# 2 Quadratische Gleichungen

## Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K6

- **Der arabische Mathematiker Al-Chwarizmi hat schon vor über 1000 Jahren ein Verfahren beschrieben, wie man quadratische Gleichungen lösen kann. Das Blatt zeigt das Beispiel für die Gleichung $x^2 + 8x = 48$. Beschreibe sein Vorgehen.**

  Der Mathematiker veranschaulicht die beiden Bestandteile der Gleichung, indem er $x^2$ als ein Quadrat mit der Seitenlänge $x$ cm darstellt und $8x$ als ein Rechteck mit den Seitenlängen 8 cm und $x$ cm. Er markiert nun acht gleich große Teile des Rechtecks und ordnet jeweils zwei davon an den Seiten des Quadrats an. Die entstandene Figur kann als Quadrat gesehen werden, bei dem vier kleinere Quadrate mit der Seitenlänge 2 cm fehlen. Nun stellt er eine Gleichung auf, indem er zur Fläche der bereits vorhandenen Teile die der fehlenden Quadrate addiert: $(48 + 4 \cdot 4)\,\text{cm}^2 = 64\,\text{cm}^2$. Weiterhin weiß er, dass eine Seitenlänge des großen Quadrats $(2 + x + 2)$ cm lang ist. Somit gilt:
  $(2 + x + 2)^2\,\text{cm}^2 = 64\,\text{cm}^2 \Leftrightarrow (2 + x + 2)\,\text{cm} = 8\,\text{cm} \Leftrightarrow x\,\text{cm} = 4\,\text{cm} \Leftrightarrow x = 4$

K5

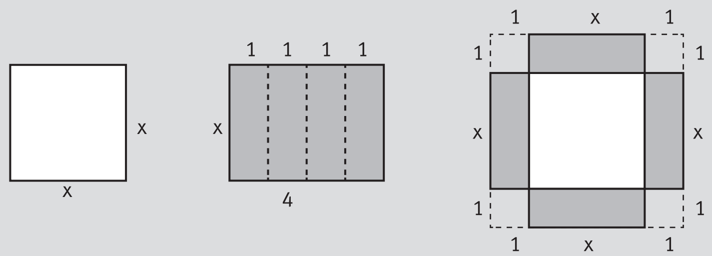
- **Löse ebenso die Gleichungen: $x^2 + 8x = 84$ und $x^2 + 4x = 21$.**

  $x^2 + 8x = 84$ (Abbildung wie im Schulbuch):

  $$\begin{aligned}(84 + 4 \cdot 4)\,\text{cm}^2 &= 100\,\text{cm}^2\\ (2 + x + 2)\,\text{cm}^2 &= 100\,\text{cm}^2\\ x\,\text{cm} &= 6\,\text{cm}\\ x &= 6\end{aligned}$$

  $x^2 + 4x = 21$:

  $$\begin{aligned}(21 + 4 \cdot 1)\,\text{cm}^2 &= 25\,\text{cm}^2\\ (1 + x + 1)\,\text{cm}^2 &= 25\text{cm}^2\\ x\,\text{cm} &= 3\,\text{cm}\\ x &= 3\end{aligned}$$




K6

- **Erkläre, warum Al-Chwarizmi auf diese Weise stets nur eine Lösung einer quadratischen Gleichung findet.**

  Al-Chwarizmis Vorgehen erfasst nur Strecken und Flächen, die naturgemäß keine negativen Werte haben. Damit kann er negative Werte beim Wurzelziehen nicht berücksichtigen, also auch nicht (in seinem Beispiel) die Möglichkeit von $2 + x + 2 = \pm 8$ mit $x_1 = 4$ und $x_2 = -12$.

## Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.
Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

## Verständnis

K6 ■ Die Gleichung ist nicht quadratisch, da das quadratische Element fehlt: Die Gleichung lässt sich auf die allgemeine Form $x + 81 = 0$ bringen bzw. auf $ax^2 + x + 81 = 0$ mit $a = 0$. Der Fall $a = 0$ wird für quadratische Gleichungen explizit ausgeschlossen.

K1 ■ Die Gleichung $x^2 + 144 = 0$ entspricht der Gleichung $x^2 = d$ mit $d = -144$. Hierbei ist der Radikand negativ, die Gleichung hat keine Lösung. Man kann die Lösung der Gleichung $x^2 = -144$ als Schnitt einer (nach oben geöffneten) Normalparabel mit der Geraden $y = -144$ verstehen. Die Schnittmenge – und damit die Lösungsmenge der Gleichung – ist leer.

K5 **1** Die Gleichung wird in die Form $x^2 = d$ gebracht, anschließend werden anhand von d die Anzahl der Lösungen und die Lösungen ermittelt.

**a)** $d > 0$ 2 Lösungen $\mathbb{L} = \{-13; 13\}$ **b)** $d < 0$ keine Lösung $\mathbb{L} = \emptyset$
**c)** $d > 0$ 2 Lösungen $\mathbb{L} = \{-15; 15\}$ **d)** $d > 0$ 2 Lösungen $\mathbb{L} = \{-16; 16\}$
**e)** $d > 0$ 2 Lösungen $\mathbb{L} = \{-1{,}7; 1{,}7\}$ **f)** $d > 0$ 2 Lösungen $\mathbb{L} = \left\{-\frac{6}{11}; \frac{6}{11}\right\}$
**g)** $d < 0$ keine Lösung $\mathbb{L} = \emptyset$ **h)** $d < 0$ keine Lösung $\mathbb{L} = \emptyset$

K4 **2** Die Gleichung wird in die Form $x^2 = d$ gebracht und die Anzahl der Lösungen ermittelt. Zur zeichnerischen Bestimmung der Lösungsmenge werden die Nullstellen der Funktion f: $y = x^2 - d$ abgelesen.

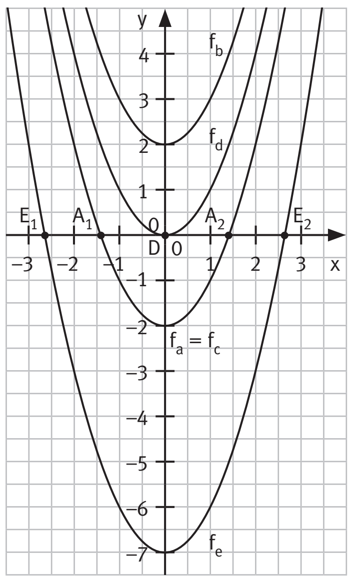
**a)** f: $y = x^2 - 2$ hat zwei Nullstellen:
$\mathbb{L} = \{-1{,}4; 1{,}4\}$

**b)** f: $y = x^2 + 2$ hat keine Nullstelle:
$\mathbb{L} = \emptyset$

**c)** f: $y = x^2 - 2$ hat zwei Nullstellen:
$\mathbb{L} = \{-1{,}4; 1{,}4\}$

**d)** f: $y = x^2$ hat eine Nullstelle:
$\mathbb{L} = \{0\}$

**e)** f: $y = x^2 - 7$ hat zwei Nullstellen:
$\mathbb{L} = \{-2{,}6; 2{,}6\}$




K6 **3** **a)** Der Fehler ist in der 3. Zeile passiert, beim Lösen der quadratischen Gleichung: Die Gleichung $x^2 = 16$ hat die Lösungen $x_1 = -4$ und $x_2 = 4$: $\mathbb{L} = \{-4; 4\}$.

**b)** Der Fehler ist in der 1. Zeile passiert bei der Umformung mit +3. Es ist mit $x^2 - 6$ umzuformen, man erhält $-3 = x^2$. Die Gleichung $x^2 = -3$ hat keine Lösung, da der Radikand negativ ist: $\mathbb{L} = \emptyset$.

K4 **4**
**a)** $x^2 = 16$ $\mathbb{L} = \{-4; 4\}$ **b)** $y^2 = 27$ $\mathbb{L} = \{-\sqrt{27}; \sqrt{27}\}$ **c)** $x^2 = 4$ $\mathbb{L} = \{-2; 2\}$
**d)** $t^2 = \frac{7}{22}$ $\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{\frac{7}{22}}; \sqrt{\frac{7}{22}}\right\}$ **e)** $x^2 = 0$ $\mathbb{L} = \{0\}$ **f)** $a^2 = -\frac{3}{2{,}25}$ $\mathbb{L} = \emptyset$
**g)** $t^2 = \frac{8}{3}$ $\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{\frac{8}{3}}; \sqrt{\frac{8}{3}}\right\}$ **h)** $x^2 = 2$ $\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ **i)** $z = 0$ oder $z^2 = -8$ $\mathbb{L} = \{0\}$
**j)** $x^2 = 1$ $\mathbb{L} = \{-1; 1\}$ **k)** $x^2 - x + 17 = x^2 - x - 25 \Leftrightarrow 17 = -25$ $\mathbb{L} = \emptyset$

K5 **5**
**a)** $\mathbb{L} = \{-1{,}70; 1{,}70\}$ **b)** $\mathbb{L} = \{-2{,}73; 2{,}73\}$ **c)** $\mathbb{L} = \{-0{,}60; 0{,}60\}$ **d)** $\mathbb{L} = \{-0{,}90; 0{,}90\}$
**e)** $\mathbb{L} = \{-2{,}40; 2{,}40\}$ **f)** $\mathbb{L} = \{-12; 12\}$ **g)** $\mathbb{L} = \{-2{,}52; 2{,}52\}$ **h)** $\mathbb{L} = \{-1{,}23; 1{,}23\}$

K5 **6** **a)** $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-9; -2\}$
$(7 - x) \cdot (x + 9) = (x - 3) \cdot (4 + 2x)$
$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 63 = 2x^2 - 2x - 12$
$\Leftrightarrow x^2 = 25$
$\mathbb{L} = \{-5; 5\}$

**b)** $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-0{,}5; 3\}$
$(3 + x) \cdot (x - 3) = (-2x - 1) \cdot (1 - 2x)$
$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 4x^2 - 1$
$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{8}{3}$
$\mathbb{L} = \varnothing$

**c)** $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$
$(12 - x) \cdot (2 + x) = (x + 6) \cdot (2x - 2)$
$\Leftrightarrow -x^2 + 10x + 24 = 2x^2 + 10x - 12$
$\Leftrightarrow x^2 = 12$
$\mathbb{L} = \{-\sqrt{12}; \sqrt{12}\}$

**d)** $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-6{,}5; 1{,}5\}$
$(1{,}5x + 6) \cdot (2x - 3) = (x + 6{,}5) \cdot (x + 1)$
$\Leftrightarrow 3x^2 + 7{,}5x - 18 = x^2 + 7{,}5x + 6{,}5$
$\Leftrightarrow x^2 = 12{,}25$
$\mathbb{L} = \{-3{,}5; 3{,}5\}$

K3 **7** Es sind weitere Gleichungen möglich.
**a)** $x^2 = 9$ **b)** $x^2 = 0{,}5$ **c)** $x^2 = 18$ **d)** $x^2 = 0$ **e)** $x^2 = -10$ **f)** $x^2 = 0{,}25$

K1 **8** **a)** Mögliche Zahlen für a und entsprechende Lösungen nach der Umformung der Gleichung:

| | 1 $x^2 = a$ | 2 $x^2 = 2a$ | 3 $x^2 = -0{,}5a$ | 4 $x^2 = 8a$ | 5 $x^2 = a$ | 6 $ax^2 = a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| zwei Lösungen (Rad. positiv) | $a = 4$<br>$(a > 0)$<br>$\mathbb{L} = \{-2; 2\}$ | $a = 2$<br>$(a > 0)$<br>$\mathbb{L} = \{-2; 2\}$ | $a = -0{,}5$<br>$(a < 0)$<br>$\mathbb{L} = \{-0{,}5; 0{,}5\}$ | $a = 0{,}5$<br>$(a > 0)$<br>$\mathbb{L} = \{-2; 2\}$ | $a = 4$<br>$(a > 0)$<br>$\mathbb{L} = \{-2; 2\}$ | $a = 1$<br>$\mathbb{L} = \{-1; 1\}$ |
| eine Lösung (Rad. null) | $a = 0$<br>$\mathbb{L} = \{0\}$ | $a = 0$<br>$\mathbb{L} = \{0\}$ | $a = 0$<br>$\mathbb{L} = \{0\}$ | $a = 0$<br>$\mathbb{L} = \{0\}$ | $a = 0$<br>$\mathbb{L} = \{0\}$ | – |
| keine Lösung (Rad. negativ) | $a = -4$<br>$(a < 0)$<br>$\mathbb{L} = \varnothing$ | $a = -2$<br>$(a < 0)$<br>$\mathbb{L} = \varnothing$ | $a = 4$<br>$(a > 0)$<br>$\mathbb{L} = \varnothing$ | $a = -0{,}5$<br>$(a < 0)$<br>$\mathbb{L} = \varnothing$ | $a = -4$<br>$(a < 0)$<br>$\mathbb{L} = \varnothing$ | – |

**b)** Die umgeformte Gleichung $x^2 = r$ hat bei positivem Radikand r zwei Lösungen: $x_1 = -\sqrt{r}$ und $x_2 = \sqrt{r}$. Bei negativem r hat die Gleichung keine Lösung. Ist r gleich null, hat die Gleichung eine Lösung: $x = 0$.

## Verständnis

K 1 ■ Die Gleichung der Form $x^2 + bx = 0$ kann in die Gleichung $x \cdot (x + b) = 0$ umgeformt werden, aus der sich die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -b$ direkt ablesen lassen.

K 1 ■ Zur Ermittlung der Lösungen von $(x + a)^2 = d$ muss auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel gezogen werden.
Für $d < 0$ gibt es keine Zahl, die mit sich selbst multipliziert d ergibt; die Gleichung ist nicht lösbar.
Für $d = 0$ erhält man $x + a = 0$ und damit als einzige Lösung $x = -a$.
Für $d > 0$ erhält man $x + a = \pm\sqrt{d}$ und damit zwei Lösungen: $x_1 = \sqrt{d} - a$ und $x_2 = -\sqrt{d} - a$.

K 5 **1** Möglich sind keine, eine oder zwei Lösungen. Ob die Vermutung richtig war, zeigt die Berechnung.

**a)** $x^2 - 1{,}5x - 1 = 0$
$x^2 - 1{,}5x + 0{,}75^2 - 0{,}75^2 - 1 = 0$
$(x - 0{,}75)^2 = 1{,}5625$
$x - 0{,}75 = \pm\sqrt{1{,}5625}$
$x = 0{,}75 \pm 1{,}25$
$x_1 = -0{,}5$; $x_2 = 2$
$\mathbb{L} = \{-0{,}5; 2\}$; zwei Lösungen

**b)** $x^2 + 2x - 3 = 0$
$x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = 0$
$(x + 1)^2 = 4$
$x + 1 = \pm 2$
$x = -1 \pm 2$
$x_1 = -3$; $x_2 = 1$
$\mathbb{L} = \{-3; 1\}$; zwei Lösungen

**c)** $8 \cdot (x^2 - 1) - 36 \cdot (2x - 5) = 18$
$(x^2 - 1) - 4{,}5 \cdot (2x - 5) = 2{,}25$
$x^2 - 9x = -19{,}25$
$x^2 - 9x + 4{,}5^2 = -19{,}25 + 4{,}5^2$
$(x - 4{,}5)^2 = 1$
$x - 4{,}5 = \pm 1$
$x = 4{,}5 \pm 1$
$x_1 = 3{,}5$; $x_2 = 5{,}5$
$\mathbb{L} = \{3{,}5; 5{,}5\}$; zwei Lösungen

**d)** $2x^2 - 1{,}5x = -1{,}5$
$x^2 - 0{,}75x = -0{,}75$
$x^2 - 0{,}75x + 0{,}375^2 = -0{,}75 + 0{,}375^2$
$(x - 0{,}375)^2 = -0{,}609375$
$\mathbb{L} = \varnothing$; keine Lösung

**e)** $(3 - x) \cdot (3 + x) = 0$
$x_1 = -3$; $x_2 = 3$
$\mathbb{L} = \{-3; 3\}$; zwei Lösungen

**f)** $4x^2 + 32x = 4x - 49$
$x^2 + 7x + 12{,}25 = 0$
$(x + 3{,}5)^2 = 0$
$x = -3{,}5$
$\mathbb{L} = \{-3{,}5\}$; eine Lösung

K 5 **2**
1 $(x + 2)^2 = 1$
$\mathbb{L} = \{-3; -1\}$; S

2 $(x + 1)^2 = 16$
$\mathbb{L} = \{-5; 3\}$; A

3 $(x + 1{,}5)^2 = 0$
$\mathbb{L} = \{-1{,}5\}$; T

4 $(x - 2)^2 = -1$
$\mathbb{L} = \varnothing$; Z

5 $(x - 2{,}5)^2 = 2{,}25$
$\mathbb{L} = \{1; 4\}$; D

6 $(x + 1{,}5)^2 = 0{,}25$
$\mathbb{L} = \{-2; -1\}$; E

7 $(x + 0{,}175)^2 = 0{,}330625$
$\mathbb{L} = \{-0{,}75; 0{,}4\}$; S

8 $(x - 3)^2 = 0$
$\mathbb{L} = \{3\}$; V

9 $(x + 1{,}25)^2 = 5{,}0625$
$\mathbb{L} = \{-3{,}5; 1\}$; I

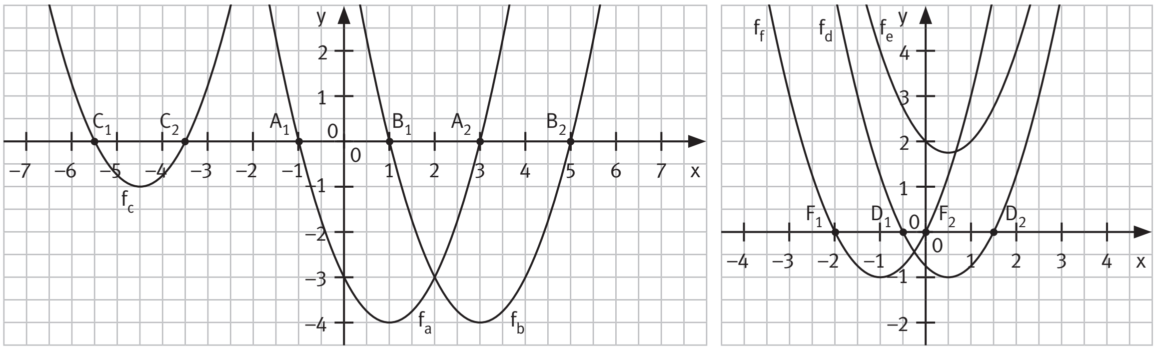
10 $x \cdot (x - 1) = 0$
$\mathbb{L} = \{0; 1\}$; E

11 $(x + 1{,}25)^2 = -1{,}4375$
$\mathbb{L} = \varnothing$; T

12 $(x + 4)^2 = 4$
$\mathbb{L} = \{-6; -2\}$; A

Lösungswort: SATZ DES VIETA

K4 **3** Die quadratischen Gleichungen werden in die Normalform $x^2 + px + q = 0$ gebracht und die Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion ermittelt. (Alternative: Man bringt die Gleichung in die Form $x^2 = mx + t$ und ermittelt die Schnittpunkte der Parabel p: $y = x^2$ mit der Geraden g: $y = mx + t$.)



