|5) = C(-4|5)$$



- K1** 7 a) 1 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ \cdot 4 - \sin 60^\circ \cdot (-2) \\ \sin 60^\circ \cdot 4 + \cos 60^\circ \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,73 \\ 2,46 \end{pmatrix}$
- 2 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 25^\circ & -\sin 25^\circ \\ \sin 25^\circ & \cos 25^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 25^\circ \cdot 4 - \sin 25^\circ \cdot (-2) \\ \sin 25^\circ \cdot 4 + \cos 25^\circ \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,47 \\ -0,12 \end{pmatrix}$
- 3 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 105^\circ & -\sin 105^\circ \\ \sin 105^\circ & \cos 105^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 105^\circ \cdot 4 - \sin 105^\circ \cdot (-2) \\ \sin 105^\circ \cdot 4 + \cos 105^\circ \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,90 \\ 4,38 \end{pmatrix}$
- 4 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 235^\circ & -\sin 235^\circ \\ \sin 235^\circ & \cos 235^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 235^\circ \cdot 4 - \sin 235^\circ \cdot (-2) \\ \sin 235^\circ \cdot 4 + \cos 235^\circ \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,93 \\ -2,13 \end{pmatrix}$
- 5 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 347^\circ & -\sin 347^\circ \\ \sin 347^\circ & \cos 347^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 347^\circ \cdot 4 - \sin 347^\circ \cdot (-2) \\ \sin 347^\circ \cdot 4 + \cos 347^\circ \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,45 \\ -2,85 \end{pmatrix}$



- b) Der Betrag eines Vektors gibt die Länge des Vektors an. Bei der Drehung des Vektors $\vec{v} = \vec{OV}$ um den Koordinatenursprung bleibt die Länge des Vektors $\vec{OV}$ konstant.

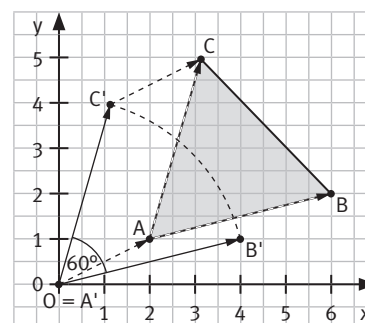
- K5** 8 $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Drehung von $\vec{OB}$ um $O(0|0)$ mit $\alpha = 60^\circ$:

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,13 \\ 3,96 \end{pmatrix}$$

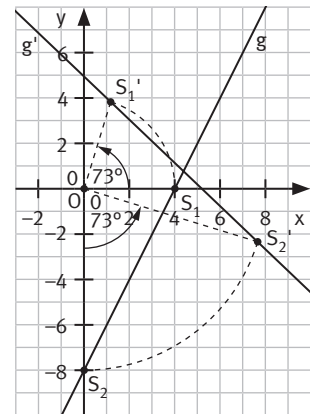
$$\vec{OC} = \vec{OC} \oplus \vec{OA} = \begin{pmatrix} 1,13 \\ 3,96 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,13 \\ 4,96 \end{pmatrix}$$

$$C(3,13|4,96)$$



K6

- 9 Melinas Vorgehen zur Bestimmung der Gleichung der Geraden g' : Zunächst bestimmt sie die Schnittpunkte S_1 und S_2 mit den Koordinatenachsen, danach dreht sie diese um O um 73° und erhält die Bildpunkte S_1' und S_2' . Nun bestimmt sie die Gerade $S_1'S_2'$; diese ist die Bildgerade g' . Vorteil bei Melinas Vorgehen mit den Schnittpunkten $S_1(4|0)$ und $S_2(0|-8)$ ist der Wert 0 der y - bzw. der x -Koordinate, der die Berechnung vereinfacht. Melina könnte auch zwei beliebige Punkte A und B auf g um 73° drehen und g' mithilfe der Geraden $A'B'$ bestimmen, allerdings wäre dabei die Berechnung der Bildpunkte mit beliebigen Werten der Koordinaten von A und B etwas aufwendiger.



KX

10 a) $P(x|3x-2) \in g \xrightarrow{O(0|0); \alpha=53,13^\circ} P'(x'|y') \in g'$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 53,13^\circ & -\sin 53,13^\circ \\ \sin 53,13^\circ & \cos 53,13^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 3x-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 3x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6x - 0,8 \cdot (3x-2) \\ 0,8x + 0,6 \cdot (3x-2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,8x + 1,6 \\ 2,6x - 1,2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= -1,8x + 1,6 & \Leftrightarrow & x = -\frac{5}{9}x' + \frac{8}{9} \\ \wedge y' &= 2,6x - 1,2 & \wedge y' &= 2,6x - 1,2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{13}{9}x' + \frac{10}{9} \quad \Leftrightarrow \quad g': y = -\frac{13}{9}x + \frac{10}{9}$$

b) $P(x|-2x+0,5) \in g \xrightarrow{O(0|0); \alpha=53,13^\circ} P'(x'|y') \in g'$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 53,13^\circ & -\sin 53,13^\circ \\ \sin 53,13^\circ & \cos 53,13^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -2x+0,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -2x+0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6x - 0,8 \cdot (-2x+0,5) \\ 0,8x + 0,6 \cdot (-2x+0,5) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,2x - 0,4 \\ -0,4x + 0,3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= 2,2x - 0,4 & \Leftrightarrow & x = \frac{5}{11}x' + \frac{1}{11} \\ \wedge y' &= -0,4x + 0,3 & \wedge y' &= -0,4x + 0,3 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{2}{11}x' + \frac{5}{22} \quad \Leftrightarrow \quad g': y = -\frac{2}{11}x + \frac{5}{22}$$

K5

11 a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ \frac{4}{7}x+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ \cdot x - \sin 180^\circ \cdot (\frac{4}{7}x+3) \\ \sin 180^\circ \cdot x + \cos 180^\circ \cdot (\frac{4}{7}x+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -\frac{4}{7}x-3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x' &= -x \quad \Leftrightarrow \quad x = -x' \\ y' &= -\frac{4}{7}(-x') - 3 = \frac{4}{7}x' - 3 \end{aligned} \quad g': y = \frac{4}{7}x - 3$$

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 36,87^\circ & -\sin 36,87^\circ \\ \sin 36,87^\circ & \cos 36,87^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 0,4x+0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 36,87^\circ \cdot x - \sin 36,87^\circ \cdot (0,4x+0,7) \\ \sin 36,87^\circ \cdot x + \cos 36,87^\circ \cdot (0,4x+0,7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,56x - 0,42 \\ 0,92x + 0,56 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x' &= 0,56x - 0,42 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,79x' + 0,75 \\ y' &= 0,92 \cdot (1,79x' + 0,75) + 0,56 = 1,65x' + 1,25 \end{aligned} \quad g': y = 1,65x + 1,25$$

c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 143,13^\circ & -\sin 143,13^\circ \\ \sin 143,13^\circ & \cos 143,13^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -\frac{2}{3}x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 143,13^\circ \cdot x - \sin 143,13^\circ \cdot (-\frac{2}{3}x-2) \\ \sin 143,13^\circ \cdot x + \cos 143,13^\circ \cdot (-\frac{2}{3}x-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4x + 1,2 \\ 1,13x + 1,6 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x' &= -0,4x + 1,2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2,5x' + 3 \\ y' &= 1,13 \cdot (-2,5x' + 3) + 1,6 = -2,82x' + 4,99 \end{aligned} \quad g': y = -2,82x + 4,99$$

d) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -\frac{2}{3}x+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ \cdot x - \sin 90^\circ \cdot (-\frac{2}{3}x+4) \\ \sin 90^\circ \cdot x + \cos 90^\circ \cdot (-\frac{2}{3}x+4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x - 4 \\ x \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{2}{3}x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,5x' + 6 \\ y' &= x = 1,5x' + 6 \end{aligned} \quad g': y = 1,5x + 6$$

$$e) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -x+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 150^\circ \cdot x - \sin 150^\circ \cdot (-x+5) \\ \sin 150^\circ \cdot x + \cos 150^\circ \cdot (-x+5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,36x - 2,5 \\ 1,36x + 4,33 \end{pmatrix}$$

$$x' = -0,36x - 2,5 \Leftrightarrow x = -2,78x' - 6,94$$

$$y' = 1,36 \cdot (-2,78x' - 6,94) - 4,33 = -3,78x' - 13,77$$

$$g': y = -3,78x - 13,77$$

$$f) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -4x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \cdot x - \sin 30^\circ \cdot (-4x-2) \\ \sin 30^\circ \cdot x + \cos 30^\circ \cdot (-4x-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,86x + 1 \\ -2,96x - 1,73 \end{pmatrix}$$

$$x' = 2,86x + 1 \Leftrightarrow x = 0,35x' - 0,35$$

$$y' = -2,96 \cdot (0,35x' - 0,35) - 1,73 = -1,04x' - 0,69$$

$$g': y = -1,04x - 0,69$$

K4

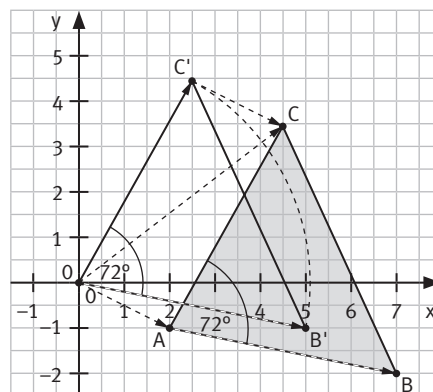
$$12 \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

 Drehung von $\overrightarrow{OB}$ um $O(0|0)$ mit $\alpha = 72^\circ$:

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} \cos 72^\circ & -\sin 72^\circ \\ \sin 72^\circ & \cos 72^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,50 \\ 4,45 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2,50 \\ 4,45 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,50 \\ 3,45 \end{pmatrix}$$

$$C(4,50|3,45)$$



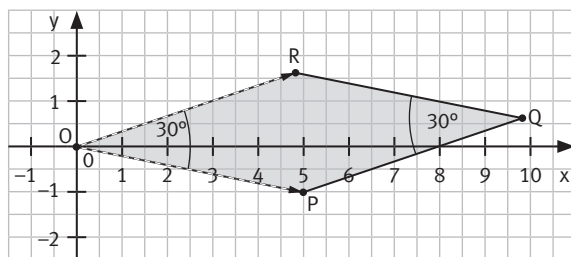
K5

$$13 \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \odot \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,83 \\ 1,63 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4,83 \\ 1,63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,83 \\ 0,63 \end{pmatrix}$$

$$R(4,83|1,63) \quad Q(9,83|0,63)$$



K6

14 Die Aussage ist richtig. Mögliches Vorgehen: Man bestimmt das Maß des Winkels zwischen den beiden Ursprungsgeraden g und h:

$$m_g = 4,5; \tan^{-1} 4,5 \approx 77,47^\circ$$

$$m_h = 1,5; \tan^{-1} 1,5 \approx 56,31^\circ$$

$$\alpha_1 = 77,47^\circ - 56,31^\circ = 21,16^\circ \text{ (für die Drehung von h auf g)}$$

$$\alpha_2 = 360^\circ - 21,16^\circ = 338,84^\circ \text{ (für die Drehung von g auf h)}$$

Abbildungsgleichung für die Drehung um $O(0|0)$ mit $\alpha_1 = 21,16^\circ$ von h auf g:

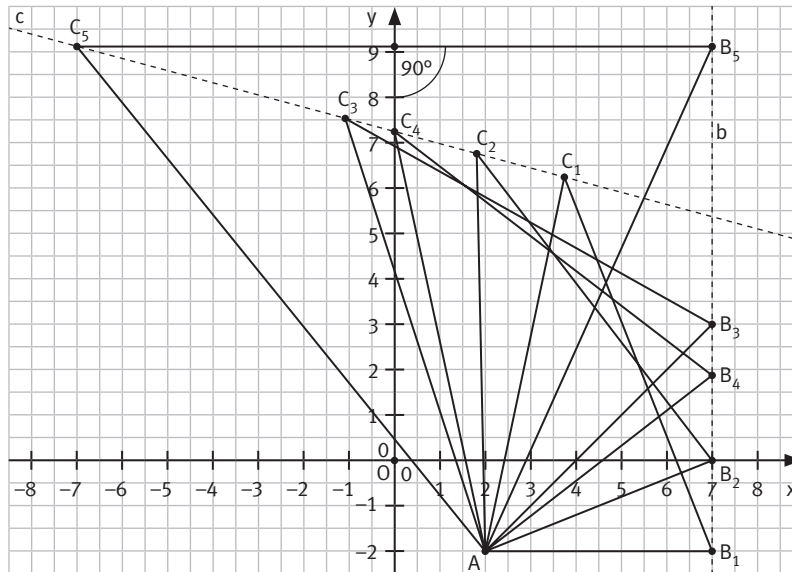
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 21,16^\circ & -\sin 21,16^\circ \\ \sin 21,16^\circ & \cos 21,16^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 1,5x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,39x \\ 1,76x \end{pmatrix}$$

Abbildungsgleichung für die Drehung um $O(0|0)$ mit $\alpha_2 = 338,84^\circ$ von g auf h:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 338,84^\circ & -\sin 338,84^\circ \\ \sin 338,84^\circ & \cos 338,84^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 4,5x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,56x \\ 3,84x \end{pmatrix}$$

K4

15 Bei den Ergebnissen kann es Abweichungen aufgrund von Rundungsungenauigkeiten geben.



- a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 75^\circ & -\sin 75^\circ \\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 7 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 75^\circ \cdot 7 - \sin 75^\circ \cdot y \\ \sin 75^\circ \cdot 7 + \cos 75^\circ \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8 - 0,97 \cdot y \\ 6,8 + 0,26 \cdot y \end{pmatrix}$
 $B_n(7|y)$ hat als Bildpunkt $C_n(1,8 - 0,97 \cdot y | 6,8 + 0,26 \cdot y)$.
 $B_1(7|-2)$ und $C_1(3,7|6,27)$; $B_2(7|0)$ und $C_2(1,8|6,8)$; $B_3(7|3)$ und $C_3(-1,1|7,5)$
- b) Berechnung der y-Koordinate von $B_4(7|y)$ mit Bildpunkt $C_4(0|_)$:
 $0 = 1,8 - 0,97 \cdot y \Leftrightarrow y \approx 1,9$
 $B_4(7|1,9)$ und $C_4(0|6,76 + 0,26 \cdot 1,9) = C_4(0|7,3)$
- c) Berechnung der gemeinsamen Koordinate $y = y'$ von $B_5(7|y)$ mit Bildpunkt $C_5(x'|y')$:
 $y = 6,8 + 0,26 \cdot y \Leftrightarrow 0,74y = 6,8 \Leftrightarrow y \approx 9,2$
 $B_5(7|9,2)$ und $C_5(1,8 - 0,97 \cdot 9,2 | 9,2) = C_5(-7,1 | 9,2)$
- d) Die Punkte C_n sind Bildpunkte der Punkte B_n , deren x-Koordinate konstant bei 7 liegt. Demnach müssen die Punkte C_n ebenfalls auf einer Geraden liegen.
Für die Gerade c gilt:
 $x' = 1,8 - 0,97 \cdot y \Leftrightarrow y = \frac{1,8}{0,97} - \frac{1}{0,97}x' \Leftrightarrow y = 1,9 - 1,0x'$
 $y' = 6,8 + 0,26 \cdot y \Leftrightarrow y' = 6,8 + 0,26 \cdot (1,9 - 1,0x') \Leftrightarrow y' = 7,3 - 0,26x'$
Gerade c: $y = 7,3 - 0,26x$

K1

- 16 a) $\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \sin \beta \cdot \cos \alpha + \cos \beta \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} \cos(-\beta) & -\sin(-\beta) \\ \sin(-\beta) & \cos(-\beta) \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) - \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) \\ \sin(-\beta) \cdot \cos \alpha + \cos(-\beta) \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$

Vertiefung

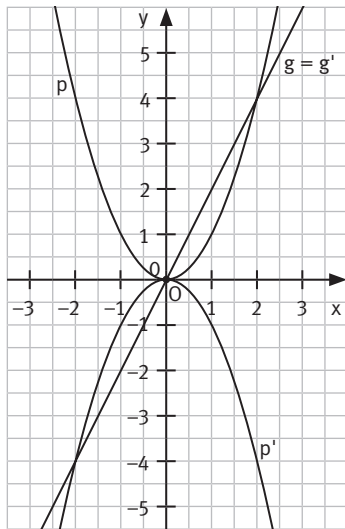
K4

- Abbildungsgleichung für die Drehung um O (0|0) mit $\alpha = 180^\circ$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \quad x' = -x \Leftrightarrow x = -x' \quad y' = -y$$

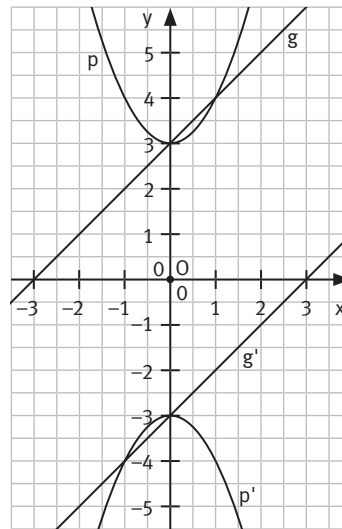
a) Gerade: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -2x \end{pmatrix}$
 $y' = -2 \cdot (-x') = 2x'$
 $g': y = 2x$

Parabel: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -x^2 \end{pmatrix}$
 $y' = -(-x')^2 = -x'^2$
 $p': y = -x^2$



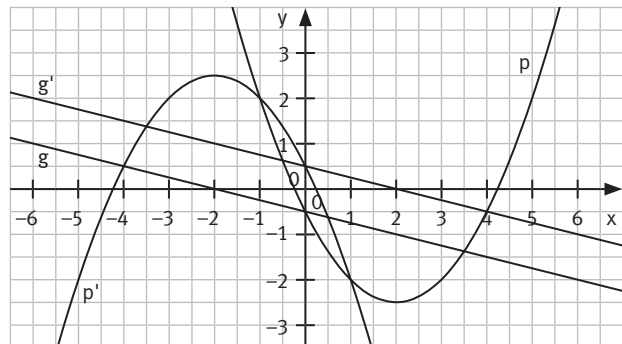
b) Gerade: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ x+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -x-3 \end{pmatrix}$
 $y' = -(-x') - 3 = x' - 3$
 $g': y = x - 3$

Parabel: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ x^2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -x^2-3 \end{pmatrix}$
 $y' = -(-x')^2 - 3 = -x'^2 - 3$
 $p': y = -x^2 - 3$



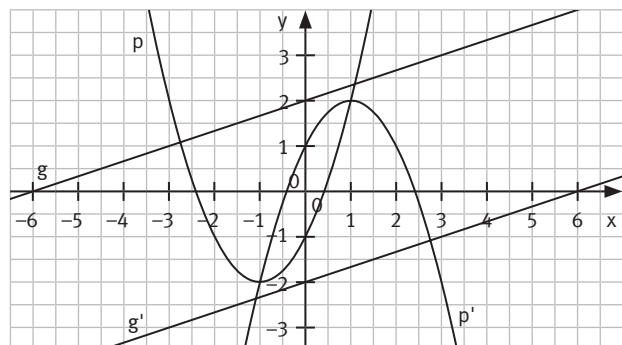
c) Gerade: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -0,25x - 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 0,25x + 0,5 \end{pmatrix}$
 $y' = 0,25x + 0,5 = -0,25x' + 0,5$
 $g': y = -0,25x + 0,5$

Parabel: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 0,5x^2 - 2x - 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -0,5x^2 + 2x + 0,5 \end{pmatrix}$
 $y' = -0,5x^2 + 2x + 0,5 = -0,5x'^2 - 2x' + 0,5$
 $g': y = -0,5x^2 - 2x + 0,5$



d) Gerade: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{3}x + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -\frac{1}{3}x - 2 \end{pmatrix}$
 $y' = -\frac{1}{3}x - 2 = \frac{1}{3}x' - 2$
 $g': y = \frac{1}{3}x - 2$

Parabel: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ x^2 + 2x - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -x^2 - 2x + 1 \end{pmatrix}$
 $y' = -x^2 - 2x + 1 = -x'^2 + 2x' + 1$
 $g': y = -x^2 + 2x + 1$



K4

- Bei der Punktspiegelung der Parabel $p: y = x^2 + a$ an $O(0|0)$ wird jeder Punkt $P(x|x^2 + a)$ auf einen Punkt $P'(-x|-(x^2 + a))$ abgebildet, die Punktspiegelung entspricht der Drehung um $O(0|0)$ mit $\alpha = 180^\circ$.

