1 Quadratische Funktionen

Einstieg

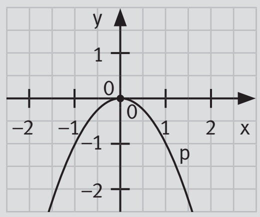
Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K6

- **Beschreibe die Form des „Gateway Arch“ in St. Louis, Illinois, USA.**
  Der Bogen hat annähernd die Form einer Parabel, also einer achsensymmetrischen Kurve, deren Funktionswerte ein Maximum oder ein Minimum annehmen. (Bei genauerem Betrachten handelt es sich um eine „Kettenlinie“. Unter dem perspektivischen Einfluss des Fotos ist jedoch „fast“ eine Parabel zu sehen.)

K3

- **Vereinfache die Darstellung des Bauwerks, indem die Form mithilfe einer Linie in einem Koordinatensystem dargestellt wird. Lege den höchsten Punkt des Bauwerks in den Koordinatenursprung. Kann es sich bei der vereinfachten Darstellung um den Graphen einer Funktion handeln? Begründe.**
  Bei der an der x-Achse gespiegelten Normalparabel kann es sich um den Graphen einer Funktion handeln, da jedem Element $x \in \mathbb{D}$ genau ein Elemente $y \in \mathbb{W}$ zugeordnet ist.



K3

- **Finde einen Term, dessen Graph eine ähnliche Form wie das Bauwerk beschreibt.**
  Möglicher Term für p: $y = -x^2$ oder $y = -0{,}5x^2$
  Hinweis: Tatsächlich handelt es sich um eine Kettenlinie, die mathematisch durch die Gleichung einer Hyperbelfunktion (Kosinus Hyperbolicus) beschreibbar ist.

K6

- **Vergleiche den Term mit dem Term einer linearen Funktion. Was stellst du fest?**
  Ein Unterschied besteht darin, dass jedes Element $y \in \mathbb{W}$ einer linearen Funktion einem eindeutigen Element $x \in \mathbb{D}$ zugeordnet ist, während beim Term $y = -x^2$ jedes $y \in \mathbb{W}$ zwei Elementen $x \in \mathbb{D}$ zugeordnet ist.

Ausblick

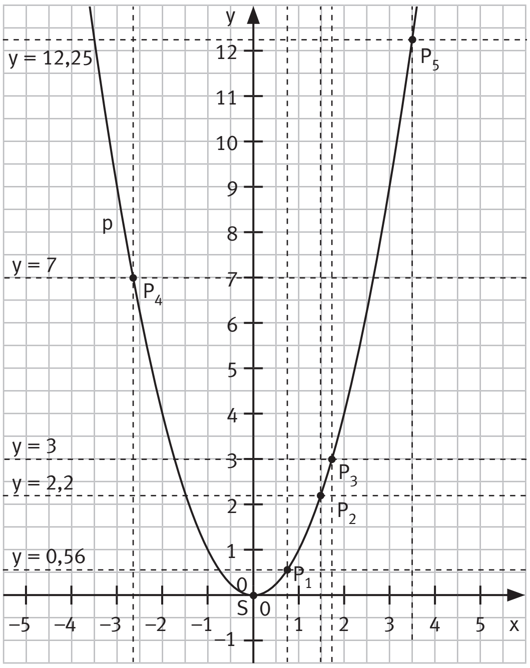
Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.
Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Verständnis

K 6

- Beide Graphen haben $\mathbb{R}$ als Definitionsmenge und sie verlaufen beide durch die Punkte (0|0) und (–1|–1).

K 4 **1**

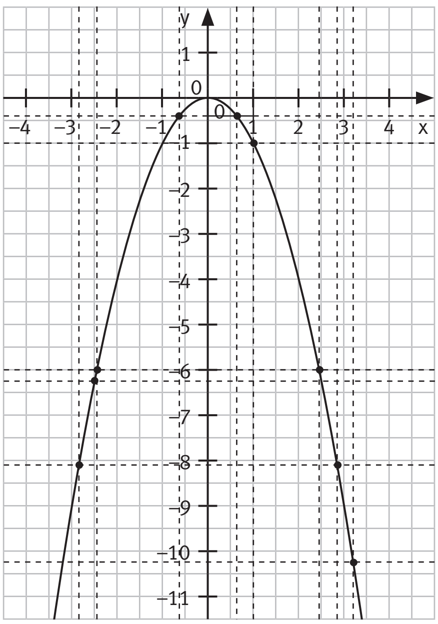


P_1 (0,75|0,56)
P_2 $(\sqrt{2{,}2}|2{,}2)$
P_3 $(\sqrt{3}|3)$
P_4 $(-\sqrt{7}|7)$
P_5 (3,5|12,25)

K 5 **2** A ∈ p, da $(-0{,}3)^2 = 0{,}09$ B ∈ p, da $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 0{,}5$
C ∈ p, da $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25$ D ∈ p, da $(10^3)^2 = (10^2)^3 = 100^3$

K 6 **3** Danielas Aussage ist falsch. Die Form des Graphen gleicht zwar der Form einer Parabel, es wird jedoch keine quadratische Funktion dargestellt, da die Zuordnung nicht eindeutig ist: z. B. hat x = 1,7 zwei verschiedene y-Werte.

K 4 **4**

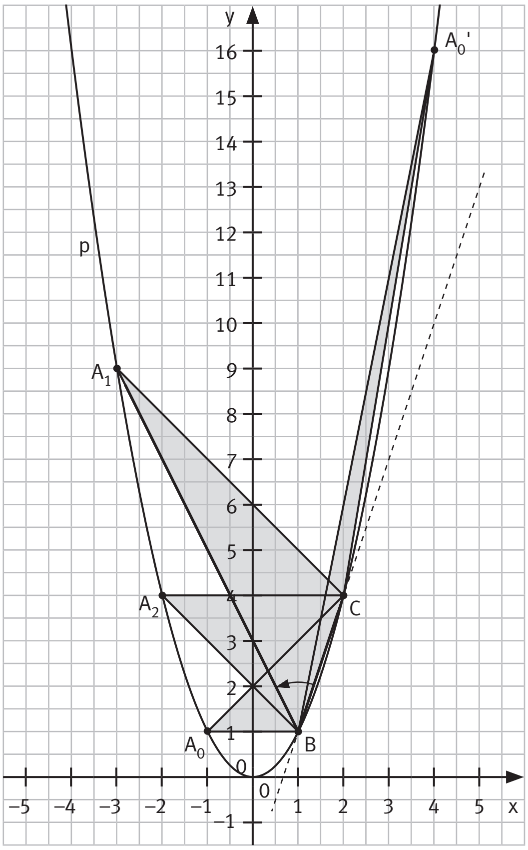


a) P_1 (1|–1) $\quad -1^2 = -1$
P_2 (–2,5|–6,25) $\quad -(-2{,}5)^2 = -6{,}25$
P_3 (3,2|–10,24) $\quad -3{,}2^2 = -10{,}24$

b) P_1 (–0,63|–0,4) und P_1' (0,63|–0,4)
$-(-0{,}63)^2 = -0{,}63^2 \approx -0{,}4$
P_2 (–2,45|–6) und P_2' (2,45|–6)
$-(-2{,}45)^2 = -2{,}45^2 \approx -6$
P_3 (–2,85|–8,1) und P_3' (2,85|–8,1)
$-(-2{,}85)^2 = -2{,}85^2 \approx -8{,}1$

K2

5 a)



a) Dreiecke A_1BC und A_2BC mit $A_1\,(-3\,|\,9)$ und $A_2\,(-2\,|\,4)$

b) Für das Dreieck A_nBC muss $A_n\,(x_n\,|\,x_n^2)$ „links" von der Geraden BC liegen, damit gilt mit $x_n < 1$ oder $x_n > 2$:

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BA_n} = \begin{pmatrix} x_n - 1 \\ x_n^2 - 1 \end{pmatrix}$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks A_nBC gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ 3 & x^2-1 \end{vmatrix} \text{ FE}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot ((x^2 - 1) - 3 \cdot (x - 1)) \text{ FE}$$
$$= \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) \text{FE}$$

Für die Dreieck A_1BC und A_2BC gilt:
$A(-3) = 10$ FE und $A(-2) = 6$ FE

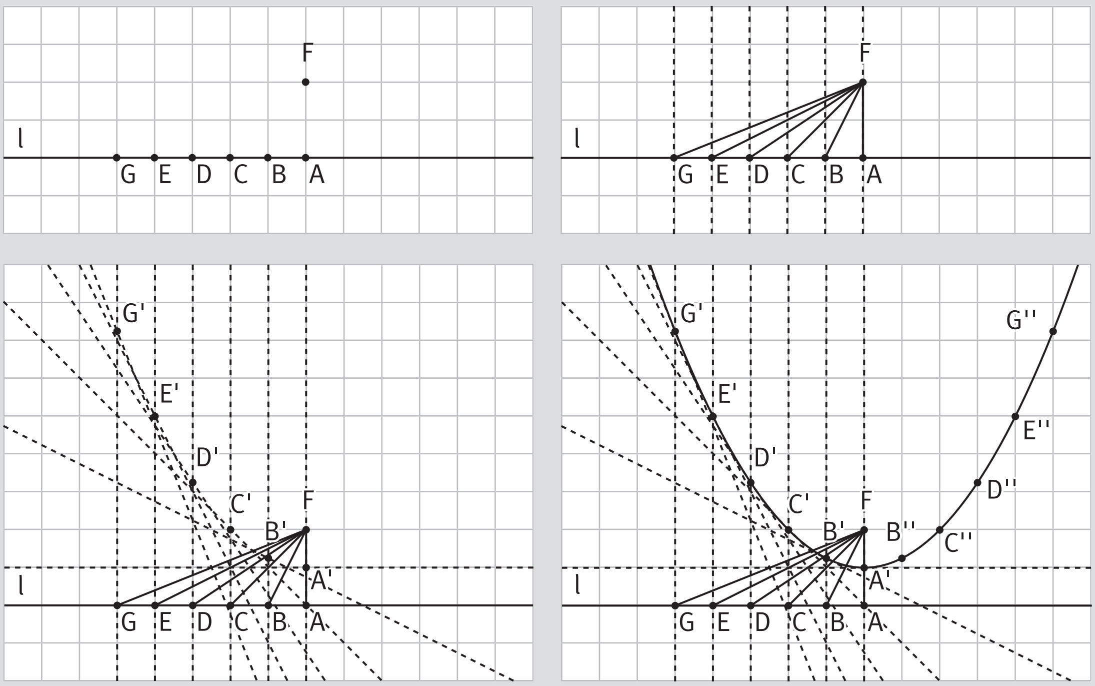
c) (mit Faktorisieren nach Viète)

$$A(x) = 3 \text{ FE} \iff \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 3$$
$$\iff x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$\iff (x + 1) \cdot (x - 4) = 0$$
$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-1; 4\}$$

Es gibt zwei mögliche Punkte für das Dreieck A_0BC mit einem Flächeninhalt von 3 FE:
$A_0\,(-1\,|\,1)$ und $A_0'\,(4\,|\,16)$

K6

Wissen

- 

- B' liegt auf der Mittelsenkrechte von [BF], also ist B' von B und F gleich weit entfernt: $\overline{B'B} = \overline{BF}$.
B' liegt auf dem Lot zu l durch B, deshalb ist $\overline{B'B}$ auch der Abstand des Punktes B' von l.
Also hat B' von F und l den gleichen Abstand.
- Je größer der Abstand von F zu l ist, desto stärker ist die Parabel gestaucht (desto „breiter" ist sie als die Normalparabel). Die Symmetrieachse der Parabel steht senkrecht auf l.

Verständnis

K6
- Der Graph von $y = 0$ beschreibt eine Gerade mit Steigung $m = 0$ und y-Achsenabschnitt $t = 0$, also die x-Achse.

K1
- Bei der bezüglich der y-Achse symmetrischen Parabelfunktion gilt: $p(-x) = a \cdot (-x)^2 = ax^2 = p(x)$; d. h.: Die Funktionsgleichung ändert sich nicht.

K4 **1** **a)** f: $y = 1{,}2x^2$ Die Parabel ist gestreckt und nach oben geöffnet.

x	±3	±2	±1	0
y	10,8	4,8	1,2	0

b) f: $y = -2x^2$ Die Parabel ist gestreckt und nach unten geöffnet.

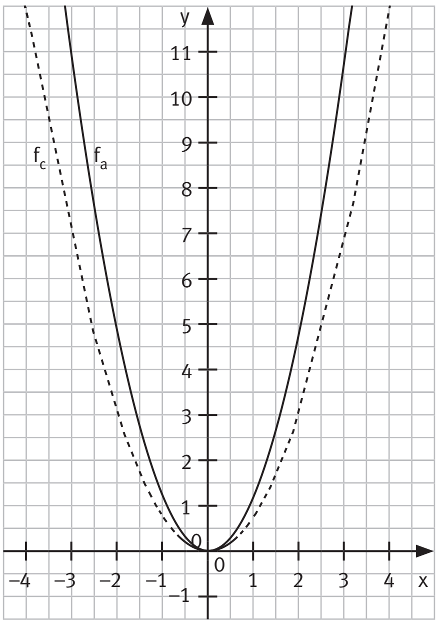
x	±2	±1,5	±1	±0,5	0
y	–8	–4,5	–2	–0,5	0

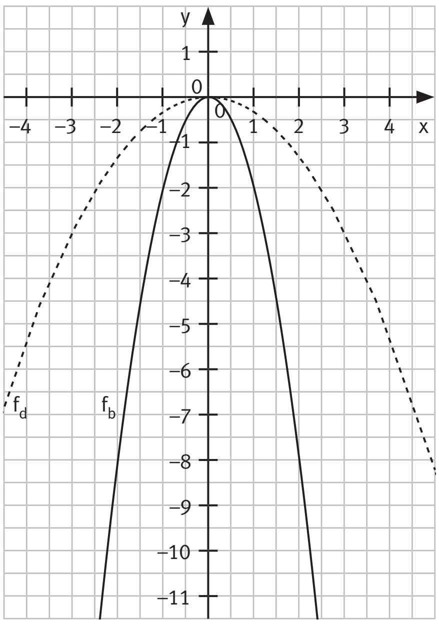
c) f: $y = 0{,}75x^2$ Die Parabel ist gestaucht und nach oben geöffnet.

x	±3	±2	±1	0
y	6,75	3	0,75	0

d) f: $y = -\frac{1}{3}x^2$ Die Parabel ist gestaucht und nach unten geöffnet.

x	±4	±3,5	±3	±2,5	±2	±1,5	±1	±0,5	0
y	–5,33	–4,08	–3,00	–2,08	–1,33	–0,75	–0,33	–0,08	0,00





K1 **2** A – p_3 B – p_5 C – p_4 D – p_1 E – p_2

K5 **3** $y = ax^2 \Leftrightarrow a = y : x^2$

a) $a = -3$ **b)** $a = -1{,}5$ **c)** $a = -2{,}75$ **d)** $a = 1$ **e)** $a = 0{,}8$

K6 **4** **a)** Die Parabel der Funktion p: $y = 0{,}5x^2$ ist gestaucht und nach oben geöffnet, sie hat ihren Scheitelpunkt im Ursprung.
Einsetzen des x-Wertes von P (–1,5 | 1,25) in die Funktionsgleichung ergibt:
$y = 0{,}5 \cdot (-1{,}5)^2 = 1{,}125$
Für $x = -1{,}5$ erhält man den Parabelpunkt Q (–1,5 | 1,125).
Der Vergleich der y-Werte von P und Q ergibt:
$y_P = 1{,}25 > 1{,}125 = y_Q$
Damit liegt P oberhalb von Q und oberhalb der nach oben geöffneten Parabel.

b) Der x-Wert von P wird in die Funktionsgleichung eingesetzt und der erhaltene Wert mit dem y-Wert von P verglichen.
1 $y = -\frac{3}{8}(4{,}4)^2 = -7{,}26 \boxed{<} 7{,}26 = y_P$ ⇒ P liegt oberhalb des Graphen.
2 $y = -2{,}5 \cdot (-4{,}8)^2 = -57{,}6 \boxed{>} -57{,}8 = y_P$ ⇒ P liegt unterhalb des Graphen.
3 $y = 0{,}2 \cdot (-1{,}5)^2 = 0{,}45 \boxed{=} y_P$ ⇒ P liegt auf dem Graphen.
4 $y = 3{,}2 \cdot (0{,}5)^2 = 0{,}8 \boxed{>} -0{,}8 = y_P$ ⇒ P liegt unterhalb des Graphen.

K5 **5** **a)** $y_A = 12$ $x_B = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3} \approx \pm 1{,}15$ **b)** $x_A = \pm 3{,}5$ $y_B = -1{,}6$

Verkehr

K6

- Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:
Der Reaktionsweg ist die Länge der Strecke, die nach einem Impuls zurückgelegt wird, bevor gebremst wird. Beeinflusst wird der Reaktionsweg z. B. durch Ablenkung, Stress, Müdigkeit, … des Fahrers. Der Bremsweg ist die Länge der Strecke, die ein Auto nach Betätigen der Bremse bis zum Stillstand zurücklegt.
-

Geschwindigkeit in km/h	30	50	60	80	100
Reaktionsweg in m	9,00	15,00	18,00	24,00	30,00
Bremsweg in m	6,75	18,75	27,00	48,00	75,00
Anhalteweg in m	15,75	33,75	45,00	72,00	105,00

- Die Schüler machen sich anhand der praktischen Übung die unterschiedlichen Längen von Reaktionsweg, Bremsweg und Anhalteweg bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewusst.