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **a)** | $x^2 - 2x - 3 = 0$ | f: $y = x^2 - 2x - 3$ | Nullstellen $x_1 = -1$; $x_2 = 3$ | $\mathbb{L} = \{-1; 3\}$ |
| **b)** | $x^2 - 6x + 5 = 0$ | f: $y = x^2 - 6x + 5$ | Nullstellen $x_1 = 1$; $x_2 = 5$ | $\mathbb{L} = \{1; 5\}$ |
| **c)** | $x^2 + 9x + 19{,}25 = 0$ | f: $y = x^2 + 9x + 19{,}25$ | Nullstellen $x_1 = -5{,}5$; $x_2 = -3{,}5$ | $\mathbb{L} = \{-5{,}5; -3{,}5\}$ |
| **d)** | $x^2 - x - 0{,}75 = 0$ | f: $y = x^2 - x - 0{,}75$ | Nullstellen $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = 1{,}5$ | $\mathbb{L} = \{-0{,}5; 1{,}5\}$ |
| **e)** | $x^2 - x + 2 = 0$ | f: $y = x^2 - x + 2$ | keine Nullstellen | $\mathbb{L} = \emptyset$ |
| **f)** | $x^2 + 2x = 0$ | f: $y = x^2 + 2x$ | Nullstellen $x_1 = -2$; $x_2 = 0$ | $\mathbb{L} = \{-2; 0\}$ |

K5 **4** Die quadratische Gleichung wird in die Normalform gebracht, anschließend werden durch quadratisches Ergänzen die Lösungen ermittelt.

**a)** $x^2 + 6x + 3 = 0$
$(x + 3)^2 = 6$
$x + 3 = \pm\sqrt{6}$
$x_1 \approx -5{,}45$; $x_2 \approx -0{,}55$ $\quad \mathbb{L} = \{-5{,}45; -0{,}55\}$

**b)** $2x^2 - 8x + 8 + x^2 = x^2 + 3x$
$x^2 - 5{,}5x + 4 = 0$
$(x - 2{,}75)^2 = 3{,}5625$
$x - 2{,}75 = \pm\sqrt{3{,}5625}$
$x_1 \approx 0{,}86$; $x_2 \approx 4{,}64$ $\quad \mathbb{L} = \{0{,}86; 4{,}64\}$

**c)** $x^2 - 3x - 13 = 0$
$(x - 1{,}5)^2 = 15{,}25$
$x - 1{,}5 = \pm\sqrt{15{,}25}$
$x_1 \approx -2{,}41$; $x_2 \approx 5{,}41$ $\quad \mathbb{L} = \{-2{,}41; 5{,}41\}$

**d)** $4x^2 - 9 - x^2 + 4x = 4x^2 - 16x + 16$
$x^2 - 20x + 25 = 0$
$(x - 10)^2 = 75$
$x - 10 = \pm\sqrt{75}$
$x_1 \approx 1{,}34$; $x_2 \approx 18{,}66$ $\quad \mathbb{L} = \{1{,}34; 18{,}66\}$

**e)** $x^2 + 10x + 21 = x^2 - 2x - 3$
$x = -2$ $\quad \mathbb{L} = \{-2\}$

**f)** $x^2 + x - 6 = x^2 - x - 6$
$x = 0$ $\quad \mathbb{L} = \{0\}$

K5 **5** **a)** $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4; -2\}$
$(x + 1) \cdot (x + 4) = (x + 2) \cdot (x + 3)$
$x^2 + 5x + 4 = x^2 + 5x + 6$
$4 = 6$ $\quad \mathbb{L} = \emptyset$

**b)** $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
$4x + 4 + x \cdot (x + 2) = 0$
$x^2 + 6x + 4 = 0$
$(x + 3)^2 = 5$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{5} - 3$ $\quad \mathbb{L} = \{-5{,}24; -0{,}76\}$

**c)** $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-0{,}8; -0{,}25\}$
$(3x + 1) \cdot (2x + 0{,}5) = (4 + 5x) \cdot (x + 1)$
$6x^2 + 3{,}5x + 0{,}5 = 5x^2 + 9x + 4$
$x^2 - 5{,}5x = 3{,}5$
$(x - 2{,}75)^2 = 11{,}0625$
$x_{1/2} = 2{,}75 \pm \sqrt{11{,}0625}$ $\quad \mathbb{L} = \{-0{,}58; 6{,}08\}$

K3 **6** **a)** $x \in \mathbb{N}$
$x^2 - 3x = 130$
$(x - 1{,}5)^2 = 132{,}25$
$x - 1{,}5 = \pm 11{,}5$
$x_1 = -10 \notin \mathbb{N}$; $x_2 = 13$
$\mathbb{L} = \{13\}$
Die Zahl ist 13.

**b)** $x \in \mathbb{R}$
$x - \frac{1}{x} = 2{,}1$
$x^2 - 2{,}1x = 1$
$(x - 1{,}05)^2 = 2{,}1025$
$x - 1{,}05 = \pm 1{,}45$
$x_1 = -0{,}4$; $x_2 = 2{,}5$
$\mathbb{L} = \{-0{,}4; 2{,}5\}$
Die Zahl ist –0,4 oder 2,5.

**c)** $x \in \mathbb{R}$
$5 \cdot (x - 3) = x \cdot (x + 13)$
$x^2 + 8x = -15$
$(x + 4)^2 = 1$
$x + 4 = \pm 1$
$x_1 = -5$; $x_2 = -3$
$\mathbb{L} = \{-5; -3\}$
Die Zahl ist –5 oder –3.

K5 **7**

| | Gleichung (umgeformt) | keine Lösung | eine Lösung | zwei Lösungen |
|---|---|---|---|---|
| **a)** | $(x - 2)^2 = 4 - a$<br>$x - 2 = \pm\sqrt{4 - a}$ | $a > 4$ | $a = 4$ | $a < 4$ |
| **b)** | $(x - a)^2 = 0$<br>$x - a = 0$ | – | jedes $a \in \mathbb{R}$ | – |
| **c)** | $(x - 0{,}5a)^2 = 0{,}25a^2 - 3$<br>$x - 0{,}5a = \pm 0{,}5\sqrt{a^2 - 12}$ | $-\sqrt{12} < a < \sqrt{12}$ | $a = \sqrt{12}$ | $a < -\sqrt{12} \vee a > \sqrt{12}$ |

## Verständnis

K6 ■ ① $a = -2;\ b = 3;\ c = -4$ ② $a = 1;\ b = -7{,}5;\ c = 2$ ③ $a = 3;\ b = 0;\ c = 4$

K6 ■ Lösungsformel für die allgemeine Form der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$:

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Die Normalform $x^2 + px + q = 0$ ist ein Spezialfall der allgemeinen Form mit $a = 1$, $b = p$ und $c = q$.
Aus der Lösungsformel für die allgemeine Form ergibt sich somit:

$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ und $x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

K5 **1**

**a)** $x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} = \frac{6 \pm 2}{4}$ $x_1 = 1;\ x_2 = 2$ $\mathbb{L} = \{1;\ 2\}$

**b)** $x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{-4}{2}$ $x = -2$ $\mathbb{L} = \{-2\}$

**c)** $x_{1/2} = \frac{0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 30}}{2} = \frac{0{,}5 \pm 5{,}5}{2}$ $x_1 = -2{,}5;\ x_2 = 3$ $\mathbb{L} = \{-2{,}5;\ 3\}$

**d)** $x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 27}}{-6} = \frac{6 \pm \sqrt{63}}{-6}$ $x_1 \approx -2{,}32;\ x_2 \approx 0{,}32$ $\mathbb{L} = \{-2{,}32;\ 0{,}32\}$

**e)** $x_{1/2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 16}}{1} = 9 \pm \sqrt{97}$ $x_1 \approx -0{,}85;\ x_2 \approx 18{,}85$ $\mathbb{L} = \{-0{,}85;\ 18{,}85\}$

**f)** $x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 24}}{3} = \frac{-7 \pm \sqrt{73}}{3}$ $x_1 \approx -5{,}18;\ x_2 \approx 0{,}51$ $\mathbb{L} = \{-5{,}18;\ 0{,}51\}$

**g)** $x_{1/2} = \frac{0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 30}}{4} = \frac{0{,}5 \pm 5{,}5}{4}$ $x_1 = -1{,}25;\ x_2 = 1{,}5$ $\mathbb{L} = \{-1{,}25;\ 1{,}5\}$

**h)** $x_{1/2} = \frac{-1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 2{,}25}}{2} = \frac{-1{,}5}{2}$ $x = -0{,}75$ $\mathbb{L} = \{-0{,}75\}$

**i)** $x_{1/2} = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 252}}{6} = \frac{-18 \pm \sqrt{72}}{6}$ $x_1 \approx -4{,}41;\ x_2 \approx -1{,}59$ $\mathbb{L} = \{-4{,}41;\ -1{,}59\}$

K5 **2**

**a)** $x^2 - 2{,}4x + 1{,}43 = 0$ $x_{1/2} = \frac{2{,}4 \pm \sqrt{5{,}76 - 5{,}72}}{2} = 1{,}2 \pm 0{,}1$ $\mathbb{L} = \{1{,}1;\ 1{,}3\}$

**b)** $1{,}5x^2 + 0{,}75x - 1{,}26 = 0$ $x_{1/2} = \frac{-0{,}75 \pm \sqrt{0{,}5625 + 7{,}56}}{3} = -0{,}25 \pm 0{,}95$ $\mathbb{L} = \{-1{,}2;\ 0{,}7\}$

**c)** $x^2 - 7x - 2{,}75 = 0$ $x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 11}}{2} \approx \frac{7 \pm 7{,}75}{2}$ $\mathbb{L} = \{-0{,}375;\ 7{,}375\}$

**d)** $2x^2 - 0{,}4x - 0{,}48 = 0$ $x_{1/2} = \frac{0{,}4 \pm \sqrt{0{,}16 + 3{,}84}}{4} = 0{,}1 \pm 0{,}5$ $\mathbb{L} = \{-0{,}4;\ 0{,}6\}$

**e)** $x^2 - 4x + 4 = 0$ $x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$ $\mathbb{L} = \{2\}$

**f)** $-3x^2 + 9x + 15 = 0$ $x_{1/2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 180}}{-6} \approx \frac{-9 \pm 16{,}16}{-6}$ $\mathbb{L} = \{-1{,}19;\ 4{,}19\}$

K5 **3**

**a)** $6x^2 + 49x + 8 = 0$ $x_{1/2} = \frac{-49 \pm \sqrt{2209}}{12} = \frac{-49 \pm 47}{12}$ $\mathbb{L} = \{-8;\ -0{,}17\}$

**b)** $14x^2 - 3x - 57 = 0$ $x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{3201}}{28} \approx \frac{3 \pm 56{,}58}{28}$ $\mathbb{L} = \{-1{,}91;\ 2{,}13\}$

**c)** $60x^2 + 53x - 8 = 0$ $x_{1/2} = \frac{-53 \pm \sqrt{4729}}{120} \approx \frac{-53 \pm 68{,}77}{120}$ $\mathbb{L} = \{-1{,}01;\ 0{,}13\}$

**d)** $9x^2 + 38x - 10 = 0$ $x_{1/2} = \frac{-38 \pm \sqrt{1804}}{18} \approx \frac{-38 \pm 42{,}47}{18}$ $\mathbb{L} = \{-4{,}47;\ 0{,}25\}$

K5 **4** **a)** 1 $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-1 \pm 11}{4}$ $\mathbb{L} = \{-3; 2{,}5\}$

2 $x_{1/2} = \frac{9 \pm 0}{18} = 0{,}5$ $\mathbb{L} = \{0{,}5\}$

3 $x_{1/2} = \frac{0{,}1 \pm \sqrt{-3{,}59}}{2}$ $\mathbb{L} = \varnothing$

Beobachtung: Es gibt quadratische Gleichungen, die zwei Lösungen haben, solche, die nur eine Lösung haben, und solche, die keine Lösung haben.

**b)**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $D = 64$ | $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen | $x_{1/2} = \frac{20 \pm 8}{4}$ | $\mathbb{L} = \{3; 7\}$ |
| 2 | $D = -576$ | $D < 0 \Rightarrow$ keine Lösung | | $\mathbb{L} = \varnothing$ |
| 3 | $D = 1296$ | $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen | $x_{1/2} = \frac{-6 \pm 36}{6}$ | $\mathbb{L} = \{-7; 5\}$ |
| 4 | $D = 4$ | $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen | $x_{1/2} = \frac{5 \pm 2}{-2}$ | $\mathbb{L} = \{-3{,}5; -1{,}5\}$ |
| 5 | $D = 121$ | $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen | $x_{1/2} = \frac{5 \pm 11}{-2}$ | $\mathbb{L} = \{-8; 3\}$ |
| 6 | $D = 306{,}25$ | $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen | $x_{1/2} = \frac{3{,}5 \pm 17{,}5}{14}$ | $\mathbb{L} = \{-1; 1{,}5\}$ |
| 7 | $D = 0{,}04$ | $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen | $x_{1/2} = \frac{3 \pm 0{,}2}{2}$ | $\mathbb{L} = \{1{,}4; 1{,}6\}$ |
| 8 | $D = 313\,600$ | $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen | $x_{1/2} = \frac{-300 \pm 560}{200}$ | $\mathbb{L} = \{-4{,}3; 1{,}3\}$ |
| 9 | $D = 1250$ | $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen | $x_{1/2} \approx \frac{25 \pm 35{,}36}{5}$ | $\mathbb{L} = \{-2{,}07; 12{,}07\}$ |

K3 **5** **a)** Es gibt zwei Möglichkeiten für das neue Rechteck (mit dem gleichen Endergebnis). Entweder wird die kurze Seite um x cm verkürzt und die lange Seite um x cm verlängert oder es wird die lange Seite um x cm verkürzt und die kurze Seite um x cm verlängert.

1. Fall: $\mathbb{D}_1 = \{x \mid 0 < x < 4\}$
$(4 - x) \cdot (7 + x) = 21{,}25$
$\Leftrightarrow \quad x^2 + 3x - 6{,}75 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 27}}{2} = \frac{-3 \pm 6}{2}$
$x_1 = -4{,}5 \notin \mathbb{D}_1$; $x_2 = 1{,}5 \in \mathbb{D}_1$
$\mathbb{L}_1 = \{1{,}5\}$
Die Seiten werden um 1,5 cm verkürzt bzw. verlängert; die Seitenlängen des neuen Rechtecks betragen 2,5 cm und 8,5 cm.

2. Fall: $\mathbb{D}_2 = \{x \mid 0 < x < 7\}$
$(7 - x) \cdot (4 + x) = 21{,}25$
$\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 6{,}75 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 27}}{2} = \frac{3 \pm 6}{2}$
$x_1 = -1{,}5 \notin \mathbb{D}_2$; $x_2 = 4{,}5 \in \mathbb{D}_2$
$\mathbb{L}_2 = \{4{,}5\}$
Die Seiten werden um 4,5 cm verkürzt bzw. verlängert; die Seitenlängen des neuen Rechtecks betragen 2,5 cm und 8,5 cm.

**b)** Aus dem Quadrat mit 12 cm soll ein Rechteck mit 165 cm² Flächeninhalt entstehen.
$\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < 12\}$
$(12 - x) \cdot (12 + 2x) = 165$
$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 12x + 21 = 0$
$x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{-24}}{4}$
$\mathbb{L} = \varnothing$

Aus dem Quadrat mit 12 cm soll ein Rechteck mit 160 cm² Flächeninhalt entstehen.
$\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < 12\}$
$(12 - x) \cdot (12 + 2x) = 160$
$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 12x + 16 = 0$
$x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{4} \Rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = 4$
$\mathbb{L} = \{2; 4\}$

Ein Rechteck mit 165 cm² Flächeninhalt kann nicht entstehen. Ein Rechteck mit 160 cm² Flächeninhalt kann entstehen, und zwar auf zwei unterschiedliche Arten: Bei Verkürzung um 2 cm und Verlängerung um 4 cm hat das neue Rechteck Seitenlängen von 10 cm und 16 cm; bei Verkürzung um 4 cm und Verlängerung um 8 cm hat das neue Rechteck Seitenlängen von 8 cm und 20 cm.

K5 **6** **a)** $D = -68$ $D < 0 \Rightarrow$ keine Lösung $\mathbb{L} = \varnothing$
**b)** $D = 58$ $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen $\mathbb{L} = \{-8{,}81; -1{,}19\}$
**c)** $D = 1296$ $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen $\mathbb{L} = \{-7; 5\}$
**d)** $D = 76{,}5625$ $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen $\mathbb{L} = \{-1; 1{,}5\}$
**e)** $D = 313\,600$ $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen $\mathbb{L} = \{-4{,}3; 1{,}3\}$
**f)** $D = 500$ $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen $\mathbb{L} = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$ bzw. $\mathbb{L} = \{-2{,}24; 2{,}24\}$
**g)** $D = 6{,}5$ $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen $\mathbb{L} = \{-1{,}09; 0{,}61\}$
**h)** $D \approx 112{,}47$ $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen $\mathbb{L} = \{-3{,}27; 7{,}33\}$

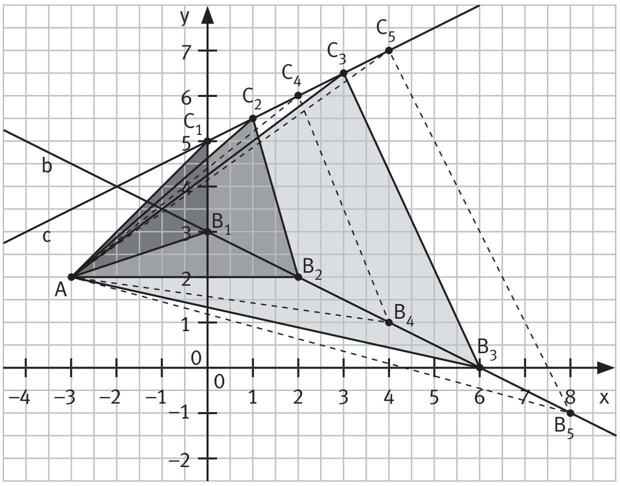
K5 **7** **a)** ① $D = 1 - 4k > 0$, also: $1 > 4k \Leftrightarrow k < 0{,}25$ $\mathbb{L} = \left\{\frac{1-\sqrt{1-4k}}{2}; \frac{1+\sqrt{1-4k}}{2}\right\}$
② $D = 49 + k > 0$, also: $k > -49$ $\mathbb{L} = \left\{\frac{7-\sqrt{49+k}}{2}; \frac{7+\sqrt{49+k}}{2}\right\}$
③ $D = 49 + 980k > 0$, also: $980k > -49 \Leftrightarrow k > -0{,}05$ $\mathbb{L} = \left\{\frac{7-\sqrt{49+980k}}{10}; \frac{7+\sqrt{49+980k}}{10}\right\}$
④ $D = 4 - k^2 > 0$, also: $4 > k^2 \Leftrightarrow -2 < k < 2$ $\mathbb{L} = \left\{\frac{-2-\sqrt{4-k^2}}{2k}; \frac{-2+\sqrt{4-k^2}}{2k}\right\}$
⑤ $D = 4 - 16k > 0$, also: $4 > 16k \Leftrightarrow k < 0{,}25$ $\mathbb{L} = \left\{\frac{2-\sqrt{4-16k}}{2k}; \frac{2+\sqrt{4-16k}}{2k}\right\}$
⑥ $D = 0{,}64 - 4k > 0$, also: $0{,}64 > 4k \Leftrightarrow k < 0{,}16$ $\mathbb{L} = \left\{\frac{0{,}8-\sqrt{0{,}64-4k}}{2k}; \frac{0{,}8+\sqrt{0{,}64-4k}}{2k}\right\}$