Abbildungsgleichung für die Drehung von p auf p' um $O(0|0)$ mit $\alpha = 180^\circ$:

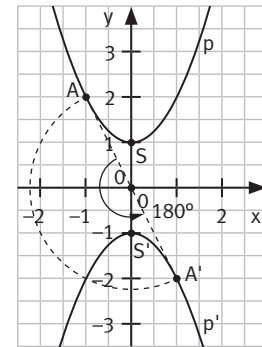
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ x^2 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -(x^2 + a) \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \Leftrightarrow x = -x'$$

$$y' = -(x^2 + a) = -[(-x')^2 + a] = -x'^2 - a$$

$$p': y = -x^2 - a$$

Beispiel mit $p: y = x^2 + 1$:



Entdecken

KX

$$\blacksquare P(x|0,5x+2)$$

KX

$$\blacksquare P(x|0,5x+2) \in f \stackrel{0(0|0); \alpha = 36,87^\circ}{\rightarrow} P'(x'|y') \in f'$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 36,87^\circ & -\sin 36,87^\circ \\ \sin 36,87^\circ & \cos 36,87^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 0,5x+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8x + (-0,6) \cdot (0,5x+2) \\ 0,6x + 0,8 \cdot (0,5x+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5x - 1,2 \\ x + 1,6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= 0,5x - 1,2 & \Leftrightarrow & & x &= 2x' + 2,4 & \Leftrightarrow & & y' &= 2x' + 4 \\ \wedge y' &= x + 1,6 & \Leftrightarrow & & \wedge y' &= x + 1,6 & \Leftrightarrow & & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f': y = 2x + 4$$

KX

- Dieses Vorgehen lässt sich auch bei anderen Funktionen oder Abbildungen anwenden, da es unabhängig von der Art des Funktionsterms bzw. der Einträge der Abbildungsmatrix ist. Das heißt, die y-Koordinate des Punktes P muss nur an den jeweiligen Funktionsterm angepasst bzw. die Matrixeinträge müssen für die jeweilige Abbildung ausgetauscht werden. Anschließend muss man bei den resultierenden Gleichungen den ursprünglichen Parameter x eliminieren, um die Gleichung des Bildgraphen zu erhalten.

Nachgefragt

KX

- Die Aussage bzgl. der Parallelverschiebung stimmt: Bei einer Parallelverschiebung der Normalparabel reicht es aus, den Scheitelpunkt zu betrachten und ab diesem Punkt den Graphen der Funktion nachzukonstruieren, da dieser seine Form unverändert beibehält. Die Aussage bzgl. der zentrischen Streckung stimmt jedoch nicht: Bei der zentrischen Streckung der Normalparabel mit $Z(0|0)$ und $k > 1$ bleibt der Scheitelpunkt mit $S(0|0) = S'(0|0)$ alle anderen Punkte der Parabel werden jedoch gestreckt von $P(x|y)$ auf $P(x|2y)$.

KX

- Bei Parallelverschiebungen, zentrischen Streckungen und Spiegelungen an der x- oder y-Achse von Parabeln handelt es sich bei dem Bildgraphen stets wieder um den Graphen einer Funktion. Auch bei Drehungen um ein Vielfaches von 180° (nicht aber bei anderen Drehwinkeln) entstehen wieder Funktionsgraphen. Bei anderen Drehwinkeln werden einem x-Wert mehrere y-Werte zugeordnet, was der Definition einer Funktion widerspricht.

Aufgaben

K5

$$\begin{aligned} 1 \quad a) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ 2^{x-3} \end{pmatrix} \oplus \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ 2^{x-3} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ 2^{x-3}+1 \end{pmatrix} \\ x &= x' - 2 & y' &= 2^{x'-2-3} + 1 = 2^{x'-5} + 1 & f' &: y = 2^{x-5} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ 2^{x-3} \end{pmatrix} \oplus \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ 2^{x-3} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ 2^{x-3}-2 \end{pmatrix} \\ x &= x' - 2 & y' &= 2^{x'-2-3} - 2 = 2^{x'-5} - 2 & f' &: y = 2^{x-5} - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ 0,5x^2-1 \end{pmatrix} \oplus \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ 0,5x^2-1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ 0,5x^2 \end{pmatrix} \\ x &= x' - 2 & y &= 0,5 \cdot (x' - 2)^2 & f' &: y = 0,5(x-2)^2 \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ 0,5x^2-1 \end{pmatrix} \oplus \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ 0,5x^2-1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ 0,5x^2-3 \end{pmatrix} \\ x &= x' - 2 & y' &= 0,5 \cdot (x' - 2)^2 - 3 & f' &: y = 0,5(x-2)^2 - 3 \end{aligned}$$

K5 2 a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3 \end{pmatrix}$ $D_f = \mathbb{R}$

$$x = x' + 1 \quad y' = \left(\frac{1}{2}\right)^{x'+1} + 3 \quad f': y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 3 \quad D_{f'} = \mathbb{R}$$

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \log_2 x \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ \log_2 x + 4 \end{pmatrix}$ $D_f = \mathbb{R}^+$

$$x = x' + 2 \quad y' = \log_2(x' + 2) + 4 \quad f': y = \log_2(x + 2) + 4 \quad D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$$

c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{2}{x-1} + 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ \frac{2}{x-1} \end{pmatrix}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$x = x' + 2 \quad y' = \frac{2}{x'+1} \quad f': y = \frac{2}{x+1} \quad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

d) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{x-3} + 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+0,5 \\ \sqrt{x-3} + 1 \end{pmatrix}$ $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

$$x = x' - 0,5 \quad y' = \sqrt{x' - 3,5} + 1 \quad f': y = \sqrt{x - 3,5} + 1 \quad D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3,5\}$$

K1 3 Für die Verschiebungen sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $x' = x + a$ bzw. $x = x' - a$ und $y' = f(x' - a) + b$. Für die Ermittlung von $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ wird jeweils die Gleichung $f(x' - a) + b = g(x')$ betrachtet.

a) $\sqrt{x' - a + 2} - 4 + b = \sqrt{x' - 1} - 2,5 \Rightarrow a = 3 \text{ und } b = 1,5 \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}$

b) $(x' - a - 2)^3 - 1 + b = (x' - 5)^3 + 1 \Rightarrow a = 3 \text{ und } b = 2 \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $0,5^{x' - a + 1} - 2 + b = 0,5^{x' + 2} + 3 \Rightarrow a = -1 \text{ und } b = 5 \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $\frac{4}{(x' - a - 2)^2} + 3 + b = \frac{4}{(x' + 2)^2} + 1 \Rightarrow a = -4 \text{ und } b = -2 \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

e) $2\log_2(x' - a - 5) + 1 + b = \log_2(x' + 3)^2 \Leftrightarrow$
 $\log_2(x' - a - 5) + \log_2(x' - a - 5) + 1 + b = \log_2(x' + 3) + \log_2(x' + 3)$
 $\Rightarrow a = -8 \text{ und } b = -1 \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}$

K6 4 Lucia hat Recht. Die Symmetrieachse s einer Parabel mit Scheitelpunkt $S(x_S | y_S)$ ist senkrecht zur x -Achse, $s: x = x_S$. Urbildparabel und Bildparabel sind identisch, die Funktionsgleichungen sind gleich.

K5 5 Matrix für die Spiegelung an der y -Achse (d. h. $\alpha = 90^\circ$):

$$\begin{pmatrix} \cos 180^\circ & \sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & -\cos 180^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } x = -x'$$

a) $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{x+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ \sqrt{x+3} \end{pmatrix} \quad f': y = \sqrt{-x+3}$

b) $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ \frac{2}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ \frac{2}{x} \end{pmatrix} \quad f': y = -\frac{2}{x}$

c) $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ \log_2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ \log_2 x \end{pmatrix} \quad f': y = \log_2(-x)$

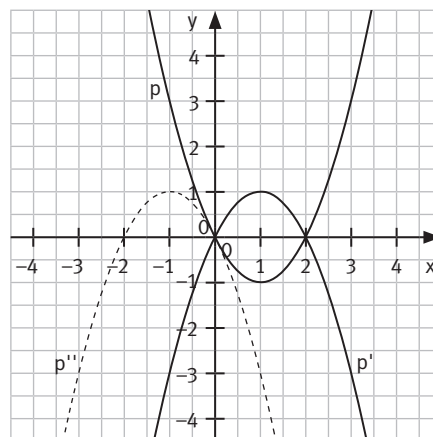
d) $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 2^{x-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 2^{x-1} \end{pmatrix} \quad f': y = 2^{-x-1}$

e) $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 3^{x+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 3^{x+2} \end{pmatrix} \quad f': y = 3^{-x+2}$

f) $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 2x^2 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 2x^2 + 5 \end{pmatrix} \quad f': y = 2x^2 + 5$

KX

- 6 a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ x^2 - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x^2 + 2x \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow p': y = -x^2 + 2x$
- b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x^2 + 2x \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ -x^2 + 2x \end{pmatrix}$
 $x' = x - 2 \Rightarrow x = x' + 2$
 $y' = -x^2 + 2x = -(x' + 2)^2 + 2(x' + 2)$
 $y' = -x'^2 - 4x' - 4 + 2x' + 4 = -x'^2 - 2x'$
 $\Rightarrow p'': y = -x'^2 - 2x'$
- c) Eine Punktspiegelung am Ursprung entspricht einer Drehung um 180° .
 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ x^2 - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -x^2 + 2x \end{pmatrix}$
 $x' = -x \Rightarrow x = -x'$
 $y' = -x^2 + 2x = -x'^2 - 2x'$
 $\Rightarrow p'': y = -x'^2 - 2x'$



K5

- 7 a) Damit die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, muss sich bei einer Spiegelung an der y-Achse die gleiche Funktion ergeben.

Spiegelungsmatrix ist $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1 $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ x^2 - 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ x^2 - 2,5 \end{pmatrix}$
 $x' = -x \Leftrightarrow x = -x'$

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$y' = x^2 - 2,5 = (-x')^2 - 2,5 = x'^2 - 2,5 \quad f = f': y = x^2 - 2,5$$

2 $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}$

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y' = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(-x')^2} = \frac{1}{x'^2}$$

$$f = f': y = \frac{1}{x^2}$$

3 $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 2x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 2x^4 \end{pmatrix}$
 $x' = -x \Leftrightarrow x = -x'$

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$y' = 2x^4 = 2(-x')^4 = 2x'^4$$

$$f = f': y = 2x^4$$

4 $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ |0,25x| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ |0,25x| \end{pmatrix}$
 $x' = -x \Leftrightarrow x = -x'$

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$y' = |0,25x| = |0,25(-x')| = |0,25x'| \quad f = f': y = |0,25x|$$

- b) Damit die Funktion achsensymmetrisch zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten ist, muss sich bei einer Spiegelung an der Winkelhalbierenden die gleiche Funktion ergeben.

Spiegelungsmatrix ist $\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & -\cos 90^\circ \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1 $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 6-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-x \\ x \end{pmatrix}$
 $x' = 6-x \Leftrightarrow x = 6-x'$

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$y' = x = 6-x'$$

$$f = f': y = 6-x$$

2 $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} \\ x \end{pmatrix}$
 $x' = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{x'}$

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y' = x = -\frac{1}{x'}$$

$$f = f': y = -\frac{1}{x}$$

3 $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ \frac{4}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{x} \\ x \end{pmatrix}$
 $x' = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x = \frac{4}{x'}$

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y' = x = \frac{4}{x'}$$

$$f = f': y = \frac{4}{x}$$

4 $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -x-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-9 \\ x \end{pmatrix}$
 $x' = -x-9 \Leftrightarrow x = -x'-9$

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$y' = x = -x'-9$$

$$f = f': y = -x-9$$

KX

- 8 Zunächst: Beide Vorgehensweisen sind korrekt.

Der erste Ansatz ist die Vertauschung der Koordinaten x und y im Funktionsterm einer Funktion, anschließend muss nach y aufgelöst werden. Die Vertauschung der Koordinaten entspricht grafisch der Spiegelung des Graphen an der Geraden mit der Gleichung $y = x$, was dem zweiten Ansatz entspricht.

$$f: y = x^{\frac{1}{4}} - 1$$

erster Ansatz:

$$f^{-1}: x = y^{\frac{1}{4}} - 1 \quad | + 1$$

$$x + 1 = y^{\frac{1}{4}} \quad | \wedge 4$$

$$f^{-1}: y = (x + 1)^4$$

zweiter Ansatz:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$x' = x^{\frac{1}{4}} - 1, \text{ also } x = (x' + 1)^4$$

$$y' = x$$

$$\text{Damit: } y' = (x' + 1)^4 \text{ bzw. } f^{-1}: y = (x + 1)^4$$

K5

$$9 \quad a) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -x^2 - 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2x^2 - 6x \end{pmatrix}$$

$$x' = 2x \Leftrightarrow x = 0,5x'$$

$$y' = -2x^2 - 6x = -0,5x'^2 - 3x'$$

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f': y = -0,5x'^2 - 3x'$$

$$b) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ x^3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2x^3 - 2 \end{pmatrix}$$

$$x' = -2x \Leftrightarrow x = -0,5x'$$

$$y' = -2x^3 - 2 = 0,25x'^3 - 2$$

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f': y = 0,25x'^3 - 2$$

$$c) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ \log_2 x + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3\log_2 x + 3 \end{pmatrix}$$

$$x' = 3x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}x'$$

$$y' = 3\log_2 x + 3 = 3\log_2 \left(\frac{1}{3}x'\right) + 3$$

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^+$$

$$f': y = 3\log_2 \left(\frac{1}{3}x'\right) + 3$$

$$d) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,75 & 0 \\ 0 & -0,75 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 0,5^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,75x \\ -0,75 \cdot 0,5^x \end{pmatrix}$$

$$x' = -0,75x \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}x'$$

$$y' = -0,75 \cdot 0,5^x = -0,75 \cdot 0,5^{-\frac{4}{3}x'}$$

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f': y = -0,75 \cdot 0,5^{-\frac{4}{3}x'}$$

$$e) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5x \\ 0,5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1,5 \end{pmatrix}$$

$$x' = 0,5x \Leftrightarrow x = 2x'$$

$$y' = 0,5 \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1,5 = 0,5 \left(\frac{1}{3}\right)^{2x'} + 1,5$$

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f': y = 0,5 \left(\frac{1}{9}\right)^{x'} + 1,5$$

$$f) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -0,6x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ 1,8x \end{pmatrix}$$

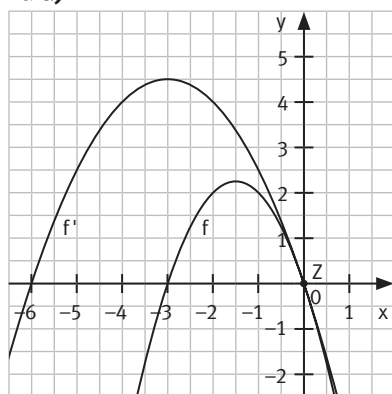
$$x' = -3x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}x'$$

$$y' = 1,8x = -\frac{1,8}{3}x'$$

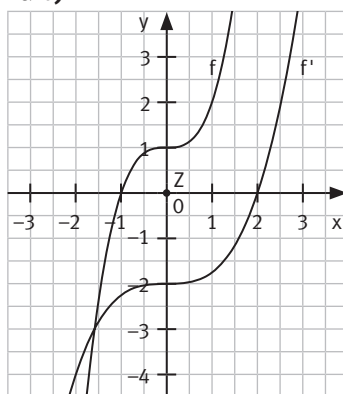
$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f = f': y = -0,6x$$

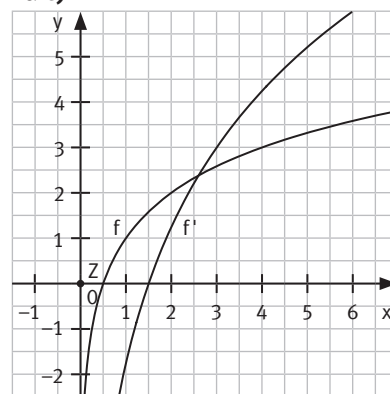
zu a)



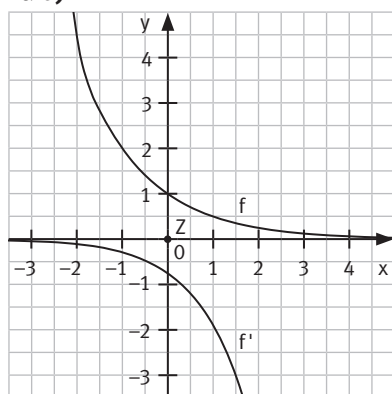
zu b)



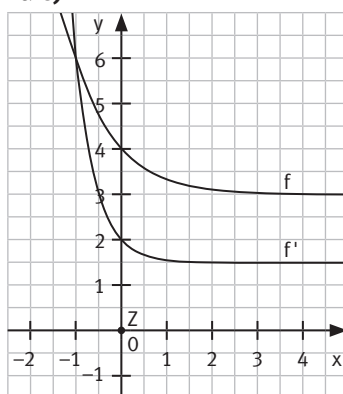
zu c)



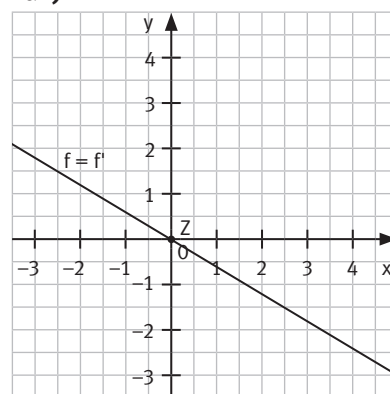
zu d)



zu e)



zu f)



- K5** 10 a) $p_1: y = x^2 + 1$ mit $S_1(0|1)$
 $p_2: 0,5x^2 - 2x + 4 = 0,5 \cdot (x - 2)^2 + 2$ mit $S_2(2|2)$

b) Schnittpunkt der Geraden S_1S_2 und PP' ist das Streckungszentrum $Z(-2|0)$.

c) Bestimmung der Geraden S_1S_2 und PP' mit den y-Achsenabschnitten $t_1 = 1$ und $t_2 = 4$ und den Steigungen $m_1 = \frac{2-1}{2-0} = 0,5$ und $m_2 = \frac{4-2}{0+1} = 2$:

$$S_1S_2: y = 0,5x + 1 \text{ und } PP': y = 2x + 4$$

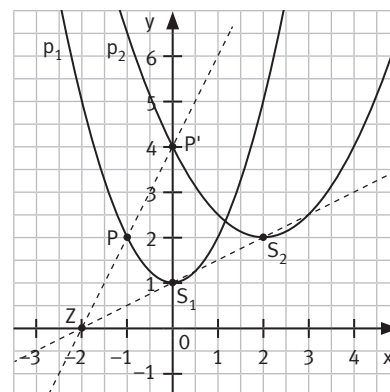
Bestimmung des Streckungszentrums Z als Schnittpunkt der Geraden S_1S_2 und PP' :

$$0,5x + 1 = 2x + 4 \Leftrightarrow x = -2 \text{ und } 0,5 \cdot (-2) + 1 = 0 \Rightarrow Z(-2|0)$$

Berechnung des Streckungsfaktors k mithilfe von $|ZS_1|$ und $|ZS_2|$:

$$k = \frac{|ZS_2|}{|ZS_1|} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$$

d) Geraden, die durch das Streckungszentrum verlaufen, sind Fixgeraden. Als Schnittpunkt von S_1S_2 und PP' liegt Z auf S_1S_2 und PP' , damit sind S_1S_2 und PP' Fixgeraden der zentrischen Streckung.



- K1** 11 Punktsymmetrie um den Koordinatenursprung entspricht einer Drehung um $O(0|0)$ mit $\alpha = 180^\circ$.

Die Drehmatrix hierbei ist $\begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \Leftrightarrow x = -x'$$

$$y' = -3 \cdot x'^{-3} = -3 \cdot (-x')^{-3} = 3 \cdot x'^{-3}$$

$$f = f': y = 3 \cdot x^{-3} \Rightarrow \text{Punktsymmetrie des Graphen von } f$$

- KX** 12 a) $f^{-1}: y = x^{-3}$ mit $D = \mathbb{R}^+$
 c) $f^{-1}: y = 0,5x^{-1}$ mit $D = \mathbb{R}$

b) $f^{-1}: y = 3^x$ mit $D = \mathbb{R}$

d) $f^{-1}: y = \left(\frac{1}{8}\right)^{-x-2} = 8^{x+2}$ mit $D = \mathbb{R}$

- K2** 13 a) $f: y = \log_{0,8}(2 - 0,4x)$ ist nur definiert für $2 - 0,4x > 0$, d. h. für $5 > x$.

