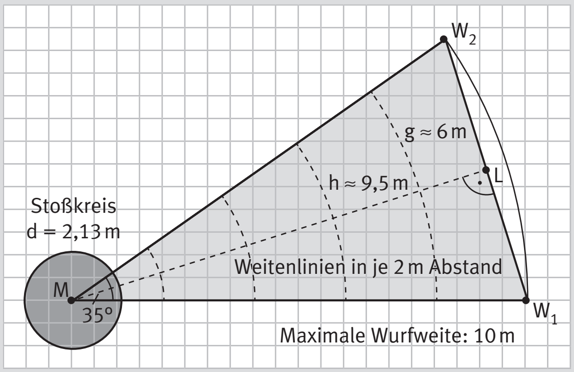
3 Berechnungen am Kreis

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

Beim Kugelstoßen wird ausgehend vom Mittelpunkt des Stoßkreises (Durchmesser 213 cm) ein Feld unter einem Winkel von etwa 35° angetragen. Das Feld wird dabei von zwei Strecken und einem Kreisbogen begrenzt.



K4
- **Zeichne ein solches Feld im Maßstab 1 : 100 bis zu einer maximalen Wurfweite von 10 m in dein Heft.**
  Durchmesser des Stoßkreises in der Zeichnung:
  213 cm : 100 = 2,13 cm
  Maximale Wurfweite in der Zeichnung:
  1000 cm : 100 = 10,00 cm

K4
- **Alle 2 m wird die Weite auf dem Feld markiert. Trage diese Weitenlinien in deine Zeichnung ein.**
  Abstand der Weitenlinien in der Zeichnung: 200 cm : 100 = 2,00 cm

K6
- **Schätze die Länge aller Linien möglichst genau ab, die man zeichnen muss, um das Feld aus dem Heft in Realität zu zeichnen.**
  Die Längen der fünf Weitelinien (von 2 m Weite bis zu 10 m Weite) betragen etwa 1,3 m, 2,5 m, 3,8 m, 5,0 m und 6,3 m. Der Umfang des Stoßkreises beträgt etwa 6,7 m.

K3
- **Wie groß ist der Flächeninhalt des Feldes in der Realität?**
  Das Feld kann näherungsweise als gleichschenkliges Dreieck MW_1W_2 gesehen werden, dessen Schenkel 10 m und dessen Grundlinie g ungefähr 6 m beträgt. Die Höhe h des Dreiecks ist somit:
  $h = \sqrt{(10\,\text{m})^2 - (3\,\text{m})^2} = \sqrt{91}\,\text{m} \approx 9{,}5\,\text{m}$
  $A_{Feld} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{m} \cdot 9{,}5\,\text{m} = 28{,}5\,\text{m}^2$
  Der Flächeninhalt des Feldes ist etwa $28{,}5\,\text{m}^2$ groß.

Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.
Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Verständnis

K1
- Der Ausgangskreis habe den Radius r und den Flächeninhalt $A = \pi \cdot r^2$
  Der Radius r wird verdoppelt: $A' = \pi \cdot (2r)^2 = \pi \cdot 4r^2 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot A$
  Der Radius r wird verdreifacht: $A' = \pi \cdot (3r)^2 = \pi \cdot 9r^2 = 9 \cdot \pi \cdot r^2 = 9 \cdot A$
  Der Radius r wird halbiert: $A' = \pi \cdot (0{,}5r)^2 = \pi \cdot 0{,}25r^2 = 0{,}25 \cdot \pi \cdot r^2 = 0{,}25 \cdot A$
  Der Flächeninhalt vervierfacht (verneunfacht, viertelt) sich.

K1
- Mit $r = \frac{d}{2}$ gilt: $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$
  Mit $\pi \cdot r = \frac{u}{2}$ gilt: $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot r \cdot r = \frac{u}{2} \cdot r$

K5 **1** $d = 0{,}8\,m$ $u = \pi \cdot d = \pi \cdot 0{,}8\,m \approx 2{,}51\,m$
Der Umfang des Reifens beträgt 2,51 m.

K5 **2** $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (1{,}75\,m)^2 \approx 9{,}62\,m^2$ $u = \pi \cdot d = \pi \cdot 3{,}5\,m \approx 11{,}0\,m$
Der Flächeninhalt der Hüpffläche beträgt 9,6 m², der Umfang des Trampolins beträgt 11 m.

K5 **3**

	a)	b)	c)	d)	e)
r	12,71 dm	3,56 dm	0,55 km	1,05 km	7,16 cm
d	25,42 dm	7,12 dm	1,10 km	2,10 km	14,32 cm
u	79,86 dm	22,37 dm	3,46 km	6,60 km	45,00 cm
A	507,51 dm²	39,82 dm²	0,95 km²	3,45 km²	161,06 cm²

K6 **4** **a)** $d = 85\,cm$ $u = \pi \cdot 85\,cm \approx 267\,cm = 2{,}67\,m$
Der Durchmesser des Baumes beträgt 0,85 m; der Umfang beträgt 2,67 m.

b) Bei einem „normalen“ Maßband zeigt der Wert x den Umfang u = x cm an. Anhand dieses Wertes kann der Durchmesser d berechnet werden mit $d = \frac{u}{\pi} = \frac{x\,cm}{\pi}$.
Beim Forstmaßband dagegen zeigt eine Längeneinheit auf dem Maßband eine Länge von π cm an; x Längeneinheiten auf dem um den Baumstamm gelegten Maßband zeigen den Baumdurchmesser d = x cm an, der Umfang u des Baumes wird durch $u = \pi \cdot x\,cm$ berechnet.

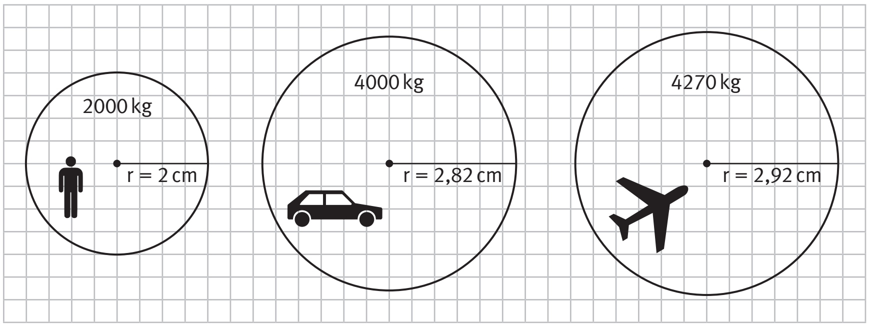
K3 **5** $u_{Rad} = \pi \cdot 3{,}90\,m \approx 12{,}25\,m$ $1000\,m : 12{,}25\,m \approx 81{,}63$
Auf einer Strecke der Länge 1 km macht das Rad des Muldenkippers rund 82 Umdrehungen.

K3 **6** $A_{kleine\ Pizza} = \pi \cdot 12^2\,cm^2 \approx 452{,}4\,cm^2$ zum Preis von 3,80 €
$A_{zwei\ kleine\ Pizzen} = 2 \cdot 452{,}4\,cm^2 = 904{,}8\,cm^2$ zum Preis von 2 · 3,80 € = 7,60 €
$A_{große\ Pizza} = \pi \cdot 18^2\,cm^2 \approx 1017{,}9\,cm^2$ zum Preis von 7,60 €
Zwei kleine Pizzen haben mit 904,8 cm² einen kleineren Flächeninhalt als eine große Pizza mit 1017,9 cm². Da der Preis für eine große oder zwei kleine Pizzen gleich ist, entscheiden sich Bernd und Susanne für eine große Pizza.

K4 **7** **a)** Flug: $d = 3{,}2\,cm$ $A_{Flug} = \pi \cdot 1{,}6^2\,cm^2 \approx 8{,}0\,cm^2$
Autofahrt: $d = 3{,}0\,cm$ $A_{Autofahrt} = \pi \cdot 1{,}5^2\,cm^2 \approx 7{,}1\,cm^2$
Jahresbudget: $d = 1{,}5\,cm$ $A_{Jahresbudget} = \pi \cdot 0{,}75^2\,cm^2 \approx 1{,}8\,cm^2$

b) Proportional zu den angegebenen Emissionen sind der Durchmesser bzw. der Radius und der Umfang des entsprechenden Kreises.

c) Die Radien bzw. Durchmesser der Kreise entsprechen dem Verhältnis der Massen an CO_2. Das menschliche Auge bzw. Gehirn nimmt in einer solchen Darstellung allerdings viel eher die Flächeninhalte war, die nicht dem Verhältnis der Massen entsprechen. So ist der Kreis für 4000 kg flächenmäßig viermal so groß wie der für 2000 kg.
Da in der Flächenformel für den Kreis der Radius quadratisch vorkommt, muss man die Quadratwurzel aus den Verhältniszahlen verwenden, um die korrekten Radien zu erhalten:
2000 kg : 4000 kg : 4270 kg = 1 : 2 : 2,135
$r_1 : r_2 : r_3 = \sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{2{,}135} \approx 1 : 1{,}41 : 1{,}46$
Wählt man beispielsweise $r_1 = 2\,cm$, dann gilt $r_2 = 2{,}82\,cm$ und $r_3 = 2{,}92\,cm$.



Verständnis

K 1

- Ja, Matthias hat Recht: Wird bei gleichem Radius der Flächeninhalt des Kreissektors verdoppelt, so verdoppelt sich auch der Mittelpunktswinkel und damit die Länge des Kreisbogens. k_1 und k_2 seien die beiden Kreise mit $r = r_1 = r_2$ und mit:
  $b_1 = \frac{\mu_1}{360°} \cdot 2\pi \cdot r$; $A_1 = \frac{\mu_1}{360°} \cdot \pi \cdot r^2$ und $b_2 = \frac{\mu_2}{360°} \cdot 2\pi \cdot r$; $A_2 = \frac{\mu_2}{360°} \cdot \pi \cdot r^2$
  Es gilt: $A_2 = 2A_1 \Leftrightarrow \frac{\mu_2}{360°} \cdot \pi \cdot r^2 = 2\frac{\mu_1}{360°} \cdot \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow \mu_2 = 2\mu_1$
  $\mu_2 = 2\mu_1$ in $b_2 = \frac{\mu_2}{360°} \cdot 2\pi \cdot r$ einsetzen ergibt: $b_2 = \frac{2\mu_1}{360°} \cdot 2\pi \cdot r = 2b_1$

K 5 **1** Mit $b = \frac{\mu}{180°} r \cdot \pi$ ergibt sich für den Kreisbogen b (Werte gerundet):

a) 1,34 cm **b)** 39,71 m **c)** 2,20 km **d)** 114, 84 cm **e)** 65,66 mm **f)** 1,40 m

K 5 **2** Für den Flächeninhalt A_S und den Umfang u_S des Kreissektors gilt:

$A_S = \frac{\mu}{360°} \cdot \pi \cdot r^2$ und $u_S = b + 2r = \frac{\mu}{180°} \cdot \pi \cdot r + 2 \cdot r = \left(\frac{\mu}{180°} \cdot \pi + 2\right) \cdot r$

a) $A_S = \frac{35°}{360°} \cdot \pi \cdot (2{,}5\,\text{cm})^2 \approx 1{,}91\,\text{cm}^2$ $\quad u_S = \left(\frac{35°}{180°} \cdot \pi + 2\right) \cdot 2{,}5\,\text{cm} \approx 6{,}53\,\text{cm}$

b) $A_S = \frac{175°}{360°} \cdot \pi \cdot (50\,\text{m})^2 \approx 3817{,}91\,\text{m}^2$ $\quad u_S = \left(\frac{175°}{180°} \cdot \pi + 2\right) \cdot 50\,\text{m} \approx 252{,}72\,\text{m}$

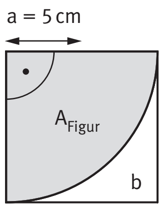
c) $A_S = \frac{70°}{360°} \cdot \pi \cdot (1{,}5\,\text{km})^2 \approx 1{,}37\,\text{km}^2$ $\quad u_S = \left(\frac{70°}{180°} \cdot \pi + 2\right) \cdot 1{,}5\,\text{km} \approx 4{,}83\,\text{km}$

K 5 **3**

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
r	9,6 cm	3,0 mm	4,0 cm	2,0 dm	34,4 m	2 cm
d	19,2 cm	6,0 mm	8,0 cm	4,0 dm	68,8 m	4 cm
μ	50°	38,2°	143,2°	65°	80°	45°
b	8,4 cm	2,0 mm	10,0 cm	2,3 dm	48 m	$\frac{1}{2}\pi$ cm
A_{Sektor}	40 cm²	3,0 mm²	20 cm²	$\frac{3}{4}\pi$ dm²	826,1 m²	1,6 cm²
u_{Sektor}	27,6 cm	8 mm	18,0 cm	6,3 dm	116,8 m	5,6 cm

K 3 **4** (Abbildungen verkleinert)

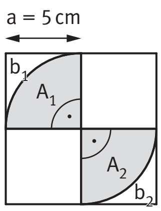
a)



$A_{Figur} = \frac{90°}{360°} \cdot \pi \cdot (10\,\text{cm})^2 \approx 78{,}54\,\text{cm}^2$

$u_{Linie} = b + 2 \cdot 10\,\text{cm}$
$= \frac{90°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 10\,\text{cm} + 20\,\text{cm} \approx 35{,}71\,\text{cm}$

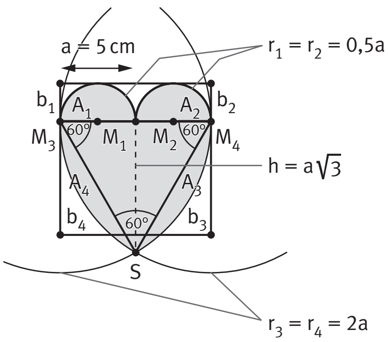
b)



$A_{Figur} = A_1 + A_2$
$= 2 \cdot \frac{90°}{360°} \cdot \pi \cdot (5\,\text{cm})^2 \approx 39{,}27\,\text{cm}^2$

$u_{Linie} = b_1 + 2a + b_2 + 2a$
$= 2b_1 + 4a$
$= 2 \cdot \frac{90°}{180°} \cdot \pi \cdot 5\,\text{cm} + 20\,\text{cm} \approx 35{,}71\,\text{cm}$

c)



$A_{Figur} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - A_{Dreieck}$

mit $r_1 = r_2 = 0{,}5a$, $r_3 = r_4 = 2a$, $\mu_1 = \mu_2 = 60°$ und

Dreieck mit Grundseitenlänge $2a = 10\,\text{cm}$ und

Dreieckshöhe $h = a\sqrt{3}\,\text{cm} \approx 8{,}7\,\text{cm}$

$A_{Figur} = (2{,}5\,\text{cm})^2\pi + 2 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot (10\,\text{cm})^2 - \frac{1}{2} \cdot 10\,\text{cm} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 10\,\text{cm}}{2}$

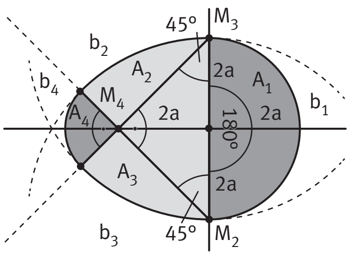
$\approx 19{,}63\,\text{cm}^2 + 104{,}72\,\text{cm}^2 - 43{,}3\,\text{cm}^2 = 81{,}05\,\text{cm}^2$

$u_{Linie} = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 2b_1 + 2b_3$

$= 2 \cdot \frac{180°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 2{,}5\,\text{cm} + 2 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 10\,\text{cm}$

$\approx 15{,}71\,\text{cm} + 20{,}94\,\text{cm} = 36{,}65\,\text{cm}$

d)



Mit $\overline{M_3M_4} = 2\sqrt{2}\,a = 10\sqrt{2}\,\text{cm} \approx 14{,}14\,\text{cm}$ und

mit $r_4 = 20\,\text{cm} - 14{,}14\,\text{cm} \approx 5{,}86\,\text{cm}$ gilt:

$A_{Figur} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - A_{Dreieck} = A_1 + 2A_2 + A_4 - A_{Dreieck}$

$= \pi \cdot 50\,\text{cm}^2 + \pi \cdot 100\,\text{cm}^2 + \pi \cdot 8{,}58\,\text{cm}^2 - 100\,\text{cm}^2$

$\approx \pi \cdot 158{,}58\,\text{cm}^2 - 100\,\text{cm}^2 \approx 398{,}19\,\text{cm}^2$

$u_{Linie} = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = b_1 + 2b_2 + b_4$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10\,\text{cm} \cdot \pi + 2 \cdot \frac{45°}{180°} \cdot \pi \cdot 20\,\text{cm} + \frac{90°}{180°} \cdot \pi \cdot 5{,}86\,\text{cm}$

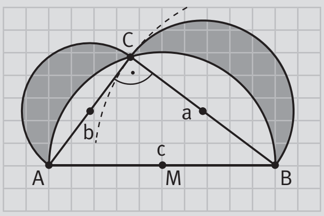
$= \pi \cdot 22{,}93\,\text{cm} \approx 72{,}04\,\text{cm}$

K 1

5 Aus $b = \frac{\mu}{180°} \cdot \pi \cdot r$ und $A_S = \frac{\mu}{360°} \cdot \pi \cdot r^2$ folgt: $A_S = \frac{\mu}{360°} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\mu}{180°} \cdot \pi \cdot r\right) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r$

Geschichte

K 1

- 

- Für das rechtwinklige Dreieck ABC mit a = 4 cm und c = 5 cm gilt:
  $b = \sqrt{(5\,\text{cm})^2 - (4\,\text{cm})^2} = 3\,\text{cm}$ und $A_{Dreieck\_ABC} = 0{,}5 \cdot 3\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 6\,\text{cm}^2$
  Für die Halbkreise über [AB], [BC] und über [AC] gilt:
  $A_{Halbkreis\_[AB]} = 0{,}5 \cdot (2{,}5\,\text{cm})^2\pi = 3{,}125\pi\,\text{cm}^2$
  $A_{Halbkreis\_[BC]} = 0{,}5 \cdot (2\,\text{cm})^2\pi = 2\pi\,\text{cm}^2$
  $A_{Halbkreis\_[AC]} = 0{,}5 \cdot (1{,}5\,\text{cm})^2 = 1{,}125\,\pi\,\text{cm}^2$
  Für die Möndchenflächen gilt:
  $A_{Möndchen} = [A_{Halbkreis\_[BC]} + A_{Halbkreis\_[AC]} + A_{Dreieck\_ABC}] - A_{Halbkreis\_[AB]}$
  $= [2\pi\,\text{cm}^2 + 1{,}125\pi\,\text{cm}^2 + 6\,\text{cm}^2] - 3{,}125\pi\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2$
- Behauptung: Die Fläche der Möndchen ist so groß wie die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks ABC.
  $A_{Halbkreis\_[AB]} = 0{,}5\pi \cdot (0{,}5c)^2$
  $A_{Halbkreis\_[BC]} = 0{,}5\pi \cdot (0{,}5a)^2$
  $A_{Halbkreis\_[AC]} = 0{,}5\pi \cdot (0{,}5b)^2$
  $A_{Möndchen} = [A_{Halbkreis\_[BC]} + A_{Halbkreis\_[AC]} + A_{Dreieck\_ABC}] - A_{Halbkreis\_[AB]}$
  $= 0{,}5\pi \cdot 0{,}5^2\,(a^2 + b^2 - c^2) + 0{,}5ab = 0{,}5ab = A_{Dreieck\_ABC}$

Verständnis

K 1

- Die Aussage stimmt: „Verdoppelt man den Außen- und den Innenradius eines Kreises, so verdoppelt sich auch der Umfang des Kreisrings.“ Der ursprüngliche Ring habe den Außenradius R und den Innenradius r; der neue Ring hat dann den Außenradius 2R und den Innenradius 2r. Für den neuen Ring gilt:
  $u_{\text{Ring-neu}} = 2\pi \cdot (2R + 2r) = 2 \cdot 2\pi \cdot (R + r) = 2 \cdot u_{\text{Ring-alt}}$

K 5

1 Mit $A_{\text{Ring}} = \pi \cdot (R^2 - r^2)$ und $u_{\text{Ring}} = 2\pi \cdot (R + r)$ ergibt sich (gerundete Werte):

a) $A_{\text{Ring}} = \pi \cdot 39\,\text{cm}^2 \approx 122{,}52\,\text{cm}^2$ $\quad u_{\text{Ring}} = \pi \cdot 26\,\text{cm} \approx 81{,}68\,\text{cm}$

b) $A_{\text{Ring}} = \pi \cdot 559\,\text{cm}^2 \approx 1756{,}15\,\text{cm}^2$ $\quad u_{\text{Ring}} = \pi \cdot 86\,\text{cm} \approx 270{,}18\,\text{cm}$

c) $A_{\text{Ring}} = \pi \cdot 48{,}84\,\text{cm}^2 \approx 153{,}44\,\text{cm}^2$ $\quad u_{\text{Ring}} = \pi \cdot 14{,}8\,\text{cm} \approx 46{,}50\,\text{cm}$

K 5

2

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
R	3,93 dm	5,00 m	6 cm	4,5 dm	54 cm	0,20 m
r	2 dm	4,55 m	3,95 cm	2,5 dm	18 cm	0,02 m
A_{Ring}	36 dm²	13,50 m²	64 cm²	43,98 dm²	8143,01 cm²	0,12 m²
u_{Ring}	37,26 dm	60 m	62,52 cm	43,98 dm	452,39 cm	1,4 m

K 3

3 **a)** Mit $R = 0{,}5 \cdot 122\,\text{cm} = 61\,\text{cm}$ gilt: $A_{\text{Scheibe}} = (61\,\text{cm})^2 \cdot \pi \approx 11\,690\,\text{cm}^2 \approx 1{,}17\,\text{m}^2$

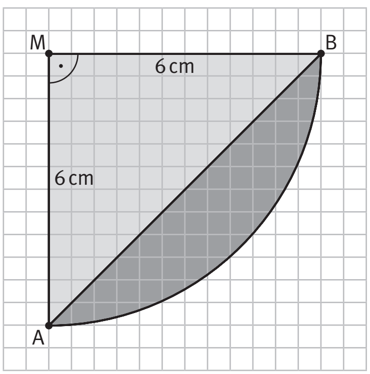
b) Die zehn Kreisringe sind jeweils 61 cm : 10 = 6,1 cm dick, d. h. die Differenz der Radien von Außen- und Innenkreis beträgt jeweils 6,1 cm.

