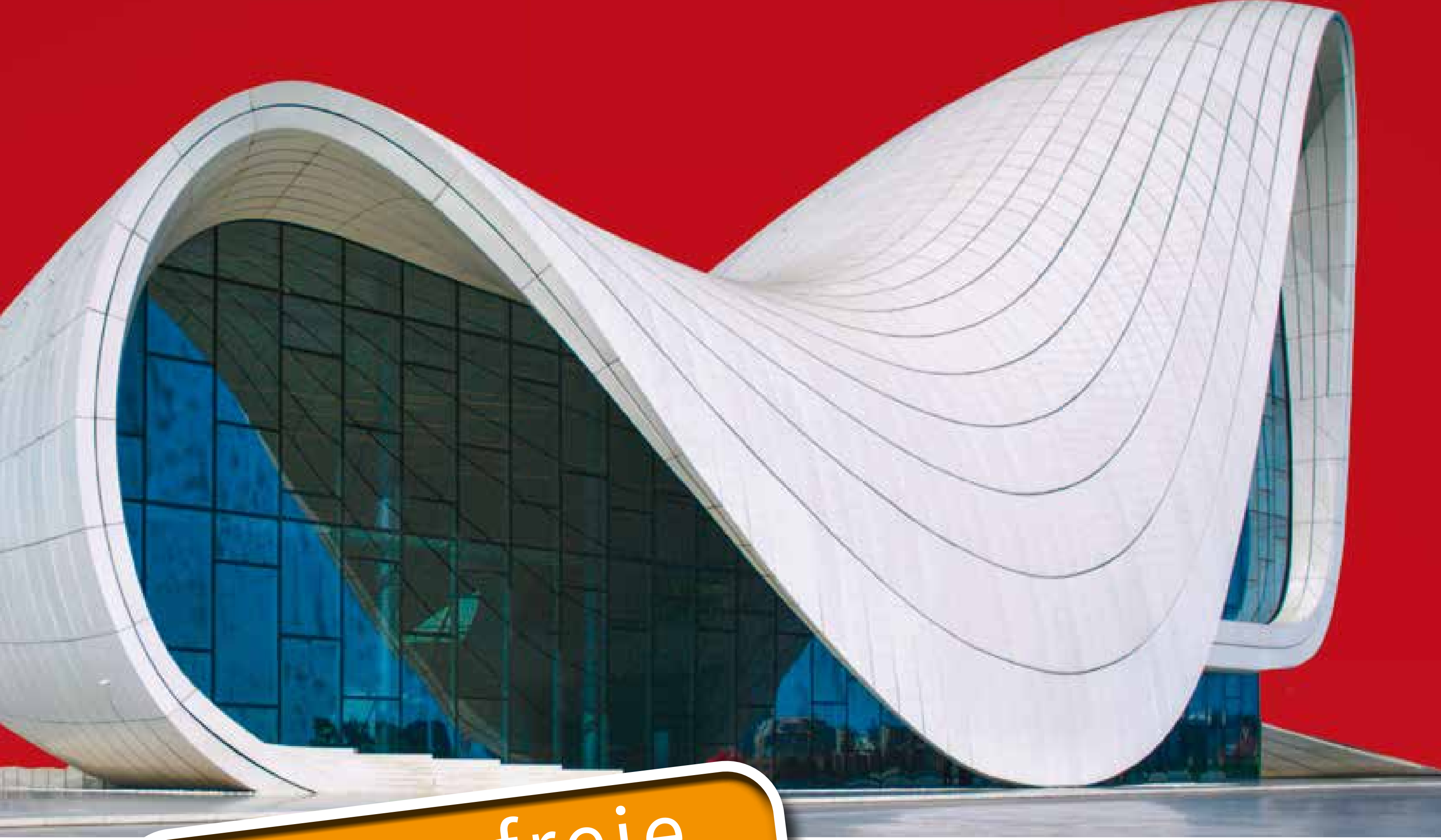
Studienstufe

mathe.delta



kostenfreie LESEPROBE

C.C.BUCHNER

Hamburg

Inhalt

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

zum Schuljahr 2023/24 bieten wir Ihnen eine Hamburg-Ausgabe unseres bewährten Lehrwerks **mathe.delta** für die gymnasiale Oberstufe an. Mit **mathe.delta Studienstufe Hamburg** unterrichten Sie exakt nach den Vorgaben und Intentionen des neuen Bildungsplans. Darüber hinaus wurden die 2020 von der Kultusministerkonferenz verabschiedeten, bundesweit geltenden Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife berücksichtigt. So wird ein motivierender und fundierter Mathematikunterricht gewährleistet, der passgenau auf die Abiturprüfung vorbereitet.

Selbstverständlich bieten wir Ihnen auch volle Unterstützung über das Schulbuch hinaus: Unser **digitales Lehrermaterial click & teach** unterstützt Sie optimal bei der Gestaltung des Unterrichts und bietet zahlreiche Zusatzmaterialien wie Lösungen, Arbeitsblätter, Erklärfilme und vieles mehr.

Wenn Sie mehr über **mathe.delta – Hamburg** erfahren möchten, kontaktieren Sie mich! Ich berate Sie gern.

Ihr Schulberater für Hamburg

Dr. Matthias Lentz
Mobil: 0171 6012386
E-Mail: lentz@ccbuchner.de

mathe.delta Studienstufe Hamburg

Herausgegeben von Axel Goy.
Bearbeitet von Benjamin Castillo-Schulz, Axel Goy, Dominik Hilbert, Christoph Hempfer, Romy Hempfer, Catrin Köninger und Tobias Sildatke unter Mitwirkung von Veli Akyildiz.

mathe.delta Studienstufe Hamburg ist auf die Mathematik-Studienstufe zugeschnitten und ermöglicht eine passgenaue Vorbereitung auf die Abiturprüfung. Hierfür wurde für **mathe.delta Studienstufe Hamburg** ein neues Konzept entwickelt, das eine Fülle gängiger Prüfungsfragen stellt, die Operatoren schult und an mehreren Stellen und durch unterschiedliche konzeptionelle Elemente die Abiturprüfung simuliert.

Jedes Kapitel ist in mehrere Untereinheiten gegliedert und enthält eine Reihe verschiedener, aber in jedem Kapitel immer gleicher Seitentypen, die Sie als Lehrkraft bei Ihrem Unterricht mit **mathe.delta Studienstufe Hamburg** unterstützen. Die Ausführungen ab Seite 6 erläutern die didaktischen Intentionen der einzelnen Strukturelemente.

Mit **mathe.delta Studienstufe Hamburg** arbeiten Sie und Ihre Klasse digital:

Für Schülerinnen und Schüler: Digitales Schulbuch click & study

Das **digitale Schulbuch click & study** bietet Ihren Schülerinnen und Schülern die vollständige digitale Ausgabe von **mathe.delta Studienstufe Hamburg**, einen modernen Reader mit zahlreichen nützlichen Bearbeitungswerkzeugen sowie einen direkten Zugriff auf Links und Zusatzmaterialien, die im gedruckten Schulbuch über Mediencodes zugänglich sind.

Für Lehrerinnen und Lehrer: Digitales Lehrermaterial click & teach

Für eine schnelle und unkomplizierte Unterrichtsvorbereitung bieten wir mit **click & teach** ein digitales Lehrermaterial an. Enthalten sind neben sämtlichen Lösungen der Aufgaben weitere Zusatzmaterialien wie Arbeitsblätter oder Erklärfilme.

click & teach-Demo

Weitere Informationen zu unseren digitalen Angeboten finden Sie auf den Seiten 62–69

	Titel	ISBN 978-3-661-	Ladenpreis	Aktionsprüfpreis	Lieferbarkeit
click & study	**mathe.delta Studienstufe Hamburg**	**63025**-0	ca. 35,– €	15,– €*	*3. Quartal 2023*
click & teach	**click & teach Studienstufe Einzellizenz** Digitales Lehrermaterial (Digitaler Freischaltcode)	**WEB 630271**	ca. 36,50 €	Ladenpreis	*3. Quartal 2023*

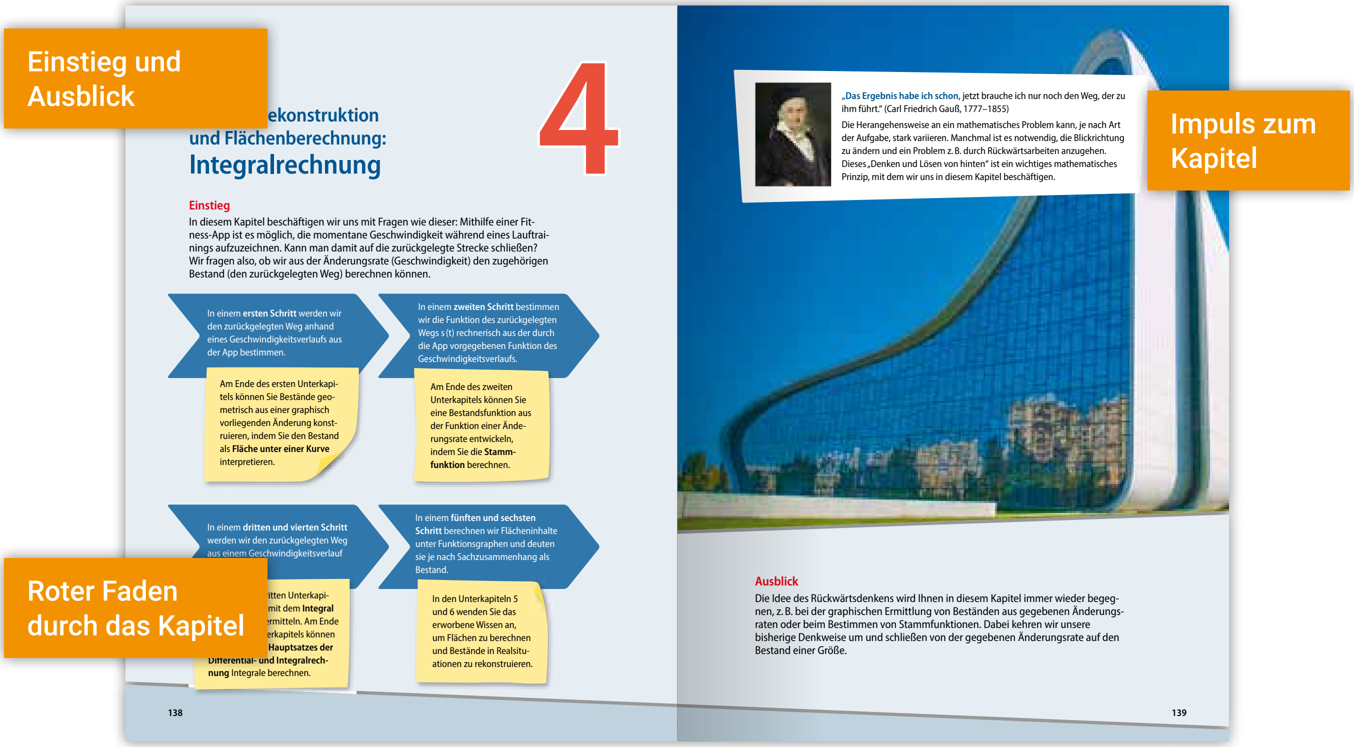
Stand März 2023. Änderungen und Irrtümer vorbehalten.

* Dieses Angebot gilt nur für Einzelbestellungen (keine Klassensätze) und nur, wenn Sie Mathematik für die Studienstufe in Hamburg unterrichten. Gültig bis 30.06.2023.

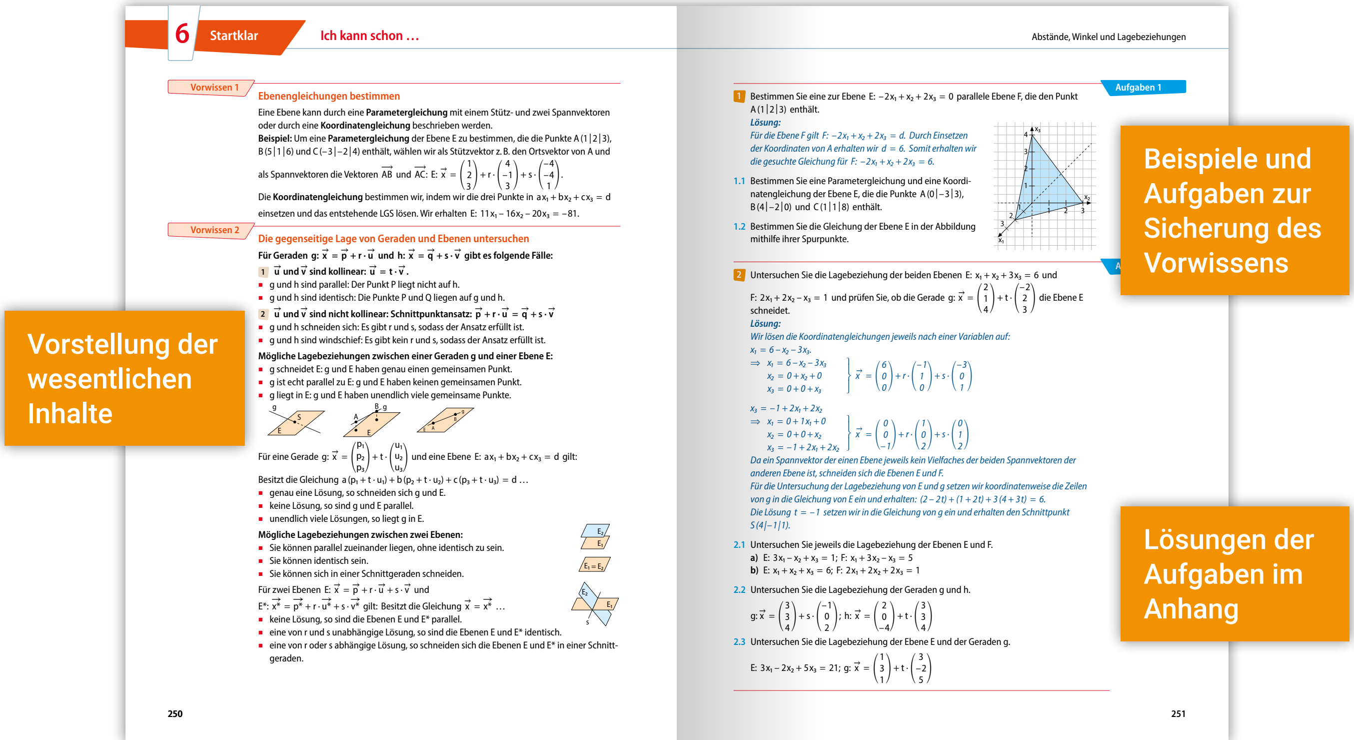
click & study: Erscheint auch als digitale Ausgabe click & study.

click & teach: Nur erhältlich auf www.ccbuchner.de. Weitere Lizenzformen des digitalen Lehrermaterials click & teach finden Sie ebenfalls auf unserer Webseite. Eine Bestellung von click & teach ist ausschließlich dort möglich. Damit Sie schnell mit dem digitalen Lehrermaterial arbeiten können, erscheint click & teach frühestmöglich mit einem Teil der Materialien und wird sukzessive ergänzt. Um mit der aktuellsten click & teach-Version arbeiten können, ist ein regelmäßiges Update erforderlich.

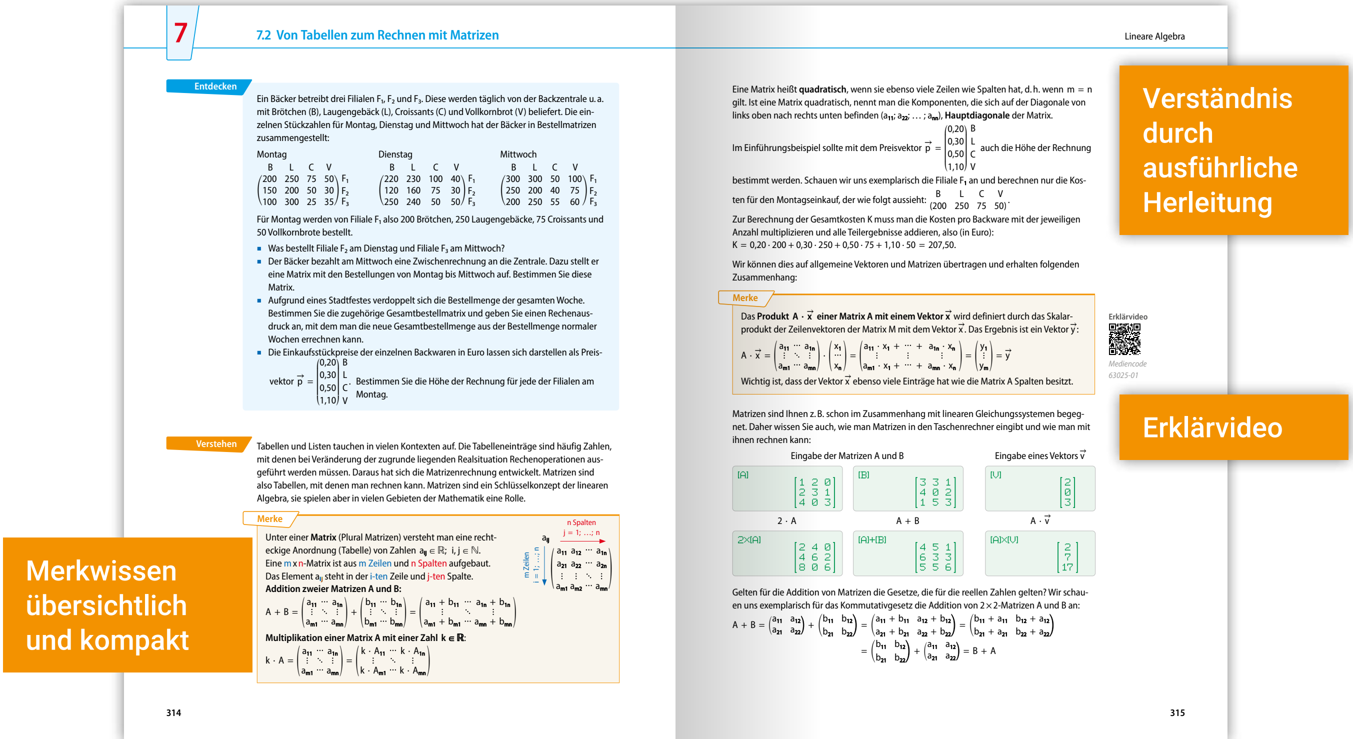
Auf der **Auftaktdoppelseite** wird der dem Kapitel zugrunde liegende Leitgedanke vorgestellt und aufgezeigt, was in den einzelnen Unterkapiteln thematisiert wird und gelernt werden kann.



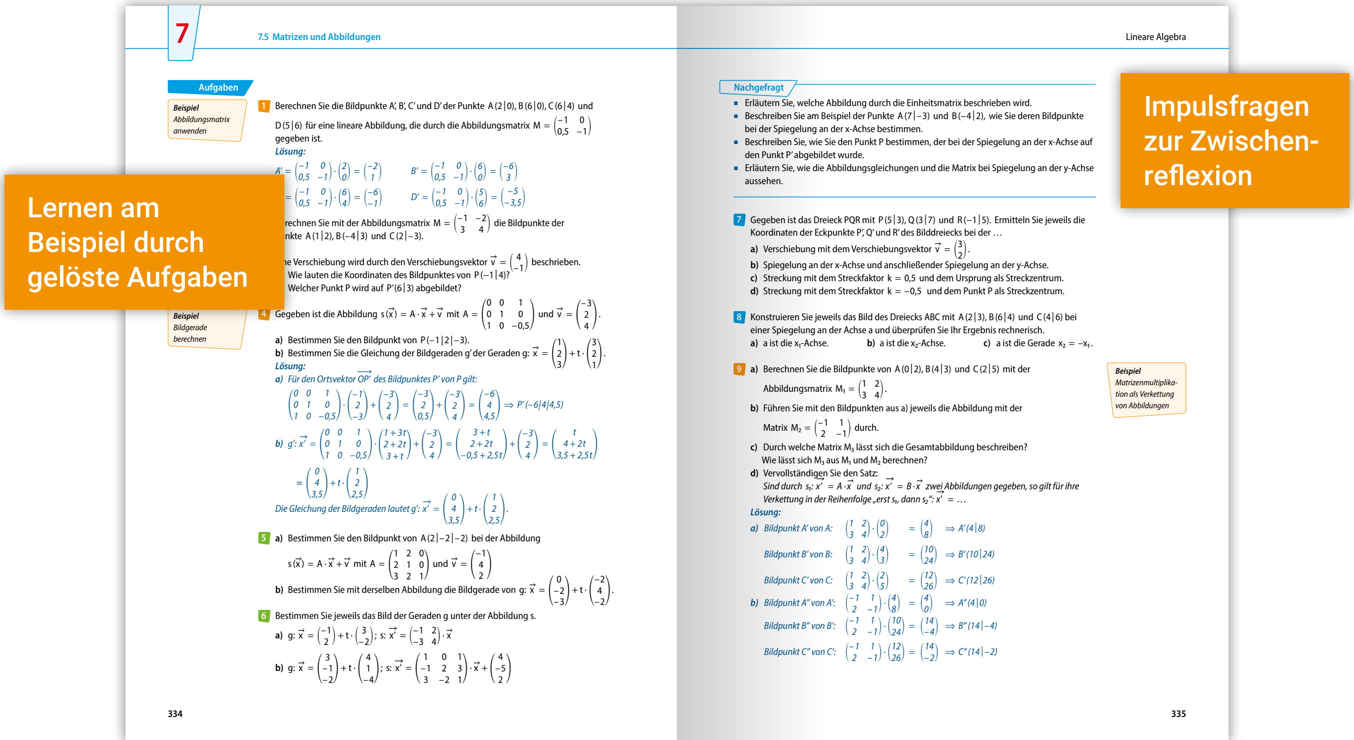
In **Startklar** können die Schülerinnen und Schüler wesentliche Inhalte der vergangenen Schuljahre wiederholen. Dieser intensiven Wiederholung liegt die Idee zugrunde, dass Vorwissen ein wesentlicher Faktor für Leistung ist und dass Kompetenzen aus vergangenen Schuljahren gerade in einem hierarchisch aufgebauten Fach wie Mathematik besonders wichtig sind.



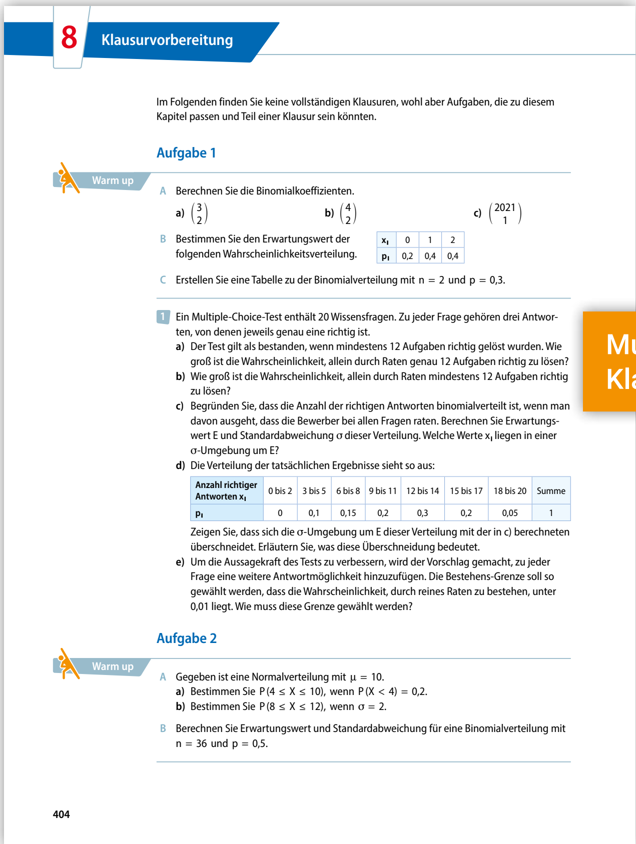
Jedes **Unterkapitel** beginnt mit einer einführenden Doppelseite, an deren Beginn unter **Entdecken** eine Einstiegsaufgabe steht, und auf der anschließend unter **Verstehen** (anknüpfend an die Einstiegsaufgabe) das Wesentliche langsam und ausführlich erklärend entwickelt wird.



Auf den folgenden Seiten finden Sie ein reichhaltiges Angebot an **Übungsaufgaben**. Die Aufgaben sind durch Farbkategorien nach aufsteigendem Komplexitätsgrad geordnet: Grüne Aufgaben erfordern einfache Rechenoperationen; blaue Aufgaben sind vernetzende Standardaufgaben und verknüpfen z.B. unterschiedliche Darstellungsformen miteinander. Rote Aufgaben vertiefen das Erlernte und bewegen sich zuweilen auf erhöhtem Anforderungsniveau.



Auf den Seiten zur **Klausurvorbereitung** finden Sie mehrere, zum jeweiligen Kapitel passende Aufgaben, die auf schriftliche Klausuren vorbereiten.



8 Klausurvorbereitung

Im Folgenden finden Sie keine vollständigen Klausuren, wohl aber Aufgaben, die zu diesem Kapitel passen und Teil einer Klausur sein könnten.

Aufgabe 1

Warm up

A Berechnen Sie die Binomialkoeffizienten.

a) $\binom{3}{2}$ b) $\binom{4}{2}$ c) $\binom{2021}{1}$

B Bestimmen Sie den Erwartungswert der folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilung.

x_i	0	1	2
p_i	0,2	0,4	0,4

C Erstellen Sie eine Tabelle zu der Binomialverteilung mit $n = 2$ und $p = 0{,}3$.

1 Ein Multiple-Choice-Test enthält 20 Wissensfragen. Zu jeder Frage gehören drei Antworten, von denen jeweils genau eine richtig ist.

a) Der Test gilt als bestanden, wenn mindestens 12 Aufgaben richtig gelöst wurden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, allein durch Raten genau 12 Aufgaben richtig zu lösen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, allein durch Raten mindestens 12 Aufgaben richtig zu lösen?

c) Begründen Sie, dass die Anzahl der richtigen Antworten binomialverteilt ist, wenn man davon ausgeht, dass die Bewerber bei allen Fragen raten. Berechnen Sie Erwartungswert E und Standardabweichung σ dieser Verteilung. Welche Werte x_i liegen in einer σ-Umgebung um E?

d) Die Verteilung der tatsächlichen Ergebnisse sieht so aus:

Anzahl richtiger Antworten x_i	0 bis 2	3 bis 5	6 bis 8	9 bis 11	12 bis 14	15 bis 17	18 bis 20	Summe
p_i	0	0,1	0,15	0,2	0,3	0,2	0,05	1

Zeigen Sie, dass sich die σ-Umgebung um E dieser Verteilung mit der in c) berechneten überschneidet. Erläutern Sie, was diese Überschneidung bedeutet.

e) Um die Aussagekraft des Tests zu verbessern, wird der Vorschlag gemacht, zu jeder Frage eine weitere Antwortmöglichkeit hinzuzufügen. Die Bestehens-Grenze soll so gewählt werden, dass die Wahrscheinlichkeit, durch reines Raten zu bestehen, unter 0,01 liegt. Wie muss diese Grenze gewählt werden?

Aufgabe 2

Warm up

A Gegeben ist eine Normalverteilung mit $\mu = 10$.

a) Bestimmen Sie $P(4 \le X \le 10)$, wenn $P(X < 4) = 0{,}2$.

b) Bestimmen Sie $P(8 \le X \le 12)$, wenn $\sigma = 2$.

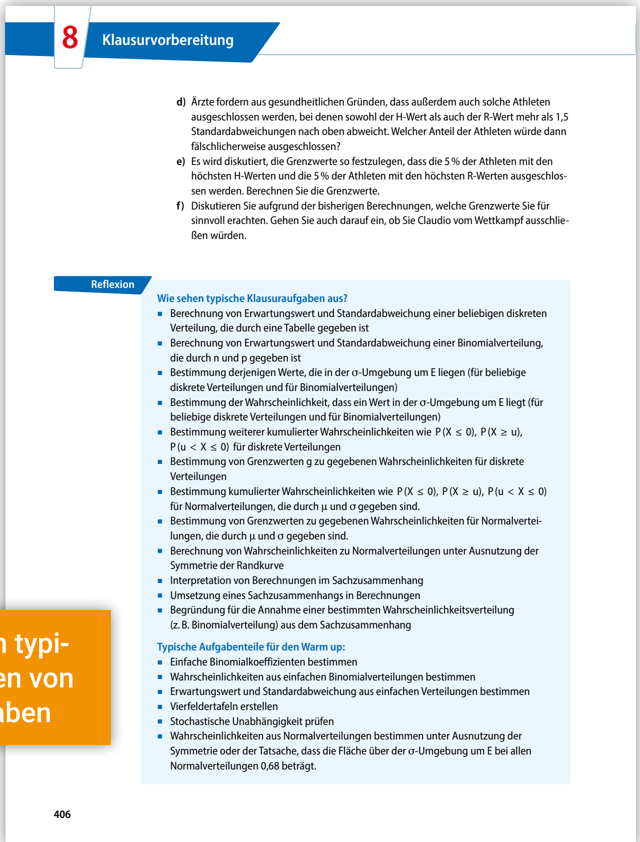
B Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung für eine Binomialverteilung mit $n = 36$ und $p = 0{,}5$.

404

Eröffnet werden die jeweiligen Aufgaben durch ein **Warm Up** mit zwei bis drei Basisaufgaben.

Muster für Klausuraufgaben

Abgeschlossen werden diese Seiten durch einen zusammenfassenden **Überblick über typische Aufgabenformate und Fragestellungen**, die im Kontext des jeweiligen Kapitelthemas auftreten können.



8 Klausurvorbereitung

d) Ärzte fordern aus gesundheitlichen Gründen, dass außerdem auch solche Athleten ausgeschlossen werden, bei denen sowohl der H-Wert als auch der R-Wert mehr als 1,5 Standardabweichungen nach oben abweicht. Welcher Anteil der Athleten würde dann fälschlicherweise ausgeschlossen?

e) Es wird diskutiert, die Grenzwerte so festzulegen, dass die 5 % der Athleten mit den höchsten H-Werten und die 5 % der Athleten mit den höchsten R-Werten ausgeschlossen werden. Berechnen Sie die Grenzwerte.

f) Diskutieren Sie aufgrund der bisherigen Berechnungen, welche Grenzwerte Sie für sinnvoll erachten. Gehen Sie auch darauf ein, ob Sie Claudio vom Wettkampf ausschließen würden.