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\} \quad W = \mathbb{R} \quad \text{Asymptote: } x = 5$$

b)	x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
f(x)		-3,1	-2,6	-2,1	-1,5	-0,8	0,0	1,0	2,3	4,1	7,2	-

c) $x = \log_{0,8}(2 - 0,4y)$

$$0,8^x = 2 - 0,4y$$

$$0,4y = 2 - 0,8^x$$

$$y = 5 - \frac{0,8^x}{0,4}$$

$$f^{-1}(x) = 5 - 2,5 \cdot 0,8^x$$

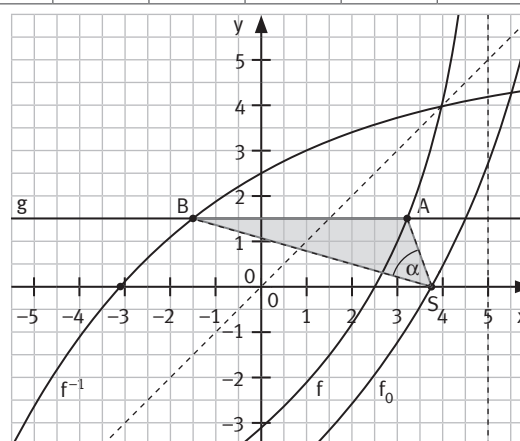
d) $f^{-1}(x) = 0$

$$5 - 2,5 \cdot 0,8^x = 0$$

$$2 = 0,8^x$$

$$x = \log_{0,8} 2$$

$$x = -3,1$$



e) Ermittlung der Koordinaten von A:

$$1,5 = \log_{0,8}(2 - 0,4x)$$

$$0,8^{1,5} = 2 - 0,4x$$

$$0,72 = 2 - 0,4x$$

$$x = 3,2$$

$$A(3,2|1,5)$$

Ermittlung der Koordinaten von B:

$$1,5 = 5 - 2,5 \cdot 0,8^x$$

$$1,4 = 0,8^x$$

$$\log_{0,8} 1,4 = x$$

$$x = -1,5$$

$$B(-1,5|1,5)$$

$$f) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1,5 \cdot \log_{0,8} \left(2 - \frac{4}{15}x \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x \\ \log_{0,8} \left(2 - \frac{4}{15}x \right) \end{pmatrix}$$

$$x' = \frac{2}{3}x, \text{ also } x = \frac{3}{2}x'$$

$$y' = \log_{0,8} \left(2 - \frac{4}{15}x \right) = \log_{0,8} \left(2 - \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{2}x' \right) = \log_{0,8} \left(2 - \frac{2}{5}x' \right)$$

Dieser Funktionsterm entspricht dem der Funktion f.

$$g) \text{ Schnittpunkt mit der x-Achse: } f_0(x) = 0$$

$$1,5 \cdot \log_{0,8} \left(2 - \frac{4}{15}x \right) = 0 \quad | : 1,5$$

$$\log_{0,8} \left(2 - \frac{4}{15}x \right) = 0 \quad | 0,8 \wedge$$

$$2 - \frac{4}{15}x = 1 \quad | + \frac{4}{15}x - 1$$

$$\frac{4}{15}x = 1 \quad | \cdot \frac{15}{4}$$

$$x = \frac{15}{4}, \text{ also } S(3,75 | 0)$$

$$h) \text{ Dreieck SAB mit } S(3,75 | 0), A(3,2 | 1,5) \text{ und } B(-1,5 | 1,5)$$

$$\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} -0,55 \\ 1,5 \end{pmatrix} \text{ mit } |\overrightarrow{SA}| \approx 1,60 \quad \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} -5,25 \\ 1,5 \end{pmatrix} \text{ mit } |\overrightarrow{SB}| \approx 5,46$$

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{SA} \odot \overrightarrow{SB}}{|\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{SB}|} = \frac{\begin{pmatrix} -0,55 \\ 1,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -5,25 \\ 1,5 \end{pmatrix}}{|\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{SB}|} = \frac{5,1375}{1,60 \cdot 5,46} \approx 0,588$$

$$\alpha \approx 54,0^\circ$$

KX

- 14 Das ist nicht möglich. Unabhängig vom Streckungsfaktor gilt: Aus einer Parabel entstehen bei zentrischer Streckung wieder Parabeln, die für Streckungsfaktoren k mit $|k| \neq 1$ gestaucht oder gestreckt sind. Für $k = 0$ entsteht zwar keine Parabel, allerdings auch keine Gerade, weil die Parabel so verkleinert wird, dass sie mit dem Ursprung zusammenfällt, also auf einen Punkt „geschrumpft“ wird.

KX

15 a) grüner Graph: $f: y = \log_{0,2}(8 - 2x) + 2$

roter Graph: $f': y = -\frac{1}{2} \cdot 0,2^{x-2} + 4$

b) $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x < 4\}$ $W_f = \mathbb{R}$

$D_{f'} = \mathbb{R}$ $W_{f'} = \{y \in \mathbb{R} | x < 4\}$

- c) Die beiden Graphen werden durch eine Achsenspiegelung an der Ursprungsgeraden mit der Gleichung $y = x$ aufeinander abgebildet.

Abbildungsgleichung:

$$P(x | \log_{0,2}(8 - 2x) + 2) \in f \xrightarrow{y=x} P'(x' | -\frac{1}{2} \cdot 0,2^{x'-2} + 4) \in f'$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ \log_{0,2}(8 - 2x) + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log_{0,2}(8 - 2x) + 2 \\ x \end{pmatrix}$$

d) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ \log_{0,2}(8 - 2x) + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log_{0,2}(8 - 2x) + 2 \\ x \end{pmatrix}$

$$x' = \log_{0,2}(8 - 2x) + 2 \quad | - 2$$

$$y' = x$$

$$x' - 2 = \log_{0,2}(8 - 2x) \quad | 0,2^\wedge$$

$$0,2^{x'-2} = 8 - 2x \quad | + 2x - 0,2^{x'-2}$$

$$2x = -0,2^{x'-2} + 8 \quad | : 2$$

$$x = -\frac{1}{2} \cdot 0,2^{x'-2} + 4$$

eingesetzt in $y' = x$:

$$y' = -\frac{1}{2} \cdot 0,2^{x'-2} + 4$$

$$f^{-1} = f': y = -\frac{1}{2} \cdot 0,2^{x-2} + 4$$

Entdecken

KX

- Der Punkt P wird durch eine Drehung um 90° im Uhrzeigersinn, also durch eine Drehung um 270° gegen den Uhrzeigersinn, auf P^* abgebildet. Das Drehzentrum ist der Ursprung O (0|0).

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 270^\circ & -\sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

KX

- Der Punkt P^* wird entweder durch eine Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder durch eine zentrische Streckung mit $k = 2$ und Streckungszentrum O (0|0) auf den Punkt P' abgebildet.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$$

KX

- Im Falle der zentrischen Streckung von P^* nach P' lässt sich die gesamte Abbildung durch eine einzige Matrix beschreiben:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nachgefragt

K6

- Die Parallelverschiebung wird mithilfe der Addition der Vektorkoordinaten durchgeführt. Da die Addition kommutativ ist, kann bei gleichem Ergebnis die Reihenfolge von zwei Parallelverschiebungen vertauscht werden.

Parallelverschiebung mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + v_x + w_x \\ y + v_y + w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + w_x + v_x \\ y + w_y + v_y \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

KX

- Das ist richtig. Jede beliebige Parabel kann in der Form $y = a \cdot (x - b)^2 + c$ geschrieben werden. Führt man als erstes eine Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}$ durch, dann wird die bisherige Parabel so verschoben, dass ihr Scheitel im Ursprung liegt: $y^* = a \cdot x^2$. Diese Parabel kann durch eine zentrische Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{a}$ auf die Normalparabel abgebildet werden.

Aufgaben

K5

- $$P': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2,83 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,66 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P' (-5,66|0)$$
 - $$P': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

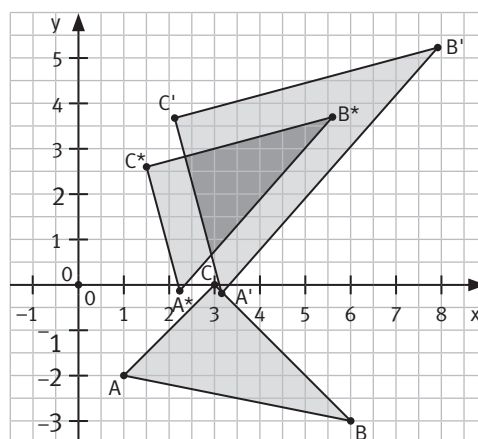
$$= \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \quad P' (-4,5|1,5)$$

K4

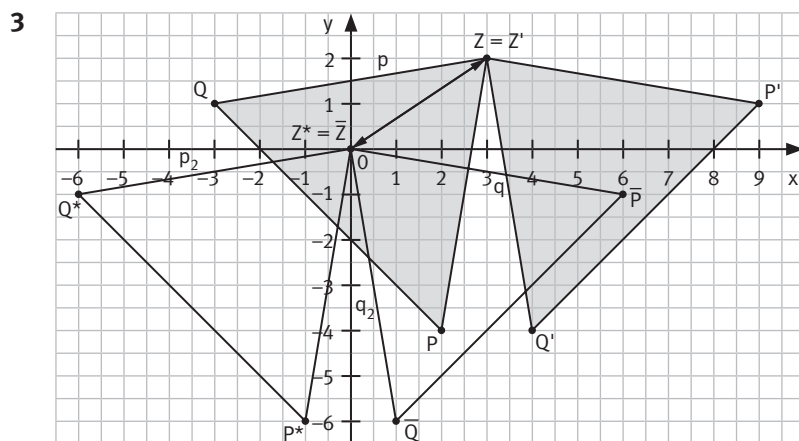
2 $A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0,5 & -0,87 \\ 0,87 & 0,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2,24 \\ -0,13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,17 \\ -0,18 \end{pmatrix} \quad A' (3,17 | -0,18)$

$B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0,5 & -0,87 \\ 0,87 & 0,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5,61 \\ 3,72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,93 \\ 5,26 \end{pmatrix} \quad B' (7,93 | 5,26)$

$C': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0,5 & -0,87 \\ 0,87 & 0,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,12 \\ 3,69 \end{pmatrix} \quad C' (2,12 | 3,69)$



K4

a) Verschiebung von $Z(3|2)$ auf $Z^*(0|0)$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Parallelverschiebung von P und Q mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf P^* und Q^* :

$$P^*: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$P^* (-1 | -6)$$

$$Q^*: \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Q^* (-6 | -1)$$

c) Drehung von $P^*(-1|-6)$ und $Q^*(-6|-1)$ um $Z^*(0|0)$ mit $\alpha = 90^\circ$ auf $\bar{P}$ und $\bar{Q}$:

$$\bar{P}: \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{P} (6 | -1)$$

$$\bar{Q}: \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\bar{Q} (1 | -6)$$

d) Verschiebung von $Z^*(0|0) = \bar{Z}(0|0)$ auf $Z(3|2) = Z'(3|2)$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Parallelverschiebung von $\bar{P}(6|-1)$ und $\bar{Q}(1|-6)$ mit $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf P' und Q' :

$$P': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P' (9 | 1)$$

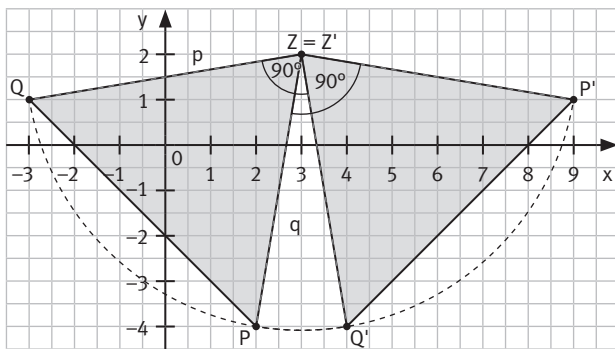
$$Q': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$Q' (4 | -4)$$

e) Die Abbildung von Z, P und Q auf Z', P' und Q' entspricht der Drehung um $Z(3|2)$ mit $\alpha = 90^\circ$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+2 \\ x-3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+5 \\ x-1 \end{pmatrix}$$



Allgemein:

$$\text{Abbildung von } A(x_A | y_A) \text{ auf } A'(x' | y') = A'(-y_A + 5 | x_A - 1)$$

$$\text{Abbildung von } Z(3 | 2) \text{ auf } Z'(-2 + 5 | 3 - 1) = Z'(3 | 2)$$

$$\text{Abbildung von } P(2 | -4) \text{ auf } P'(4 + 5 | 2 - 1) = P'(9 | 1)$$

$$\text{Abbildung von } Q(-3 | 1) \text{ auf } Q'(-1 + 5 | -3 - 1) = Q'(4 | -4)$$

- K1** 4 Carla hat Recht. Da sowohl um Z gestreckt als auch gedreht wird, macht es keinen Unterschied, welche Operation zuerst ausgeführt wird.

Streckung von $P(x|y)$ um $Z(0|0)$ mit Streckungsfaktor k und Drehung um $Z(0|0)$ mit α :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k \cdot (x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha) \\ k \cdot (x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\ x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- K5** 5 Quadrat mit der Seitenlänge $a = |\overline{AB}| = 5$ LE und den Eckpunkten $A(-3|-4)$, $B(2|-4)$, $C(2|1)$, $D(-3|1)$.

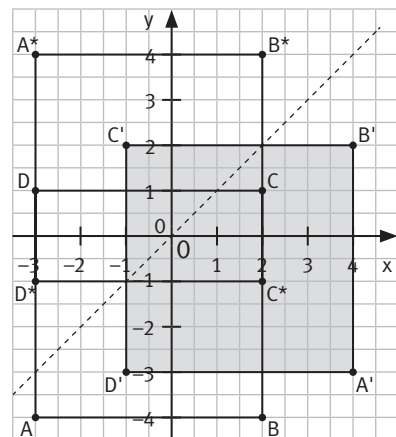
Allgemein gilt für den Punkt $P(x|y)$ und den Bildpunkt $P'(x'|y')$:

$$\begin{aligned} P': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$P'(-y|x)$$

$$A'(4|-3); B'(4|2); C'(-1|2); D'(-1|-3)$$

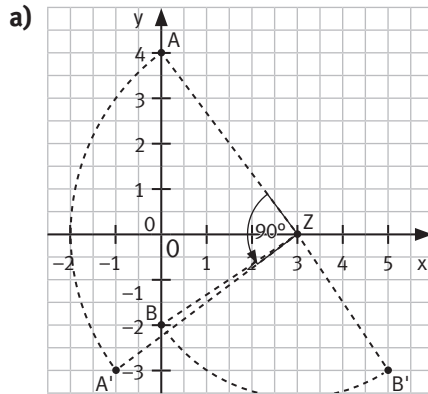
Da die beiden Abbildungen der Verknüpfung winkel- und längentreu sind, ist auch die neue Figur ein Quadrat mit der Seitenlänge $a' = 5$ LE.



K5

- 6 Allgemein gilt für einen Punkt $P(x|y)$ und den Bildpunkt $P'(x'|y')$ bei der Drehung um $Z(x_Z|y_Z)$ mit dem Drehwinkel α :

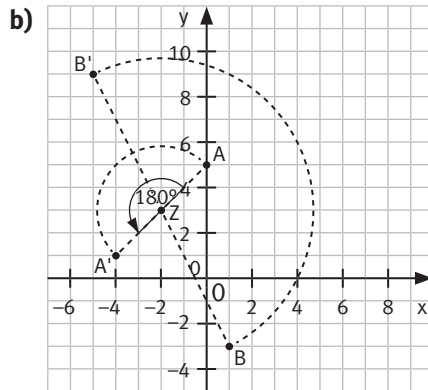
$$P': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -x_Z \\ -y_Z \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} x_Z \\ y_Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \odot \begin{pmatrix} x - x_Z \\ y - y_Z \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_Z \\ y_Z \end{pmatrix}$$



Drehung um $Z(3|0)$ mit dem Drehwinkel $\alpha = 90^\circ$:

$$A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0-3 \\ 4-0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad A'(-1|-3)$$

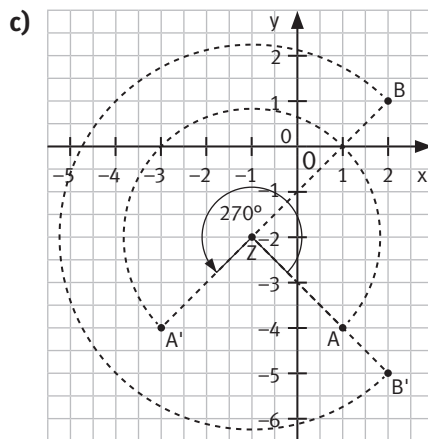
$$B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0-3 \\ -2-0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad B'(5|-3)$$



Drehung um $Z(-2|3)$ mit dem Drehwinkel $\alpha = 180^\circ$:

$$A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0+2 \\ 5-3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A'(-4|1)$$

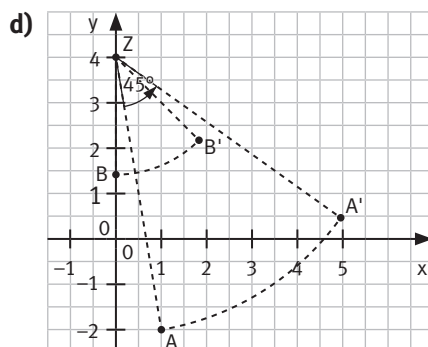
$$B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0+2 \\ -3-3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad B'(-5|9)$$



Drehung um $Z(-1|-2)$ mit dem Drehwinkel $\alpha = 270^\circ$:

$$A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad A'(-3|-4)$$

$$B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1+2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad B'(2|-5)$$



Drehung um $Z(0|4)$ mit dem Drehwinkel $\alpha = 45^\circ$:

$$A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0,71 & -0,71 \\ 0,71 & 0,71 \end{bmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1-0 \\ -2-4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0,71 & -0,71 \\ 0,71 & 0,71 \end{bmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,71 + 6 \cdot 0,71 \\ 0,71 - 6 \cdot 0,71 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,97 \\ -3,55 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,97 \\ 0,45 \end{pmatrix} \quad A'(4,97|0,45)$$

$$B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0,71 & -0,71 \\ 0,71 & 0,71 \end{bmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0,71 & -0,71 \\ 0,71 & 0,71 \end{bmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2,59 \cdot 0,71 \\ -2,59 \cdot 0,71 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,84 \\ -1,84 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,84 \\ 2,16 \end{pmatrix} \quad B'(1,84|2,16)$$

- K5** 7 a) Die Parallelverschiebung von $P(x|y)$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ und die Drehung um $O(0|0)$ mit $\alpha = 90^\circ$ sind miteinander verknüpft.

$$P': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x-5 \\ y-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+3 \\ x-5 \end{pmatrix}$$

$$P'(-y+3|x-5)$$

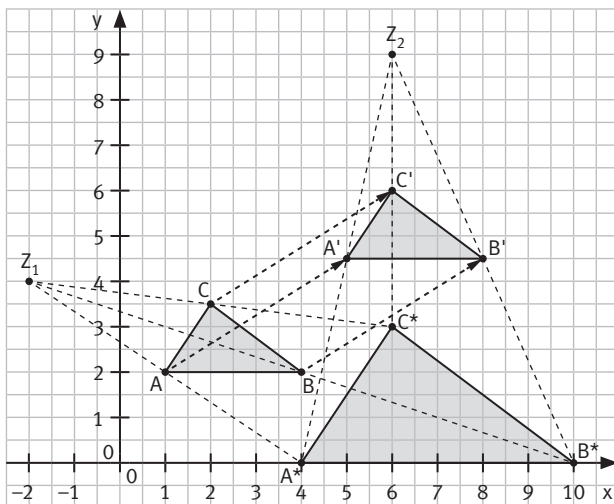
b) $P(1|4)$ $P': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+3 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ $P'(-1|-4)$

- K4** 8 a) $P^*(x^*|y^*)$ entsteht durch Parallelverschiebung von $P(x|y)$ mit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, zentrischer Streckung um $O(0|0)$ mit $k_1 = 2$ und (Rück-)Parallelverschiebung mit $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$P^*: \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2 \\ 2y-4 \end{pmatrix}$$

$P'(x'|y')$ entsteht durch Parallelverschiebung von $P^*(x^*|y^*)$ mit $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \end{pmatrix}$, zentrischer Streckung um $O(0|0)$ mit $k_2 = 0,5$ und (Rück-)Parallelverschiebung mit $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

$$P': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \cdot x^* + 3 \\ 0,5 \cdot y^* + 4,5 \end{pmatrix}$$



$$P^*(2x+2|2y-4)$$

$$A^*(4|-2)$$

$$B^*(2|-2)$$

$$C^*(2|1)$$

$$P'(0,5 \cdot x^* + 3 | 0,5 \cdot y^* + 4,5)$$

$$A'(8|-2)$$

$$B'(4|-2)$$

$$C'(4|2)$$

b) $P': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \cdot x^* + 3 \\ 0,5 \cdot y^* + 4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \cdot (2x+2) + 3 \\ 0,5 \cdot (2y-4) + 4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 \\ y+2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 2,5 \end{pmatrix}$
 $P'(x|y)$ entsteht durch Parallelverschiebung von $P(x|y)$ mit $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2,5 \end{pmatrix}$.