	R (in cm)	r (in cm)	$A_{\text{Ring}} = \pi \cdot (R^2 - r^2)$
Ring 1 (gelb)	6,1	0	116,90 cm²
Ring 2 (gelb)	12,2	6,1	350,70 cm²
Ring 3 (rot)	18,3	12,2	584,49 cm²
Ring 4 (rot)	24,4	18,3	818,29 cm²
Ring 5 (blau)	30,5	24,4	1052,09 cm²
Ring 6 (blau)	36,6	30,5	1285,89 cm²
Ring 7 (schwarz)	42,7	36,6	1519,68 cm²
Ring 8 (schwarz)	48,8	42,7	1753,48 cm²
Ring 9 (weiß)	54,9	48,8	1987,28 cm²
Ring 10 (weiß)	61,0	54,9	2221,07 cm²
Zielscheibe (Summe der Flächeninhalte der zehn Ringe)			11 689,87 cm²

K 6

4 **a)** Die Berechnungen sind richtig mit $A_{\text{Segment}} \approx 0{,}29r^2$ und $u_{\text{Segment}} \approx 2{,}99r$.

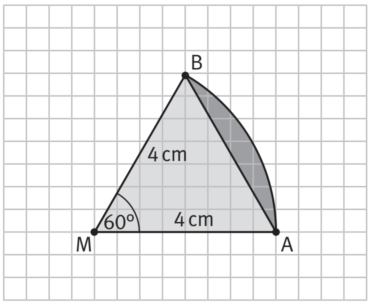
b) 1



$$\begin{aligned} A_{\text{Segment}} &= A_{\text{Viertelkreis}} - A_{\text{Dreieck}} \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot (6\,\text{cm})^2 \pi - \tfrac{1}{2} \cdot (6\,\text{cm})^2 \\ &= \pi \cdot 9\,\text{cm}^2 - 18\,\text{cm}^2 \\ &\approx 10{,}3\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{\text{Segment}} &= \tfrac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot \pi + 6\sqrt{2}\,\text{cm} \\ &\approx 17{,}9\,\text{cm} \end{aligned}$$

2



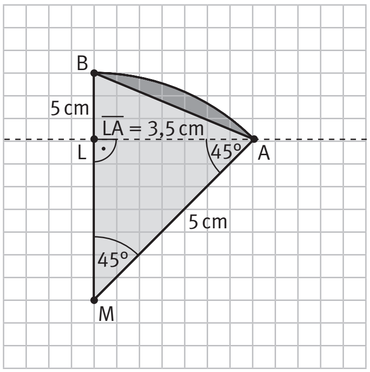
$$A_{Segment} = A_{Sektor} - A_{Dreieck}$$
$$= \frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot (4\,cm)^2 - \frac{1}{2} \cdot 4\,cm \cdot 2\sqrt{3}\,cm$$
$$= \frac{8}{3} \cdot \pi\,cm^2 - 4\sqrt{3}\,cm^2$$
$$\approx 1{,}4\,cm^2$$
$$u_{Segment} = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 4\,cm + 4\,cm$$
$$\approx 8{,}2\,cm$$

3 In das gleichschenklige Dreieck ABM mit r = 5 cm und $\mu = 45°$ wird das Dreieck ALM mit Lotfußpunkt L von A auf BM eingezeichnet. Das Dreieck ALM ist rechtwinklig gleichschenklig (wegen der Innenwinkelsumme von 180°).

Damit gilt für [AL] und [BL]: $\overline{AL} = \sqrt{25 \cdot 0{,}5}\,cm = 5\sqrt{0{,}5}\,cm \approx 3{,}5\,cm$

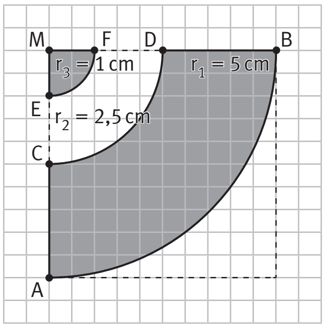
$\overline{BL} = 5\,cm - 3{,}5\,cm = 1{,}5\,cm$

Es folgt (Satz des Pythagoras): $\overline{AB} = \sqrt{3{,}5^2 + 1{,}5^2}\,cm \approx 3{,}8\,cm$



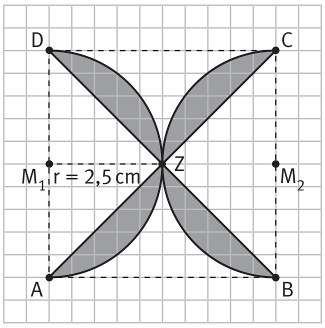
$$A_{Segment} = A_{Sektor} - A_{Dreieck\_ABM}$$
$$= \frac{45°}{360°} \cdot \pi \cdot (5\,cm)^2 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3{,}5\,cm^2$$
$$= 3{,}125 \cdot \pi\,cm^2 - 8{,}8\,cm^2$$
$$\approx 9{,}8\,cm^2 - 8{,}8\,cm^2$$
$$= 1{,}0\,cm^2$$
$$u_{Segment} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 5\,cm + 3{,}8\,cm$$
$$\approx 3{,}9\,cm + 3{,}8\,cm$$
$$= 7{,}7\,cm$$

K3 **5 a)**



$$A_{grüne\text{-}Fläche} = A_{Sektor\_MAB} - A_{Viertel\text{-}Ring\_CDEF}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot (5\,cm)^2 \cdot \pi - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot [(2{,}5\,cm)^2 - (1\,cm)^2]$$
$$= \pi \cdot 4{,}9375\,cm^2 \approx 15{,}51\,cm^2$$
$$u_{grüne\text{-}Linie} = b_{AB} + b_{CD} + b_{EF} + 2 \cdot (\overline{MA} - \overline{EC})$$
$$= \frac{90°}{180°} \cdot \pi \cdot 5\,cm + \frac{90°}{180°} \cdot \pi \cdot 2{,}5\,cm$$
$$+ \frac{90°}{180°} \cdot \pi \cdot 1\,cm + 2 \cdot (5\,cm - 1{,}5\,cm)$$
$$= \pi \cdot 4{,}25\,cm + 7\,cm \approx 20{,}35\,cm$$

b)



$$A_{grüne\text{-}Fläche} = 2 \cdot A_{Halbkreis} - 2 \cdot A_{Dreieck}$$
$$= A_{Kreis} - A_{Quadrat}$$
$$= (2{,}5\,cm)^2 \cdot \pi - (2{,}5\,cm \cdot \sqrt{2})^2$$
$$= \pi \cdot 6{,}25\,cm^2 - 12{,}5\,cm^2 \approx 7{,}13\,cm^2$$
$$u_{grüne\text{-}Linie} = 2 \cdot u_{Halbkreis} + 2 \cdot u_{Dreieck}$$
$$= u_{Kreis} + u_{Quadrat}$$
$$= 2 \cdot 2{,}5\,cm \cdot \pi + 4 \cdot 2{,}5\,cm \cdot \sqrt{2}$$
$$= \pi \cdot 5\,cm + 10\,cm \cdot \sqrt{2} \approx 29{,}85\,cm$$

Lösungsalternative bei b) mit den Formeln für den Flächeninhalt und den Umfang des Segments eines Viertelkreises mit Radius r = 2,5 cm:

$A_{grüne\text{-}Fläche} = 4 \cdot A_{Segment} = 4 \cdot 0{,}29r^2 = 4 \cdot 0{,}29 \cdot (2{,}5\,cm)^2 \approx 7{,}25\,cm^2$

$u_{grüne\text{-}Linie} = 4 \cdot u_{Segment} = 4 \cdot 2{,}99r = 4 \cdot 2{,}99 \cdot 2{,}5\,cm \approx 29{,}9\,cm$

K3 **6** $A_{\text{Fläche}} = A_{\text{großer-Sektor}} - A_{\text{kleiner-Sektor}}$

$= \frac{135°}{360°} \cdot \pi \cdot ((60\,\text{cm})^2 - (15\,\text{cm})^2)$

$= \pi \cdot 1265{,}625\,\text{cm}^2$

$\approx 3976\,\text{cm}^2$

Der Wischergummi überstreicht eine Fläche von rund $0{,}4\,\text{m}^2$.

K3 **7** **a)** k_1: $40\,\text{cm}^2 = r_1^{\,2}\,\pi$

$\Rightarrow r_1 = \sqrt{\frac{40}{\pi}}\,\text{cm} \approx 3{,}6\,\text{cm}$

k_2: $40\,\text{cm}^2 + 30\,\text{cm}^2 = r_2^{\,2}\,\pi$

$\Rightarrow r_2 = \sqrt{\frac{70}{\pi}}\,\text{cm} \approx 4{,}7\,\text{cm}$

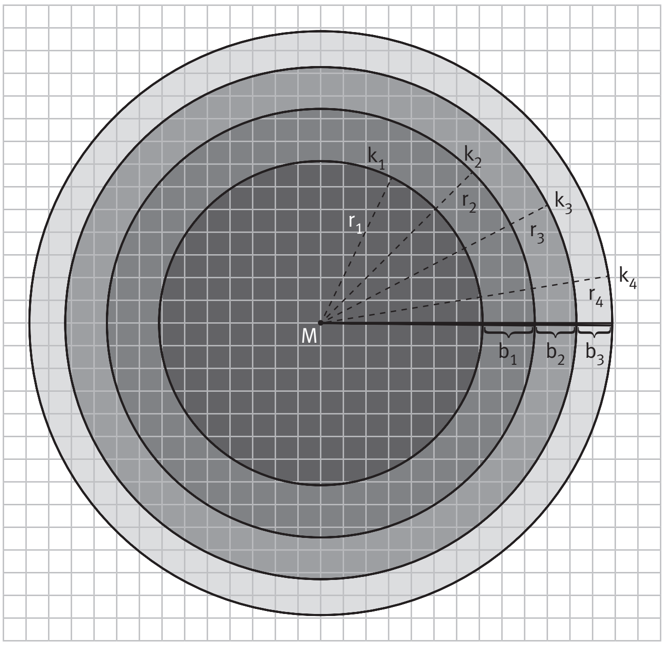
k_3: $70\,\text{cm}^2 + 30\,\text{cm}^2 = r_3^{\,2}\,\pi$

$\Rightarrow r_3 = \sqrt{\frac{100}{\pi}}\,\text{cm} \approx 5{,}6\,\text{cm}$

k_4: $100\,\text{cm}^2 + 30\,\text{cm}^2 = r_4^{\,2}\,\pi$

$\Rightarrow r_4 = \sqrt{\frac{130}{\pi}}\,\text{cm} \approx 6{,}4\,\text{cm}$

Die Radien der drei äußeren Kreise betragen 4,7 cm, 5,6 cm und 6,4 cm.



b) $b_1 = 4{,}7\,\text{cm} - 3{,}6\,\text{cm} \approx 1{,}1\,\text{cm}$

$b_2 = 5{,}6\,\text{cm} - 4{,}7\,\text{cm} \approx 0{,}9\,\text{cm}$

$b_3 = 6{,}4\,\text{cm} - 5{,}6\,\text{cm} \approx 0{,}8\,\text{cm}$

Die Kreisringe sind 1,1 cm, 0,9 cm bzw. 0,8 cm breit.