**b)** ① $D = 16 + 4t = 0$, also: $16 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = -4$ $x = \frac{-4}{0{,}4} = -10$ $\mathbb{L} = \{-10\}$
② $D = -48 - 16t = 0$, also: $-48 - 16t = 0 \Leftrightarrow t = -3$ $x = \frac{12}{8} = 1{,}5$ $\mathbb{L} = \{1{,}5\}$
③ $D = 157 + 8t = 0$, also: $157 + 8t = 0 \Leftrightarrow t = -19{,}625$ $x = \frac{13}{2} = 6{,}5$ $\mathbb{L} = \{6{,}5\}$
④ $D = t^2 + t - 6 = 0$, also: $t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t-2) = 0$ $\Rightarrow t_1 = -3; t_2 = 2$
$t_1 = -3$: $x^2 + 2{,}5x + 1{,}5625 = 0$ $x_1 = \frac{-2{,}5}{2} = -1{,}25$ $\mathbb{L} = \{-1{,}25\}$
$t_2 = 2$: $x^2 - 2{,}5x + 1{,}5625 = 0$ $x_2 = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25$ $\mathbb{L} = \{1{,}25\}$
⑤ $D = t^2 = 0$, also: $t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$ (keine quadr. Gleichung)
$tx^2 + tx = 0 \Leftrightarrow t \cdot (x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ oder $x_1 = 0$ oder $x_2 = -1$
Für $t = 0$ gilt: $\mathbb{L} = \mathbb{R}$; die Gleichung hat unendlich viele Lösungen.
Für $t \neq 0$ gilt: $\mathbb{L} = \{-1; 0\}$; die Gleichung hat zwei Lösungen.
Es ist nicht möglich, dass die Gleichung genau eine Lösung hat.
⑥ $D = 25 + 2t = 0$, also: $t = -12{,}5$ $x = \frac{7}{6}$ $\mathbb{L} = \left\{1\frac{1}{6}\right\}$

**c)** ① $D = 36 - 108m < 0$, also: $36 - 108m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$ $\mathbb{L} = \varnothing$
② $D = 65 - 20m < 0$, also: $65 - 20m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{13}{4}$ $\mathbb{L} = \varnothing$
③ $D = 157 + 8m < 0$, also: $157 + 8m < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{157}{8}$ $\mathbb{L} = \varnothing$

K5 **8** **a)** $D = 64 + 48t = 16$, also: $64 + 48t = 16 \Leftrightarrow t = -1$ $x_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{4} = -2 \pm 1$ $\mathbb{L} = \{-3; -1\}$
**b)** $D = 20{,}25 - 60t = -19{,}5$, also: $20{,}25 - 60t = -19{,}5 \Leftrightarrow t = \frac{39{,}75}{60} = 0{,}6625$ $\mathbb{L} = \varnothing$
**c)** $D = t^2 + 4 = 8$, also: $t^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t_1 = -2; t_2 = 2$
$t_1 = -2$: $x_{1/2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$ $\mathbb{L}_1 = \{0{,}59; 3{,}41\}$
$t_2 = 2$: $x_{1/2} = \frac{0 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \pm\sqrt{2}$ $\mathbb{L}_2 = \{-1{,}41; 1{,}41\}$
**d)** $0{,}5 \cdot (x - t) \cdot (x + 5) = 0 \Leftrightarrow 0{,}5x^2 + (2{,}5 - 0{,}5t) \cdot x - 2{,}5t = 0$
$D = (2{,}5 - 0{,}5t)^2 + 5t = 0{,}25t^2 + 2{,}5t + 6{,}25$
$D = 0$, also: $0{,}25t^2 + 2{,}5t + 6{,}25 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 10t + 25 = 0$
$\Leftrightarrow (t + 5)^2 = 0 \Rightarrow t = -5$
$0{,}5 \cdot (x + 5)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = -5$ $\mathbb{L} = \{-5\}$

KX **9 a)**




Dreieck $AB_1C_1$ mit $B_1$ (0|3) und $C_1$ (0|5)
Dreieck $AB_2C_2$ mit $B_2$ (2|2) und $C_2$ (1|5,5)
Dreieck $AB_3C_3$ mit $B_3$ (6|0) und $C_3$ (3|6,5)
Allgemein:
Dreieck $AB_nC_n$ mit $B_n$ $(x_n|-0{,}5x_n+3)$ und $C_n$ $(0{,}5x_n|0{,}25x_n+5)$

$\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} x_n+3 \\ -0{,}5x_n+1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 0{,}5x_n+3 \\ 0{,}25x_n+3 \end{pmatrix}$

**b)** Für den Flächeninhalt A (x) der Dreiecke $AB_nC_n$ mit $B_n$ $(x_n|-0{,}5x_n+3)$ und $C_n$ $(0{,}5x_n|0{,}25x_n+5)$ gilt:

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x+3 & 0{,}5x+3 \\ -0{,}5x+1 & 0{,}25x+3 \end{vmatrix} \text{ FE}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot [(x+3) \cdot (0{,}25x+3) - (-0{,}5x+1) \cdot (0{,}5x+3)] \text{ FE}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (0{,}5x^2 + 4{,}75x + 6) \text{ FE}$$
$$= \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{19}{8}x + 3\right) \text{ FE}$$

**c)** $A(x) = 16{,}5$ FE $\quad \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + \frac{19}{8}x + 3 = 16{,}5$

$\Leftrightarrow x^2 + 9{,}5x - 54 = 0 \qquad \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-9{,}5 \pm \sqrt{90{,}25 + 216}}{2} = \frac{-9{,}5 \pm 17{,}5}{2}$

$x_1 = -13{,}5 \notin \mathbb{D} = \{x \mid x > -1{,}5\}$; $x_2 = 4 \in \mathbb{D} = \{x \mid x > -1{,}5\}$

Das Dreieck $AB_4C_4$ mit $B_4$ (4|1) und $C_4$ (2|6) hat einen Flächeninhalt von 16,5 FE.

$A(x) = 38$ FE $\quad \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + \frac{19}{8}x + 3 = 38$

$\Leftrightarrow x^2 + 9{,}5x - 140 = 0 \qquad \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-9{,}5 \pm \sqrt{90{,}25 + 560}}{2} = \frac{-9{,}5 \pm 25{,}5}{2}$

$x_1 = -17{,}5 \notin \mathbb{D} = \{x \mid x > -1{,}5\}$; $x_2 = 8 \in \mathbb{D} = \{x \mid x > -1{,}5\}$

Das Dreieck $AB_5C_5$ mit $B_5$ (8|–1) und $C_5$ (4|7) hat einen Flächeninhalt von 38 FE.

K5 **10 a)** $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$x^2 - 14 = 0$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{14}$

$\mathbb{L} = \{-\sqrt{14}; \sqrt{14}\} = \{-3{,}74; 3{,}74\}$

**b)** $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x^2 - 8x + 4 = 0$

$x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{3}$

$\mathbb{L} = \{4 - 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3}\} = \{0{,}54; 7{,}46\}$

**c)** $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1{,}75\}$

$12x^2 + 6x - 59 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 2832}}{24} = \frac{-3 \pm \sqrt{717}}{12}$

$\mathbb{L} = \left\{\frac{-3 - \sqrt{717}}{12}; \frac{-3 + \sqrt{717}}{12}\right\} = \{-2{,}48; 1{,}98\}$

**d)** $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

$4x^2 - 22x + 25 = 0$

$x_{1/2} = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 400}}{8} = \frac{11 \pm \sqrt{21}}{4}$

$\mathbb{L} = \left\{\frac{11 - \sqrt{21}}{4}; \frac{11 + \sqrt{21}}{4}\right\} = \{1{,}60; 3{,}90\}$

**e)** $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; -\frac{1}{3}; 1\}$

$7x^2 - 2x - 5 = 0$

$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{14} = \frac{1 \pm 6}{7}$

$\mathbb{L} = \left\{-\frac{5}{7}\right\}$ $(1 \notin \mathbb{D})$

**f)** $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right\}$

$6{,}5x^2 + 10{,}5x + 2{,}5 = 0 \Leftrightarrow 13x^2 + 21x + 5 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-21 \pm \sqrt{441 - 260}}{26} = \frac{-21 \pm \sqrt{181}}{26}$

$\mathbb{L} = \left\{\frac{-21 - \sqrt{181}}{26}; \frac{-21 + \sqrt{181}}{26}\right\} = \{-1{,}33; -0{,}29\}$

K3 **11** **a)** Es sei x cm die Breite b des Pakets, $x > 0$. Die Länge l beträgt 2x cm, die Höhe h 15 cm und das Volumen V 27 000 $cm^3$. Mit $V = l \cdot b \cdot h$ gilt:

$27\,000\,cm^3 = 2x \cdot x \cdot 15\,cm^3$

$\Leftrightarrow 27\,000 = 30x^2$

$\Leftrightarrow x = \pm 30 \Rightarrow x = 30$, da $x > 0$

Das Paket mit 27 $dm^3$ Volumen ist 30 cm breit, 60 cm lang und 15 cm hoch.

**b)** Es sei x cm die Höhe h des Pakets, $x > 0$. Die Länge l beträgt $(x + 24)$ cm, die Breite b 30 cm und das Volumen V 15 187,5 $cm^3$. Mit $V = l \cdot b \cdot h$ gilt:

$15\,187{,}5\,cm^3 = (x + 24) \cdot 30 \cdot x\,cm^3$

$\Leftrightarrow 506{,}25 = (x + 24) \cdot x$

$\Leftrightarrow x^2 + 24x - 506{,}25 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-24 \pm \sqrt{576 + 2025}}{2} = -12 \pm 25{,}5 \Rightarrow x = 13{,}5$, da $x > 0$

Das Paket mit 15 187,5 $cm^3$ Volumen ist 13,5 cm hoch, 37,5 cm lang und 30 cm breit.

K5

**Werkzeug**

- Die Schüler üben die grafische und die rechnerische Nutzung des grafikfähigen Taschenrechners (GTR) zur Lösung quadratischer Gleichungen.

1 $\mathbb{L} = \{-0{,}4; 0{,}75\}$

2 $\mathbb{L} = \{-2; 12\}$

3 $\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2} - \sqrt{2}; \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right\} = \{-0{,}914; 1{,}914\}$

4 $\mathbb{L} = \{-0{,}4; 0{,}6\}$

## Verständnis

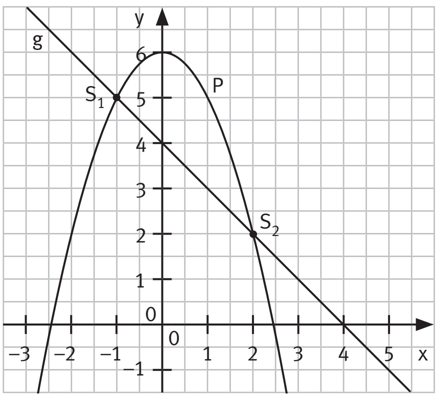
K6
- Eine Gerade und eine Parabel können sich in zwei Punkten schneiden; die Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems besteht aus zwei Punkten.
  Eine Gerade und eine Parabel können sich in einem Punkt berühren; die Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems besteht aus einem Punkt.
  Eine Gerade und eine Parabel können sich weder schneiden noch berühren, z. B. wenn die Gerade unterhalb der nach oben geöffneten Parabel verläuft; die Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems ist leer.

K1
- Philipp hat nicht Recht, es gibt nicht drei, sondern vier Möglichkeiten, wie zwei Parabeln zueinander liegen können: Sie haben keinen gemeinsamen Punkt; sie haben einen gemeinsamen Punkt; sie haben zwei gemeinsame Punkte; sie haben unendlich viele gemeinsame Punkte (zwei identische Parabeln).

K6 **1** Sabine löst das Gleichungssystem rechnerisch, indem sie das quadratische Gleichungssystem notiert und die Gleichungen gleichsetzt. Dann ermittelt sie die Lösungen $x_1$ und $x_2$ der entstandenen Gleichung, berechnet die zugehörigen y-Werte $y_1$ und $y_2$ und gibt die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(x_1 | y_1); (x_2 | y_2)\}$ an.

Luca löst das Gleichungssystem zeichnerisch, indem er die Graphen der beiden quadratischen Gleichungen in ein Koordinatensystem zeichnet und der Zeichnung die Schnittpunkte $S_1 (x_1 | y_1)$ und $S_2 (x_2 | y_2)$ entnimmt und damit $\mathbb{L} = \{(x_1 | y_1); (x_2 | y_2)\}$ angibt.

K4 **2** **a)**



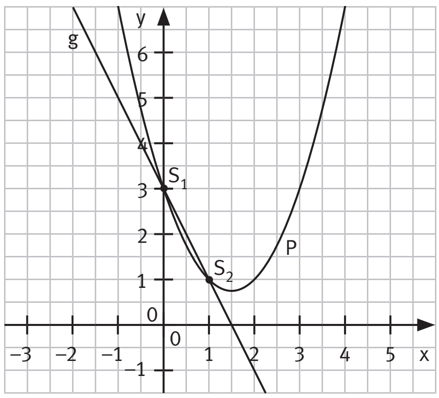

$S_1 (-1 | 5)$; $S_2 (2 | 2)$

Probe: $S_1$: $5 = 1 + 4 \quad \wedge \quad 5 = -1 + 6 \quad$ w

$S_2$: $2 = -2 + 4 \quad \wedge \quad 2 = -4 + 6 \quad$ w

$\mathbb{L} = \{(-1 | 5); (2 | 2)\}$

**b)**



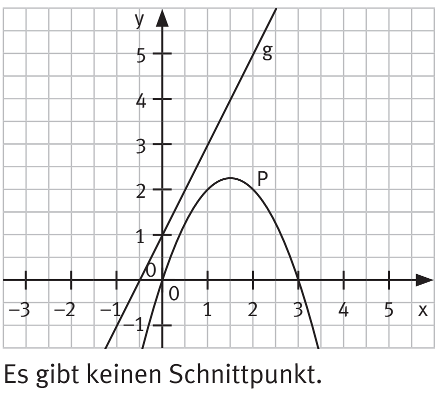

$S_1 (0 | 3)$; $S_2 (1 | 1)$

Probe: $S_1$: $3 = 3 \quad \wedge \quad 3 = 3 \quad$ w

$S_2$: $1 = -2 + 3 \quad \wedge \quad 1 = 1 - 3 + 3 \quad$ w

$\mathbb{L} = \{(0 | 3); (1 | 1)\}$

**c)**



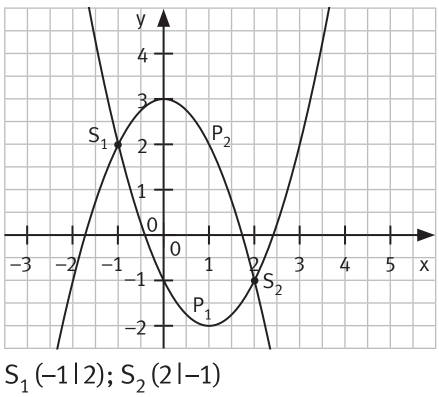

Es gibt keinen Schnittpunkt.

$2x + 1 = 3x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$

Diskriminante $D = 1 - 4 = -3 < 0$

$\mathbb{L} = \emptyset$

**d)**



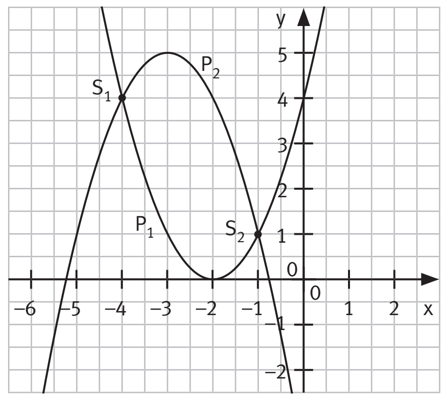

$S_1 (-1 | 2)$; $S_2 (2 | -1)$

Probe: $S_1$: $2 = 4 - 2 \quad \wedge \quad 2 = -1 + 3 \quad$ w

$S_2$: $-1 = 1 - 2 \quad \wedge \quad -1 = -4 + 3 \quad$ w

$\mathbb{L} = \{(-1 | 2); (2 | -1)\}$

**e)**



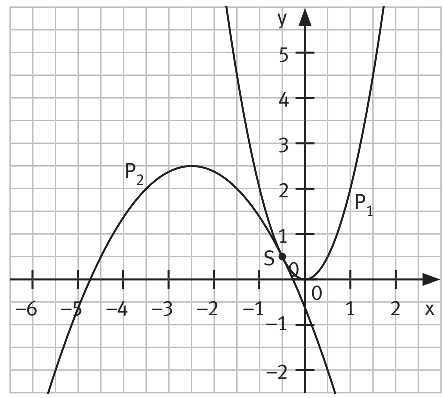

$S_1\,(-4\,|\,4)$; $S_2\,(-1\,|\,1)$

Probe: $S_1$: $4 = (-2)^2 \;\wedge\; 4 = -(-1)^2 + 5$ w

$S_2$: $1 = 1^2 \;\wedge\; 1 = -2^2 + 5$ w

$\mathbb{L} = \{(-4\,|\,4); (-1\,|\,1)\}$

**f)**




$S\,(-0{,}5\,|\,0{,}5)$

$2x^2 = -0{,}5x^2 - 2{,}5x - 0{,}625 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x + 0{,}25 = 0$

Diskriminante $D = 0 \;\Rightarrow\;$ eine Lösung

Probe:

$0{,}5 = 2 \cdot 0{,}25 \wedge 0{,}5 = -0{,}125 + 1{,}25 - 0{,}625$ w

$\mathbb{L} = \{(-0{,}5\,|\,0{,}5)\}$

K1 **3** **a)** $g_1$: $y = -2x - 1$ $\quad$ $g_2$: $y = x - 1{,}75$ $\quad$ $g_3$: $y = x - 4$

$p_1$: $y = (x-2)^2 - 4$ $\quad$ $p_2$: $y = -(x-3)^2 + 1$ $\quad$ $p_3$: $y = -(x-8)^2 + 6$

**b)** $g_3 \cap p_1 = \{P_1\,(1\,|-3); P_2\,(4\,|\,0)\}$ $\quad$ $g_3 \cap p_3 = \{P_3\,(6\,|\,2); P_4\,(9\,|\,5)\}$

$g_1 \cap p_1 = \{P_5\,(1\,|-3)\}$ $\quad$ $g_2 \cap p_3 = \{P_6\,(7{,}5\,|\,5{,}75)\}$

**c)** 1 $g_3 \cap p_2$: $x - 4 = -(x-3)^2 + 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_1 = 1; x_2 = 4$ $\quad$ $y_1 = -3; y_2 = 0$ $\quad$ $\mathbb{L} = \{(1\,|-3); (4\,|\,0)\}$

$p_1 \cap p_2$: $(x-2)^2 - 4 = -(x-3)^2 + 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_1 = 1; x_2 = 4$ $\quad$ $y_1 = -3; y_2 = 0$ $\quad$ $\mathbb{L} = \{(1\,|-3); (4\,|\,0)\}$

$\Rightarrow\; g_3 \cap p_2 = p_1 \cap p_2 = \{(1\,|-3); (4\,|\,0)\}$

2 $g_1 \cap p_1$: $-2x - 1 = (x-2)^2 - 4 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x + 1 = 0$

$x = 1$ $\quad$ $y = -3$ $\quad$ $\mathbb{L} = \{(1\,|-3)\}$

$p_1 \cap p_2$: $(x-2)^2 - 4 = -(x-3)^2 + 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_1 = 1; x_2 = 4$ $\quad$ $y_1 = -3; y_2 = 0$ $\quad$ $\mathbb{L} = \{(1\,|-3); (4\,|\,0)\}$

$\Rightarrow\; (g_1 \cap p_1) \subset (p_1 \cap p_2)$

K5 **4** **a)** $x + 4 = x^2 - x + 4$

$x^2 - 2x = 0$

$x_1 = 0; x_2 = 2$

$y_1 = 4; y_2 = 6$

$\mathbb{L} = \{(0\,|\,4); (2\,|\,6)\}$

**b)** $-x^2 + 6 = x^2 + 3x$

$2x^2 + 3x - 6 = 0$

$x_1 \approx -2{,}6; x_2 \approx 1{,}1$

$y_1 \approx -1{,}0; y_2 \approx 4{,}7$

$\mathbb{L} = \{(-2{,}6\,|-1{,}0); (1{,}1\,|\,4{,}7)\}$

**c)** $x^2 - x + 9 = 2x^2 + 8x - 2$

$x^2 + 9x - 11 = 0$

$x_1 = -10{,}1; x_2 = 1{,}1$

$y_1 = 120{,}9; y_2 = 9{,}1$

$\mathbb{L} = \{(-10{,}1\,|\,120{,}9); (1{,}1\,|\,9{,}1)\}$

**d)** $-x^2 - 5x + 4 = 2x^2 + 2x - 3$

$3x^2 + 7x - 7 = 0$

$x_1 \approx -3{,}1; x_2 \approx 0{,}8$

$y_1 \approx 9{,}9; y_2 \approx -0{,}3$

$\mathbb{L} = \{(-3{,}1\,|\,9{,}9); (0{,}8\,|-0{,}3)\}$

**e)** $-3x^2 + 27 = 0{,}5x^2 - 3x + 7$

$3{,}5x^2 - 3x - 20 = 0$

$x_1 = -2; x_2 \approx 2{,}9$

$y_1 = 15; y_2 \approx 2{,}5$

$\mathbb{L} = \{(-2\,|\,15); (2{,}9\,|\,2{,}5)\}$

**f)** $0{,}2x^2 - x + 3 = 0{,}1x^2 + x + 3$

$0{,}1x^2 - 2x = 0$

$x_1 = 0; x_2 = 20$

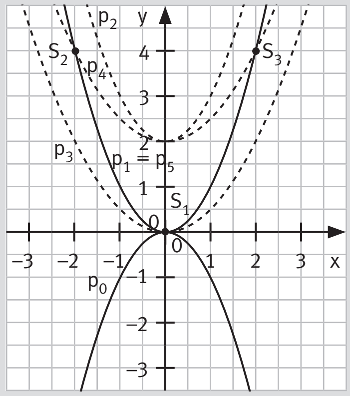
$y_1 = 3; y_2 = 63$

$\mathbb{L} = \{(0\,|\,3); (20\,|\,63)\}$

## Verständnis

K6
- Es sind individuelle Lösungen möglich, z. B.
  $p_1$: $y = x^2$ und $p_0$: $y = -x^2$ mit Scheitel $S_1\,(0|0)$.