- K1** 9 a) Es handelt sich um zwei Parallelverschiebungen mit den Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Die Verknüpfung zweier Parallelverschiebungen ist kommutativ, die Reihenfolge der Abbildungen ist vertauschbar.

$$\text{Es gilt: } v_1 \oplus v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = v_2 \oplus v_1$$

- b) Es handelt sich um eine Spiegelung an der Geraden $y = x$ mit anschließender Spiegelung an der x -Achse. Die Reihenfolge der Abbildungen ist nicht vertauschbar, da das Ergebnis abhängig von der Reihenfolge ist.

Gegenbeispiel mit $P(2|0)$:

$$P^*: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$P^*: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- c) Es handelt sich um eine Spiegelung an der Geraden $y = x$ mit anschließender Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Die Reihenfolge ist nicht vertauschbar, da das Ergebnis abhängig von der Reihenfolge ist.

Gegenbeispiel mit $P(2|0)$:

$$P^*: \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$P^*: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- d) Es handelt sich um eine Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit anschließender Spiegelung an der x-Achse. Die Reihenfolge ist nicht vertauschbar, da das Ergebnis abhängig von der Reihenfolge ist.

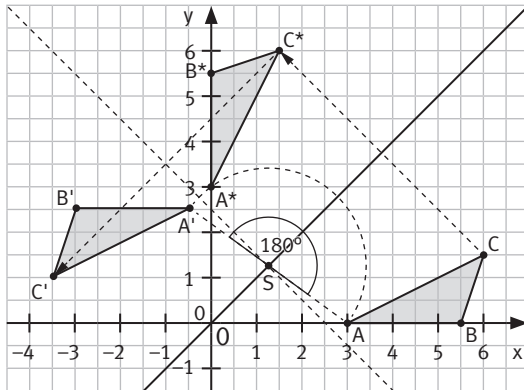
Gegenbeispiel mit $P(2|0)$:

$$P^{*'}: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$P^{*\star}: \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

K6

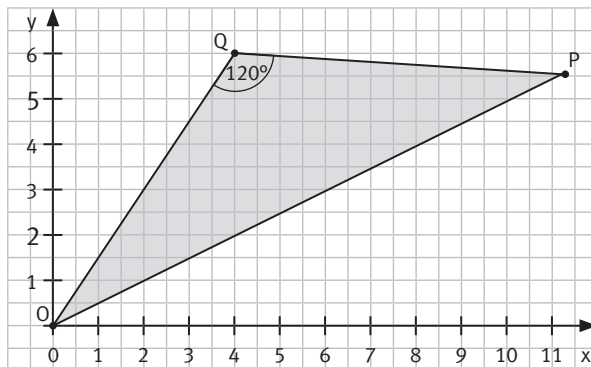
10 Beispiel:



Theo hat Recht. Bei dieser Verknüpfung handelt es sich um eine Drehung um den Schnittpunkt der Geraden um 180° .

K5

11 a)



- b) Zuerst werden $Q(4|6)$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ auf $Q^*(0|0)$ und $O(0|0)$ auf $O^*(-4|-6)$ verschoben. Dann wird $O^*(-4|-6)$ um $Q^*(0|0)$ mit $\alpha = 120^\circ$ auf P^* gedreht. Zum Schluss werden O^* , P^* und Q^* mit $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ auf $O(0|0)$, $P(x'|y')$ und $Q(4|6)$ (zurück-) verschoben.

$$\begin{aligned} P: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \right] \right] \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} -0,5 & -0,87 \\ 0,87 & -0,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 7,22 \\ -0,48 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 11,22 \\ 5,52 \end{pmatrix} \quad P(11,2|5,5) \end{aligned}$$

K4

- 12 a) Die erste Abbildung ist eine Spiegelung an der Geraden $y = -x$, die zweite Abbildung ist eine Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$P': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-2 \\ -x+3 \end{pmatrix}$$

- b) $A(3|-5)$; $B(-4|-2)$

$$A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ -3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- c) Die erste Abbildung ist eine Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, die zweite Abbildung ist eine Spiegelung an der Geraden $y = -x$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x' + 2 \\ y' - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y' + 3 \\ -x' - 2 \end{pmatrix} \quad P(-y' + 3 | -x' - 2)$$

$$A: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad A(3 | -5)$$

$$B: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad B(-4 | -2)$$

- K4 13 $P(5 | -2,5) = P'(5 | -2,5)$ ist ein Fixpunkt.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 \\ -2,5 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 10,5 \\ -3,5 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -5,5 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 10,5 \\ -3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

$P(5 | -2,5)$ wird zunächst an der Ursprungsgeraden

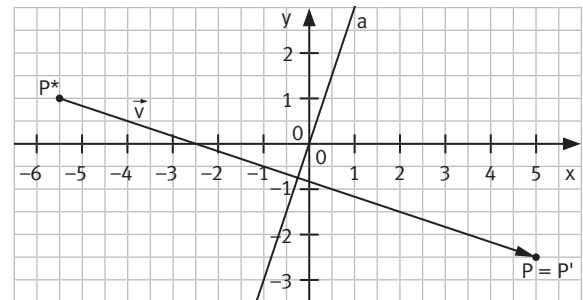
a: $y = mx$ auf $P^*(-5,5 | 1)$ gespiegelt:

$$\cos 2\alpha = -0,8 \Rightarrow 2\alpha \approx 143,3^\circ \Rightarrow \alpha \approx 71,565^\circ$$

$$m = \tan 71,565^\circ = 3 \Rightarrow a: y = 3x$$

Anschließend wird $P^*(-5,5 | 1)$ mit dem Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 10,5 \\ -3,5 \end{pmatrix} \text{ parallelverschoben auf } P(5 | -2,5).$$



- K6 14 a) Es handelt sich um eine Drehung um 90° um $Z(0 | 0)$ mit anschließender Parallelverschiebung um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$. P, Q und R sind keine Fixpunkte dieser Abbildung.

$$P': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(1 | -7) \neq P(-2 | 3)$$

$$Q': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Q'(6 | -2) \neq Q(3 | -2)$$

$$R': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow R'(1 | -7) \neq R(-2 | -2)$$

- b) Es handelt sich um eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden a: $y = mx$:

$$\sin 2\alpha = -0,8 \Rightarrow 2\alpha \approx -53^\circ \text{ bzw. } 2\alpha = 360^\circ - 53^\circ = 307^\circ \Rightarrow \alpha \approx 153,5^\circ$$

$$m = \tan 153,5^\circ = -0,5 \Rightarrow a: y = -0,5x$$

P und Q sind Fixpunkte dieser Abbildung, R ist kein Fixpunkt dieser Abbildung.

$$P': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,8 \\ -0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(-2 | 1) = P(-2 | 1)$$

$$Q': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,8 \\ -0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ -1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1,5 \end{pmatrix} \Rightarrow Q'(3 | -1,5) = Q(3 | -1,5)$$

$$R': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,8 \\ -0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow R'(-2 | 11) \neq R(-10 | -5)$$

- K5 15 a) Es handelt sich um eine Drehung um $O(0 | 0)$ mit $\alpha = 180^\circ$ und die Parallelverschiebung mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$$g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 6 \\ -y - 4 \end{pmatrix}$$

$$x' = -x + 6 \Leftrightarrow x = -x' + 6$$

$$y' = -y - 4 \Leftrightarrow y = -(-x' + 6) - 4 = x' - 10 \quad \text{Fixgerade } g = g': y = x - 10$$

$$h': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 6 \\ -y - 4 \end{pmatrix}$$

$$x' = -x + 6 \Leftrightarrow x = -x' + 6$$

$$y' = -y - 4 \Leftrightarrow y = -(-x' + 6) - 4 = x' - 10 \quad \text{Fixgerade } h = h': y = x - 10$$

Die Geraden g und h sind Fixgeraden der Abbildung.

- b) Es handelt sich um die Spiegelung an einer Ursprungsgeraden $a: y = mx$.

$$\sin 2\alpha = -0,8 \Rightarrow 2\alpha \approx -53^\circ \text{ bzw. } 2\alpha = 360^\circ - 53^\circ = 307^\circ \Rightarrow \alpha \approx 153,5^\circ$$

$$m = \tan 153,5^\circ \approx -0,5$$

$$\Rightarrow a: y = -0,5x$$

$$g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,8 \\ -0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 2x-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+4 \\ -2x+3 \end{pmatrix}$$

$$x' = -x+4 \Leftrightarrow x = -x' + 4$$

$$y' = -2(-x' + 4) + 3 = 2x' - 8 + 3 = 2x' - 5$$

$$g = g': y = 2x - 5$$

$$h': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,8 \\ -0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2x \\ -1,1x \end{pmatrix}$$

$$x' = 0,2x \Leftrightarrow x = 5x'$$

$$y' = -1,1x = -1,1 \cdot 5x' = -5,5x'$$

$$h \neq h': y = -5,5x$$

Die Gerade g ist eine Fixgerade der Abbildung, die Gerade h ist keine Fixgerade.

K6

- 16 a) Simons Ansatz ist korrekt: Wenn Fixpunkte existieren, dann muss für diese gelten, dass die Urbildkoordinaten x und y gleich den Bildkoordinaten x' und y' sind. Für einen Fixpunkt $F(x|y)$ muss also gelten: I: $x = x'$ und II: $y = y'$. Dies kann zur Bestimmung möglicher Fixpunkte ausgenutzt werden.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+4y \\ 5x-3y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+4y-2 \\ 5x-3y+20 \end{pmatrix}$$

$$\text{I: } x = x' \text{ und } x' = 3x + 4y - 2$$

$$\text{II: } y = y' \text{ und } y' = 5x - 3y + 20$$

$$\text{I: } x = 3x + 4y - 2 \Leftrightarrow 2x = -4y + 2 \Leftrightarrow x = -2y + 1$$

$$\text{II: } y = 5x - 3y + 20 \xrightarrow{\text{I in II}} y = 5 \cdot (-2y + 1) - 3y + 20$$

$$14y = 25 \Leftrightarrow y \approx 1,8$$

$$\text{II in I: } x = -2 \cdot 1,8 + 1 = -2,6$$

$$\text{Fixpunkt } F(-2,6 | 1,8)$$

b) 1 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8x-0,6y \\ 0,6x+0,8y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8x-0,6y+5 \\ 0,6x+0,8y+5 \end{pmatrix}$

$$\text{I: } x = x' \text{ und } x' = 0,8x - 0,6y + 5$$

$$\text{II: } y = y' \text{ und } y' = 0,6x + 0,8y + 5$$

$$\text{I: } x = 0,8x - 0,6y + 5 \Leftrightarrow 0,2x = -0,6y + 5 \Leftrightarrow x = -3y + 25$$

$$\text{II: } y = 0,6x + 0,8y + 5 \xrightarrow{\text{I in II}} y = 0,6 \cdot (-3y + 25) + 0,8y + 5$$

$$y = -1,8y + 15 + 0,8y + 5 \Leftrightarrow 2y = 20 \Leftrightarrow y = 10$$

$$\text{II in I: } x = -3 \cdot 10 + 25 = -5$$

$$\text{Fixpunkt } F(-5 | 10)$$

2 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y \\ \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y \end{pmatrix}$

$$\text{I: } x = x' \text{ und } x' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y$$

$$\text{II: } y = y' \text{ und } y' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y$$

$$\text{I: } x = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y \Leftrightarrow \frac{25}{13}x = \frac{5}{13}y \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}y$$

$$\text{II: } y = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y \xrightarrow{\text{I in II}} y = \frac{5}{13} \cdot \frac{1}{5}y + \frac{12}{13}y \Leftrightarrow y = y$$

$$\text{II in I: } x = \frac{1}{5}y$$

$$\text{Fixpunkt } F(\frac{1}{5}y | y)$$

Fixpunkte sind die Punkte auf der Geraden $g: y = 5x$.

3 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-2 \\ x+3 \end{pmatrix}$

$$\text{I: } x = x' \text{ und } x' = y - 2$$

$$\text{II: } y = y' \text{ und } y' = x + 3$$

$$\text{I: } x = y - 2$$

$$\text{II: } y = x + 3 \xrightarrow{\text{I in II}} y = y - 2 + 3 = y + 1$$

$$y \neq y + 1$$

Die Gleichungen sind nicht lösbar. Es gibt deshalb keine Fixpunkte.

$$4 \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2-2 \\ y+4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+7 \end{pmatrix}$$

$$I: x = x'$$

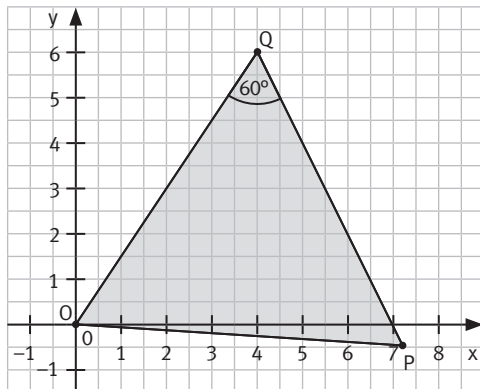
$$II: y = y' \text{ und } y' = y + 7$$

$$II: y \neq y + 7$$

Die Gleichungen sind nicht lösbar. Es gibt deshalb (wie bei einer reinen Parallelverschiebung zu erwarten ist) keine Fixpunkte.

K6

- 17** Es sind individuelle Antworten möglich, z. B. eine Abwandlung der vorausgehenden Aufgabe: Die Punkte Q (4|6) und O (0|0) sind Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks OPQ. Ermittle die Koordinaten von P.



$$P: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0,5 & -0,87 \\ 0,87 & 0,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,22 \\ -6,48 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,22 \\ -0,48 \end{pmatrix} \quad P(7,2|-0,5)$$

Entdecken

KX

- Die Punkte B_n werden durch eine Drehung um 60° gegen den Uhrzeigersinn auf die Punkte C_n abgebildet, da es sich bei allen Dreiecken um gleichseitige Dreiecke handelt, die immer Innenwinkel von 60° besitzen.

KX

- Da die Punkte B_n alle auf einer Geraden liegen und alle durch die gleiche Abbildung auf die Punkte C_n abgebildet werden, liegen auch die Punkte C_n alle wieder auf einer Geraden.

KX

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + 0,5y \end{pmatrix}$$

$$x' = 0,5x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \Rightarrow x = 2x' + \sqrt{3}y$$

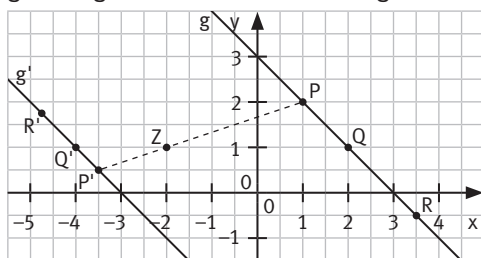
$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 0,5y = \frac{\sqrt{3}}{2}(2x' + \sqrt{3}y) + 0,5y = \sqrt{3}x' + 1,5y$$

$$\Rightarrow g': y = \sqrt{3}x + 6$$

Nachgefragt

K6

- Die Aussage ist richtig, weil man durch den auf P' gestreckten Punkt P auf der Geraden g die Bildgerade g' als Parallele zur Urbildgeraden zeichnen kann.



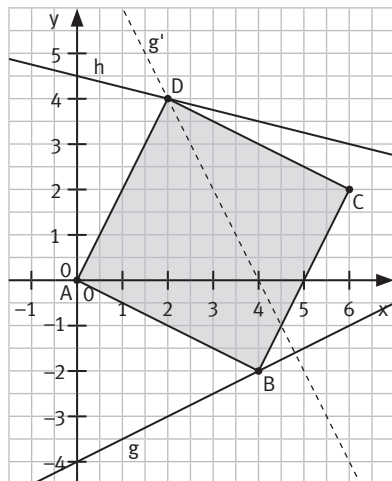
K1

- Die Punkte P_n bilden bezüglich der Geraden g einen geometrischen Ort. Demnach bilden die Punkte P'_n nach der zentrischen Streckung wieder einen geometrischen Ort auf einer neuen Geraden.

Aufgaben

K4

1



Mögliches Vorgehen bei der Konstruktion:

Die Gerade g wird um A mit $\alpha = 90^\circ$ auf die Bildgerade g' gedreht.Der Schnittpunkt der Geraden g' und h ist der Eckpunkt D .Der Punkt D wird um A mit $\alpha = 270^\circ$ gedreht, dies ergibt B .Der Punkt A wird um B mit $\alpha = 270^\circ$ gedreht, dies ergibt C .

Berechnung der Geraden g' :

$$g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 0,5x - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5x + 4 \\ x \end{pmatrix}$$

$$x' = -0,5x + 4 \Leftrightarrow x = -2x' + 8$$

$$y' = x = -2x' + 8$$

$$g': y = -2x + 8$$

Berechnung von D als Schnittpunkt von g' und h . Setze $g' = h$:

$$-2x + 8 = -0,25x + 4,5 \Leftrightarrow 3,5 = 1,75x \Leftrightarrow x = 2 \quad g'(2) = 4 \quad D(2|4)$$

Berechnung von B als Drehung von D um A mit $\alpha = 270^\circ$

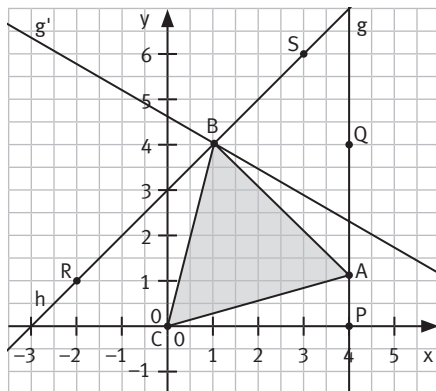
$$B: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad B(4|-2)$$

Berechnung von C als Drehung von A um B mit $\alpha = 270^\circ$

$$C: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad C(6|2)$$

- K1** 2 Die Aussage ist richtig. Werden die Geraden durch eine zentrische Streckung abgebildet, dann wird jeder Punkt der Geraden abgebildet, insbesondere auch der Schnittpunkt S von g und h auf S' . S' ist Element beider Bildgeraden g' und h' , also Schnittpunkt von g' und h' .