Reflexion

Wie sehen typische Klausuraufgaben aus?

- Berechnung von Erwartungswert und Standardabweichung einer beliebigen diskreten Verteilung, die durch eine Tabelle gegeben ist
- Berechnung von Erwartungswert und Standardabweichung einer Binomialverteilung, die durch n und p gegeben ist
- Bestimmung derjenigen Werte, die in der σ-Umgebung um E liegen (für beliebige diskrete Verteilungen und für Binomialverteilungen)
- Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert in der σ-Umgebung um E liegt (für beliebige diskrete Verteilungen und für Binomialverteilungen)
- Bestimmung weiterer kumulierter Wahrscheinlichkeiten wie $P(X \le 0)$, $P(X \ge u)$, $P(u < X \le 0)$ für diskrete Verteilungen
- Bestimmung von Grenzwerten g zu gegebenen Wahrscheinlichkeiten für diskrete Verteilungen
- Bestimmung kumulierter Wahrscheinlichkeiten wie $P(X \le 0)$, $P(X \ge u)$, $P(u < X \le 0)$ für Normalverteilungen, die durch μ und σ gegeben sind.
- Bestimmung von Grenzwerten zu gegebenen Wahrscheinlichkeiten für Normalverteilungen, die durch μ und σ gegeben sind.
- Berechnung von Wahrscheinlichkeiten zu Normalverteilungen unter Ausnutzung der Symmetrie der Randkurve
- Interpretation von Berechnungen im Sachzusammenhang
- Umsetzung eines Sachzusammenhangs in Berechnungen
- Begründung für die Annahme einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung (z. B. Binomialverteilung) aus dem Sachzusammenhang

Typische Aufgabenteile für den Warm up:

- Einfache Binomialkoeffizienten bestimmen
- Wahrscheinlichkeiten aus einfachen Binomialverteilungen bestimmen
- Erwartungswert und Standardabweichung aus einfachen Verteilungen bestimmen
- Vierfeldertafeln erstellen
- Stochastische Unabhängigkeit prüfen
- Wahrscheinlichkeiten aus Normalverteilungen bestimmen unter Ausnutzung der Symmetrie oder der Tatsache, dass die Fläche über der σ-Umgebung um E bei allen Normalverteilungen 0,68 beträgt.

406

Reflexion von typischen Inhalten von Klausuraufgaben

Unter **Abiturvorbereitung** finden Sie mehrere, zum jeweiligen Kapitel passende Aufgaben, wie sie im Abitur gestellt werden können.

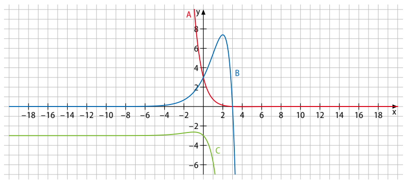
Muster für Abituraufgaben

2 Abiturvorbereitung

2 Landflucht ist ein globales Phänomen unserer Zeit. Derzeit leben in Deutschland 77 Prozent der Menschen in Städten oder Ballungsgebieten und nur 15 Prozent in Dörfern mit weniger als 5000 Einwohnern. So wächst auch München mit derzeit rund 1 500 000 Einwohnern jährlich um 0,75 %.

a) Skizzieren Sie den Graphen der diesem Bevölkerungswachstum zugrunde liegenden Funktion.
b) Erklären Sie, weshalb es sich um kein lineares Wachstum handeln kann. Wie müsste die Bevölkerung wachsen, wenn ihr ein lineares Wachstum zugrunde liegen würde?
c) Geben Sie einen Funktionsterm $f(x)$ an, der das Bevölkerungswachstum beschreibt.
d) Erläutern Sie die Bedeutung der Ableitung an einer bestimmten Stelle für die zugrunde liegende Realsituation.
e) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f.
f) Von „Megacities" spricht man ab einer Bevölkerungszahl von 10 000 000 Einwohnern. Wann wäre München nach dem zugrunde liegenden Modell eine Megacity?
g) Diskutieren Sie die Grenzen des vorgegebenen Wachstumsmodells.

3 Gegeben sind drei Funktionen und ihre Graphen:
$f_1(x) = -(x-3) \cdot e^{-x}$ $\quad f_2(x) = -(x-3) \cdot e^{x}$ $\quad f_3(x) = -x \cdot e^{x} - 3$



a) Entscheiden Sie begründet, welcher der Funktionsterme zu welchem der abgebildeten Graphen passt. Gehen Sie insbesondere darauf ein, weshalb der Graph B zu $f_2(x)$ gehört.
b) Erläutern Sie, wie man auf Basis des Funktionsterms $f_2(x) = -(x-3) \cdot e^{x}$ durch Betrachten großer und kleiner Werte für x den Kurvenverlauf erschließen kann. Gehen Sie dabei auch auf den Verlauf des Graphen zwischen $-1 < x < 2$ ein.
c) Berechnen Sie den Hochpunkt von $f_2(x)$ sowie seine Nullstelle und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.
d) Beschreiben Sie die Bedeutung der x-Achse für den Graphen von $f_2(x)$.
e) Ermitteln Sie die Steigung des Graphen von $f_2(x)$ zeichnerisch und rechnerisch.
f) Ermitteln Sie zeichnerisch die Stelle, an der der Graph von $f_2(x)$ die Gerade $y = -3x + 3$ schneidet. Erläutern Sie, warum die rechnerische Bestimmung dieser Stelle schwierig ist.
g) Finden Sie eine Realsituation, die vom Graphen von $f_2(x)$ beschrieben wird. Gehen Sie dabei auch auf die wesentlichen Abschnitte und Eigenschaften des Graphen ein.
h) Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage:
„Wachstum kann stets gut durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden."

90

Exponentialfunktionund Logarithmus

Reflexion

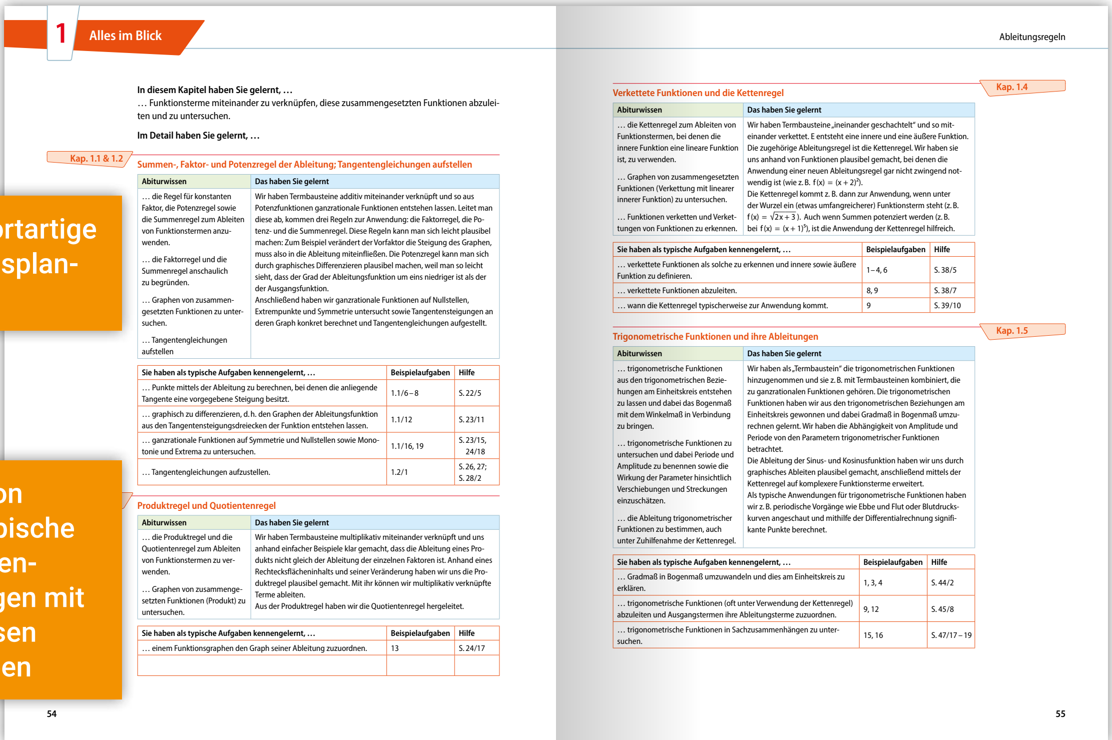
Arbeitsaufträge und Fragen zur Vorbereitung auf das Abitur	Hilfe
Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen der natürlichen Exponentialfunktion unter Verwendung mathematischer Fachbegriffe.	S. 68
Erläutern Sie am Beispiel der Exponentialfunktion, was man unter einer Asymptote versteht.	S. 60/1
Beschreiben Sie Anwendungskontexte, in denen Exponentialfunktionen eine Rolle spielen.	S. 63/4, 80
Beschreiben Sie an einem Beispiel, was man unter einer verketteten Exponentialfunktion versteht und wofür Sie die Kettenregel gebrauchen können.	S. 70/4
Führen Sie ein Beispiel für eine zusammengesetzte Exponentialfunktion an, die man mit der Produktregel ableiten kann.	S. 70/4
Beschreiben Sie (möglichst mehrere) Verfahren, mit denen Sie Exponentialgleichungen lösen können.	S. 60/2, 74
Erläutern Sie am konkreten Beispiel, was man unter dem „ln" versteht.	S. 65, 74
Warum ist der natürliche Logarithmus ln nur für positive Zahlen definiert?	S. 65
Was versteht man unter der Euler'schen Zahl e? Wie kann man sie berechnen, welche Eigenschaften besitzt sie? Gehen Sie dabei auch auf die Zahl e als Grenzwert ein.	S. 65
Zu welchem Zahlbereich gehört die Zahl e? Welche andere bekannte Zahl weist ähnliche Eigenschaften auf? Kontextualisieren Sie Ihre Antwort, indem Sie allgemein auf Zahlbereiche und ihre Eigenschaften eingehen.	S. 65
Grenzen Sie am konkreten Beispiel die Operationen Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren gegeneinander ab.	S. 75
Erläutern Sie folgenden Satz: „Wurzelfunktionen verhalten sich zu quadratischen Funktionen wie die Logarithmus- zur Exponentialfunktion."	S. 75
Erläutern Sie (möglichst an einem Beispiel), weshalb man die Exponentialfunktion einem Wachstum nur für einen bestimmten Zeitraum zugrunde legen kann.	S. 81
Beschreiben Sie, welche Veränderungen Parametervariationen am Graphen der Exponentialfunktion bewirken. Gehen Sie dabei auf die Parameter a, b und d in $f(x) = a \cdot b^{x} + d$ ein.	S. 68, 69
Diskutieren Sie das Steigungsverhalten von Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen im Vergleich.	S. 73/ Nachgefragt
Warum ist die Ableitung von $f(x) = e^{-x}$ nicht $f'(x) = e^{-x}$? Begründen Sie graphisch-geometrisch, indem Sie den Graphen von $f(x) = e^{-x}$ zeichnen.	S. 68, 69
Finden Sie (möglichst mehrere) Begründungen, weshalb die Ableitung von $f(x) = e^{x}$ nicht $f'(x) = x \cdot e^{x-1}$ ist.	S. 65
Wie können Sie auf Basis einer Wertetabelle entscheiden, ob ein exponentielles Wachstum vorliegt? Erklären Sie, wie Sie dann den Anfangsbestand und den Wachstumsfaktor bestimmen.	S. 80

91

Den Abschluss bildet eine Zusammenstellung von typischen Fragen, wie sie im Abitur zum jeweiligen Kapitelthema gestellt werden können. Die Fragen regen zum **Reflektieren** an, fordern zum **Beurteilen** und **Argumentieren** auf und dazu, Verfahren oder Vorgehensweisen zu **beschreiben**.

Reflexion von typischen Inhalten von Abituraufgaben

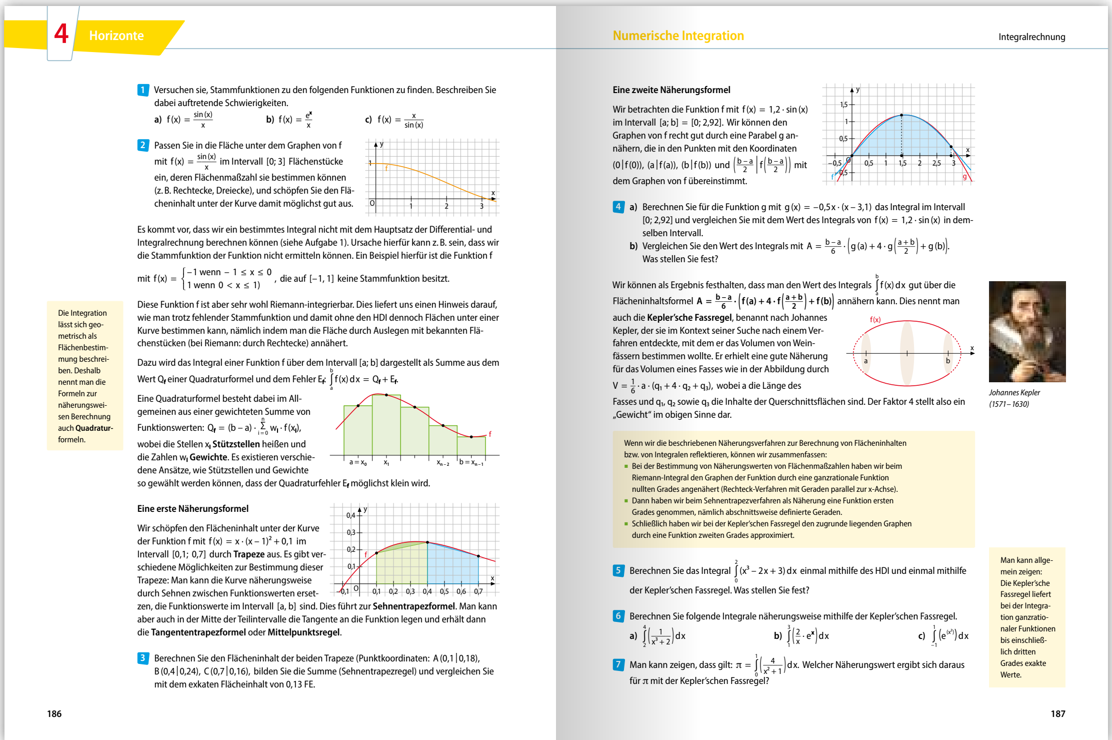
Die Doppelseite **Alles im Blick** macht zum einen transparent, dass der **Bildungsplan** exakt abgebildet wird und damit eine solide Abiturvorbereitung gewährleistet ist. Zum anderen wird aufgezeigt, wie unser Lehrwerk den Bildungsplan konkretisiert und umsetzt. Schließlich werden die für das jeweilige Unterkapitel wesentlichen Kompetenzen und Aufgaben genannt und es wird dargelegt, an welchen Stellen man sie üben kann und wo man im Buch dazu Hilfe findet.



stichwortartige Bildungsplanbezüge

Reflexion über typische Aufgabenstellungen mit Hinweisen zum Üben

Die Seitenkategorie **Horizonte** bietet auch Inhalte für das erhöhte Niveau und blickt über das durch den Bildungsplan vorgegebene Standardniveau hinaus. Es werden interessante Aspekte beleuchtet, die an die Inhalte des Kapitels anknüpfen und Ausblicke auf Kompetenzen liefern, die in unterschiedlichen Studiengängen hilfreich sein können.



Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Mögliche Stoffverteilung entsprechend den Modulen mit Schwerpunkten
in folgenden Kapiteln:
1. Jahr: Kapitel 1, 3, 4, 8, 5, 6
2. Jahr: Kapitel 2, 4, 8, 5/6 oder 7

1

Erweiterung der Differentialrechnung I: Ableitungsregeln

Einstieg

In diesem Kapitel wollen wir die Arbeitsweise eines Mathematikers simulieren. Die Phänomene, mit denen wir uns beschäftigen, sind einerseits Terme, andererseits ihre zugehörigen Graphen mit ihren Eigenschaften wie Extrempunkte oder Monotonieverhalten. Wir gehen dabei so vor, dass wir Terme auf verschiedene Arten miteinander kombinieren.

In einem **ersten Schritt** kombinieren wir Terme, indem wir sie additiv miteinander verknüpfen.

Am Ende des ersten Unterkapitels können Sie **Funktionen** wie $f(x) = 2x^5 + 3x^3 + 6$ ableiten sowie **auf Monotonie, Symmetrie und Nullstellen untersuchen**.

In einem **zweiten Schritt** kombinieren wir Terme, indem wir sie multiplikativ miteinander verknüpfen.

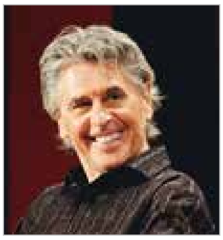
Am Ende des zweiten Unterkapitels haben Sie die **Produktregel als neue Ableitungsregel** kennen gelernt und können Funktionen wie $f(x) = (x+5)^2 \cdot (x-3)$ ableiten.

In einem **dritten Schritt** kombinieren wir Terme, indem wir sie miteinander verketten. Dabei entsteht eine innere und eine äußere Funktion.

Am Ende des dritten Unterkapitels haben Sie die **Verkettung von Termen** kennengelernt und können Funktionen wie $f(x) = (3x+4)^6$ mit der **Kettenregel** ableiten.

In einem **vierten Schritt** nehmen wir den Sinus und Kosinus hinzu und kombinieren sie mit linearen Termen.

Am Ende des vierten Unterkapitels können Sie **Funktionen** wie $f(x) = 4 \cdot \sin(x+2)$ **ableiten** sowie auf **Monotonie, Symmetrie und Nullstellen untersuchen**.



Was ist Mathematik? Der renommierte Mathematiker Keith Devlin beantwortete diese Frage sinngemäß wie folgt: Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern. Sie untersucht abstrakte Muster, z. B. Zahlenmuster, Termmuster oder Muster in Graphen. Dabei geht es z. B. darum, Ähnlichkeiten zwischen zwei Phänomenen zu erkennen und diese in Beziehung zu setzen zu Ähnlichkeiten zweier anderer Phänomene.

Ausblick

Die Mustererkennung, die sich als roter Faden durch das Kapitel zieht, spielt sowohl beim Zusammenspiel zwischen dem Aussehen des Terms und dem Aussehen des Graphen eine Rolle als auch beim Erkennen und Entdecken der Ableitungsregeln.

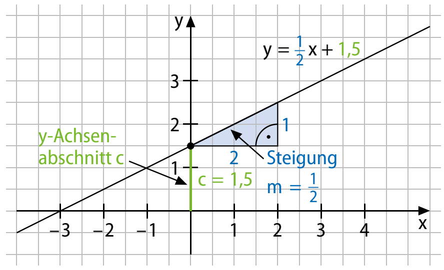
1 Startklar

Ich kann schon …

Vorwissen 1

Lineare Funktionen untersuchen und zeichnen

Lineare Funktionen haben die Funktionsgleichung $y = m \cdot x + c$. Der Graph ist eine **Gerade**, wobei m deren Steigung angibt und c den y-Achsenabschnitt, d. h. die y-Koordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse.
Die Steigung kann mithilfe des Steigungsdreiecks berechnet werden:
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.



Vorwissen 2

Quadratische Funktionen untersuchen und zeichnen

Quadratische Funktionen haben die Funktionsgleichung $f(x) = \mathbf{a} \cdot (x - \mathbf{d})^2 + \mathbf{e}$ **(Scheitelpunktform)** oder $f(x) = \mathbf{a}x^2 + bx + c$ (**Normalform**) oder $f(x) = (x + m) \cdot (x + n)$ (**faktorisierte Form**). Ihren Graphen nennt man **Parabel**.

- Der Vorfaktor **a** bewirkt eine Streckung oder Stauchung der Parabel und macht eine Aussage über ihre Öffnung:

$0 < \mathbf{a} < 1$	$\mathbf{a} > 1$	$-1 < \mathbf{a} < 0$	$\mathbf{a} < -1$
nach oben geöffnet, gestaucht	nach oben geöffnet, gestreckt	nach unten geöffnet, gestaucht	nach unten geöffnet, gestreckt

- Der Parameter **d** bewirkt eine Verschiebung der Parabel in x-Richtung (für $\mathbf{d} < 0$ nach links, für $\mathbf{d} > 0$ nach rechts).
- Der Parameter **e** bewirkt eine Verschiebung der Parabel in y-Richtung (für $\mathbf{e} < 0$ nach unten, für $\mathbf{e} > 0$ nach oben).
- Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $S(\mathbf{d}\,|\,\mathbf{e})$.

Jeder der drei Darstellungen hat ihren Vorteil:

Darstellung	Scheitelpunktform	Normalform	Faktorisierte Form
Funktionsgleichung	$f(x) = \mathbf{a} \cdot (x - \mathbf{d})^2 + \mathbf{e}$	$f(x) = \mathbf{a}x^2 + bx + c$	$f(x) = (x + m) \cdot (x + n)$
Beispiel	$f(x) = 2(x - 2{,}5)^2 - 4{,}5$	$f(x) = 2x^2 - 10x + 8$	$f(x) = 2(x - 1)(x - 4)$
Direkt ablesbar	Scheitelpunkt $S(2{,}5\,|\,-4{,}5)$ Streckfaktor 2	Schnittpunkt mit y-Achse $(0\,|\,8)$; Streckfaktor 2	Nullstellen $N_1(1\,|\,0)$ und $N_2(4\,|\,0)$; Streckfaktor 2

Hat eine Parabel zwei Nullstellen, liegt die x-Koordinate des Scheitels in der Mitte der Nullstellen.

Man kann die Normalform durch **quadratische Ergänzung** in Scheitelpunktform überführen:

1. Schritt: Ausklammern des Vorfaktors	$f(x) = 2x^2 - 10x + 8 = 2 \cdot (x^2 - 5x + 4)$
2. Schritt: Term in Klammer zu binomischer Formel ergänzen	$f(x) = 2 \cdot (x^2 - 5x + 4) = 2 \cdot (x^2 - 5x + 6{,}25 - 6{,}25 + 4)$
3. Schritt: binomische Formel erzeugen	$f(x) = 2 \cdot (x^2 - 5x + 6{,}25 - 6{,}25 + 4) = 2 \cdot ((x^2 - 5x + 6{,}25) - 6{,}25 + 4)$ $= 2 \cdot ((x - 2{,}5)^2 - 2{,}25)$
4. Schritt: mit Vorfaktor multiplizieren	$F(x) = 2 \cdot (x - 2{,}5)^2 - 4{,}5$

Aufgaben 1

1 Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung einer linearen Funktion, deren Graph durch den Punkt $P(3\,|\,-1)$ verläuft und die Steigung $\frac{1}{4}$ hat.

Lösung:

Eine lineare Funktion hat die Gleichung $y = m \cdot x + c$. Die Steigung $m = \frac{1}{4}$ ist gegeben.
Den y-Achsenabschnitt c berechnet man durch Einsetzen der Koordinaten des Punkts P:
$-1 = \frac{1}{4} \cdot 3 + c \Rightarrow c = -1 - \frac{1}{4} \cdot 3 = -1{,}75$. Die Geradengleichung lautet somit $y = \frac{1}{4}x - 1{,}75$.

1.1 Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung einer linearen Funktion, deren Graph …

a) die Nullstelle 2,5 und den y-Achsenabschnitt $-1\frac{1}{5}$ hat.

b) durch die beiden Punkte $A(-2\,|\,-0{,}75)$ und $B(4{,}6\,|\,1{,}2)$ verläuft.

1.2 Zeichnen Sie jeweils den Graphen der Funktion.

a) $y = 1{,}5x + 2$ **b)** $y = -\frac{1}{2}x - 1$ **c)** $y = 2$

Aufgaben 2

2 Bestimmen Sie den Scheitel der quadratischen Funktion f mit $f(x) = x^2 + 5x + 5$.

Lösung:

Überführen von Normal- in Scheitelform durch quadratische Ergänzung:
$f(x) = x^2 + 5x + 5 = (x^2 + 5x + 6{,}25) - 6{,}25 + 5 = (x + 2{,}5)^2 - 1{,}25 \Rightarrow$ Scheitel $S(-2{,}5\,|\,-1{,}25)$

2.1 Bestimmen Sie jeweils den Scheitel der quadratischen Funktion f.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ **b)** $f(x) = -2x^2 + 4x - 6$ **c)** $f(x) = -2x^2 - 5$

2.2 Skizzieren Sie die Graphen der folgenden quadratischen Funktionen f, indem Sie die Nullstellen und daraus den Scheitel bestimmen.

a) $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$ **b)** $f(x) = x^2 - x - 1$ **c)** $f(x) = -x^2 - 6x - 8$

2.3 Gegeben sind drei Gleichungen, die alle die gleiche Funktion beschreiben:

1 $f(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4{,}5$ **2** $f(x) = -2(x + 1)(x - 2)$ **3** $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$.

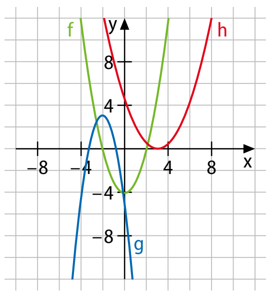
a) Weisen Sie nach, dass es sich um die gleiche Funktion handelt.

b) Geben Sie für die jeweilige Darstellung die direkt ablesbaren Informationen über den Funktionsgraphen an und skizzieren Sie anschließend das Schaubild.

2.4 Leiten Sie jeweils aus der Funktionsgleichung wesentliche Eigenschaften des zugehörigen Graphen ab und skizzieren Sie anschließend den Graphen.

a) $f(x) = x^2 + 7x + 12$ **b)** $f(x) = -(x + 1)(-x - 1)$

2.5 Geben Sie die Gleichung der Funktionen f, g und h zu den abgebildeten Funktionsgraphen an.



2.6 Gegeben sind die drei folgenden quadratischen Funktionen:
$f(x) = (x + 4)^2$ $g(x) = -(x - 5)^2 + 9$ $h(x) = -x^2 - 8$.

a) Geben Sie zu jeder der drei Parabeln den Scheitelpunkt sowie den Schnittpunkt mit der y-Achse an.

b) Prüfen Sie rechnerisch, ob der Punkt $B\left(3\frac{1}{2}\,\middle|\,6{,}75\right)$ auf dem Schaubild von g liegt.

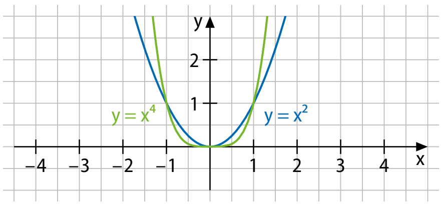
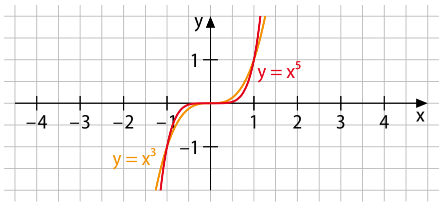
c) Das Schaubild der Funktion f wird an der x-Achse gespiegelt, um eine Einheit nach oben und sechs Einheiten nach rechts verschoben. Wie lautet die neue Funktionsgleichung?

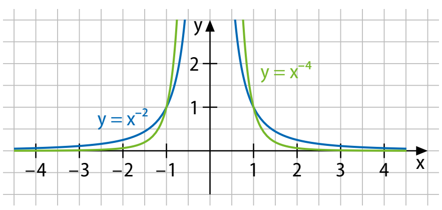
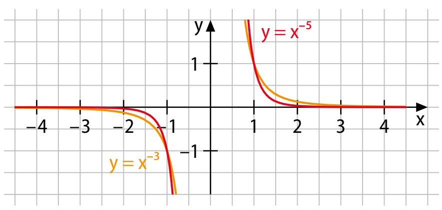
Ich kann schon …

Vorwissen 3

Die Wirkung des Exponenten in Potenzfunktionen erklären und Potenzfunktionen ableiten

Potenzfunktionen haben die Funktionsgleichung $f(x) = x^r, r \in \mathbb{Z}$. Der Exponent r bestimmt das Aussehen des Graphen.

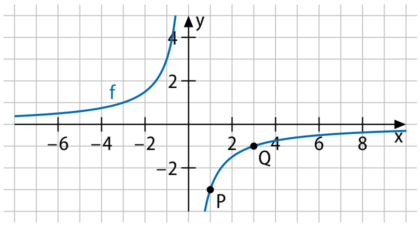
Potenzfunktionen mit natürlichen Hochzahlen	
gerade Hochzahl	ungerade Hochzahl
Beispiele: $f(x) = x^2;\ x^4;\ x^{10}$	Beispiele: $f(x) = x^3;\ x^7;\ x^{11}$
Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$	Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$
Nullstelle bei $(0\mid 0)$	Nullstelle bei $(0\mid 0)$
Tiefpunkt bei $(0\mid 0)$	kein Extrempunkt, monoton steigend
gemeinsame Punkte: $(0\mid 0), (1\mid 1), (-1\mid 1)$	gemeinsame Punkte: $(0\mid 0), (1\mid 1), (-1\mid -1)$
symmetrisch zur y-Achse	punktsymmetrisch zum Ursprung
	

Potenzfunktionen mit negativen ganzen Hochzahlen	
gerade Hochzahl	ungerade Hochzahl
Beispiele: $f(x) = x^{-2};\ x^{-4};\ x^{-8}$	Beispiele: $f(x) = x^{-3};\ x^{-5};\ x^{-13}$
Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$	Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
keine Nullstellen, x-Achse und y-Achse sind Asymptoten	keine Nullstellen, x-Achse und y-Achse sind Asymptoten
kein Extrempunkt, aber untere Schranke 0	kein Extrempunkt, monoton fallend
gemeinsame Punkte: $(1\mid 1)$ und $(-1\mid 1)$	gemeinsame Punkte: $(1\mid 1)$ und $(-1\mid -1)$
symmetrisch zur y-Achse	punktsymmetrisch zum Ursprung
	

Die Graphen nennt man **Hyperbeln**; sie bestehen aus zwei Ästen, die sich an die Koordinatenachsen anschmiegen. Die Koordinatenachsen sind die **Asymptoten**.