K6
- Zwei nach oben geöffnete Parabeln können keinen, einen, zwei oder unendlich viele gemeinsame Punkte haben, z. B.:
  $p_1$: $y = x^2$ und $p_2$: $y = x^2 + 2$: kein gemeinsamer Punkt
  $p_1$: $y = x^2$ und $p_3$: $y = 0{,}5x^2$: $S_1\,(0|0)$
  $p_1$: $y = x^2$ und $p_4$: $y = 0{,}5x^2 + 2$: $S_2\,(-2|4)$ und $S_3\,(2|4)$
  $p_1$: $y = x^2$ und $p_5$: $y = (x + 2)(x - 2) + 4$: unendlich viele gemeinsame Punkte, da $p_1 = p_2$




K5 **1** Die Gleichungen von p und g werden gleichgesetzt, man erhält eine quadratische Gleichung. Die Diskriminante D zeigt die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung und damit die Lage der Geraden zur Parabel als Passante, Tangente oder Sekante an.

**a)** $-x^2 + 4x - 4 = 0$
$D = 0$ Tangente $S_1\,(2|4)$

**b)** $y = -5$ Sekante $S_2\,(5|-5)$

**c)** $-x^2 + 2x - 3 = 0$
$D = -8 < 0$ Passante

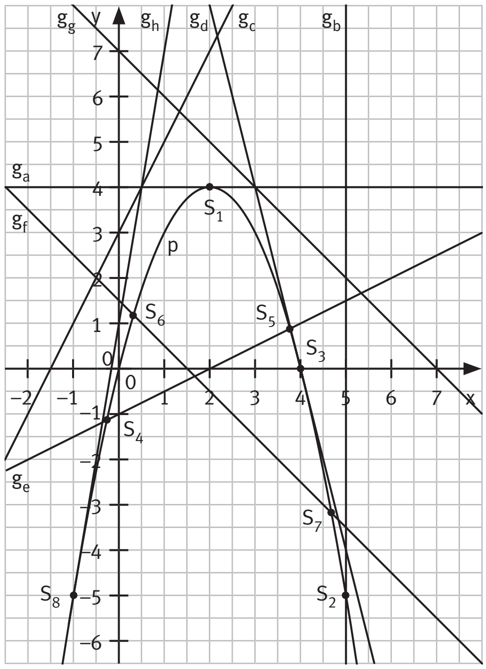
**d)** $-x^2 + 8x - 16 = 0$
$D = 0$ Tangente $S_3\,(4|0)$

**e)** $-x^2 + 3{,}5x + 1 = 0$
$D = 16{,}25 > 0$ Sekante $S_4\,(-0{,}3|-1{,}1)$, $S_5\,(3{,}8|0{,}9)$

**f)** $-x^2 + 5x - 1{,}5 = 0$
$D = 19 > 0$ Sekante $S_6\,(0{,}3|1{,}2)$, $S_7\,(4{,}7|-3{,}2)$

**g)** $-x^2 + 5x - 7 = 0$
$D = -3 < 0$ Passante

**h)** $-x^2 - 2x - 1 = 0$
$D = 0$ Tangente $S_8\,(-1|-5)$




K5 **2**

**a)** $x + 4 = x^2 - x + 1$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$
$x_1 = -1;\ x_2 = 3$
$y_1 = 3;\ y_2 = 7$
$S_1\,(-1|3);\ S_2\,(3|7)$
$\mathbb{L} = \{(-1|3);\ (3|7)\}$

**b)** $x + 3 = \frac{1}{3}x^2 + x$
$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$
$x_1 = -3;\ x_2 = 3$
$y_1 = 0;\ y_2 = 6$
$S_1\,((-3|0);\ S_2\,(3|6)$
$\mathbb{L} = \{(-3|0);\ (3|6)\}$

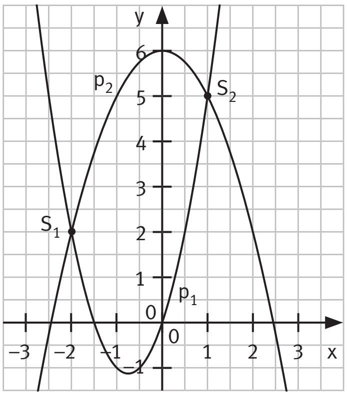
**c)** $-x + 6{,}5 = -x^2 + 2x$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 6{,}5 = 0$
$D = -17 < 0$
Kein Schnittpunkt
$\mathbb{L} = \varnothing$

**d)** $-2x + 4 = -x^2 + 4$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$
$x_1 = 0;\ x_2 = 2$
$y_1 = 4;\ y_2 = 0$
$S_1\,(0|4);\ S_2\,(2|0)$
$\mathbb{L} = \{(0|4);\ (2|0)\}$

**e)** $2x + 3 = x^2 + x - 3$
$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$
$x_1 = -2;\ x_2 = 3$
$y_1 = -1;\ y_2 = 9$
$S_1\,(-2|-1);\ S_2\,(3|9)$
$\mathbb{L} = \{(-2|-1);\ (3|9)\}$

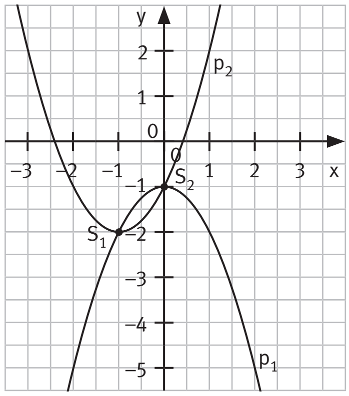
**f)** $-x + 5 = x^2 - 4x + 5$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$
$x_1 = 0;\ x_2 = 3$
$y_1 = 5;\ y_2 = 2$
$S_1\,(0|5);\ S_2\,(3|2)$
$\mathbb{L} = \{(0|5);\ (3|2)\}$

K4 **3** **a)**



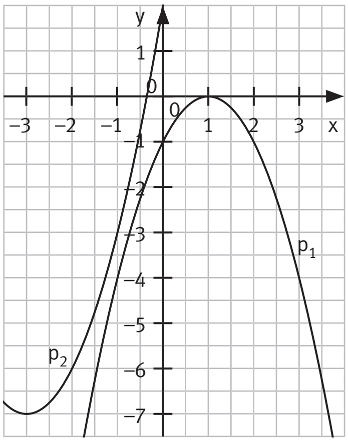

$S_1\,(-2\,|\,2)$
$S_2\,(1\,|\,5)$

**b)**



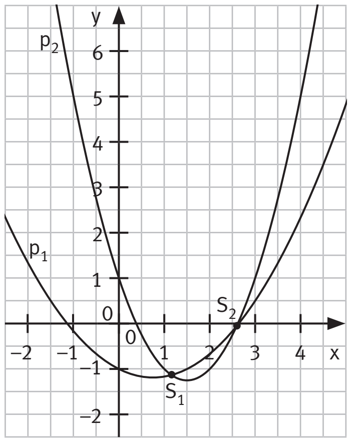

$S_1\,(-1\,|\,-2)$
$S_2\,(0\,|\,-1)$

**c)**




Kein Schnittpunkt

**d)**




$S_1\,(1{,}2\,|\,-1{,}1)$
$S_2\,(2{,}6\,|\,-0{,}1)$

K5 **4** Für die Seiten des Rechtecks mit den Längen a cm und b cm bzw. a m und b m $(a, b > 0)$ gilt:

**a)** I $\quad 44 = 2a + 2b \Leftrightarrow 22 = a + b$

II $\quad 117 = a \cdot b \Leftrightarrow a = \frac{117}{b}$

a in I einsetzen:

$22 = \frac{117}{b} + b \Leftrightarrow b^2 - 22b + 117 = 0$

$b_{1/2} = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 468}}{2} = 11 \pm 2$

$b_1 = 9$; $b_2 = 13$ und $a_1 = 13$; $a_2 = 9$

Die Seitenlängen des Rechtecks betragen 9 cm und 13 cm.

**b)** I $\quad a \cdot b = 5040 \Leftrightarrow a = \frac{5040}{b}$

II $\quad a^2 + b^2 = 106^2$ (Pythagoras)

$a = \frac{5040}{b}$ in II einsetzen und $z = b^2$ setzen:

$\frac{5040^2}{z} + z = 106^2 \Leftrightarrow z^2 - 106^2 z + 5040^2 = 0$

$z_{1/2} = \frac{106^2 \pm \sqrt{106^4 - 4 \cdot 5040^2}}{2} = 5618 \pm 2482$

$z_1 = 3136 = (\pm 56)^2$; $z_2 = 8100 = (\pm 90)^2$

$\Rightarrow b_1 = 56$; $b_2 = 90$ (da $b > 0$ und $a > 0$)

Die Seitenlängen des Rechtecks betragen 56 m und 90 m.

K5 **5** **a)** Die Scheitelpunktform der Parabel lautet:

p: $y = -0{,}25(x-4)^2 + 7$

$\Leftrightarrow$ p: $y = -0{,}25(x^2 - 8x + 16) + 7$

$\Leftrightarrow$ p: $y = -0{,}25x^2 + 2x + 3$

**b)** $-0{,}25x^2 + 2x + 3 = 0{,}5x - 1$

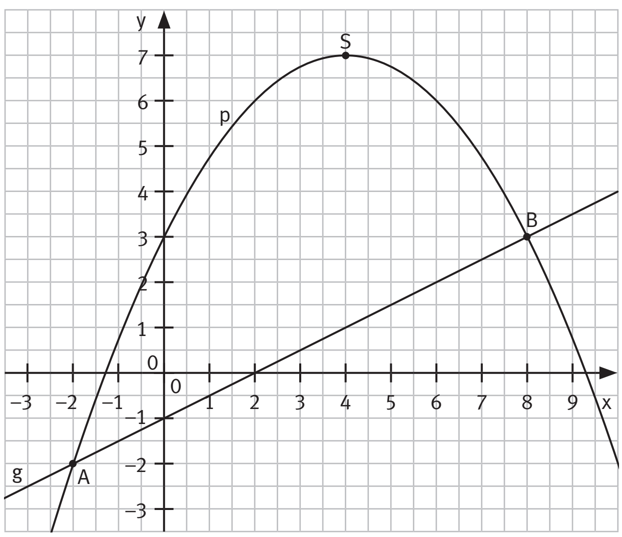
$\Leftrightarrow 0{,}25x^2 - 1{,}5x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$

$x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = 3 \pm 5$

$x_1 = -2$; $x_2 = 8$ und $y_1 = -2$; $y_2 = 3$

A $(-2\,|\,-2)$; B $(8\,|\,3)$



K3

**6** **a)** Die Wandfläche inklusive Fenster und Türen beträgt $191{,}90\,m^2 + 28{,}50\,m^2 = 220{,}40\,m^2$.
Für die Seiten der rechteckigen Grundfläche mit den Längen a m und b m (a, b > 0) gilt:

I $84 = a \cdot b \Leftrightarrow a = \frac{84}{b}$

II $220{,}4 = 5{,}8 \cdot 2 \cdot (a + b) \Leftrightarrow 19 = a + b$

a in II einsetzen:

$19 = \frac{84}{b} + b \Leftrightarrow b^2 - 19b + 84 = 0$

$b_{1/2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 336}}{2} = 9{,}5 \pm 2{,}5$

$b_1 = 7$; $b_2 = 12$ und $a_1 = 12$; $a_2 = 7$

Die Außenmaße des Hauses betragen 5,8 m Höhe, 7 m Breite und 12 m Länge.

**b)**

| | | |
|---|---|---|
| Umfang des Hauses: | $2 \cdot (a + b)\,m = 38\,m$ | |
| Kosten für die Miete des Gerüsts: | $38\,m \cdot 4{,}50\,€/m =$ | 171,00 € |
| Menge an Farbe für $191{,}9\,m^2$: | $191{,}9\,m^2 \cdot 0{,}2\,l/m^2 = 38{,}38\,l$ | |
| Anzahl an Farbeimern à 10 l: | $38{,}38\,l : 10\,l/\text{Eimer} \approx 4$ Eimer | |
| Kosten für 4 Eimer zu je 150,00 €: | $4 \cdot 150{,}00\,€ =$ | 600,00 € |
| Summe der Kosten (Miete + Farbe): | | 771,00 € |

Die Renovierungskosten für Gerüstmiete und Farbe belaufen sich auf 771,00 €.

Kx

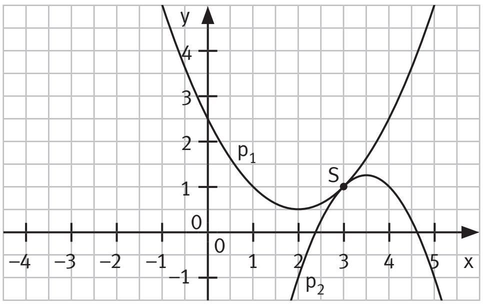
**7** Die Funktionsgleichungen der beiden Parabeln werden gleichgesetzt und die Diskriminante berechnet; diese gibt an, ob die Gleichung eine Lösung (D = 0), zwei Lösungen (D > 0) oder keine Lösung (D < 0) besitzt. Falls die Gleichung eine oder zwei Lösungen hat, berechnet man diese mit der Lösungsformel. Durch Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen erhält man die y-Werte der Schnittpunkte.

**a)** $\frac{1}{2}(x - 2)^2 + \frac{1}{2} = -x^2 + 7x - 11$

$\Leftrightarrow 1{,}5x^2 - 9x + 13{,}5 = 0$

$D = 81 - 81 = 0 \;\Rightarrow$ 1 Lösung

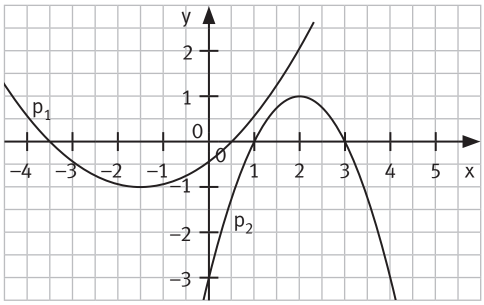
$x = 3 \;\Rightarrow S\,(3\,|\,1)$




**b)** $\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{16} = -x^2 + 4x - 3$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 13x + 10{,}25 = 0$

$D = 169 - 205 = -36 < 0 \;\Rightarrow$ keine Lösung

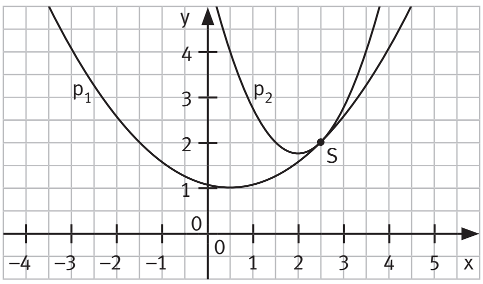



**c)** $\frac{1}{4}\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 1 = x^2 - 4x + \frac{23}{4}$

$\Leftrightarrow 0 = 3x^2 - 15x + 18{,}75$

$D = 225 - 225 = 0 \;\Rightarrow$ 1 Lösung

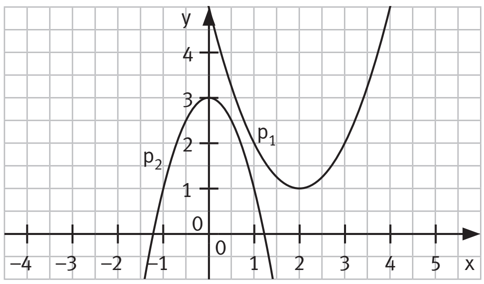
$x = 2{,}5 \;\Rightarrow S\,(2{,}5\,|\,2)$



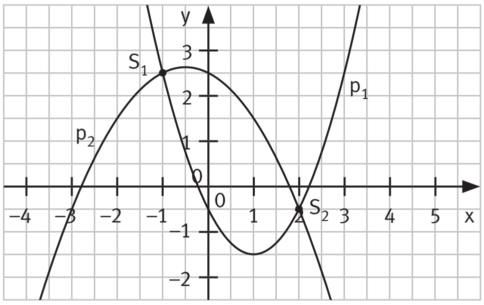

**d)** $x^2 - 4x + 5 = -2x^2 + 3$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 2 = 0$

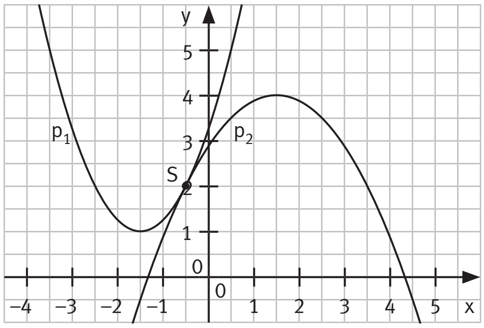
$D = 16 - 24 = -8 < 0 \;\Rightarrow$ keine Lösung



**e)** $x^2 - 2x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{21}{8}$
$\Leftrightarrow 1{,}5x^2 - 1{,}5x - 3 = 0$
$D = 2{,}25 + 18 = 20{,}25 > 0 \;\Rightarrow$ 2 Lösungen
$x_{1/2} = \frac{1{,}5 \pm 4{,}5}{3} = 0{,}5 \pm 1{,}5$
$x_1 = -1;\ x_2 = 2 \;\Rightarrow S_1(-1\,|\,2{,}5);\ S_2(2\,|\,-0{,}5)$




**f)** $x^2 + 3x + \frac{13}{4} = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 4$
$\Leftrightarrow 1{,}5x^2 + 1{,}5x + 0{,}375 = 0$
$D = 2{,}25 - 2{,}25 = 0 \;\Rightarrow$ 1 Lösung
$x = \frac{-2{,}25}{4{,}5} = -0{,}5 \;\Rightarrow S(-0{,}5\,|\,2)$

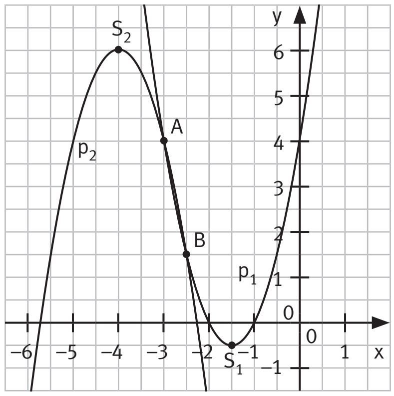



Kx **8** **a)** Berechnung der Scheitelkoordinaten $S(x_S\,|\,y_S)$ durch quadratisches Ergänzen:

$p_1$: $y = 2(x^2 + 3x) + 4$
$= 2[(x + 1{,}5)^2 - 2{,}25] + 4$
$= 2(x + 1{,}5)^2 - 0{,}5$ $\quad S_1(-1{,}5\,|\,-0{,}5)$

$p_2$: $y = -2(x^2 + 8x) - 26$
$= -2[(x + 4)^2 - 16] - 26$
$= -2(x + 4)^2 + 6$ $\quad S_2(-4\,|\,6)$

Bezüglich der Vermutung über die Anzahl der gemeinsamen Punkte sind individuelle Antworten möglich.