K5 3



Zur Ermittlung von B wird die Gerade $g: x = 4$ mit 60° um C auf g' gedreht und g' und h werden miteinander geschnitten.

$$g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}y \\ 2\sqrt{3} + 0,5y \end{pmatrix}$$

$$x' = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}y \Leftrightarrow \sqrt{3}y = -2x' + 4 \Leftrightarrow y = -1,15x' + 2,3$$

$$y' = 2\sqrt{3} + 0,5 \cdot (-1,15x' + 2,3) = -0,58x' + 4,6$$

$$g': y = -0,58x + 4,6$$

Ermittlung der Geradengleichung für $h: y = m_h \cdot x + t_h$:

$$m_h = \frac{3 - (-2)}{6 - 1} = 1 \text{ und } S(3|6) \in h \Rightarrow 6 = 1 \cdot 3 + t_h \Rightarrow t_h = 3$$

$$h: y = x + 3$$

Setze $g' = h$:

$$-0,58x + 4,6 = x + 3 \Leftrightarrow 1,6 = 1,58x \Leftrightarrow x \approx 1; y = 4$$

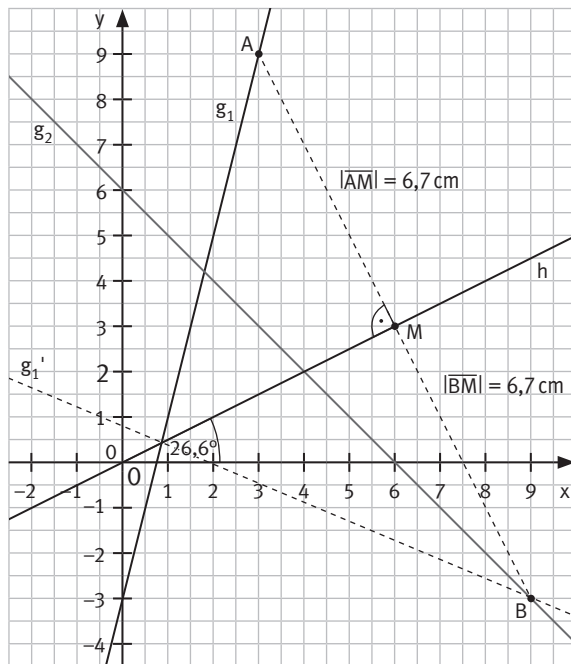
$$B(1|4)$$

Zur Ermittlung von A wird B um C mit 300° gedreht.

$$A: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 300^\circ & -\sin 300^\circ \\ \sin 300^\circ & \cos 300^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4,0 \\ 1,1 \end{pmatrix} \quad A(4|1,1)$$

K5

4



B ist der Bildpunkt von A bei einer Achsenspiegelung an der Ursprungsgeraden $h: y = 0,5x$.
Mit $m_h = 0,5$ ergibt sich für $\alpha: \alpha = \tan^{-1} 0,5 \approx 26,6^\circ$; $2\alpha \approx 53,2^\circ$.

$$g_1': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 53,2^\circ & \sin 53,2^\circ \\ \sin 53,2^\circ & -\cos 53,2^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 4x-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 4x-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,8x-2,4 \\ -1,6x+1,8 \end{pmatrix}$$

$$x' = 3,8x - 2,4 \Leftrightarrow x = 0,26x' + 0,63$$

$$y' = -1,6 \cdot (0,26x' + 0,63) + 1,8 \approx -0,42x' + 0,8$$

$$g_1': y = -0,42x + 0,8$$

Setze $g_1' = g_2$ zur Ermittlung von B als Schnittpunkt von g_1' und g_2 :

$$-0,42x + 0,8 = -x + 6 \Leftrightarrow 0,58x = 5,2 \Leftrightarrow x \approx 9,0; y \approx -3,0$$

$$B(9|-3)$$

Ermittlung von A als Spiegelung von B an h :

$$A: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

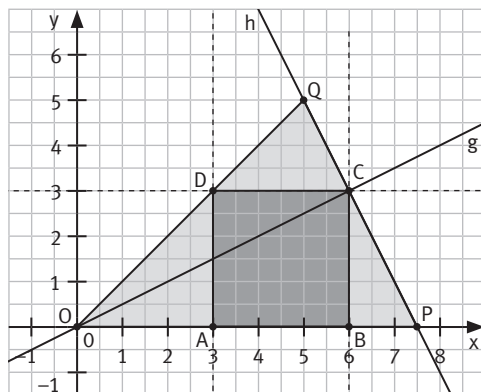
$$A(3|9)$$

K6

- 5 Die Aussage ist richtig. Zuerst wird A mittels Drehung mit 90° um M auf B abgebildet. Die Punkte C und D erhält man als Drehung von B bzw. C mit 90° um M.

K4

6



Bestimmung des Trägergraphen g der Punkte C:

$$D \in \overline{OQ}, \text{ also } y_D = x_D \Rightarrow D(x|x)$$

$$\text{Zu } D(x_D|x_D) \text{ hat C die Koordinaten } 2 \cdot x_D \text{ und } x_D \Rightarrow C(2x|x)$$

Aus $x_C = 2x$ und $y_C = x$ folgt:

$$y_C = 0,5x_C \Rightarrow g: y = 0,5x$$

$$C \in \overline{PQ} \text{ und } \overline{PQ} = h: y = m_h x + t_h$$

$$m_h = \frac{5-0}{5-7,5} = -2 \text{ und } P(7,5|0) \in h$$

$$0 = -2 \cdot 7,5 + t_h \Rightarrow t_h = 15 \Rightarrow h: y = -2x + 15$$

Setze $g = h$:

$$0,5x = -2x + 15 \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow C(6|3)$$

$$\Rightarrow D(3|3), B(6|0), A(3|0)$$

K4

 7 a) Jeder Punkt $B_n(x|y)$ wird mit $\alpha = 60^\circ$ um A auf den Bildpunkt $C_n(x'|y')$ gedreht.

$$C_n: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,87 \\ 0,87 & 0,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5x - 0,87y \\ 0,87x + 0,5y \end{pmatrix} \quad C_n(0,5x - 0,87y | 0,87x + 0,5y)$$

$$1 \quad B_1(-4|-1) \text{ und } C_1(0,5 \cdot (-4) - 0,87 \cdot (-1) | 0,87 \cdot (-4) + 0,5 \cdot (-1)) = C_1(-1,13|-3,98)$$

$$B_2(0|-1) \text{ und } C_2(0,5 \cdot 0 - 0,87 \cdot (-1) | 0,87 \cdot 0 + 0,5 \cdot (-1)) = C_2(0,87|-0,5)$$

$$B_3(3|-1) \text{ und } C_3(0,5 \cdot 3 - 0,87 \cdot (-1) | 0,87 \cdot 3 + 0,5 \cdot (-1)) = C_3(2,37|2,11)$$

 Die Punkte B_n liegen auf $g: y = -1$.

 Die Punkte C_n liegen auf der um A mit $\alpha = 60^\circ$ gedrehten Geraden g' .

$$g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5x - 0,87y \\ 0,87x + 0,5y \end{pmatrix}$$

$$x' = 0,5x - 0,87y \Leftrightarrow x = 2x' + 1,74y \text{ und } y = -1$$

$$y' = 0,87 \cdot (2x' + 1,74y) + 0,5y = 1,74x' + 2 \cdot (-1) = 1,74x' - 2$$

 Trägergraph g' für C_n :

$$g': y = 1,74x - 2$$

$$2 \quad B_1(2|-2) \text{ und } C_1(0,5 \cdot 2 - 0,87 \cdot (-2) | 0,87 \cdot 2 + 0,5 \cdot (-2)) = C_1(2,74|0,74)$$

$$B_2(2|1) \text{ und } C_2(0,5 \cdot 2 - 0,87 \cdot 1 | 0,87 \cdot 2 + 0,5 \cdot 1) = C_2(0,13|2,24)$$

$$B_3(2|4) \text{ und } C_3(0,5 \cdot 2 - 0,87 \cdot 4 | 0,87 \cdot 2 + 0,5 \cdot 4) = C_3(-2,48|3,74)$$

 Die Punkte B_n liegen auf $g: x = 2$.

 Die Punkte C_n liegen auf der um A mit $\alpha = 60^\circ$ gedrehten Geraden g' .

$$g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5x - 0,87y \\ 0,87x + 0,5y \end{pmatrix}$$

$$x' = 0,5x - 0,87y \text{ und } x = 2 \Rightarrow x' = 1 - 0,87y \Leftrightarrow y = -1,15x' + 1,15$$

$$y' = 0,87 \cdot x + 0,5y = 1,74 + 0,5 \cdot (-1,15x' + 1,15) = -0,58x' + 2,32$$

 Trägergraph g' für die Punkte C_n :

$$g': y = -0,58x + 2,32$$

$$3 \quad B_1(-3|-0,5) \text{ und } C_1(0,5 \cdot (-3) - 0,87 \cdot (-0,5) | 0,87 \cdot (-3) + 0,5 \cdot (-0,5)) = C_1(-1,07|-2,86)$$

$$B_2(0|1) \text{ und } C_2(0,5 \cdot 0 - 0,87 \cdot 1 | 0,87 \cdot 0 + 0,5 \cdot 1) = C_2(-0,87|0,5)$$

$$B_3(3|2,5) \text{ und } C_3(0,5 \cdot 3 - 0,87 \cdot 2,5 | 0,87 \cdot 3 + 0,5 \cdot 2,5) = C_3(-0,68|3,86)$$

 Die Punkte B_n liegen auf $g: y = 0,5x + 1$.

 Die Punkte C_n liegen auf der um A mit $\alpha = 60^\circ$ gedrehten Geraden g' .

$$g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5x - 0,87y \\ 0,87x + 0,5y \end{pmatrix}$$

$$x' = 0,5x - 0,87y \text{ und } y = 0,5x + 1 \Rightarrow$$

$$x' = 0,5x - 0,87 \cdot (0,5x + 1) \Leftrightarrow x' = 0,065x - 0,87 \Leftrightarrow x = 15,4x' + 13,4$$

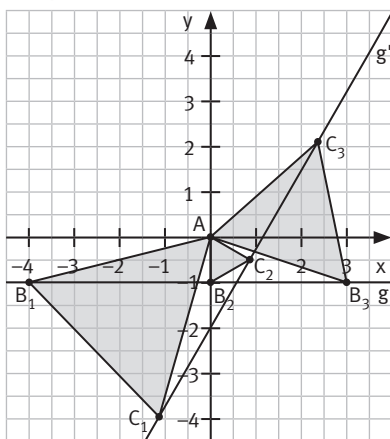
$$y' = 0,87 \cdot x + 0,5 \cdot (0,5x + 1) = 1,1x + 0,5$$

$$= 1,1 \cdot (15,4x' + 13,4) + 0,5 = 16,94x' + 15,24$$

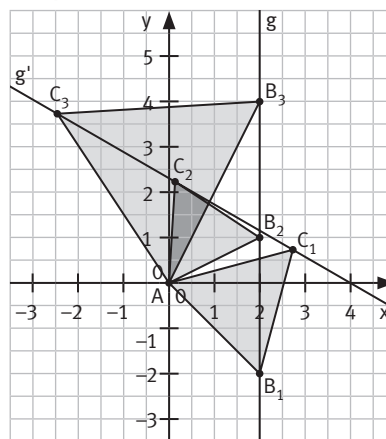
 Trägergraph g' für die Punkte C_n :

$$g': y = 17x + 15$$

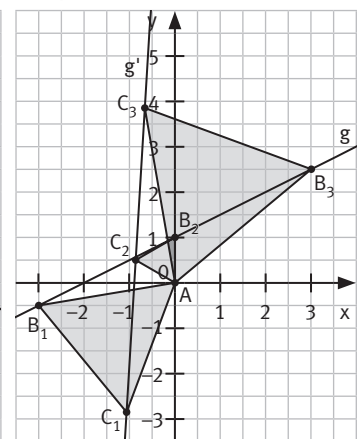
zu 1



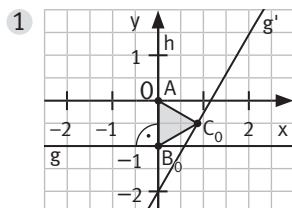
zu 2



zu 3

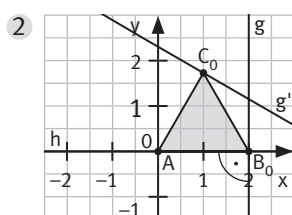


- b) Es wird jeweils der kürzest mögliche Abstand von der Geraden g zum Punkt A berechnet und die zu g senkrechte Gerade mit B_0 als Lotfußpunkt zu A ermittelt. Aufgrund der Eigenschaft des Trägergraphen ist der von B_0 auf C_0 gedrehte Punkt auf der Geraden h' auch der Punkt mit dem kürzesten Abstand zu A . Damit ist der Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks AB_0C_0 minimal im Vergleich zum Flächeninhalt aller anderen gleichseitigen Dreiecke AB_nC_n .



Die Senkrechte h zur Geraden $g: y = -1$, welche zugleich A schneidet, hat die Form $h: x = 0$. Der Schnittpunkt von g und h ist $B_0(0|-1)$. Damit hat das Dreieck AB_0C_0 dieselben Eckpunkte wie das Dreieck AB_2C_2 :

$$A(0|0), B_0(0|-1), C_0(0,87|-0,5)$$

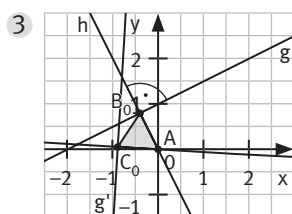


Die Senkrechte h zur Geraden $g: x = 2$, welche zugleich A schneidet, hat die Form $h: y = 0$. Der Schnittpunkt von g und h ist $B_0(2|0)$.

$$C_0(0,5 \cdot 2 - 0,87 \cdot 0 | 0,87 \cdot 2 + 0,5 \cdot 0) = C_0(1 | 1,74)$$

Damit hat das Dreieck AB_0C_0 die Eckpunkte:

$$A(0|0), B_0(2|0), C_0(1 | 1,74)$$



Die Senkrechte h zur Geraden $g: y = 0,5x + 1$, welche A enthält, ergibt sich folgendermaßen:

$$m_g \cdot m_h = -1 \Leftrightarrow m_h = \frac{-1}{m_g} \Leftrightarrow m_h = -2$$

$$A(0|0) \in h \Rightarrow t_h = 0 \Rightarrow h: y = -2x$$

Der Schnittpunkt von g und h berechnet sich wie folgt:

$$0,5x + 1 = -2x \Leftrightarrow x = -0,4; y = 0,8 \Rightarrow B_0(-0,4 | 0,8)$$

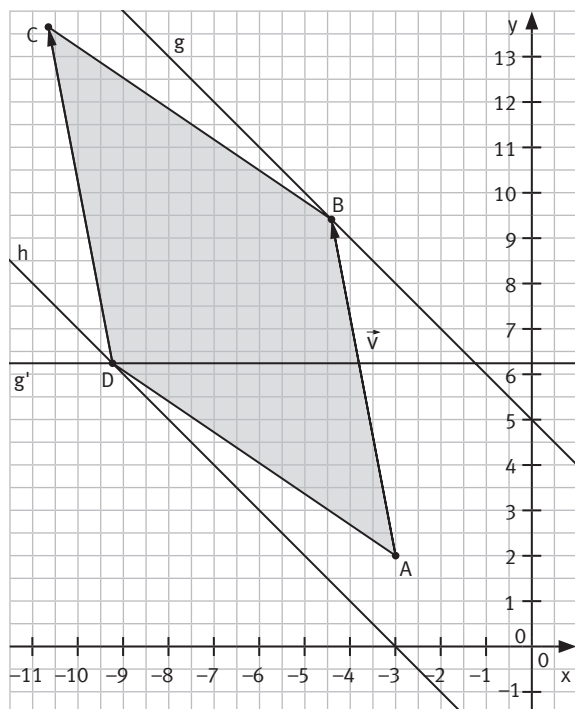
$$C_0(0,5 \cdot (-0,4) - 0,87 \cdot 0,8 | 0,87 \cdot (-0,4) + 0,5 \cdot 0,8) = C_0(-0,9 | 0,05)$$

Damit hat das Dreieck AB_0C_0 die Eckpunkte:

$$A(0|0), B_0(-0,4 | 0,8), C_0(-0,9 | 0,05)$$

K5

8



Die Gerade g wird um A mit $\alpha = 45^\circ$ auf den Trägergraphen g' von D gedreht.

Die Geraden g' und h schneiden sich im Punkt D .

Der Punkt D wird um A mit $\alpha = -45^\circ$ bzw. mit $\alpha = 315^\circ$ auf den Punkt B gedreht.

Der Punkt D wird mit $\vec{v} = \vec{AB}$ auf C verschoben.

Gerade g um A auf g' drehen:

$$\begin{aligned} g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,71 & -0,71 \\ 0,71 & 0,71 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1,42x \\ 4,24 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,42x-3 \\ 6,24 \end{pmatrix} \quad g': y = 6,24 \end{aligned}$$

Schnittpunkt von h und g' :

$$6,24 = -x - 3 \Leftrightarrow x = -9,24 \quad D(-9,24 | 6,24)$$

D um A auf B drehen:

$$\begin{aligned} B: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 315^\circ & -\sin 315^\circ \\ \sin 315^\circ & \cos 315^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -9,24 \\ 6,24 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,71 & 0,71 \\ -0,71 & 0,71 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -6,24 \\ 4,24 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1,42 \\ 7,44 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,42 \\ 9,44 \end{pmatrix} \quad B(-4,42 | 9,44) \end{aligned}$$

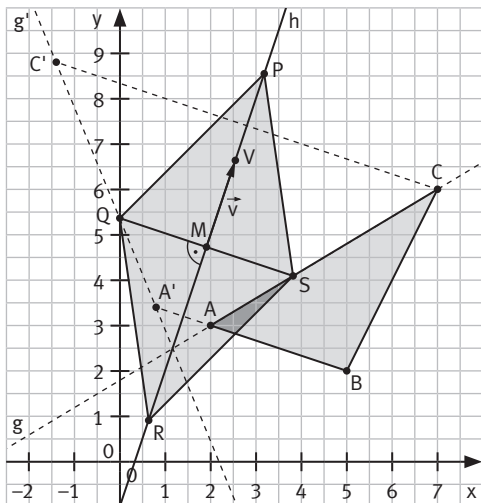
D verschieben um $\vec{v} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} -1,42 \\ 7,44 \end{pmatrix}$ auf C :

$$\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9,24 \\ 6,24 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1,42 \\ 7,44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10,66 \\ 13,68 \end{pmatrix} \quad C(-10,66 | 13,68)$$

Raute $ABCD$ mit

$$A(-3 | 2), B(-4,42 | 9,44), C(-10,66 | 13,68), D(-9,24 | 6,24)$$

K4 9 a)



Die Gerade $g = AC$ wird an der Geraden h gespiegelt auf g' .
 Der Schnittpunkt von g' mit der y -Achse ergibt Q .
 Der an der Geraden h gespiegelte Punkt Q ergibt S auf g .
 Der Mittelpunkt von Q und S ist der Punkt M auf h .
 S wird um M mit $\alpha = 90^\circ$ gedreht und mit $k = 2$ gestreckt.
 Bildpunkt der Drehung und Streckung ist P .
 Der an M gespiegelte Punkt P ergibt R auf h .
 Die Punkte $PQRS$ bilden die Raute.

b) $g = AC: y = m_g x + t_g$ mit $m_g = \frac{6-3}{7-2} = \frac{3}{5} = 0,6$

$A(2|3) \in g: y = 0,6x + t_g \Rightarrow 3 = 0,6 \cdot 2 + t_g \Rightarrow t_g = 1,8$

$g: y = 0,6x + 1,8$

Spiegelung von g an $h: y = 3x - 1$:

$\tan \alpha = m_h = 3 \Rightarrow \alpha \approx 71,57^\circ; 2\alpha = 143,14^\circ$

$$\begin{aligned} g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 143,14^\circ & \sin 143,14^\circ \\ \sin 143,14^\circ & -\cos 143,14^\circ \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x \\ 0,6x + 1,8 \end{bmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x \\ 0,6x + 1,8 \end{bmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0,44x - 1,68 \\ 1,08x + 2,24 \end{bmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0,44x + 1,68 \\ 1,08x + 1,24 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$x' = -0,44x + 1,68 \Leftrightarrow x = -2,27x' + 3,82$

$y' = 1,08x \cdot (-2,27x' + 3,82) + 1,24 = -2,45x' + 5,37$

$g': y = -2,45x + 5,37$

$g'(0) = 5,37$

$Q(0|5,37)$

$$\begin{aligned} Q': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 143,14^\circ & \sin 143,14^\circ \\ \sin 143,14^\circ & -\cos 143,14^\circ \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 \\ 5,37 \end{bmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 \\ 5,37 \end{bmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3,82 \\ 4,1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$S(3,82|4,1)$

$M \in h: y = 3x - 1: \frac{3,82 + 0}{2} = 1,91; h(1,91) = 3 \cdot 1,91 - 1 = 4,73$

$M(1,91|4,73)$

$$\begin{aligned} V: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 3,82 \\ 4,1 \end{bmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1,91 \\ -4,73 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1,91 \\ -0,63 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1,91 \\ 4,73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,63 \\ 1,91 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1,91 \\ 4,73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,54 \\ 6,64 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{MV} = \begin{bmatrix} 2,54 - 1,91 \\ 6,64 - 4,73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,63 \\ 1,91 \end{bmatrix}; \overrightarrow{VM} = \begin{bmatrix} -0,63 \\ -1,91 \end{bmatrix}$

$P: \overrightarrow{OM} \oplus 2 \cdot \overrightarrow{MV} = \begin{bmatrix} 1,91 + 2 \cdot 0,63 \\ 4,73 + 2 \cdot 1,91 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,17 \\ 8,55 \end{bmatrix}$

$P(3,17|8,55)$

$R: \overrightarrow{OM} \oplus 2 \cdot \overrightarrow{VM} = \begin{bmatrix} 1,91 - 2 \cdot 0,63 \\ 4,73 - 2 \cdot 1,91 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,65 \\ 0,91 \end{bmatrix}$

$R(0,65|0,91)$

Eckpunkte der Raute:

$P(3,2|8,6), Q(0|5,4), R(0,7|0,9), S(3,8|4,1)$

K4

10 a) $g(-0,5) = 2 \cdot (-0,5) - 1 = -2$

$$g(-2) = 2 \cdot (-2) - 1 = -5$$

Mit dem Vektor $\vec{B_1C} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird A $(-2|2)$ auf D_1 verschoben:

Mit dem Vektor $\vec{B_2A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ wird C $(5|-2)$ auf D_2 verschoben:

$$B_1(-0,5|-2)$$

$$B_2(-2|-5)$$

$$D_1(3,5|2)$$

$$D_2(5|5)$$

b) Bestimmung der Geraden h durch A und C: $y = m_h \cdot x + t_h$:

$$m_h = \frac{-2-2}{5-(-2)} = \frac{-4}{7} \approx -0,57. \text{ Mit } A \in h \text{ gilt: } 2 = -0,57 \cdot (-2) + t_h \Leftrightarrow t_h = 0,86$$

$$h: y = -0,57x + 0,86$$

Die Geraden g und h schneiden sich in N:

$$2x - 1 = -0,57x + 0,86 \Leftrightarrow 2,57x = 1,86 \Leftrightarrow x \approx 0,72$$

$$N(0,72|0,44)$$

Bestimmung des Trägergraphen t für die Punkte D_n :

Parallelverschiebung von A $(-2|2)$ mit $\vec{B_nC} = \begin{pmatrix} 5-x \\ -2-2x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-x \\ -2x-1 \end{pmatrix}$ auf D_n :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5-x \\ -2x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-x \\ -2x+1 \end{pmatrix}$$

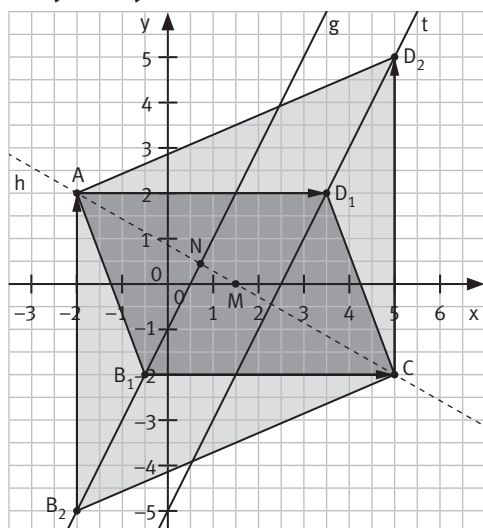
$$D_n(3-x|-2x+1)$$

$$x' = 3-x \Leftrightarrow x = 3-x'$$

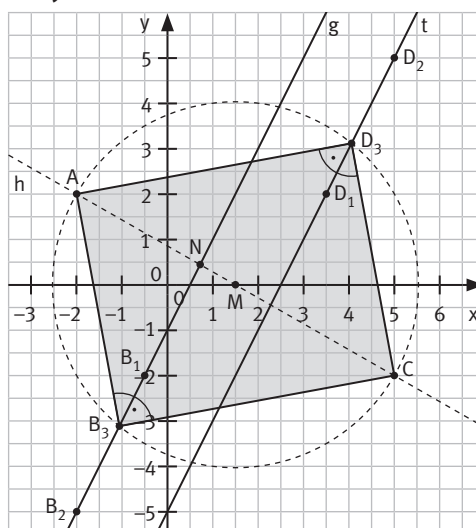
$$y' = -2x+1 = -2 \cdot (3-x') + 1 = 2x'-5$$

$$t: y = 2x - 5$$

zu **a)** und **b)**



zu **c)**



c) Zwei Vektoren stehen aufeinander senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt.