K3 **8** **a)** A_G setzt sich zusammen aus zwei gleich großen Steinplatten mit der Vorderfläche in Form eines Trapezes mit $a = 180\,\text{cm}$, $h = 10\,\text{cm}$, $c = 190\,\text{cm}$ sowie einer Steinplatte mit der Vorderfläche in Form eines Viertel-Kreisrings mit Innenradius $r = 110\,\text{cm}$ und Außenradius $R = 110\,\text{cm} + 10\sqrt{2}\,\text{cm}$.

$A_G = 2 \cdot \frac{180 + 190}{2}\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot ((110\,\text{cm} + 10\sqrt{2}\,\text{cm})^2 - (110\,\text{cm})^2)$

$\approx 3700\,\text{cm}^2 + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 3311{,}3\,\text{cm}^2 \approx 6300{,}7\,\text{cm}^2$

Der Flächeninhalt der Vorderfläche des Torbogens beträgt $6300{,}7\,\text{cm}^2$.

b) $V = 6300{,}7\,\text{cm}^2 \cdot 25\,\text{cm}$

$\approx 157\,518\,\text{cm}^3 \approx 157{,}52\,\text{dm}^3$

Das Volumen der Steinplatten beträgt $157{,}52\,\text{dm}^3$.

c) $m = 2{,}8\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot V = 2{,}8\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot 157{,}52\,\text{dm}^3 \approx 441{,}06\,\text{kg}$

Die Masse der Steinplatten beträgt 441,06 kg.

K3 **9** **a)** $A_{\text{Innenfläche}} = A_{\text{Innen-Rechteck}} + A_{\text{Innen-Kreis}}$

$= 110\,\text{m} \cdot 80\,\text{m} + (40\,\text{m})^2 \cdot \pi \qquad \approx 13\,826{,}55\,\text{m}^2$

$u_{\text{Innenfläche}} = \text{Rechteck}_{\text{Länge oben}} + \text{Rechteck}_{\text{Länge unten}} + u_{\text{Innen-Kreis}}$

$= 2 \cdot 110\,\text{m} + 2\pi \cdot 40\,\text{m} \qquad \approx 471{,}33\,\text{m}$

b) $A_{\text{Bahn}} = 2 \cdot A_{\text{rotes-Bahn-Rechteck}} + A_{\text{Ring}}$

$= 2 \cdot 6\,\text{m} \cdot 110\,\text{m} + \pi \cdot [(46\,\text{m})^2 - (40\,\text{m})^2] \qquad \approx 2941\,\text{m}^2$

c) $2941\,\text{m}^2 \cdot 1250\,\frac{€}{\text{m}^2} = 3\,676\,250\,€$

Die Renovierungskosten betragen 3 676 250 €.

K3 **10** Die gesamte Kreisfläche hat einen Durchmesser von 1 m + 7 m + 1 m = 9 m.

$A_{Kreis} = (4{,}5\,\text{m})^2\pi \approx 64\,\text{m}^2$

$A_{rote\text{-}Fläche} = \pi \cdot [(4{,}5\,\text{m})^2 - (3{,}5\,\text{m})^2] \approx 25\,\text{m}^2$

Anteil: $\frac{25\,\text{m}^2}{64\,\text{m}^2} \approx 0{,}39 = 39\,\%$

Die Passivzone nimmt rund 39 % der kompletten Fläche ein.

K3 **11** **a)** ① a = 5 cm

$u = 3b$
$= 3 \cdot \frac{60°}{180°} \cdot \pi \cdot 5\,\text{cm}$
$= \pi \cdot 5\,\text{cm}$
$\approx 15{,}7\,\text{cm}$

$A = 3 \cdot A_{Sektor} - 2 \cdot A_{Dreieck}$
$= 3 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot (5\,\text{cm})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5\,\text{cm} \cdot \frac{5\,\text{cm}}{2} \cdot \sqrt{3}$
$= 12{,}5 \cdot (\pi - \sqrt{3})\,\text{cm}^2$
$\approx 17{,}6\,\text{cm}^2$

② allgemeines a

$u = 3b$
$= 3 \cdot \frac{60°}{180°} \cdot \pi \cdot a$
$= \pi \cdot a$
$\approx 3{,}14a$

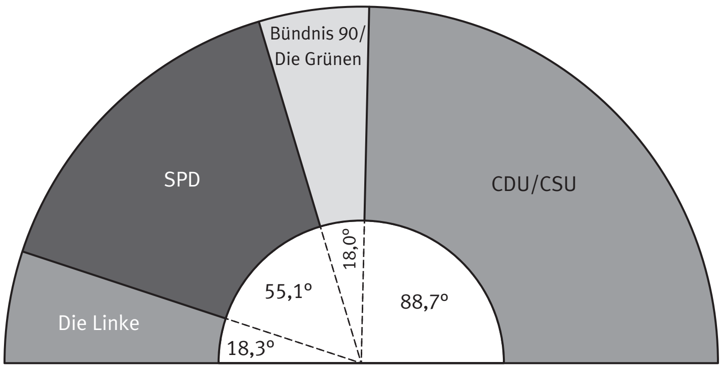
$A = 3 \cdot A_{Sektor} - 2 \cdot A_{Dreieck}$
$= 3 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$
$= 0{,}5a^2 \cdot (\pi - \sqrt{3})$
$\approx 0{,}7a^2$

b) Es sind individuelle Lösungen möglich.

K3 **12**

	a)	b)	c)
Partei	Prozentualer Anteil an 631 Sitzen	Anteil am Halbkreisring (180°)	Anteil am Flächeninhalt mit $A_{Halbkreisring} = 10{,}5\pi\,\text{cm}^2$
Die Linke	$\frac{64}{631} \approx 10{,}14\,\%$	$0{,}1014 \cdot 180° \approx 18{,}3°$	$0{,}1014 \cdot 10{,}5\pi \approx 3{,}34\,\text{cm}^2$
SPD	$\frac{193}{631} \approx 30{,}59\,\%$	$0{,}3059 \cdot 180° \approx 55{,}1°$	$0{,}3059 \cdot 10{,}5\pi \approx 10{,}09\,\text{cm}^2$
Bündnis 90/ Die Grünen	$\frac{63}{631} \approx 9{,}98\,\%$	$0{,}0998 \cdot 180° \approx 18{,}0°$	$0{,}0998 \cdot 10{,}5\pi \approx 3{,}29\,\text{cm}^2$
CDU/CSU	$\frac{311}{631} \approx 49{,}29\,\%$	$0{,}4929 \cdot 180° \approx 88{,}7°$	$0{,}4929 \cdot 10{,}5\pi \approx 16{,}26\,\text{cm}^2$

b)



K3 **13** Der innere Kreis hat eine Gesamtfläche von πr^2.
Der ganze Kreis hat eine Gesamtfläche von $\pi R^2 = 4\pi r^2$ (da $R = 2r$).
Der äußere Kreisring hat eine Fläche von $\pi(R^2 - r^2) = \pi(4r^2 - r^2) = 3\pi r^2$.
Es gibt 4 rote und 8 blaue Kreissektoren des inneren Kreises.
Es gibt 8 rote und 4 blaue Sektoren des äußeren Ringes.
Damit gilt für die Flächeninhalte A_{rot} und A_{blau}:

$A_{rot} = \frac{4}{12} \cdot \pi r^2 + \frac{8}{12} \cdot 3\pi r^2 = \frac{7}{3} \cdot \pi r^2 \approx 7{,}3r^2$ $\quad$ $A_{blau} = \frac{8}{12} \cdot \pi r^2 + \frac{4}{12} \cdot 3\pi r^2 = \frac{5}{3} \cdot \pi r^2 \approx 5{,}2r^2$

Die rot eingefärbte Fläche nimmt mit $7{,}3r^2$ eine größere Fläche ein als die blaue Fläche mit $5{,}2r^2$.

K 1 **14 a)** Mit $d_{grün} = 2r + 2R = 2(r + R)$ ist $r_{grün} = R + r = 28\,cm$.