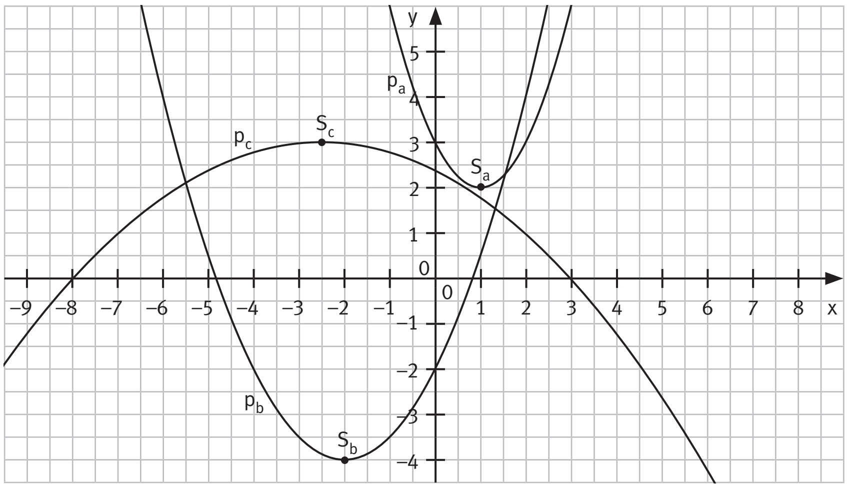
Verständnis

K6
- Die nach oben geöffnete Parabel p hat ihren Scheitelpunkt im Ursprung, wo sie ihre einzige Nullstelle hat. Bei der nach oben entlang der y-Achse verschobenen Parabel p' wird insbesondere auch der Scheitelpunkt (das Minimum der Parabel) nach oben verschoben, p' besitzt daher keine Nullstelle. Bei der nach unten entlang der y-Achse verschobenen Parabel p'' wird auch der Scheitelpunkt nach unten verschoben, die nach oben geöffnete Parabel p'' besitzt daher zwei Nullstellen.

K1
- Jeder verschobenen Parabel liegt eine Funktionsgleichung p: $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ zugrunde; diese ordnet jedem Element $x \in \mathbb{R}$ genau ein Element $y \in p$ zu. Daher schneidet die Parabel jede Gerade $x = x_0$ in genau einem Punkt. Dies gilt insbesondere für die mit x = 0 beschriebene y-Achse. Der Schnittpunkt der y-Achse mit der Parabel p ist $(0 \mid a x_S^2 + y_S)$.

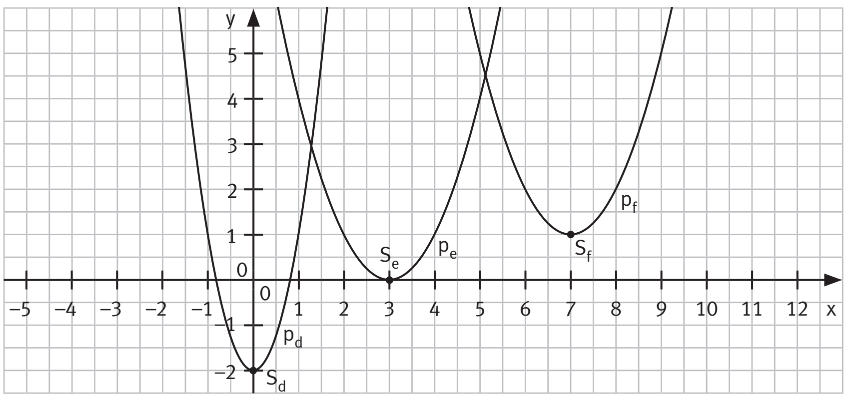
K4

1 **a)** bis **c)**



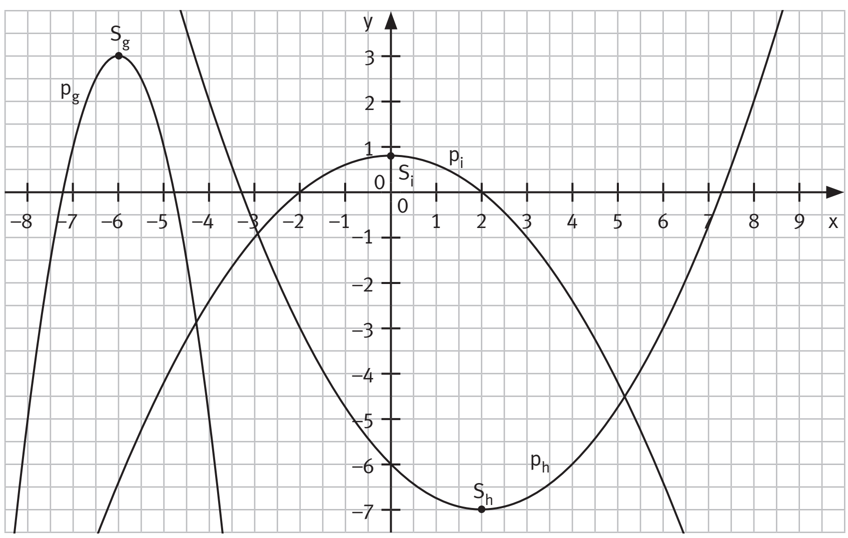
$S_a (1 \mid 2)$
$S_b (-2 \mid -4)$
$S_c (-2{,}5 \mid 3)$

d) bis **f)**



$S_d (0 \mid -2)$
$S_e (3 \mid 0)$
$S_f (7 \mid 1)$

g) bis **i)**



$S_g (-6 \mid 3)$
$S_h (2 \mid -7)$ mit p_h:
$y = 0{,}25(x - 2)^2 - 7$
$S_i (0 \mid 0{,}8)$ mit p_i:
$y = -0{,}2x^2 + 0{,}8$

K4 **2**

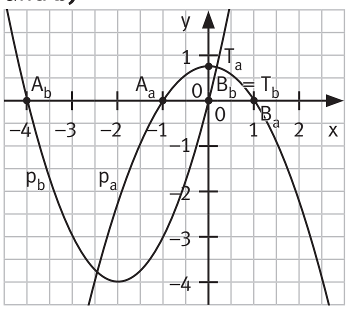
$S_1\,(0\,\vert\,1)$	p_1: $y = x^2 + 1$	$\mathbb{W} = \{y \mid y \geq 1\}$	Symmetrieachse: $x = 0$
$S_2\,(-1\,\vert\,0)$	p_2: $y = (x + 1)^2$	$\mathbb{W} = \{y \mid y \geq 0\}$	Symmetrieachse: $x = -1$
$S_3\,(0\,\vert\,4)$	p_3: $y = -x^2 + 4$	$\mathbb{W} = \{y \mid y \leq 4\}$	Symmetrieachse: $x = 0$
$S_4\,(2\,\vert\,1{,}5)$	p_4: $y = (x - 2)^2 + 1{,}5$	$\mathbb{W} = \{y \mid y \geq 1{,}5\}$	Symmetrieachse: $x = 2$
$S_5\,(3\,\vert\,1)$	p_5: $y = -(x - 3)^2 + 1$	$\mathbb{W} = \{y \mid y \leq 1\}$	Symmetrieachse: $x = 3$

K5 **3** **a)** $y = 0{,}5 \cdot (x - 1)^2 + 2$ **b)** $y = -(x + 3)^2 + 7$ **c)** $y = -3 \cdot (x - 0{,}5)^2 - 3{,}5$
d) $y = 0{,}25x^2 + 2$ **e)** $y = 7 \cdot (x + 4{,}5)^2 - 2$ **f)** $y = -\frac{2}{3} \cdot (x - 8{,}2)^2$

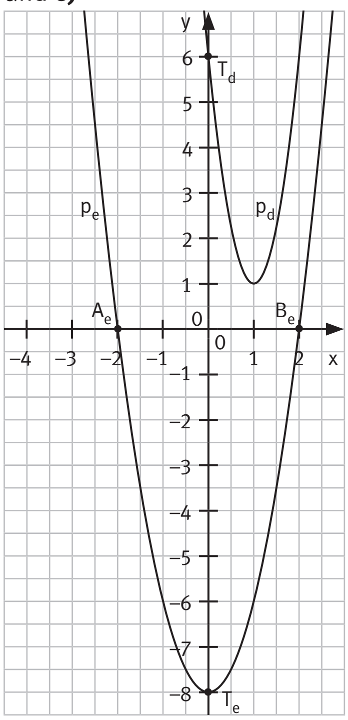
K4 **4** Die Schnittpunkte mit der x-Achse seien A und B, der Schnittpunkt mit der y-Achse sei T.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
A	$(-1\,\vert\,0)$	$(-4\,\vert\,0)$	$(-2{,}5\,\vert\,0)$	/	$(-2\,\vert\,0)$	$(-2\,\vert\,0)$
B	$(1\,\vert\,0)$	$(0\,\vert\,0)$	$(2{,}5\,\vert\,0)$		$(2\,\vert\,0)$	$(3{,}2\,\vert\,0)$
T	$(0\,\vert\,0{,}75)$	$(0\,\vert\,0)$	$(0\,\vert\,18{,}75)$	$(0\,\vert\,6)$	$(0\,\vert\,-8)$	$(0\,\vert\,16)$

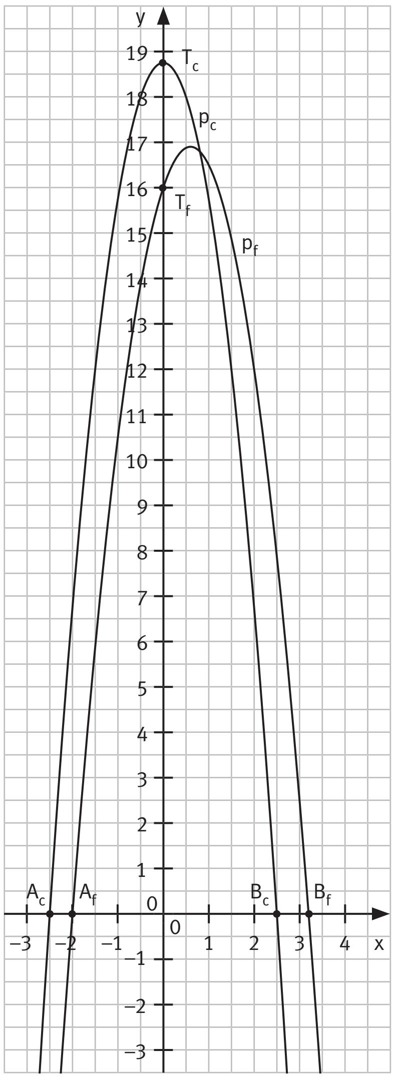
a) und **b)**



d) und **e)**



c) und **f)**



K5 **5** Der Graph der Funktion p ist symmetrisch zur y-Achse, damit ist $x_S = 0$, $y_S = y - 0{,}25x^2$.
a) $S\,(0\,\vert\,2)$ **b)** $S\,(0\,\vert\,3{,}75)$ **c)** $S\,(0\,\vert\,-4)$ **d)** $S\,(0\,\vert\,0)$ **e)** $S\,(0\,\vert\,-2{,}0625)$

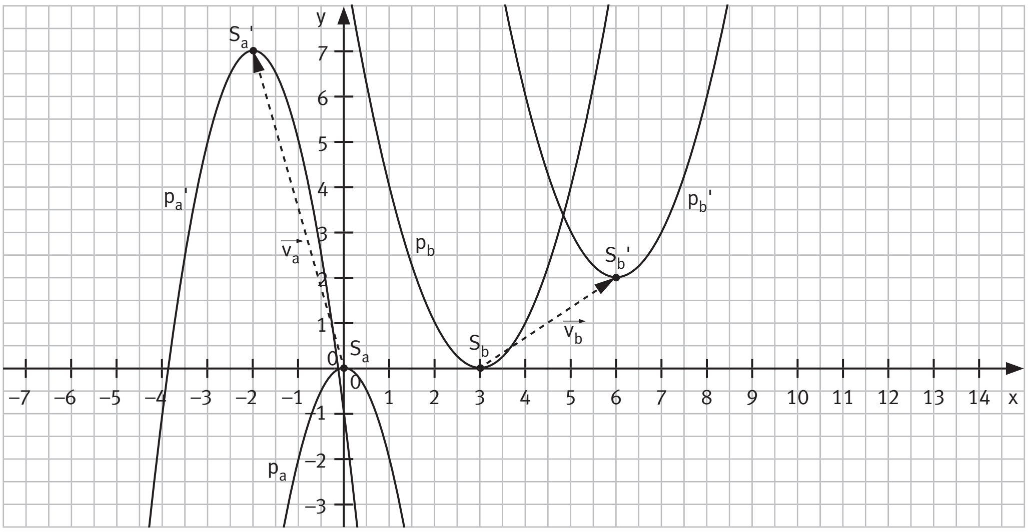
K1 **6** Die Funktionsgleichung der an der x-Achse gespiegelten und verschobenen Normalparabel mit Scheitel S (6|–3) lautet:
$p: y = -(x-6)^2 - 3$
Für $y = -7$ gilt: $-(x-6)^2 - 3 = -7 \Leftrightarrow (x-6)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 6 = \pm 2 \Leftrightarrow x_1 = 4; x_2 = 8$
Die x-Koordinaten von P_1 und P_2 sind $x_1 = 4$ und $x_2 = 8$.

K5 **7** **a)** $7 = a(-2+1)^2 + 3 \quad \Leftrightarrow a = 4$
b) $-20 = -2\,(-1-2)^2 - c \Leftrightarrow c = 2$
c) $\frac{7}{4} = \frac{1}{3}(-2{,}5+5)^2 + c \Leftrightarrow c = \frac{21-25}{12} = -\frac{1}{3}$
d) $34{,}5 = 9a - 1{,}5 \quad \Leftrightarrow a = 4$

K6 **8** **a)** Valentin hat Recht. Ein Produkt hat genau dann den Wert Null, wenn einer seiner Faktoren den Wert Null hat; damit kann er im vorliegenden Fall die Nullstellen direkt ablesen:
Nullstellen der Funktion p: $(x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ oder $x = 3$
b) 1 $x_1 = -2; x_2 = 2$ 2 $x = 1$ 3 $x = -5$
c) Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.: $y = x^2 + c, c \in \mathbb{R}^+$ oder $y = -x^2 + c, c \in \mathbb{R}^-$

K5 **9** Zur Ermittlung von x_S werden die x- und y-Koordinaten von B in die Gleichung $y = (x - x_S)^2$ eingesetzt; durch Faktorisieren erhält man (bis zu) zwei Lösungen für x_S bzw. für $S(x_S|0)$ und damit die Funktionsgleichungen der verschobenen Parabel.
a) $1 = (2 - x_s)^2 \quad \Leftrightarrow 0 = x_s^2 - 4x_s + 3 \quad \Leftrightarrow (x_s - 3)(x_s - 1) = 0 \quad \Rightarrow x_s = 3$ oder $x_s = 1$
$\Rightarrow$ f: $y = (x-3)^2$ mit S (3|0) oder f: $y = (x-1)^2$ mit S (1|0)
b) $4 = (0 - x_s)^2 \quad \Leftrightarrow 4 = x_s^2 \quad \Rightarrow x_s = -2$ oder $x_s = 2$
$\Rightarrow$ f: $y = (x+2)^2$ mit S (–2|0) oder f: $y = (x-2)^2$ mit S (2|0)
c) $16 = (2 - x_s)^2 \quad \Leftrightarrow 0 = x_s^2 - 4x_s - 12 \quad \Leftrightarrow (x_s + 2)(x_s - 6) = 0 \quad \Rightarrow x_s = -2$ oder $x_s = 6$
$\Rightarrow$ f: $y = (x+2)^2$ mit S (–2|0) oder f: $y = (x-6)^2$ mit S (6|0)
d) $9 = (1 - x_s)^2 \quad \Leftrightarrow 0 = x_s^2 - 2x_s - 8 \quad \Leftrightarrow (x_s + 2)(x_s - 4) = 0 \quad \Rightarrow x_s = -2$ oder $x_s = 4$
$\Rightarrow$ f: $y = (x+2)^2$ mit S (–2|0) oder f: $y = (x-4)^2$ mit S (4|0)
e) $1 = (-3 - x_s)^2 \quad \Leftrightarrow 0 = x_s^2 + 6x_s + 8 \quad \Leftrightarrow (x_s + 2)(x_s + 4) = 0 \quad \Rightarrow x_s = -2$ oder $x_s = -4$
$\Rightarrow$ f: $y = (x+2)^2$ mit S (–2|0) oder f: $y = (x+4)^2$ mit S (–4|0)