Es werden die Vektoren $\vec{v}_1$ (von A zu D_3) und $\vec{v}_2$ (von C zu D_3) berechnet.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x-(-2) \\ 2x-5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ 2x-7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x-5 \\ 2x-5-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-5 \\ 2x-3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 \odot \vec{v}_2 = (x+2) \cdot (x-5) + (2x-7) \cdot (2x-3) = 5x^2 - 23x + 11$$

Es muss gelten: $\vec{v}_1 \odot \vec{v}_2 = 0$, d. h.: $5x^2 - 23x + 11 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 4 \cdot 5 \cdot 11}}{10} \approx \frac{23 \pm 17,6}{10} = 2,3 \pm 1,76 \quad x_1 = 4,06; x_2 = 0,54$$

Für die Punkte auf t ergeben sich $D_3(4,06|3,12)$ und $D_4(0,54|-3,92)$.

Wegen der Drehrichtung im Viereck ABCD entfällt $D_4(0,54|-3,92)$.

Im Folgenden wird nur $D_3(4,06|3,12)$ weiter untersucht.

$$D_3(4,06|3,12)$$

Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ ist $M\left(\frac{-2+5}{2} \mid \frac{2-2}{2}\right) = M(1,5|0)$

$D_3(4,06|3,12)$ wird um M mit $\alpha = 180^\circ$ auf B_3 gedreht:

$$B_3: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} 4,06 \\ 3,12 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

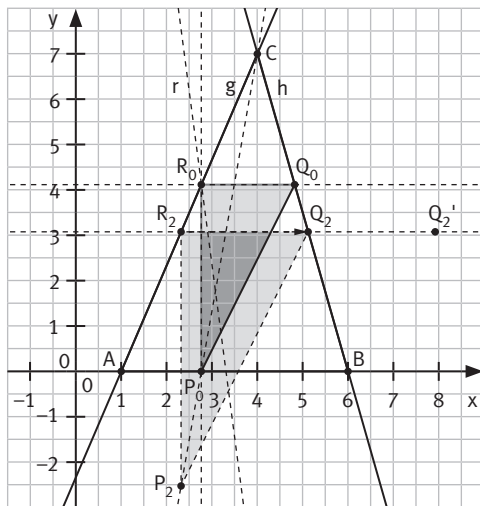
$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2,56 \\ 3,12 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,06 \\ -3,12 \end{pmatrix}$$

$$B_3(-1,06|-3,12)$$

d) Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:

Es kann kein Quadrat geben, da die Diagonalen im Quadrat senkrecht aufeinander stehen und sich im gemeinsamen Mittelpunkt treffen. Dies ist beim Parallelogramm AB_nCD_n jedoch nicht gegeben.

K4 11



$$g = AC: m_g = \frac{7-0}{4-1} \approx 2,33 \text{ und } A(1|0) \in g$$

$$0 = \frac{7}{3} \cdot 1 + t_g \Leftrightarrow t_g = -\frac{7}{3}$$

$$g: y = 2\frac{1}{3}x - 2\frac{1}{3}$$

$$h = BC: m_h = \frac{7-0}{4-6} = -3,5 \text{ und } B(6|0) \in h$$

$$0 = -3,5 \cdot 6 + t_h \Leftrightarrow t_h = 21$$

$$h: y = -3,5x + 21$$

Für die Punkte P_0, Q_0 und R_0 (bzw. kurz P, Q, R) mit $x_P = x_R$ gilt:

$$g(x_R) = 2 \cdot (x_Q - x_R), \text{ d.h.: } \frac{7}{3}x_R - \frac{7}{3} = 2 \cdot (x_Q - x_R) \Leftrightarrow x_Q = \frac{13}{6}x_R - \frac{7}{6}$$

Durch Einsetzen von $x_Q = \frac{13}{6}x_R - \frac{7}{6}$ in $h(x)$ und mit $y_Q = y_R$ erhält man:

$$y_R = -3,5 \cdot \left(\frac{13}{6}x_R - \frac{7}{6} \right) + 21 = -\frac{91}{12}x_R + \frac{49}{12} + 21 = -\frac{91}{12}x_R + \frac{301}{12} \approx -7,6x_R + 25,1$$

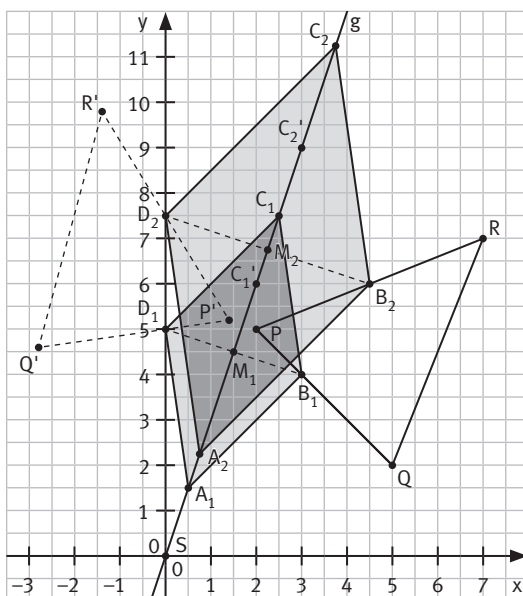
$$r: y = -7\frac{7}{12}x + 25\frac{1}{12}$$

Der Schnittpunkt der Geraden g und r ergibt den gesuchten Punkt R_0 :

$$\frac{7}{3}x - \frac{7}{3} = -\frac{91}{12}x + \frac{301}{12} \Leftrightarrow x = \frac{329}{119} \Rightarrow x \approx 2,8 \quad g(2,8) \approx 4,2$$

$$R_0(2,8|4,2); P_0(2,8|0); Q_0(4,8|4,2)$$

K4 **12 a) und b)**



Es sind Punkte auf der einen Rauten-Diagonalen zu ermitteln, die einen Punkt auf einer Seite von PQR mit einem Punkt auf der y-Achse verbinden:

- Man spiegelt PQR an g auf P'R'Q' und schneidet die Seiten von P'R'Q' mit der y-Achse, man erhält die Punkte D_1 und D_2 .
- Durch Spiegeln von D_1 und D_2 an g erhält man die Punkte B_1 und B_2 , jeweils auf einer Seite von PQR.
- Als Verbindung von B_1 und D_1 bzw. von B_2 und D_2 erhält man die Diagonalen $e_1 = \overline{B_1D_1}$ und $e_2 = \overline{B_2D_2}$ mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 .
- Durch Drehung von B_1 und B_2 um M_1 bzw. M_2 mit 90° erhält man die Punkte C_1' und C_2' . Diese werden um M_1 bzw. M_2 mit dem Faktor $k = 2$ auf C_1 und C_2 gestreckt.
- Durch Spiegeln von C_1 und C_2 an M_1 bzw. M_2 erhält man A_1 und A_2 .

Die Rauten $A_1B_1C_1D_1$ bzw. $A_2B_2C_2D_2$ haben die gewünschten Eigenschaften.

- c) Spiegeln der Punkte P, Q, R an der Ursprungsgeraden g: $y = 3x$ auf P', Q', R' und Ermitteln der Geraden P'Q', Q'R' und P'R': $\tan \alpha = 3 \Rightarrow \alpha \approx 72^\circ$; $2\alpha \approx 144^\circ$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 144^\circ & \sin 144^\circ \\ \sin 144^\circ & -\cos 144^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8x + 0,6y \\ 0,6x + 0,8y \end{pmatrix}$$

$$x' = -0,8x + 0,6y \text{ und } y' = 0,6x + 0,8y$$

Einsetzen der Koordinaten von P, Q und R ergibt:

$$P' (1,4 | 5,2); Q' (-2,8 | 4,6); R' (-1,4 | 9,8)$$

Ermitteln der Geradengleichungen und Punkte auf der y-Achse:

$$P'Q': m = \frac{1}{7}; t = 5; y = \frac{1}{7}x + 5$$

$$D_1 (0 | 5)$$

$$P'R': m = -1,64; t = 7,5; y = -1,64x + 7,5$$

$$D_2 (0 | 7,5)$$

Spiegelung von D_1 und D_2 an g, d. h. Einsetzen der Koordinaten von D_1 und D_2 :

$$B_1 (0,6 \cdot 5 | 0,8 \cdot 5) = B_1 (3 | 4)$$

$$B_1 (3 | 4)$$

$$B_2 (0,6 \cdot 7,5 | 0,8 \cdot 7,5) = B_2 (4,5 | 6)$$

$$B_2 (4,5 | 6)$$

Mittelpunkte von D_1 und B_1 bzw. von D_2 und B_2 :

$$M_1 (1,5 | 4,5); M_2 (2,25 | 6,75)$$

Drehung von $B_1 (3 | 4)$ um M_1 auf C_1' bzw. von $B_2 (4,5 | 6)$ um M_2 auf C_2' und Streckung mit dem Faktor 2.

$$C_1: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1,5 \\ -4,5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x-1,5 \\ y-4,5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -y+4,5 \\ x-1,5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y+10,5 \\ 2x+1,5 \end{pmatrix}$$

$$C_1 (2,5 | 7,5)$$

$$C_2: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2,25 \\ -6,75 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2,25 \\ 6,75 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x-2,25 \\ y-6,75 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2,25 \\ 6,75 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -y+6,75 \\ x-2,25 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2,25 \\ 6,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y+15,75 \\ 2x+2,25 \end{pmatrix}$$

$$C_2 (3,75 | 11,25)$$

Spiegelung von C_1 an M_1 bzw. von C_2 an M_2 :

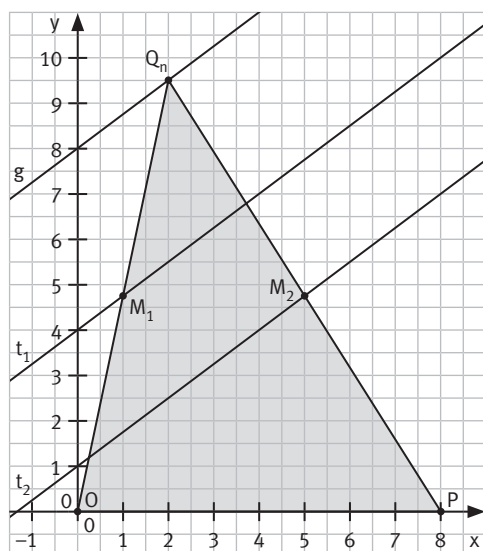
$$A_1 (0,5 | 1,5); A_2 (0,75 | 2,25)$$

Raute $A_1 (0,5 | 1,5); B_1 (3 | 4); C_1 (2,5 | 7,5); D_1 (0 | 5)$ und

Raute $A_2 (0,75 | 2,25); B_2 (4,5 | 6); C_2 (3,75 | 11,25); D_2 (0 | 7,5)$

K5

13 a) 1



Trägergraph t_1 des Mittelpunkts M_1 von $O (0 | 0)$ und $Q_n (x | 0,75x + 8)$:

$$t_1: M_1 \left(\frac{x+0}{2} \mid \frac{0,75x+8+0}{2} \right) = M_1 (0,5x | 0,375x + 4)$$

$$x' = 0,5x \Leftrightarrow x = 2x'$$

$$y' = 0,375x + 4 = 0,375 \cdot 2x' + 4$$

$$= 0,75x' + 4$$

$$t_1: y = 0,75x + 4$$

Trägergraph t_2 des Mittelpunkts M_2 von $P (8 | 0)$ und $Q_n (x | 0,75x + 8)$:

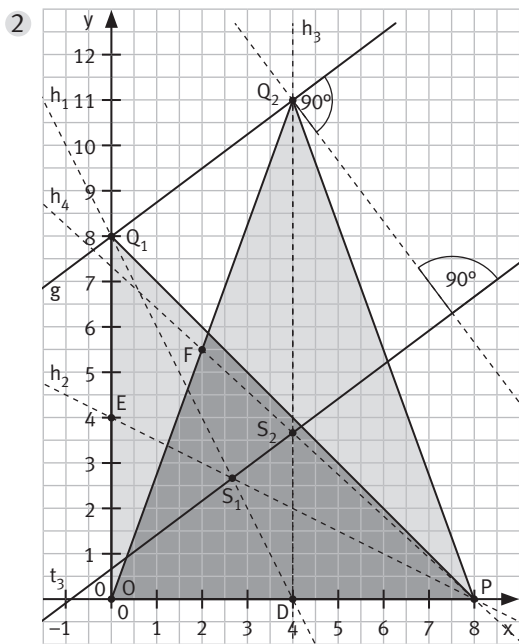
$$t_2: M_2 \left(\frac{x+8}{2} \mid \frac{0,75x+8+0}{2} \right) = M_2 (0,5x + 4 | 0,375x + 4)$$

$$x' = 0,5x + 4 \Leftrightarrow x = 2x' - 8$$

$$y' = 0,375x + 4 = 0,375 \cdot (2x' - 8) + 4$$

$$= 0,75x' + 1$$

$$t_2: y = 0,75x + 1$$



Berechnung der Schwerpunkte S_1 und S_2 mithilfe von $Q_1(0|8)$ und $Q_2(4|11)$ und den Mittelpunkten $D(4|0)$ der Strecke $\overline{OP}$; $E(0|4)$ der Strecke $\overline{OQ_1}$; $F(2|5,5)$ der Strecke $\overline{OQ_2}$:

Berechnung des Schwerpunkts S_1 als Schnittpunkt der Geraden $h_1 = DQ_1$ und $h_2 = EP$:

$$m_{DQ_1} = \frac{8-0}{0-4} = -2; t_{DQ_1} = 8 \quad h_1: y = -2x + 8$$

$$m_{EP} = \frac{4-0}{0-8} = -0,5; t_{EP} = 4 \quad h_2: y = -0,5x + 4$$

$$-2x + 8 = -0,5x + 4 \Leftrightarrow x \approx 3 \quad S_1(2,67|2,67)$$

Berechnung des Schwerpunkts S_2 als Schnittpunkt der Geraden $h_3 = DQ_2$ und $h_4 = FP$:

Für $h_3 = DQ_2$ gilt: $h_3: x = 4$

$$m_{FP} = \frac{0-5,5}{8-2} = -\frac{5,5}{6} \approx -0,92$$

$$0 = 8 \cdot (-0,92) + t_{FP} \Leftrightarrow t_{FP} = 7,36$$

$$h_4: y = -0,92x + 7,36$$

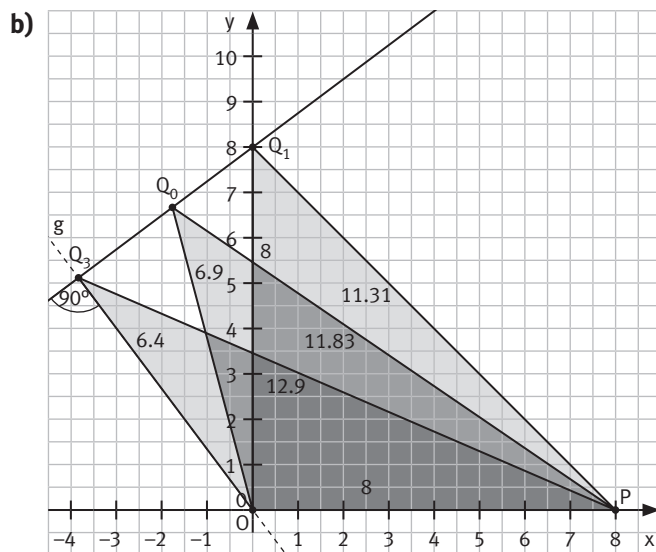
$$y = -0,92 \cdot 4 + 7,36 = 3,68 \quad S_2(4|3,68)$$

Berechnung des Trägergraphen der Dreiecksschwerpunkte: $t_3 = S_1S_2$:

$$m_{S_1S_2} = \frac{3,68-2,67}{4-2,67} \approx 0,76$$

$$3,68 = 0,76 \cdot 4 + t_{S_1S_2} \Leftrightarrow t_{S_1S_2} = 0,64$$

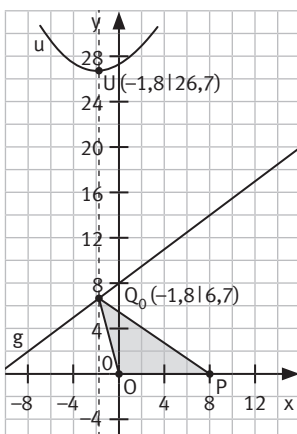
$$t_3: y = 0,76x + 0,64$$



Bei Q_1 : $u(0) \approx 27,31$ cm

Bei Q_0 : $u(-1,8) \approx 26,73$ cm

Bei Q_3 : $u(-3,8) \approx 27,3$ cm



Zur Berechnung des minimalen Umfangs sind die Längen der Strecken OQ und PQ zu berechnen (hier nur die Maßzahlen) und für den entstehenden Term das Minimum zu ermitteln.

$$u(x) = |OP| + |OQ| + |PQ|$$

$$= 8 + \sqrt{x^2 + g(x)^2} + \sqrt{(8-x)^2 + g(x)^2}$$

$$= 8 + \sqrt{x^2 + (0,75x + 8)^2} + \sqrt{(8-x)^2 + (0,75x + 8)^2}$$

$$= 8 + \sqrt{1,5625x^2 + 12x + 64} + \sqrt{1,5625x^2 - 4x + 128}$$

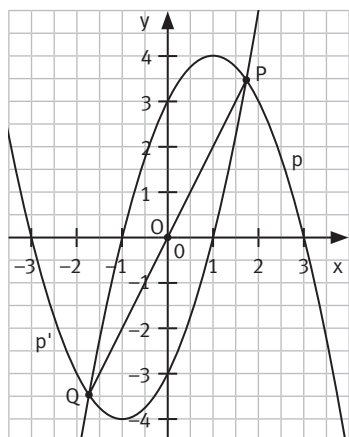
Umfang für $x = -1,8$

$$u(-1,8) = 8 + \sqrt{5,0625 - 21,6 + 64} + \sqrt{5,0625 + 7,2 + 128}$$

$$= 8 + 6,9 + 11,8 = 26,7$$

Vertiefung

K4



Die Parabel p wird um O mit $\alpha = 180^\circ$ auf p' gedreht.