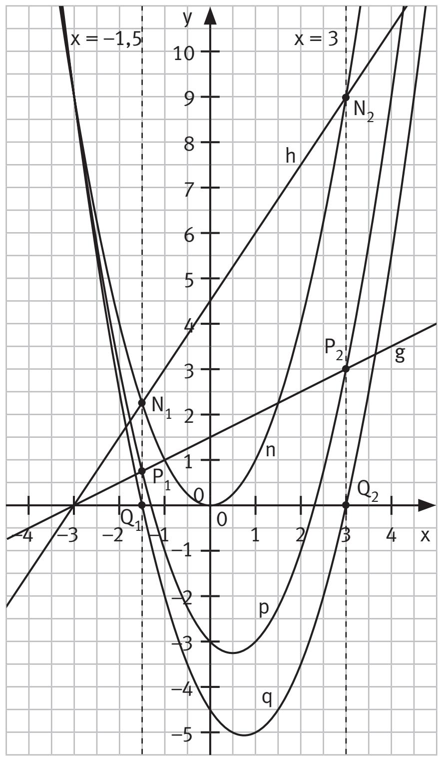



**b)** Gleichsetzen der Parabelgleichungen:
$2x^2 + 6x + 4 = -2x^2 - 16x - 26 \Leftrightarrow 4x^2 + 22x + 30 = 0$
$D = 484 - 380 = 4 > 0$
Die Parabeln haben zwei gemeinsame Punkte.
$x_{1/2} = \frac{-22 \pm 2}{8} = -2{,}75 \pm 0{,}25$: $A(-3\,|\,4)$ und $B(-2{,}5\,|\,1{,}5)$

Kx **9** Gleichsetzen der Funktionsgleichungen von g und p bzw. von f und p ergibt:
$2x - 5 = x^2 - 6x + 11 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \;\Rightarrow x = 4$
Es gibt genau einen gemeinsamen Punkt von g und p: $S(4\,|\,3)$; damit ist g eine Tangente an p.
$5x + 2 = x^2 - 6x + 11 \;\Leftrightarrow\; 0 = x^2 - 11x + 9$
$x_{1/2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 36}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{85}}{2} \approx 5{,}5 \pm 4{,}6$
$x_1 \approx 0{,}9;\ x_2 \approx 10{,}1$
$S_1(0{,}9\,|\,6{,}5);\ S_2(10{,}1\,|\,52{,}5)$
p und f haben zwei gemeinsame Punkte; damit ist f nicht Tangente an p.

Kx **10** Umformen der Funktionsgleichung ergibt: h: $x = 3{,}5$.
Die Gerade h beschreibt somit eine zur y-Achse parallele Gerade mit dem x-Wert 3,5. Da h senkrecht zur x-Achse verläuft, kann h keine Tangente an der Parabel p sein.

Kx **11 a)** Die Gleichung beschreibt die Schnittmenge der Parabel p: $y = x^2 - x - 3$ mit der Geraden g: $y = 0{,}5x + 1{,}5$.
Alternativ kann man die Gleichung auch in $x^2 = 1{,}5x + 4{,}5$ umformen, man erhält so die Schnittmenge der Normalparabel n: $y = x^2$ mit der Geraden h: $y = 1{,}5x + 4{,}5$.
Durch weiteres Umformen erhält man $x^2 - 1{,}5x - 4{,}5 = 0$, wobei die Nullstellen der Parabel q: $y = x^2 - 1{,}5x - 4{,}5$ den Lösungen der Gleichung entsprechen.
Bei jedem dieser Verfahren sind die Lösungen der Gleichung die x-Werte der Schnittpunkte.




**b)** Anwenden der Lösungsformel auf $x^2 - 1{,}5x - 4{,}5 = 0$ ergibt:
$x_{1/2} = \frac{1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 18}}{2} = \frac{1{,}5 \pm 4{,}5}{2} = 0{,}75 \pm 2{,}25$
$\Rightarrow x_1 = -1{,}5;\ x_2 = 3$
Die beiden Lösungen sind genau die Nullstellen der Parabel q: $y = x^2 - 1{,}5x - 4{,}5$ bzw. die x-Werte der Schnittpunkte von p: $y = x^2 - x - 3$ mit g: $y = 0{,}5x + 1{,}5$.

K3 **12 a)** Geradengleichung von AB durch Einsetzen von A und B in $y = mx + t$ ermitteln: AB: $y = -2x + 5$
**b)** Schnittpunkte von $p_1$ und $p_2$ mit AB ermitteln:
$-0{,}5x^2 - 2x + 5 = -2x + 5 \Leftrightarrow 0{,}5x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
$\Rightarrow$ AB und $p_1$ haben nur einen gemeinsamen Punkt, nämlich A (0 | 5); AB ist Tangente zu $p_1$.
$0{,}5(x - 4)^2 - 1 = -2x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$
$\Rightarrow$ AB und $p_2$ haben nur einen gemeinsamen Punkt, nämlich B (2 | 1); AB ist Tangente zu $p_2$.
Die Eigenschaft, dass AB Tangente an die beiden Parabeln ist, ist deshalb wichtig für die Rennstrecke, weil die Richtung der Rennwagen beim Übergang zwischen der Kurve und der geraden Strecke ohne Gegenlenken beibehalten werden kann.
**c)** 1 $\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 4^2}$ LE $\approx 4{,}5$ LE $\hat{=}$ 450 m — Die Strecke ist rund 0,45 km lang.
2 $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v} \Rightarrow t = \frac{0{,}45\,\text{km}}{180\,\text{km}} \cdot h = 0{,}0025\,h = 9$ sek — Der Wagen benötigt 9 Sekunden für [AB].

Kx **13 a)** Es sind verschiedene Lösungen für p und f möglich, z. B.:
p: $y = -x^2$ und f: $y = 0{,}5x + 3$ oder p: $y = x^2$ und f: $y = -0{,}5x - 5$
**b)** P und Q haben den y-Wert 4; Die Funktionsgleichung für f lautet daher f: $y = 4$.
Da P und Q denselben y-Wert haben, muss die x-Koordinate des Scheitels zwischen den x-Koordinaten von P und Q liegen, daher gilt: $x_S = 0$.
Für p gilt daher: $y = ax^2 + y_S$ mit der Bedingung (P und Q $\in$ p):
$4 = 4a + y_S \quad \Leftrightarrow y_S = 4 - 4a \quad \Leftrightarrow a = 1 - 0{,}25y_S$
Man kann a und $y_S$ nun beliebig wählen, z. B.:
$a = 1,\ y_S = 0$ p: $y = x^2$ und f: $y = 4$
$a = 2,\ y_S = -4$ p: $y = 2x^2 - 4$ und f: $y = 4$
$a = 0{,}5,\ y_S = 2$ p: $y = 0{,}5x^2 + 2$ und f: $y = 4$
**c)** Wählt man p mit R als Scheitelpunkt und f: $x = -1$ (oder mit f*: $y = 2$), dann hat p mit f (bzw. mit f*) einen gemeinsamen Punkt, R.
p: $y = (x + 1)^2 + 2$ und f: $x = -1$ oder p: $y = -2(x + 1)^2 + 2$ und f: $y = 2$

**d)** Man wählt einen beliebigen Punkt P auf g, z. B. P (3|0); dieser wird als Scheitelpunkt der Parabel festgelegt. Möglich sind nun folgende Funktionsgleichungen für die Parabel p und die Gerade f, die beide mit g: x = 3 den gemeinsamen Punkt P (3|0) haben:

p: $y = (x-3)^2$ oder $y = -2(x-3)^2$ oder $y = 5(x-3)^2$ oder ...

f: $y = x - 3$ oder $y = 3x - 9$ oder $y = -4x + 12$ oder ...

Kx **14** Rolands Aussage ist richtig. Haben zwei Parabeln genau einen Punkt gemeinsam, nennt man diesen den Berührpunkt. Haben sie genau zwei gemeinsame Punkte, wird von Schnittpunkten gesprochen.

K5 **1** **a)** $\mathbb{L} = \{-4; 4\}$ **b)** $\mathbb{L} = \{-16; 0\}$ **c)** $\mathbb{L} = \varnothing$
**d)** $\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ **e)** $\mathbb{L} = \{-2; 0\}$ **f)** $\mathbb{L} = \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$
**g)** $\mathbb{L} = \{3; 11\}$ **h)** $\mathbb{L} = \{-4; 16\}$ **i)** $\mathbb{L} = \{-4; 14\}$
**j)** $\mathbb{L} = \{-3{,}5; 14{,}5\}$ **k)** $\mathbb{L} = \{-6{,}5; 3{,}5\}$ **l)** $\mathbb{L} = \{-1; 1\}$

K5 **2**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **a)** | $D = -3$ | $D < 0$ | keine Lösung | $\mathbb{L} = \varnothing$ |
| **b)** | $D = -16$ | $D < 0$ | keine Lösung | $\mathbb{L} = \varnothing$ |
| **c)** | $D = 1{,}0625$ | $D > 0$ | zwei Lösungen | $\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{17}\right\} = \{-0{,}39; 0{,}64\}$ |
| **d)** | $D = -7$ | $D < 0$ | keine Lösung | $\mathbb{L} = \varnothing$ |
| **e)** | $D = -1\frac{8}{9}$ | $D < 0$ | keine Lösung | $\mathbb{L} = \varnothing$ |
| **f)** | $D = 0$ | $D = 0$ | eine Lösung | $\mathbb{L} = \{7\}$ |

K3 **3** **a)** Für $x \in \mathbb{N}$ soll gelten:
$x + x^2 = 132$
$x^2 + x - 132 = 0$
$x_1 = -12 \notin \mathbb{N}$; $x_2 = 11 \in \mathbb{N}$
$x = 11$
Die Zahl ist 11.

**b)** Für $x \in \mathbb{N}$ soll gelten:
$x \cdot (x + 1) = 812$
$x^2 + x - 812 = 0$
$x_1 = -29 \notin \mathbb{N}$; $x_2 = 28$
$x = 28$
Die Zahlen lauten 28 und 29.

**c)** I $x - y = 7$
II $x \cdot y = 450$
$y^2 + 7y - 450 = 0$
$y_1 = -25$; $y_2 = 18$
Die Zahlenpaare sind $(-18 \mid -25)$ und $(25 \mid 18)$.

**d)** Für $x \in \mathbb{N}$ soll gelten:
$(2x)^2 + (2x + 2)^2 + (2x + 4)^2 + (2x + 6)^2 = 1176$
$16x^2 + 48x - 1120 = 0$
$x^2 + 3x - 70 = 0$
$x_1 = -10 \notin \mathbb{N}$; $x_2 = 7 \in \mathbb{N}$
$x = 7$
Die Zahlen lauten 14, 16, 18 und 20.

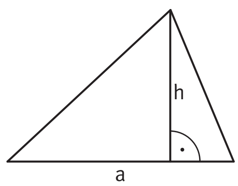
**e)** I $x + 12 = y$
II $x \cdot y = 864$
$x \cdot (x + 12) = 864$
$x^2 + 12x - 864 = 0$
$x_1 = -36$; $x_2 = 24$.
Die Zahlenpaare sind $(-36 \mid -24)$ und $(24 \mid 36)$.

**f)** $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^2 = 12{,}25$
$\frac{x^2}{9} + \frac{x^2}{16} = 12{,}25$
$16x^2 + 9x^2 = 1764$
$x^2 = 70{,}56$
$x_1 = -8{,}4$; $x_2 = 8{,}4$

K3 **4** **a)** Für $x \in \mathbb{N}$ gilt:
I $x + 7 = y$
II $x^2 + y^2 = 13^2$ (Pythagoras)
$x^2 + (x + 7)^2 = 169 \Leftrightarrow 2x^2 + 14x + 49 = 169 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 60 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 240}}{2} = -3{,}5 \pm 8{,}5$
$x_1 = -12$; $x_2 = 5$
Da $x \in \mathbb{N}$ gefordert ist, folgt: $x = 5$.
Das Dreieck hat die Seitenlängen 5 cm, 12 cm und 13 cm.

**b)** $u = (5 + 12 + 13)\,\text{cm} = 30\,\text{cm}$ $A = 0{,}5(5 \cdot 12)\,\text{cm}^2 = 30\,\text{cm}^2$
Der Umfang des Dreiecks beträgt 30 cm, der Flächeninhalt 30 cm².

K3 **5** Es gilt: $h = a\,\text{cm} - 4\,\text{cm}$ und $A = \frac{1}{2} \cdot a\,\text{cm} \cdot h\,\text{cm} = 160\,\text{cm}^2$
$160 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (a - 4)$
$a^2 - 4a - 320 = 0$
$a_1 = -16 \notin \mathbb{R}^+$; $a_2 = 20 \in \mathbb{R}^+$
Die Grundseite ist somit 20 cm und die Höhe 16 cm lang.



K3 **6** **a)** $(x + 0{,}5) \cdot (x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 = 1{,}5x + 1$
**b)** $(x - 0{,}03) \cdot (x - 0{,}5) = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 = 0{,}53x - 0{,}015$
**c)** $(x + 8) \cdot (x - 23) = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 = 15x + 184$

K5 **7** **a)** $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\quad 6x^2 + 10x + 4 = 7x^2 + 10x + 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$ $\quad \mathbb{L} = \{-1; 1\}$
**b)** $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\quad 144x^2 + 72x + 9 = 72x + 13 \Leftrightarrow 144x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \frac{1}{6}$ $\quad \mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right\}$
**c)** $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\quad 50x^2 + 18 = 218 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$ $\quad \mathbb{L} = \{-2; 2\}$
**d)** $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\quad x^2 + 24x + 63 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -12 \pm 9$ $\quad \mathbb{L} = \{-21; -3\}$
**e)** $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{9}; 36\right\}$ $\quad (52 - 7x) \cdot (4 - 9x) = (x - 36) \cdot (13x - 28)$
$\Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 4$ $\quad \mathbb{L} = \{-4; 4\}$
**f)** $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; -0{,}5\}$ $\quad (3x - 7) \cdot (2x + 1) = (x + 3) \cdot (2x - 5)$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = 2$ $\quad \mathbb{L} = \{1; 2\}$
**g)** $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\quad 3x^2 + 5 = 12 + 4x^2 - 10 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$ $\quad \mathbb{L} = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

K3 **8** Für den Radius $r \in \mathbb{R}_0^+$ des ursprünglichen Kreises gilt:
$3{,}14 \cdot (r + 39)^2 = 6{,}25 \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \Leftrightarrow r^2 + 78r + 1521 = 6{,}25r^2 \Leftrightarrow 5{,}25r^2 - 78r - 1521 = 0$
$r_{1/2} = \frac{78 \pm 195}{10{,}5}$
$r_1 = \frac{78 - 195}{10{,}5} \notin \mathbb{R}_0^+; r_2 = \frac{78 + 195}{10{,}5} = 26 \in \mathbb{R}_0^+$ $\quad \mathbb{L} = \{26\}$
Der Durchmesser des ursprünglichen Kreises beträgt 52 cm (bei 26 cm Radius), der Durchmesser des neuen Kreises beträgt 130 cm (bei 65 cm Radius).

K3 **9** Es sei x die Anzahl der Schrauben, die Ulf gekauft hat, und y der Preis pro Schraube in €, den Ulf bezahlt hat, mit $x, y > 0$.
I $\quad x \cdot y = 30 \Leftrightarrow x = \frac{30}{y}$
II $\quad (x + 100) \cdot (y - 0{,}05) = x \cdot y \Leftrightarrow x \cdot y - 0{,}05x + 100y - 5 = x \cdot y \Leftrightarrow 100y - 0{,}05x - 5 = 0$
$x = \frac{30}{y}$ in $100y - 5 - 0{,}05x = 0$ eingesetzt ergibt:
$100y - 5 - 0{,}05 \cdot \frac{30}{y} = 0 \Leftrightarrow 100y^2 - 5y - 1{,}5 = 0$
$y_{1/2} = \frac{5 \pm 25}{200}; y_1 = -0{,}1; y_2 = 0{,}15$ $\quad \Rightarrow y = 0{,}15$ (da $y > 0$); $x = \frac{30}{0{,}15} = 200$
Ulf hat 200 Schrauben gekauft beim Preis von 0,15 € je Schraube. Im zweiten Geschäft hätte Ulf für 30 € 300 Schrauben zum Preis von 0,10 € je Schraube bekommen.

K5 **10** **a)** $D = 9 - 28m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{28}$; außerdem muss gelten: $2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$
Für $m < \frac{9}{28}$ und $m \neq 0$ besitzt die Gleichung zwei Lösungen.
**b)** $4x^2 - 4mx + 4m + 16{,}25 = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx + m + 4{,}0625 = 0$
$D = m^2 - 4m - 16{,}25 = (m - 2)^2 - 20{,}25 > 0$
$\Leftrightarrow (m - 2)^2 > 20{,}25 \Rightarrow m < -2{,}5$ oder $m > 6{,}5$
Für $m < -2{,}5$ und für $m > 6{,}5$ besitzt die Gleichung zwei Lösungen.
**c)** $D = 16 + 4m \cdot (3 - 2m) = 16 + 12m - 8m^2 = -8[(m - 0{,}75)^2 - 2{,}5625]$
$D = -8[(m - 0{,}75)^2 - 2{,}5625] > 0 \Leftrightarrow (m - 0{,}75)^2 - 2{,}5625 < 0 \Leftrightarrow (m - 0{,}75)^2 < 2{,}5625$
$\Rightarrow -\sqrt{2{,}5625} < m - 0{,}75 < \sqrt{2{,}5625} \Leftrightarrow -0{,}85 < m < 2{,}35$
Für $-0{,}85 < m < 2{,}35$ und $m \neq 0$ besitzt die Gleichung zwei Lösungen.
**d)** $D = 0 - 4(-3m)(5m + 3) = 60m^2 + 36m = 60[(m + 0{,}3)^2 - 0{,}3^2] > 0$
$\Rightarrow (m + 0{,}3)^2 > 0{,}3^2 \Leftrightarrow m < -0{,}6$ oder $m > 0$
Für $m < -0{,}6$ und für $m > 0$ besitzt die Gleichung zwei Lösungen.