Halbkreis mit $r_{grün} = 28\,cm$: $A_1 = 0{,}5 \cdot \pi \cdot (28\,cm)^2 = 392\pi\,cm^2$

Weißer Halbkreis mit $R = 20\,cm$: $A_2 = 0{,}5 \cdot \pi \cdot (20\,cm)^2 = 200\pi\,cm^2$

Weißer Halbkreis mit $r = 8\,cm$: $A_3 = 0{,}5 \cdot \pi \cdot (8\,cm)^2 = 32\pi\,cm^2$

Grün gekennzeichnete Fläche: $A_{grün} = A_1 - A_2 - A_3 = 160\pi\,cm^2 \approx 502{,}65\,cm^2$

b) Argumentation für die grün markierte Fläche wie in a) mit $r_{grün} = R + r$ und $\overline{AB} = 2r + 2R$:

Halbkreis mit $r_{grün} = R + r$: $A_1 = 0{,}5 \cdot \pi \cdot (R + r)^2 = 0{,}5 \cdot \pi \cdot (R^2 + 2Rr + r^2)$

Weißer Halbkreis mit R: $A_2 = 0{,}5 \cdot \pi \cdot R^2$

Weißer Halbkreis mit r: $A_3 = 0{,}5 \cdot \pi \cdot r^2$

Grün gekennzeichnete Fläche: $A_{grün} = A_1 - A_2 - A_3 = 0{,}5 \cdot \pi \cdot 2Rr = \pi \cdot rR$

Mit dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt: $h^2 = 2r \cdot 2R \Rightarrow h = 2\sqrt{rR}$

Der gelbe Kreis hat den Radius $r_{gelb} = \frac{h}{2} = \sqrt{rR}$

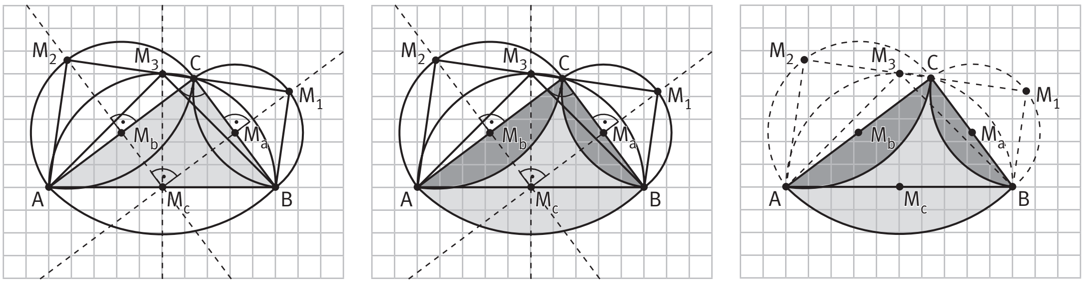
Gelber Kreis mit $r_{gelb} = \sqrt{rR}$: $A_{gelb} = \pi \cdot (\sqrt{rR})^2 = \pi \cdot rR$ $\quad \Rightarrow A_{gelb} = A_{grün}$

c) Die farbig markierte Fläche setzt sich zusammen aus:

… der Fläche des Dreiecks ABC

… plus dem Kreissegment AB, das mithilfe des Kreises um M_3 mit $r_3 = \frac{c}{2}\sqrt{2}$ entsteht,

… abzüglich der Kreissegmente BC und AC, die mithilfe des Kreises um M_1 bzw. M_2 mit $r_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ bzw. $r_2 = \frac{b}{2}\sqrt{2}$ entstehen.



Vorüberlegungen:

Im Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c und den Seitenmittelpunkten M_a, M_b, M_c gilt:

$\overline{AM_c} = \overline{BM_c} = \overline{M_cM_3} = \frac{c}{2}$ $\qquad \overline{BM_a} = \overline{CM_a} = \overline{M_aM_1} = \frac{a}{2}$ $\qquad \overline{AM_b} = \overline{CM_b} = \overline{M_bM_2} = \frac{b}{2}$

Damit gilt (Satz des Pythagoras):

$$\overline{AM_3}^2 = \overline{AM_c}^2 + \overline{M_cM_3}^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AM_3} = \overline{BM_3} = r_3 = \frac{c}{2}\sqrt{2}$$

Ebenso ergibt sich für $\overline{BM_1} = \overline{CM_1}$ und für $\overline{AM_2} = \overline{CM_2}$

$$\overline{BM_1} = \overline{CM_1} = r_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$
$$\overline{AM_2} = \overline{CM_2} = r_2 = \frac{b}{2}\sqrt{2}$$

Da die Dreiecke ABM_3, CBM_1 und ACM_2 rechtwinklig sind, handelt es sich bei den Kreissegmenten ABM_3, CBM_1 und ACM_2 um Segmente eines Viertelkreises; der Flächeninhalt beträgt nach der Formel für Viertelkreis-Segmente mit Radius r:

$$A_{Viertelkreis\text{-}Segment} = \frac{1}{4} r^2 \cdot (\pi - 2)$$

$$\begin{aligned}
A_{farbig} &= A_{Dreieck\text{-}ABC} + A_{Kreissegment\text{-}AB} - A_{Kreissegment\text{-}AC} - A_{Kreissegment\text{-}BC}\\
&= A_{Dreieck\text{-}ABC} + \frac{1}{4} \cdot r_3^2 \cdot (\pi - 2) - \frac{1}{4} \cdot r_1^2 \cdot (\pi - 2) - \frac{1}{4} \cdot r_2^2 \cdot (\pi - 2)\\
&= A_{Dreieck\text{-}ABC} + \frac{1}{4} \cdot (\pi - 2) \cdot \left[\left(\frac{c}{2}\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\sqrt{2}\right)^2\right]\\
&= A_{Dreieck\text{-}ABC} + \frac{1}{4} \cdot (\pi - 2) \cdot \frac{1}{2} \cdot (c^2 - a^2 - b^2)\\
&= A_{Dreieck\text{-}ABC} + \frac{1}{8} \cdot (\pi - 2) \cdot 0\\
&= A_{Dreieck\text{-}ABC}
\end{aligned}$$

K5 **1** **a)** $A_{\text{grüne Fläche}} = 4 \cdot 8\,cm^2 - 2 \cdot A_{\text{Kreis}}$

$A_{\text{Kreis}} = \pi \cdot r^2$

$A_{\text{Kreis}} \approx 3{,}14 \cdot 2^2\,cm^2 = 12{,}56\,cm^2$

$A_{\text{grüne Fläche}} = 32\,cm^2 - 2 \cdot 12{,}56\,cm^2 = 6{,}88\,cm^2$

$u_{\text{grüne Fläche}} = 2 \cdot 4\,cm + 2 \cdot 8\,cm + 2 \cdot u_{\text{Kreis}}$

$u_{\text{Kreis}} = 2 \cdot \pi \cdot r$

$u_{\text{Kreis}} \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2\,cm = 12{,}56\,cm$

$u_{\text{grüne Fläche}} = 8\,cm + 16\,cm + 2 \cdot 12{,}56\,cm = 49{,}12\,cm$

b) $A_{\text{grüne Fläche}} = 4 \cdot 8\,cm^2 - 8 \cdot A_{\text{Kreis}}$

$A_{\text{Kreis}} \approx 3{,}14 \cdot 1^2\,cm^2 = 3{,}14\,cm^2$

$A_{\text{grüne Fläche}} = 32\,cm^2 - 8 \cdot 3{,}14\,cm^2 = 6{,}88\,cm^2$

$u_{\text{grüne Fläche}} = 2 \cdot 4\,cm + 2 \cdot 8\,cm + 8 \cdot u_{\text{Kreis}}$

$u_{\text{Kreis}} \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1\,cm = 6{,}28\,cm$

$u_{\text{grüne Fläche}} = 8\,cm + 16\,cm + 8 \cdot 6{,}28\,cm = 74{,}24\,cm$

K2 **2** $A_{\text{Streifen}} = A_{\text{großer Kreis}} - A_{\text{kleiner Kreis}}$

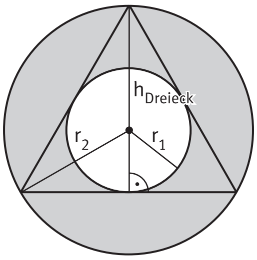
$A_{\text{großer Kreis}} = \pi \cdot 3{,}6^2\,m^2 \approx 40{,}7\,m^2$

$A_{\text{kleiner Kreis}} = \pi \cdot 2{,}9^2\,m^2 \approx 26{,}4\,m^2$

$A_{\text{Streifen}} \approx 40{,}7\,m^2 - 26{,}4\,m^2 \approx 14{,}3\,m^2$

Die Größe der zu bepflanzenden Fläche beträgt ungefähr $14{,}3\,m^2$.

K5 **3** **a)**



$A_{\text{Kreisring}} = A_{\text{Umkreis}} - A_{\text{Inkreis}}$

$r_1 = \frac{1}{3} \cdot h_{\text{Dreieck}}$ $\qquad r_2 = \frac{2}{3} \cdot h_{\text{Dreieck}}$

$h_{\text{Dreieck}}{}^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 5^2\,cm^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\,cm^2 = 18{,}75\,cm^2$

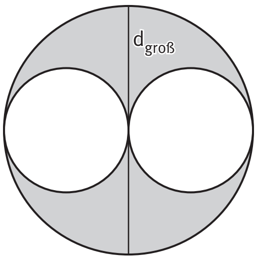
$h_{\text{Dreieck}} \approx 4{,}3\,cm$

$r_1 \approx \frac{1}{3} \cdot 4{,}3\,cm \approx 1{,}4\,cm$ $\qquad r_2 \approx \frac{2}{3} \cdot 4{,}3\,cm \approx 2{,}9\,cm$

$A_{\text{Inkreis}} \approx \pi \cdot 1{,}4^2\,cm^2 \approx 6{,}2\,cm^2$ $\qquad A_{\text{Umkreis}} \approx \pi \cdot 2{,}9^2\,cm^2 \approx 26{,}4\,cm^2$

$A_{\text{Kreisring}} = 26{,}4\,cm^2 - 6{,}2\,cm^2 = 20{,}2\,cm^2$

b)



$u_{\text{großer Kreis}} = \pi \cdot d_{\text{groß}}$

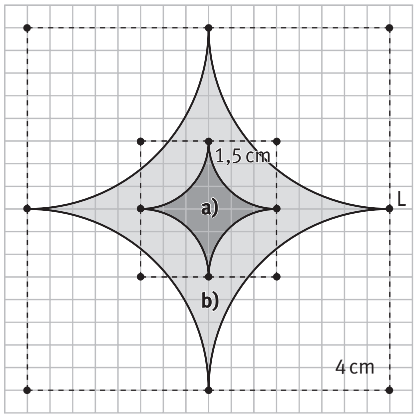
$u_{\text{kleiner Kreis}} = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot d_{\text{groß}}$

$2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot d = \pi \cdot d$, daraus folgt: Der Umfang der zwei kleinen Kreise ist gleich dem Umfang des großen Kreises, dem sie einbeschrieben sind.