Die Schnittpunkte von p und p' ergeben die Punkte P und Q .

$$p': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -x^2 + 2x + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ x^2 - 2x - 3 \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \Leftrightarrow x = -x'$$

$$y' = x^2 - 2x - 3 = (-x')^2 - 2 \cdot (-x') - 3$$

$$= x'^2 + 2x' - 3$$

$$p': y = x^2 + 2x - 3$$

Schnittpunkte von p und p' :

$$-x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x - 3$$

$$6 = 2x^2 \Leftrightarrow 3 = x^2$$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{3}; y_{1/2} = \pm 2\sqrt{3}$$

$$P(1,73|3,46)$$

$$Q(-1,73|-3,46)$$

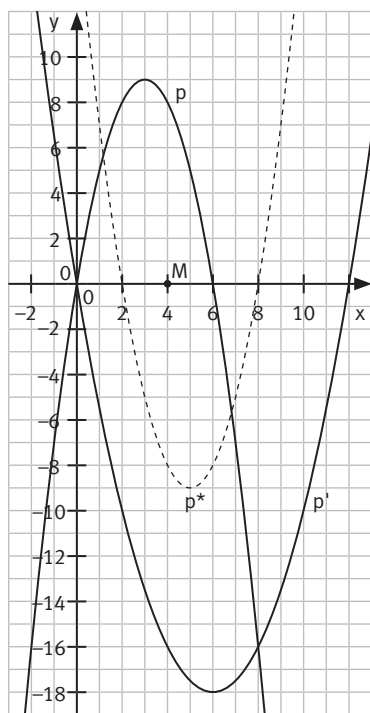
K5

- Schritt 1: Die Parabel p wird um $M(4|0)$ gedreht und ausgehend von M mit $k = 2$ gestreckt, man erhält mit dem Zwischenschritt über p^* die Parabel p' .

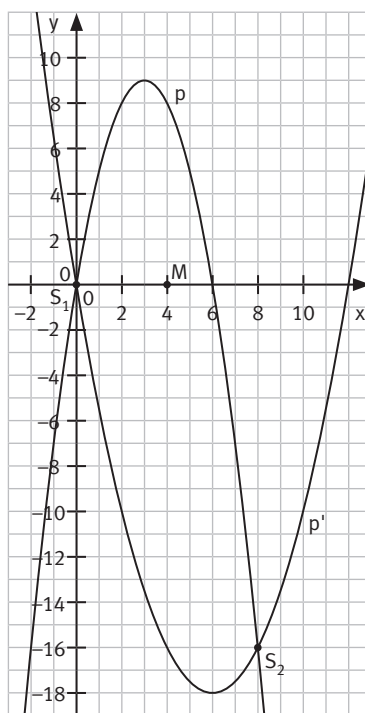
Schritt 2: Die Parabeln p und p' werden geschnitten, man erhält die Schnittpunkte S_1 und S_2 .

Schritt 3: Die Geraden MS_1 und MS_2 schneiden die Parabeln in den gesuchten Punktepaaren $P_1(2|8)$ und $Q_1(8|-16)$ sowie $P_2(6|0)$ und $Q_2(0|0)$.

Schritt 1:



Schritt 2:



Schritt 3:

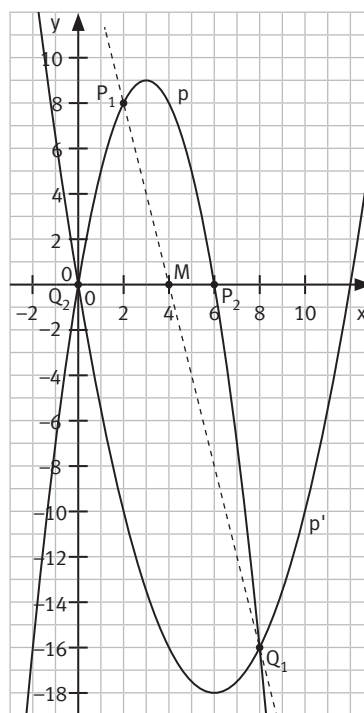


Abbildung von p auf p' :

$$\begin{aligned} p': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 6x - x^2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x-4 \\ 6x-x^2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -x+4 \\ -6x+x^2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+8 \\ -12x+2x^2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+12 \\ -12x+2x^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$x' = -2x + 12 \Leftrightarrow x = -0,5x' + 6$$

$$\begin{aligned} y' &= -12x + 2x^2 = -12 \cdot (-0,5x' + 6) + 2 \cdot (-0,5x' + 6)^2 \\ &= 6x' - 72 + 2 \cdot (0,25x'^2 - 6x' + 36) = 0,5x'^2 - 6x' \end{aligned}$$

$$p': y = 0,5x^2 - 6x$$

Ermittlung der Schnittpunkte von p und p':

$$6x - x^2 = -6x + 0,5x^2 \Leftrightarrow 0 = -12x + 1,5x^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 8x \Leftrightarrow 0 = x \cdot (x - 8)$$

$$x_1 = 0; x_2 = 8 \text{ und } y_1 = 0; y_2 = -16$$

$$S_1(0|0); S_2(8|-16)$$

Schnittpunkte der Geraden $MS_1: y = 0$ und $MS_2: y = -4x + 16$ mit der Parabel p liefert:

$$P_1(2|8); Q_1(8|-16)$$

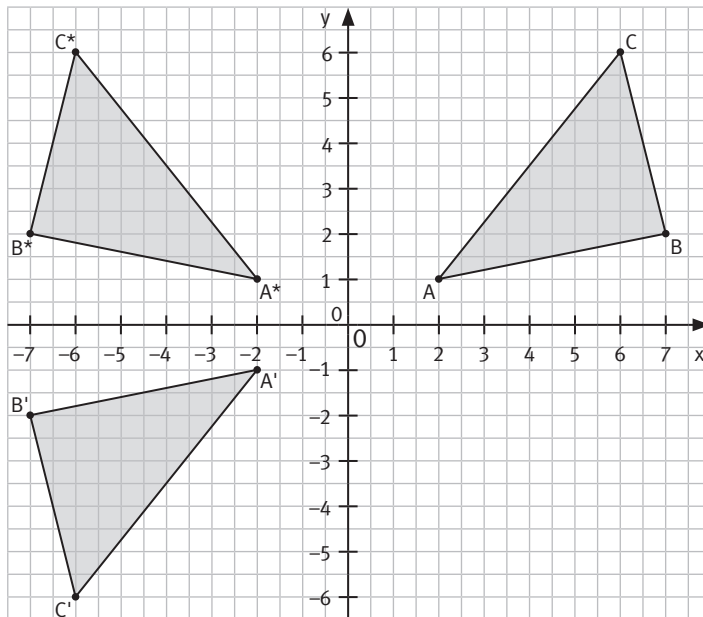
$$P_2(6|0); Q_2(0|0)$$

K1

- Friederike hat nicht Recht. Würde man eine Normalparabel um 270° drehen, dann wäre die Parabel nach rechts bzw nach links geöffnet. Damit würde es für jedes $x \neq 0$ zwei zugeordnete Werte geben, was der Definition einer Parabel widerspricht.

KX

1 a) bis c)



$$\text{b) } A^*: \begin{pmatrix} x_{A^*} \\ y_{A^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^*(-2|1)$$

$$B^*: \begin{pmatrix} x_{B^*} \\ y_{B^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^*(-7|2)$$

$$C^*: \begin{pmatrix} x_{C^*} \\ y_{C^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow C^*(-6|6)$$

$$\text{c) } A': \begin{pmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(2|-1)$$

$$B': \begin{pmatrix} x_{B'} \\ y_{B'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B'(7|-2)$$

$$C': \begin{pmatrix} x_{C'} \\ y_{C'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(6|-6)$$

d) Um das Dreieck ABC direkt auf das Dreieck A'B'C' abzubilden, gibt es zwei Möglichkeiten. Es handelt sich entweder um eine Drehung um 180° um den Ursprung, also um eine Punktspiegelung am Ursprung:

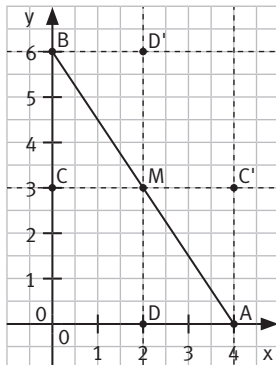
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Oder es liegt eine zentrische Streckung mit $k = -1$ und Streckungszentrum $O(0|0)$ vor:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

K5

2



$B(0|y_B)$ wird durch Drehung um $M(2|3)$ mit $\alpha = 180^\circ$ auf $A(x_A|0)$ abgebildet.

$$A: \begin{pmatrix} x_A \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ y_B \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right] \right] \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2 \\ y_B - 3 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -y_B + 6 \end{pmatrix}$$

$$x_A = 4 \Rightarrow A(4|0)$$

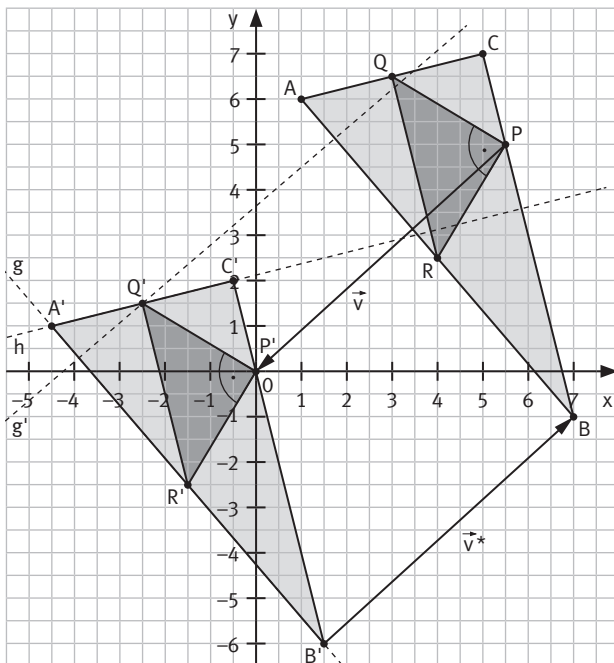
$$0 = -y_B + 6 \Rightarrow y_B = 6 \Rightarrow B(0|6)$$

KX

3 Die Gerade g wird durch eine Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in den Ursprung verschoben, da der Punkt $P(-1|-1)$ auf der Geraden g liegt, $-(-1) - 2 = -1$.

Wird die Gerade nun verschoben, so erhält man für $P' \in g'$ den Ursprung: $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(0|0)$

K5 4 a) und b)



a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5,5 \\ -5 \end{pmatrix}$; $A'(-4,5|1)$; $B'(1,5|-6)$; $C'(-0,5|2)$

b) Für $g = A'B'$ gilt: $m_{A'B'} = \frac{-6-1}{1,5-(-4,5)} = \frac{-7}{6} \approx -1,17$

$$A'(-4,5|1) \in g \Rightarrow 1 = \left(-\frac{7}{6}\right) \cdot (-4,5) + t_{A'B'} \Rightarrow t_{A'B'} = -4,25 \quad g: y = -\frac{7}{6}x - 4,25$$

Für $h = A'C'$ gilt: $m_{A'C'} = \frac{2-1}{-0,5-(-4,5)} = \frac{1}{4} = 0,25$

$$A'(-4,5|1) \in h \Rightarrow 1 = 0,25 \cdot (-4,5) + t_{A'C'} \Rightarrow t_{A'C'} = 2,125 \quad h: y = 0,25x + 2,125$$

Die Gerade $g = A'B'$ wird mit $\alpha = 270^\circ$ um $P'(0|0)$ auf g' gedreht, daraufhin wird g' mit h geschnitten.

$$g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -\frac{7}{6}x - 4,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6}x - 4,25 \\ -x \end{pmatrix}$$

$$x' = -\frac{7}{6}x - 4,25 \Rightarrow x = -\frac{6}{7}x' - \frac{6}{7} \cdot 4,25$$

$$y' = -x = \frac{6}{7}x' + \frac{25,5}{7} \approx 0,86x' + 3,64$$

$$g': y = \frac{6}{7}x + \frac{25,5}{7}$$

Q' wird bestimmt als Schnittpunkt von h und g' :

$$0,86x + 3,64 = 0,25x + 2,125 \Leftrightarrow x = -2,48$$

$$Q'(-2,48|0,25 \cdot (-2,48) + 2,125)$$

$$Q'(-2,5|1,5)$$

$$R': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -2,5 \end{pmatrix}$$

$$R'(-1,5|-2,5)$$

c) Da die Parallelverschiebung von $P'Q'R'$ auf PQR winkeltreu und längentreu ist, ist das Dreieck PQR in ABC so eingeschrieben wie das Dreieck $P'Q'R'$ in $A'B'C'$ eingeschrieben ist.

$$P: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5,5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$P(5,5|5)$$

$$Q: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5,5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,0 \\ 6,5 \end{pmatrix}$$

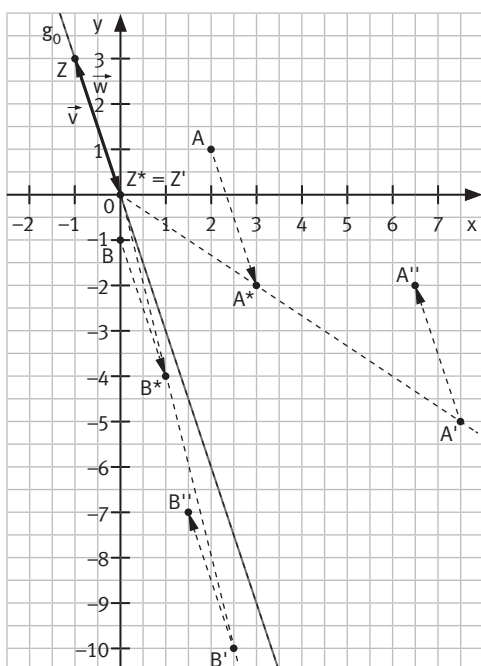
$$Q(3,0|6,5)$$

$$R: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -2,5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5,5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,0 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$R(4,0|2,5)$$

K5

5



a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $Z^*(0|0)$; $A^*(3|-2)$; $B^*(1|-4)$

b) $P': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $P'(2,5x|2,5y)$
 $Z'(0|0)$; $A'(7,5|-5)$; $B'(2,5|-10)$

c) $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $Z''(-1|3)$; $A''(6,5|-2)$; $B''(1,5|-7)$

d) Es handelt sich um eine zentrische Streckung ausgehend vom Punkt $Z(-1|3)$ mit dem Faktor $k = 2,5$.

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right] \right] \oplus \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5x + 1,5 \\ 2,5y - 4,5 \end{pmatrix}$$

Für eine Fixgerade muss gelten: $Z \in g$, d. h.: $-m + b = 3$.
 Alle Geraden mit der Eigenschaft $b - m = 3$ sind Fixgeraden, insbesondere ist die Gerade $OZ = g_0: y = -3x$ eine Fixgerade.

K6

6 Damit das Rechteck einbeschrieben ist, muss jeder Punkt des Rechtecks auf einer der Dreiecksseiten liegen, insbesondere gilt: $D(x_D|0)$, $E(x_E|0)$, $F(x_F|y_F)$, $G(x_G|y_G)$.

Für $g = AC$ gilt: $m_{AC} = \frac{3-0}{4-3} = 1$ $A(1|0) \in g \Rightarrow 0 = 1 + t_{AC} \Rightarrow t_{AC} = -1$ $g: y = x - 1$

Für $h = BC$ gilt: $m_{BC} = \frac{3-0}{4-7} = -1$ $B(7|0) \in h \Rightarrow 0 = -7 + t_{BC} \Rightarrow t_{BC} = 7$ $h: y = -x + 7$

Für $G(x_G|x_G - 1) \in g$ und $F(x_F|-x_F + 7) \in h$ gilt:

$$x_G - 1 = -x_F + 7 \text{ und } 2 \cdot |\overline{GF}| = |\overline{DG}|$$

Mit $|\overline{GF}| = x_F - x_G$ und $|\overline{DG}| = x_G - 1$ gilt:

$$2 \cdot |\overline{GF}| = |\overline{DG}| \Leftrightarrow 2 \cdot (x_F - x_G) = x_G - 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x_F + \frac{1}{3} = x_G$$

Mit $g(x_G)$ und $h(x_F)$ gilt:

$$\frac{2}{3}x_F + \frac{1}{3} - 1 = -x_F + 7 \Leftrightarrow \frac{5}{3}x_F = \frac{23}{3} \Leftrightarrow 5x_F = 23 \quad x_F = 4,6$$

$$x_G = \frac{2}{3} \cdot 4,6 + \frac{1}{3} = \frac{9,2+1}{3} = \frac{10,2}{3} = 3,4 \quad x_G = 3,4$$

$$D(3,4|0) \text{ und } G(3,4|3,4-1) = G(3,4|2,4) \quad |\overline{DG}| = 2,4 \text{ LE}$$

$$E(4,6|0) \text{ und } F(4,6|-4,6+7) = F(4,6|2,4) \quad |\overline{DE}| = 1,2 \text{ LE} \quad |\overline{DG}| = 2 \cdot |\overline{DE}|$$

K2

7 a) $f: y = \frac{-2,5}{(x+4)^3} + 1$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$; $W = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Asymptoten: $x = -4$ und $y = 1$

b)

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
f(x)	1,09	1,31	3,5	-	-1,5	0,69	0,91	0,96

c) $0 = \frac{-2,5}{(x+4)^3} + 1 \Leftrightarrow -(x+4)^3 = -2,5 \Leftrightarrow x+4 \approx 1,36 \quad x = -2,64$

d) $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ \frac{-2,5}{(x+4)^3} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ \frac{-2,5}{(x+4)^3} + 1 \end{pmatrix}$

$$x' = -x \Leftrightarrow x = -x'$$

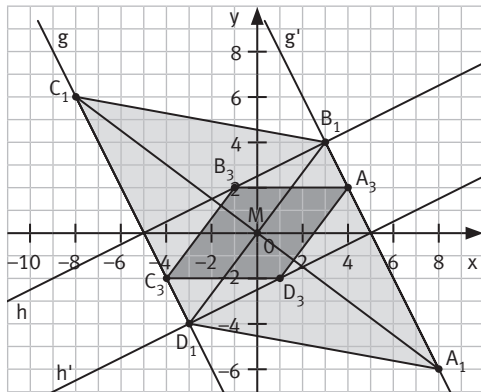
$$y' = \frac{-2,5}{(x+4)^3} + 1 = \frac{-2,5}{(-x'+4)^3} + 1 = \frac{2,5}{(x'-4)^3} + 1$$

$$f': y = \frac{2,5}{(x-4)^3} + 1$$

e) $f^{-1}: x = \frac{-2,5}{(y+4)^3} + 1 \Leftrightarrow (y+4)^3 = \frac{-2,5}{x-1} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{-2,5}{x-1}} - 4$

$$f^{-1}: y = \sqrt[3]{\frac{-2,5}{x-1}} - 4$$

K2 8



- a) Ermittlung von C_1 und D_1 als Drehung von A_1 bzw. B_1 an M um 180° :

$$C_1: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_1(-8|6)$$

$$D_1: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$D_1(-3|-4)$$

- b) Umfang: $u = 4 \cdot d_{A_1B_1} = 4 \cdot \sqrt{(4 - (-6))^2 + (3 - 8)^2} \text{ LE} \approx 4 \cdot 11,18 \text{ LE}$

$$u = 44,72 \text{ LE}$$

$$|A_1C_1| = \sqrt{(-8 - 8)^2 + (6 + 6)^2} \text{ LE} = 20 \text{ LE}$$

$$|B_1D_1| = \sqrt{(3 + 3)^2 + (4 + 4)^2} \text{ LE} = 10 \text{ LE}$$

$$\text{Flächeninhalt: } A = \frac{1}{2} \cdot |A_1C_1| \cdot |B_1D_1| = \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ LE} \cdot 10 \text{ LE} = 100 \text{ FE}$$

$$A = 100 \text{ FE}$$

$$\text{Innenwinkelmaße: } \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{|B_1M|}{|A_1M|} = \frac{5 \text{ LE}}{10 \text{ LE}} = 0,5$$

$$\alpha_1 \approx 53,13^\circ = \gamma_1$$

$$\beta_1 = 126,87^\circ = \delta_1$$

- c) Es gilt: $C_1(-8|6) \in g: y = -2x - 10$, da $6 = -2 \cdot (-8) - 10$ wahr ist.

$$\text{Mit } |A_1C_1| = 20 \text{ LE und } |B_1D_1| = 10 \text{ LE erfüllt } A_1B_1C_1D_1 \text{ die Eigenschaft } |A_nC_n| = 2 \cdot |B_nD_n|.$$

Damit gehört $A_1B_1C_1D_1$ zur Rautenschar $A_nB_nC_nD_n$.