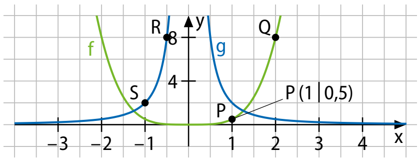
Aufgaben 3

3 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f, deren Gleichung die Form $y = a \cdot x^r$ hat.
Welche Aussagen können Sie ohne Rechnung über a und r machen? Bestimmen Sie die Parameter a und r anhand der gegebenen Punkte $P(1|-3)$ und $Q(3|-1)$.

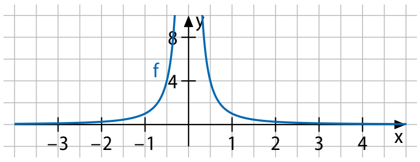


Lösung:
r muss negativ (z. B. wegen Definitionslücke bei $x = 0$) und ungerade (z. B. wegen Punktsymmetrie) sein, a muss negativ sein, damit für positive x negative Werte entstehen.
Aus $-3 = a \cdot 1^r$ (Punkt P) folgt $a = -3$. Damit folgt aus $-1 = -3 \cdot 3^r$ (Punkt Q) $r = -1$.
Die Gleichung der Funktion f lautet somit $y = -3 \cdot x^{-1} = -\frac{3}{x}$.

3.1 Die Abbildung zeigt Schaubilder der Funktionen f und g; ihre Gleichungen haben beide die Form $y = a \cdot x^r$.
Bestimmen Sie mithilfe der Punkte P, Q bzw. R, S für beide Funktionen a und r.



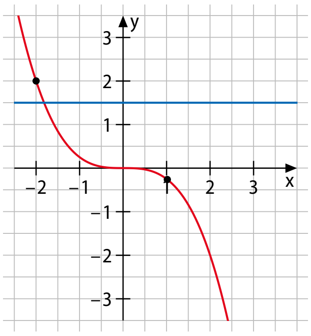
3.2 Gegeben ist das Schaubild einer Potenzfunktion f der Form $y = a \cdot x^r$.
Welche Aussagen können Sie über a und r machen? Begründen Sie Ihre Antwort. Es ist keine Rechnung verlangt.



3.3 Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen.
$f(x) = -x^3$ $\quad$ $g(x) = x^{-5}$ $\quad$ $h(x) = x^4 - 1$ $\quad$ $i(x) = x^{0,5}$ $\quad$ $j(x) = -\frac{1}{x^2}$

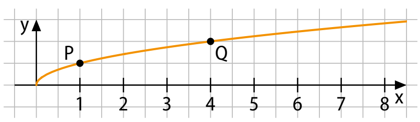
3.4 Eine Funktion der Form $f(x) = a \cdot x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ geht durch die Punkte $A(-1|-4)$ und $B(0,5|0,125)$. Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung.

3.5 Welche Potenzgleichung der Form $a \cdot x^n = d$ $(n \in \mathbb{N})$ ist in der Abbildung graphisch dargestellt? Die Punkte A und B haben die Koordinaten $A(-2|2)$ und $B(1|-0,25)$.
Bestimmen Sie die Lösung rechnerisch (mit dem WTR).



3.6 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = \frac{1}{2}x^{-2}$; $x \neq 0$.
a) Skizzieren Sie das Schaubild von f.
b) Um wie viel Prozent verändert sich der Funktionswert, wenn x $(x > 0)$ verdoppelt wird?

3.7 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion, deren Gleichung die Form $y = a \cdot x^r$ hat. Welche Aussagen können Sie ohne Rechnung über a und r machen?
Bestimmen Sie die Parameter a und r anhand der gegebenen Punkte $P(1|0,5)$ und $Q(4|1)$.



Erweiterung:
Wurzelfunktion

Ich kann schon …

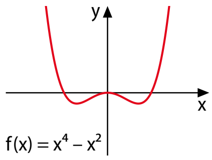
Vorwissen 4

Symmetrie ganzrationaler Funktionen und deren Verhalten im Unendlichen untersuchen

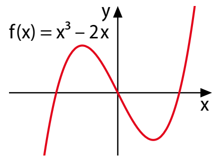
Erklärvideo

Mediencode 63025-02

- Der Graph einer Funktion f ist **achsensymmetrisch zur y-Achse**, falls für alle Werte von x gilt: $\mathbf{f(-x) = f(x)}$.
- Der Graph einer Funktion f ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**, falls für alle Werte von x gilt: $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$.



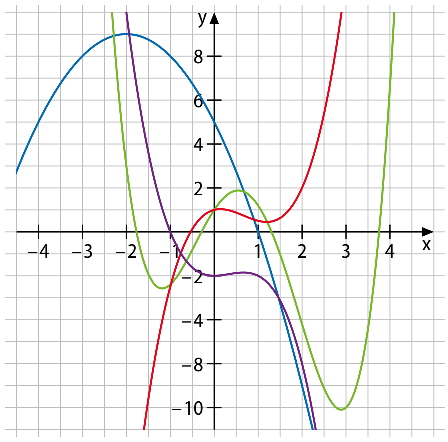
achsensymmetrisch



punktsymmetrisch

Das **Verhalten des Graphen** von f mit
$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$
für $|x| \to \infty$ hängt nur von a_n und n ab:

- Ist n gerade und $a_n > 0$, verläuft der Graph von links oben nach rechts oben.
- Ist n gerade und $a_n < 0$, verläuft der Graph von links unten nach rechts unten.
- Ist n ungerade und $a_n > 0$, „kommt" der Graph von links unten und verläuft nach rechts oben.
- Ist n ungerade und $a_n < 0$, „kommt" der Graph von links oben und verläuft nach rechts unten.

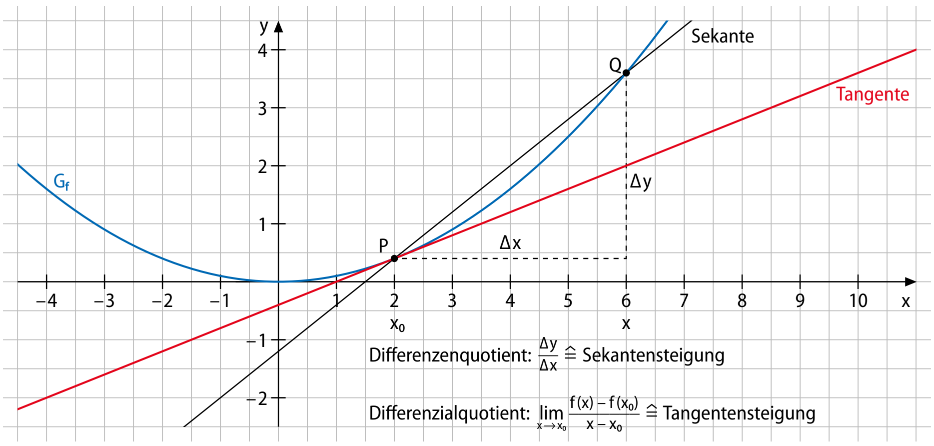


Vorwissen 5

Die Ableitung erklären

- Während der **Differenzenquotient** die Sekantensteigung und damit die mittlere Änderungsrate angibt, gibt der **Differentialquotient** die Steigung der Tangente an eine Kurve an und damit die momentane Änderungsrate.
- Als **Ableitung** bezeichnet man den Grenzwert des Differenzenquotienten. Die Ableitung einer Funktion in einem Kurvenpunkt gibt die Steigung des Funktionsgraphen in diesem Kurvenpunkt an:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



Aufgaben 4

4 Untersuchen Sie den Graphen von $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x - 6$ auf Symmetrie und auf sein Verhalten im Unendlichen.

Lösung:

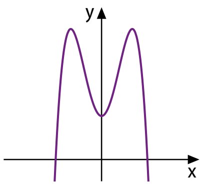
Da f (x) gerade und ungerade Exponenten enthält, liegt keine Symmetrie vor. Der höchste Exponent ist 3, der Vorfaktor von x^3 ist positiv. Deshalb strebt der Graph für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ und für $x \to \infty$ gegen ∞, d. h. er verläuft „von links unten nach rechts oben".

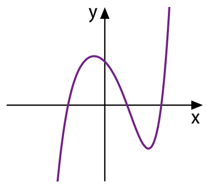
4.1 Untersuchen Sie die Graphen von f auf Symmetrie und auf ihr Verhalten im Unendlichen.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ **b)** $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 1$ **c)** $f(x) = x^5 + x^3 + x$
d) $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 1$ **e)** $f(x) = x \cdot (x + 2)^2 - 2$ **f)** $f(x) = (x - 1)^3$

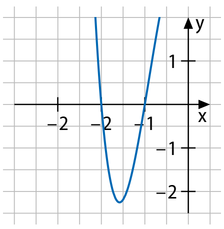
4.2 Ordnen Sie aufgrund ihres Verhaltens für $x \to \pm\infty$ jedem Graphen die passende Funktion zu. Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen, die nicht abgebildet sind.

$f(x) = -x^4 + 4x^2 + 2$ $f(x) = x^4 + x + 2$
$f(x) = x^3 + x^2 + 1$ $f(x) = x^5 - 2x^2 - x + 1$

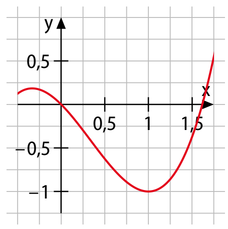




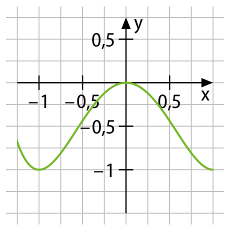
4.3 Vervollständigen Sie den gegebenen Ausschnitt so, dass die Eigenschaften des Graphen wiedergegeben werden, die Sie für wesentlich halten.



$f(x) = (x - 1) \cdot (x + 1)(x - 2)(x + 2)$



$g(x) = x^3 - x^2 - x$



$h(x) = x^4 - 2x^2$

Aufgaben 5

5 Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate von f mit $f(x) = x^2 - 9$ im Intervall $I = [0; 1]$ und die lokale/momentane Änderungsrate an der Stelle 2.

Lösung:

mittlere Änderungsrate: $\frac{f(1) - f(0)}{1} = \frac{-8 - (-9)}{1} = 1$

momentane Änderungsrate: Differenzenquotient für $x_0 = 2$:

$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{((2 + h)^2 - 9) - (2^2 - 9)}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 9 - 4 + 9}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = \frac{h(h + 4)}{h} = h + 4$

Für $h \to 0$ strebt der Ausdruck gegen 4; die momentane Änderungsrate ist also 4.

5.1 Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate von f im angegebenen Intervall I.

a) $f(x) = x^2$; $I = [0; 3]$ **b)** $f(x) = 2x^3 + 1$; $I = [-1; 2]$
c) $f(x) = 2x^2 + x$; $I = [1; 3]$ **d)** $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$; $I = [0; 1]$

5.2 Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Funktionen f an der Stelle x_0.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$; $x_0 = -2$ **b)** $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 1$; $x_0 = 1$
c) $f(x) = x^5 + x^3 + x$; $x_0 = 2$ **d)** $f(x) = x \cdot (x + 2)^2 - 2$; $x_0 = 9$

1 Startklar

Ich kann schon …

Vorwissen 6

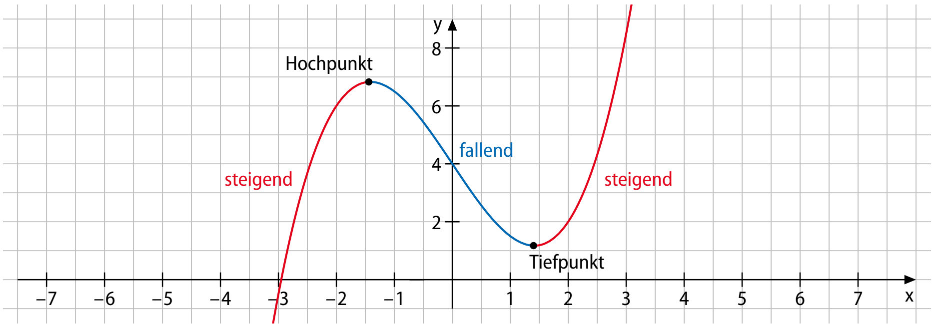
Funktionen auf Monotonie und Extrempunkte untersuchen

Das Vorzeichen von $f'(x)$ gibt Auskunft über Steigen und Fallen des Graphen von f:

- In Intervallen, in denen $f'(x) > 0$ ist, ist f streng monoton steigend.
- In Intervallen, in denen $f'(x) < 0$ ist, ist f streng monoton fallend.

Ein Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ kennzeichnet lokale Extrempunkte von f:

- An einer Stelle, an der $f'(x)$ das Vorzeichen von + nach – wechselt, liegt ein Hochpunkt von $f(x)$ vor.
- An einer Stelle, an der $f'(x)$ das Vorzeichen von – nach + wechselt, liegt ein Tiefpunkt von $f(x)$ vor.



Vorwissen 7

Funktionen auf einfache und doppelte Nullstellen untersuchen

Um die Nullstellen einer Funktion mit dem Funktionsterm $f(x)$ zu bestimmen, löst man eine Gleichung $f(x) = 0$. Je nach Aussehen der Gleichung bieten sich dabei (wenn möglich) unterschiedliche Verfahren an:

Art des Funktionsterms	Vorgehensweise	Beispiel
Gleichungen, bei denen in jedem Summanden ein x (bzw. eine Potenz von x) auftaucht	Ausklammern erzeugt ein Produkt, von dessen Faktoren man die Nullstellen leichter bestimmen und auf das man den Satz vom Nullprodukt anwenden kann.	$0 = x^3 - 2x^2 - x = x \cdot (x^2 - 2x - 1)$ Nach dem Satz vom Nullprodukt ist $x_{N1} = 0$, die anderen beiden erhält man aus $x^2 - 2x - 1 = 0$ mit der Mitternachtsformel.
Gleichungen der Art $x^n - c = 0$	Umformen zu $x^n = c$ und n-te Wurzel ziehen	$0 = x^4 - 16 \Leftrightarrow x^4 = 16$ $\Rightarrow x_{N1,2} = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$
Gleichungen, die auf binomische Formeln zurückzuführen sind	Das Distributivgesetz rückwärts anwenden und dann die Nullstelle(n) eines jeden Faktors bestimmen	$0 = 4x^4 - 9 = (2x^2 + 3) \cdot (2x^2 - 3)$ liefert nach dem Satz vom Nullprodukt für $2x^2 - 3 = 0$ die beiden Nullstellen $\pm\sqrt{1{,}5}$.

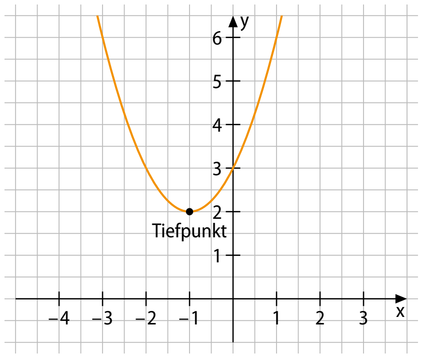
Zuweilen kann man Funktionen f in der Form $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ schreiben $(x_i \in \mathbb{R})$. Dann sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Nullstellen. Wird der Linearfaktor $(x - x_i)$ mit n potenziert, nennt man x_i eine **n-fache Nullstelle** (für $n = 2$: doppelte Nullstelle).

- Ist der Exponent **gerade** (also 2, 4, …), so ist die **Nullstelle** zugleich Extremstelle, d. h. der Graph **berührt** die x-Achse an der Stelle x_i.
- Ist der Exponent **ungerade** (also 1, 3, …), so **schneidet** der Graph die x-Achse an der Stelle x_i.

Aufgaben 6

6 Untersuchen Sie f mit $f(x) = x^2 + 2x + 3$ auf Monotonie und Extrempunkte.
Geben Sie auch die Art des Extremums an.

Lösung:
$f'(x) = 2x + 2$;
$f'(x_0) = 2x_0 + 2 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$
Für $x < -1$ ist $f'(x) < 0$, d. h. der Graph fällt hier monoton, für $x > -1$ ist $f'(x) > 0$, d. h. der Graph steigt hier monoton. f′ hat also einen Vorzeichenwechsel von – nach + bei $x_0 = -1$. Der Punkt $T(-1|2)$ ist also ein Tiefpunkt des Graphen der Funktion f.



6.1 Untersuchen Sie die Funktionen auf Monotonie und auf Extrempunkte. Geben Sie gegebenenfalls auch an, ob Hoch- oder Tiefpunkte vorliegen.

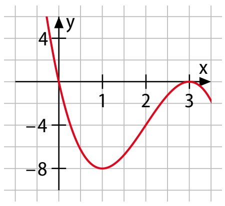
a) $f(x) = 0{,}5x^2 - 1$
b) $f(x) = -2x^2 + x$
c) $f(x) = 2x^3 + x$
d) $f(x) = 0{,}25x^3 + 4x^2 - 2$
e) $f(x) = \sqrt{x}$; $\mathbb{I} = [1; 4]$
f) $f(x) = \frac{1}{x-1}$; $\mathbb{I} = [1{,}5; 3]$

6.2 **a)** Geben Sie eine ganzrationale Funktion vom Grad 2 an, die ein lokales Maximum besitzt, das im I. Quadranten liegt.
b) Geben Sie eine ganzrationale Funktion vom Grad 3 an, die ein lokales Maximum und ein lokales Minimum besitzt.
c) Geben Sie eine ganzrationale Funktion vom Grad 4 an, die insgesamt drei Extrema besitzt.

Aufgaben 7

7 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f mit
$f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x$ rechnerisch und zeichnerisch.

Lösung:
$f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x = -2x \cdot (x^2 - 6x + 9) = -2x \cdot (x-3)^2$.
Nach dem Satz vom Nullprodukt erhält man als Nullstellen $x_{N1} = 0$ und $x_{N2} = 3$.



7.1 Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Graphen der Funktion f mit der x-Achse.

a) $f(x) = 3x^2 - 3x - 2$
b) $f(x) = x^3 - 6x$
c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x$
d) $f(x) = x^2 \cdot (x^2 - 4)$
e) $f(x) = x^3 \cdot (x - 1)$
f) $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot (x^2 - 2x + 1)$

7.2 Geben Sie jeweils Gleichungen zweier Funktionen an, die die angegebenen Nullstellen haben.

a) $x_{N1} = 2$, $x_{N2} = -3$
b) $x_{N1} = 1$, $x_{N2} = 2$, $x_{N3} = 3$
c) $x_{N1} = 0$ und $x_{N2} = 1$
d) $x_{N1} = \frac{2}{3}$, $x_{N2} = -\frac{3}{2}$
e) $x_{N1} = -0{,}\overline{1}$, $x_{N2} = -0{,}\overline{2}$, $x_{N3} = -0{,}\overline{3}$
f) $x_{N1} = \sqrt{2}$ und $x_{N2} = \sqrt[3]{2}$

7.3 Skizzieren Sie zu den gegebenen Funktionsgleichungen jeweils einen passenden Graphen.

$f_1(x) = -(x+3)^2(x-1)$
$f_2(x) = (x+1)^3(x-2)^2$
$f_3(x) = -x \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4)$
$f_4(x) = -x(x-2)^3$

1

1.1 Die Summen-, Faktor- und Potenzregel der Ableitung

Entdecken

Im Folgenden sollen Sie Termbausteine miteinander kombinieren, zu Funktionen zusammensetzen und Regeln finden, wie die Ableitungsfunktion einer solchen kombinierten Funktion aussieht. Konkret sind folgende Termbausteine vorgegeben:

3 | x | $x-1$ | $x+1$ | $x+2$ | $4x-1$

- Berechnen Sie von jeder der aus diesen Termbausteinen entstehenden Funktion die Ableitung.

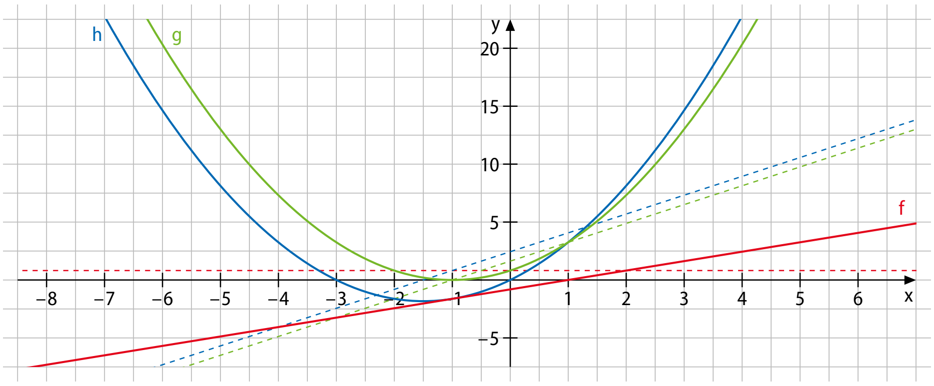
$f_1(x) = 3$	$f'_1(x) =$	$f_2(x) = x$	$f'_2(x) =$	$f_3(x) = x-1$	$f'_3(x) =$
$f_4(x) = x+1$	$f'_4(x) =$	$f_5(x) = x+2$	$f'_5(x) =$	$f_6(x) = 4x-1$	$f'_6(x) =$

Verstehen

Als erste Kombination betrachten wir die Verknüpfung mittels der Addition und addieren z. B. die Termbausteine $(x+2)$ und $(4x-1)$. Dies ergibt $f(x) = (x+2) + (4x-1) = 5x+1$.
Wir fragen uns, welche Auswirkung diese Addition auf die Ableitung f' der Funktion f hat.

Es ist leicht zu erkennen, dass die Ableitung $f'(x) = 5$ ist, denn bei $f(x) = 5x+1$ handelt es sich um eine Gerade mit konstanter Steigung 5. Die Ableitung von $g(x) = x+2$ ist 1, da es sich um eine Gerade mit der konstanten Steigung 1 handelt; die Ableitung von $h(x) = 4x-1$ ist 4, da es sich um eine Gerade mit der konstanten Steigung 4 handelt.

Schauen wir uns noch eine andere Kombination an: Wir multiplizieren den Baustein $(x+1)$ mit sich selbst, addieren den Baustein $(x-1)$ dazu und erhalten
$f(x) = (x+1)^2 + (x-1) = x^2 + 2x + 1 + x - 1 = x^2 + 3x$.



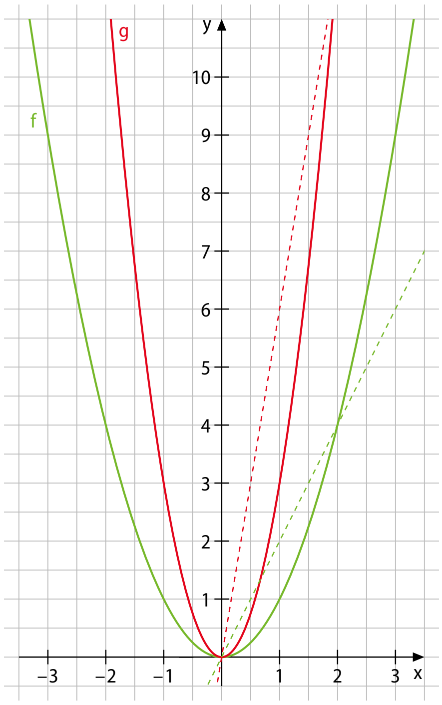
Ermittelt man graphisch die Ableitungsfunktion dieser Terme, erhält man obenstehendes Bild (die Ableitungsfunktionen sind jeweils in derselben Farbe wie die Funktionen gestrichelt). Man erkennt, dass die Ableitungsfunktion des Summenterms die Summe der Ableitungen der beiden Summanden ist. Dies bestätigt das Ergebnis von oben. Wir können also festhalten:

Merke

Summenregel für Ableitungen:
Die Funktion $f = g + h$ hat die Ableitung f' mit $\mathbf{f'(x) = g'(x) + h'(x)}$.

Nun kombinieren wir den reinen Zahlterm 3 mit Termen so, dass er einen Vorfaktor darstellt. Man erhält z. B. den Term 3x. Wir schauen uns die Steigungen der zugehörigen Funktionen an: $g(x) = x$ hat die Steigung 1, $h(x) = 3x$ hat die Steigung 3.

Nun kombinieren wir 3 mit $g(x) = x \cdot x = x^2$ und erhalten den Funktionsterm $f(x) = 3x^2$. Der Vorfaktor verändert die Öffnung der zugehörigen Parabel und damit deren Steigung. Man erkennt leicht, dass der Vorfaktor 3 auch in diesem Fall in die Ableitung (gestrichelte Graphen) miteinfließt.
So z. B. ist $f'(2) = 12$ und $g'(2) = 4$, also $f'(2) = 3 \cdot g'(2)$. Wir können also festhalten:

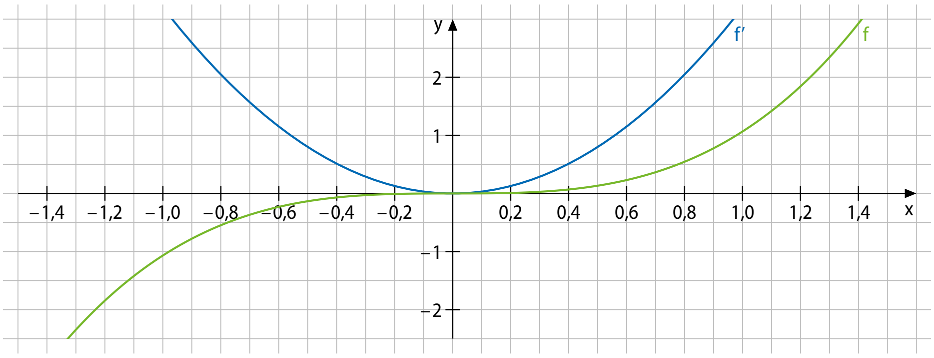


Merke

Faktorregel für Ableitungen:
Die Funktion $f = c \cdot g(x)$ $(c \in \mathbb{R})$ hat die Ableitung f′ mit $\mathbf{f'(x) = c \cdot g'(x)}$.

Nun kombinieren wir den Term x multiplikativ mit sich selbst und erhalten die Funktion $f(x) = x^2$. Stellt man die Funktion graphisch dar, erhält man eine Parabel, deren Steigungen eine Gerade ergeben.

Wir nehmen ein weiteres x hinzu und erhalten den Funktionsterm $f(x) = x^3$. Durch Zeichnen des Graphen und graphisches Ableiten erhält man den Graphen von $f'(x)$.



Die Analyse des Steigungsgraphen ergibt: Der zugrunde liegende Term ist $f'(x) = 3x^2$.
Wir haben anhand dieser Beispiele plausibel gemacht:

Merke

Potenzregel für Ableitungen:
Für jede natürliche Zahl n als Exponent hat die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ die Ableitungsfunktion $\mathbf{f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$.

Aufgaben

Zur Erinnerung:

$x^{-1} = \frac{1}{x}$;

$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$;

$x^{-2} = \frac{1}{x^k}$ *für* $k \in \mathbb{N}$

1 Bestimmen Sie $f'(x)$ mithilfe der Potenzregel.

a) $f(x) = x^4$ **b)** $f(x) = x^{11}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x}$ **d)** $f(x) = \frac{1}{x^3}$ **e)** $f(x) = x^{-5}$

2 Leiten Sie $f(x)$ mithilfe der Potenz-, Summen- und Faktorregel ab.

a) $f(x) = 4x^2 - 5x$ **b)** $f(x) = 6 + 6x - 6x^2$ **c)** $f(x) = x(1 - 3x)$

d) $f(x) = (2 - 3x)^2$ **e)** $f(x) = 7x(2x - 4)$ **f)** $f(x) = 2 + 3(4x - 5)^2$

3 Wie groß ist die Steigung des Graphen von f im angegebenen Punkt P?

a) $f(x) = 2x^2 - x$; $P(2|6)$ **b)** $f(x) = -3x^3 + 2x^2$; $P(1|-1)$ **c)** $f(x) = x^2(2 - x)$; $P(-1|3)$

4 Bestimmen Sie die Steigung der Tangenten an den Graphen von f jeweils an der Stelle $x_0 = 1$.

a) $f(x) = 2(x - 1)^2 + 1$ **b)** $f(x) = -3(x^3 + 2) + x^2$ **c)** $f(x) = x^2 + (2 - x)^2$

Nachgefragt

- Erläutern Sie, wie man die Funktion f mit $f(x) = (2x - 3)^2$ mithilfe der Potenz-, Summen- und Faktorregel ableiten kann.
- Selina sagt: „Wenn eine Funktion durch Multiplikation des Gliedes mit der höchsten x-Potenz mit 4 gestreckt wird, so muss man auch die Steigung an dieser Stelle mit 4 multiplizieren." Wählen Sie eine Funktion und nehmen Sie Stellung zu dieser Aussage, indem Sie auf eine der Ableitungsregeln Bezug nehmen.

Beispiel
Tangentensteigung

5 In welchen Punkten hat der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ eine Tangente parallel zur x-Achse?

Lösung:

Eine Tangente parallel zur x-Achse hat die Steigung 0. Gesucht sind also alle Stellen, an denen die erste Ableitung der Funktion gleich 0 ist.

$f'(x) = 3x^2 - 4x;\ 3x_E{}^2 - 4x_E = 0 \Leftrightarrow x_E \cdot (3x_E - 4) = 0 \Rightarrow x_{E1} = 0;\ x_{E2} = 1,\overline{3}$

6 Bestimmen Sie die Punkte des Graphen mit einer waagrechten Tangente.

a) $f(x) = (0,25x - 2)^2$ **b)** $f(x) = (1 - 2x)(1 + 2x + 3x^2)$ **c)** $f(x) = x^2(1 - x)$

7 Bestimmen Sie die Punkte des Graphen, in denen die Tangente die Steigung 2 hat.

a) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ **b)** $f(x) = (x - 2)(x + 3)$ **c)** $f(x) = 2x + 1$

8 Find the points on the graph with the given equation where the tangent to the graph is parallel to the straight line with the equation $y = -3x - 1$.