K5 **4**

	a)	b)	c)	d)	e)
r	6,00 cm	7,50 cm	2,40 dm	32 cm	2,29 m
d	12,00 cm	15,00 cm	4,80 dm	64 cm	4,58 m
μ	40°	61,12°	122°	4,25°	40°
b	4,19 cm	8,00 cm	5,11 dm	2,37 cm	1,60 m
A_{Sektor}	12,57 cm²	30,00 cm²	6,13 dm²	38 cm²	1,83 m²
u_{Sektor}	16,19 cm	23,00 cm	9,91 dm	66,37 cm	6,18 m

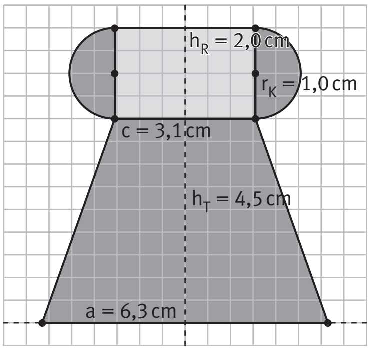
K3 **5** Allgemein gilt:
$A_{Figur} = A_{Quadrat} - A_{Kreis}$ und $u_{Figur} = u_{Kreis}$ für das Quadrat der Seitenlänge 2a und den Kreis mit Radius der Länge a, d. h.:
$A_{Figur} = (2a)^2 - a^2\pi = a^2(4-\pi)$ und $u_{Figur} = 2\pi a$



a) $A_{Figur} = 1{,}5^2 \cdot (4-\pi)\,\text{cm}^2 \approx 1{,}93\,\text{cm}^2$
$u_{Figur} = 3\pi\,\text{cm} \approx 9{,}42\,\text{cm}$
b) $A_{Figur} = 4^2 \cdot (4-\pi)\,\text{cm}^2 \approx 13{,}73\,\text{cm}^2$
$u_{Figur} = 8\pi\,\text{cm} \approx 25{,}13\,\text{cm}$
c) $A_{Figur} = (2a)^2 - a^2\pi = a^2(4-\pi) \approx 0{,}86 \cdot a^2$
$u_{Figur} = 2\pi a$

K3 **6** **a)** Kreis: $A = r^2\pi = 40\,\text{cm}^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{40}{\pi}}\,\text{cm} \approx 3{,}57\,\text{cm}$
$u = 2\pi r \Rightarrow u \approx 22{,}43\,\text{cm}$
b) Halbkreis: $A = \frac{1}{2}r^2\pi = 40\,\text{cm}^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{80}{\pi}}\,\text{cm} \approx 5{,}05\,\text{cm}$
$u = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r + 2r = (\pi + 2) \cdot r \Rightarrow u \approx 25{,}97\,\text{cm}$
c) Dreiviertelkreis: $A = \frac{3}{4} \cdot r^2\pi = 40\,\text{cm}^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{160}{3\pi}}\,\text{cm} \approx 4{,}12\,\text{cm}$
$u = \frac{3}{4} \cdot 2\pi r + 2r = \left(\frac{3}{4}\pi + 2\right) \cdot r \Rightarrow u \approx 27{,}66\,\text{cm}$
d) Viertelkreis: $A = \frac{1}{4} \cdot r^2\pi = 40\,\text{cm}^2 \Rightarrow r = 2 \cdot \sqrt{\frac{40}{\pi}}\,\text{cm} \approx 7{,}14\,\text{cm}$
$u = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r + 2r = \left(\frac{1}{2} \cdot \pi + 2\right) \cdot r \Rightarrow u \approx 25{,}50\,\text{cm}$

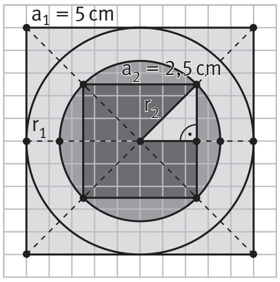
K3 **7** **a)** (Mögliche Zerlegung der Querschnittsfläche)



b)
$$\begin{aligned}
A &= A_{Trapez} + A_{Rechteck} + 2 \cdot A_{Halbkreis}\\
&= A_{Trapez} + A_{Rechteck} + A_{Kreis}\\
&= \tfrac{6{,}3\,\text{cm} + 3{,}1\,\text{cm}}{2} \cdot (4{,}5\,\text{cm}) + (3{,}1\,\text{cm}) \cdot (2{,}0\,\text{cm}) + \pi\,(1\,\text{cm})^2\\
&\approx 21{,}15\,\text{cm}^2 + 6{,}2\,\text{cm}^2 + 3{,}14\,\text{cm}^2\\
&= 30{,}49\,\text{cm}^2
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
u &= a_{Trapez} + 2 \cdot b_{Trapez} + c_{Trapez} + u_{Kreis}\\
&= 6{,}3\,\text{cm} + 2 \cdot \sqrt{4{,}5^2 + 1{,}6^2}\,\text{cm} + 3{,}1\,\text{cm} + 2\pi\,\text{cm}\\
&\approx 6{,}3\,\text{cm} + 9{,}55\,\text{cm} + 3{,}1\,\text{cm} + 6{,}28\,\text{cm}\\
&= 25{,}23\,\text{cm}
\end{aligned}$$
Das Werkstück hat in der Verkleinerung einen Flächeninhalt von $30{,}49\,\text{cm}^2$ und einen Umfang von 25,23 cm bzw. in echt einen Flächeninhalt von $3049\,\text{cm}^2$ und einen Umfang von 252,3 cm.

K3 **8** Q_1 ist das große äußere Quadrat in Grau mit der Seitenlänge $a_1 = 50\,cm$.
Q_2 ist das kleine innere Quadrat in Grün mit der Seitenlänge $a_2 = 0{,}5a_1 = 25\,cm$.
K_1 ist der große äußere Kreis mit $r_1 = 0{,}5a_1 = 25\,cm$.
K_2 ist der kleine innere Kreis mit r_2.
r_2 ist die Länge der Hypotenuse des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks mit Katheten der Länge $0{,}5a_2$. Nach Pythagoras gilt für r_2:
$r_2^2 = (0{,}5a_2)^2 + (0{,}5a_2)^2 = 2 \cdot (0{,}5a_2)^2 \Rightarrow r_2 = 0{,}5a_2\sqrt{2} = 12{,}5\sqrt{2}\,cm \approx 17{,}68\,cm$

a)



b)

$A_{\text{kleines grünes Quadrat}}$	$= (0{,}5a_1)^2$	$= 25^2\,cm^2$	$= 625{,}00\,cm^2$
$A_{\text{vier rote Viertelkreissegmente}}$	$= A_{K_2} - A_{Q_2}$		
	$= \pi r_2^2\,cm^2 - 625\,cm^2$	$\approx \pi \cdot 312{,}6\,cm^2 - 625\,cm^2$	$\approx 357{,}06\,cm^2$
$A_{\text{weißer Kreisring}}$	$= A_{K_1} - A_{K_2}$		
	$= \pi \cdot [r_1^2 - r_2^2]$	$= \pi \cdot [625 - 312{,}6]\,cm^2$	$\approx 981{,}43\,cm^2$
$A_{\text{graue Leinwand}}$	$= A_{Q_1} - A_{K_1}$		
	$= a_1^2 - (0{,}5a_1)^2 \cdot \pi$	$\approx 2500\,cm^2 - 1963{,}50\,cm^2$	$= 536{,}50\,cm^2$

Summe der Flächen (in cm^2): $625{,}00 + 357{,}06 + 981{,}43 + 536{,}50 \approx 2500 = 50^2$

c)

$A_{\text{grün}}$	$= 0{,}25a^2$		
A_{rot}	$= 0{,}125a^2\pi - 0{,}25a^2$	$= (0{,}125\pi - 0{,}25)a^2$	$\approx 0{,}14a^2$
$A_{\text{weiß}}$	$= \pi(0{,}25a^2 - 0{,}125a^2)$	$= 0{,}125\pi a^2$	$\approx 0{,}39a^2$
A_{grau}	$= a^2 - 0{,}25a^2\pi$	$= (1 - 0{,}25\pi)a^2$	$\approx 0{,}21a^2$

Summe der Flächen: $0{,}25a^2 + 0{,}14a^2 + 0{,}39a^2 + 0{,}21a^2 = 0{,}99a^2 \approx a^2$

K3 **9** **a)** Ringe mit $R = 0{,}5(2 + x)\,m = 1\,m + 0{,}5x\,m$ und $r = 1\,m$, $x \in \mathbb{R}^+$.

$A(x) = \pi \cdot [(1 + 0{,}5x)^2 - 1^2]\,m^2 = \pi \cdot (0{,}25x^2 + x)\,m^2$

$u(x) = 2\pi \cdot (1 + 0{,}5x + 1)\,m = \pi \cdot (x + 4)\,m$

b) ① $A(x) = 100\,m^2 \Leftrightarrow \pi \cdot (0{,}25x^2 + x) = 100 \Leftrightarrow \pi \cdot 0{,}25x^2 + \pi x - 100 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 100\pi}}{0{,}5\pi} = -2 \pm \frac{2\sqrt{\pi^2 + 100\pi}}{\pi} \approx -2 \pm 11{,}46$

$x_1 = -13{,}46$; $x_2 = 9{,}46$ $\qquad \mathbb{L} = \{9{,}46\}$, da $x \in \mathbb{R}^+$

Für $x = 9{,}46$ hat der äußere Kreis einen Durchmesser von $11{,}46\,m$ bzw. einen Radius von $5{,}73\,m$ und der Ring einen Flächeninhalt von $100\,m^2$:

$A = \pi \cdot (5{,}73^2 - 1^2)\,m^2 = \pi \cdot 31{,}8329\,m^2 \approx 100\,m^2$

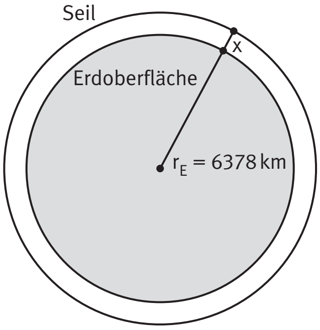
② $u(x) = 50\,m \Leftrightarrow \pi \cdot (x + 4) = 50 \Leftrightarrow x = \frac{50}{\pi} - 4 \approx 11{,}92$ $\qquad \mathbb{L} = \{11{,}92\}$

Für $x = 11{,}92$ hat der äußere Kreis einen Durchmesser von $13{,}92\,m$ bzw. einen Radius von $6{,}96\,m$ und der Ring einen Umfang von $50\,m$:

$u = 2\pi \cdot (6{,}96 + 1)\,m = 15{,}92\pi\,m \approx 50\,m$

K3 **10** **a)** $u_E = 2\pi r_E = 2\pi \cdot 6378\,\text{km} \approx 40\,074{,}15589\,\text{km}$

b) Skizze:



$u_S = 40\,074{,}15589\,\text{km} + 0{,}001\,\text{km} = 40\,074{,}15689\,\text{km}$

$r_S = \frac{u_S}{2\pi} = \frac{40\,074{,}15689\,\text{km}}{2\pi} \approx 6378{,}000159\,\text{km}$

$x = r_S - r_E$

$= 6378{,}000159\,\text{km} - 6378\,\text{km}$

$= 0{,}000159\,\text{km}$

$= 15{,}9\,\text{cm}$

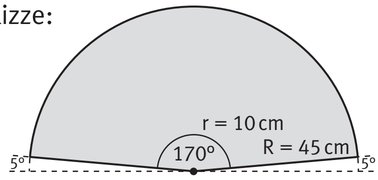
Das Seil steht rund 16 cm von der Erde ab.

c) Bei allgemeinem Umfang $u = 2\pi r$ gilt: $u_S = 2\pi r_S = 2\pi r + 1\,\text{m} \Rightarrow r_S = \frac{2\pi r + 1\,\text{m}}{2\pi} = r + \frac{1\,\text{m}}{2\pi}$

Zunahme des Radius: $r_S - r = \left(r + \frac{1\,\text{m}}{2\pi}\right) - r = \frac{1\,\text{m}}{2\pi} \approx 0{,}159\,\text{m}$

Die Zunahme des Radius um $\frac{1\,\text{m}}{2\pi} \approx 0{,}159\,\text{m}$ ist unabhängig von r.