K3 **11** **a)** $2(x+2)\cdot(x-3)=0$
$\Leftrightarrow 2x^2-2x-12=0$

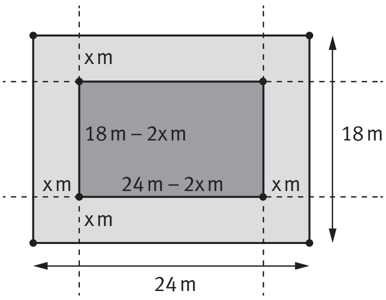
**b)** $(x+7)(x-3)=0$
$\Leftrightarrow x^2+4x-21=0$

**c)** $(x+3{,}5)\cdot(x-1{,}5)=0$
$\Leftrightarrow x^2+2x-5{,}25=0$
$\Leftrightarrow \frac{8}{21}x^2+\frac{16}{21}x-2=0$

**d)** $5(x+0{,}1)\cdot(x-0{,}5)=0$
$\Leftrightarrow 5(x^2-0{,}4x-0{,}05)=0$
$\Leftrightarrow 5x^2-2x-0{,}25=0$

K3 **12** **a)** $A(x)=(4\,\text{cm}+x\,\text{cm})^2=(x^2+8x+16)\,\text{cm}^2$ mit $x\in\mathbb{D}=\mathbb{R}^+$
**b)** $A(x)=64\,\text{cm}^2 \;\Leftrightarrow\; x^2+8x+16=64 \;\Leftrightarrow\; x^2+8x-48=0 \;\Leftrightarrow\; (x+12)\cdot(x-4)=0$
$\Rightarrow x_1=-12\notin\mathbb{D};\ x_2=4\in\mathbb{D}$
Für $x=4$ hat der Flächeninhalt den Wert $64\,\text{cm}^2$.
**c)** Damit $(x+4)^2\le 64$ erfüllt ist, darf x den Wert 4 nicht übersteigen; d. h.: $0<x\le 4$

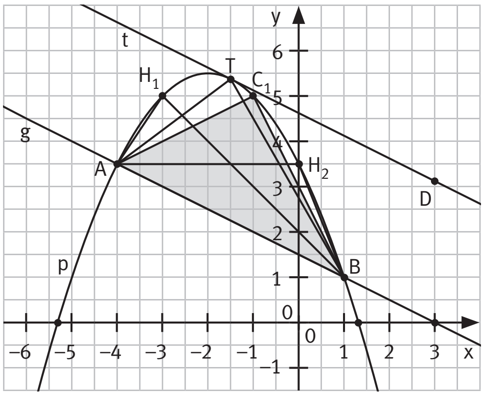
K2 **13** Skizze:




Fläche des Grundstücks: $A_0=(24\,\text{m})\cdot(18\,\text{m})=432\,\text{m}^2$
Fläche der Baugrube: $A_1=\frac{2}{3}\cdot 432\,\text{m}^2=288\,\text{m}^2$
Es sei x m die Breite des Streifens mit $0<x<9$.
Die Baugrube ist $(24-2x)$ m lang und $(18-2x)$ m breit.
Für $A(x)=(24-2x)\cdot(18-2x)\,\text{m}^2$ soll gelten:
$(24-2x)\cdot(18-2x)\,\text{m}^2=288\,\text{m}^2$
$\Rightarrow 4x^2-84x+144=0\Leftrightarrow x^2-21x+36=0$
$x_{1/2}=\frac{21\pm\sqrt{441-144}}{2}\approx\frac{21\pm 17{,}2}{2};\ x_1=1{,}9;\ x_2=19{,}1.$
Wegen $0<x<9$ gilt: $x=1{,}9$.
Der Streifen ist 1,9 m breit, die Baugrube ist 20,2 m lang und 14,2 m breit.

K5 **14** **a)** $x_Q=-2$ in p einsetzen: $y_Q=2\cdot(-2)^2+12\cdot(-2)+18=2$ $\quad Q(-2\,|\,2)\in p$
**b)** $m_{PQ}=\frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}=\frac{2}{-2+1}=-2$ $\quad\Rightarrow PQ{:}\ y=-2x+t$
P $(-1\,|\,0)$ in PQ einsetzen: $0=-2\cdot(-1)+t\Leftrightarrow t=-2$ $\quad PQ{:}\ y=-2x-2$
PQ und p gleichsetzen: $2x^2+12x+18=-2x-2$
$\Leftrightarrow x^2+7x+10=0$
$\Rightarrow x_R=-5;\ x_Q=-2$ $\quad R(-5\,|\,8)$
**c)** $p\cap t_1$: $2x^2+12x+18=0 \;\Leftrightarrow\; x^2+6x+9=0 \;\Leftrightarrow\; (x+3)^2=0 \;\Rightarrow\; x=-3$
$p\cap t_2$: $2x^2+12x+18=16x+16 \;\Leftrightarrow\; 2x^2-4x+2=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-2x+1=0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)^2=0 \;\Rightarrow\; x=1$
Es gibt jeweils nur einen gemeinsamen Punkt von p mit $t_1$ bzw. von p mit $t_2$, $t_1$ und $t_2$ sind Tangenten an p.
P $(-1\,|\,0)$ in $t_1$ eingesetzt: $0=0$ (w) $P(-1\,|\,0)\in t_1$
P $(-1\,|\,0)$ in $t_2$ eingesetzt: $0=-16+16$ (w) $P(-1\,|\,0)\in t_2$
**d)** $x=-3$ in $t_1$ und $x=1$ in $t_2$ einsetzen: $T_1(-3\,|\,0)$
$T_2(1\,|\,32)$
**e)** $D=m(m-16)<0$ $\quad$ 1. Fall: $m<0\wedge m>16;\ \mathbb{L}_1=\varnothing$
2. Fall: $m>0\wedge m<16;\ \mathbb{L}_2=\,]0;\,16[$
Damit die Gerade durch P eine Passante zu p ist, muss $0<m<16$ gelten.

K2 **15 a)** und **e)**




**d)** t: $y = -0{,}5x + b$
D (3 | 3,125) in t einsetzen:
$3{,}125 = -0{,}5 \cdot 3 + b$
$\Leftrightarrow b = 4{,}625$
t: $y = -0{,}5x + 4{,}625$
Terme von p und t gleichsetzen:
$0{,}5x^2 + 1{,}5x + 1{,}125 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2{,}25 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 1{,}5)^2 = 0 \Rightarrow x = -1{,}5$
t: $y = -0{,}5x + 4{,}625$ berührt p in T (–1,5 | 5,375).

**b)** Nullstellen von p:
$-0{,}5x^2 - 2x + 3{,}5 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0{,}5x^2 + 2x - 3{,}5$
$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{11} \approx -2 \pm 3{,}3$
$x_1 \approx -5{,}3$; $x_2 \approx 1{,}3$
Nullstelle von g: $-0{,}5x + 1{,}5 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

**c)** $-0{,}5x^2 - 2x + 3{,}5 = -0{,}5x + 1{,}5$
$\Leftrightarrow 0{,}5x^2 + 1{,}5x - 2 = 0$
$x_{1/2} = -1{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = -1{,}5 \pm 2{,}5$
$x_1 = -4$; $x_2 = 1$; A (–4 | 3,5) und B (1 | 1)

**f)** Für $x \in \,]-4;\, 1[$ existieren Dreiecke $ABC_n$ (unter Beachtung des Umlaufsinns).

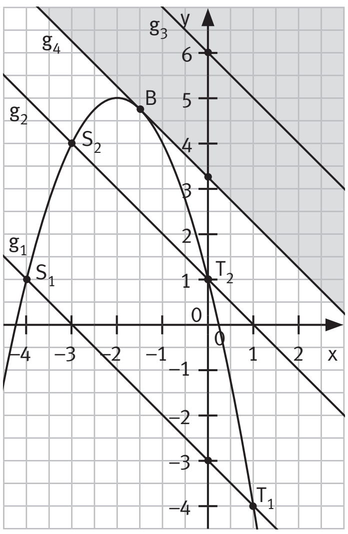
**g)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x+4 \\ -0{,}5x^2 - 2x \end{pmatrix}$

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & x+4 \\ -2{,}5 & -0{,}5x^2 - 2x \end{vmatrix}$ FE
$= \frac{1}{2} \cdot [5 \cdot (-0{,}5x^2 - 2x) + 2{,}5 \cdot (x + 4)]$ FE
$= (-1{,}25x^2 - 3{,}75x + 5)$ FE

**h)** $(-1{,}25x^2 - 3{,}75x + 5)$ FE = 5 FE
$\Leftrightarrow 1{,}25x^2 + 3{,}75x = 0$
$\Rightarrow x_1 = -3 \in \,]-4;\, 1[$; $x_2 = 0 \in \,]-4;\, 1[$
Die Dreiecke $ABH_1$ und $ABH_2$ mit $H_1$ (–3 | 5) und $H_2$ (0 | 3,5) haben den Flächeninhalt 5 FE.

**i)** Quadratisches Ergänzen:
$-1{,}25x^2 - 3{,}75x + 5$
$= -1{,}25(x + 1{,}5)^2 + 7{,}8125$
Der Flächeninhalt des Dreiecks $ABC_0$ ist maximal für $T = C_0$ (–1,5 | 5,375).

K2 **16 a)** und **e)**



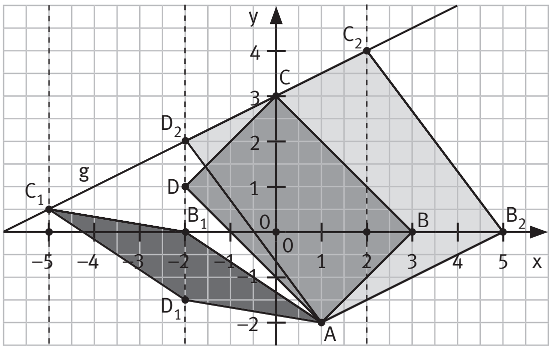

**e)** $D = 13 - 4t < 0 \Rightarrow t > 3{,}25$
Für $t > 3{,}25$ ist g (t) Passante an p; mögliche Werte sind 4, 5, 6 …

**b)** $S_1$ (–4 | 1) und $T_1$ (1 | –4) in p (x) und $g_1$ (x) einsetzen:
$p(-4) = -16 + 16 + 1 = 1$ $\quad g_1(-4) = 4 - 3 = 1$
$p(1) = -1 - 4 + 1 = -4$ $\quad g_1(1) = -1 - 3 = -4$

**c)** $-x^2 - 4x + 1 = -x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0$
$\Rightarrow x_1 = -3$ und $y_1 = 4$ $\quad x_2 = 0$ und $y_2 = 1$
$\Rightarrow S_2$ (–3 | 4) und $T_2$ (0 | 1)

**d)** Gleichsetzen von p und $g_4$:
$-x^2 - 4x + 1 = -x + 3{,}25$
$\Leftrightarrow 0 = x^2 + 3x + 2{,}25$
$\Leftrightarrow 0 = (x + 1{,}5)^2$ $\quad \Rightarrow x = -1{,}5$; $y = 4{,}75$
Für t = 3,25 berührt $g_4$ die Parabel in B (–1,5 | 1,5 + 3,25) = B (–1,5 | 4,75).

Kx **17**




**a)** $AB_1C_1D_1$ mit A (1|–2), $B_1$ (–2|0), $C_1$ (–5|0,5), $D_1$ (–2|–1,5)
$AB_2C_2D_2$ mit A (1|–2), $B_2$ (5|0), $C_2$ (2|4), $D_2$ (–2|2)

**b)** Mit x = 3 erhält man die Eckpunkte B (3|0), C (0|3) und D (–2|1), die mit A (1|–2) ein Parallelogramm bilden.
Für die Geraden AB und BC gilt:
AB: y = x – 3 und BC: y = 3 – x, d. h.: $m_{AB} = 1$ und $m_{BC} = -1 \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$
Die parallelen Geraden AB und DC stehen senkrecht zu den parallelen Geraden BC und AD. Damit ist das Parallelogramm ABCD ein Rechteck.

**c)** Flächeninhalt der Parallelogramme mit $\overrightarrow{B_nA} = \begin{pmatrix} x-1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{B_nC_n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0{,}5x+1{,}5 \end{pmatrix}$:
$A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ 2 & 0{,}5x+1{,}5 \end{vmatrix}$ FE $= [(x-1) \cdot (0{,}5x+1{,}5) + 6]$ FE $= [0{,}5x^2 + x + 4{,}5]$ FE

**d)** A (x) = 116,5 FE $\Leftrightarrow 0{,}5x^2 + x + 4{,}5 = 116{,}5 \Leftrightarrow x_1 = -16;\ x_2 = 14$
A (x) = 64,5 FE $\Leftrightarrow 0{,}5x^2 + x + 4{,}5 = 64{,}5 \Leftrightarrow x_1 = -12;\ x_2 = 10$
Mit x = –16 bzw. x = 14 haben die Parallelogramme einen Flächeninhalt von 116,5 FE.
Mit x = –12 bzw. x = 10 haben die Parallelogramme einen Flächeninhalt von 64,5 FE.

Kx **18** **a)** (Abbildung s. Schulbuch)

**b)** Die Parabel zu p: $y = -0{,}25(x+3)^2 + 2$ hat den Scheitelpunkt S (–3|2) und ist mit a = –0,25 eine nach unten geöffnete Parabel. Nullstellen von p:
$-0{,}25(x+3)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 8$
$\Rightarrow x_1 = -3 - 2\sqrt{2} \approx -5{,}83 \qquad x_2 = -3 + 2\sqrt{2} \approx -0{,}17$
Die an der x-Achse gespiegelte Parabel hat den Scheitelpunkt S' (–3|–2), sie ist mit a' = 0,25 nach oben geöffnet. Es gilt: p': $y = 0{,}25(x+3)^2 - 2$. Nullstellen von p':
$0{,}25(x+3)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 8$
$\Rightarrow x_1 = -3 - 2\sqrt{2} \approx -5{,}83 \qquad x_2 = -3 + 2\sqrt{2} \approx -0{,}17$
Die Parabeln p und p' haben die gleichen Nullstellen: $x_1 \approx -5{,}83$; $x_2 \approx -0{,}17$.
Die Parabeln schneiden sich in $S_1$ (–5,83|0) und $S_2$ (–0,17|0).

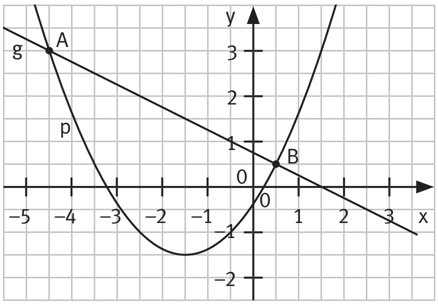
**c)** Gleichsetzen der Funktionsgleichungen von p: $-0{,}25(x+3)^2 + 2$ und $g_1$: $y = -0{,}5x + 0{,}75$ ergibt:
$-0{,}25x^2 - 1{,}5x - 0{,}25 = -0{,}5x + 0{,}75 \quad \Leftrightarrow -0{,}25x^2 - x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0$
Die beiden Graphen haben bei x = –2 einen einzigen gemeinsamen Punkt; d. h.: $g_1$ ist Tangente an p.

**d)** $g_2$ ist die an der Geraden x = –3 gespiegelte Gerade $g_1$ mit der Steigung $m_2 = 0{,}5$, der gemeinsame Punkt von $g_1$ und $g_2$ ist B (–3|–0,5 · (–3) + 0,75) = B (–3|2,25).
Einsetzen von B (–3|2,25) in $g_2$: $y = 0{,}5x + t_2$ liefert:
$2{,}25 = -1{,}5 + t_2 \Leftrightarrow t_2 = 3{,}75 \qquad \Rightarrow \quad g_2$: $y = 0{,}5x + 3{,}75$
Die an der x-Achse gespiegelte Gerade $g_1$ ist: $g_4$: $y = 0{,}5x - 0{,}75$
Die an der x-Achse gespiegelte Gerade $g_2$ ist: $g_3$: $y = -0{,}5x - 3{,}75$
Nullstelle von $g_1$: $0 = -0{,}5x + 0{,}75 \Leftrightarrow x = 1{,}5 \quad \Rightarrow$ A (1,5|0)
Die Raute setzt sich zusammen aus A (1,5|0), B (–3|2,25), C (–7,5|0), D (–3|–2,25).

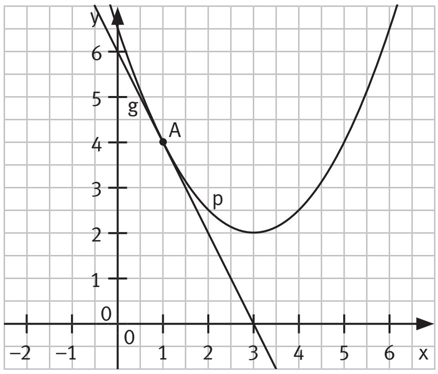
Kx

**19** Im Folgenden werden die Funktionsgleichungen von g und p bzw. von p und q gleichgesetzt, die Gleichung geeignet umgeformt, die Diskriminante berechnet und – falls Lösungen existieren – die Koordinaten der Schnittpunkte berechnet.