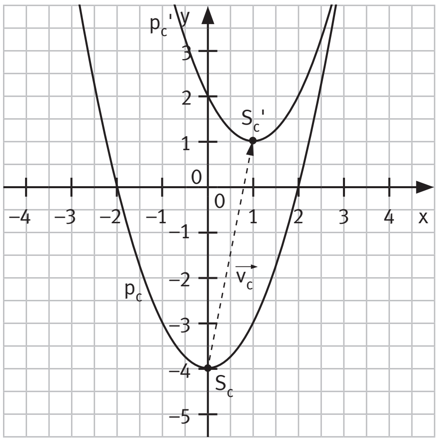
K5 **10** **a)** und **b)**

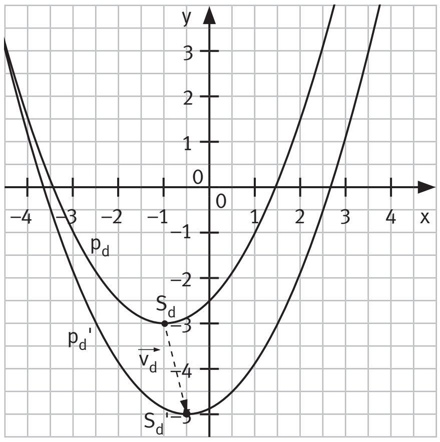


$p_a: y = -2x^2 \qquad S_a(0|0) \xrightarrow{\vec{v_a} = \binom{-2}{7}} S_a'(-2|7) \qquad \Rightarrow p_a': y = -2 \cdot (x+2)^2 + 7$

$p_b: y = (x-3)^2 \qquad S_b(3|0) \xrightarrow{\vec{v_b} = \binom{3}{2}} S_b'(6|2) \qquad \Rightarrow p_b': y = (x-6)^2 + 2$

c) und **d)**

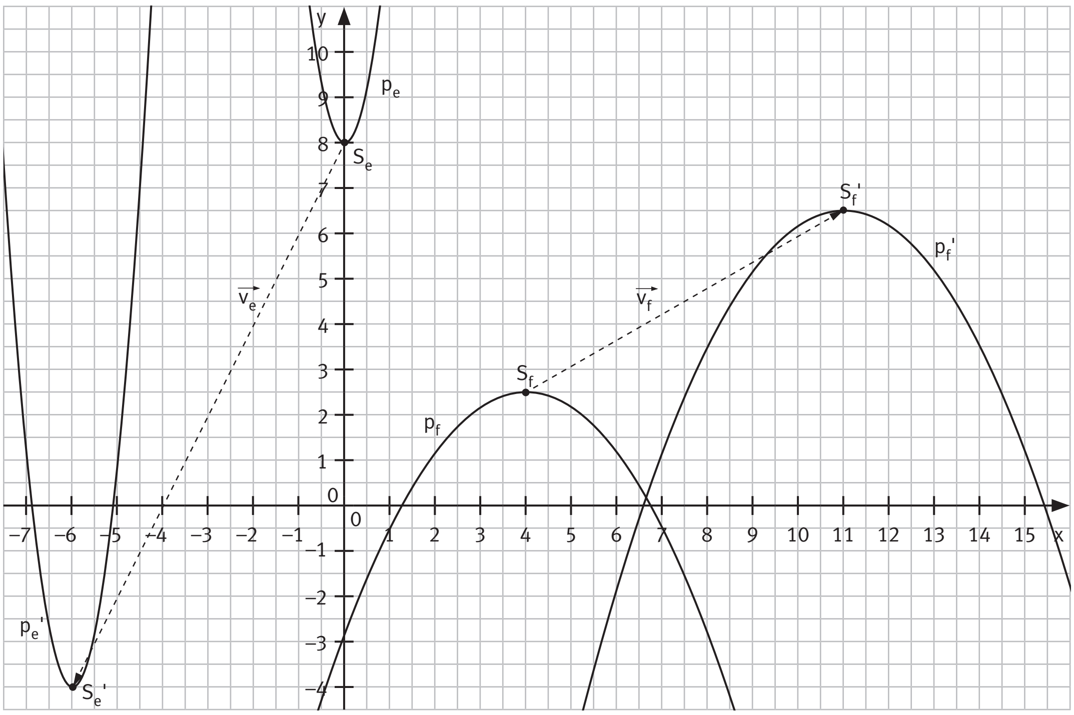




p_c: $y = x^2 - 4$ $\quad S_c\,(0\,|\,{-4}) \xrightarrow{\vec{v_c} = \binom{1}{5}} S_c'\,(1\,|\,1)$ $\quad \Rightarrow p_c'$: $y = (x-1)^2 + 1$

p_d: $y = 0{,}5 \cdot (x+1)^2 - 3$ $\quad S_d\,({-1}\,|\,{-3}) \xrightarrow{\vec{v_d} = \binom{0{,}5}{-2}} S_d'\,({-0{,}5}\,|\,{-5})$ $\quad \Rightarrow p_d'$: $y = 0{,}5 \cdot (x+0{,}5)^2 - 5$

e) und **f)**



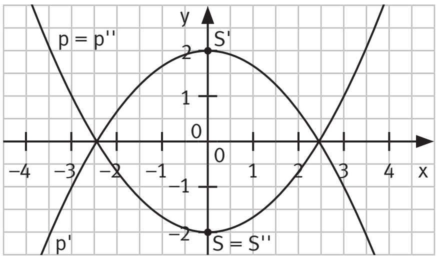
p_e: $y = 5x^2 + 8$ $\quad S_e\,(0\,|\,8) \xrightarrow{\vec{v_e} = \binom{-6}{-12}} S_e'\,({-6}\,|\,{-4})$ $\quad \Rightarrow p_e'$: $y = 5(x+6)^2 - 4$

p_f: $y = -\frac{1}{3} \cdot (x-4)^2 + 2{,}5$ $\quad S_f\,(4\,|\,2{,}5) \xrightarrow{\vec{v_f} = \binom{7}{4}} S_f'\,(11\,|\,6{,}5)$ $\quad \Rightarrow p_f'$: $y = -\frac{1}{3} \cdot (x-11)^2 + 6{,}5$

K 1 **11** Jeder Graph einer quadratischen Funktion ist zur Geraden, die durch den Scheitelpunkt verläuft und senkrecht zur x-Achse ist, achsensymmetrisch. Daher existieren zu jedem $y \in \mathbb{W}$ (außer für y_S) jeweils zwei Elemente $x \in \mathbb{D}$. Da die Funktionswerte von p für x = 2 und x = 9 (bzw. für x = –2,5 und x = 4,5) gleich sind, muss der x-Wert des Scheitelpunkts genau zwischen x = 2 und x = 9 (zwischen x = –2,5 und x = 4,5) liegen; d. h.: $x_S = 5{,}5$, $y_S = 0$ und S (5,5 | 0) ($x_S = 1$, $y_S = 0$ und S (1 | 0)). Für alle $y \in \mathbb{W}$ der Funktion p: $y = (x - 5{,}5)^2$ (bzw. p: $y = (x-1)^2$) gilt: $y \geq 0$. Damit hat p für $x = x_S = 5{,}5$ ($x = x_S = 1$) den kleinsten Funktionswert.

K5 **12** A – 1 B – 2 und 5 C – 2 und 4 D – 3 E – 2 F – 5 G – 4

K5 **13**



Die Spiegelung des Graphen der Funktion p an der x-Achse ergibt:
p': $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$
Die Spiegelung des Graphen der Funktion p an der y-Achse ergibt:
p'' = p: $y = \frac{1}{3}x^2 - 2$

K6 **14** **a)** Durch Einsetzen von x_P in die Funktionsgleichung von p erhält man einen y-Wert y_Q. Anschließend vergleicht man y_P mit y_Q. Hierbei stellt man folgende drei Fälle fest:
$y_Q = y_P$, d. h.: P liegt auf dem Graphen von p;
$y_Q < y_P$, d. h.: P liegt oberhalb des Graphen von p;
$y_Q > y_P$, d. h.: P liegt unterhalb des Graphen von p.
b) $p(-3) = 29 > 20 = y_P$, d. h.: P liegt unterhalb des Graphen von p.

K6 **15** Leanders Vermutungen sind falsch:
Eine Parallele zur x-Achse hat für jedes Element $x \in \mathbb{R}$ denselben Abstand zur x-Achse, sie ist eine Gerade mit der Funktionsgleichung g: $y = d$, $d \in \mathbb{R}$. Die Funktion f dagegen ist eine quadratische Funktion, ihr Graph hat für verschiedene $x \in \mathbb{R}$ verschiedene Abstände zur x-Achse, z. B.: $f(0) = 2 \neq f(10) = 2{,}0001 \neq f(-1000) = 1$. Wegen $a = 0{,}000001$ ist der Graph der Funktion f gegenüber einer Normalparabel sehr stark gestaucht.
Aus den gleichen Gründen ist auch der Graph der Funktion h keine Parallele zur y-Achse:
Wegen $a = 5555$ ist die Parabel gegenüber einer Normalparabel so stark gestreckt, dass sie bei Betrachtung eines kleinen Ausschnitts wie eine Parallele zur y-Achse wirken kann. Es gilt jedoch:
$h(0) = 5500 \neq h(0{,}5) = 1333{,}75 \neq h(1) = -55$; d. h.: Für jedes Element $y \geq -55$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit: $h(x) = y$. Damit ist h nicht eine zur y-Achse parallele Gerade mit g: $x = e$; $e \in \mathbb{R}$.

K5 **16**

a)	P: $f(2) = 5$	Q: $f(-2) = 21 \neq 23$	$\Rightarrow$ P liegt auf der Parabel, Q nicht.
b)	P: $f(3) = 25$	Q: $f(11) = 81$	$\Rightarrow$ P und Q liegen auf der Parabel.
c)	P: $f(-4) = -67 \neq 67$	Q: $f(6{,}5) = -172 \neq -17{,}2$	$\Rightarrow$ P und Q liegen nicht auf der Parabel.
d)	P: $f(-3) = 111{,}5 \neq 11$	Q: $f(2) = 6{,}5$	$\Rightarrow$ Q liegt auf der Parabel, P nicht.

K6 **17** **a)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$
b) Die Darstellung vermittelt den Eindruck, als sei der Graph von f breiter als der Graph von p. Dieser Eindruck entsteht dadurch, dass man einen größeren Teil von f sieht als von p.

K5 **18** **a)** $\vec{v'} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 8 \end{pmatrix}$ **b)** $S_{p'}(-2|-3{,}5) \xrightarrow{\vec{v'} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 8 \end{pmatrix}} S_p(-6{,}5|4{,}5)$ **c)** p: $y = -1{,}5 \cdot (x + 6{,}5)^2 + 4{,}5$

K1 **19** **a)** Nein, beide Nullstellen reichen nicht aus, um den Funktionsterm der nicht-gestauchten und nicht-gestreckten Parabel anzugeben: Auch wenn die Form der Parabel und die Nullstellen bekannt sind, weiß man noch nicht, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist. Der Funktionswert mit den Nullstellen x_1 und x_2 ist entweder p_1: $y = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ oder p_2: $y = -(x - x_1) \cdot (x - x_2)$.
b) p_1: $y = (x + 4) \cdot x \Leftrightarrow y = x^2 + 4x + 4 - 4 \Leftrightarrow y = (x + 2)^2 - 4$ $S_1(-2|-4)$
p_2: $y = -(x + 4) \cdot x \Leftrightarrow y = -(x^2 + 4x + 4 - 4) \Leftrightarrow y = -(x + 2)^2 + 4$ $S_2(-2|4)$

K5 **20** **a)** und **b)** 1 $8 = a \cdot (-1)^2 + 6$; $a = 2$ S(0|6) 2 $0 = -\frac{1}{4} \cdot (-4)^2 + c$; $c = 4$ S(0|4) 3 $-2 = a \cdot (-1)^2 + 2$; $a = -4$ S(0|2)

Verständnis

K 1 ■ Mit quadratischer Ergänzung ergibt sich:

$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}p^2 + q = \left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 - \frac{1}{4}p^2 + q$

$p\colon y = x^2 + px + q \Leftrightarrow y = \left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 - \frac{1}{4}p^2 + q$ mit $S\left(-\frac{1}{2}p \mid q - \frac{1}{4}p^2\right)$

K 1 ■ $p\colon y = (x - m)(x + m) \Leftrightarrow p\colon y = x^2 - m^2$ mit $S(0 \mid -m^2)$

K 5 **1**

a)	$f\colon y = (x + 1)^2 + 2$	$S(-1 \mid 2)$	$s\colon x = -1$	$\mathbb{W} = \{y \mid y \geq 2\}$
b)	$f\colon y = -0{,}5(x - 8)^2 + 50$	$S(8 \mid 50)$	$s\colon x = 8$	$\mathbb{W} = \{y \mid y \leq 50\}$
c)	$f\colon y = -3(x + 1)^2 + 12$	$S(-1 \mid 12)$	$s\colon x = -1$	$\mathbb{W} = \{y \mid y \leq 12\}$
d)	$f\colon y = \frac{2}{3}(x + 3)^2 - 6$	$S(-3 \mid -6)$	$s\colon x = -3$	$\mathbb{W} = \{y \mid y \geq -6\}$
e)	$f\colon y = 3(x - 5)^2 - 5$	$S(5 \mid -5)$	$s\colon x = 5$	$\mathbb{W} = \{y \mid y \geq -5\}$
f)	$f\colon y = -4(x - 2)^2$	$S(2 \mid 0)$	$s\colon x = 2$	$\mathbb{W} = \{y \mid y \leq 0\}$
g)	$f\colon y = -(x + 1{,}5)^2 + 1$	$S(-1{,}5 \mid 1)$	$s\colon x = -1{,}5$	$\mathbb{W} = \{y \mid y \leq 1\}$
h)	$f\colon y = 5x^2 - 10$	$S(0 \mid -10)$	$s\colon x = 0$	$\mathbb{W} = \{y \mid y \geq -10\}$
i)	$f\colon y = -2(x - 3)^2 + 37$	$S(3 \mid 37)$	$s\colon x = 3$	$\mathbb{W} = \{y \mid y \leq 37\}$

K 1 **2** A – p_5: Es handelt sich um eine nach unten geöffnete und gestauchte Parabel mit $S(-1 \mid 0)$.

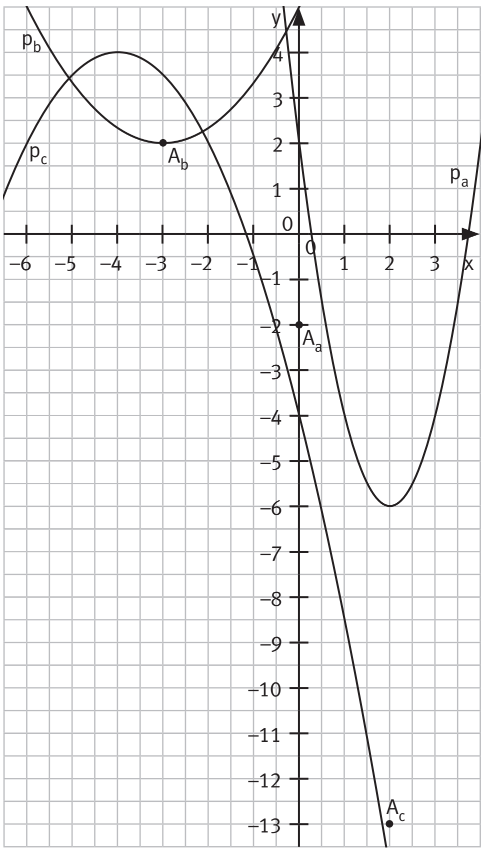
B – p_3: Es handelt sich um eine Gerade mit y-Achsenabschnitt $t = 1$.

C – p_2: Es handelt sich um eine nach oben geöffnete und gestreckte Parabel mit $S(1 \mid 3)$.

D – p_1: Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Parabel mit $S(-2 \mid 0)$.

E – p_4: Es handelt sich um eine nach unten geöffnete und gestreckte Parabel mit $S(0 \mid -1{,}5)$.

K 5 **3**



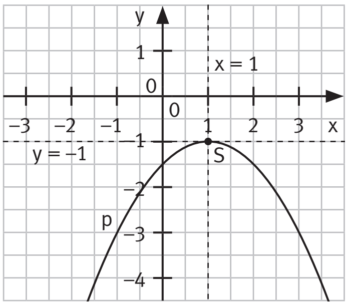
a) $p_a(0) = 2 \neq -2 \Rightarrow A_a(0 \mid -2) \notin p_a$

b) $p_b(-3) = 2 \Rightarrow A_b(-3 \mid 2) \in p_b$

c) $p_c(2) = -14 \neq -13 \Rightarrow A_c(2 \mid -13) \notin p_c$

K6 **4** p: $y = 0{,}5 \cdot (x - 3) \cdot (x + 3) + 2 \Leftrightarrow y = 0{,}5 \cdot (x^2 - 9) + 2 \quad \Leftrightarrow y = 0{,}5x^2 - 2{,}5$
Sid hat nicht Recht: Der Scheitelpunkt der Parabel p liegt bei S (0|–2,5).