K2 **11** **a)** Skizze:



b) $A = \frac{170°}{360°} \cdot \pi \cdot [(45\,\text{cm})^2 - (10\,\text{cm})^2]$

$= \frac{170°}{360°} \cdot \pi \cdot 1925\,\text{cm}^2 \approx 2855{,}79\,\text{cm}^2$

Der Wischergummi überstreicht eine Fläche von $2855{,}79\,\text{cm}^2$.

c) Heckscheibenfläche A_H:

$56\,\% : 2855{,}79\,\text{cm}^2 = 100\,\% : A_H \Rightarrow A_H = \frac{100\,\%}{56\,\%} \cdot 2855{,}79\,\text{cm}^2 \approx 5099{,}6\,\text{cm}^2$

Frontscheibenfläche A_F:

$73\,\% : 4860\,\text{cm}^2 = 100\,\% : A_F \Rightarrow A_F = \frac{100\,\%}{73\,\%} \cdot 4860\,\text{cm}^2 \approx 6657{,}5\,\text{cm}^2$

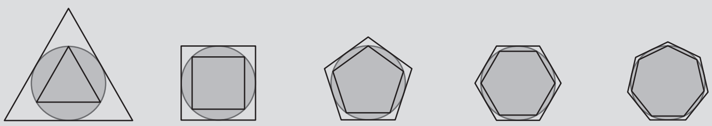
Es gilt: $\frac{6657{,}5}{5099{,}6} \approx 1{,}305$

Die Fläche der Frontscheibe ist um 30,5 % größer als die Fläche der Heckscheibe.

Geschichte

K6

- Der Wert von Vieta (Italien) gibt π am genauesten an, die Abweichung zum Taschenrechner-Wert beträgt hier $4{,}813291 \cdot 10^{-5}$.
  Näherungswerte für π = 3,14159...:
  Ägypter: 3,16049...
  Archimedes: 3,08333... < π < 3,142857...
  Brahmagupta: 3,16227...
  Vieta 3,14164...
- Archimedes' Methode liegt eine untere und obere Abschätzung von π mithilfe von ein- und umbeschriebenen Vielecken zugrunde. Archimedes konstruiert um und in einen Kreis mit Radius 1 gleichseitige Vielecke. Dabei fängt er mit einem ein- und umbeschriebenen Dreieck an und verdoppelt die Anzahl der Ecken fortlaufend, bis er beim 96-Eck ankommt. Die Umfänge dieser ein- und umbeschriebenen n-Ecke nähern sich an die Kreislinie an und geben die untere bzw. obere Abschätzung für π an.
  Zur besseren Veranschaulichung wird hier in der Darstellung die Anzahl der Ecken um jeweils 1 erhöht.



- Bis August 2016 wurden gut 12 Billionen Dezimalstellen der Zahl π ermittelt.
  Zur Erinnerung: Nicht vergessen, am 14. März (als Datum: 3.14) wir der „Pi Day" gefeiert!

K2 **π experimentell bestimmen**

a) Es sind individuelle Lösungen möglich.

b) Auch bei diesem Experiment erhält man einen Schätzwert für $\frac{\pi}{4}$:

$A_{\text{Viertelkreis}} = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2$

$A_{\text{kleines Quadrat}} = r^2$

Quotientenbildung: $\frac{A_{\text{Viertelkreis}}}{A_{\text{kleines Quadrat}}} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \pi r^2}{r^2} = \frac{\pi}{4}$

K2 **π mit dem örtlichen Telefonbuch bestimmen**

a) und **b)** Lösungsmöglichkeit:

Nr.	Endziffern der Telefonnummer	Endziffern der Telefonnummer	x-Koordinate des Punktes	y-Koordinate des Punktes	$\sqrt{x^2 + y^2}$	Im Kreis?
1	…285	…916	0,85	0,16	0,865	ja
2	…590	…482	0,90	0,82	1,218	nein
3	…297	…341	0,97	0,41	1,053	nein
4	…554	…674	0,54	0,74	0,916	ja
5	…832	…165	0,32	0,65	0,724	ja
6	…456	…050	0,56	0,50	0,751	ja
7	…014	…569	0,04	0,69	0,691	ja
8	…318	…729	0,18	0,29	0,341	ja
9	…631	…603	0,31	0,03	0,311	ja
10	…882	…776	0,82	0,76	1,118	nein
11	…645	…819	0,45	0,19	0,488	ja
12	…576	…947	0,76	0,47	0,894	ja
13	…816	…372	0,16	0,72	0,738	ja
14	…637	…122	0,37	0,22	0,430	ja
15	…852	…192	0,52	0,92	1,057	nein
16	…540	…198	0,40	0,98	1,058	nein
17	…448	…385	0,48	0,85	0,976	ja
18	…617	…677	0,17	0,77	0,789	ja
19	…858	…998	0,58	0,98	1,139	nein
20	…310	…176	0,10	0,76	0,767	ja

Damit liegen 14 Punkte von 20 Punkten innerhalb des Kreises ($\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$). Als Schätzwert für $\frac{\pi}{4}$ erhält man $\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$. Der Schätzwert für π ist also $\frac{28}{10} = 2{,}8$. Das ist natürlich ein schlechter Schätzwert, aber die Monte-Carlo-Methode ist auch für langsame Konvergenz bekannt.

c) Beim obigen Schätzwert für π von 2,8 ergibt sich als Abweichung:

$\pi \cdot x = 2{,}8$

$x \approx 0{,}8913$

$1 - x = 0{,}1087 = 10{,}87\,\%$

Die Abweichung von 2,8 vom Taschenrechner-Wert von π beträgt rund 10,87 %.

K2 **π mit einem Tabellenprogramm bestimmen**

a) Wenn $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$ gilt, dann liegt der Punkt $P\,(x\,|\,y)$ auf dem Viertelkreis.

b) Hier soll der Umgang mit einem Tabellenkalkulationsprogramm geübt werden.

c) Das Gesetz der großen Zahlen besagt, dass mit zunehmender Zahl von Versuchsdurchführungen die relative Häufigkeit eines Ereignisses einen immer besseren Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit darstellt, dass dieses Ereignis eintritt. Insofern liefert die wiederholte Durchführung mit einer großen Anzahl an Versuchen einen immer besseren Schätzwert für $\frac{\pi}{4}$ bzw. π.

K5 **1** **a)** $u \approx 35{,}8\,cm$; $A \approx 102{,}0\,cm^2$ **b)** $u \approx 15{,}7\,cm$; $A \approx 19{,}6\,cm^2$
c) $u \approx 113{,}0\,mm$; $A \approx 1017{,}4\,mm^2$ **d)** $u \approx 942\,m$; $A \approx 7{,}1\,ha$
e) $u \approx 19{,}5\,cm$; $A \approx 30{,}2\,cm^2$ **f)** $u \approx 6{,}0\,km$; $A \approx 2{,}9\,km^2$

K5 **2** **a)** $r \approx 26{,}27\,m$; $A \approx 2167\,m^2$ **b)** $r \approx 0{,}32\,km$; $A \approx 0{,}32\,km^2$
c) $r \approx 1{,}43\,m$; $A \approx 6{,}42\,m^2$ **d)** $r \approx 1{,}18\,dm$; $A \approx 4{,}37\,dm^2$
e) $r \approx 6369\,km$; $A \approx 127\,371\,465\,km^2$ **f)** $r = 1{,}0\,m$; $A = \pi\,m^2 \approx 3{,}14\,m^2$

K5 **3** **a)** $r \approx 13{,}2\,cm$; $u \approx 82{,}9\,cm$ **b)** $r \approx 0{,}80\,m$; $u \approx 5{,}02\,m$
c) $r = 25{,}0\,m$; $u = 157{,}08\,m$ **d)** $r \approx 1{,}57\,km$; $u \approx 9{,}86\,km$
e) $r \approx 387\,m$; $u \approx 2430\,m$ **f)** $r = 1\,km$; $u = 6{,}28\,km$

K5 **4** $d \approx 29{,}9\,cm$; $A \approx 702\,cm^2$ ($d \approx 6{,}5\,dm$; $A \approx 33{,}2\,dm^2$) ($d \approx 1{,}20\,m$; $A \approx 1{,}13\,m^2$)

K5 **5** $d \approx 1{,}13\,cm$ ($d \approx 10{,}1\,mm$) ($d \approx 6{,}6\,mm$)

K5 **6**

π			$A \approx 201{,}062\,cm^2$	$u \approx 50{,}265\,cm$
Anzahl gültiger Stellen	π	Intervall für π	Intervall für 64π	Intervall für 16π
2	$\pi \approx 3{,}1$	[3,05; 3,15[	[195,2; 201,6[	[48,8; 50,4[
3	$\pi \approx 3{,}14$	[3,135; 3,145[	[200,64; 201,28[	[50,16; 50,32[

K5 **7**

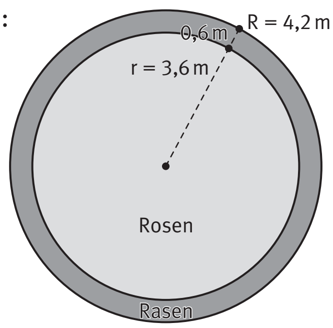
	a)	b)	c)	d)
r	5 dm	4,8 cm	7,53 dm	180,1 mm
d	10 dm	9,6 cm	15,06 dm	360,2 mm
μ	40°	125°	64,68°	35°
b	3,49 dm	10,47 cm	8,5 dm	110 mm
A_S	$8{,}73\,dm^2$	25,13 cm	$32\,dm^2$	$9907{,}0\,mm^2$

K5 **8**

	a)				b)			
	blau	grün	rot	gelb	blau	grün	rot	gelb
μ	60°	60°	120°	120°	90°	45°	90°	135°
b (in LE)	1,05	1,05	2,09	2,09	1,57	0,79	1,57	2,36
A (in FE)	0,52	0,52	1,05	1,05	0,79	0,39	0,79	1,18

K5 **9** $A_{Kreisring} = \pi \cdot (7{,}5^2\,cm^2 - 5{,}8^2\,cm^2) \approx 71{,}0\,cm^2$
Der Kreisring hat einen Flächeninhalt von ungefähr $71\,cm^2$.

K3 **10** **a)** Skizze:



b) $A_{Streifen} = \pi \cdot [(4{,}2\,m)^2 - (3{,}6\,m)^2] \approx 14{,}70\,m^2$
Der Flächeninhalt des Rasenstreifens beträgt $14{,}70\,m^2$.

c) $u_{Streifen} = 2\pi \cdot (4{,}2\,m + 3{,}6\,m) \approx 49{,}01\,m$
Die Länge des einzugrenzenden Streifens beträgt 49,01 m.