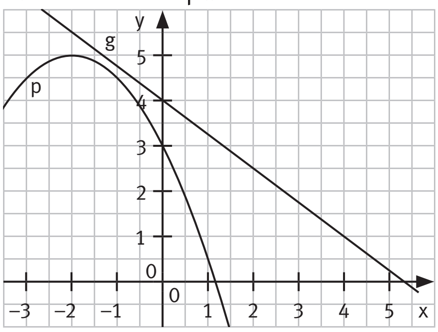
**a)** $-0{,}5x + 0{,}75 = 0{,}5x^2 + 1{,}5x - 0{,}375$
$\Leftrightarrow 0{,}5x^2 + 2x - 1{,}125 = 0$
$D = 4 + 2{,}25 = 6{,}25 > 0$
$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{6{,}25}}{1} = -2 \pm 2{,}5$
$\Rightarrow$ zwei Schnittpunkte
A (−4,5 | 3) und B (0,5 | 0,5)



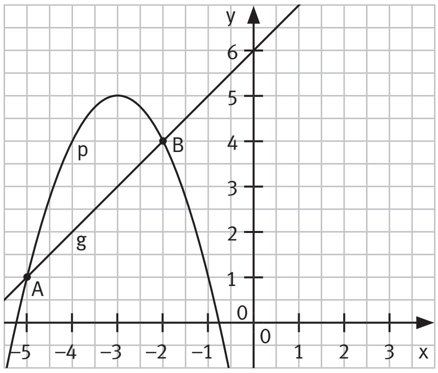

**b)** $-2x + 6 = 0{,}5(x-3)^2 + 2$
$\Leftrightarrow 0{,}5x^2 - x + 0{,}5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$
$D = 1 - 1 = 0$
$x = 1$
$\Rightarrow$ ein Schnittpunkt
A (1 | 4)



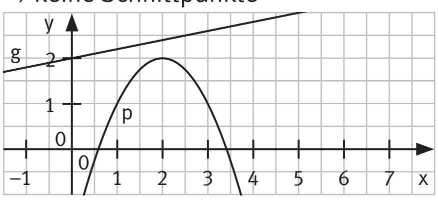

**c)** $-0{,}75x + 4 = -0{,}5x^2 - 2x + 3$
$\Leftrightarrow 0{,}5x^2 + 1{,}25x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 2{,}5x + 2 = 0$
$D = 6{,}25 - 8 = -1{,}75 < 0$
$\Rightarrow$ keine Schnittpunkte



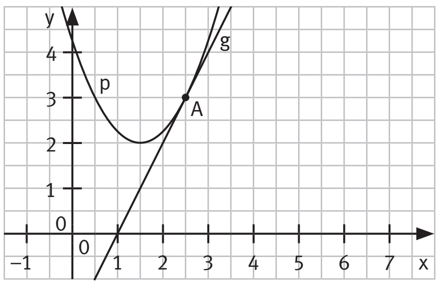

**d)** $x + 6 = -x^2 - 6x - 4$
$\Leftrightarrow x^2 + 7x + 10 = 0$
$D = 49 - 40 = 9 > 0$
$x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2} = -3{,}5 \pm 1{,}5$
$\Rightarrow$ zwei Schnittpunkte
A (−5 | 1) und B (−2 | 4)



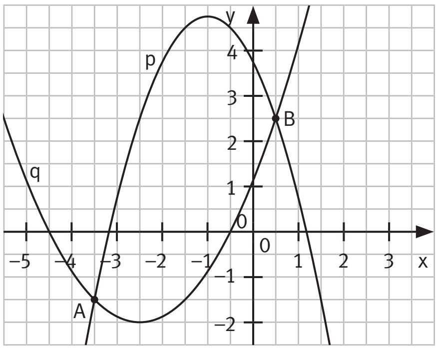

**e)** $0{,}2x + 2 = -x^2 + 4x - 2$
$\Leftrightarrow x^2 - 3{,}8x + 4 = 0$
$D = 14{,}44 - 16 = -1{,}56 < 0$
$\Rightarrow$ keine Schnittpunkte



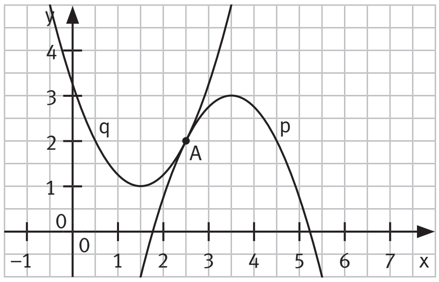

**f)** $2x - 2 = x^2 - 3x + 4{,}25$
$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6{,}25 = 0 \Leftrightarrow (x-2{,}5)^2 = 0$
$D = 25 - 25 = 0$
$\Rightarrow$ ein Schnittpunkt
A (2,5 | 3)



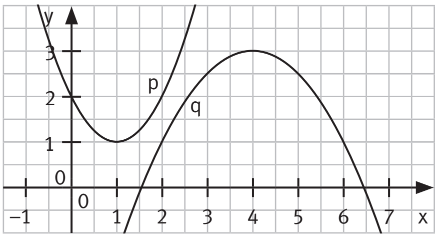
**g)** $-(x+1)^2 + 4{,}75 = 0{,}5x^2 + 2{,}5x + 1{,}125$
$\Leftrightarrow 1{,}5x^2 + 4{,}5x - 2{,}625 = 0$
$D = 20{,}25 + 15{,}75 = 36 > 0$
$x_{1/2} = \frac{-4{,}5 \pm \sqrt{36}}{3} = -1{,}5 \pm 2$
$\Rightarrow$ zwei Schnittpunkte
A (–3,5 | –1,5) und B (0,5 | 2,5)



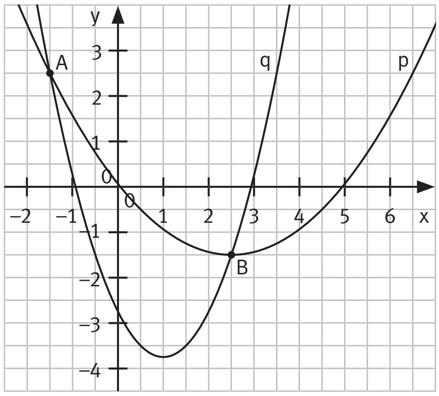

**h)** $-(x-3{,}5)^2 + 3 = x^2 - 3x + 3{,}25$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 12{,}5 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2{,}5)^2 = 0$
$D = 25 - 25 = 0$
$x = 2{,}5$
$\Rightarrow$ ein Schnittpunkt
A (2,5 | 2)



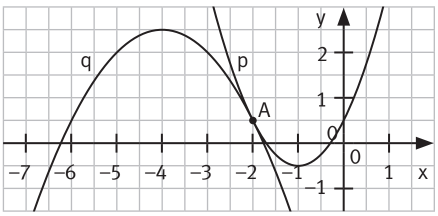

**i)** $(x-1)^2 + 1 = -0{,}5x^2 + 4x - 5$
$\Leftrightarrow 1{,}5x^2 - 6x + 7 = 0$
$D = 36 - 42 = -6 < 0$
$\Rightarrow$ keine Schnittpunkte



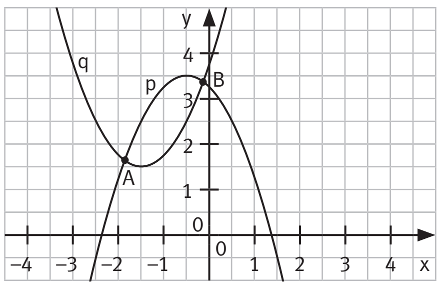

**j)** $0{,}25x^2 - 1{,}25x + 0{,}0625 = (x-1)^2 - 3{,}75$
$\Leftrightarrow 0{,}75x^2 - 0{,}75x - 2{,}8125 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - x - 3{,}75 = 0$
$D = 1 + 15 = 16 > 0$
$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{16}}{2} = 0{,}5 \pm 2$
$\Rightarrow$ zwei Schnittpunkte
A (–1,5 | 2,5) und B (2,5 | –1,5)




**k)** $(x+1)^2 - 0{,}5 = -0{,}5x^2 - 4x - 5{,}5$
$\Leftrightarrow 1{,}5x^2 + 6x + 6 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 0$
$D = 16 - 16 = 0$
$x = -2$
$\Rightarrow$ ein Schnittpunkt
A (–2 | 0,5)




**l)** $-x^2 - x + 3{,}25 = x^2 + 3x + 3{,}75$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 0{,}5 = 0$
$D = 16 - 4 = 12 > 0$
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{4} = -1 \pm 0{,}5\sqrt{3}$
$\Rightarrow$ zwei Schnittpunkte
A (–1,9 | 1,6) und B (–0,1 | 3,4)



Kx

**20 a)** $-(x^2 - 6x + 9) + 7 = 0{,}4x^2 - x + 3{,}6$

$\Leftrightarrow 1{,}4x^2 - 7x + 5{,}6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \;\Rightarrow x_1 = 1;\; x_2 = 4 \qquad S_1\,(1\,|\,3)$ und $S_2\,(4\,|\,6)$

**b)** $m = \frac{6-3}{4-1} = 1 \qquad S_1\,(1\,|\,3)$ in g: $y = x + t$ einsetzen: $3 = 1 + t \Leftrightarrow t = 2 \qquad$ g: $y = x + 2$

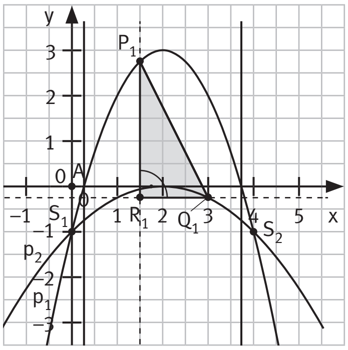
**c)** $p_1$: $y = -(x-3)^2 + 7$ und h: $y = x + \frac{17}{4}$ gleichsetzen:

$-x^2 + 6x - 2 = x + 4{,}25 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6{,}25 = 0 \Rightarrow$ Diskriminante $D = 25 - 25 = 0 \Rightarrow$ eine Lösung

Die Parabel $p_1$ hat mit h nur einen gemeinsamen Punkt, damit ist h Tangente an $p_1$.

Kx

**21 a)** und **b)**




**a)** $p_1 \cap p_2$:

$-x^2 + 4x - 1 = -0{,}25x^2 + x - 1$

$\Leftrightarrow 0 = 0{,}75x^2 - 3x \Leftrightarrow 0 = x \cdot (x - 4)$

$\Rightarrow x_1 = 0;\; x_2 = 4$ bzw. $S_1\,(0\,|\,-1);\; S_2\,(4\,|\,-1)$

**b)** $P_1\,(1{,}5\,|\,p_1(1{,}5)) = P_1\,(1{,}5\,|\,2{,}75);\; Q_1\,(3\,|\,p_2(3)) = Q_1\,(3\,|\,-0{,}25)$

**c)** Das Dreieck $P_1R_1Q_1$ mit $R_1\,(1{,}5\,|\,-0{,}25)$ ist rechtwinklig und hat die Seitenlängen (Maßzahlen) $p_1 = 1{,}5$ und $q_1 = 2{,}75 + 0{,}25 = 3$.

$\overline{P_1Q_1} = \sqrt{1{,}5^2 + 3^2} \approx 3{,}35$ (nach Pythagoras)

**d)** $Q_n\,(2x\,|\,p_2(2x)) = Q_n\,(2x\,|\,-x^2 + 2x - 1)$

**e)** Zur Vereinfachung betrachte man x und $p_1(x) \in \mathbb{R}_0^+$, d. h.: $x \in [2 - \sqrt{3};\, 2 + \sqrt{3}] \approx [0{,}27;\, 3{,}73]$

Das Dreieck $P_nR_nQ_n$ mit $P_n\,(x\,|\,-x^2 + 4x - 1)$, $Q_n\,(2x\,|\,-x^2 + 2x - 1)$ und $R_n\,(x\,|\,-x^2 + 2x - 1)$ ist rechtwinklig bei $R_n$; die Seitenlängen (Maßzahlen) des Dreiecks sind:

$\overline{P_nQ_n} = \sqrt{(x_{P_n} - x_{Q_n})^2 + (y_{P_n} - y_{Q_n})^2} = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{5x^2} = x\sqrt{5}$

### Geschichte

K5/6

- Lösungsmöglichkeit zum Leben von François Viète:
  – geboren 1540 in Fontenay-le-Comte
  – Besuch einer Klosterschule
  – Studium der Rechtswissenschaften mit 18 Jahren
  – Arbeit als Advokat und Rechtsanwalt
  – Beschäftigung mit Mathematik und Lösen einer weltweit gestellten Aufgabe
  – gestorben am 13. Dezember 1603 in Paris
- Lösungsmöglichkeit für die weiteren mathematische Erkenntnisse:
  – Lösung des apollonischen Problems (gesucht: alle Kreise, die drei gegebene Kreise berühren) mit Zirkel und Lineal
  – Einführung des Rechnens mit Buchstaben, Symbolen und mathematischen Operationen wie +, –, = und Bruchstrich
  – Produktdarstellung der Kreiszahl $\pi$
- 

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 $x_1 = 2;\; x_2 = 5$ | 2 $x_1 = -3;\; x_2 = 6$ | 3 $x_1 = -3;\; x_2 = 9$ | 4 $x_1 = -15;\; x_2 = 8$ |
| 5 $x_1 = -3;\; x_2 = 15$ | 6 $x_1 = -9;\; x_2 = 5$ | 7 $x_1 = -5;\; x_2 = 7$ | 8 $x_1 = -7;\; x_2 = -1$ |

- 

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $p = -3$ | $q = -10$ | $y = x^2 - 3x - 10$ |
| 2 | $p = -24$ | $q = 108$ | $y = x^2 - 24x + 108$ |
| 3 | $p = 3$ | $q = -28$ | $y = x^2 + 3x - 28$ |
| 4 | $p = -1$ | $q = -8{,}75$ | $y = x^2 - x - 8{,}75$ |
| 5 | $p = 4{,}8$ | $q = 4{,}32$ | $y = x^2 + 4{,}8x + 4{,}32$ |
| 6 | $p = -8$ | $q = 0$ | $y = x^2 - 8x$ |

K5 **1** **a)** $\mathbb{L} = \{-11; 11\}$ **b)** $\mathbb{L} = \{-9; 9\}$ **c)** $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$ **d)** $\mathbb{L} = \{-23; 23\}$

K4 **2** **a)** $x^2 = -x + 2$ $\mathbb{L} = \{-2; 1\}$ **b)** $-x^2 + 3{,}5 = -2x + 3{,}5$ $\mathbb{L} = \{0; 2\}$

K3 **3** $\mathbb{D} = \mathbb{N}$

**a)** $x^2 + 2x = 323$

$x_1 = -19 \notin \mathbb{D}$; $x_2 = 17 \in \mathbb{D}$

Die gesuchte natürliche Zahl ist 17.

**b)** $x^2 + \frac{1}{2}x = 742{,}5$

$x_1 = -27{,}5 \notin \mathbb{D}$; $x_2 = 27 \in \mathbb{D}$

Die gesuchte natürliche Zahl ist 27.

**c)** $x^2 + \frac{1}{10}x = 101$

$x_1 = -10{,}1 \notin \mathbb{D}$; $x_2 = 10 \in \mathbb{D}$

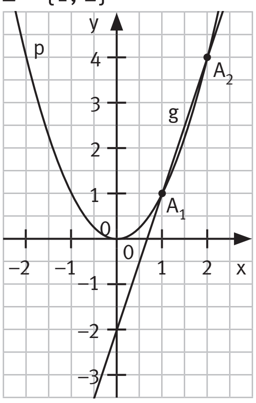
Die gesuchte natürliche Zahl ist 10.

**d)** $x^2 - x = x$

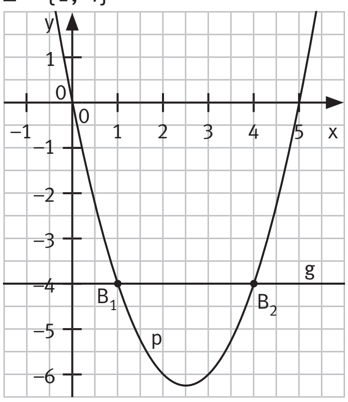
$x_1 = 0$; $x_2 = 2 \in \mathbb{D}$

Die gesuchten natürlichen Zahlen sind 0 und 2.

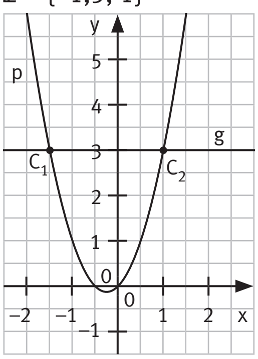
K4 **4** **a)** $\mathbb{L} = \{1; 2\}$



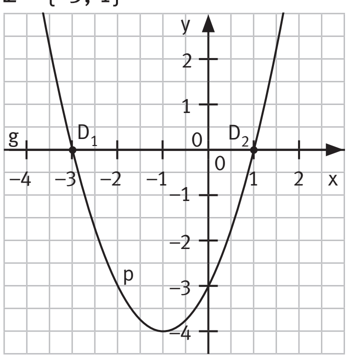

**b)** $\mathbb{L} = \{1; 4\}$



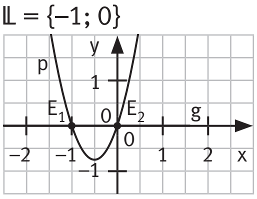

**c)** $\mathbb{L} = \{-1{,}5; 1\}$



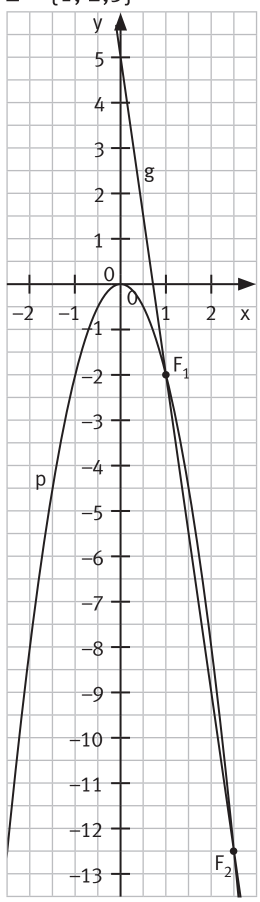

**d)** $\mathbb{L} = \{-3; 1\}$




**e)** $\mathbb{L} = \{-1; 0\}$




**f)** $\mathbb{L} = \{1; 2{,}5\}$



K5 **5** **a)** $(x+12)(x-23)=0$ $\mathbb{L}=\{-12; 23\}$ **b)** $x^2-4x-165=0$ $\mathbb{L}=\{-11; 15\}$

**c)** $x^2-4x+77=0$ $\mathbb{L}=\varnothing$ **d)** $x^2-0{,}6x-0{,}72=0$ $\mathbb{L}=\{-0{,}6; 1{,}2\}$

**e)** $3x^2+13x-30=0$ $\mathbb{L}=\left\{-6; \frac{5}{3}\right\}$ **f)** $x^2-2x+0{,}75=0$ $\mathbb{L}=\{0{,}5; 1{,}5\}$

**g)** $2x^2-13x-45=0$ $\mathbb{L}=\{-2{,}5; 9\}$ **h)** $x^2-1=0$ $\mathbb{L}=\{-1; 1\}$

**i)** $(7+5x)\cdot(9x-8)=(5+7x)\cdot(9-8x)$ $\mathbb{L}=\{-1; 1\}$

**j)** $(52-7x)\cdot(4-9x)=(x-36)\cdot(13x-28)$ $\mathbb{L}=\{-4; 4\}$

**k)** $6x^2+10x+4=7x^2+10x+3$ $\mathbb{L}=\{-1; 1\}$

K3 **6** Lösungsmöglichkeit (alle Angaben in cm bzw. cm²; $\mathbb{D}=\mathbb{Q}$ mit $x>0$)

Flächeninhalt der Platte: $A=a^2=60^2=3600$

Verschnitt: $0{,}125\cdot 3600=450$

Summe der Dreiecksflächen: $4\cdot\frac{1}{2}x^2=2x^2$

Bestimmung von x: $2x^2=450 \Rightarrow x_1=-15\notin\mathbb{D}; x_2=15\in\mathbb{D}$

Es müssen gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit der Schenkellänge 15 cm abgeschnitten werden.

K5 **7** **a)** $2x^2-2{,}5x-2=0$

$D=6{,}25+16=22{,}25>0$

$x_{1/2}=\frac{2{,}5\pm\sqrt{22{,}25}}{4}$

$x_1\approx-0{,}55; x_2\approx 1{,}8$

$S_1(-0{,}55|1{,}72); S_2(1{,}8|2{,}9)$

**b)** $0{,}25x^2+0{,}375x+0{,}25=0$

$D=0{,}140625-0{,}25<0$

Kein Schnittpunkt

**c)** $x^2+3x+2{,}25=0$

$(x+1{,}5)^2=0$

$x=-1{,}5$

$S(-1{,}5|4{,}75)$

**d)** $0{,}75x^2-4{,}5x+6=0$

$D=20{,}25-18=2{,}25>0$

$x_{1/2}=\frac{4{,}5\pm\sqrt{2{,}25}}{1{,}5}$

$x_1=2; x_2=4$

$S_1(2|2); S_2(4|6)$

**e)** $0{,}375x^2+1{,}75x+2{,}5=0$

$D=3{,}0625-3{,}75<0$

Kein Schnittpunkt

**f)** $2x^2-2x-2=0$

$D=4+16=20>0$

$x_{1/2}=\frac{2\pm2\sqrt{5}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x_1\approx-0{,}6; x_2\approx 1{,}6$

$S_1(-0{,}6|0); S_2(1{,}6|0)$

KX **8** **a)** $x^2+1=-2x \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$ $\mathbb{L}=\{-1\}$

Es gibt nur einen gemeinsamen Punkt, g ist Tangente an p mit $B(-1|2)$.