- d) Da $C_n \in g: y = -2x - 10$ gilt, ist g der Trägergraph der Punkte C_n .

$$g: y = -2x - 10$$

Der Trägergraph der Punkte A_n ist die um M mit 180° gedrehte Gerade g' :

$$g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -2x - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 2x + 10 \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \Leftrightarrow x = -x' \text{ und } y' = 2x + 10 = -2x' + 10$$

$$g': y = -2x + 10$$

Der Trägergraph h der Punkte B_n steht senkrecht auf g mit $m_g = -2$ und es gilt $B_1 \in h$.

$$m_h = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{-2} = 0,5$$

$$\text{Mit } B_1 \in h \text{ gilt: } 4 = 0,5 \cdot 3 + t_h \Rightarrow t_h = 2,5$$

$$h: y = 0,5x + 2,5$$

Der Trägergraph h' der Punkte D_n steht ebenfalls senkrecht auf g und es gilt $D_1 \in h'$.

$$m_{h'} = m_h = 0,5$$

$$\text{Mit } D_1 \in h' \text{ gilt: } -4 = 0,5 \cdot (-3) + t_{h'} \Rightarrow t_{h'} = -2,5$$

$$h': y = 0,5x - 2,5$$

- e) Die Koordinaten der jeweiligen Punkte lassen sich anhand der Trägergraphen ablesen.

$$A_n(x|-2x+10); B_n(x|0,5x+2,5); C_n(x|-2x-10); D_n(x|0,5x-2,5)$$

$$A_n(x|-2x+10); B_n(x-5|0,5x); C_n(-x|-2x-10); D_n(-x+5|-0,5x)$$

$$|A_nC_n| = \sqrt{(-x-x)^2 + (2x-10-(-2x+10))^2} \text{ LE} = 2 \cdot \sqrt{5x^2 - 40x + 100} \text{ LE}$$

$$|B_nD_n| = 0,5 \cdot |A_nC_n| = \sqrt{5x^2 - 40x + 100} \text{ LE}$$

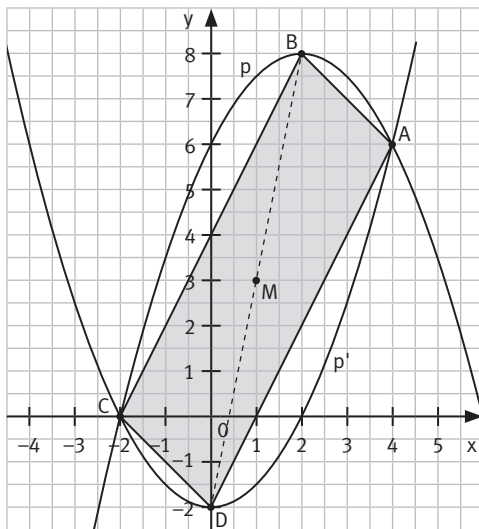
- f) $A(x) = 0,5 \cdot |A_nC_n| \cdot |B_nD_n| = 0,5 \cdot 2 \cdot |B_nD_n| \cdot |B_nD_n| = |B_nD_n|^2 = (5x^2 - 40x + 100) \text{ FE}$

- g) $A(x)$ quadratisch ergänzt ergibt: $A(x) = (5 \cdot (x-4)^2 + 20) \text{ FE}$

$A(x)$ ist minimal für $x = 4$ mit $A_3(4|2); B_3(-1|2); C_3(-4|-2); D_3(1|-2)$ und $A(4) = 20 \text{ FE}$.

K4

9



B ist Scheitelpunkt von $p: y = -0,5x^2 + 2x + 6$:

$$p: y = -0,5 \cdot (x - 2)^2 + 8$$

$$\Rightarrow B(2|8)$$

Die Bildparabel p' entsteht aus der Drehung von p um $M(1|3)$ mit $\alpha = 180^\circ$. Die Schnittpunkte der Urbildparabel p und der Bildparabel p' ergeben die Eckpunkte A und C des Parallelogramms.

$$\begin{aligned} p': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} x \\ -0,5x^2 + 2x + 6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \odot \begin{pmatrix} x-1 \\ -0,5x^2 + 2x + 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x+1 \\ 0,5x^2 - 2x - 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2 \\ 0,5x^2 - 2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$x' = -x + 2 \Leftrightarrow x = -x' + 2$$

$$y' = 0,5 \cdot (-x' + 2)^2 - 2 \cdot (-x' + 2) = 0,5x'^2 - 2x' + 2 + 2x' - 4 = 0,5x'^2 - 2$$

$$p': y = 0,5x^2 - 2$$

Schnittpunkte von p und p' :

$$-0,5x^2 + 2x + 6 = 0,5x^2 - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2) \cdot (x-4) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 4$$

$$p'(-2) = 0,5 \cdot (-2)^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow C(-2|0)$$

$$p'(4) = 0,5 \cdot 4^2 - 2 = 6$$

$$\Rightarrow A(4|6)$$

D ist Bildpunkt von B(2|8) bei der Drehung um M mit $\alpha = 180^\circ$:

$$D: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \cdot 4 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D(0|-2)$$

Aufgaben zur Einzelarbeit

KX

- 1 Es handelt sich jeweils um eine Parallelverschiebung von P auf P' mit dem Vektor
- $\vec{v}$
- .

a) $P': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5,5 \end{pmatrix}$

$P'(1|5,5)$

b) $P': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 \\ y-\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$x' = \sqrt{3} + 2 \approx 3,73 \text{ und } 0 = y - \sqrt{5} \Leftrightarrow y = \sqrt{5}$

$P(\sqrt{3}|\sqrt{5}); P'(3,73|0)$

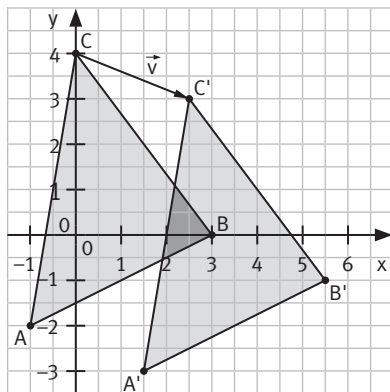
c) $P': \begin{pmatrix} 1,85 \\ 3\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v_x \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+v_x \\ y+\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$1,85 = 3 + v_x \Leftrightarrow v_x = -1,15 \text{ und } 3\sqrt{5} = y + \sqrt{5} \Leftrightarrow y = 2\sqrt{5}$

$P(3|2\sqrt{5}); \vec{v} = \begin{pmatrix} -1,15 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$

KX

2



$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2,5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$A'(1,5|-3)$

$B': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2,5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$B'(5,5|-1)$

KX

3

	a)	b)	c)
f	$y = 2^{x-1}$	$y = \log_3 x$	$y = \frac{1}{x-3} - 1,5$
$\vec{v}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
f'	$2^{x-3} - 1$	$\log_3(x+1) - 2$	$y = \frac{1}{x-1} - 1,5$

a) $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2^{x-1} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ 2^{x-1}-1 \end{pmatrix}$

$x' = x + 2 \Leftrightarrow x = x' - 2 \text{ und } y' = 2^{x-1} - 1 = 2^{x'-2} - 1$

$D_f = \mathbb{R}; W_f = \mathbb{R}^+; D_{f'} = \mathbb{R}; W_{f'} = \{x \in \mathbb{R} | x > -1\}$

b) $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \log_3 x \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ \log_3 x - 2 \end{pmatrix}$

$x' = x - 1 \Leftrightarrow x = x' + 1 \text{ und } y' = \log_3(x' + 1) - 2$

$D_f = \mathbb{R}^+; W_f = \mathbb{R}; D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} | x > -1\}; W_{f'} = \mathbb{R}$

c) $f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{x-3} - 1,5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ \frac{1}{x-3} - 1,5 \end{pmatrix}$

$x' = x - 2 \text{ und } y = \frac{1}{x'-1} - 1,5 = \frac{1}{x-3} - 1,5$

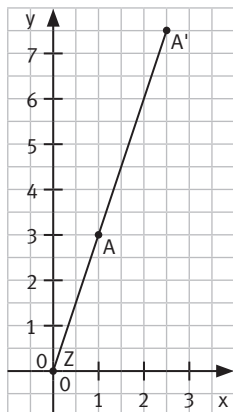
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}; W_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,5\}; D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}; W_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1,5\}$

KX

- 4 Es handelt sich jeweils um eine zentrische Streckung von P auf P' mit dem Zentrum Z(0|0) und dem Streckungsfaktor k.

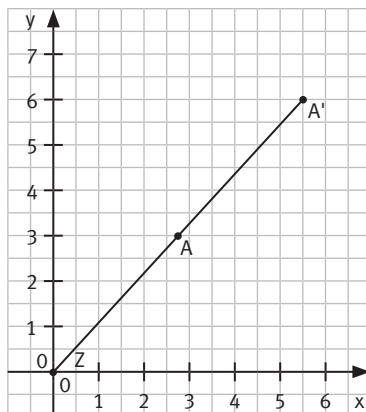
a) $A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 7,5 \end{pmatrix}$

$A'(2,5|7,5)$



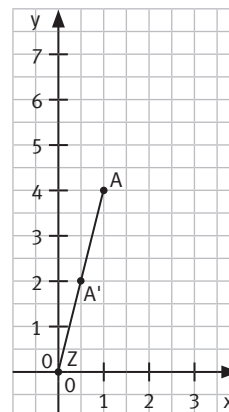
b) $A': \begin{pmatrix} 5,6 \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 6 \end{pmatrix}$

$A'(5,6|6); A(2,8|3)$



c) $A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A'(0,5|2)$



KX

- 5 a) $\tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ; 2\alpha = 90^\circ$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & -\cos 90^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

- b) $\tan \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -45^\circ; 2\alpha = -90^\circ$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & \sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & -\cos(-90^\circ) \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

- c) $\tan \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ; 2\alpha = 0^\circ$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0^\circ & \sin 0^\circ \\ \sin 0^\circ & -\cos 0^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

KX

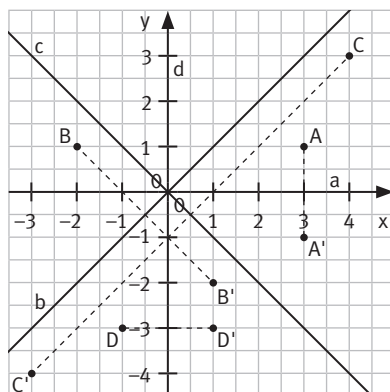
- 6 Es handelt sich um Spiegelungen mit besonderen Geraden als Spiegelachse.

a) x-Achse Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $A'(3|-1)$

b) $w_{I/III}$ Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $B'(1|-2)$

c) $w_{II/IV}$ Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $C'(-3|-4)$

d) y-Achse Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $D'(1|-3)$



KX

- 7 a)
- $\tan \alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 71,565^\circ; 2\alpha = 143,13^\circ$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 143,13^\circ & \sin 143,13^\circ \\ \sin 143,13^\circ & -\cos 143,13^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} \quad A'(-0,5|3,5)$$

- b)
- $\tan \alpha = 0,5 \Rightarrow \alpha = 26,57^\circ; 2\alpha = 53,14^\circ$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 53,14^\circ & \sin 53,14^\circ \\ \sin 53,14^\circ & -\cos 53,14^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6x + 0,8y \\ 0,8x - 0,6y \end{pmatrix}$$

$$\text{I: } 4 = 0,6x + 0,8y \Rightarrow x = \frac{20}{3} - \frac{4}{3}y$$

$$\text{II: } 3 = 0,8x - 0,6y \xrightarrow{\text{I in II}} 3 = 0,8 \cdot \left(\frac{20}{3} - \frac{4}{3}y\right) - 0,6y \Leftrightarrow y = 1,4$$

$$\text{II in I: } x = \frac{20}{3} - \frac{4}{3} \cdot 1,4 = 4,8$$

$$A(4,8|1,4)$$

- c)
- $\tan \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 63,43^\circ; 2\alpha = 126,86^\circ$

$$\begin{pmatrix} 1,2 \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 126,86^\circ & \sin 126,86^\circ \\ \sin 126,86^\circ & -\cos 126,86^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6x + 0,4 \\ 0,8x + 0,3 \end{pmatrix}$$

$$\text{I: } 1,2 = -0,6x + 0,4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

$$\text{II: } y' = 0,8x + 0,3$$

$$\text{I in II: } y' = 0,8 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 0,3 \Leftrightarrow y' = -0,77$$

$$A(-1,33|0,5); A'(1,2|-0,77)$$

KX

- 8 Die Parabel
- $p: y = x^2 + 7$
- ist symmetrisch zur y-Achse:
- $p(x) = p(-x)$
- .

 Die Gleichung der an der y-Achse gespiegelten Parabel stimmt mit der Gleichung von p überein:

$$p = p': y = x^2 + 7$$

KX

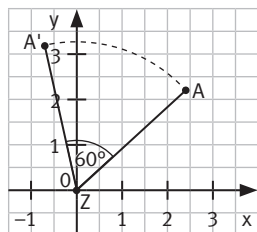
- 9 a)
- $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,71 & -0,71 \\ 0,71 & 0,71 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,71x - 0,71y \\ 0,71x + 0,71y \end{pmatrix}$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-125^\circ) & -\sin(-125^\circ) \\ \sin(-125^\circ) & \cos(-125^\circ) \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,57 & 0,82 \\ -0,82 & -0,57 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,57x + 0,82y \\ -0,82x - 0,57y \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-270^\circ) & -\sin(-270^\circ) \\ \sin(-270^\circ) & \cos(-270^\circ) \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

KX

- 10 Es handelt sich um eine Drehung um
- $Z(0|0)$
- mit
- $\alpha = 60^\circ$
- .



$$\begin{aligned} A': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2,4 \\ 2,2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,5 & -0,87 \\ 0,87 & 0,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2,4 \\ 2,2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0,7 \\ 3,2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A'(-0,7|3,2)$$

KX

- 11 a) Die Gleichung zu
- f'
- lässt sich über die Drehmatrix berechnen.

$$f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

$$x' = x \text{ und } y' = x'$$

$$f': y = x$$

 Alternativ lässt sich die Gleichung zu f' als Senkrechte zu f ermitteln mit $m_f = -1$ und $O(0|0) \in f'$.

- b) Die Gleichung zu
- f'
- lässt sich über die Drehmatrix berechnen.

$$f': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 2x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 2x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -2x-1 \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \Leftrightarrow x = -x' \text{ und } y' = -2x - 1 = 2x' - 1 \quad f': y = 2x - 1$$

 In beiden Fällen kann man natürlich auch zwei Punkte, die auf dem Graphen von f liegen, drehen und anschließend eine neue Geradengleichung bestimmen.

KX

- 12 Es handelt sich um die Verknüpfung einer Drehung und einer zentrischen Streckung.

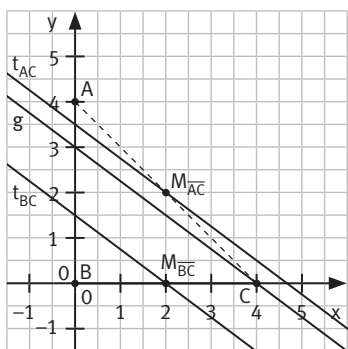
$$\begin{aligned} P': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} 0,5 & -0,87 \\ 0,87 & 0,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -1,61 \\ 3,24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,42 \\ 4,86 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$P'(-2,42|4,86)$$

- KX** 13 Benjamin hat Recht. Für eine Drehung darf die Drehmatrix nur verwendet werden, wenn um $O(0|0)$ gedreht wird. Die Drehung um $Z(1|1)$ ist möglich mittels der Verknüpfung der Parallelverschiebung von $Z(1|1)$ auf $Z^*(0|0)$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, der Drehung um $Z^*(0|0)$ mit α und der Parallelverschiebung mit $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- KX** 14 Skizze:



$$M_{AC_n} \left(\frac{0+x}{2} \mid \frac{4-\frac{3}{4}x+3}{2} \right) = (0,5x \mid -\frac{3}{8}x + 3,5)$$

$$x' = 0,5x \Leftrightarrow x = 2x'$$

$$y' = -\frac{3}{8}x + 3,5 = -\frac{3}{8} \cdot 2x' + 3,5 = -\frac{3}{4}x' + 3,5$$

$$t_{AC_n}: y = -\frac{3}{4}x + 3,5$$

$$M_{BC_n} \left(\frac{0+x}{2} \mid \frac{0-\frac{3}{4}x+3}{2} \right) = (0,5x \mid -\frac{3}{8}x + 1,5)$$

$$x' = 0,5x \Leftrightarrow x = 2x'$$

$$y' = -\frac{3}{8}x + 1,5 = -\frac{3}{8} \cdot 2x' + 1,5 = -\frac{3}{4}x' + 1,5$$

$$t_{BC_n}: y = -\frac{3}{4}x + 1,5$$

- KX** 15 Das ist falsch. Die durch $Z(0|0)$ verlaufende Gerade $f: y = 10x$ ist eine Fixgerade, es gilt: $f = f': y = 10x$.

Aufgaben für Lernpartner

- K1/6** A Das ist falsch. Gegenbeispiel mit $g: y = x$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 $g': \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ x+1 \end{pmatrix}$
 $x' = x + 1 \Leftrightarrow x = x' - 1$ und $y = x + 1 = (x' - 1) + 1 = x'$
 Fixgerade $g = g': y = x$
- K1/6** B Das ist richtig.
- K1/6** C Das ist falsch. Die Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ stellt die Spiegelung an der Winkelhalbierenden des II. und IV. Quadranten dar.
- K1/6** D Das ist falsch. Das Drehzentrum $O(0|0)$ bildet für alle $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ]$ einen Fixpunkt. Außerdem sind für $\alpha = 0^\circ$ alle Punkte Fixpunkte.
- K1/6** E Das ist richtig.
- K1/6** F Das ist falsch. Es ist zwar richtig, dass die Punkte, die einen gemeinsamen geometrischen Ort bilden, nach der Abbildung wiederum einen gemeinsamen geometrischen Ort bilden. Es ist aber nicht korrekt, dass diese Punkte nach der Abbildung den „gleichen“ gemeinsamen geometrischen Ort bilden. Als Gegenbeispiel betrachte man eine Gerade und eine Vierteldrehung als Abbildung. Die Bildgerade steht senkrecht zur ursprünglichen Geraden, ist also nicht „der gleiche gemeinsame Ort“.

Abbildungen mit Matrizen darstellen

- KX** 1 a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -13 \\ 9 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$

- KX** 2 Lösungsmöglichkeit:
Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ ist keine Drehmatrix, da bei Drehmatrizen die Einträge ... aus Sinus- und Kosinuswerten gemäß der Matrix $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ bestehen. Sinus und Kosinus können jedoch nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen.

- KX** 3 a) 90° b) 180° c) 60° d) 30°

- KX** 4 a) Drehung um den Ursprung um 0° oder Vielfache von 360° (Identität)
b) Spiegelung an $w_{I/III}$ ($y = x$)
c) Drehung um den Ursprung um 90°
d) Spiegelung an der Geraden $y = \tan 30^\circ \cdot x = \frac{\sqrt{3}}{3}x$
e) Drehung um den Ursprung um 60°
f) Spiegelung an der Geraden $y = \tan 22,5^\circ \cdot x \approx 0,41 \cdot x$

- KX** 5 a) Drehung um den Ursprung um 30° mit anschließender Parallelverschiebung um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$
b) Spiegelung an der Geraden $y = \tan 50^\circ \cdot x$ mit anschließender zentrischer Streckung mit dem Faktor $k = 2,5$
c) Spiegelung an der x-Achse mit anschließender zentrischer Streckung mit dem Faktor $k = 2$

Abbildungen im Koordinatensystem darstellen

- KX** 6 a) Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit anschließender Drehung um den Ursprung um 120°
b) Zentrische Streckung mit dem Faktor $k = -2$ mit anschließender Spiegelung an der x-Achse

- KX** 7 a) Das Dreieck ABC wird abgebildet auf das Dreieck A'B'C' durch die Nacheinanderausführung von zwei Spiegelungen. Die erste Spiegelung erfolgt an der Geraden g, die zweite Spiegelung an der Geraden h.
b) Das Dreieck ABC wird abgebildet auf das Dreieck A'B'C' durch eine Parallelverschiebung „nach rechts“ um 12 Kästchen.