K3 **5** Es handelt sich um eine nach unten geöffnete und gestauchte Parabel mit S (1|–1).



K5 **6** Die Verschiebung einer Parabel um den Vektor $\vec{v}$ bedeutet eine Verschiebung des Scheitelpunkts der Parabel um diesen Vektor. Man gibt die Funktionsgleichung von p zunächst in der Scheitelpunktsform an mit Scheitelpunkt S und erhält dann mithilfe des verschobenen Scheitelpunkts S' die Funktionsgleichung von p'.

a) p: $y = -2(x - 2{,}5)^2 - 7{,}5$ $\quad S\,(2{,}5|-7{,}5) \xmapsto{\vec{v} = \binom{3}{5}} S'\,(5{,}5|-2{,}5)$ $\quad \Rightarrow$ p': $y = -2(x - 5{,}5)^2 - 2{,}5$

b) p: $y = 0{,}4(x - 15)^2 - 92$ $\quad S\,(15|-92) \xmapsto{\vec{v} = \binom{-2}{3}} S'\,(13|-89)$ $\quad \Rightarrow$ p': $y = 0{,}4(x - 13)^2 - 89$

c) p: $y = -(x + 2{,}5)^2 - 22{,}75$ $\quad S\,(-2{,}5|-22{,}75) \xmapsto{\vec{v} = \binom{1}{-4}} S'\,(-1{,}5|-26{,}75)$ $\quad \Rightarrow$ p': $y = -(x + 1{,}5)^2 - 26{,}75$

d) p: $y = -(x - 0)^2 + 4$ $\quad S\,(0|4) \xmapsto{\vec{v} = \binom{-3}{0}} S'\,(-3|4)$ $\quad \Rightarrow$ p': $y = -(x + 3)^2 + 4$

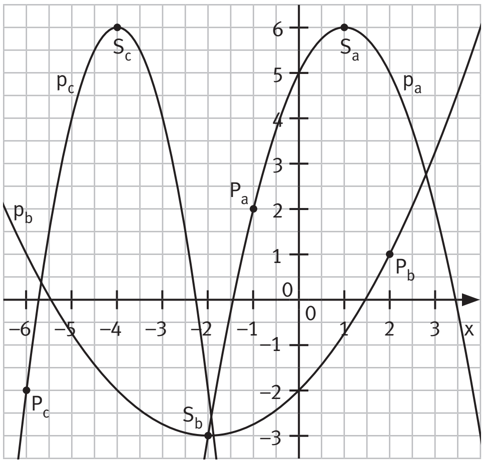
Verständnis

K6
- Zwei Punkte reichen aus, um die Gleichung der Parabel angeben zu können, wenn man weiß, dass die gesuchte Parabel eine nach oben (oder unten) geöffnete, eventuell verschobene Normalparabel ist, da in diesem Fall nur zwei Variablen unbekannt sind. Weiterhin reichen zwei Punkte aus, wenn einer der beiden Punkte der Parabelscheitel ist und man weiß, welcher der zwei angegebenen Punkte der Scheitelpunkt ist.

K1
- Nein, die Gleichung einer Parabel lässt sich nicht angeben, wenn nur die Symmetrieachse und die Wertemenge bekannt ist: Durch die Symmetrieachse kennt man zwar die x-Koordinate des Scheitelpunkts und durch die Wertemenge kennt man die y-Koordinate des Scheitelpunkts und man weiß auch, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist. Durch das Fehlen der Formvariablen a kennt man jedoch nicht die Form der Parabel, d. h., man weiß nicht, ob die Form der Normalparabel vorliegt oder die Parabel gestreckt oder gestaucht ist.

K5

1 **a)** bis **c)** Einsetzen der Koordinaten von P in die Scheitelpunktsform mit Scheitelpunkt S liefert die Formvariable a und damit die Funktionsgleichungen.

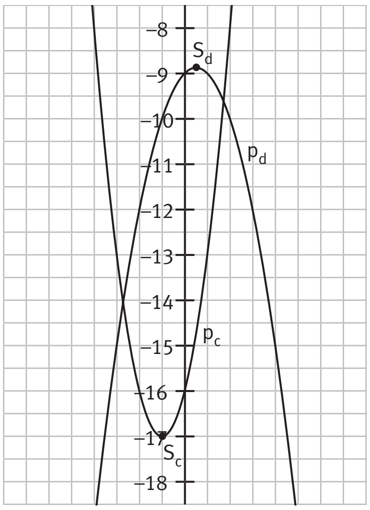


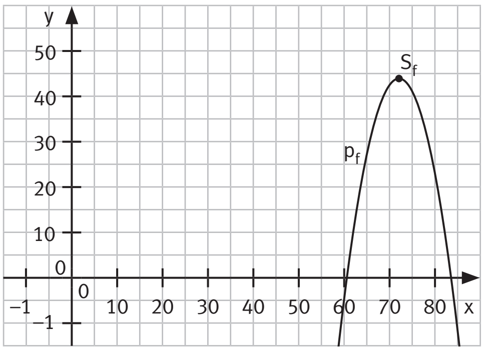
a) $2 = a(-1-1)^2 + 6 \quad \Leftrightarrow a = -1 \quad \Rightarrow p\colon y = -(x-1)^2 + 6 \quad \Leftrightarrow p\colon y = -x^2 + 2x + 5$

b) $1 = a(2+2)^2 - 3 \quad \Leftrightarrow a = 0{,}25 \quad \Rightarrow p\colon y = 0{,}25(x+2)^2 - 3 \quad \Leftrightarrow p\colon y = 0{,}25x^2 + x - 2$

c) $-2 = a(-6+4)^2 + 6 \quad \Leftrightarrow a = -2 \quad \Rightarrow p\colon y = -2(x+4)^2 + 6 \quad \Leftrightarrow p\colon y = -2x^2 - 16x - 26$

d) bis **f)** Aus der allgemeinen Formel für die Koordinaten des Scheitelpunkts $S\left(-\frac{b}{2a} \,\middle|\, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ folgen die jeweils noch fehlenden Formvariablen.



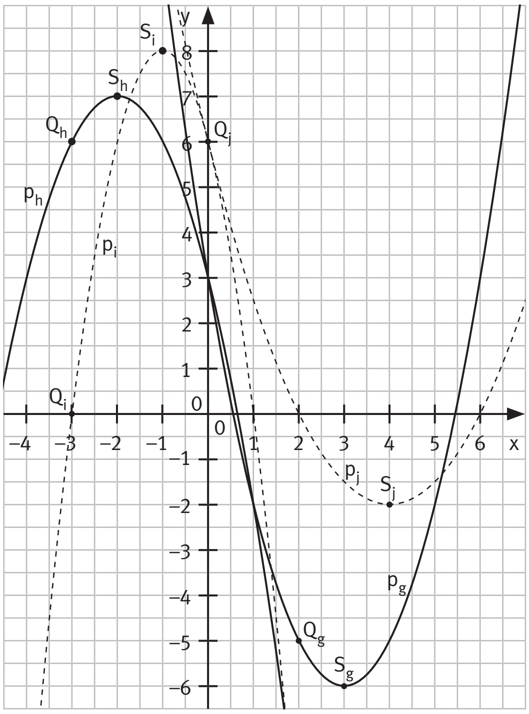


d) $0{,}25 = -\frac{1}{2a} \Leftrightarrow a = -2$ $\quad -8\frac{7}{8} = c - \frac{1}{4 \cdot (-2)} \Leftrightarrow c = -9$ $\quad \Rightarrow p{:}\ y = -2x^2 + x - 9$

e) $-0{,}5 = \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow a = b$ $\quad -17 = -16 - \frac{a^2}{4a} \Leftrightarrow a = b = 4$ $\quad \Rightarrow p{:}\ y = 4x^2 + 4x - 16$

f) $72 = \frac{-b}{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow b = 48$ $\quad 44 = c - \frac{48^2}{4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow c = -1684$ $\quad \Rightarrow p{:}\ y = -\frac{1}{3}x^2 + 48x - 1684$

g) bis **j)** Einsetzen der Koordinaten von Q in die Funktionsgleichung p liefert die fehlenden Formvariablen.



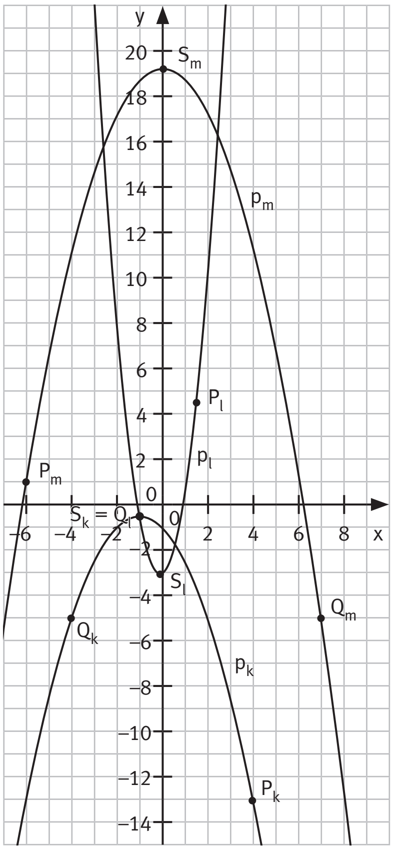
g) $-5 = 4a - 12 + 3 \Leftrightarrow a = 1$
$\Rightarrow p{:}\ y = x^2 - 6x + 3$
$\Leftrightarrow p{:}\ (y - 3)^2 - 6$
$S(3\,|\,-6)$

h) $6 = -9 + 12 + c \Leftrightarrow c = 3$
$\Rightarrow p{:}\ y = -x^2 - 4x + 3$
$\Leftrightarrow p{:}\ y = -(x + 2)^2 + 7$
$S(-2\,|\,7)$

i) $0 = -18 - 3b + 6 \Leftrightarrow b = -4$
$\Rightarrow p{:}\ y = -2x^2 - 4x + 6$
$\Leftrightarrow p{:}\ y = -2\,(x + 1)^2 + 8$
$S(-1\,|\,8)$

j) $6 = c$
$\Rightarrow p{:}\ y = 0{,}5x^2 - 4x + 6$
$\Leftrightarrow p{:}\ y = 0{,}5\,(x - 4)^2 - 2$
$S(4\,|\,-2)$

k) bis **m)** Einsetzen der Koordinaten von P und Q und der gegebenen Formvariable liefert die noch fehlenden Formvariablen.



k) I $\quad -13 = 16a + 4b - 1$
II $\quad -5 = 16a - 4b - 1$
$\Rightarrow a = -0{,}5;\ b = -1$
$\Rightarrow p{:}\ y = -0{,}5x^2 - x - 1$
$\Leftrightarrow p{:}\ y = -0{,}5\,(x + 1)^2 - 0{,}5$
$S(-1\,|\,-0{,}5)$

l) I $\quad 4{,}5 = 2{,}25a + 0{,}75 + c$
II $\quad -0{,}5 = a - 0{,}5 + c$
$\Rightarrow a = 3;\ c = -3$
$\Rightarrow p{:}\ y = 3x^2 + 0{,}5x - 3$
$\Leftrightarrow p{:}\ y = 3\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - 3\frac{1}{48}$
$S\left(-\frac{1}{12}\,|\,-3\frac{1}{48}\right)$

m) I $\quad 1 = -18 - 6b + c$
II $\quad -5 = -24{,}5 + 7b + c$
$\Rightarrow b = \frac{1}{26};\ c = 19\frac{3}{13}$
$\Rightarrow p{:}\ y = -0{,}5x^2 + \frac{1}{26}x + 19\frac{3}{13}$
$\Leftrightarrow p{:}\ y \approx -0{,}5\left(x - \frac{1}{26}\right)^2 + 19{,}23$
$S\left(\frac{1}{26}\,|\,19{,}23\right)$

K5 **2** **a)** $7 = a + 3 \Rightarrow a = 4$ **b)** $-20 = -2 \cdot 9 + c \Rightarrow c = -2$

K6 **3** Es gibt folgende Möglichkeiten und Beispiele bei gegebenem Punkt P (–3 | 21).

a) Parabelgleichungen zu Punkt P	**b)** Beispiele
Man weiß, dass P der Scheitel einer nach oben (oder einer nach unten) geöffneten Normalparabel ist; z. B.: Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Normalparabel.	$p\colon y = (x + 3)^2 + 21$
Zusätzlich zu P wird der Scheitelpunkt angegeben; z. B.: S (3 | 15)	$21 = a\,(-3 - 3)^2 + 15 \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow p\colon y = \frac{1}{6}\,(x - 3)^2 + 15$ $\Leftrightarrow p\colon y = \frac{1}{6}x^2 - x + 16{,}5$
Zusätzlich zu P werden die Symmetrieachse s und der maximale (oder der minimale) Funktionswert angegeben; z. B.: s: x = 3; $p_{min} = 15$	Die Lösung entspricht der Lösung bei gegebenem Scheitelpunkt, da aus s: x = 3 und $p_{min} = 15$ der Scheitelpunkt S (3 | 15) folgt.
Zusätzlich zu P werden die Symmetrieachse s und der Öffnungsfaktor a angegeben; z. B.: s: x = 3; a = 1	$21 = (-3 - 3)^2 + y_S \Leftrightarrow y_S = -15$; S (3 | –15) $\Rightarrow p\colon y = (x - 3)^2 - 15$ $\Leftrightarrow p\colon y = x^2 - 6x - 6$
Zusätzlich zu P ist ein Punkt Q angegeben plus eine der drei Formvariablen; z. B.: Q (3 | 15); a = 2	I $15 = 18 + 3b + c$ II $21 = 18 - 3b + c$ $\Rightarrow c = 0;\ b = -1 \Rightarrow p\colon y = 2x^2 - x$ $\Leftrightarrow p\colon y = 2\,(x - 0{,}25)^2 - 0{,}125$; S (0,25 | –0,125)
Zusätzlich zu P werden zwei der drei Formvariablen angegeben; z. B.: a = 2; b = 1	$21 = 18 - 3 + c \Rightarrow c = 6$ $\Rightarrow p\colon y = 2x^2 + x + 6$ $\Leftrightarrow p\colon y = 2\,(x + 0{,}25)^2 + 5{,}875$; S (0,25 | 5,875)

K5 **4** **a)** Einsetzen der Koordinaten von P und Q in die Funktionsgleichung p liefert:
I $-4 = c$
II $-4 = 64a - 32 - 4 \Leftrightarrow a = 0{,}5 \quad \Rightarrow p\colon y = 0{,}5x^2 + 4x - 4$

b) Einsetzen der Koordinaten von R in p ergibt:
$-1 = c = a \quad \Rightarrow p\colon y = -x^2 + 4x - 1$

K1 **5** Einsetzen der Koordinaten von S_1 (–0,5 | 4) in die Funktionsgleichung p mit a = b liefert:
$4 = 0{,}5^2a - 0{,}5a + 5 \Leftrightarrow -1 = -0{,}25a \Leftrightarrow a = b = 4$
$\Rightarrow p\colon y = 4x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow p\colon y = 4(x + 0{,}5)^2 + 4$ mit Scheitelpunkt S_1 (–0,5 | 4)
Einsetzen der Koordinaten von S_2 (0,5 | –4) in die Funktionsgleichung p mit a = b liefert:
$-4 = 0{,}5^2a + 0{,}5a + 5 \Leftrightarrow -9 = 0{,}75a \Leftrightarrow a = b = -12$
$\Rightarrow p'\colon y = -12x^2 - 12x + 5 \Leftrightarrow p'\colon y = -12(x + 0{,}5)^2 + 8$ mit Scheitelpunkt S' (–0,5 | 8) $\neq S_2$ (0,5 | –4)
Das Vorgehen mit S_2 liefert eine Funktionsgleichung mit Scheitelpunkt S' (–0,5 | 8) $\neq S_2$ (0,5 | –4); hierbei liegt S_2 zwar auf der Parabel, ist jedoch nicht Scheitelpunkt der Parabel. Hieraus folgt: S_2 kann nicht Scheitelpunkt der Parabel p sein, wenn a = b gelten soll.

K5 **6** Einsetzen der Koordinaten von P in $y = ax^2 + ax + a \Leftrightarrow y = a\,(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow a = \frac{y}{x^2 + x + 1}$ liefert:

a) $a = \frac{-6}{4 - 2 + 1} = \frac{-6}{3} = -2 \quad \Rightarrow p\colon y = -2x^2 - 2x - 2$

b) $a = \frac{2{,}5}{12{,}25 - 3{,}5 + 1} = \frac{2{,}5}{9{,}75} = \frac{10}{39} \quad \Rightarrow p\colon y = \frac{10}{39}x^2 + \frac{10}{39}x + \frac{10}{39}$

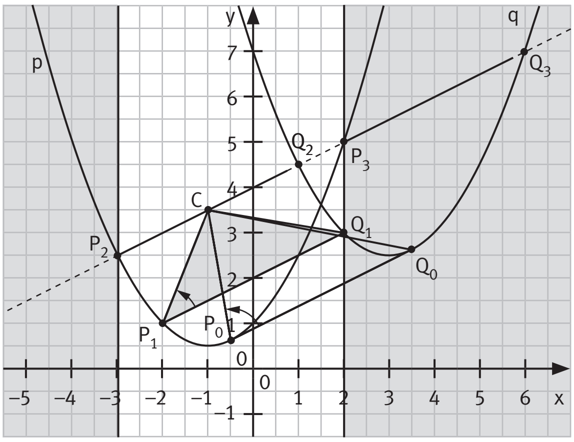
c) $a = \frac{7}{4 + 2 + 1} = \frac{7}{7} = 1 \quad \Rightarrow p\colon y = x^2 + x + 2$

Verständnis

K6 ■ Der zum quadratischen Term mit $a > 0$ gehörende Graph ist Teil einer nach oben geöffneten Parabel; dieses Parabelstück hat ein Minimum bei $(x_s \mid y_s)$ und ein Maximum bei $(x_s + 2 \mid 4a + y_s)$.