**b)** $-0{,}5x^2+2x=-x+5 \Leftrightarrow 0{,}5x^2-3x+5=0 \Rightarrow x_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{9-10}}{1}=3\pm\sqrt{-1}$ $\mathbb{L}=\{\varnothing\}$

Es gibt keinen gemeinsamen Punkt, g ist weder Tangente noch Sekante an p.

KX **9** Gerade g durch $P(2|-4)$ und $Q(8|8)$:

I $-4=2m+t \Leftrightarrow t=-4-2m$

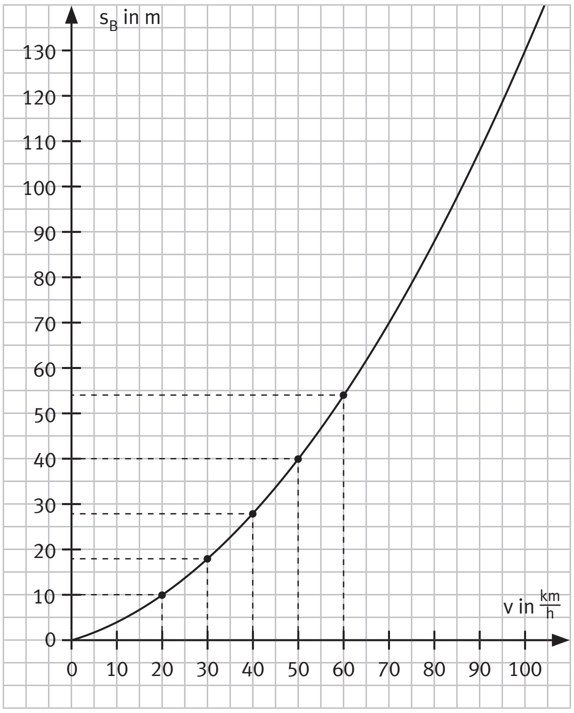
II $8=8m+t \Rightarrow 8=8m-4-2m \Leftrightarrow 12=6m \Rightarrow m=2; t=-8$ $g: y=2x-8$

$p\cap g: x^2-6x+8=2x-8 \Leftrightarrow x^2-8x+16=0 \Leftrightarrow (x-4)^2=0$ $x=4$

Es gibt genau einen gemeinsamen Punkt von p und g, g ist Tangente an p mit $T(4|0)$.

K2 **10 a)** Bei $v = 30\,\frac{km}{h}$ gilt: $s_B = 18\,m$  Bei $v = 50\,\frac{km}{h}$ gilt: $s_B = 40\,m$

**b)**




$\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$

**c)** Es gilt: $10 = 0{,}3v + 0{,}01v^2$

$\Leftrightarrow 0{,}01v^2 + 0{,}3v - 10 = 0$

$\Leftrightarrow v_{1/2} = \frac{-0{,}3 \pm \sqrt{0{,}3^2 + 0{,}4}}{0{,}02} = \frac{-0{,}3 \pm 0{,}7}{0{,}02}$

$\Rightarrow v = 20\,\frac{km}{h}$

Der Fahrer dürfte höchstens $20\,\frac{km}{h}$ fahren.

**d)** Bei $v = 40\,\frac{km}{h}$ gilt: $s_B = 28\,m$

Bei $v = 60\,\frac{km}{h}$ gilt: $s_B = 54\,m$

Der Bremsweg vergrößert sich von 28 m auf 54 m, also um 26 m.

K3 **11** Sei x die Anzahl der Liter und y der Preis pro Liter in €, dann ergeben sich folgende Gleichungen:

I $x \cdot y = 50 \Leftrightarrow y = \frac{50}{x}$

II $(x - 1) \cdot (y + 0{,}05) = 50$

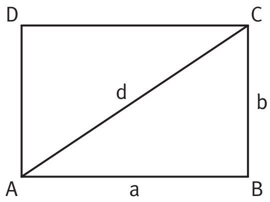
$(x - 1) \cdot \left(\frac{50}{x} + 0{,}05\right) = 50$

$x^2 - x - 1000 = 0$

$x_1 = -31{,}13 \notin \mathbb{R}^+$; $x_2 \approx 32{,}13 \in \mathbb{R}^+$

Ein Liter Benzin hat vor der Preiserhöhung $\frac{50}{32{,}13}\,€ \approx 1{,}556\,€$ gekostet.

K 3 **12 a)**




Es gilt: $a - 3 = b$

Im Dreieck ABC ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras: $d^2 = a^2 + b^2$

$$15^2 = a^2 + (a - 3)^2$$

$$-2a^2 + 6a + 216 = 0$$

$$a^2 - 3a - 108 = 0$$

$a_1 = -9 \notin \mathbb{R}^+$; $a_2 = 12 \in \mathbb{R}^+$

Die Seiten sind 12 cm und 9 cm lang.

**b)** Ursprüngliche Seitenlänge: a; ursprünglicher Flächeninhalt: $A = a^2$

neue Seitenlänge: $a_{neu} = a + 4$; neuer Flächeninhalt: $A_{neu} = (a + 4)^2$

Bedingung: $A_{neu} = 9A = 9a^2$

$(a + 4)^2 = 9a^2 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0$ $\qquad a_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = 0{,}5 \pm 1{,}5$

$a_1 = -1 \notin \mathbb{R}^+$; $a_2 = 2 \in \mathbb{R}^+$.

Die ursprüngliche Seitenlänge beträgt 2 cm, die neue Seitenlänge 6 cm.

K 1/6 **13** Die Aussage ist falsch. Eine reinquadratische Gleichung ist eine quadratische Gleichung, bei der die Variable nur quadratisch vorkommt: $ax^2 + c = 0$.

K 1/6 **14** Die Aussage ist falsch. Eine reinquadratische Gleichung der Form $x^2 = d$ mit $d \geq 0$ ist lösbar und hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-\sqrt{d}; \sqrt{d}\}$. Mit $d < 0$ ist $x^2 = d$ nicht lösbar.

K 1/6 **15** Die Aussage ist falsch. Die Diskriminante lautet:
$D = (-2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 = 4 + 60 = 64$ (also nicht: $-4 + 60 = 56$)

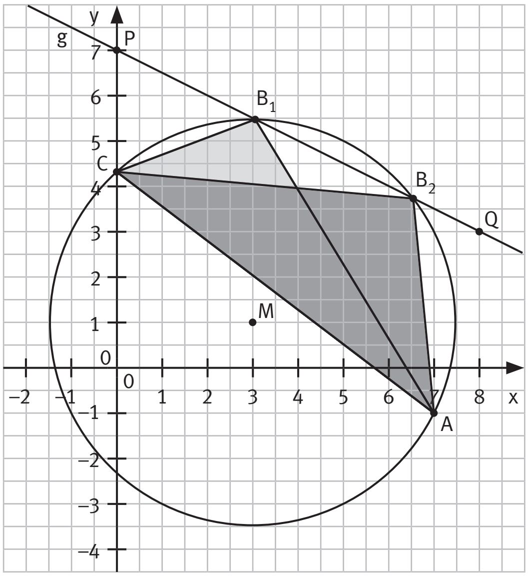
K 1/6 **16** Die Aussage ist richtig. Die Lösungen der Gleichung entsprechen den x-Koordinaten der Schnittpunkte der Parabeln $p_1$: $y = ax^2 + bx + c$ und $p_2$: $y = dx^2 + ex + f$.

K 1/6 **17** Die Aussage ist richtig, falls man nur Geraden der Form $y = mx + t$ mit $m, t \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ zulässt. Betrachtet man auch die zueinander parallelen Geraden der Schar $x = k$ mit $k \in \mathbb{R}$, so ist die Aussage falsch, da jede Gerade der Schar $x = k$ die Parabel schneidet und es somit keine Gerade dieser Schar gibt, die Tangente an die Parabel ist.

K 1/6 **18** Die Aussage ist richtig.

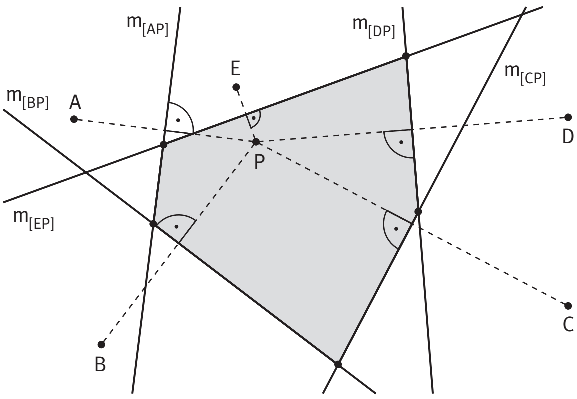
Kx **1** Die grüne Kreisfläche, d. h. das Kreisinnere und die Kreislinie, ist $M_1$.
Die rote Mittelsenkrechte der Strecke [AB] ist $M_2$.
Die beiden blauen Schnittpunkte der Kreislinie mit der Mittelsenkrechten sind $M_3$.

Kx **2**




$B_1$ und $B_2$ sind die Schnittpunkte der Geraden PQ mit dem Kreis k (M, r = $\overline{MA}$).
C ist der Schnittpunkt des Kreises k (M, r = $\overline{MA}$) mit dem Bereich der y-Achse, für den y > 0 gilt.
Für das Dreieck ABC gibt es zwei Möglichkeiten: $AB_1C$ und $AB_2C$.

Kx **3**




**a)** Der grün markierte Bereich ist die Menge aller Punkte, die näher an P als an A, B, C, D oder E liegen.

**b)** Es sind individuelle Abbildungen möglich.
Konstruktion: Zu P und zu den Punkten A, B, C, D, E konstruiert man die Mittelsenkrechten. Die Schnittpunkte von $m_{[AP]}$ mit $m_{[BP]}$, $m_{[BP]}$ mit $m_{[CP]}$, $m_{[CP]}$ mit $m_{[DP]}$, $m_{[DP]}$ mit $m_{[EP]}$, $m_{[EP]}$ mit $m_{[AP]}$ ergeben die Eckpunkte für die „Dirichlet-Zelle“.

Kx **4** $75\,\% = \frac{3}{4}$ $65\,\% = \frac{13}{20}$ $35\,\% = \frac{7}{20}$ $5\,\% = \frac{2}{40}$ $15\,\% = \frac{9}{60}$ $25\,\% = \frac{1}{4}$ $45\,\% = \frac{9}{20}$ $55\,\% = \frac{11}{20}$

Kx **5**

| | ursprünglicher Preis | erste Preissenkung | zweite Preissenkung |
|---|---|---|---|
| Kühlschrank | 395,00 € | 296,25 € | 266,63 € |
| Controller | 299,00 € | 224,25 € | 201,83 € |
| Kaffeemaschine | 459,00 € | 344,25 € | 309,83 € |

Kx **6** $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}x\right) = 54 \Leftrightarrow x = \frac{16}{9} \cdot 54 = 96$ Die Schuhe kosteten ursprünglich 96 €.

Kx **7**

| | Zinsen | Bearbeitungsgebühr | Rückzahlungsbetrag |
|---|---|---|---|
| Bank A | 7,2 % von 5000 € = 360 € | 0 € | 5360 € |
| Bank B | 6,5 % von 5000 € = 325 € | 30 € | 5355 € |
| Bank C | 199 € | 29 € | 5228 € |

Bank C ist mit 5228 € Rückzahlungsbetrag gegenüber 5355 € bei Bank B bzw. 5360 € bei Bank A am günstigsten.

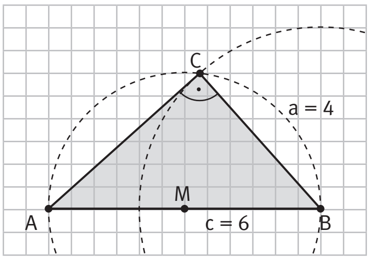
Kx **8** Es lassen sich allgemeine Dreiecke, rechtwinklige Dreiecke, gleichschenklige Dreiecke und gleichseitige Dreiecke unterscheiden.

Kx **9** **a)** $\beta = 180° - 70° = 110°$ $\quad \alpha = \gamma = \frac{70°}{2} = 35°$ $\quad \delta = 180° - 70° - 60° = 50°$

**b)** $\beta = 180° - 90° - 44° = 46°$ $\quad \gamma = \frac{180° - 44°}{2} = 68°$ $\quad \alpha = \gamma - \beta = 68° - 46° = 22°$

Kx **10** **a)** wahr **b)** wahr **c)** wahr **d)** wahr **e)** falsch

Kx **11**




Zeichne [AB] mit c = 6 cm und Mittelpunkt M.
$k(M;\, r = \overline{AM} = 3\,\text{cm}) \cap k(B;\, r = a = 4\,\text{cm}) = \{C\}$

Kx **12** **a)** [AB] ist die Hypotenuse und damit die längste Seite des rechtwinkligen Dreiecks ABC. Die Kathete [AC] ist kürzer als die Hypotenuse, d. h.: $0 < x < 8$.

**b)** $A(x) = 0{,}5 \cdot x\,\text{cm} \cdot \sqrt{8^2 - x^2}\,\text{cm} = 0{,}5 \cdot x \cdot \sqrt{8^2 - x^2}\,\text{cm}^2$

**c)** $A(5) = 0{,}5 \cdot 5 \cdot \sqrt{39}\,\text{cm}^2 \approx 15{,}61\,\text{cm}^2$

Kx **13** Aussage:
Die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke BDC und CEA ist gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks AFB.
Begründung:
Für die Seitenlängen a, b und c des bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC gilt: $a^2 + b^2 = c^2$.
Die Dreiecke AFB, BDC und CEA sind gleichseitig mit den Seitenlängen a, b bzw. c. Es gilt:

$A_{BDC} = 0{,}5ah_a = 0{,}25a^2\sqrt{3}$ $\quad A_{CEA} = 0{,}5bh_b = 0{,}25b^2\sqrt{3}$ $\quad A_{AFB} = 0{,}5ch_c = 0{,}25c^2\sqrt{3}$

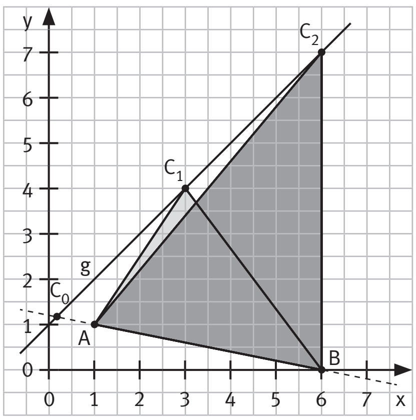
$\Rightarrow A_{BDC} + A_{CEA} = 0{,}25(a^2 + b^2)\sqrt{3} = 0{,}25c^2\sqrt{3} = A_{AFB}$

Kx **14** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x-4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A_{ABCD}(x) &= 2 \cdot A_{ABC}(x) \\ &= 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & x-4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}\,\text{FE} \\ &= (-15 - 6x + 24)\,\text{FE} \\ &= (-6x + 9)\,\text{FE} \end{aligned}$$

$A(x) = 25\,\text{FE} \Leftrightarrow -6x + 9 = 25 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{3}$ $\quad \Rightarrow C\left(-2\tfrac{2}{3} \mid 2\right);\ D\left(\tfrac{1}{3} \mid -4\right)$

Kx **15** **a)**




**b)** $C_0(0{,}17 \mid 1{,}17)$ ist der Schnittpunkt von g mit AB.
Damit $ABC_n$ ein Dreieck ist, muss gelten: $x > 0{,}17$

**c)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

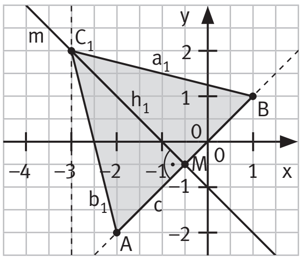
$A_{ABC_1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\,\text{FE} = 0{,}5 \cdot (15 + 2)\,\text{FE} = 8{,}5\,\text{FE}$

**d)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x-1 \\ x \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A(x) &= A_{ABC_n} = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & x-1 \\ -1 & x \end{vmatrix}\,\text{FE} \\ &= 0{,}5 \cdot (5x + x - 1)\,\text{FE} = (3x - 0{,}5)\,\text{FE} \end{aligned}$$

**e)** $A(x) = 58\,\text{FE} \Leftrightarrow 3x - 0{,}5 = 58 \Leftrightarrow x = 19{,}5$
Das Dreieck $ABC_3$ mit $C_3(19{,}5 \mid 20{,}5)$ hat den Flächeninhalt 58 FE.

Kx **16**




**a)** Die Punkte $C_n$ des gleichschenkligen Dreiecks mit Basis [AB] liegen auf m, der Mittelsenkrechten zu AB: $y = x$, $M_{[AB]} = M\,(-0{,}5\,|\,-0{,}5)$.
g: $y = -x - 1$

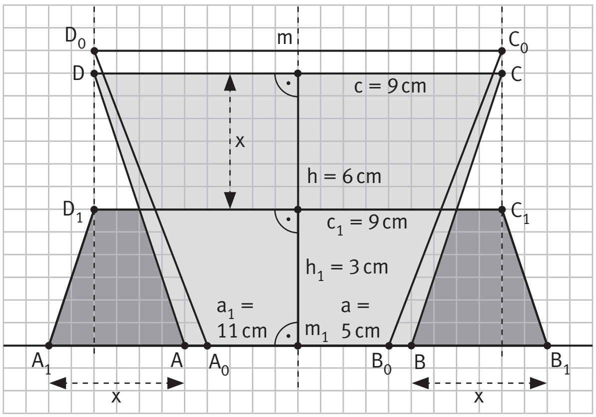
**b)** $c = \overline{AB} = \sqrt{3^2 + 3^2}\,\text{cm} = 3\sqrt{2}\,\text{cm} \approx 4{,}24\,\text{cm}$

$a_1 = b_1 = \overline{AC_1} = \sqrt{1^2 + 4^2}\,\text{cm} = \sqrt{17}\,\text{cm} \approx 4{,}12\,\text{cm}$ mit $C_1\,(-3\,|\,2) \in m$

$h_1 = \sqrt{b_1^{\,2} - 0{,}25c^2}\,\text{cm} = \sqrt{17 - 4{,}5}\,\text{cm} \approx 3{,}54\,\text{cm}$

$A_{ABC_1} = 0{,}5 \cdot c \cdot h_1 \approx 0{,}5 \cdot 4{,}24 \cdot 3{,}54\,\text{cm}^2 = 7{,}5\,\text{cm}^2$

Kx **17** **a)**




**b)** $A(x) = 0{,}5 \cdot h_n \cdot (a_n + c_n)$
$= 0{,}5 \cdot (6 - x) \cdot (5 + 2x + 9)\,\text{cm}^2$
$= 0{,}5 \cdot (6 - x) \cdot (14 + 2x)\,\text{cm}^2$
$= (6 - x) \cdot (7 + x)\,\text{cm}^2$
$= -(x^2 + x - 42)\,\text{cm}^2$

**c)** Quadratisch ergänzen:
$-(x^2 + x - 42) = -(x + 0{,}5)^2 + 42{,}25$
A (x) ist maximal für $x = -0{,}5$ mit
$A_{max} = 42{,}25\,\text{cm}^2$.
Allerdings ist $x = -0{,}5$ im Definitionsbereich nicht enthalten. Den größten Flächeninhalt mit $x \in [0;\,6[$ erhält man für $x = 0$ mit $A\,(0) = 42\,\text{cm}^2$.