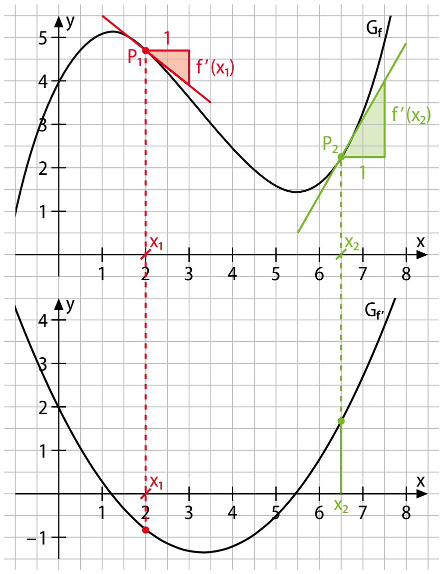
a) $f(x) = -3x^4 + 3x$ **b)** $f(x) = 3x^2 + 1$ **c)** $f(x) = (x + 1)^2 + 3$

9 Ermitteln Sie rechnerisch den Extrempunkt oder die Extrempunkte der Funktion f. Handelt es sich jeweils um einen Hoch- oder Tiefpunkt?

a) $f(x) = -x^5 + 3x^2$ **b)** $f(x) = x^3 + 0,5x^2 - 2x$ **c)** $f(x) = (x + 1)^3 - 2x - 2$

10 Gegeben sind die Funktion f_1 mit $f_1(x) = (x + 3)^2 - 3$ und f_2 mit $f_2(x) = -(x - 2)^2 + 2$. Bestimmen Sie alle Punkte, an denen die beiden Graphen dieselbe Steigung haben.

11 Jedem Punkt des Graphen der Funktion f lässt sich eine Tangentensteigung zuordnen. Hierzu zeichnet man in jedem Punkt ein Steigungsdreieck ein; die Steigung dieses Dreiecks kann man leicht ermitteln.
Ordnet man nun jedem x-Wert als y-Wert diese Steigung zu, erhält man einen Graphen, der die Steigungen und damit die erste Ableitung des Ausgangsgraphen darstellt.
Diesen Vorgang nennt man **graphisches Differenzieren**.



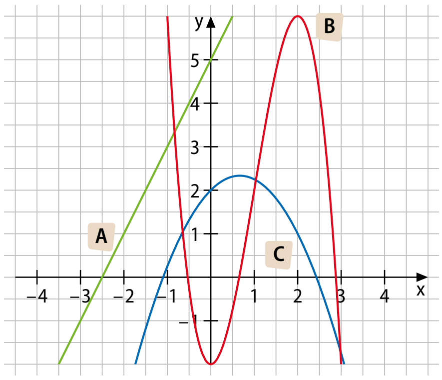
Beispiel
graphisches Differenzieren

12 Zeichnen Sie zunächst den Graphen der Funktion f (z. B. mithilfe einer Wertetabelle oder eines Funktionsplotters). Ermitteln Sie dann den Graphen der Ableitungsfunktion von f durch graphisches Differenzieren. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis anschließend durch Ableiten der Funktion mithilfe der bekannten Ableitungsregeln.

a) $f(x) = -(x+2)^2 - 1$ **b)** $f(x) = 2x^2 + 2$ **c)** $f(x) = -0{,}25x^3 + 3x$

13 Welcher Ableitungsgraph passt zu welcher Funktion? Ermitteln Sie hierzu die Ableitung der Funktion und ordnen sie diese einem Schaubild zu.

1 $f(x) = x^2 + 5x + 10$
2 $f(x) = 0{,}25x^2 \cdot (2 - x) + 2x$
3 $f(x) = -0{,}5x^4 + 2x^3 - 2x$



14 Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion und anschließend den ihrer Ableitungsfunktion. Nutzen Sie hierzu signifikante Punkte und Ihr Wissen über Kurvenverläufe.

a) $f(x) = (x-3)^2 + 1$ **b)** $f(x) = -x^3 + 2x$ **c)** $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

15 Untersuchen Sie den Graphen von f mit $f(x) = x^4 - 6x^2 + 3$ auf Symmetrie.

Beispiel
Symmetrie

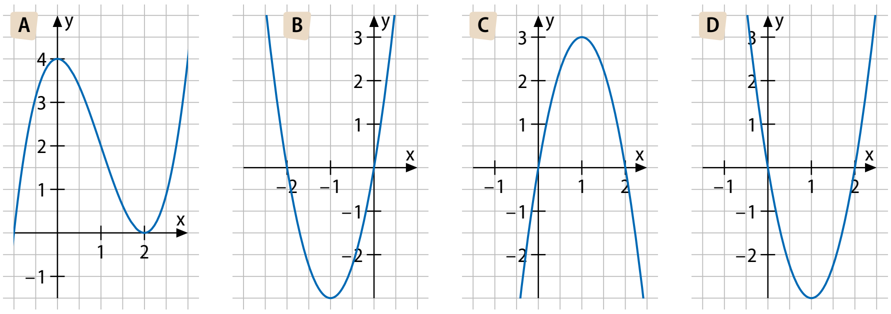
Lösung:
Möglichkeit 1: *Bei ganzrationalen Funktionen gilt: Tauchen im Term nur Potenzen von x mit gerader (ungerader) Hochzahl auftauchen, so ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse (punktsymmetrisch zum Ursprung). Da man 3 als $3 \cdot x^0$ schreiben kann und 0 in diesem Fall als gerade gilt, ist der Graph von f achsensymmetrisch.*
Möglichkeit 2: *Allgemein gilt stets: Ist $f(x) = f(-x)$, ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse; ist $f(-x) = -f(x)$, so ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung. Wir überprüfen: $f(-x) = x^4 - 6x^2 + 3 = f(x)$, also ist der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse.*

16 Untersuchen Sie den Graphen von f auf zwei unterschiedliche Arten auf Symmetrie.

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - x$ **b)** $f(x) = 2x^5 + 2x^3 - x$ **c)** $f(x) = -0{,}25x^3 + 4x^2$

d) $f(x) = -(x+1)^2 - 1$ **e)** $f(x) = (x-3)^2 + 2x^3$ **f)** $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

17 Die Abbildung **A** zeigt den Graphen einer Funktion f. Genau eine der Abbildungen **B** bis **D** stellt den Graphen der Ableitungsfunktion f′ von f dar. Finden Sie durch Ausschluss heraus, welche der drei Abbildungen dies ist, indem Sie bei jedem der beiden übrigen Graphen angeben, warum es sich nicht um den Graphen der Ableitungsfunktion f′ handeln kann.



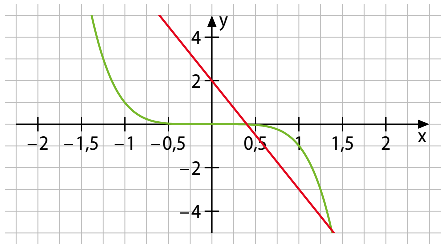
Beispiel
Nullstellen

18 Manchmal gibt es kein Verfahren zur direkten Bestimmung der Nullstellen ganzrationaler Funktionen. In diesem Fall kann man die Gleichung so umwandeln, dass die Bestimmung der Nullstellen in die Bestimmung der Schnittstellen zweier Funktionsgraphen transformiert wird. Dies wird an zwei Beispielen dargestellt.

Bestimmen Sie die Nullstellen der Graphen folgender Funktionen:

a) f mit $f(x) = x^4 - 4x^2$

b) g mit $g(x) = -x^5 + 5x - 2$



Lösung:

a) Ausklammern von x^2 liefert:

$x^2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2(x+2)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -2;\ x_3 = 2$

b) Man wandelt die Gleichung $-x^5 + 5x - 2 = 0$ um in $-x^5 = -5x + 2$ und bestimmt graphisch (näherungsweise) die Schnittstellen der Funktionsgraphen, die der linken und der rechten Seite der Gleichung zugrunde liegen.

$x_1 = -1{,}58;\ x_2 = 0{,}4;\ x_3 = 1{,}3$

Satz von Vieta:
Sind p und q die Koeffizienten der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ und x_1 und x_2 ihre Lösungen, dann gilt:
$p = -(x_1 + x_2)$,
$q = x_1 \cdot x_2$.

19 Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen graphisch und wenn möglich auch rechnerisch.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ **b)** $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **c)** $f(x) = x^2 + 3x - 4$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$ **e)** $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ **f)** $f(x) = -x^4 + 2x - 1$

g) $f(x) = 2x^2 - 5x - 1$ **h)** $f(x) = x^3 - 4x + 4$ **i)** $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$

20 Finden Sie jeweils den Fehler und korrigieren Sie ihn.

a) $f(x) = -5x^5 - 0{,}5x^2;\ f'(x) = -10x^4 - 0{,}5x$ **b)** $f(x) = x^{-4};\ f'(x) = -4x^{-3}$

c) $f(x) = x^{\frac{3}{2}};\ f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ **d)** $f(x) = \sqrt[4]{x^3};\ f'(x) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{x^3}$

21 Im Folgenden finden Sie einen Beweis für die Faktorregel mittels des Differenzen- und Differentialquotienten. Vervollständigen Sie im Heft die Tabelle, indem Sie jede Umformung kommentieren und dabei auch sagen, warum sie gemacht wurde.

Vorgehensweise symbolisch	Vorgehensweise verbalisiert	Ziel der Umformung
$f(x) = k \cdot g(x)$		
$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	allg. Form des Differenzenquotienten	Aus dem Differenzenquotient wird später der Differentialquotient abgeleitet.
$\frac{k \cdot g(x+h) - k \cdot g(x)}{h}$		
$\frac{k \cdot (g(x+h) - g(x))}{h}$		
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	allg. Form des Differentialquotienten	
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left(k \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)$	Übergang zum Differentialquotienten	
$f'(x) = k \cdot \lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)$		
$f'(x) = k \cdot g'(x)$		

22 Auf ähnliche Art wie in Aufgabe 21 kann man auch die Summenregel beweisen. Vervollständigen Sie den Beweis; kommentieren Sie jeden Ihrer Schritte.

Vorgehensweise symbolisch	Vorgehensweise verbalisiert	Ziel der Umformung
$f(x) = g(x) + k(x)$		
$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$		
$\frac{g(x+h) + k(x+h) - g(x) - k(x)}{h}$	Differenzenquotient für eine Summe von Funktionen	
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	allg. Form des Differentialquotienten	Der Differentialquotient liefert die Ableitung.
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (\qquad)$	Differentialquotient für obige Funktion	
$f'(x) =$		
$f'(x) = g'(x) + k'(x)$		

Nachgefragt

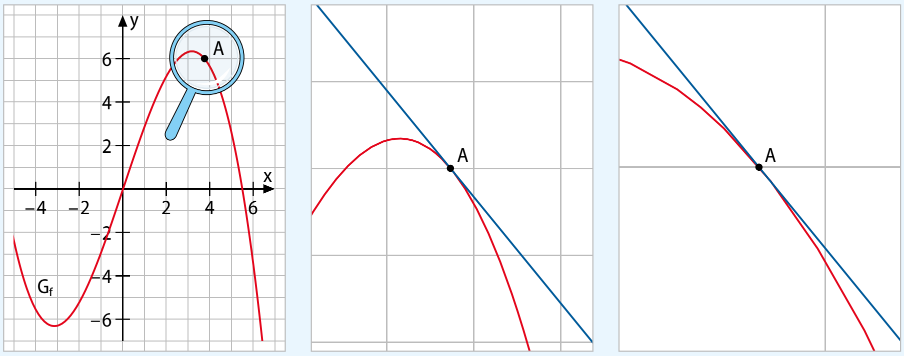
- „Eine Verschiebung der ursprünglichen Funktion um zwei Einheiten nach links verschiebt auch die Ableitungsfunktion um zwei Einheiten nach links.“ Stimmt das? Untersuchen Sie.
- „Zwei verschiedene Funktionen können nicht die gleiche Ableitungsfunktion haben.“ Stimmt das? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Axel meint: „Wenn man den Graphen einer Funktion an der y-Achse spiegelt, so spiegelt sich auch der Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion an der y-Achse.“ Hat er recht? Begründen Sie.
- Catrin meint: „Wenn man den Graphen einer Funktion an der x-Achse spiegelt, so spiegelt sich auch der Graph der zugehhörigen Ableitungsfunktion an der x-Achse.“ Hat sie recht? Begründen Sie.

1.2 Tangenten und Normalen an Graphen

Entdecken

Unter einem Mikroskop sind spannende Dinge zu entdecken: kleinste Tierchen im Wassertropfen, Unterschiede zwischen Salz und Zucker, die Facettenaugen von Fliegen usw. – alles Dinge, die bei der oberflächlichen Makrosicht nicht zu erkennen sind.

Dasselbe wollen wir nun auch mit Graphen von Funktionen machen: Lassen Sie sich von einem Funktionenplotter den Graph einer Kurve erstellen, z. B. den der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 14x$. Zoomen Sie nun an verschiedenen Stellen den Graphen, jeweils mehrfach.



- Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen.
- Erläutern Sie mithilfe Ihrer Beobachtungen den folgenden Satz: „Eine Kurve kann man sich aus unendlich vielen unendlich kleinen Geradenstücken zusammengesetzt vorstellen.“

Verstehen

Fall 1: Tangente an einen Punkt des Graphen

Die im Einstieg thematisierte Funktionenlupe zeigt, dass die **Tangente** in einem Punkt P des Graphen die **beste lineare Approximation (Näherung) der Kurve in einer Umgebung dieses Berührpunktes P** ist. Als eine Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(a\,|\,f(a))$ wollen wir fortan diejenige Gerade bezeichnen, die den Punkt P enthält und den Graphen in P berührt, die also in P dieselbe Steigung wie der Graph von f hat.

In vielen Zusammenhängen ist es wichtig, die Gleichung der Tangente zu kennen. Im Folgenden wollen wir ein Verfahren erarbeiten, wie man die Tangentengleichung für einen Punkt P des Graphen bestimmen kann.

Aus vergangenen Jahrgangsstufen wissen wir, dass Geraden mithilfe einer Gleichung $y = m \cdot x + c$ angegeben werden können, wobei der Parameter m die Steigung der Geraden angibt und der Parameter c den y-Achsenabschnitt, also die y-Koordinate des Schnittpunkts mit der y-Achse. Die Steigung der Tangente entspricht gemäß der mit der Funktionenlupe gewonnenen Erkenntnis der Steigung des Graphen im Punkt P. Diese wird durch die 1. Ableitung in dem Punkt wiedergegeben, also ist $m = f'(a)$.
Nun müssen wir noch c bestimmen. Hierzu nehmen wir den Punkt $P(a\,|\,f(a))$, setzen dessen Koordinaten in die allgemeine Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ ein und ermitteln über die Punkt-Steigungs-Form den Parameter c:
$f(a) = m \cdot a + c$; da $m = f'(a)$ ist, erhalten wir $f(a) = f'(a) \cdot a + c \Rightarrow c = f(a) - f'(a) \cdot a$

Insgesamt erhalten wir so für die Gleichung der Tangente: $y = f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a$.
Ausklammern von $f'(a)$ ergibt:
$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$.

Merke

Eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(a \mid f(a))$ erhält man mit der allgemeinen **Tangentengleichung** $\mathbf{t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)}$.

Erklärvideo

Mediencode 63025-03

Fall 2: Tangente von einem Punkt außerhalb des Graphen an den Graphen

Nun wollen wir die Gleichung der Tangente ermitteln, die von einem gegebenen Punkt $B(b \mid d)$ außerhalb des Graphen an den Graphen gelegt wird. Es ist also nicht bekannt, in welchem Punkt $P(a \mid f(a))$ der Graph von der Tangente berührt wird, wohl aber ist bekannt, dass der Punkt $B(b \mid d)$ zur Tangente gehört. Ebenso ist bekannt, dass die Tangentensteigung der Steigung im Punkt $P(a \mid f(a))$ entspricht.

1. Schritt: Ausgangspunkt ist die allgemeine Gleichung der Tangente in $P(a \mid f(a))$; sie lautet $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$. Da f' benötigt wird, leiten wir $f(x)$ ab.

2. Schritt: Der Punkt $B(b \mid d)$ muss auf dieser Tangente liegen. Man macht also die Punktprobe mit dem Punkt $B(b \mid d)$. Dazu setzt man in der Tangentengleichung für x die Koordinate b und für y die Koordinate d des Punktes B ein. Man erhält die Gleichung $d = f'(a) \cdot (b - a) + f(a)$.

In dem Fall, dass keine Tangente existiert, hat die Gleichung im 2. Schritt keine Lösung (Beispiel: $f(x) = x^2$, $B(0 \mid 1)$).

3. Schritt: Da $B(b \mid d)$ gegeben ist, ist in $d = f'(a) \cdot (b - a) + f(a)$ nur noch a unbekannt. Man bestimmt a; möglicherweise hat die Gleichung mehrere Lösungen $a_1, a_2, a_3 \dots$

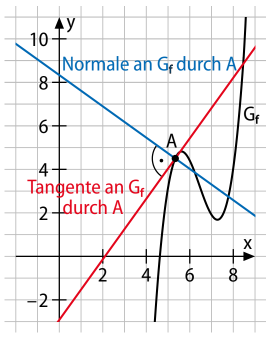
4. Schritt: Durch Einsetzen der Lösungen a_i erhält man die gesuchten Berührpunkte $A_i(a_i \mid f(a_i))$. Die zugehörigen Tangentengleichungen lauten: $y_i = f'(a_i) \cdot (x - a_i) + f(a_i)$.

Merke

Legt man eine **Tangente von einem Punkt $\mathbf{B(b \mid d)}$ außerhalb des Graphen** von f an den Punkt $P(a \mid f(a))$ des Graphen an, so hat die zugehörige Tangente die Gleichung $\mathbf{t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)}$, wobei man a über die Gleichung $d = f'(a) \cdot (b - a) + f(a)$ ermittelt.

Liegt der Punkt außerhalb des Graphen, gibt es oft zwei oder mehr Tangenten an den Graphen.

Eine Gerade n, die senkrecht zur Tangente an den Graphen in P verläuft, heißt Normale. Sie haben bereits gelernt, dass für die Steigungen m_1 und m_2 zweier Geraden, die senkrecht zueinander stehen, gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$, also $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. Daraus folgt:



Merke

Die Gleichung für die Gerade, die im Punkt $P(a \mid f(a))$ senkrecht auf der Tangente an den Graphen einer Funktion f steht, nennt man **Normalengleichung**. Sie lautet (mit $f'(a) \neq 0$)
$\mathbf{n(x) = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a) + f(a)}$.

Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt P.

a) $f(x) = 2x^2 - 1$; $P(3|f(3))$ **b)** $f(x) = x^3$; $P(2|f(2))$
c) $f(x) = x^2 + 0{,}5x$; $P(-3|f(-3))$ **d)** $f(x) = x^2 + 5x$; $P(-2|f(-2))$
e) $f(x) = x - x^3$; $P(1|f(1))$ **f)** $f(x) = \frac{1}{x}$; $P(-3|f(-3))$

Beispiel
Tangente von außen

Erklärvideo

Mediencode 63025-04

2 **a)** Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten t an den Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, die von dem außerhalb des Graphen liegenden Punkt $B(4|2)$ angelegt werden.

b) Berechnen Sie den jeweiligen Steigungswinkel der Tangenten.

Lösung:

a) *Mit $f'(x) = \frac{2}{3}x$ liefert der Ansatz $2 = f'(a) \cdot (4 - a) + f(a)$ die Gleichung*

$2 = \frac{2}{3}a \cdot (4 - a) + \frac{1}{3}a^2$. *Wir lösen nach a auf:*

$2 = \frac{8}{3}a - \frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{3}a^2 = \frac{8}{3}a - \frac{1}{3}a^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}a^2 + \frac{8}{3}a - 2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - 8a + 6 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = 4 \pm 3{,}16 \Rightarrow a_1 = 7{,}16;\ a_2 = 0{,}84$

Für a_1 erhält man mit dem Ansatz $t(x) = f'(a_1) \cdot (x - a_1) + f(a_1)$ die Gleichung
$t(x) = 4{,}77 \cdot (x - 7{,}16) + 17{,}09 = 4{,}77x - 17{,}06$.
Für a_2 erhält man mit dem Ansatz $t(x) = f'(a_2) \cdot (x - a_2) + f(a_2)$ die Gleichung
$t(x) = 0{,}56 \cdot (x - 0{,}84) + 0{,}24 = 0{,}56x - 0{,}24$.

b) *Für den Steigungswinkel a gilt: $\tan(\alpha) = f'(a)$. Für a_1 erhält man somit $\alpha_1 = 78{,}17°$ und für a_2 erhält man $\alpha_2 = 29{,}25°$.*

3 Bestimmen Sie die Gleichung(en) der Tangente(n) t an den Graphen von f, die von dem außerhalb des Graphen liegenden Punkt $B(b|d)$ angelegt wird (werden), und berechnen Sie den jeweiligen Steigungswinkel.

a) $f(x) = x^2$; $P(0|-1)$ **b)** $f(x) = 0{,}5x^3$; $P(1|-2)$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x}$; $P(-2|2)$

4 Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen n an den Graphen von f im Punkt P.

a) $f(x) = x^2 + 5x$; $P(1|6)$ **b)** $f(x) = x^3$; $P(0{,}5|0{,}125)$ **c)** $f(x) = \sqrt{x} - x$; $P(4|-2)$

Nachgefragt

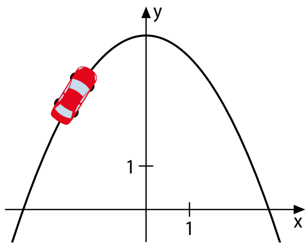
- Ursprünglich haben Sie Tangenten in der Geometrie als Kreistangenten kennengelernt. Welche Gemeinsamkeiten, welche Unterschiede bestehen zu den Tangenten an Funktionsgraphen?
- Erläutern Sie, wie man Kreistangenten konstruieren kann.
- Die geometrische Konstruktion von Tangenten an Funktionsgraphen funktioniert nur bei sehr wenigen Funktionen wie z. B. bei Parabeln. Recherchieren Sie, wie man mittels der Tangenten an eine Parabel deren sogenannten Brennpunkt konstruieren kann.

5 Geben Sie die Gleichung der Tangenten und der Normalen an den Graphen der Funktion f in den Punkten $P(1|f(1))$ und $Q(-1|f(-1))$ an.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ **b)** $f(x) = \frac{8x^3 - 4x}{2x}$ **c)** $f(x) = \frac{x - 1}{x}$

6 **a)** Zeigen Sie, dass sich die Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}25x^3 - 3x^2 + 9x$ und g mit $g(x) = -x^2 + 5x$ in einem Punkt schneiden und in einem Punkt berühren. Ermitteln Sie jeweils die Koordinaten der Punkte.
b) Bestimmen Sie die Gleichung der gemeinsamen Tangente der Graphen von f und g.

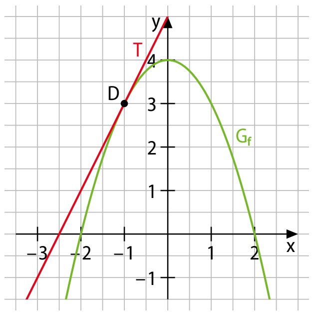
7 Ein Auto rutscht bei spiegelglatter Fahrbahn von der Strecke, die durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 4 - 0{,}5x^2$ beschrieben werden kann.
a) Das Auto rutscht im Punkt $(-1{,}5\,|\,2{,}875)$ von der Strecke. Prallt es gegen einen Felsen, der bei $(0\,|\,5)$ liegt?
b) Das Auto prallt im Punkt $(0\,|\,6)$ gegen einen Baum. Die zu Hilfe gerufene Polizei muss nun rekonstruieren, wo das Auto die Strecke verlassen hat.



Beispiel
Tangenten im Anwendungskontext

Lösung:
a) *Wir ermitteln die Tangentengleichung an den Graphen von f im Punkt $(-1{,}5|2{,}875)$. Mit dem Ansatz $t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$ erhalten wir mit $f'(x) = -x$, $a = -1{,}5$ und $f(a) = 2{,}875$ als Tangentengleichung*
$t(x) = f'(-1{,}5) \cdot (x + 1{,}5) + f(1{,}5) = 1{,}5 \cdot (x + 1{,}5) + 2{,}875 = 1{,}5x + 5{,}125$.
Setzen wir $x = 0$ ein, erhalten wir $t(0) = 5{,}125$. Das Auto prallt nicht gegen den Felsen.
b) *Wir ermitteln die Tangentengleichung über den Ansatz $t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$, wobei a über die Gleichung $d = f'(a) \cdot (b - a) + f(a)$ ermittelt wird und $b = 0$, $d = 6$ ist.*
$d = f'(a) \cdot (b - a) + f(a) \Leftrightarrow 6 = -a \cdot (6 - a) + 4 \Leftrightarrow a_2 - 6a - 2 = 0$
$\Leftrightarrow a_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2 + 9} = 3 \pm 3{,}32 \Rightarrow a_1 = 6{,}32,\ a_2 = -0{,}32$.
Die Stelle a_1 scheidet aus, da das Auto von links kommt. $\Rightarrow a = -0{,}32$.
Das Auto hat die Strecke im Punkt $(-0{,}32|3{,}95)$ verlassen.

8 Ein Heuhaufen kann mit der Funktionsgleichung $f(x) = -x^2 + 4$ modelliert werden. An den Haufen soll eine Leiter so angelehnt werden, dass sie ihn in einer Höhe von 3 m vom Boden aus berührt.
a) Bestimmen Sie die Tangentengleichung im Punkt $(3\,|\,f(3))$.
b) Unter welchem Winkel zum Boden muss die Leiter angelegt werden? Berechnen Sie dazu den Schnittwinkel der Tangente mit der x-Achse.
c) Wie weit vom Fuß des Heuhaufens muss die Leiter auf dem Boden aufgesetzt werden?



Nachgefragt

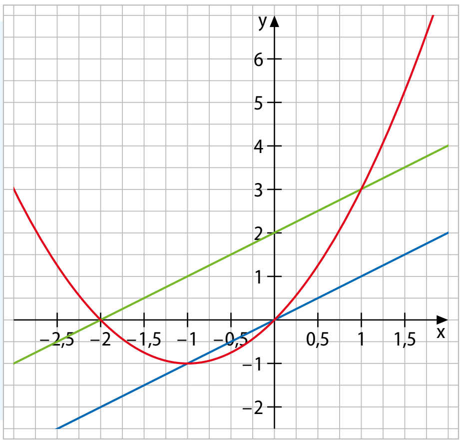
- Lassen Sie von einem Plotter die Graphen der Funktionen f_1 mit $f_1(x) = x^{100} + 1$ und f_2 mit $f_2(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 1$ zeichnen. Die Graphen scheinen ziemlich „eckig“ zu sein. Zoomen Sie in die „Ecken“ und erläutern Sie den Zusammenhang zum Inhalt dieses Kapitels.
- Recherchieren Sie, was man unter „Hüllkurven“ versteht, zeichnen Sie mithilfe eines Funktionenplotters die Hüllkurve einer Funktion und erläutern Sie den Zusammenhang zum Inhalt des Kapitels.

1.3 Produktregel und Quotientenregel

Entdecken

Kombiniert man die beiden Terme x und $(x+2)$ durch Multiplikation, erhält man $x \cdot (x+2)$. Die Abbildung zeigt die Graphen dieser Funktionen.

- Warum können Sie anhand der Graphen entscheiden, dass die Ableitung eines Produkts nicht gleich dem Produkt der Ableitungen beider Faktoren ist, d. h. wenn $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ gilt, ist $f'(x) \neq g'(x) \cdot h'(x)$?



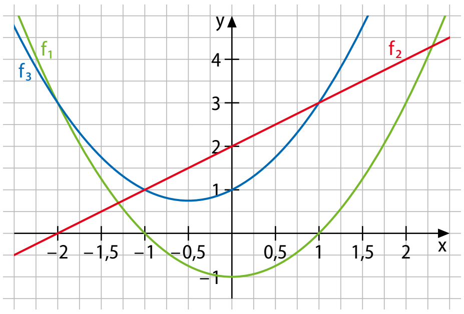
Verstehen

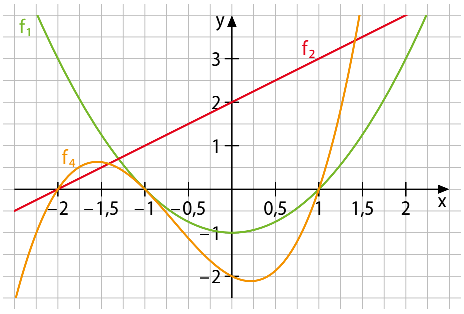
Zur Erinnerung:
3. binomische Formel
$(x+1) \cdot (x-1) = x^2 - 1$

Bisher haben wir vor allem ganzrationale Funktionen, z. B. f mit $f(x) = x^3 + 2x - 1$, betrachtet; in ihnen sind Termbausteine (hier x^3, $2x$ und 1) entweder additiv oder subtraktiv verknüpft.

Im Folgenden wollen wir die multiplikative Verknüpfung von Termbausteinen betrachten. Zunächst verknüpfen wir die beiden Termbausteine $(x^2 - 1)$ und $(x + 2)$ additiv miteinander und schauen uns sowohl die Graphen von $f_1(x) = x^2 - 1$ und $f_2(x) = x + 2$ an als auch den Graphen der durch Addition entstandenen Funktion $f_3(x) = (x^2 - 1) + (x + 2) = x^2 + x + 1$.

Man erkennt: Die Addition der beiden Funktionen verändert den Graphen der Funktion, die den höheren Grad hat (also $f_1(x)$), nicht wesentlich, er verschiebt sich, wodurch sich auch die Anzahl der Nullstellen ändert; der prinzipielle Kurvenverlauf aber ist ähnlich.
Nun multiplizieren wir die beiden Terme miteinander und betrachten die daraus resultierende Funktionsgleichung und deren Graphen:
$f_4(x) = (x^2 - 1) \cdot (x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2.$





Wir sehen, dass sich nun einiges verändert hat: Der prinzipielle Kurvenverlauf hat sich ebenso verändert wie die Anzahl der Nullstellen, die Anzahl der Extrempunkte, das Steigungsverhalten, die Monotonie. Insofern ist es folgerichtig, dass sich auch die Ableitung ändert, wenn das Produkt aus Termen gebildet wird.