K6 ■ Der zum quadratischen Term mit $a > 0$ gehörende Graph ist Teil einer nach oben geöffneten Parabel; dieses Parabelstück hat ein Minimum bei $(3 \mid -1)$ und zwei Maxima bei $(1 \mid 3)$ und $(5 \mid 3)$.

K3 **1**



a) $P_1\,(-2 \mid 1)$; $Q_1\,(2 \mid 3)$; $\overrightarrow{P_1C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks CP_1Q_1 gilt:

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2{,}5 \end{vmatrix}$ FE $= \frac{1}{2} \cdot (10 - 2)$ FE $= 4$ FE

b) Für $x = -3$ und für $x = 2$ liegen $P_2\,(-3 \mid 2{,}5)$ und $Q_2\,(1 \mid 4{,}5)$ bzw. $P_3\,(2 \mid 5)$ und $Q_3\,(6 \mid 7)$ auf der Parallele zu P_1Q_1 durch C, d. h., CP_2Q_2 und CP_3Q_3 bilden kein Dreieck. Nur für x aus dem Intervall $]-3; 2[$ gibt es Dreiecke CP_nQ_n.

c) $P_n\,(x \mid 0{,}5x^2 + x + 1)$; $\overrightarrow{P_nC} = \begin{pmatrix} -1 - x \\ -0{,}5x^2 - x + 2{,}5 \end{pmatrix}$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks CP_nQ_n gilt:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 - x \\ 2 & -0{,}5x^2 - x + 2{,}5 \end{vmatrix} \text{ FE} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-2x^2 - 4x + 10 - 2\,(-1 - x)) \text{ FE} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-2x^2 - 2x + 12) \text{ FE} \\ &= (-x^2 - x + 6) \text{ FE} \end{aligned}$$

d) Quadratische Ergänzung liefert:

$$\begin{aligned} -x^2 - x - 6 &= -(x^2 + x) + 6 \\ &= -(x^2 + x + 0{,}25 - 0{,}25) + 6 \\ &= -(x + 0{,}5)^2 + 6{,}25 \end{aligned}$$

Der maximale Flächeninhalt A_0 beträgt 6,25 FE für $x = -0{,}5$ mit $P_0\,(-0{,}5 \mid 0{,}625)$ und $Q_0\,(3{,}5 \mid 2{,}625)$.

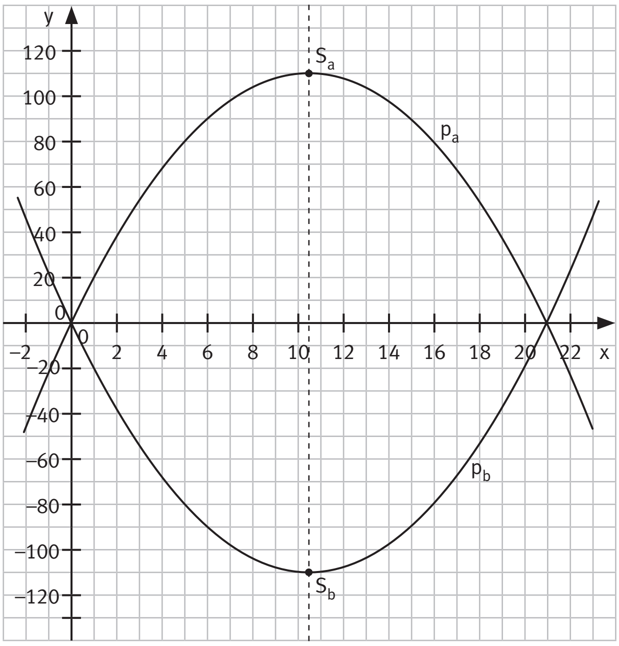
K6 **2** Carlo hat Recht: Für $z \in \mathbb{Z}$ gilt: $(z - 1) \cdot (z + 1) = z^2 - 1$

Für jedes $z \in \mathbb{Z}$ gilt: $z^2 \geq 0 \Rightarrow z^2 - 1 \geq -1$

Es gilt: $(z - 1) \cdot (z + 1) = -1 \Leftrightarrow z^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$

-1 ist der minimale Wert für $(z - 1) \cdot (z + 1)$; dieser Wert wird bei $z = 0$ erreicht.

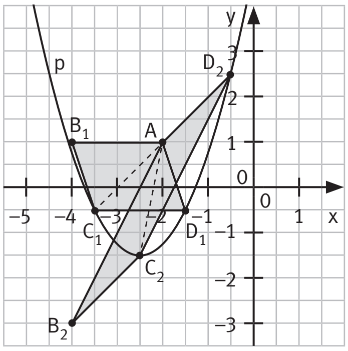
K3 **3**



a) Mit r, s ∈ ℚ und r + s = 21 bzw. s = 21 – r gilt:
$r \cdot s = r \cdot (21 - r) = -r^2 + 21r$
Quadratisches Ergänzen liefert:
$-r^2 + 21r$
$= -(r^2 - 21r + 10{,}5^2 - 10{,}5^2)$
$= -(r - 10{,}5)^2 + 10{,}5^2$
Der Graph des Produktwerts r · s kann somit als eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitel S (10,5 | 110,25) gesehen werden, d. h.:
Der Produktwert der beiden rationalen Zahlen r und s ist maximal für r = s = 10,5 und r · s = 110,25.

b) Geändertes Zahlenrätsel:
Ermittle, für welche zwei rationalen Zahlen sich der kleinstmögliche Produktwert ergibt, wenn der Differenzwert beider Zahlen 21 ist.
Mit r, s ∈ ℚ und r – s = 21 bzw. s = r – 21 gilt: $r \cdot s = r \cdot (r - 21) = r^2 - 21r$
Quadratisches Ergänzen liefert:
$r^2 - 21r = r^2 - 21r + 10{,}5^2 - 10{,}5^2 = (r - 10{,}5)^2 - 10{,}5^2$
Der Graph des Produktwerts r · s kann somit als eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt S (10,5 | –110,25) gesehen werden, d. h.: Der Produktwert der beiden rationalen Zahlen r und s ist minimal für r = 10,5, s = –10,5 und r · s = –110,25.

K3 **4** **a)**



b) Es sei x die x-Koordinate von C_n und $x_D = x + 2$ die x-Koordinate von $D_n\,(x_D \mid y_D) \in p$: $y = x^2 + 5x + 4{,}75$.
$y_D = x_D{}^2 + 5x_D + 4{,}75$
$= (x + 2)^2 + 5\,(x + 2) + 4{,}75$
$= x^2 + 4x + 4 + 5x + 10 + 4{,}75$
$= x^2 + 9x + 18{,}75$
$\Rightarrow D_n\,(x + 2 \mid x^2 + 9x + 18{,}75)$

c) Die Parallelogramme $AB_nC_nD_n$ setzen sich aus den Dreiecken C_nD_nA und AB_nC_n zusammen. Für den Flächeninhalt der Parallelogramme $AB_nC_nD_n$ gilt:
$\overrightarrow{C_nD_n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4x + 14 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{C_nA} = \begin{pmatrix} -2 - x \\ -x^2 - 5x - 3{,}75 \end{pmatrix}$

$A\,(x) = \begin{vmatrix} 2 & -(2 + x) \\ 4x + 14 & -x^2 - 5x - 3{,}75 \end{vmatrix}$ FE
$= [(-2x^2 - 10x - 7{,}5) + (4x + 14)(2 + x)]$ FE
$= (-2x^2 - 10x - 7{,}5 + 8x + 4x^2 + 28 + 14x)$ FE
$= (2x^2 + 12x + 20{,}5)$ FE

d) Quadratisches Ergänzen liefert:
$2x^2 + 12x + 20{,}5 = 2\,(x^2 + 6x + 9 - 9 + 10{,}25) = 2\,(x + 3)^2 + 2{,}5$
$A\,(x) = (2x^2 + 12x + 20{,}5)$ FE $= [2\,(x + 3)^2 + 2{,}5]$ FE
Der minimale Flächeninhalt A_0 beträgt 2,5 FE für x = –3.

K3 **1** **a)** Je stärker die Parabel gestaucht ist, desto kleiner ist der Faktor a (bei $a > 0$). Somit ist der Faktor a für das Schalkenmehrener Maar am kleinsten, da dieses Maar im Vergleich zur Tiefe am breitesten ist.

b) Der Scheitelpunkt bzw. der Tiefpunkt der Parabel sei $S\,(0|0)$. Die maximale Tiefe des Sees beträgt 38 m, die Oberfläche des Sees befindet sich in der Höhe von $y = 38$. Somit ergibt sich:

$38 = 0{,}0016x^2 \;\Rightarrow\; x \approx 154{,}1$

Der Durchmesser des Sees beträgt also $2 \cdot 154{,}1\,\text{m} = 308{,}2\,\text{m}$.

c) $A = 3{,}14 \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot (154{,}1\,\text{m})^2 \approx 74\,565\,\text{m}^2 \approx 7{,}5\,\text{ha}$

Die Wasseroberfläche des Sees beträgt rund 7,5 Hektar.

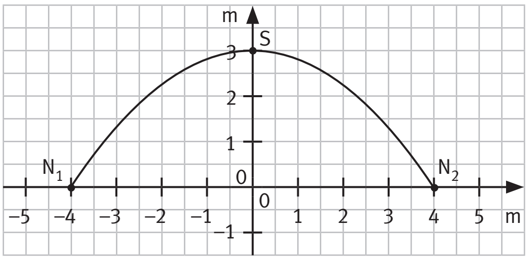
K3 **2** **a)** Der Schwerpunkt des Springers bewegt sich auf einer (annähernd) parabelförmigen Bahn und befindet sich im Moment des Absprungs etwa einen halben Meter über dem Felsen.

b) Der Scheitelpunkt sei $S\,(0|35{,}5)$. Für die Funktionsgleichung der Flugparabel gilt:
$y = ax^2 + 35{,}5$
Einsetzen des Punktes $P\,(-14|0)$ ergibt: $a \approx -0{,}181$
Die Funktionsgleichung der Flugparabel ist: $y = -0{,}181x^2 + 35{,}5$

c) Der Sprungturm ist 10 m hoch, der Schwerpunkt des Springers liegt 0,5 m über dem Sprungturm, also bei 10,5 m über dem Boden bzw. über der Wasseroberfläche. Der Scheitelpunkt der Parabel ist damit $S\,(0|10{,}5)$. Mit der in a) berechneten Formvariablen $a \approx -0{,}181$ ergibt sich für $y = 0$ (der Springer trifft auf der Wasseroberfläche auf):
$0 = -0{,}181x^2 + 10{,}5 \Leftrightarrow x = \pm 7{,}6\,\text{m}$
Der Springer taucht mit 7,6 m horizontaler Entfernung vom Absprungpunkt ins Wasser ein.

K3 **3** Man geht von einer nach unten geöffneten Parabel aus und wählt das Koordinatensystem so, dass eine (gedachte) Mittellinie zwischen dem Aufschlagpunkt (Schläger) und dem Auftreffpunkt (Tisch) die y-Achse und die Platte die x-Achse darstellt. Der Scheitelpunkt der Parabel ist der höchste Punkt und liegt bei $S\,(0|3{,}8)$. $S\,(0|3{,}8)$ in die Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$ eingesetzt ergibt $c = 3{,}8$. Wegen dem 10,6 m weiten Bogen weiß man, dass die Parabel die x-Achse bei $x_1 = -5{,}3$ und bei $x_2 = 5{,}3$ schneidet.
$N_1\,(-5{,}3|0)$ in die Funktionsgleichung $y = ax^2 + 3{,}8$ eingesetzt ergibt: $0 = a \cdot (-5{,}3)^2 + 3{,}8 \Leftrightarrow a \approx -0{,}135$
Die Funktionsgleichung der Flugparabel lautet: $y = -0{,}135 \cdot x^2 + 3{,}8$

K3 **4** **a)**



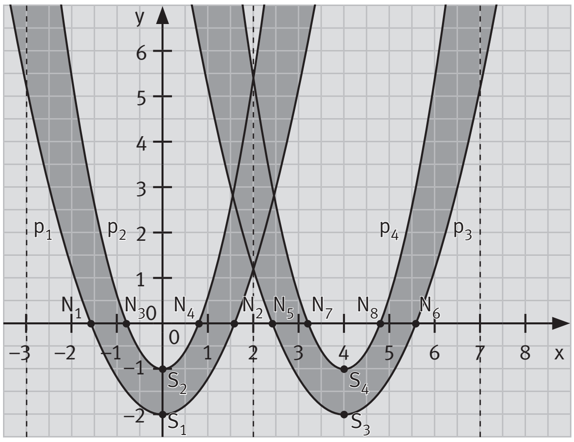
b) Der Scheitelpunkt der Parabel liegt bei $S\,(0|3)$. $S\,(0|3)$ in die Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$ eingesetzt ergibt $c = 3$.
Da die Parabel symmetrisch zur y-Achse ist und einen 8 m breiten Bogen beschreibt, befinden sich ihre Nullstellen bei $N_1\,(-4|0)$ und $N_2\,(4|0)$.
$N_2\,(4|0)$ in $y = ax^2 + 3$ eingesetzt ergibt:
$0 = 16a + 3 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{16} \Rightarrow y = -\frac{3}{16}x^2 + 3$

K3 **5** **a)** Es sind unterschiedliche Ergebnisse aufgrund unterschiedlicher Ableseergebnisse möglich.

p_1: $S_1\,(0|-2)$ und $N_1\,(-1{,}6|0)$, $N_2\,(1{,}6|0)$ Nullstellen: $x_1 = -1{,}6$ und $x_2 = 1{,}6$
p_2: $S_2\,(0|-1)$ und $N_3\,(-0{,}8|0)$, $N_4\,(0{,}8|0)$ Nullstellen: $x_1 = -0{,}8$ und $x_2 = 0{,}8$
p_3: $S_3\,(4|-2)$ und $N_5\,(2{,}4|0)$, $N_6\,(5{,}6|0)$ Nullstellen: $x_1 = 2{,}4$ und $x_2 = 5{,}6$
p_4: $S_4\,(4|-1)$ und $N_7\,(3{,}2|0)$, $N_8\,(4{,}8|0)$ Nullstellen: $x_1 = 3{,}2$ und $x_2 = 4{,}8$

b) p_1 mit $S_1\,(0|-2)$: $y = a_1x^2 - 2$
$N_1\,(-1{,}6|0)$ in p_1 eingesetzt: $0 = a_1 \cdot (-1{,}6)^2 - 2 \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{2{,}56} \approx 0{,}8$ $\Rightarrow p_1\text{: } y = 0{,}8x^2 - 2$
p_2 mit $S_2\,(0|-1)$: $y = a_2x^2 - 1$
$N_0\,(-0{,}8|0)$ in p_2 eingesetzt: $0 = a_2 \cdot (-0{,}8)^2 - 1 \Leftrightarrow a_2 = \frac{1}{0{,}64} \approx 1{,}6$ $\Rightarrow p_2\text{: } y = 1{,}6x^2 - 1$

c) Die Parabeln p_3 und p_4 erhält man als Spiegelungen von p_1 und p_2 an der Geraden x = 2.



Beim Vergleich einzelner Punkte zwischen Original und Kopie stellt man fest, dass die Kurven im Original keine echten Parabeln sein können. So liegt beispielsweise das Original zwischen den Geraden x = –3 und x = 7, während p_1 und p_3 die Geraden x = –3 und x = 7 bei y = 5,2 schneiden.

K3 **6** **a)**

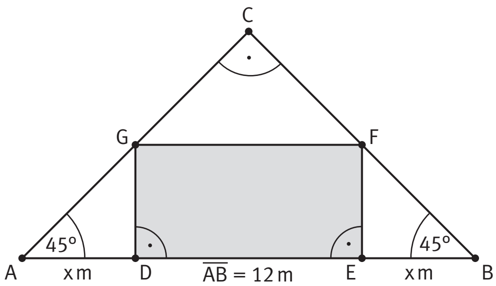
k: S(–3│–1)	$y = (x+3)^2 - 1 = x^2 + 6x + 8$	l: S(–1│–1)	$y = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x$
m: S(1│–1)	$y = (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x$	n: S(3│–1)	$y = (x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$
o: S(–2│–2)	$y = (x+2)^2 - 2 = x^2 + 4x + 2$	p: S(0│–2)	$y = x^2 - 2$
q: S(2│–2)	$y = (x-2)^2 - 2 = x^2 - 4x + 2$	r: S(–1│–3)	$y = (x+1)^2 - 3 = x^2 + 2x - 2$
s: S(1│–3)	$y = (x-1)^2 - 3 = x^2 - 2x - 2$	t: S(0│–4)	$y = x^2 - 4$

b) Die Parabeln t und r entstehen durch Spiegelung der Parabeln a bzw. b an der x-Achse.
Die Parabeln a und t bzw. b und r unterscheiden sich dadurch, dass a und b nach unten, r und t nach oben geöffnet sind. Außerdem sind jeweils die x-Koordinaten der Scheitelpunkte gleich und deren y-Koordinaten gegengleich.

c)

a: S(0│4)	$y = -x^2 + 4$	b: S(–1│3)	$y = -(x+1)^2 + 3 = -x^2 - 2x + 2$
c: S(1│3)	$y = -(x-1)^2 + 3 = -x^2 + 2x + 2$	d: S(–2│2)	$y = -(x+2)^2 + 2 = -x^2 - 4x - 2$
e: S(0│2)	$y = -x^2 + 2$	f: S(2│2)	$y = -(x-2)^2 + 2 = -x^2 + 4x - 2$
g: S(–3│1)	$y = -(x+3)^2 + 1 = -x^2 - 6x - 8$	h: S(–1│1)	$y = -(x+1)^2 + 1 = -x^2 - 2x$
i: S(1│1)	$y = -(x-1)^2 + 1 = -x^2 + 2x$	j: S(3│1)	$y = -(x-3)^2 + 1 = -x^2 + 6x - 8$

K2 **7**



a) Das Dreieck ADG hat zwei 45°- und einen 90°-Winkel und ist somit gleichschenklig: $\overline{AD} = \overline{GD} = x\,m$.
Der Flächeninhalt des Rechtecks ist also:
$A(x) = (12 - 2x) \cdot x\,m^2 = -2x^2\,m^2 + 12x\,m^2$

b) $A(0) = 12 \cdot 0\,m^2 = 0\,m^2$
$A(6) = 0 \cdot 6\,m^2 = 0\,m^2$
Mit x =0 wäre die Breite des Rechtecks so lang wie die Strecke [AB] und die Höhe des Rechtecks betrüge 0 m. Für x = 6 wäre die Breite des Rechtecks 0 m lang. In beiden Fällen ist der Flächeninhalt null.

c) Der Graph der Flächeninhaltsfunktion ist eine nach unten geöffnete Parabel. Die x-Koordinate des Scheitelpunkts liegt in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen: $x_s = \frac{0+6}{2} = 3$.
x = 3 in die Funktionsgleichung eingesetzt liefert: $y_s = 18$, also S(3│18).
Für x = 3 ergibt sich also der größtmögliche Flächeninhalt des Kunstwerkes, nämlich 18 m².

d)

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
12 – 2x	10	9	8	7	6	5	4	3	2

Für x = 4 ist das Kunstwerk 4 m breit und 4 m hoch, also quadratisch.

e) $A_{Quadrat} = 4\,m \cdot 4\,m = 16\,m^2$
$A_{max.\ Rechteck} = 18\,m^2$
Unterschied: 2 m²
Im Vergleich zu den 18 m² machen die 2 m² einen Anteil von $\frac{2}{18} = \frac{1}{9} \approx 11\,\%$ aus.

K 1 **1** **a)** Die x-Koordinaten von B_n und D_n sind Gegenzahlen, die y-Koordinaten von B_n und D_n sind gleich. Außerdem liegen einander zugeordnete Punkte B_n und D_n mit gleicher y-Koordinate y_n auf dem Graphen der quadratischen Funktion p: $y = x^2 + 1$, dieser ist eine zur y-Achse symmetrische Parabel.
b) Ja, bei den Vierecken AB_nCD_n handelt es sich um Drachenvierecke, weil A und C auf der y-Achse und damit auf der Symmetrieachse zu $[B_nD_n]$ liegen.

K 6 **2**

$y = -x^2 + 2$	5 und 6	$y = -2x^2 - 1$	1 und 3
$y = -2x^2 + 0{,}5$	1 und 5	$y = -0{,}5x^2 + 1$	1 und 5
$y = 2x^2 - 1$	1, 3, 4, 5 und 6	$y = x^2$	2, 4 und 6

K 6 **3** **a)** „… der Scheitelpunkt des Graphen (einer gestauchten Parabel) immer noch auf der y-Achse liegt und die y-Achse auch die Symmetrieachse des gespiegelten Graphen ist.“
b) Die Funktionsgleichung des gespiegelten Graphen lautet: $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2$
c) Durch Achsenspiegelung des Graphen von f_2 an der Symmetrieachse $x = -1$ wird der Graph von f_2 auf sich selbst abgebildet.

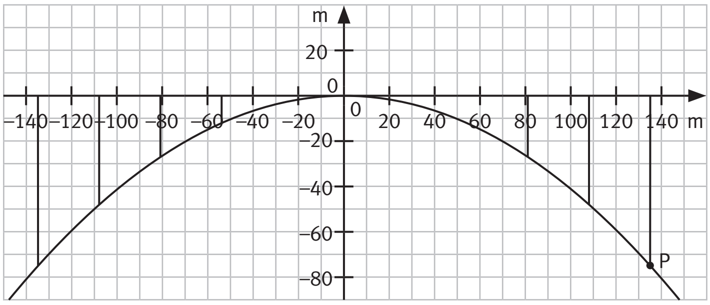
K 1 **4** **a)** Es gilt: $0{,}5 \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = 0{,}5 \cdot (x^2 + x - 6) = 0{,}5x^2 + 0{,}5x - 3 = 0{,}5 \cdot (x + 0{,}5)^2 - 3{,}125$
Es liegt eine quadratische Funktion vor. Der Graph der Funktion ist eine nach oben geöffnete gestauchte Parabel, die symmetrisch ist zur Achse $x = -0{,}5$, mit Scheitelpunkt $S\,(-0{,}5 \mid -3{,}125)$.
b) Die Nullstellen von f lauten: $x_1 = -3$; $x_2 = 2$

K 5 **5** Gemäß der Zeichnung gilt für den Verschiebungsvektor $\vec{v}$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$
Für f gilt: f: $y = 3x^2 - 1$ $\Rightarrow S_f\,(0 \mid -1)$
Für p gilt: p: $y = 3x^2 - 24x + 41 = 3 \cdot (x^2 - 8x + 16 - 16) + 41 = 3 \cdot (x - 4)^2 - 7$ $\Rightarrow S_p\,(4 \mid -7)$
Verschiebung des Graphen von f auf den Graphen von p mithilfe von $\vec{v}$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 - 0 \\ -7 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

K 5 **6** Folgende Gleichungen beschreiben jeweils dieselbe Funktion: 3 und 4; 5 und 8.

K 5 **7** **a)** A und B in f: $y = 0{,}2x^2 - bx + c$ eingesetzt liefert folgende Gleichungen:
I $-1 = 5 - 5b + c$ $\Leftrightarrow 5b - 6 = c$
II $4 = 20 - 10b + c$ $\Leftrightarrow 10b - 16 = c$ $\Rightarrow 10b - 16 = 5b - 6 \Leftrightarrow b = 2;\ c = 4$
$\Rightarrow$ f: $y = 0{,}2x^2 - 2x + 4$
b) f: $y = a(x - x_S)^2 + y_S = a(x + 3)^2 + 4$
$a = -1$, da der Graph von f eine an der x-Achse gespiegelte und verschobene Normalparabel ist.
$\Rightarrow$ f: $y = -1(x + 3)^2 + 4 = -1(x^2 + 6x + 9) + 4$ $\Rightarrow$ f: $y = -x^2 - 6x - 5$
c) Nach der Scheitelpunktsform gilt für die x-Koordinate des Scheitelpunkts S: $x = -\frac{b}{2a}$
Die Gleichung der Symmetrieachse des Graphen von f lautet: $x = 4$ $\Rightarrow x_S = 4 = -\frac{b}{2a}$
$\Rightarrow b = -8a$ $\Rightarrow$ f: $y = ax^2 - 8ax + c$
Einsetzen von A und B in f liefert:
I $-1 = 9a - 24a + c$ $\Leftrightarrow c = 15a - 1$
II $-7 = 4a - 16a + c$ $\Leftrightarrow c = 12a - 7$ $\Rightarrow 15a - 1 = 12a - 7$ $\Rightarrow a = -2;\ b = 16;\ c = -31$
$\Rightarrow$ f: $y = -2x^2 + 16x - 31$

K3 **8** **a)**



b) Der Bogen ist insgesamt 270 m breit und 75 m hoch. In der Skizze ist der Scheitelpunkt der nach unten geöffneten Parabel bei (0|0). Somit ist c = 0. Um a zu erhalten, muss man einen Punkt der Parabel in die Gleichung $y = ax^2$ einsetzen.

P (135|–75) eingesetzt ergibt: $-75 = a \cdot 135^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{243}$ $\quad\Rightarrow p\colon y = -\frac{1}{243}x^2$

c) Die insgesamt elf „Pfeiler" (einer davon mit Höhe h = 0 m) sind in regelmäßigem Abstand auf die 270 m angeordnet. Das heißt, sie haben jeweils den Abstand 27 m voneinander. Die Höhe h eines einzelnen Pfeilers ergibt sich als (Betrag des) Funktionswerts. Da die Parabel symmetrisch ist, genügt es, die Pfeiler auf einer Seite zu betrachten.

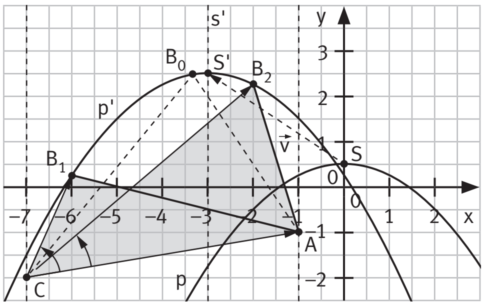
1. Pfeiler: x = 27 $\quad y = -\frac{1}{243} \cdot 27^2 = -3$ $\quad$ h = 3 m
2. Pfeiler: x = 54 $\quad y = -\frac{1}{243} \cdot 54^2 = -12$ $\quad$ h = 12 m
3. Pfeiler: x = 81 $\quad y = -\frac{1}{243} \cdot 81^2 = -27$ $\quad$ h = 27 m
4. Pfeiler: x = 108 $\quad y = -\frac{1}{243} \cdot 108^2 = -48$ $\quad$ h = 48 m
5. Pfeiler: x = 135 $\quad y = -\frac{1}{243} \cdot 135^2 = -75$ $\quad$ h = 75 m

Die Höhe der Haltepfeiler beträgt 3 m, 12 m, 27 m, 48 m und 75 m.

K2 **9** **a)**

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
p (x)	–5,75	–3,5	–1,75	–0,5	0,25	0,5	0,25	–0,5	–1,75

a) und **d)**



b) $p\colon y = -0{,}25x^2 + 0{,}5$

$S(0|0{,}5) \xrightarrow{\vec{v} = \binom{-3}{2}} S'(-3|2{,}5)$

$\Rightarrow p'\colon y = -0{,}25(x+3)^2 + 2{,}5$

$= -0{,}25x^2 - 1{,}5x + 0{,}25$

c) $s'\colon x = -3$

$\mathbb{W}_p = \{y \mid y \le 0{,}5)$

$\mathbb{W}_{p'} = \{y \mid y \le 2{,}5)$

e) Es gilt: $B_n\,(x|-0{,}25x^2 - 1{,}5x + 0{,}25)$ $\quad \overrightarrow{CA} = \binom{6}{1}$ $\quad \overrightarrow{CB_n} = \binom{x+7}{-0{,}25x^2 - 1{,}5x + 2{,}25}$

$A(x) = 0{,}5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & x+7 \\ 1 & -0{,}25x^2 - 1{,}5x + 2{,}25 \end{vmatrix}$ FE

$= 0{,}5 \cdot (6 \cdot (-0{,}25x^2 - 1{,}5x + 2{,}25) - x - 7)$ FE

$= 0{,}5 \cdot (-1{,}5x^2 - 10x + 6{,}5)$ FE

$= (-0{,}75x^2 - 5x + 3{,}25)$ FE

f) $-0{,}75x^2 - 5x + 3{,}25 = -\frac{3}{4}\left[x^2 + \frac{4 \cdot 5}{3}x + \left(\frac{2 \cdot 5}{3}\right)^2 - \left(\frac{2 \cdot 5}{3}\right)^2\right] + 3{,}25$

$= -\frac{3}{4}\left(x + \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{25}{3} + 3{,}25$

$= -\frac{3}{4}\left(x + \frac{10}{3}\right)^2 + 11\frac{7}{12}$

Das Dreieck AB_0C mit $B_0\left(-3\frac{1}{3}\middle|-7\frac{17}{36}\right)$ hat den größten Flächeninhalt:

$A_{max} = A\left(-3\frac{1}{3}\right)$ FE $= 11\frac{7}{12}$ FE $\approx 11{,}583$ FE

K2 **10 a)** Die korrekte Durchführung des Weitsprungs kann in mehrere Phasen unterteilt werden. Während Anlauf und Absprung (1. und 2. Phase) nimmt der Springer eine aufrechte Position ein, sein Körperschwerpunkt in Höhe des Bauches befindet sich damit typischerweise mehr als 1 m über dem Boden. Nach dem Flug (3. Phase) hat der Springer bei der Landung (4. Phase) die Intention, die Beine so weit wie möglich nach Vorne zu bringen und in einer sitzenden Position den Boden zu erreichen, sein Körperschwerpunkt ist dabei sehr nahe am Boden.

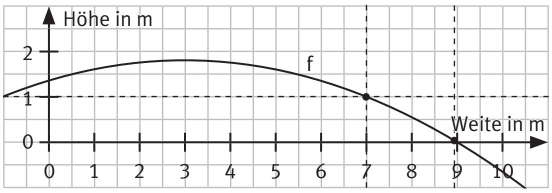
Rechnerisch ergibt sich mit $y = -0{,}05x^2 + 0{,}3x + 1{,}35$:

Absprung bei $x_1 = 0$ und $y_1 = 1{,}35$

Landung bei $x_2 = 8{,}95$ und $y_2 = -0{,}05 \cdot (8{,}95)^2 + 0{,}3 \cdot 8{,}95 + 1{,}35 = 0{,}029875$

Beim Absprung war der Körperschwerpunkt 1,35 m über dem Boden, bei der Landung in 8,95 m Abstand zum Absprungspunkt war der Körperschwerpunkt rund 0,03 m = 3 cm über dem Boden.

b)

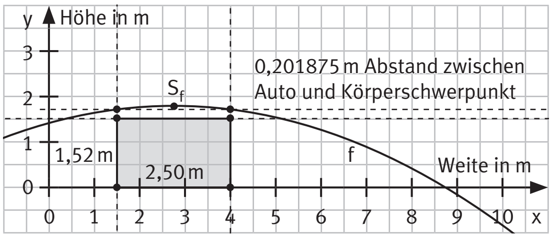


Bei einer horizontalen Entfernung von 7,00 m befand sich der Körperschwerpunkt 1,00 m über dem Boden.

c) Es sind individuelle Lösungsansätze und Antworten möglich mit:
f: $y = -0{,}05x^2 + 0{,}3x + 1{,}35 \Leftrightarrow y = -0{,}05 \cdot (x-3)^2 + 1{,}8$ und $S_f(3\,|\,1{,}8)$

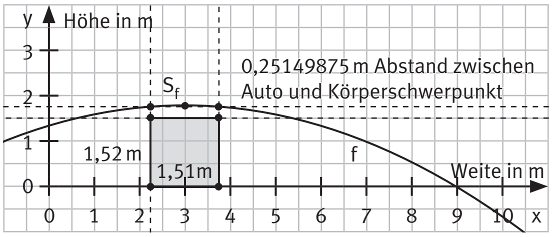
Modellierungsannahmen:

Überspringen des Autos entlang seiner Länge



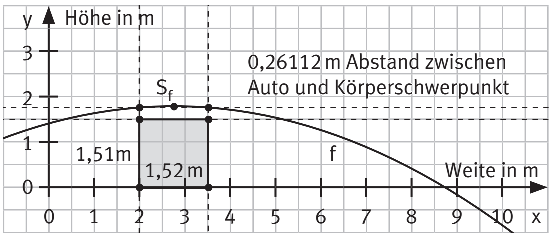
Positioniert man das Auto so, dass es der Länge nach mittig unter S_f steht, mit $1{,}75 < x < 4{,}25$ und $0 < y < 1{,}52$, dann beträgt der Abstand zwischen den oberen Auto-Eckpunkten und der Parabel rund 0,2 m.

Überspringen des Autos entlang seiner Breite



Positioniert man das Auto so, dass es der Breite nach mittig unter S_f steht, mit $2{,}245 < x < 3{,}755$ und $0 < y < 1{,}52$, dann beträgt der Abstand zwischen den oberen Auto-Eckpunkten und der Parabel rund 0,25 m.