Merke

Bildet man das Produkt zweier Funktionen, entsteht eine neue Funktion mit gänzlich anderen Eigenschaften als die beiden Ausgangsfunktionen. Unter anderem ist auch deren Steigungsverhalten völlig verschieden und somit deren Ableitung.

Im vorliegenden Fall ist die Ableitung des Produkts der beiden Funktionen f_1 und f_2 leicht zu bestimmen, denn das Ausmultiplizieren und anschließende Ableiten liefert das Gewünschte:
$f_4(x) = (x^2 - 1) \cdot (x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
$f'_4(x) = 3x^2 + 4x - 1.$

In vielen Fällen ist es aber wünschenswert, manchmal auch gar nicht anders möglich, die Ableitung direkt (ohne Ausmultiplizieren) zu bestimmen.
Wir starten mit einer Vermutung: Ist die Ableitung der Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ vielleicht $f(x) = u'(x) \cdot v'(x)$?
Für obiges Beispiel würde dies mit $u(x) = x^2 - 1$ und $v(x) = x + 2$ bedeuten:
$f'_4(x) = 2x \cdot 1 = 2x,$ also eine lineare Funktion. Die Steigung des Graphen von $f_4(x)$ würde also beständig zunehmen. Das ist falsch, wie man am Graphen der Funktion $f_4(x)$ sieht.

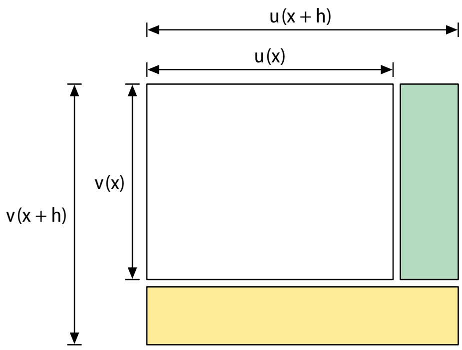
Wir müssen also einen anderen Weg wählen: Für jeden Wert von x können wir u(x) und v(x) als Länge und Breite eines Rechtecks interpretieren und das Produkt von u und v als dessen Flächeninhalt.

Ändern wir x um den Betrag h, hat dies Auswirkungen auf u und auf v, beide Rechtecksseitenlängen ändern sich und somit auch der Flächeninhalt des Rechtecks.

Den Rand kann man in zwei Teile zerlegen und die Flächeninhalte jeweils berechnen:

$(u(x + h) - u(x)) \cdot v(x)$

$(v(x + h) - v(x)) \cdot u(x + h)$



Wir erinnern uns: Die Ableitung an einer Stelle x kann man mithilfe des Differentialquotienten berechnen: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Der Differentialquotient gibt die (momentane) Änderung (hier: des Flächeninhalts) an.

Da uns die Ableitung interessiert, wenden wir diese Definition auf unsere Veranschaulichung mittels der Funktionen u und v an. Die Subtraktion der beiden Rechteckflächen liefert bei gleichzeitiger Division durch h:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot v(x) + \lim_{h \to 0} u(x) \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

$$= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Wir erhalten damit die

Merke

Produktregel der Differentialrechnung:
Ist f das Produkt zweier Funktionen u und v, d. h. gilt $f = u \cdot v$, so kann man die Ableitung dieses Produkts wie folgt berechnen: $\mathbf{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$.

Merkregel:
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Aufgaben

Beispiel
Produktregel

1 Leiten Sie mit der Produktregel ab: $f(x) = x^3 \cdot (x-3)$.
Lösung:
Mit $u(x) = x^3$ und $v(x) = (x-3)$ ergibt sich:
$f'(x) = 3x^2 \cdot (x-3) + x^3 \cdot 1 = 3x^3 - 9x^2 + x^3 = 4x^3 - 9x^2$

2 Leiten Sie mit der Produktregel ab.
a) $f(x) = (1+2x)^2$ **b)** $f(x) = x \cdot (x+5)$ **c)** $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$
d) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$ **e)** $f(x) = (x+2) \cdot (2x-3)$ **f)** $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{x^3}$

3 Ergänzen Sie die fehlenden Bausteine.
a) $f(x) = (x+4)^2$; $f'(x) = \bigcirc \cdot (x+4) + \square \cdot 1$
b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x+1)$; $f'(x) = \bigcirc \cdot (x+1) + \sqrt{x} \cdot 1$
c) $f(x) = 2x \cdot \sqrt{x^3}$; $f'(x) = 2 \cdot \bigcirc + 2x \cdot \square$
d) $f(x) = (3x+2) \cdot (2x-3)$; $f'(x) = \bigcirc \cdot \square + \triangle \cdot 2$

Lösungen zu 4:
$2x-2$; $3x^2$; $3x^2+4x$;
$3x^2+2x-1$; $-4x^3+3x^2$;
$4x^3-16x$

4 Leiten Sie ab, indem Sie **1** erst ausmultiplizieren bzw. indem Sie **2** die Produktregel anwenden. Vergleichen Sie Ihre beiden Ergebnisse.
a) $f(x) = x^2(2+x)$ **b)** $f(x) = (x-1)^2$ **c)** $f(x) = x(x^2+x-1)$
d) $f(x) = (x+2)^2(x-2)^2$ **e)** $f(x) = (x+1)(x^2-x+1)$ **f)** $f(x) = x^3(1-x)$

5 Bilden Sie die erste Ableitung auf zwei verschiedene Arten.
a) $f(x) = (x+1)(3x-3)$ **b)** $f(x) = (x^2-1)(x+1)$ **c)** $f(x) = (x^2+2)^2$
d) $f(x) = 3x \cdot \sqrt{x}$ **e)** $f(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{x}$ **f)** $f(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{x^3}$

6 Welche Regeln werden für die Bestimmung der Ableitung jeweils benötigt?
a) $f(x) = x^3(x^2-1)$ **b)** $f(x) = x^2 \cdot (x-1)^2$
c) $f(x) = x\sqrt{x}$ **d)** $f(x) = (x+2)^2(x^2-1)$
e) $f(x) = (x^2-x)^2$ **f)** $f(x) = \sqrt{2x} - x^2$

Potenzregel
Summenregel
Faktorregel
Produktregel

Nachgefragt

- Entscheiden Sie, bei welchen der angegebenen Funktionen die Produktregel zur Bestimmung der Ableitung angewendet werden kann und ob dies jeweils sinnvoll ist.
  $f_1(x) = x \cdot x$ $f_2(x) = \pi \cdot x^3$ $f_3(x) = (x-1)^2$ $f_4(x) = x^2 \cdot \frac{1}{x}$
- Geben Sie ein Beispiel für einen Funktionsterm an, bei dem die Anwendung der Produktregel das Aufstellen der Ableitungsfunktion erleichtert.
- Zeigen Sie an einem geeigneten Beispiel, welcher der beiden Vorschläge für die Ableitungsregel von Produkten $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ richtig ist.
  1 $f'(x) = u'(x) \cdot v'(x)$ **2** $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

7 Wo steckt der Fehler?
a) $f(x) = 2x \cdot \sqrt{x}$; $f'(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ **b)** $f(x) = (x^2-2)^2$; $f'(x) = 4x^2(x^2-2)$
c) $f(x) = x^2(x+3)$; $f'(x) = 2(x+3) + x^2 \cdot 3$ **d)** $f(x) = \sqrt{4x} \cdot \sqrt{9x}$; $f'(x) = 2x \cdot \sqrt{9x} + \sqrt{4x} \cdot 3x$

8 Zeigen Sie, dass die Funktion f′ die Ableitung der Funktion f ist:
$f'(x) = 6 \cdot (3x+2)$; $f(x) = (3x+2)^2$.

Beispiel
Produktregel

Lösung:
Wir leiten $f(x) = (3x+2)^2 = (3x+2)\cdot(3x+2)$ nach der Produktregel ab:
$f'(x) = 3\cdot(3x+2) + (3x+2)\cdot 3 = 9x+6+9x+6 = 18x+12 = 6\cdot(3x+2)$.

9 Zeigen Sie jeweils, dass F diejenige Funktion ist, deren Ableitung f ist.

*Die Funktion F nennt man auch **Stammfunktion** von f.*

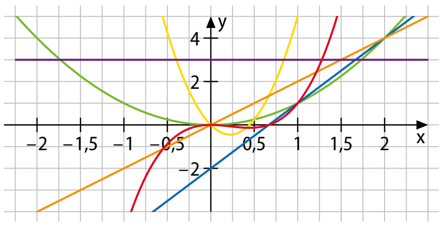
a) $F(x) = (2x-4)^2$; $f(x) = 8x-16$ **b)** $F(x) = \left(x^2-\frac{2}{3}\right)^2$; $f(x) = 4x^3-\frac{8}{3}x$
c) $F(x) = (x^2-1)\cdot(x+1)$; $f(x) = 3x^2+2x-1$
d) $F(x) = (x^2+3x)\cdot(3x-3)$; $f(x) = 3(3x^2+4x-3)$

10 Calculate the derivatives of f and determine all x for which the graph of f has a horizontal tangent.
a) $f(x) = 3(x+1)^2$ **b)** $f(x) = 8x^3+4x$

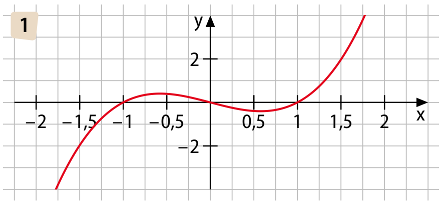
11 Geben Sie jeweils eine Funktion f an, die die Ableitungsfunktion f′ besitzt.
a) $f'(x) = x+4x^2$ **b)** $f'(x) = 4$ **c)** $f'(x) = 0$
d) $f'(x) = 2+0{,}5x$ **e)** $f'(x) = (1-x)^2$ **f)** $f'(x) = (x-1)^2$

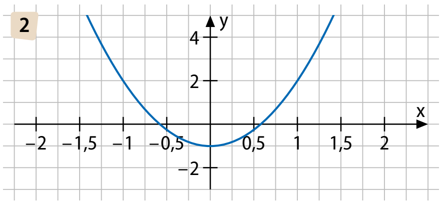
12 Es ist $f'(x) = 2-x+3x^2$. Geben Sie jeweils diejenige Funktion f an, die die Ableitung f′ besitzt und deren Graph …
a) durch den Ursprung verläuft. **b)** durch den Punkt $P(2|-3)$ verläuft.

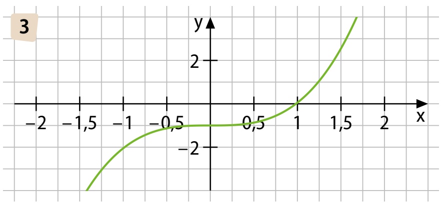
13 Aus den beiden Funktionen $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = 3x-2$ wird die Funktion $f_3(x) = x^2\cdot(3x-2)$ gebildet.
Im Bild sind die Graphen von $f_1, f_2, f_3, f'_1, f'_2$ und f'_3 dargestellt. Welcher Graph gehört zu welcher Funktion bzw. Ableitungsfunktion?

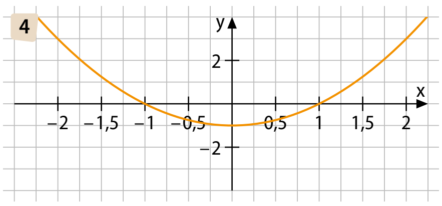


14 Welcher der abgebildeten Graphen gehört zur Ableitungsfunktion von f mit $f(x) = (x^2+x)\cdot(x-1)$? Begründen Sie Ihre Entscheidung.



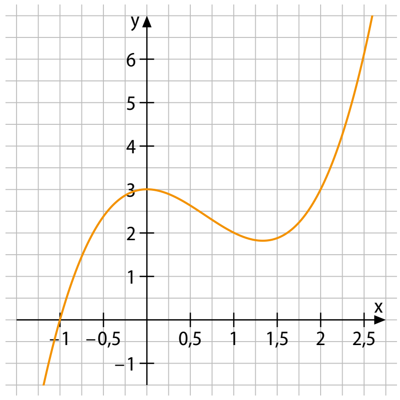


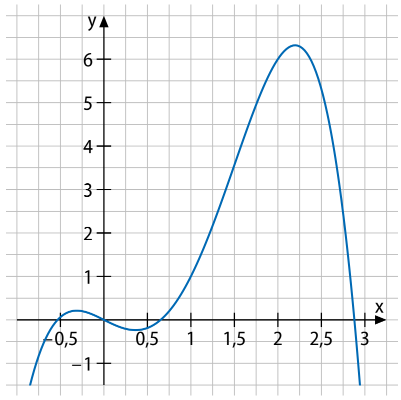




15 Schätzen Sie den Wert der Steigung an den angegebenen Stellen und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse rechnerisch.

a) $f(x) = x^2(x-2)+3$; $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = 1$ **b)** $f(x) = -x(x^3+3x^2-1)$; $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = 1$





16 **a)** Bestimmen Sie die Nullstellen x_{N_1} und x_{N_2} der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x-1)$.

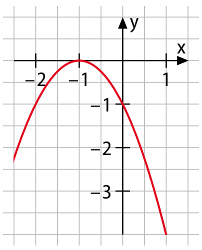
b) Welche Steigung haben die Tangenten an den Graphen der Funktion f in x_{N_1} und x_{N_2}?

c) Überprüfen Sie, ob der Graph der Funktion f eine waagerechte Tangente besitzt.

Eine Skizze hilft.

17 Überprüfen Sie folgenden Satz: Wenn der Graph von f mit $f(x) = 3x^3 - 4x$ an der Stelle $x_0 = a$ eine waagerechte Tangente hat, dann hat auch der Graph von g mit $g(x) = [f(x)]^2$ dort eine waagerechte Tangente.

- Ermitteln Sie zunächst die Stellen mit waagerechter Tangente.
- Stellen Sie den Term g (x) auf; ermitteln Sie die Stellen mit waagrechter Tangente.
- Vergleichen Sie anschließend.



Doppelte Nullstelle *heißt, dass dort Nullstelle und Extremstelle zusammenfallen.*

18 Der Graph der Funktion f_1 mit $f_1(x) = -(x+1)^2$ besitzt an $x_0 = -1$ eine doppelte Nullstelle.

a) Zeigen Sie, dass auch der Graph der Funktion f_2 mit $f_2(x) = x \cdot f_1(x)$ die x-Achse im Punkt $(-1\,|\,0)$ berührt.

b) Ist ein Hochpunkt des Graphen von f_1 auch ein Hochpunkt des Graphen von f_2? Untersuchen Sie.

c) Durch die Hinzunahme eines weiteren Faktors x erhält man die Funktion f_3 mit $f_3(x) = -x^2 \cdot (x+1)^2$. Welche Veränderung bewirkt dies am Graphen? Überlegen Sie und überprüfen Sie anschließend durch Rechnen.

19 Der Graph der Funktion g_1 mit $g_1(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1)^2$ besitzt zwei doppelte Nullstellen.

a) Geben Sie diese beiden doppelten Nullstellen an.

b) Begründen Sie, dass es sich tatsächlich um doppelte Nullstellen handelt, d. h. weisen Sie das gleichzeitige Vorhandensein von Extrema an diesen Stellen nach.

c) An welchen Stellen besitzt die Tangente an dem Graphen von g_1 die Steigung -4?

d) Beschreiben Sie (ohne vorherige Berechnung), wodurch sich der Graph der Funktion g_2 mit $g_2(x) = (x+2)^2 + (x-1)^2$ von dem von g_1 unterscheidet.

e) Weisen Sie nach, dass man $g_1'(x)$ in der Form $g_1'(x) = 2(x+2)(x-1)(2x+1)$ schreiben kann. Bestimmen Sie mit dieser Darstellung die Monotoniebereiche der Funktion $g_1(x)$.

f) Untersuchen Sie die Funktion g_2 auf Symmetrie.

Merke

Ist ein Faktor eines Funktionsterms ein Quotient, in dessen Nenner die Variable steht, erhält man eine Quotientenfunktion: $f(x) = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$. Die Ableitung dieser Quotientenfunktion ergibt sich aus der Produktregel; man nennt sie **Quotientenregel**: Für die Ableitung f′ des Quotienten $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ zweier differenzierbarer Funktionen u und v gilt

$$\mathbf{f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}}.$$

20 Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \frac{2x^3 - 2x^2}{x^2 - x}$ mit der Quotientenregel. Gibt es noch eine andere (vielleicht geschicktere, weil weniger aufwändige) Möglichkeit?

Beispiel Quotientenregel

Lösung:

Mit $u(x) = 2x^3 - 2x^2$ und $v(x) = x^2 - x$ ergibt sich $u'(x) = 6x^2 - 4x$ und $v'(x) = 2x - 1$.

$$f'(x) = \frac{(6x^2-4x) \cdot (x^2-x) - (2x^3-2x^2) \cdot (2x-1)}{(x^2-x)^2} = \frac{(6x^2-4x) - (2x) \cdot (2x-1)}{(x^2-x)} = \frac{6x-4-4x+2}{x-1} = \frac{2x-2}{x-1} = 2$$

In diesem Fall ist es geschickter, den Funktionsterm vor dem Ableiten zu vereinfachen:

$$f(x) = \frac{2x^3-2x^2}{x^2-x} = \frac{2x^2(x-1)}{x(x-1)} = 2x \Rightarrow f'(x) = 2.$$

21 Ermitteln Sie jeweils die Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ **b)** $f(x) = \frac{3x+2}{x^2}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{2x}$

d) $f(x) = \frac{3}{2x^3}$ **e)** $f(x) = \frac{x^2-4}{x \cdot (x-2)}$ **f)** $f(x) = \frac{(3x+3) \cdot (x-1)}{x^4 \cdot (x^2-1)}$

22 An welchen Stellen hat die Ableitung der Funktion den Wert a?

a) $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$; $a = -3$ **b)** $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$; $a = -1$ **c)** $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$; $a = -1$

23 An welchen Stellen stimmen die Funktionswerte von f′ und g′ überein? Was bedeutet dies geometrisch? Skizzieren Sie jeweils die Graphen der Funktionen f und g.

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $g(x) = \frac{1}{x-1}$ **b)** $f(x) = \frac{-2x}{\frac{1}{2}x-1}$; $g(x) = (x-2)^2$

24 Überprüfen Sie an Beispielen und beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Hat der Graph von f an einer oder mehreren Stellen die x-Achse als waagrechte Tangente, dann hat auch der Graph von $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$, mindestens eine waagrechte Tangente.

Nachgefragt

- Skizzieren und erläutern Sie die Vorgehensweise, wie man die Produktregel herleiten kann.
- Führen Sie ein Beispiel an, bei dem das Aufstellen der Ableitung unter Zuhilfenahme der Produktregel sehr sinnvoll ist und den Arbeitsaufwand minimiert. Führen Sie ein zweites Beispiel einer Funktion an, die man sowohl mit der Produktregel als auch ohne die Produktregel ableiten kann. Führen Sie drittens ein Beispiel an, bei dem man die Produktregel zwar anwenden kann, bei dem sie aber keine Erleichterung bringt.
- Erläutern Sie an einem Beispiel, dass die Faktorregel ein Spezialfall der Produktregel ist.
- Erläutern Sie an einem Beispiel, in welchem Kontext man die Differentialrechnung (und damit zum Beispiel auch die Produktregel) anwenden kann.
- Recherchieren Sie: Was versteht man unter dem isoperimetrischen Problem? Was hat es mit dem Inhalt dieses Kapitels zu tun?

1.4 Die Verkettung von Funktionen und die Kettenregel

Entdecken

Mit einem 3D-Drucker können in mehreren Schritten komplexe Werkstücke hergestellt werden. Dabei baut jeder Schritt auf das Ergebnis des jeweils vorangehenden Schritts auf.

- Ähnliches ist auch in der Mathematik möglich. Inwiefern kann man Funktionen wie f mit $f(x) = (x+1)^2$ oder g mit $g(x) = \sqrt{3x-1}$ als Hintereinanderausführung von Funktionen interpretieren?
- Finden Sie weitere Beispiele für eine solche „Verkettung" von Funktionen.

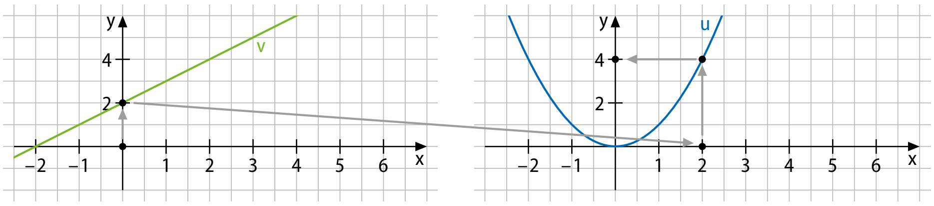
Verstehen

Bisher haben Sie Funktionen bzw. Termbausteine stets durch die Operatoren $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ verknüpft. Nun lernen Sie eine neue Art der Verknüpfung kennen: die Verkettung. Bei der Verkettung werden Funktionen hintereinander ausgeführt.
Wir betrachten hierzu als Beispiel die Funktion f mit $f(x) = (x+2)^2$. Man wird zunächst $(x+2)$ berechnen und das Ergebnis anschließend quadrieren. Zuerst wird also mit v der Funktionswert $v(x) = (x+2)$ ermittelt und dann wird auf diesen Funktionswert die Funktion u mit $u(x) = x^2$ angewendet.

x → Funktion v → v (x) → Funktion u → u (v (x))

Die nebenstehende Wertetabelle spiegelt diesen Prozess wider.
Graphisch umsetzen kann man ihn, indem man zunächst das Schaubild von $v(x) = (x+2)$ zeichnet und anschließend auf Werte dieses Schaubilds die Funktion $u(v(x)) = (x+2)^2$ anwendet.

x	v (x)	u (v (x))
−1	1	1
−0,5	1,5	2,25
0	2	4
0,5	2,5	6,25
1	3	9



$u \circ v$ liest man „u verkettet mit v".

Man bezeichnet eine solche Art der Verknüpfung als Verkettung $f = u \circ v$ zweier Funktionen.

Merke

Beim Verketten zweier Funktion u und v entsteht eine neue Funktion $f = u \circ v$ mit dem Funktionsterm $f(x) = u(v(x))$.

Beispiel I:
$v(x) = x+2,\ u(x) = x^2 \quad \Rightarrow\ f(x) = u(v(x)) = (x+2)^2$
$v: x \mapsto v(x)$ wird innere Funktion und $u: x \mapsto u(x)$ wird äußere Funktion genannt.

Beispiel II:
$v(x) = 2+3x,\ u(x) = \sin(x) \ \Rightarrow\ f(x) = u(v(x)) = \sin(2+3x)$.

Die Frage ist nun: Wie sieht die Ableitung solcher verketteter Funktionen aus?

Wir versuchen, diese Frage zu beantworten, indem wir die Verkettung zunächst auflösen und die daraus entstehende Funktion ableiten. Wir nehmen hierzu den Termbaustein $(4x-1)$ und multiplizieren ihn mit sich selbst; so erhalten wir $(4x-1)^2$.
Die Funktion f mit $f(x) = (4x-1)^2$ können wir – wie oben beschrieben – als Verkettung von $v(x) = (4x-1)$ mit $u(x) = x^2$ verstehen. Wir lösen die Verkettung nun auf:
$f(x) = (4x-1)^2 = (4x-1)\cdot(4x-1) = 16x^2 - 4x - 4x + 1 = 16x^2 - 8x + 1$.
Diesen Ausdruck können wir leicht ableiten:
$f'(x) = 32x - 8 = 4\cdot(8x-2) = 4\cdot 2\cdot(4x-1)$.
Wir vergleichen diesen Ausdruck mit der Ableitung der inneren Funktion und der Ableitung der äußeren Funktion: $v(x) = (4x-1) \Rightarrow v'(x) = 4$
$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$

Zur Erinnerung:
2. binomische Formel
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Dieses Beispiel legt die Vermutung nahe, dass man die Ableitung einer verketteten Funktion bildet, indem man die Ableitung der inneren Funktion mit der Ableitung der äußeren Funktion multipliziert. Wir wollen diese Vermutung anhand zweier weiterer Beispiele überprüfen.

1 Wir bilden aus $u(x) = x - 1$ und $v(x) = 3x$ **a)** die Verkettung $u(v(x))$ und **b)** die Verkettung $v(u(x))$ und bestimmen jeweils ihre Ableitungen.
a) $u(v(x)) = u(3x) = (3x) - 1 = 3x - 1$
Die Ableitung davon ist 3. Berechnen wir sie nach unserer oben formulierten Vermutung, erhalten wir als Ableitung der inneren Funktion u die Zahl 1 und als Ableitung der äußeren Funktion v die Zahl 3. Das Produkt ergibt ebenfalls 3.
b) $v(u(x)) = v(x-1) = 3(x-1) = 3x - 3$
Die Ableitung davon ist wiederum 3. Berechnen wir sie nach unserer oben formulierten Vermutung, erhalten wir als Ableitung der inneren Funktion v die Zahl 3 und als Ableitung der äußeren Funktion u die Zahl 1. Das Produkt ergibt wieder 3.

2 Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$ und $D = \mathbb{R}^+$. Zur Berechnung der Ableitung formen wir zunächst um: $f(x) = \sqrt{(x+2)^2} = x + 2$. Die Ableitung ist 1.
Berechnet man die Ableitung über unsere Regel, ist $u(x) = x^2 + 4x + 4$ die innere Funktion u. Ihre Ableitung ist $u'(x) = 2x + 4 = 2(x+2)$.
Die äußere Funktion v ist $\sqrt{x} = x^{0,5}$, ihre Ableitung ist $v'(x) = 0{,}5x^{-0,5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Insgesamt ergibt sich als Ableitung $f'(x) = \frac{2(x+2)}{2\cdot\sqrt{(x+2)^2}} = 1$.

Drei Positivbeispiele genügen natürlich nicht, um einen Satz zu beweisen. Das war hier aber auch gar nicht der Anspruch, sondern wir wollten ihn nur plausibel machen. Wir können auf dieser Basis also festhalten:

Merke

Die Ableitungsregel für eine verkettete Funktion $f(x) = u(v(x))$ lautet:

$$\mathbf{f'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x)}$$

Dabei ist
- $u'(v(x))$ die Ableitung der **äußeren Funktion** an der inneren Funktion und
- $v'(x)$ die Ableitung der **inneren Funktion**.

Merkregel:
innere Ableitung mal äußere Ableitung

Aufgaben

1 Bilden Sie $u(v(x))$ und $v(u(x))$.
a) $u(x) = 3x;\ v(x) = 4x$ **b)** $u(x) = 5x;\ v(x) = x - 4$ **c)** $u(x) = 2x;\ v(x) = x^2$
d) $u(x) = 2x + 1;\ v(x) = 1 - x^2$ **e)** $u(x) = x - 2;\ v(x) = \sqrt{x}$ **f)** $u(x) = \frac{1}{x};\ v(x) = x^2$

2 Bilden Sie $u \circ v$ und $v \circ u$ für $u(x) = 2x + 1$ und $v(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

3 Bilden Sie $f(x) = u(v(x))$ und $g(x) = v(u(x))$ für $u(x) = 2\sqrt{x}$ und $v(x) = \frac{1}{x^2}$.

4 Stellen Sie die Funktionen f als Verkettung zweier Funktionen u und v dar.
a) $f(x) = (x + 4)^3$ **b)** $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$ **c)** $f(x) = \frac{2}{3x + 4}$ **d)** $f(x) = x^2 + 6x + 9$

Beispiel
innere und äußere Funktion

5 Bestimmen Sie die innere Funktion $v(x)$ und die äußere Funktion $u(x)$ der Funktion f, die als Verkettung von u und v interpretiert werden kann: $f(x) = (x + 2)^2$. Bestimmen Sie anschließend $f(x) = v(u(x))$.
Lösung:
Als innere Funktion wählt man $v(x) = x + 2$, *als äußere Funktion* $u(x) = x^2$.
$v(u(x)) = (x^2) + 2 = x^2 + 2$.

6 Die Funktion f kann als Verkettung $u \circ v$ aufgefasst werden. Bestimmen Sie die innere Funktion v und die äußere Funktion u.
a) $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2x^2}$ **c)** $f(x) = x^2 + 8x + 16$
d) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x^2 + 1}}$ **e)** $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ **f)** $f(x) = \frac{2x}{4x^3 - 6x^2}$

Nachgefragt

- Ebenso wie in der Mathematik ist auch im Alltag die Reihenfolge der Verkettung von Ausdrücken in der Regel von Bedeutung. Untersuchen Sie folgende Beispiele auf $u(v(x)) = v(u(x))$ bzw. $u(v(x)) \neq v(u(x))$.
  a) *Macht der Sprache und Sprache der Macht*
  b) *Studie der Themen und Themen der Studie*
  c) *Rundfahrt der Sieger und Sieger der Rundfahrt*
  d) *Liga der Champions und Champions der Liga*
  e) *Teiler der Zahl und Zahl der Teiler.*
- Erläutern Sie anhand einer Wertetabelle, dass die Reihenfolge bei der Verkettung der Funktionen f mit $f(x) = 3x - 2$ und g mit $g(x) = \sqrt{x + 1}$ eine Rolle spielt.
- In der Regel ist $u(v(x)) \neq v(u(x))$. Geben Sie drei Beispiele an, in denen $u(v(x)) = v(u(x))$ ist.

Beispiel
Kettenregel

7 Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (4 + 5x)^2$ auf zwei Arten.
Lösung:
1 *Mithilfe der Kettenregel:* $u(v) = v^2;\ u'(v) = 2v;\ v(x) = 4 + 5x;\ v'(x) = 5;$
$f'(x) = u'(v) \cdot v'(x) = 2 \cdot (4 + 5x) \cdot 5 = 40 + 50x$
2 *Mithilfe einer binomischen Formel erhält man* $f(x) = 16 + 40x + 25x^2$; *somit ist* $f'(x) = 40 + 25 \cdot 2x = 40 + 50x$.