Überspringen des gekippten Autos entlang seiner Höhe



Positioniert man das Auto so, dass es der Höhe nach mittig unter S_f steht, mit $2{,}24 < x < 3{,}76$ und $0 < y < 1{,}51$, dann beträgt der Abstand zwischen den oberen Auto-Eckpunkten und der Parabel rund 0,26 m.

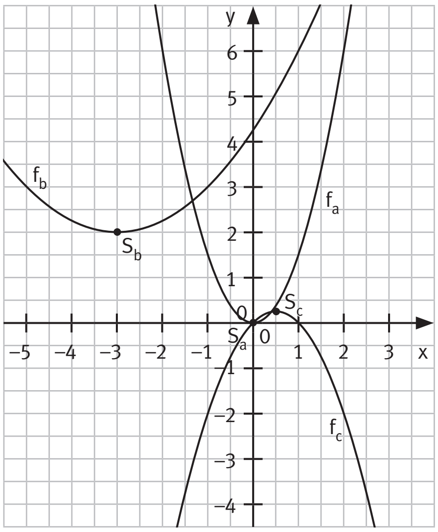
Wenn man sich vorstellt, dass anstelle von Mike Powell ein kleiner Ball der Flugbahn folgt, dann würde das Auto in jedem der drei Fälle vom Ball überflogen. Es gilt hier jedoch, nicht allein die Kurve des Körperschwerpunktes zu beachten, sondern auch, den gesamten Körper – inklusive der Beine – zu berücksichtigen. Daher ist es unrealistisch anzunehmen, dass eine Körperhaltung von Mike Powell möglich ist, bei der sein Körperschwerpunkt auch nur 26 cm über dem Auto liegt und er dabei nicht mit den Knien oder Füßen das Auto berührt. Kurz: Der Smart Fortwo wäre nicht übersprungen worden.

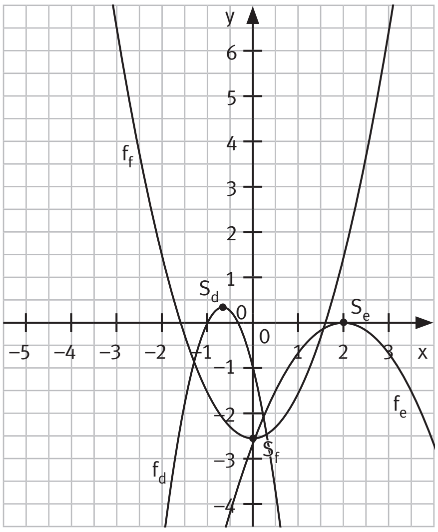
Hinweis: Ein Film von Mike Powells Sprung ist im Internet zu finden.

K5 **1**

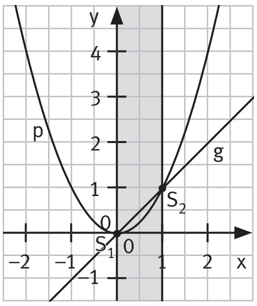
	x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
a)	y	37,5	24	13,5	6	1,5	0	1,5	6	13,5	24	37,5
b)	y	3	2,25	2	2,25	3	4,25	6	8,25	11	14,25	18
c)	y	−30	−20	−12	−6	−2	0	0	−2	−6	−12	−20
d)	y	−56	−33	−16	−5	0	−1	−8	−21	−40	−65	−96
e)	y	$-32\frac{2}{3}$	−24	$-16\frac{2}{3}$	$-10\frac{2}{3}$	−6	$-2\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-2\frac{2}{3}$	−6
f)	y	22,44	13,44	6,44	1,44	−1,56	−2,56	−1,56	1,44	6,44	13,44	22,44

a) Die nach oben geöffnete Parabel ist gestreckt mit S (0|0) und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$.
b) Die nach oben geöffnete Parabel ist gestaucht mit S (−3|2) und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $\mathbb{W}_f = \{y \mid y \geq 2\}$.
c) Die nach unten geöffnete verschobene Normalparabel hat S (0,5|0,25) und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $\mathbb{W}_f = \{y \mid y \leq 0{,}25\}$.
d) Die nach unten geöffnete Parabel ist gestreckt mit S $\left(-\frac{2}{3}\middle|\frac{1}{3}\right)$ und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $\mathbb{W}_f = \left\{y \mid y \leq \frac{1}{3}\right\}$.
e) Die nach unten geöffnete Parabel ist gestaucht mit S (2|0) und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^-$
f) Die nach oben geöffnete verschobene Normalparabel hat S (0|−2,56) und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $\mathbb{W}_f = \{y \mid y \geq -2{,}56\}$.

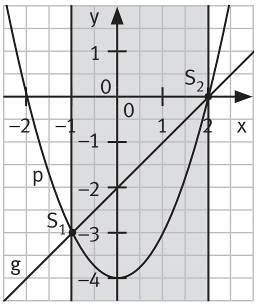




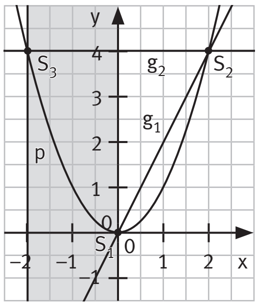
Kx **2**



p: $y = x^2 < $ g: $y = x$
für $x \in \,]0; 1[$



g: $y = x - 2 \geq$ g: $y = x^2 - 4$
für $x \in [-1; 2]$



g_1: $y = 2x < $ p: $y = x^2 < g_2$: $y = 4$
für $x \in \,]-2; 0[$

K6 **3** **a)** Es gilt: p: $y = ax^2 + bx + c$ bzw. p: $y = a(x - x_S)^2 + y_S$
$N(5|0) \in p$ $T(0|1) \in p$ $x_S = 2 \Rightarrow$ p: $y = a(x-2)^2 + y_S$
Einsetzen von $T(0|1)$ und $N(5|0)$ in p: $y = a(x-2)^2 + y_S$ ergibt:
I $1 = a(0-2)^2 + y_S \Leftrightarrow y_S = 1 - 4a$
II $0 = a(5-2)^2 + y_S$ $\Rightarrow 0 = 9a + 1 - 4a \Leftrightarrow -1 = 5a \Leftrightarrow a = -0{,}2;\ y_S = 1{,}8$
Die Funktionsgleichung von p lautet: p: $y = -0{,}2\,(x-2)^2 + 1{,}8$

b) Wenn man nur die Symmetrieachse und die beiden Nullstellen kennt, kann man die Gleichung der quadratischen Funktion nicht eindeutig angeben, da man dabei nicht weiß, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist, wo auf der Symmetrieachse der Scheitelpunkt liegt und wie stark die zugehörige Parabel gestreckt oder gestaucht ist.

K5 **4** **a)** $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{15}{1{,}6} = 9{,}375$ $y_S = c - \frac{b^2}{4a} = -18 - \frac{225}{3{,}2} = -88{,}3125$ $\Rightarrow S(9{,}375|-88{,}3125)$ s: $x = 9{,}375$
b) $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$ $y_S = c - \frac{b^2}{4a} = 0 - \frac{16}{4} = -4$ $\Rightarrow S(2|-4)$ s: $x = 2$
c) f: $y = (x+1)(x-1) + 2 \Leftrightarrow$ f: $y = x^2 + 1$ $\Rightarrow S(0|1)$ s: $x = 0$
d) f: $y = 6x^2 + 0{,}5$ $\Rightarrow S(0|0{,}5)$ s: $x = 0$

K3 **5** **a)** Es gilt: f: $y = ax^2 + bx + c$ bzw. f: $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ mit $a = -1$ (da der Graph von f eine an der x-Achse gespiegelte Normalparabel ist), $x_S = -2$ (da s: $x = -2$ Symmetrieachse ist) und $P(2|-4) \in f$.
$\Rightarrow$ f: $y = -1(x+2)^2 + y_S$
$P(2|-4)$ in f einsetzen ergibt: $-4 = -1(2+2)^2 + y_S \Leftrightarrow y_S = 12$ $\Rightarrow$ f: $y = -1(x+2)^2 + 12$
Für die allgemeine Form gilt: f: $y = -x^2 - 4x + 8$

b) Es gilt: f: $y = ax^2 + bx + c$ bzw. f: $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ mit $a = 1$ (da f eine verschobene Normalparabel beschreibt) und $A(-5|3)$, $B(2|10) \in f$.
$A(-5|3)$ und $B(2|10)$ in f: $y = (x - x_S)^2 + y_S$ einsetzen ergibt:
I $3 = (-5 - x_S)^2 + y_S$
II $10 = (2 - x_S)^2 + y_S$ $\Rightarrow 3 - 10 = (-5 - x_S)^2 - (2 - x_S)^2$
$\Rightarrow -7 = 25 + 10x_S + x_S{}^2 - 4 + 4x_S - x_S{}^2 \Leftrightarrow -2 = x_S;\ y_S = -6;$ $\Rightarrow$ f: $y = (x+2)^2 - 6$
Für die allgemeine Form gilt: f: $y = x^2 + 4x - 2$

c) $P(-4{,}5|-134)$ und $Q(8{,}5|-420)$ in f: $y = ax^2 + bx - 3{,}5$ einsetzen ergibt:
I $-134 = a(-4{,}5)^2 - 4{,}5b - 3{,}5 \Leftrightarrow b = 4{,}5a + 29$
II $-420 = a(8{,}5)^2 + 8{,}5b - 3{,}5$ $\Rightarrow -420 = 72{,}25a + 8{,}5(4{,}5a + 29) - 3{,}5$
$\Leftrightarrow -663 = 110{,}5a \Leftrightarrow a = -6;\ b = 2;$ $\Rightarrow$ f: $y = -6x^2 + 2x - 3{,}5$

d) $P(5|0)$, $Q(0|5) \in$ f: $y = -2{,}5\,(x - x_S)^2 + y_S$
$P(5|0)$ und $Q(0|5)$ in f: $y = -2{,}5\,(x - x_S)^2 + y_S$ einsetzen ergibt:
I $0 = -2{,}5(5 - x_S)^2 + y_S$
II $5 = -2{,}5(0 - x_S)^2 + y_S$ $\Rightarrow 5 = -2{,}5(0 - x_S)^2 + 2{,}5(5 - x_S)^2$
$\Leftrightarrow 5 - 62{,}5 = 25x_S \Leftrightarrow -57{,}5 = -25x_S \Leftrightarrow 2{,}3 = x_S;\ y_S = 18{,}225$
f: $y = -2{,}5(x - 2{,}3)^2 + 18{,}225$
Für die allgemeine Form gilt: f: $y = -2{,}5x^2 + 11{,}5x + 5$

K4 **6** Mögliches Vorgehen: Man liest die Koordinaten x_S und y_S des Scheitelpunkts S sowie eines weiteren Punktes P der Parabel ab und setzt die Koordinaten von P in die Scheitelpunktsform ein:
f: $y = a(x - x_S)^2 + y_S$

a) $S(-2|-3)$ und $P(0|0)$ $0 = a(0+2)^2 - 3$ $\Leftrightarrow a = 0{,}75$ $\Rightarrow$ f: $y = 0{,}75(x+2)^2 - 3$
b) $S(0|2)$ und $P(0{,}5|3)$ $3 = a(0{,}5 - 0)^2 + 2$ $\Leftrightarrow a = 4$ $\Rightarrow$ f: $y = 4x^2 + 2$
c) $S(2|1)$ und $P(3|2)$ $2 = a(3-2)^2 + 1$ $\Leftrightarrow a = 1$ $\Rightarrow$ f: $y = (x-2)^2 + 1$
d) $S(4|0)$ und $P(5|-1)$ $-1 = a(5-4)^2 + 0$ $\Leftrightarrow a = -1$ $\Rightarrow$ f : $y = -(x-4)^2$

K2 **7** **a)** Der Verlauf des Skatingbodens wird durch einen Parabelast beschrieben. Der Scheitelpunkt der Parabel liegt im Ursprung. Um die Funktionsgleichung zu bestimmen, benötigt man einen Punkt, der auf der Parabel liegt. P (500 | 400) in $y = ax^2$ eingesetzt ergibt:
$400 = a \cdot 500^2 \Leftrightarrow a = 0{,}0016 \Rightarrow y = 0{,}0016x^2$

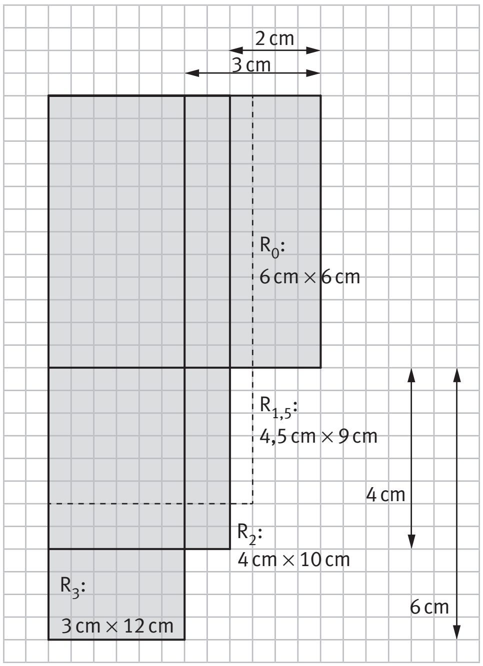
b) Die Träger sind im Abstand von 100 cm befestigt. Der erste Träger hat also die x-Koordinate 100. Die Höhe h der Träger ergibt sich jeweils aus den zugehörigen Funktionswerten:

1. Träger: x = 100	$y = 0{,}0016 \cdot (100)^2 = 16$	h = 16 cm
2. Träger: x = 200	$y = 0{,}0016 \cdot (200)^2 = 64$	h = 64 cm
3. Träger: x = 300	$y = 0{,}0016 \cdot (300)^2 = 144$	h = 144 cm
4. Träger: x = 400	$y = 0{,}0016 \cdot (400)^2 = 256$	h = 256 cm
5. Träger: x = 500	$y = 0{,}0016 \cdot (500)^2 = 400$	h = 400 cm

K5 **8** p: $y = -2\,(x+3)^2 - 4$ $\quad S_p(-3|-4) \xrightarrow{\vec{v} = \binom{-3}{2}} S_p'(-6|-2)$ $\quad$ p': $y = -2\,(x+6)^2 - 2$
$\mathbb{D}_p = \mathbb{R} \quad \mathbb{W}_p = \{y \mid y \le -4\}$ $\qquad \mathbb{D}_{p'} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W}_{p'} = \{y \mid y \le -2\}$

K5 **9** S (5 | 2) und a = 1 $\Rightarrow$ p: $y = (x-5)^2 + 2$
P (7 | 6) und Q (27 | 26) in p einsetzen liefert:
$6 = (7-5)^2 + 2 \quad \Leftrightarrow 6 = 4 + 2$ (wahr) $\quad \Rightarrow P(7|6) \in p$
$26 = (27-5)^2 + 2 \quad \Leftrightarrow 26 = 486$ (falsch) $\quad \Rightarrow Q(27|26) \notin p$

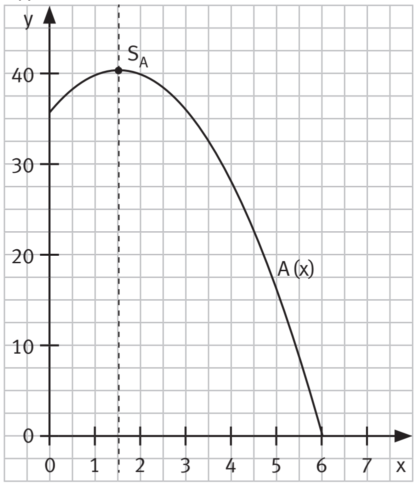
K3 **10** **a)**



b) Da die Seiten des Quadrats nur begrenzt verkürzt werden können, gilt: $0 \le x < 6$.

c) $A(x) = (6-x) \cdot (6+2x)\,\text{cm}^2 = (-2x^2 + 6x + 36)\,\text{cm}^2$

d) $\mathbb{D}_A = \{x \mid 0 \le x < 6\} \qquad \mathbb{W}_A = \{y \mid 0 < y \le 40{,}5\}$
$S_A(1{,}5 \mid 40{,}5)$



e) $-2x^2 + 6x + 36 = -2(x-1{,}5)^2 + 2 \cdot 1{,}5^2 + 36 = -2(x-1{,}5)^2 + 40{,}5$
$\Rightarrow A(x) = -2(x-1{,}5)^2\,\text{cm}^2 + 40{,}5\,\text{cm}^2$
Den maximalem Flächeninhalt von 40,5 cm² bei x = 1,5 hat das Rechteck mit den Seitenlängen 4,5 cm und 9 cm.

K1/6 **11** Die Aussage ist falsch. Die Gleichung y = 2x + 2 beschreibt eine lineare Funktion.

K1/6 **12** Die Aussage ist richtig. Die Symmetrieachse verläuft parallel zur y-Achse durch den Scheitelpunkt der Parabel.

K 1/6 **13** Die Aussage ist falsch. Eine Parabel wird bei einer Spiegelung an der y-Achse nur dann auf sich selbst abgebildet, wenn der Scheitelpunkt auf der y-Achse liegt und damit die die y-Achse Symmetrieachse der Parabel ist.

K 1/6 **14** Die Aussage ist richtig. Mit x_1 und x_2 als Nullstellen gilt: $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

K 1/6 **15** Die Aussage ist richtig. Die Parabel p: $y = ax^2 - 5$ schneidet $x = 0$ in $P(0|-5)$.

K 1/6 **16** Die Aussage ist falsch. Wenn man nur die Koordinaten des Scheitelpunkts kennt, weiß man nicht, ob die Parabel nach unten oder nach oben geöffnet ist und ob sie gestaucht oder gestreckt ist.

K 1/6 **17** Die Aussage ist falsch: Eine solche Parabel hat den Scheitelpunkt $S(3|1)$.

K 1/6 **18** Die Aussage ist falsch. Der Scheitelpunkt der Funktion ist $S(0|0)$, die Nullstelle ist $x = 0$.

K 1/6 **19** Die Aussage ist falsch: Die Definitionsmenge einer quadratischen Funktion ist in der Regel $\mathbb{R}$, während die Wertemenge nur eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, da quadratische Terme der Form $T(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \in \mathbb{R}^+;\ b, c \in \mathbb{R})$ immer einen Extremwert besitzen.

K 1/6 **20** Die Aussage ist richtig.

KX **1** **a)** $\mathbb{L} = \varnothing$ **b)** $\mathbb{L} = \{-8\}$ **c)** $L = \{-11\}$ **d)** $\mathbb{L} = \{x \mid x \geq -3{,}5\}$ **e)** $\mathbb{L} = \{x \mid x < 13\}$

KX **2** $(x + 3)^2 - x^2 = (x - 4)^2 - x \cdot (x + 7)$

$x^2 + 6x + 9 - x^2 = x^2 - 8x + 16 - x^2 - 7x$

$6x + 9 = -8x + 16 - 7x$

$6x + 9 = -15x + 16$

$21x = 7$

$x = \frac{1}{3}$

$\mathbb{L} = \{\varnothing\}$ (da $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$)

KX **3** **a)** Gesucht: $x \in \mathbb{Q}$

$5x - 2(x - 4) = 8(x - 10)$

$\Leftrightarrow 3x + 8 = 8x - 80$

$\Leftrightarrow 88 = 5x$

$\Leftrightarrow x = 17{,}6$

$\mathbb{L} = \{17{,}6\}$

Die gesuchte Zahl ist 17,6.

b) Gesucht: $x \in \mathbb{Q}^+$

$(x - 3) \cdot (x + 5) = x^2 + 10$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = x^2 + 10$

$\Leftrightarrow 2x = 25$

$\Leftrightarrow x = 12{,}5$

$\mathbb{L} = \{12{,}5\}$

Die Seitenlänge des Quadrats beträgt 12,5 cm.

KX **4** Es sei x die Anzahl der Kilometer, die der Vertreter am 1. Tag fährt. Damit fährt er am 2. Tag 2x km und am 3. Tag 2x km + 36 km; insgesamt 441 km.

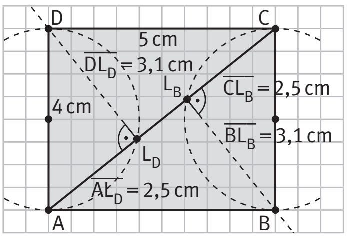
$x + 2x + 2x + 36 = 441$ $x = 81$ $\mathbb{L} = \{81\}$

Der Vertreter fährt am 1. Tag 81 km, am 2. Tag 162 km und am 3. Tag 198 km.

KX **5**

a)	$\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$	$3x + 9 = 10x$	$x = \frac{9}{7} \in \mathbb{D}$	$\mathbb{L} = \left\{\frac{9}{7}\right\}$
b)	$\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0; 6\}$	$6 - x = 2x$	$x = 2 \in \mathbb{D}$	$\mathbb{L} = \{2\}$
c)	$\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$	$6x^2 - 20x + 16 = 6x^2 + 3x - 30$	$x = 2 \notin \mathbb{D}$	$\mathbb{L} = \varnothing$
d)	$\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$	$7 \cdot (x + 7) = 2 \cdot (x - 4)$	$x = -\frac{57}{5} \in \mathbb{D}$	$\mathbb{L} = \{-11{,}4\}$

K5 **6**



Anhand der Abbildung des Rechtecks ABCD mit $\overline{AB} = 5$ cm und $\overline{BC} = 4$ cm ermittelt man die Lotpunkte L_B und L_D von B und D auf die Diagonale AC und die Abstände dieser Punkte zu den Eckpunkten B und D.

Man erhält:

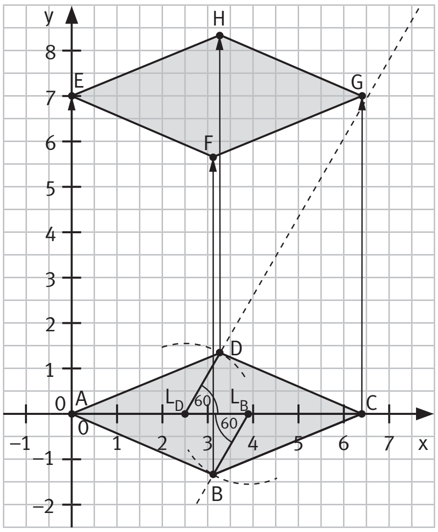
$\overline{AC} \approx 6{,}4$ cm $\overline{AL_D} = \overline{CL_B} \approx 2{,}5$ cm $\overline{BL_B} = \overline{DL_D} \approx 3{,}1$ cm

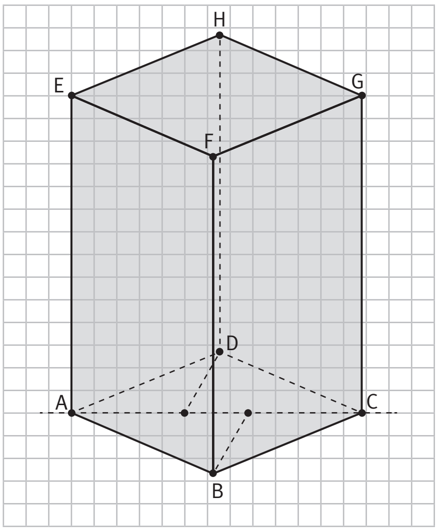
Zur Konstruktion des Schrägbildes zeichnet man [AC] mit $\overline{AC} = 6{,}4$ cm und den Punkten L_D und L_B im Abstand $\overline{AL_D} \approx 2{,}5$ cm bzw. $\overline{CL_B} \approx 2{,}5$ cm auf der Geraden AC.

Die Halbgeraden b und d, auf denen B bzw. D liegen sollen, erhält man, indem man in L_B bzw. L_D einen Winkel von 60° einzeichnet.

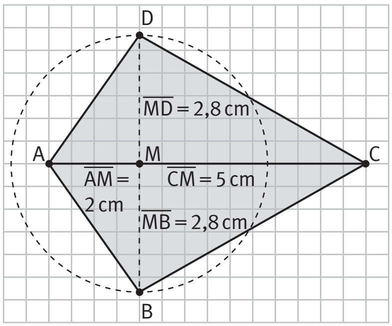
Die Strecken $\overline{BL_B}$ und $\overline{DL_D}$ betragen im Schrägbild $0{,}5 \cdot 3{,}1$ cm $\approx 1{,}6$ cm. Man erhält B und D als Schnittpunkte der Halbgeraden b und d mit dem Kreis um L_B bzw. L_D mit $r = 1{,}6$ cm.

Die Punkte E, F, G und H erhält man, indem man senkrecht zur Geraden AC jeweils 7 cm abträgt.





K4 **7**



Die Strecken [BM] und [DM] haben im Schrägbild die Länge $\overline{BM} = \overline{DM} \approx 1{,}4$ cm, in Wirklichkeit also 2,8 cm. Ebenso gilt:

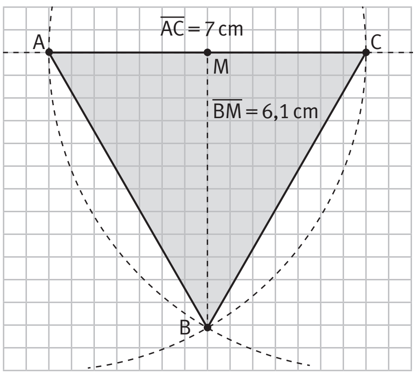
$\overline{AM} = 2$ cm, $\overline{MC} = 5$ cm und $\overline{AC} = 7$ cm.

Da die Geraden AC und BD in Wirklichkeit senkrecht aufeinander stehen, ist das Viereck ABCD ein Drachenviereck mit $\overline{AC} = 7$ cm, $\overline{AB} = \overline{AD} = 2{,}8$ cm und $\overline{BD} = 5{,}6$ cm.

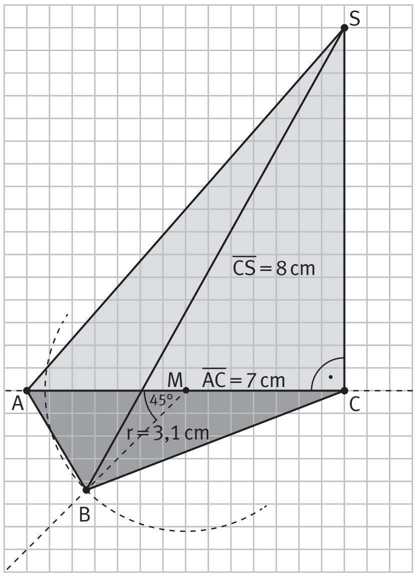
Der Flächeninhalt des Drachenvierecks beträgt

$A = 0{,}5 \cdot 7\,\text{cm} \cdot 5{,}6\,\text{cm} \approx 19{,}6\,\text{cm}^2$.

K4 **8**



Die Länge der Höhe [BM] beträgt im gleichseitigen Dreieck 6,1 cm und im Schrägbild $0{,}5 \cdot 6{,}1\,\text{cm} \approx 3{,}1$ cm.



Zuerst wird die Strecke [AC] mit $\overline{AC} = 7$ cm gezeichnet, dazu der Mittelpunkt M der Strecke [AC].

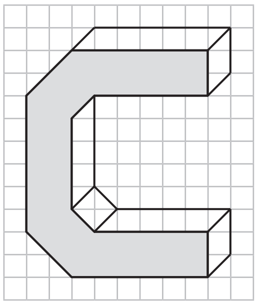
Die Halbgerade b erhält man, indem man in M an AC 45° anträgt.

B ist der Schnittpunkt der Halbgeraden b mit dem Kreis um M mit Radius r = 3,1 cm.

Die Höhe [CS] mit $\overline{CS} = 8$ cm wird senkrecht zu AC in C eingezeichnet.

K6 **9** Tim hat sein Bild so erstellt, als könne er alle Flächen, die auf der Vorderfläche senkrecht stehen, gleichzeitig sehen. Dies ist nicht möglich.
Tim muss sich entscheiden, wo der Standort des Betrachters ist und welche Flächen aufgrund des Betrachterstandorts sichtbar sind: die nach links oder die nach rechts zeigenden Flächen und die nach oben oder die nach unten zeigenden Flächen.

Lösungsmöglichkeit:

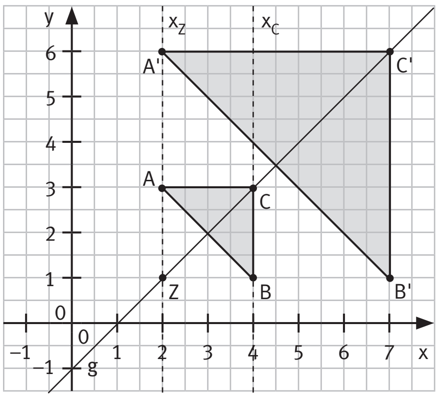


KX **10** $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ LE $= \sqrt{(8-3)^2 + (7-2)^2}$ LE $= \sqrt{50}$ LE $= 5\sqrt{2}$ LE $\neq 5\sqrt{3}$ LE
Evi hat nicht Recht.

KX **11** $\overline{OA} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2}$ LE $= \sqrt{20}$ LE $\quad \overline{OB} = \sqrt{3^2 + (-1)^2}$ LE $= \sqrt{10}$ LE $\quad \overline{OC} = \sqrt{2^2 + 3^2}$ LE $= \sqrt{13}$ LE
C (2 | 3) hat vom Ursprung die Entfernung $\sqrt{13}$ LE.

KX **12** $\overline{AB} = \sqrt{2^2 + (-5)^2}$ LE $= \sqrt{29}$ LE $\quad \overline{BC} = \sqrt{5^2 + 2^2}$ LE $= \sqrt{29}$ LE $\quad \overline{AC} = \sqrt{7^2 + (-3)^2}$ LE $= \sqrt{58}$ LE
$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 58$ FE $= \overline{AC}^2$
Das Dreieck ABC ist bei B rechtwinklig.

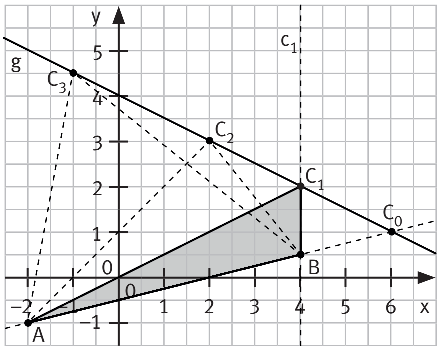
KX **13** **a)** B' (7 | 1); C' (7 | 6)



b) $k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

c) Die Dreiecke sind rechtwinklig bei C bzw. bei C' mit a = b = 2 cm bzw. a' = b' = 5 cm.
$A_{ABC} = 0{,}5 \cdot 2\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} = 2\,\text{cm}^2$
$A_{A'B'C'} = 0{,}5 \cdot 5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 12{,}5\,\text{cm}^2$

KX **14** **a)**



b) Der Schnittpunkt von g und AB: $y = 0{,}25x - 0{,}5$ ist $C_0\,(6\,|\,1)$. Für x muss gelten: $x < 6$.

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 1{,}5 & 3 \end{vmatrix}$ FE $= 0{,}5 \cdot (18 - 9)$ FE $= 4{,}5$ FE

d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ -0{,}5x + 5 \end{pmatrix}$

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & x + 2 \\ 1{,}5 & -0{,}5x + 5 \end{vmatrix}$ FE

$= 0{,}5 \cdot (-3x + 30 - 1{,}5x - 3)$ FE

$= (-2{,}25x + 13{,}5)$ FE

$A(4) = (-9 + 13{,}5)$ FE $= 4{,}5$ FE

e) $A = 9$ FE $\Leftrightarrow -2{,}25x + 13{,}5 = 9$ $\Leftrightarrow x = 2$

$A = 15{,}75$ FE $\Leftrightarrow -2{,}25x + 13{,}5 = 15{,}75$ $\Leftrightarrow x = -1$

Für $x = 2$ erhält man den Flächeninhalt 9 FE, für $x = -1$ den Flächeninhalt 15,75 FE.

KX **15** **a)** I $y = -\frac{3}{2}x + 2{,}5$ II $y = -\frac{1}{3}x - 1$

$-\frac{3}{2}x + 2{,}5 = -\frac{1}{3}x - 1$ $\Leftrightarrow -9x + 15 = -2x - 6 \Leftrightarrow x = 3$ $\mathbb{L} = \{(3\,|\,-2)\}$

b) I $y = \frac{1}{3}x + 0{,}5$ II $y = \frac{1}{3}x - 1$

$\frac{1}{3}x + 0{,}5 = \frac{1}{3}x - 1$ $\Leftrightarrow 0{,}5 = -1$ (falsch) $\mathbb{L} = \varnothing$

KX **16** Die Behauptung ist falsch. I in II eingesetzt ergibt:

$6x + 3(2x + 1) + 6 = 0$ $\Leftrightarrow 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -0{,}75$

Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung: $\mathbb{L} = \{(-0{,}75\,|\,-0{,}5)\}$

KX **17** $x = 3$ eingesetzt:

I $12 + 8y = 20$ $\Leftrightarrow y = 1$

II $12(3 + y) = 48$ $\Leftrightarrow y = 1$ $\mathbb{L} = \{(3\,|\,1)\}$

KX **18** Es sei x das Alter der Mutter, y das Alter der Tochter (jeweils in Jahren).

I $x = 7y$

II $x + 8 = 3(y + 8)$

I in II eingesetzt:

$7y + 8 = 3y + 24$ $\Leftrightarrow y = 4$ $\mathbb{L} = \{(28\,|\,4)\}$

Im Moment ist die Mutter 28 Jahre alt und die Tochter 4 Jahre alt; in 8 Jahren ist die Mutter 36 Jahre alt und die Tochter 12 Jahre alt (die Tochter scheint außerdem mathematisch äußerst begabt zu sein, da sie mit 4 Jahren bereits lineare Gleichungssysteme aufstellen und lösen kann).