8 Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit von f (x) auf zwei verschiedene Arten.

a) $f(x) = (2x-2)^2$ b) $f(x) = (x+1)^3$ c) $f(x) = \frac{1}{2x^2-x}$

d) $f(x) = \frac{x}{2x^2-x}$ e) $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1}$ f) $f(x) = (x^2-10x+25)^{-2}$

Zur Erinnerung:
$\frac{1}{x} = x^{-1}$

9 Leiten Sie ab und vereinfachen Sie (wenn möglich) das Ergebnis.

a) $f(x) = (2x+4)^5$ b) $f(x) = \sqrt{x^3-1}$ c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x}$ e) $f(x) = \sqrt{x^5+5}$ f) $f(x) = (5x^4-2x)^{-3}$

10 Untersuchen Sie f mit $f(x) = (5x+5)^2$ auf Monotonie und auf Extremstellen.

Beispiel
Monotonie

Lösung:
Nach der Kettenregel mit $v(x) = (5x+5)$ und $u(x) = x^2$ ist $f'(x) = 2(5x+5) \cdot 5 = 50x+50$.
Aus $50x+50 = 0$ erhält man $x = -1$.
Da $f'(x) < -1$ für alle $x < -1$ gilt, ist die Funktion für $x < -1$ streng monoton fallend;
für $x > -1$ ist $f'(x) > 0$, hier ist die Funktion also streng monoton steigend.
Da an $x = -1$ ein Vorzeichenwechsel in der 1. Ableitung von – nach + vorliegt, handelt es sich um eine Minimalstelle.

11 Find the intervals of monotonicity of the given function f and identify its extrema.

a) $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2+0{,}5}$ c) $f(x) = (x+1)^3-2x-4$

12 Unter welchem Winkel schneidet der Graph der Funktion f die y-Achse im angegebenen Intervall I?

a) $f(x) = \sin(x+1) \cdot \sqrt{x+1};\ I = [0;\pi]$ b) $f(x) = \cos^2(x+1) - 0{,}5;\ I = [0;2]$

Zur Erinnerung: *Schneidet der Graph die x-Achse an der Stelle x_0, berechnet man den Schnittwinkel α über $\alpha = \tan^{-1}(f'(x_0))$.*

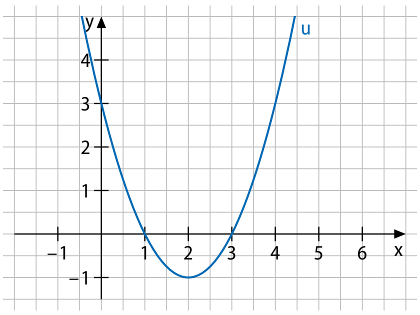
13 Vorgelegt sind die sechs Funktionsterme

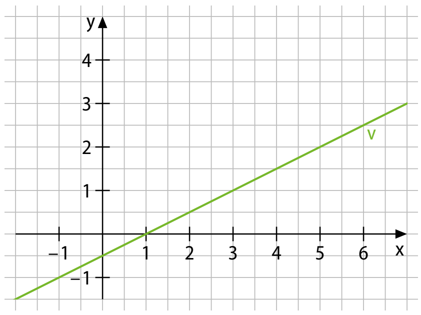
$f_1(x) = x^2$ | $f_2(x) = 2x-1$ | $f_3(x) = 1+x$ | $g_1(x) = 3x-1$ | $g_2(x) = x^2-1$ | $g_3(x) = 2-3x$

Finden Sie heraus, welcher der folgenden Terme gleich $f_1(g_1(x))$, $f_1(g_2(x))$, $f_1(g_3(x))$, $f_2(g_1(x))$, $f_2(g_2(x))$, $f_2(g_3(x))$, $f_3(g_1(x))$, $f_3(g_2(x))$, $f_3(g_3(x))$ ist.

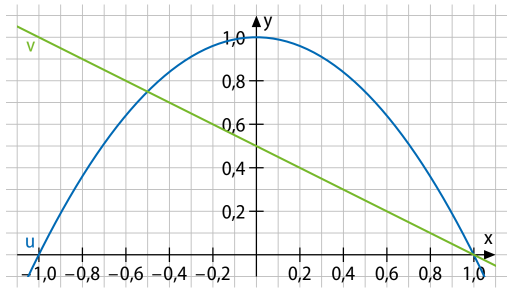
$3(2x-1)$ | $3-6x$ | $3x$ | x^2 | $2x^2-3$ | $9x^2-6x+1$ | x^4-2x^2+1 | $(2-3x)^2$ | $3-3x$

14 Gegeben sind die Graphen der Funktionen u und v. Bestimmen Sie für $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ näherungsweise $u(v(x_0))$, $u(v(x_1))$ und $u(v(x_2))$ sowie $v(u(x_0))$, $v(u(x_1))$ und $v(u(x_2))$.

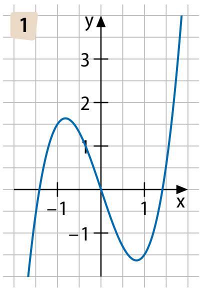


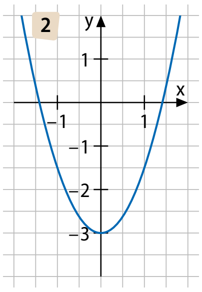


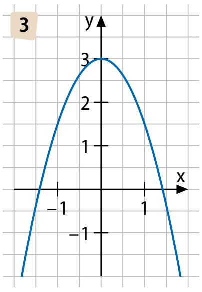
15 Bestimmen Sie zunächst die beiden Funktionsterme von u und v aus den jeweiligen Graphen und ermitteln Sie dann $u(v(x_0))$ und $v(u(x_0))$ für $x_0 = -1$, 0 und 1.

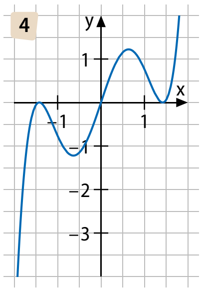


16 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (0{,}5x^2 - 1)^3$. Welcher der abgebildeten Graphen ist der von $f'(x)$? Argumentieren Sie.









17 Bestimmen Sie die Funktionen, die die angegebenen Ableitungen haben.

a) $f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$ **b)** $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$ **c)** $f'(x) = 4(x+3)^3$

d) $f'(x) = 12(x+3)$ **e)** $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ **f)** $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

18 Wo steckt der Fehler? Korrigieren Sie.

a) $f(x) = (4x-1)^3$
$f'(x) = 3(4x-1)^2$

b) $f(x) = \sqrt{3x^2 - x}$
$f'(x) = \frac{1}{2}(6x-1)$

c) $f(x) = \frac{3}{x+1}$
$f'(x) = \frac{9}{(x+1)^2}$

19 Für welchen Wert von k entsteht ein Graph, der an der Stelle x_0 einen Extrempunkt besitzt? Geben Sie auch an, ob es sich um einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt handelt.

a) $f(x) = ((x+k)^2 + x)^2$; $x_0 = -2$

b) $f(x) = (x^2 + kx)^3$; $x_0 = 1$

c) $f(x) = ((x+k)^2 - 1)^4$; $x_0 = 1$

20 Man kann auch drei Funktionen miteinander verketten und davon die Ableitung bestimmen.

a) Ermitteln Sie die Ableitung von $k(x) = f(g(h(x)))$, indem Sie zunächst die Ableitung von $g(h(x))$ bestimmen und dann noch mit f verketten.

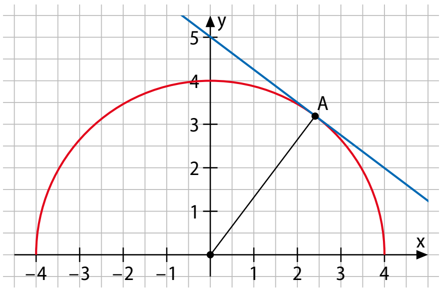
b) Führen Sie das Ganze am Beispiel $k(x) = (\sqrt{3x-1})^2$ durch.

21 Überprüfen Sie an einem Beispiel für $g(x) = [f(x)]^2$ den Satz: „Falls der Graph von f an der Stelle a eine waagrechte Tangente hat, dann hat auch der Graph der Funktion g an dieser Stelle eine waagrechte Tangente."

22 An den Graphen von f mit $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ wird im Punkt $A(x_0 | f(x_0))$ eine Tangente angelegt (siehe Zeichnung).

a) Bestimmen Sie die Steigung der Tangente mithilfe der Eigenschaft der Tangente, dass sie senkrecht zum Radius steht.

b) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis mithilfe von $f'(x)$.



Tipp:
Für die Steigungen m_1 und m_2 zweier senkrechter Geraden gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

23 Es ist $u(x) = 4x^2 + 2x$ und $v(x) = 3x - 5$.
Bilden und vereinfachen Sie die Funktionsterme $h(x) = u(v(x))$ und $k(x) = v(u(x))$ sowie ihre Ableitungen $h'(x)$ und $k'(x)$ und vergleichen Sie $[u(v(x))]'$ und $[v(u(x))]'$ miteinander. Was fällt Ihnen auf?

24 An den Graphen von f mit $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ sollen an den Stellen −0,5 und 0 die Tangenten angelegt werden. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Tangenten.

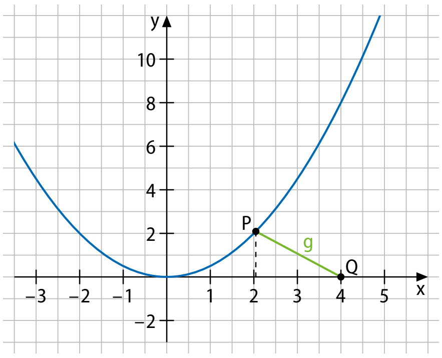
25 Wählen Sie für u (x), v (x) und w (x) drei einfache Funktionen. Bestimmen Sie $u(v(w(x)))$ und ermitteln Sie die Ableitung dieser doppelt verketteten Funktion. Versuchen Sie, eine Regel aufzustellen.

26 **a)** Bestimmen Sie den Punkt P auf der Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$, der den kürzesten Abstand vom Punkt $Q(4|0)$ hat.

Tipp 1: Den Abstand können Sie mit dem Satz des Pythagoras bestimmen.

Tipp 2: Von dieser Abstandsfunktion ist das Minimum gesucht.

b) Zeigen Sie, dass die Gerade PQ senkrecht zur Tangenten an den Graphen im Punkt P steht.

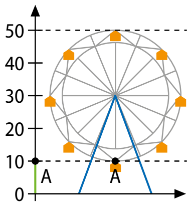


Nachgefragt

- Ist die Verkettung zweier linearer Funktionen wie z. B. $f(x) = 2(x + 2) + 3$ mit $u(x) = 2x + 3$ und $v(x) = x + 2$ wieder eine lineare Funktion? Beurteilen Sie anhand mehrerer konkreter Beispiele.
- Überprüfen Sie bei der Funktion g mit $g(x) = \sqrt{f(x)}$, ob gilt: Falls der Graph von f an der Stelle x_0 eine waagrechte Tangente hat, dann hat auch der Graph von g an x_0 eine waagrechte Tangente. Wählen Sie zunächst eine konkrete Funktion mit waagerechter Tangente und überprüfen Sie; danach sollten Sie die Überprüfung für eine allgemeine Funktion f durchführen.
- Probieren Sie anhand mehrerer Beispiele aus, ob $[u(v(x))]' = [v(u(x))]'$ sein kann, ohne dass $u(v(x)) = v(u(x))$ ist.

1.5 Trigonometrische Funktionen und ihre Ableitung

Entdecken



Jede Gondel eines Riesenrads verändert beim Drehen des Rads ständig ihre Höhe über dem Boden.

- Beobachten Sie die Höhe über dem Boden einer Gondel für eine Umdrehung des Riesenrads und zeichnen Sie diese Höhe im Koordinatensystem in Abhängigkeit von der Zeit ein (konstante Geschwindigkeit wird vorausgesetzt).
- Untersuchen Sie den entstehenden Graphen. Welche Eigenschaften hat er? Wie würde er sich bei der nächsten Umdrehung des Rads verändern?

Verstehen

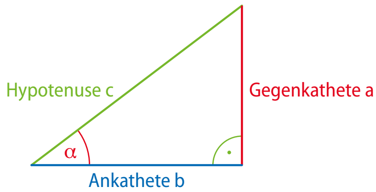
Wir nehmen die neuen Termbausteine sin und cos hinzu und betrachten Funktionen wie $f(x) = 2 \cdot \sin(2x - 3)$ sowie deren Ableitung.

Hierzu wiederholen wir zunächst, wie der Sinus und der Kosinus sowie die Sinus- und die Kosinusfunktion definiert sind und wie deren Ableitungen aussehen.

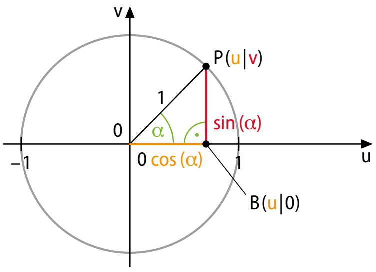
Für Winkel zwischen 0° und 90° sind Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck definiert als

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$



Wendet man diese Definition auf ein Dreieck im Einheitskreis an, also auf ein Dreieck, dessen Hypotenusenlänge 1 ist, kann man wie folgt definieren: Liegt der Punkt $P(u\,|\,v)$ auf dem Einheitskreis, gilt für das zum Winkel α gehörende rechtwinklige Dreieck: $\sin(\alpha) = v$ und $\cos(\alpha) = u$.

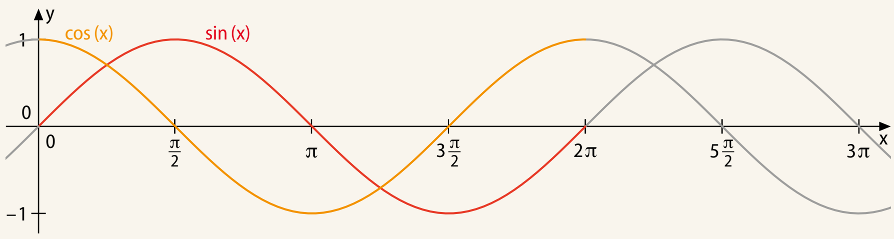


Mithilfe des Einheitskreises kann man Winkel also durch Längen ausdrücken.
Gleichzeitig wird durch jeden Winkel ein Kreisbogen der Länge x festgelegt, da α und x zueinander proportional sind. **x** nennt man das **Bogenmaß des Winkels α**.

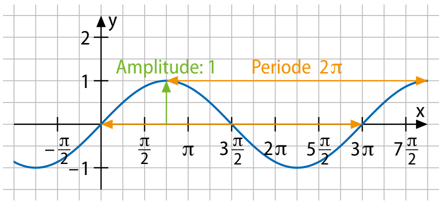
Die Sinus- und die Kosinusfunktion gehören zu den ***trigonometrischen Funktionen****.*

Merke

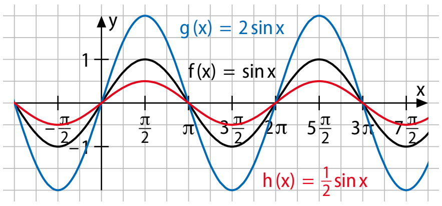
Die eindeutige Zuordnung, die jeder reellen Zahl x den Wert sin (x) zuordnet, nennt man **Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$**. Analog nennt man die eindeutige Zuordnung, die jeder reellen Zahl x den Wert cos(x) zuordnet, **Kosinusfunktion $g(x) = \cos(x)$**.
Ihre Graphen haben folgendes Aussehen:



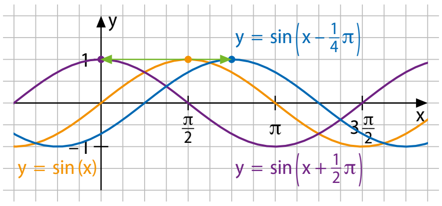
Die Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen wiederholen sich jeweils nach 2π. 2π nennt man die **Periode**, den maximalen „Ausschlag“ der Funktionswerte (von der x-Achse aus gesehen) **Amplitude**.



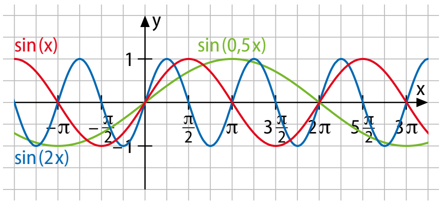
Kombinieren wir die Sinusfunktion mit den uns bekannten Termbausteinen, erhalten wir z. B. die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin(3(x-4)) + 3$, allgemein: $f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$.
Wir variieren nun die einzelnen Parameter a, b, c und d, lassen uns die Graphen mit einem Funktionsplotter zeichnen, um ein Muster bezüglich der Auswirkungen zu erkennen.



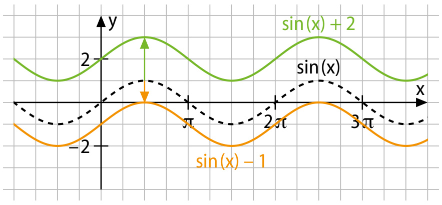
Der Parameter a bewirkt eine Streckung oder Stauchung des Graphen der Sinusfunktion in y-Richtung. Die Zahl $A = |a|$ ist die Amplitude der Funktion.



Der Parameter c bewirkt eine Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion in x-Richtung.



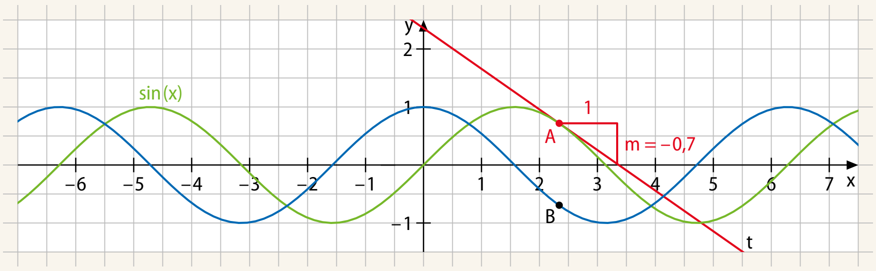
Der Parameter b bewirkt eine Streckung des Graphen der Sinusfunktion in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$. Die Funktion f mit $f(x) = \sin(b \cdot x)$ hat die Periode $p = \frac{2\pi}{b}$.



Der Parameter d bewirkt eine Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion in y-Richtung.

Merke

Durch Betrachten der Tangentensteigungen des Graphen der Sinusfunktion (graphisches Differenzieren) erhält man folgenden Zusammenhang:



Für $f(x) = \sin(x)$ gilt: $f'(x) = \cos(x)$. Für $g(x) = \cos(x)$ gilt: $g'(x) = -\sin(x)$.

Aufgaben

Beim Taschenrechner muss man den Modus von Gradmaß (degree, DEG) auf Bogenmaß (radian, RAD) umschalten, um Winkel im Bogenmaß zu bestimmen.

1 Da durch jeden Winkel α ein Kreisbogen der Länge x (das **Bogenmaß des Winkels α**) festgelegt wird, und da der Umfang des Kreises $U = 2\pi r$ und damit der Umfang des Einheitskreises $(r = 1)$ $U = 2\pi$ ist und einem Vollwinkel von $\alpha = 360°$ entspricht, erhält man:

Gradmaß α	360°	180°	90°	1°	n°
Bogenmaß x	2π	π			

a) Vervollständigen Sie die Tabelle.

b) Begründen Sie auf Basis der Tabelle, dass gilt: $x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}$.

c) Jede reelle Zahl bzw. jedes Bogenmaß x kann folglich als Winkel α aufgefasst werden. Begründen Sie, dass gilt: $\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180°$.

Beispiel *Bogenmaß und Gradmaß*

2 Verwandeln Sie vom Bogenmaß ins Gradmaß oder umgekehrt.

a) $\alpha = 45°$ **b)** $x = \frac{\pi}{2}$

Lösung:

a) *Wegen* $x = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi$ *ergibt sich für* $\alpha = 45°$: $x = \frac{1}{4} \cdot \pi$.

b) *Wegen* $\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180°$ *ergibt sich* $x = \frac{\pi}{2}$: $\alpha = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} \cdot 180° = 90°$.

3 Verwandeln Sie ins Gradmaß.

a) π **b)** 10 **c)** 1 **d)** 0,1

4 Verwandeln Sie ins Bogenmaß.

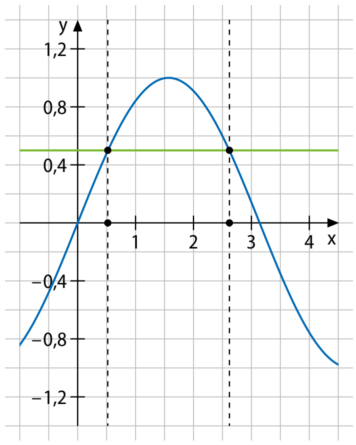
a) 45° **b)** 60° **c)** 210° **d)** 380°

Beispiel *Gleichung lösen*

5 Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $\sin(x) = 0{,}5$ im Intervall $[0; 4]$ und geben Sie diese sowohl im Bogen- als auch im Gradmaß an.

Lösung:

1 *Graphisch: Zeichnen Sie die linke Seite der Gleichung und die rechte und ermitteln Sie die Schnittpunkte beider Graphen. Man erhält* $x_1 \approx 0{,}5$ *und* $x_2 \approx 2{,}6$. *Wegen* $\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180°$ *entspricht dies* $x_1 \approx 30° = \frac{\pi}{6}$ *und* $x_2 \approx 150° = \frac{5\pi}{6}$.



2 *Rechnerisch: Der Taschenrechner liefert für* $\sin^{-1}(0{,}5)$ *den Wert* $x_1 = 0{,}52$.

6 Bestimmen Sie die Lösung(en) folgender Gleichungen im Intervall $[0; 2\pi]$ und geben Sie diese sowohl im Bogen- als auch im Gradmaß an.

a) $\sin(x) = 0{,}75$ **b)** $\sin(x) = -0{,}25$ **c)** $\sin(x) = -1$

d) $\cos(x) = 0{,}75$ **e)** $\cos(x) = -0{,}25$ **f)** $\cos(x) = -1$

Nachgefragt

- Geben Sie in eigenen Worten wieder, welche Konsequenzen die Übertragung der trigonometrischen Beziehung $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ auf den Einheitskreis hat und in welchem Zusammenhang das Bogenmaß hierzu steht.
- Erläutern Sie, weshalb gilt: $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ und $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
- Erläutern Sie, wie man anschaulich erklären kann, dass die Ableitung der Sinusfunktion die Kosinusfunktion ist.
- Wie lautet die 111-te Ableitung und wie die 222-te Ableitung von sin (x), wie die 333-te und 444-te Ableitung von cos (x)?

7 Bestimmen Sie Amplitude und Periode der folgenden trigonometrischen Funktionen f.

a) $f(x) = 3\sin(2x)$ **b)** $f(x) = \sin(3x)$

c) $f(x) = 3\cos(2x)$ **d)** $f(x) = 2 \cdot \sin(3x + 4) - 5$

8 Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \sqrt{\sin(x)}$.

Beispiel
Ableitung

Lösung:

Der Vorfaktor 3 ist vom Ableiten nicht betroffen, er bleibt erhalten. Den Wurzelausdruck leitet man mittels der Kettenregel ab, wobei $v(x) = \sin(x)$ die innere Funktion und $u(x) = \sqrt{x}$ die äußere Funktion ist.

Es ist $u'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ und $v'(x) = \cos(x)$.

$f'(x) = 3 \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$.

9 Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen f.

a) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ **b)** $f(x) = 4 \cdot \cos(x)$ **c)** $f(x) = 2 \cdot \sin(x) + 3$

d) $f(x) = \sqrt{\sin(x)} + 3x - 1$ **e)** $f(x) = (\cos(x))^2 + \frac{2}{3}x^3$ **f)** $f(x) = \frac{1}{2 \cdot \sin(x)} + \frac{1}{x}$

g) $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ **h)** $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ **i)** $f(x) = x^2 \cdot \sin^2(x)$

10 Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen und geben Sie jeweils Amplitude und Periode an.

a) $f(x) = 2 \cdot \sin(0{,}5x) - 1$ **b)** $f(x) = -\cos(2x - \pi) + 2$ **c)** $f(x) = -2 \cdot \sin(2\pi x) + \pi$

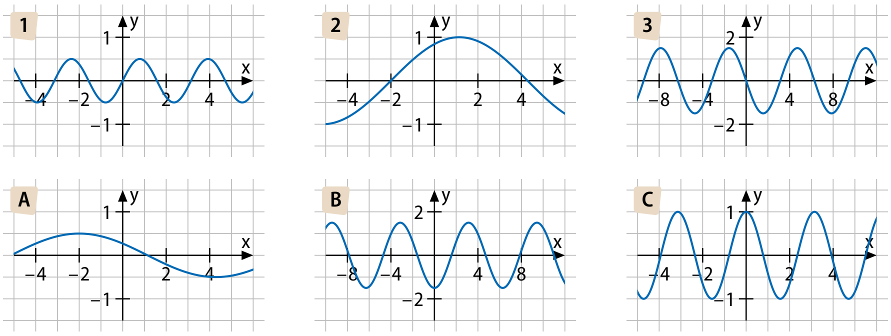
d) $f(x) = 1{,}5\sin(x) + 2$ **e)** $f(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **f)** $f(x) = \sin^2(x)$

11 Determine the amplitude and the period for the following functions f and calculate their derivative f'.

a) $f(x) = \sin(2x) + 2$ **b)** $f(x) = -4\cos(\pi)$ **c)** $f(x) = -0{,}5 \cdot \sin(0{,}1x)$

d) $f(x) = \cos(2x) + 2$ **e)** $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \sin\left(\frac{x}{4}\right)$ **f)** $f(x) = -0{,}2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{12}x\right) - \pi$

12 Ordnen Sie jedem Graphen **1** bis **3** der Sinusfunktionen den zugehörigen Graphen der Ableitung (**A** bis **C**) zu. Bestimmen Sie jeweils sowohl die Gleichung der Funktion als auch die der Ableitungsfunktion; überprüfen Sie anschließend den graphisch gewonnenen Term der Ableitungsfunktion, indem Sie f ableiten.



Beispiel
Gleichung lösen

Die Gleichung $\sin(x) = 1$ kann man mit dem Taschenrechner lösen, indem man $\sin^{-1}(1)$ eingibt. Der Taschenrechner liefert $1{,}57 = \frac{\pi}{2}$.

13 Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $\sin(x) = 1$ im Intervall $[-\pi; \pi]$ und veranschaulichen Sie Ihre Lösung auch graphisch.
Lösung:
$\sin(x) = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin^{-1}(1) = x;\;\; x = \frac{\pi}{2}$

14 Geben Sie an, in welchen Punkten der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ dieselbe Steigung hat wie …
a) die 1. Winkelhalbierende.
b) die 2. Winkelhalbierende.
c) die x-Achse.
d) die Gerade mit der Gleichung $y = -0{,}5x + 2$.

15 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin(x)$.
a) Ermitteln Sie im Intervall von –1 bis 4 die Koordinaten aller Punkte, die der Graph von f mit den Koordinatenachsen gemeinsam hat.
b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und ermitteln Sie alle Extrempunkte des Graphen von f.
c) Der Graph von f hat mit der Parabel P mit der Gleichung $y = -\frac{4}{\pi^2} \cdot x \cdot (x - \pi)$ zwei Punkte gemeinsam. Geben Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte A und B an und untersuchen Sie, ob sich die beiden Graphen in den Punkten A und B berühren oder schneiden.

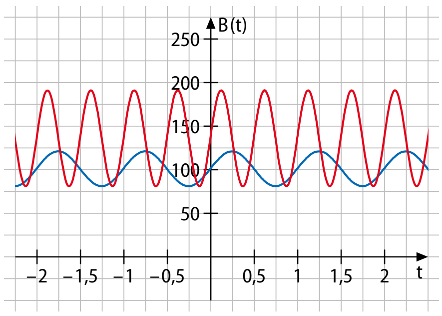
16 Die durchschnittliche Tageslänge (in Stunden) in Deutschland, also die Zeit zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang, kann näherungsweise durch die Funktion f mit $f(x) = 4{,}4\sin\left[\frac{2\pi}{365}(x - 81)\right] + 12{,}2;\; D_f = \{1; 2; 3; \ldots; 365\}$, wiedergegeben werden; hierbei bedeutet f (x) die durchschnittliche Tageslänge am x-ten Tag des Jahres.
a) Skizzieren Sie den Graphen G_f bzw. lassen Sie ihn sich von einem Funktionsplotter zeichnen (in Ihrer Zeichnung dürfen Sie D_f durch $[1; 365]$ ersetzen).
b) Ermitteln Sie die größte und die kleinste Tageslänge sowie das jeweilige Datum.
c) Ermitteln Sie graphisch und rechnerisch die durchschnittliche Tageslänge am Frühlingsanfang (21. März), am Sommeranfang (21. Juni), am Herbstanfang (23. September) und am Winteranfang (21. Dezember).

17 Die Funktionen f und g haben folgendes Aussehen: $f: f(x) = 2(\sin x)^2 - 1$ und $g: g(x) = \frac{1}{(\sin(x))^2}$.

a) Was können Sie zum Definitionsbereich der Funktion g sagen?

b) Ermitteln Sie die Koordinaten der Extrempunkte der Graphen der beiden Funktionen im Intervall von −4 bis 4 sowie die Koordinaten derjenigen Punkte, die die beiden Graphen miteinander gemeinsam haben. Was fällt Ihnen auf?

18 Der Blutdruck B(t) (in mmHg) einer Sprinterin kann im Ruhezustand (Puls: 60) näherungsweise durch den Term $B_1(t) = 100 + 20\sin(2\pi t)$ (Zeit t in s) und nach einer Trainingsbelastung (Puls: 120) näherungsweise durch den Term $B_2(t) = 135 + 55\sin(4\pi t)$ beschrieben werden.



Die Einheit mmHg (Millimeter Quecksilbersäule) wird bei der Angabe von Druckverhältnissen benutzt, z. B. bei Blutdruckwerten.
1 mmHg ist der Druck, den eine Quecksilbersäule von 1 mm Höhe ausübt.

a) Welcher der beiden Graphen gehört zu B_1, welcher zu B_2? Begründen Sie.

b) Geben Sie jeweils Beispiele für Zeitpunkte an, zu denen der Blutdruck besonders stark zunimmt (bzw. besonders stark abnimmt).

c) Reflektieren Sie: Warum ist Bluthochdruck so gefährlich? Woher kommt er? Was passiert bei einem Blutdruck von 200 mmHg?

19 Es besteht der in der Tabelle abgebildete Zusammenhang zwischen einem Winkel und den zugehörigen sin-, cos- und tan-Werten (im Gradmaß).
Leiten Sie diese Zusammenhänge her.

Tipp 1: Warum ist das Dreieck bei einem 45°-Winkel gleichschenklig?

Tipp 2: Ergänzen Sie das Dreieck mit dem 30°-Winkel zu einem gleichschenkligen Dreieck.

Tipp 3: Benutzen Sie den Satz des Pythagoras.

Winkel α	sin (α)	cos (α)	tan (α)
0°	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	0
30°	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	–

Nachgefragt

- Nehmen Sie Stellung zu der Aussage, dass eine Verschiebung in x-Richtung die Periodenlänge einer Sinusfunktion verändert.
- Helene meint: „Die Ableitung einer Sinusfunktion $\sin(b \cdot x)$ hat immer die gleiche Amplitude wie die Funktion selbst.“ Stimmt das? Argumentieren Sie.
- Nehmen Sie Stellung zu folgenden Aussagen.
  1. „Die Periodenlänge der Funktion $\sin(b \cdot x)$ ist umgekehrt proportional zu b.“
  2. „Die Veränderung der Amplitude der Kosinusfunktion hat keinen Einfluss auf die Lage der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.“

1 Klausurvorbereitung

Im Folgenden finden Sie keine vollständigen Klausuren, wohl aber Aufgaben, die zu diesem Kapitel passen und Teil einer Klausur sein könnten.

Aufgabe 1

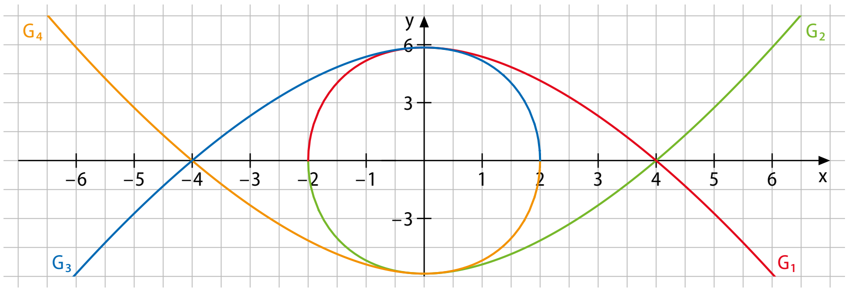
Warm up

A Leiten Sie ab.
a) $f_1(x) = -3(x-3)^3$ **b)** $f_2(x) = \sqrt{x^3+3x}$ **c)** $f_3(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)$

B Bestimmen Sie die Extrema der Funktionen, einmal ohne Zuhilfenahme der Ableitung, einmal mithilfe der Ableitung.
a) $g_1(x) = -2x^2 + 8x - 4$ **b)** $g_2(x) = 3x^2 + 12x + 9$

C Lösen Sie folgende Gleichungen.
a) $(x+2) \cdot (x-4) = 0$ **b)** $x^2 + 4x + 4 = 0$ **c)** $x - 1 = \sqrt{x+1}$

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x+2}\,(x-4)$.
a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an und erläutern Sie dies.
b) Bestimmen Sie die Nullstelle(n) des Graphen von f sowie seine Extremstelle(n).
c) Ordnen Sie der Funktion f ihren Graphen zu und geben Sie für die anderen Graphen jeweils einen passenden Funktionsterm an.



d) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitung von f. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.
e) Bestimmen Sie die Stelle, an der der Graph von f parallel zur Geraden $y = x + 4$ verläuft.
f) Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage: „Über einem Intervall streng monoton steigende Funktionen können in der ersten Ableitung in diesem Intervall keine Nullstelle haben.“

Aufgabe 2

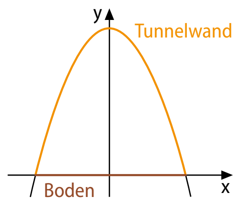
Warm up

A Zerlegen Sie (durch Ausklammern und/oder Anwendung der binomischen Formeln) so weit wie möglich in Faktoren.
a) $-2v^3 + 12v^2w - 18vw^2$ **b)** $-333m^4 + 37n^2$

B Ermitteln Sie die Schnittpunkte folgender Funktionen zeichnerisch und rechnerisch.
$f(x) = (x+1)^2$ und $g(x) = -(x+1)(x-2)$

C Ermitteln Sie jeweils den Scheitel der quadratischen Funktionen.
a) $y = x^2 + 6x + 9$ **b)** $y = x^2 + 6x + 5$ **c)** $y = x^2 + 7x + 12$

2 Sie haben sich mit Ihrem Auto in den Bergen verirrt und kommen an einen Tunnel. Die maximale Höhe des Tunnels wird mit 3 m angegeben, die maximale Breite am Boden ebenfalls mit 3 m. Ihr Auto ist 1,70 m breit und 1,50 m hoch.



a) Stellen Sie einen quadratischen Term auf, mit dem Sie die Tunnelwände modellieren können.

b) Schließen Sie vom Graphen der Funktion f auf den Graphen der Ableitungsfunktion f′.

c) Berechnen Sie den Winkel, den die Tunnelwände mit dem Boden einschließen.

d) Berechnen Sie, ob Ihr Auto durch den Tunnel passt.

Aufgabe 3

Warm up

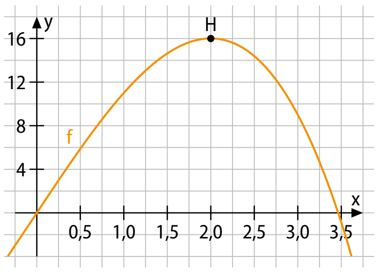
A Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen.

a) $f(x) = x^5 + 3x^3 + x$ **b)** $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3$ **c)** $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$

B Untersuchen Sie die Funktionen auf Nullstellen, Monotonie und Extremstellen und skizzieren Sie anschließend den jeweiligen Graphen.

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ **b)** $f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 12x$ **c)** $f(x) = x^2(x - 1)$

3 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 12x$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie dessen Hochpunkt $H(2\,|\,16)$.



a) Vergrößern Sie das Intervall in geeigneter Weise und vervollständigen Sie so den Graphen.

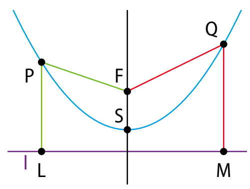
b) Die Gerade g verläuft durch den Punkt H und besitzt eine negative Steigung. Zudem ist ihre Steigung dieselbe wie die, die der Graph von f im Punkt $P(2{,}5\,|\,14{,}375)$ aufweist.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g mit der y-Achse.

c) Der Funktionsterm von f wird verändert, man erhält die Funktion h mit dem Term $h(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Führen Sie zwei wesentliche Veränderungen im Graphen an und deren Ursache.

d) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion von f und beschreiben Sie, wie Sie vorgegangen sind.

e) Berechnen Sie die Extrema von f und von h sowie die jeweiligen Nullstellen (möglichst exakt, ansonsten näherungsweise).

f) Der Ausschnitt des Graphen ähnelt einer Parabel. Eine Parabel ist definiert als Menge aller Punkte X (der Ebene), von denen jeder von einer gegebenen Geraden, der sogenannten Leitgeraden l, und von einem festen Punkt, dem Brennpunkt F, jeweils gleichen Abstand hat. Der Punkt, der in der Mitte zwischen Brennpunkt und Leitgerade liegt, heißt Scheitel S der Parabel. Die Verbindungsgerade von Brennpunkt und Scheitel wird auch Achse der Parabel genannt.
Skizzieren Sie die ungefähre Lage der Leitgeraden und des Brennpunkts für eine Parabel, die dem Ausschnitt des Graphen von f ähnelt.



g) Beschreiben Sie, wie die Lage von Leitgerade und Brennpunkt die Öffnung der Parabel beeinflussen.

1 Klausurvorbereitung

Aufgabe 4

Warm up

A Leiten Sie die Funktionen ab.

a) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x - 1)$ **b)** $f(x) = (\sin(x))^2 - 3\cos(2x)$

B Bestimmen Sie Amplitude und Periode und skizzieren Sie den Graphen.

a) $f(x) = 2\sin(2(x - 2))$ **b)** $f(x) = -\cos(-x) - 1$

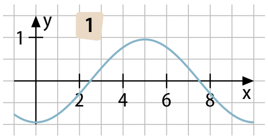
4 Am Elbufer wird täglich der Wasserstand gemessen. Durch Ebbe und Flut entsteht eine wellenförmige Kurve, wenn man die Werte in einem Koordinatensystem veranschaulicht. Die Messwerte können durch folgende Funktionsgleichung wiedergegeben werden:
$f(t) = 1{,}5\sin\left(\frac{\pi}{5}(t - 5)\right) + 1{,}5$ (t in h, f(t) in m).

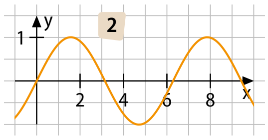
a) Geben Sie den Wasserstand zum Zeitpunkt $t = 0$ an.

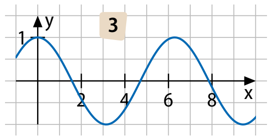
b) Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen.

c) Steigt oder fällt der Wasserstand zum Zeitpunkt $t = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Welcher der folgenden Graphen gehört zur ersten Ableitung von f? Begründen Sie.







e) Berechnen Sie: Wann erreicht der Wasserstand sein Maximum, wann sein Minimum? Wie hoch ist das Wasser dann jeweils? Wie groß ist der Tidenhub, also der Unterschied zwischen dem Scheitelpegel (Flut) und dem untersten Pegelstand (Ebbe)?

Reflexion

Wie sehen typische Klausuraufgaben aus?

- Zuordnen von Termen und Graphen
- Aufstellen eines Terms zu einer gegebenen Sachsituation, Sachsituationen modellieren
- Ableitungen im Sachzusammenhang interpretieren (z. B. als Steigung) und Ableitungen berechnen (dabei Ableitungsregeln anwenden)
- Signifikante Punkte eines Graphen (Nullstellen, Extremstellen) berechnen, Graphen auf Monotonie untersuchen
- Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitung erkennen, diese begründen und Graphen als Ableitungsgraphen identifizieren
- Graphen auf Symmetrie untersuchen, speziell auch die ganzrationaler Funktionen

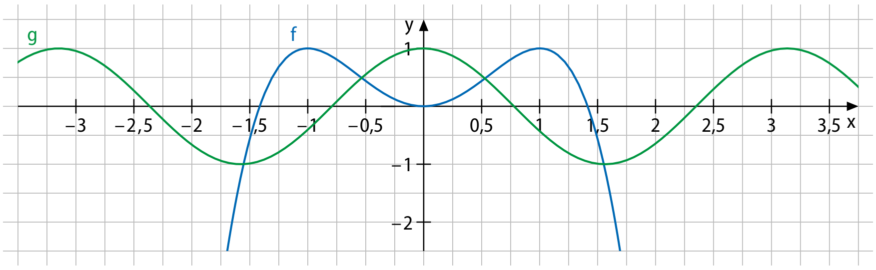
Typische Aufgabenteile für das Warm up:

- Lösen von linearen, quadratischen, Bruch-, Wurzel- und Potenzgleichungen
- Extrema quadratischer Funktionen mit und ohne Ableitung bestimmen
- Faktorisieren von Summen und Differenzen
- Aussagen treffen über die Parameter von Funktionen
- Ganzrationale Funktionen auf Symmetrie, Monotoniebereiche und Extrema untersuchen und ihre Graphen skizzieren
- bei trigonometrischen Funktionen Amplitude und Periode bestimmen und die Funktionen ableiten

Abiturvorbereitung

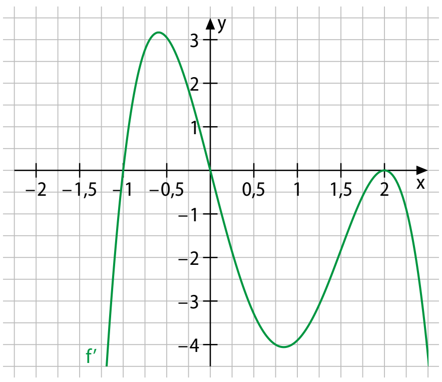
Im Folgenden finden Sie Aufgaben, wie sie zu diesem Kapitel passend in einer Abiturprüfung gestellt werden können.

1 Die Abbildung zeigt die Graphen einer ganzrationalen Funktion f und einer trigonometrischen Funktion g.



a) Ordnen Sie die Funktionen f und g den abgebildeten Graphen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.
b) Geben Sie für einen der abgebildeten Graphen einen möglichen Funktionsterm an. Erklären Sie, wie Sie dabei vorgegangen sind.
c) Entscheiden Sie begründet, welcher der angegebenen Terme zum Graphen der trigonometrischen Funktion passt.
$f_1(x) = \cos(x)$ $\quad f_2(x) = \cos(0{,}5x)$ $\quad f_3(x) = \cos(2x)$ $\quad f_4(x) = \cos(x - \pi)$
d) Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf des Produkts der beiden Funktionen f und g sowie den von dessen Ableitungsfunktion.
e) Leiten Sie die ganzrationale Funktion k mit $k(x) = x^3 \cdot (x^2 - 4)$ auf zwei verschiedene Arten ab. Geben Sie an, welche Ableitungsregeln Sie jeweils benutzt haben.
f) Erläutern Sie für eine der benutzten Ableitungsregeln, wie man sie plausibel machen oder herleiten kann.
g) Geben Sie möglichst viele Vorgehensweisen an, wie man die Nullstellen der ganzrationalen Funktion k (auch näherungsweise) bestimmen kann.

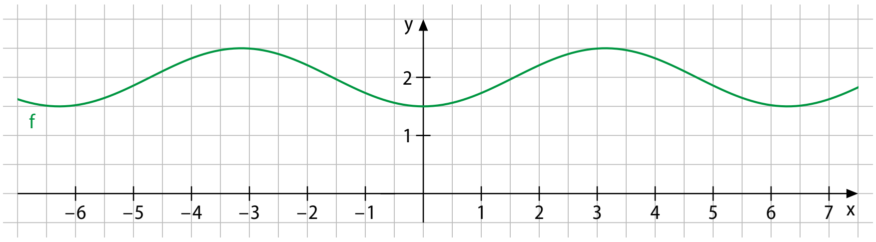
2 Gegeben ist der Ausschnitt des Graphen der Ableitungsfunktion f′ einer ganzrationalen Funktion f.



a) Wodurch unterscheiden sich die drei gegebenen Nullstellen? Worin äußert sich dies im Term von f′?
b) Stellen Sie unter Benutzung der gegebenen Nullstellen und des globalen Verlaufs des Graphen einen möglichen Term für f′ auf.
c) Erläutern Sie die Bedeutung der Nullstellen von f′ für den Graphen von f.
d) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f.
e) Skizzieren Sie den Graphen von f.
f) Welchen minimalen Grad hat f′, welchen f?
g) Stellen Sie einen möglichen Funktionsterm für f auf.

1 Abiturvorbereitung

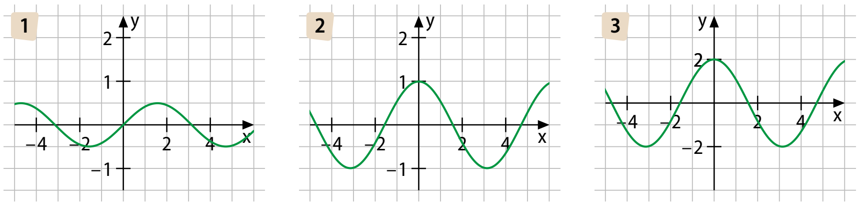
3 Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ und ihr Graph.



a) Machen Sie im Graphen die Amplitude und die Periode kenntlich.

b) Erläutern Sie, wie der Graph von f aus dem der Funktion g mit $g(x) = \sin(x)$ hervorgeht.

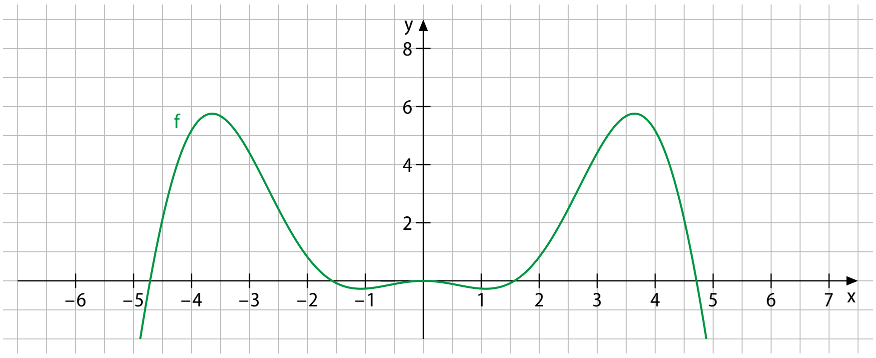
c) Eine der folgenden Abbildungen zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f′ von f. Entscheiden Sie begründet, welcher der Graphen den der Ableitungsfunktion darstellt.



d) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Eine trigonometrische Funktion ist durch die Angabe der Koordinaten eines beliebigen Hochpunktes und eines beliebigen Tiefpunktes ihres Graphen eindeutig bestimmt.

e) Erläutern Sie, wie man die Sinusfunktion aus der trigonometrischen Beziehung $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ erhält. Verwenden und erläutern Sie dabei auch die Begriffe „Einheitskreis" und „Bogenmaß".

Eine mögliche Erweiterung:



f) Der Funktionsterm von f wird abgewandelt, so dass man $h(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ erhält. Der Graph von h ist für das Intervall $I =]-2\pi; 2\pi[$ oben abgebildet. Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph achsensymmetrisch ist.

g) Skizzieren Sie im gleichen Koordinatensystem den Graphen der Ableitungsfunktion.

h) Leiten Sie h ab und vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis aus g).

Reflexion

Arbeitsaufträge und Fragen zur Vorbereitung auf das Abitur	Hilfe
Beschreiben Sie an einem Beispiel, was man unter graphischem Differenzieren versteht, und wie man dabei vorgeht.	S. 23/11
Was sagt die Ableitung an einer Stelle des Graphen einer Funktion aus?	S. 16/5
Beschreiben Sie Anwendungskontexte, in denen das Bestimmen der Ableitung eine Rolle spielt.	S. 47/18
Beschreiben Sie, wie man das Extremum einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades mit und ohne das Bestimmen einer Ableitung finden kann. Führen Sie beide Verfahren an einem konkreten Funktionsterm durch.	S. 12/2, 18/6
Beschreiben Sie an einem konkreten Beispiel, was man unter der Verkettung einer Funktion versteht.	S. 36
Führen Sie ein Beispiel für einen Funktionsterm an, den man mit der Produktregel ableiten kann, bei dem man die Produktregel aber auch umgehen könnte.	S. 32/4
Führen Sie ein Beispiel für einen Funktionsterm an, den man mit der Kettenregel ableiten kann, bei dem man die Kettenregel aber auch umgehen könnte.	S. 38/7, 39/8
Erläutern Sie an einem konkreten Funktionsterm, dass die Ableitung eines Produkts nicht gleich dem Produkt der Ableitungen der Faktoren ist.	S. 31
Machen Sie die Faktorregel für Ableitungen an einem konkreten Beispiel plausibel. Warum bleibt der Vorfaktor bei der Ableitung erhalten?	S. 21
Warum fällt das absolute Glied, also der Teil eines Terms, der mit keinem x verknüpft ist, beim Ableiten weg?	S. 20
Beschreiben Sie, wie man die Ableitung einer Funktion an einer Stelle ohne Ableitungsregeln ermitteln kann. Benutzen Sie dabei auch die Begriffe Differenzen- und Differentialquotient sowie Sekanten- und Tangentensteigung. Inwiefern spielt der Grenzwert in diesem Kontext eine Rolle?	S. 16/5
Beschreiben Sie an einem selbstgewählten Beispiel, wie man Graphen ganzrationaler Funktionen auf Symmetrie untersuchen kann.	S. 16/4
Welche Arten von Symmetrie kennen Sie? Beschreiben Sie ein Kriterium, mit dem Sie eine beliebige Funktion anhand ihres Terms auf Symmetrie untersuchen können.	S. 16/4
Was versteht man unter einer Tangente und wodurch unterscheidet sie sich von einer Sekante?	S. 26
Wie lautet der Monotoniesatz für Funktionen? Gilt auch seine Umkehrung? Reflektieren Sie über die Umkehrbarkeit von Sätzen. Geben Sie Beispiele für umkehrbare und für nicht umkehrbare Sätze an.	S. 18/6
Nennen Sie die beiden hinreichenden Kriterien für Extremstellen. Wodurch unterscheiden Sie sich vom notwendigen Kriterium? Sind beide hinreichenden Kriterien gleich mächtige Werkzeuge, oder kann eines der beiden Kriterien mehr als das andere?	S. 18/6

1 Alles im Blick

In diesem Kapitel haben Sie gelernt, …
… Funktionsterme miteinander zu verknüpfen, diese zusammengesetzten Funktionen abzuleiten und zu untersuchen.

Im Detail haben Sie gelernt, …

Kap. 1.1 & 1.2

Summen-, Faktor- und Potenzregel der Ableitung; Tangentengleichungen aufstellen

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… die Regel für konstanten Faktor, die Potenzregel sowie die Summenregel zum Ableiten von Funktionstermen anzuwenden. … die Faktorregel und die Summenregel anschaulich zu begründen. … Graphen von zusammengesetzten Funktionen zu untersuchen. … Tangentengleichungen aufstellen	Wir haben Termbausteine additiv miteinander verknüpft und so aus Potenzfunktionen ganzrationale Funktionen entstehen lassen. Leitet man diese ab, kommen drei Regeln zur Anwendung: die Faktorregel, die Potenz- und die Summenregel. Diese Regeln kann man sich leicht plausibel machen: Zum Beispiel verändert der Vorfaktor die Steigung des Graphen, muss also in die Ableitung miteinfließen. Die Potenzregel kann man sich durch graphisches Differenzieren plausibel machen, weil man so leicht sieht, dass der Grad der Ableitungsfunktion um eins niedriger ist als der der Ausgangsfunktion. Anschließend haben wir ganzrationale Funktionen auf Nullstellen, Extrempunkte und Symmetrie untersucht sowie Tangentensteigungen an deren Graph konkret berechnet und Tangentengleichungen aufgestellt.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… Punkte mittels der Ableitung zu berechnen, bei denen die anliegende Tangente eine vorgegebene Steigung besitzt.	1.1/6 – 8	S. 22/5
… graphisch zu differenzieren, d. h. den Graphen der Ableitungsfunktion aus den Tangentensteigungsdreiecken der Funktion entstehen lassen.	1.1/12	S. 23/11
… ganzrationale Funktionen auf Symmetrie und Nullstellen sowie Monotonie und Extrema zu untersuchen.	1.1/16, 19	S. 23/15, 24/18
… Tangentengleichungen aufzustellen.	1.2/1	S. 26, 27; S. 28/2

Kap. 1.3

Produktregel und Quotientenregel

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… die Produktregel und die Quotientenregel zum Ableiten von Funktionstermen zu verwenden. … Graphen von zusammengesetzten Funktionen (Produkt) zu untersuchen.	Wir haben Termbausteine multiplikativ miteinander verknüpft und uns anhand einfacher Beispiele klar gemacht, dass die Ableitung eines Produkts nicht gleich der Ableitung der einzelnen Faktoren ist. Anhand eines Rechtecksflächeninhalts und seiner Veränderung haben wir uns die Produktregel plausibel gemacht. Mit ihr können wir multiplikativ verknüpfte Terme ableiten. Aus der Produktregel haben wir die Quotientenregel hergeleitet.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… einem Funktionsgraphen den Graph seiner Ableitung zuzuordnen.	13	S. 24/17

Verkettete Funktionen und die Kettenregel

Kap. 1.4

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… die Kettenregel zum Ableiten von Funktionstermen, bei denen die innere Funktion eine lineare Funktion ist, zu verwenden. … Graphen von zusammengesetzten Funktionen (Verkettung mit linearer innerer Funktion) zu untersuchen. … Funktionen verketten und Verkettungen von Funktionen zu erkennen.	Wir haben Termbausteine „ineinander geschachtelt" und so miteinander verkettet. E entsteht eine innere und eine äußere Funktion. Die zugehörige Ableitungsregel ist die Kettenregel. Wir haben sie uns anhand von Funktionen plausibel gemacht, bei denen die Anwendung einer neuen Ableitungsregel gar nicht zwingend notwendig ist (wie z. B. $f(x) = (x+2)^2$). Die Kettenregel kommt z. B. dann zur Anwendung, wenn unter der Wurzel ein (etwas umfangreicherer) Funktionsterm steht (z. B. $f(x) = \sqrt{2x+3}$). Auch wenn Summen potenziert werden (z. B. bei $f(x) = (x+1)^5$), ist die Anwendung der Kettenregel hilfreich.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… verkettete Funktionen als solche zu erkennen und innere sowie äußere Funktion zu definieren.	1 – 4, 6	S. 38/5
… verkettete Funktionen abzuleiten.	8, 9	S. 38/7
… wann die Kettenregel typischerweise zur Anwendung kommt.	9	S. 39/10

Trigonometrische Funktionen und ihre Ableitungen

Kap. 1.5

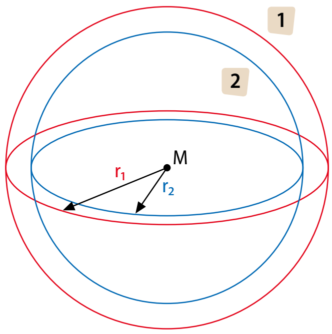
Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… trigonometrische Funktionen aus den trigonometrischen Beziehungen am Einheitskreis entstehen zu lassen und dabei das Bogenmaß mit dem Winkelmaß in Verbindung zu bringen. … trigonometrische Funktionen zu untersuchen und dabei Periode und Amplitude zu benennen sowie die Wirkung der Parameter hinsichtlich Verschiebungen und Streckungen einzuschätzen. … die Ableitung trigonometrischer Funktionen zu bestimmen, auch unter Zuhilfenahme der Kettenregel.	Wir haben als „Termbaustein" die trigonometrischen Funktionen hinzugenommen und sie z. B. mit Termbausteinen kombiniert, die zu ganzrationalen Funktionen gehören. Die trigonometrischen Funktionen haben wir aus den trigonometrischen Beziehungen am Einheitskreis gewonnen und dabei Gradmaß in Bogenmaß umzurechnen gelernt. Wir haben die Abhängigkeit von Amplitude und Periode von den Parametern trigonometrischer Funktionen betrachtet. Die Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion haben wir uns durch graphisches Ableiten plausibel gemacht, anschließend mittels der Kettenregel auf komplexere Funktionsterme erweitert. Als typische Anwendungen für trigonometrische Funktionen haben wir z. B. periodische Vorgänge wie Ebbe und Flut oder Blutdruckskurven angeschaut und mithilfe der Differentialrechnung signifikante Punkte berechnet.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… Gradmaß in Bogenmaß umzuwandeln und dies am Einheitskreis zu erklären.	1, 3, 4	S. 44/2
… trigonometrische Funktionen (oft unter Verwendung der Kettenregel) abzuleiten und Ausgangstermen ihre Ableitungsterme zuzuordnen.	9, 12	S. 45/8
… trigonometrische Funktionen in Sachzusammenhängen zu untersuchen.	15, 16	S. 47/17 – 19

1 Leiten Sie die Funktionen ab.

a) $f(x) = \frac{4}{3}\pi \cdot x^3$ **b)** $f(r) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ **c)** $f(r) = 4\pi \cdot r^2$

2 Versuchen Sie, sich zu erinnern (bzw. recherchieren Sie): Wie lautet die Formel zur Berechnung des Volumens einer Kugel und wie die zur Berechnung ihrer Oberfläche?



Wir betrachten eine Kugel und beobachten die Änderung des Kugelvolumens, wenn der Radius sich ändert.
Dazu wählen wir zwei Radien: den Radius r_1 der Ausgangskugel **1** und den Radius r_2 einer kleineren Kugel **2**.
Die zugehörigen Volumina lauten:
$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3$ und $V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3$.
Die Änderung des Kugelvolumens von Kugel **1** zu Kugel **2** kann man sich als Kugelhülle vorstellen, also als innen hohle Kugelschale mit der Wandstärke $(r_1 - r_2)$.
Die mittlere Änderungsrate des Kugelvolumens entspricht dem Differenzenquotienten

$$\overline{V}(r) = \frac{V_1 - V_2}{r_1 - r_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3}{r_1 - r_2}.$$

3 **a)** Überprüfen Sie durch Ausmultiplizieren die Gültigkeit folgender Formel:
$(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$.

b) Vereinfachen Sie mithilfe der Formel aus Teilaufgabe a) den Differenzenquotienten

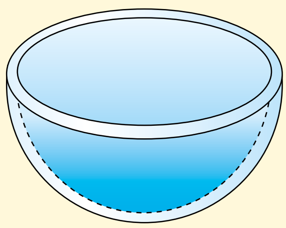
$$\overline{V}(r) = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3}{r_1 - r_2}.$$

Zur Ermittlung der momentanen Änderungsrate betrachten wir den Differenzenquotienten $\overline{V}(r)$, wenn r_2 gegen r_1 wandert (oder umgekehrt), und bilden den Grenzwert:

$$\lim_{r_2 \to r_1} \overline{V}(r) = \lim_{r_2 \to r_1} \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3}{r_1 - r_2}.$$

4 Ermitteln Sie den Grenzwert $\lim_{r_2 \to r_1} \overline{V}(r) = \lim_{r_2 \to r_1} \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3}{r_1 - r_2}$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

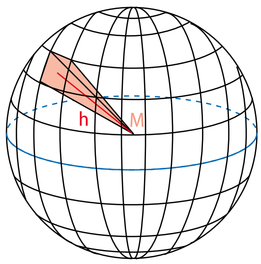
Wir erhalten als Ergebnis: $V'_{Kugel}(r) = 4\pi r^2 = O_{Kugel}(r)$.
Das heißt: Als Ableitung des Kugelvolumens nach dem Radius erhält man die Kugeloberfläche. Oder anders ausgedrückt: Die Differenz zweier Kugelvolumina, deren zugehörige Radien sehr dicht beieinander liegen, kann als Kugeloberfläche interpretiert werden.
Die Oberfläche einer Kugel entspricht also der momentanen Änderungsrate des Kugelvolumens.



Geometrische Erkenntnisse aus der Differentialrechnung

Alternativ kann man den Zusammenhang zwischen Kugelvolumen und Kugeloberfläche auch wie folgt herleiten:

Eine Kugel kann man sich aus unendlich vielen, infinitesimalen (unendlich kleinen) Pyramiden zusammengesetzt vorstellen. Die Grundflächen dieser Pyramiden ergeben zusammen die Kugeloberfläche; die Höhen der Pyramiden sind jeweils gleich dem Kugelradius. Da das Pyramidenvolumen durch die Formel
$V_P = \frac{1}{3}G \cdot h$ gegeben ist und hier $r = h$ ist, folgt: $V_P = \frac{1}{3}G \cdot r$.
Die Summe aller Pyramidengrundflächen nähert sich bei immer feinerer Unterteilung der Oberfläche der Kugel an, es gilt also:
$V_P = \frac{1}{3}O_K \cdot r$. Wegen $V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ ergibt sich: $\frac{1}{3}O_K \cdot r = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

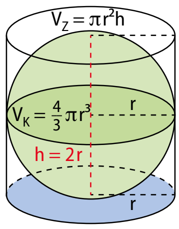


5 Erklären Sie anhand der Gleichung $\frac{1}{3}O_K \cdot r = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, dass die Oberfläche einer Kugel einem Grenzwert entspricht, und ermitteln Sie eine Formel für die Kugeloberfläche durch Umstellen der Gleichung.

Aus dem Dargestellten ergibt sich die Frage nach der Übertragbarkeit auf andere Fälle.

6 Überprüfen Sie, ob der Zusammenhang zwischen der Ableitung des Volumens und der Oberfläche auch für andere Körper wie Würfel, Quader, Pyramide und Kegel gilt.

Im Folgenden betrachten wir weitere Zusammenhänge geometrischer Überlegungen mit der Differentialrechnung.
Der **Satz des Archimedes über Kugel und Kreiszylinder** beschreibt den Zusammenhang zwischen Volumen und Oberfläche von Kugel und Kreiszylinder. Der Satz gilt als eines der großen Resultate der Mathematik. Er geht zurück auf Archimedes von Syrakus (etwa 287–212 v. Chr.) und dessen Werk *Über Kugel und Zylinder* zurück, in dem er mithilfe von Methoden arbeitete, die als Vorläufer der Methoden der modernen Integralrechnung angesehen werden können. Der Satz lässt sich wie folgt angeben:



Für eine Kugel und einen Kreiszylinder, dessen Grundfläche einem größten Kugelkreis der Kugel und dessen Höhe dem Kugeldurchmesser entspricht, stehen die Oberflächeninhalte und die Volumina beider Körper jeweils in demselben Verhältnis. Dabei gilt: $\frac{O_{Zylinder}}{O_{Kugel}} = \frac{V_{Zylinder}}{V_{Kugel}}$.

7 Stellen Sie die Formel nach $\frac{V_{Kugel}}{O_{Kugel}}$ um.

Archimedes folgend, scheint dieses Verhältnis für verschiedene Körper interessant zu sein. Man kann durch Messen zeigen, dass bei gegebenem Volumen von allen Körpern die Kugel die kleinste Oberfläche hat. Das ist wichtig für die Abkühlungsgeschwindigkeit verschieden großer Massen: Die Abkühlung erfolgt proportional zur Größe der Oberfläche, die beim Größerwerden jedoch langsamer wächst als das Volumen, so dass größere Massen langsamer abkühlen als kleine.

8 Recherchieren Sie die Größe der Kaiserpinguine aus der Antarktis und die der Galapagos-Pinguine, die in Äquatornähe leben, und erklären Sie die Größenunterschiede auf Basis obiger Ausführungen. Recherchieren Sie anschließend, was man unter der „Bergmann'schen Regel" und unter „Allometrie" versteht, und setzen Sie es in Beziehung zu den obigen Ausführungen.

click & study
Das digitale Schulbuch

Entdecken Sie das digitale Schulbuch click & study und das digitale Lehrermaterial click & teach

Die Digitalisierung eröffnet zahlreiche interessante Möglichkeiten der Unterrichtsorganisation und stellt Sie und Ihre Schülerinnen und Schüler zugleich vor neue Herausforderungen.

Mit unseren digitalen Lösungen, dem digitalen Schulbuch click & study und dem digitalen Lehrermaterial click & teach, präsentieren wir Ihnen deshalb Anwendungen, die vor allem eines sind: einfach

▶ Einfach in der Navigation:

Im Mittelpunkt von click & study und click & teach steht immer das digitale Schulbuch, sodass Sie die von uns eingebundenen und die von Ihnen hinzugefügten Materialien immer an der richtigen Stelle des Buches schnell finden können.

▶ Einfach in der Bedienung:

Bei der Gestaltung der Menüs und Bedienelemente haben wir darauf geachtet, dass diese nicht überladen werden und selbsterklärend bleiben.

click & teach

Das digitale Lehrermaterial

▶ Einfach im Zugriff:

click & study und click & teach können Sie überall und mit allen Endgeräten, auf denen ein aktueller Internetbrowser installiert ist, nutzen. Oder Sie laden sich einfach die für Ihr Endgerät passende App kostenfrei herunter. Damit Sie schnell mit dem digitalen Lehrermaterial arbeiten können, erscheint click & teach frühestmöglich mit einem Teil der Materialien und wird sukzessive ergänzt.

▶ Einfach in der Lizenzierung:

Egal ob Print Plus, Einzellizenz, Einzellizenz Box, Einzellizenz flex oder Kollegiumslizenz – wir haben für jeden Bedarf ein passendes Angebot. Bestellen können Sie ausschließlich auf www.ccbuchner.de. Das digitale Schulbuch click & study kann zudem via www.bildungslogin.de genutzt werden.

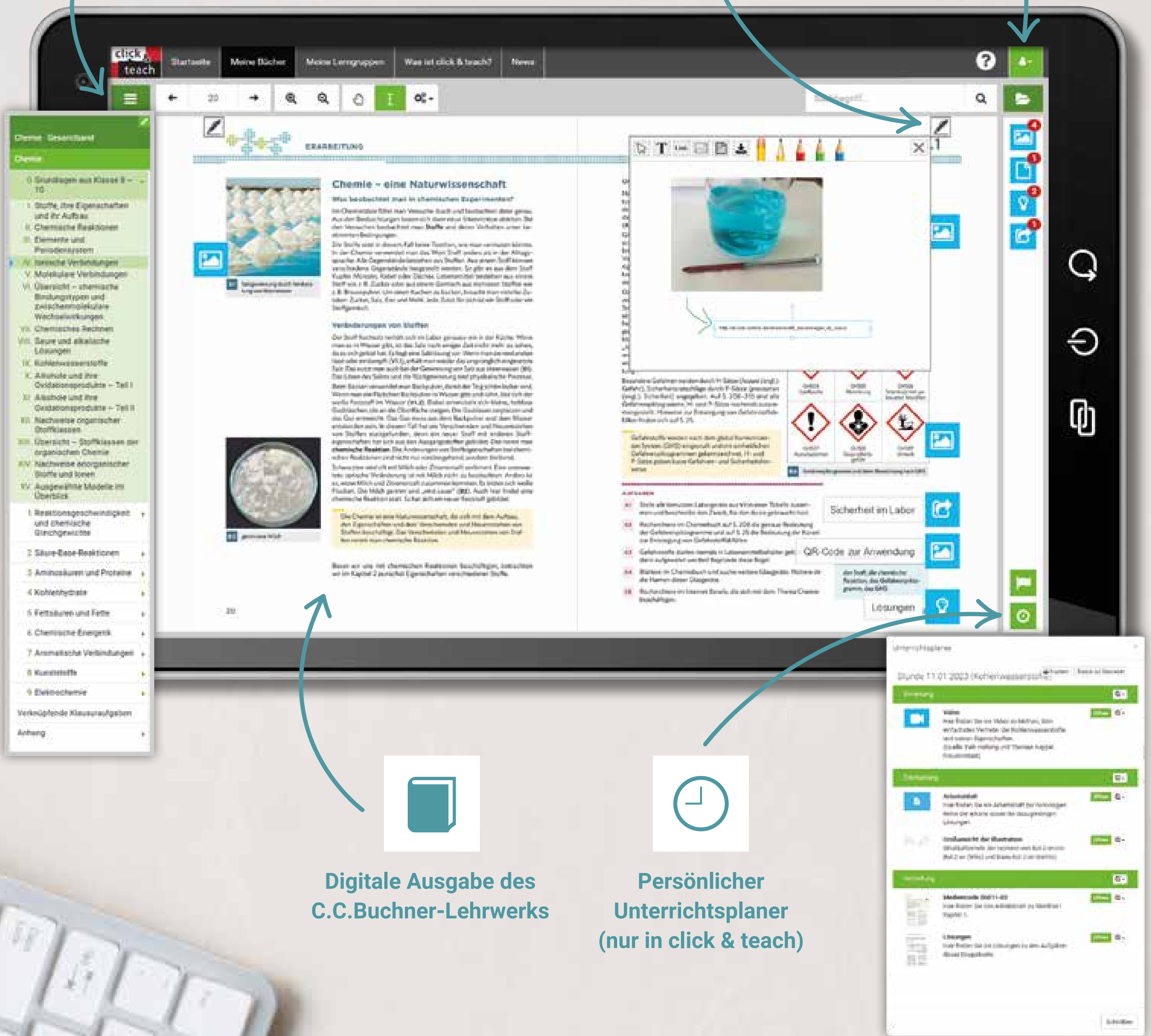
▶ Einfach für alle:

click & study und click & teach können miteinander verknüpft werden – so funktioniert der Unterricht bei Bedarf komplett digital – ideal für Tablet-Klassen und den digitalen Materialaustausch zwischen Lehrenden und Lernenden.

Interaktives Inhaltsverzeichnis

Digitale Arbeitsseite

Lehrermaterial (nur in click & teach)



Digitale Ausgabe des C.C.Buchner-Lehrwerks

Persönlicher Unterrichtsplaner (nur in click & teach)

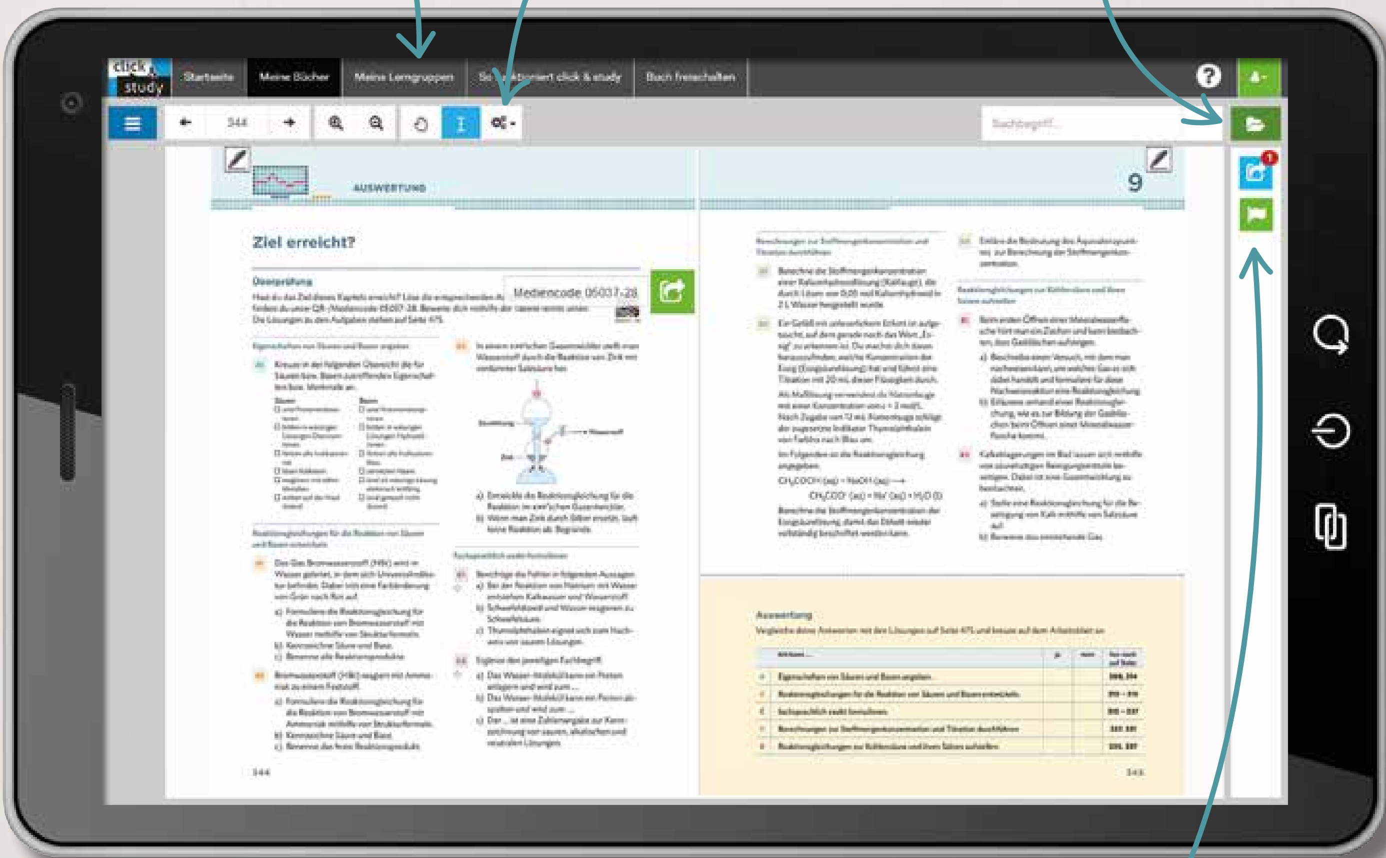
click & study und **click & teach** bieten:	click & study	click & teach
Digitale Ausgabe des C.C.Buchner-Lehrwerks Das jeweilige Schulbuch von C.C.Buchner ist als vollständige und digitale Ausgabe in click & study und in click & teach enthalten. Sie können mit verschiedenen Endgeräten (PCs, Macs, Tablets) online und auch offline via App darauf zugreifen. JETZT BEI Google Play · Laden im App Store · Desktop-Software auf www.click-and-teach.de kostenfrei downloaden	✓	✓
Interaktives Inhaltsverzeichnis Das Inhaltsverzeichnis ermöglicht einen schnellen Überblick über die Inhalte der digitalen Ausgabe des Schulbuchs und die Navigation zwischen den Kapiteln. Wird es nicht benötigt, lässt es sich einfach einklappen.	✓	✓
Digitale Arbeitsseite Durch das Einfügen digitaler Arbeitsseiten besteht die Möglichkeit, auf einer zusätzlichen leeren Seite eigene Texte, Bilder, Links und Freihandzeichnungen zu hinterlegen.	✓	✓
Umfangreiches Lehrermaterial click & teach bietet umfangreiches digitales Zusatzmaterial. Hier erhält die Lehrkraft Zugriff auf perfekt abgestimmte Materialien wie zum Beispiel Lösungen, didaktische Hinweise, weitere digitale Lernanwendungen, Animationen, zahlreiche Arbeitsblätter, Kopiervorlagen, Tafelbilder und vieles mehr.	–	✓
Unterrichtsplaner Der Unterrichtsplaner sorgt dafür, dass Sie in click & teach alle Materialien immer in der gewünschten Abfolge griffbereit haben. Strukturieren, kommentieren und präsentieren Sie die Materialien ganz nach Ihren Wünschen.	–	✓


Lara Testschülerin 24.01.2022 um 14:52
Hallo Frau Mustermann, ich habe eine Frage zu Bild 3.
Frau Maria Mustermann 24.01.2022 um 14:53
Hallo Lara! Schön, dass Du schon mit der Gliederung anfängst. Was ist noch unklar?
Lara Testschülerin 24.01.2022 um 15:28
Hallo Frau Mustermann, sollen wir hier auch die Handlung im Hintergrund berücksichtigen?
Antworten

Aufgabenpool und Forum

Toolbar mit zahlreichen Funktionen

Digitales Zusatzmaterial



Materialimport und -freischaltung (nur in click & teach)

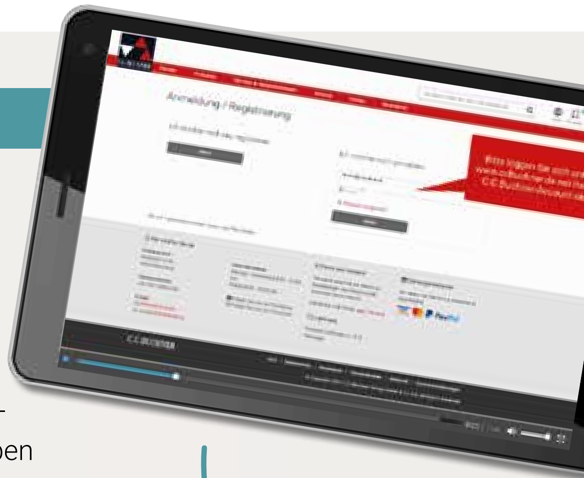
click & study und **click & teach** bieten:	click & study	click & teach
Digitale Inhalte und Links Über Spots erhalten Schülerinnen und Schüler Zugriff auf Links und Zusatzmaterialien, die im gedruckten Schulbuch über Mediencodes zugänglich sind. So lassen sich z. B. Erklärvideos, gestufte Hilfen oder interaktive Lernanwendungen einfach in das Unterrichtsgeschehen integrieren.	✓	✓
Toolbar mit vielen nützlichen Funktionen Der moderne Reader bietet Ihnen und Ihren Schülerinnen und Schülern nützliche Bearbeitungsfunktionen wie Markieren, Kopieren, Zoomen und Suchen. Dazu gibt es das Lesezeichen sowie einen Freihandstift für Skizzen und Notizen.	✓	✓
Materialfreischaltung Als Lehrkraft haben Sie in click & teach die Möglichkeit, Materialien für eine ausgewählte Lerngruppe oder für einzelne Lernende in click & study freizuschalten und so schnell zu übermitteln.	✓	✓
Aufgabenpool In diesem Bereich können die Lernenden Aufgaben digital empfangen und wieder abgeben. Schülerinnen oder Schüler sehen beim Hochladen der Aufgaben immer nur ihre eigenen Dateien. Den Überblick über den gesamten Aufgabenpool hat ausschließlich die Lehrkraft.	✓	✓
Forum Das Forum ist das digitale Pendant zum gemeinsamen Gespräch im Klassenzimmer und funktioniert wie ein Gruppenchat. So können sich Lernende und Lehrende unkompliziert austauschen.	✓	✓
Materialimport Das umfangreiche digitale Lehrermaterial können Sie zudem mit Ihren eigenen Dokumenten wie Bildern, Audios, Videos oder Textdokumenten anreichern. Mit dem Materialimport laden Sie diese Dateien hoch und platzieren sie mit einem eigenen Spot auf den digitalen Schulbuchseiten.	–	✓

Lizenzmodelle click & teach

In click & teach sind immer die vollständige, digitale Ausgabe des C.C.Buchner-Lehrwerks und umfangreiches Lehrermaterial enthalten. Die Laufzeit jeder click & teach-Lizenz gilt, solange das C.C.Buchner-Lehrwerk als gedrucktes Schulbuch lieferbar ist, i.d.R. sind das mehrere Jahre.

click & teach	Einzellizenz	Einzellizenz Box	Einzellizenz flex	Kollegiums-lizenz
Lizenz-anzahl	1	1	1	beliebig viele Lizenzen für Ihr Fachkollegium (inkl. Referendare)
Weitergabe	nicht übertragbar	nicht übertragbar	übertragbar*	für das komplette Fachkollegium (inkl. Referendare)
Zugang	digitaler Freischaltcode per E-Mail	Box inkl. Scheck-karte mit Freischalt-code per Post	direkte Freischaltung im Schulkonto	direkte Freischaltung im Schulkonto
Verfüg-barkeit	im persönlichen Nutzerkonto	im persönlichen Nutzerkonto	im verknüpften Schulkonto	im verknüpften Schulkonto

*Die Einzellizenz flex kann beliebig oft an eine andere Person übertragen werden.



Schulkonto

Auf www.ccbuchner.de können sich Lehrkräfte (auch jene im Referendariat) mit ihrem Schulkonto verknüpfen und folgende Funktionen nutzen:

- **click & teach-Lizenzen erwerben und nachkaufen**
  In wenigen Schritten können über die Auswahl des Fachs und des Bundeslands die Kollegiumslizenz sowie die Einzellizenzen flex per Rechnung an die hinterlegte Schule erworben werden. So kann click & teach direkt genutzt werden – ohne Wartezeit!
- **click & teach-Lizenzen verwalten und übertragen**
  Daneben kann die Zuordnung der Lizenzen zu Mitgliedern des Fachkollegiums eingesehen und verwaltet werden. Fachfremden Lehrkräften kann ebenfalls manuell eine Lizenz zugewiesen werden. Wurde eine Einzellizenz flex erworben, erfolgt im Schulkonto die Zuordnung bzw. die Übertragung.
- **Zugriffsrechte verwalten**
  Im Schulkonto können für alle verknüpften Kolleginnen und Kollegen die Rechte (*Lizenzen kaufen, Lizenzen verwalten, Zugriffsrechte bearbeiten, Schuldaten bearbeiten und Schulkollegium verwalten*) individuell vergeben werden.

Erklärvideos Schulkonto

Lizenzmodelle click & study

Auch in click & study ist immer die vollständige, digitale Ausgabe des C.C.Buchner-Lehrwerks enthalten. Die Schülerinnen und Schüler erhalten Zugang zu ihrem digitalen Schulbuch über einen Freischaltcode, der per E-Mail an sie verschickt wird. Verfügbar ist click & study dann im persönlichen Nutzerkonto der Schülerinnen und Schüler. Die Lizenzen sind nicht übertragbar.

click & study	Einzellizenz	Einzellizenz Print Plus
Preis	Normalpreis	Wenn das gedruckte Schulbuch eingeführt ist, ist pro Buch eine Jahreslizenz für nur € 1,70 erhältlich.
Laufzeit	12 + 1 Monat ab Freischaltung	12 + 1 Monat ab Freischaltung
Lizenz-anzahl	1	1 pro eingeführtem Schulbuch

Sie haben Fragen?

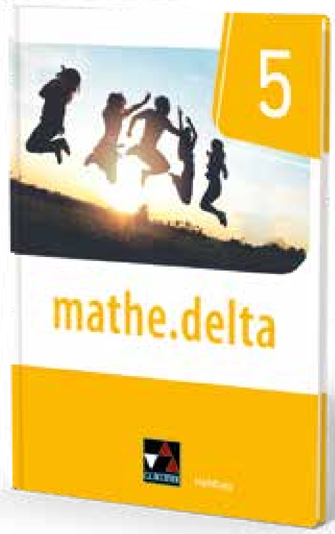
Unsere Kolleginnen und Kollegen in der Digital-Beratung helfen Ihnen gern:

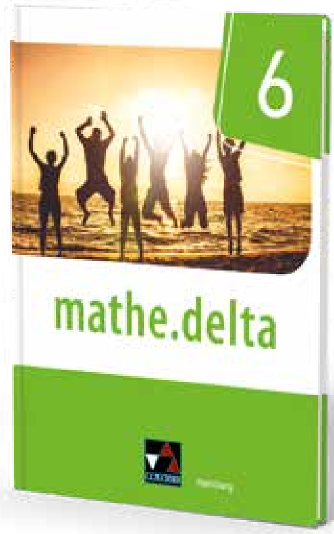
E-Mail: click-and-teach@ccbuchner.de | click-and-study@ccbuchner.de

Weitere Informationen:
www.click-and-study.de
www.click-and-teach.de
www.ccbuchner.de/schulkonto

Erklärvideos click & study und click & teach

mathe.delta — Hamburg





mathe.delta 5

ISBN: 978-3-661-**61205**-8
Ladenpreis: ca. € 28,50
Erscheint im 2. Quartal 2023

mathe.delta 6

ISBN: 978-3-661-**61206**-5
Ladenpreis: ca. € 28,50
Erscheint im 2. Quartal 2023

mathe.delta — Hamburg

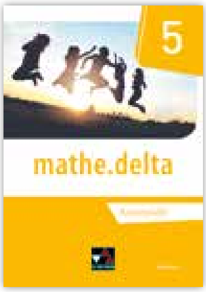
mathe.delta – Hamburg ist optimal auf den neuen Bildungsplan zugeschnitten und ermöglicht somit einen praxisnahen sowie zeitgemäßen Mathematikunterricht.

Das macht **mathe.delta – Hamburg** so besonders:

- Das Lehrwerk bietet umfangreiches Aufgabenmaterial auf verschiedenen Anforderungsniveaus zur Differenzierung und Selbstkontrolle.
- Inhalte und prozessbezogene Kompetenzen werden optimal verzahnt.
- Extra gekennzeichnete Sprachaufgaben trainieren unter anderem Textverständnis und Fachsprache.
- Schülerinnen und Schüler werden durch eine geeignete Schulung der Operatoren besonders unterstützt.
- Medienkompetenzen werden von Anfang an im Schulbuch integriert und in sinnvoller Progression immer weiter ausgebaut.
- Integrierte Lernvideos, die via Mediencode abgerufen werden, können unterstützen den Lernprozess.

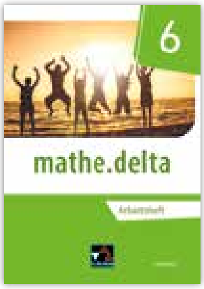
Ergänzend zum Schulbuch

Ergänzend zum Lehrbuch bieten wir auch das passende Arbeitsheft mit zusätzlichen Übungsaufgaben zum Wiederholen, Festigen und Vertiefen. Sie finden die Lösungen als Einleger, der selbstverständlich auch herausgenommen und eingesammelt werden kann.



Arbeitsheft 5

ISBN: 978-3-661-**61215**-7
Ladenpreis: ca. € 8,50
Erscheint im 2. Quartal 2023



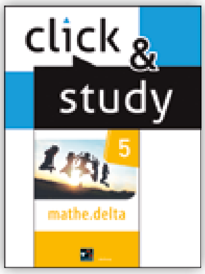
Arbeitsheft 6

ISBN: 978-3-661-**61216**-4
Ladenpreis: ca. € 8,50
Erscheint im 2. Quartal 2023

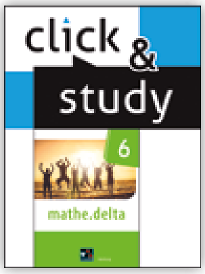
Die digitale Lernumgebung von **mathe.delta – Hamburg 5 und 6**:

Für Schülerinnen und Schüler:

Das **digitale Schulbuch click & study** bietet neben der vollständigen digitalen Ausgabe des Lehrwerks einen modernen Reader mit Bearbeitungswerkzeugen, direkten Zugriff auf Links und Zusatzmaterialien sowie die flexible Nutzung auf verschiedenen Endgeräten – online und auch offline via App.



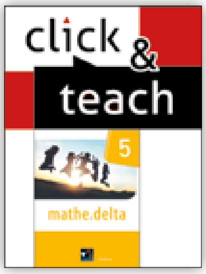
click & study 5
Digitale Ausgabe
Bestellnummer: WEB **612051**
Preis: ca. € 6,50
oder
€ 1,70 (bei Einführung des gedruckten Lehrwerks)
Erscheint im 2. Quartal 2023



click & study 6
Digitale Ausgabe
Bestellnummer: WEB **612061**
Preis: ca. € 6,50
oder
€ 1,70 (bei Einführung des gedruckten Lehrwerks)
Erscheint im 2. Quartal 2023

Für Lehrerinnen und Lehrer:

Das **digitale Lehrermaterial click & teach** bietet die Inhalte des Schulbuchs und Zusatzmaterial über Spots auf den Buchseiten, z. B. Lösungen, Kopiervorlagen, Arbeitsblätter und digitale Materialien. Eine Umgebung, in der eigene digitale Materialien eingebunden werden können, und ein Unterrichtsplaner unterstützen Sie bei der Vorbereitung Ihres Unterrichts. Dafür stehen Ihnen praktische Werkzeuge zur Verfügung.



click & teach 5 Einzellizenz
Digitales Lehrermaterial
(Digitaler Freischaltcode)
Bestellnummer: WEB **612251**
Preis: € 31,50
Erscheint im 2. Quartal 2023

click & teach 6 Einzellizenz
Digitales Lehrermaterial
(Digitaler Freischaltcode)
Bestellnummer: WEB **612261**
Preis: ca. € 31,50
Erscheint im 2. Quartal 2023

click & teach click & study

Weitere Informationen zum digitalen Schulbuch **click & study** und zum digitalen Lehrermaterial **click & teach** finden Sie auf auf www.click-and-study.de und www.click-and-teach.de.

Sie wünschen persönliche Beratung?
Unser Schulberater für Hamburg ist für Sie da
– vor Ort, telefonisch und online:

Dr. Matthias Lentz

Mobil: 0171 6012386

EMail: lentz@ccbuchner.de

Sie benötigen weitere Exemplare dieser Leseprobe* für Ihre Fachkonferenz?

1. Geben Sie auf **www.ccbuchner.de** die Bestellnummer **L63025** in die Suchleiste ein.

L63025

2. Legen Sie die kostenfreie Leseprobe (1 Exemplar pro Person) und ggf. weitere Produkte in Ihren **Warenkorb**.

3. Folgen Sie den weiteren Anweisungen, um den Bestellvorgang abzuschließen.

*Nur solange der Vorrat reicht.

+ Oder direkt über:

C.C.BUCHNER L63025