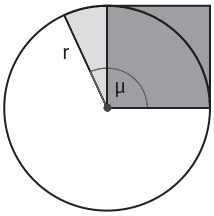
K3 **11** Für den Kreis mit Radius r und das Quadrat mit Seitenlänge a gilt bei gleichem Umfang:

$u_{Kreis} = u_{Quadrat} \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi r = 4a \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{2a}{\pi}$

$\Rightarrow \quad \frac{A_{Kreis}}{A_{Quadrat}} = \frac{r^2\pi}{a^2} = \frac{4a^2\pi}{\pi^2 a^2} = \frac{4}{\pi} \approx 1{,}273$

Der Flächeninhalt des Kreises ist um 27,3 % größer als der des Quadrats.

K3 **12** Skizze:



Für den Sektor des Kreises mit Radius r und Mittelpunktswinkel μ und das Quadrat mit Seitenlänge r gilt bei gleichem Flächeninhalt:

$A_{Sektor} = A_{Quadrat} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu}{360°} \cdot r^2\pi = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{360°}{\pi} \approx 114{,}59°$

Die Größe des Mittelpunktswinkels beträgt 114,59°.

K3 **13** Erdradius r: $2\pi r = 40\,024\,\text{km} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{40\,024\,\text{km}}{2\pi} \approx 6370{,}02\,\text{km}$

Das rechtwinklige Dreieck mit den Eckpunkten E (Erdmittelpunkt), S (Satellit) und T (Berührpunkt der Tangente von S an den Erdkreis) hat die Seitenlängen t, r = 6370,02 km und s = (36 000 km + 6370,02 km) = 42 370,02 km.

Für t gilt: $t = \sqrt{(42\,370{,}02\,\text{km})^2 - (6370{,}02\,\text{km})^2} \approx 41\,888{,}44\,\text{km}$

Die Tangentiallänge t beträgt 41 888,44 km.

K3 **14**

Rad mit n Zoll	Durchmesser d: $d = n \cdot 2{,}54\,\text{cm}$	Kreisumfang u: $u = \pi \cdot d$	Anzahl z an Umdrehungen: $z = \frac{150\,000\,\text{cm}}{u}$
16 Zoll	40,64 cm	127,67 cm	1174,9
18 Zoll	45,72 cm	143,63 cm	1044,4
20 Zoll	50,80 cm	159,59 cm	939,9

Ein Einrad mit einem Durchmesser von 16, 18 bzw. 20 Zoll macht auf einer Wegstrecke von 1,5 km = 150 000 cm (nach oben aufgerundet) 1175, 1045 bzw. 940 Umdrehungen.

K3 **15** **a)** Bei Kettenblatt-Zähnezahl $Z_K = 48$ und Ritzel-Zähnezahl Z_R gilt für die Übersetzung i_R der Gänge: $i_R = \frac{Z_K}{Z_R} = \frac{48}{Z_R}$

$Z_R = 24$: $i_{24} = \frac{48}{24} = 2 : 1$ $\qquad Z_R = 20$: $i_{20} = \frac{48}{20} = 2{,}4 : 1$ $\qquad Z_R = 16$: $i_{16} = \frac{48}{16} = 3 : 1$

Bei einer Umdrehung der Pedale macht das Hinterrad 2 bzw. 2,4 bzw. 3 Umdrehungen.

b) Anzahl z an Umdrehungen für ein Drittel der 9 km, d. h. für 3 km = 300 000 cm, mit Raddurchmesser d = 67 cm:

$z = \frac{300\,000\,\text{cm}}{\pi \cdot 67\,\text{cm}} \approx 1425{,}27$

Das Hinterrad macht auf einer Strecke von 3 km 1425,27 Umdrehungen.

3 km in kleinem Gang:	1425,27 : 2,0 ≈	712,64 Umdrehungen der Tretkurbel
3 km in mittlerem Gang:	1425,27 : 2,4 ≈	593,86 Umdrehungen der Tretkurbel
3 km in großem Gang:	1425,27 : 3,0 ≈	475,09 Umdrehungen der Tretkurbel
9 km insgesamt (Summe):		1781,59 Umdrehungen der Tretkurbel

Für die ganze Strecke muss der Radfahrer rund 1782-mal die Tretkurbel treten.

K3 **16** Die Breite b der Platte beträgt 211 mm. Die Länge l der Platte ergibt sich aus dem Durchmesser des großen Halbkreises: $l = 2 \cdot 118\,\text{mm} = 236\,\text{mm}$

$A_{\text{Platte}} = 211\,\text{mm} \cdot 236\,\text{mm} = 49\,796\,\text{mm}^2$

Die Fläche des Holzabfalls ergibt sich aus der Fläche A_{Platte} der Holzplatte abzüglich der Fläche des Halbkreisringes mit $R = 118\,\text{mm}$ und $r = 0{,}5 \cdot 128\,\text{mm} = 64\,\text{mm}$ und abzüglich der Trapezfläche mit Seitenlängen $a = 133\,\text{mm}$, $c = 236\,\text{mm}$ und Höhe $h = (211 - 118)\,\text{mm} = 93\,\text{mm}$.

$$\begin{aligned} A_{\text{Abfall}} &= 211\,\text{mm} \cdot 236\,\text{mm} - \tfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot [(118\,\text{mm})^2 - (64\,\text{mm})^2] - 93\,\text{mm} \cdot \tfrac{133 + 236}{2}\,\text{mm} \\ &= 49\,796\,\text{mm}^2 - 0{,}5 \cdot \pi \cdot (9828\,\text{mm}^2) - (93\,\text{mm} \cdot 184{,}5\,\text{mm}) \\ &\approx 49\,796\,\text{mm}^2 - 15\,437{,}8\,\text{mm}^2 - 17\,158{,}5\,\text{mm}^2 \\ &\approx 17\,199{,}7\,\text{mm}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\text{Abfallfläche}}{\text{Holzplattenfläche}} = \frac{17\,199{,}7\,\text{mm}^2}{49\,796{,}0\,\text{mm}^2} \approx 0{,}345$$

Der Holzabfall beträgt 34,5 %.

K3 **17** Im Bild sind drei Kreise zu erkennen: ein kleiner, ein mittelgroßer und ein großer Kreis mit den Radien $r_1 = 1$ LE, $r_2 = 2$ LE und $r_3 = 3$ LE und den Flächen $A_1 = \pi$ FE, $A_2 = 4\pi$ FE und $A_3 = 9\pi$ FE.
Außerdem sind die zugehörigen Halbkreise zu sehen mit den Flächen $0{,}5A_1 = 0{,}5\pi$ FE, $0{,}5A_2 = 2\pi$ FE und $0{,}5A_3 = 4{,}5\pi$ FE. Es gilt für $A_{\text{grün}} = A_{\text{blau}}$:

$A_{\text{grün}} = 0{,}5A_3 + 0{,}5A_1 - 0{,}5A_2 = 0{,}5\pi \cdot (9 + 1 - 4)\text{ FE} = 3\pi\text{ FE}$

$A_{\text{gelb}} = A_2 - A_1 = 4\pi\text{ FE} - \pi\text{ FE} = 3\pi\text{ FE}$

$\Rightarrow A_{\text{grün}} = A_{\text{blau}} = A_{\text{gelb}} = 3\pi\text{ FE}$

Die drei Flächen sind gleich groß.

K1/6 **18** Die Aussage ist falsch, da die Dezimalbruchentwicklung von π unendlich nichtperiodisch ist.

K1/6 **19** Die Aussage ist richtig, weil in der Formel $u = 2\pi r$ der Faktor 2π konstant ist.

K1/6 **20** Die Aussage ist falsch, denn mit $A = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi$ gilt beispielsweise:
$d_1 = 2\,\text{cm}$ und $A_1 \approx 3{,}14\,\text{cm}^2$, aber $d_2 = 4\,\text{cm} = 2d_1$, aber $A_2 \approx 12{,}57\,\text{cm}^2 \neq 2A_1$

K1/6 **21** Bei konstantem Radius r ist die Aussage richtig, hier gilt: $b = \frac{r\pi}{180°} \cdot \mu$ mit konstantem Faktor $\frac{r\pi}{180°}$.

K1/6 **22** Die Aussage ist richtig, es gilt: $u_{\text{Sektor}} = b + 2r = b + d$.

K1/6 **23** Die Aussage ist falsch: Zur Berechnung des Kreissektor-Flächeninhalts A_S benötigt man den Mittelpunktswinkel μ.

K1/6 **24** Die Aussage ist falsch.
Ein Ring habe den äußeren Radius R, den inneren Radius r und die Fläche $A_1 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$.
Verdoppelt man die Radien, so gilt für den neu entstandenen Ring:
$A_2 = \pi \cdot [(2R)^2 - (2r)^2] = 4\pi \cdot (R^2 - r^2) = 4 \cdot A_1$
Verdoppelt man die beiden Radien, so vervierfacht sich die Fläche.

K 1/6 **25** Die Aussage ist falsch.

Betrachtet man bei konstantem Radius r = 1 LE die Mittelpunktswinkel $\mu_1 = 0°$ und $\mu_2 = 180°$, so könnte man zunächst denken, die Behauptung sei richtig, da für $\mu_1 = 0°$ bzw. $\mu_2 = 180°$ gilt:

$A_{Dreieck} = 0\,cm^2$

$\mu_1 = 0°$: $A_{Segment} = \frac{0°}{360°} \cdot \pi\text{ FE} - A_{Dreieck} = 0\text{ FE} = A_{Sektor}$

$\mu_2 = 180°$: $A_{Segment} = \frac{180°}{360°} \cdot \pi\text{ FE} - A_{Dreieck} = \frac{180°}{360°} \cdot \pi\text{ FE} = A_{Sektor} \Rightarrow \frac{A_{Segment}}{A_{Sektor}} = 1$

Falls die Flächen direkt proportional wären, hätte der Proportionalitätsfaktor k den Wert 1, wie er bei $\mu_2 = 180°$ scheinbar ermittelt wurde. Damit müsste für alle μ gelten:

$\frac{A_{Segment}}{A_{Sektor}} = 1$, d. h.: $A_{Sektor} = A_{Segment}$

Dies lässt sich mit einem Gegenbeispiel widerlegen:

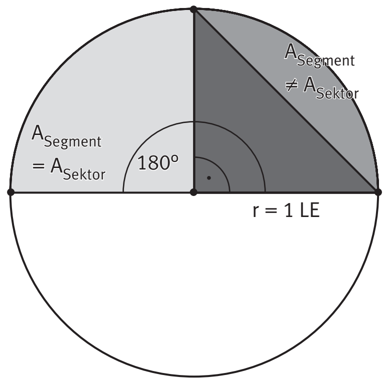
Für $\mu_3 = 90°$ gilt:

$A_{Dreieck} = 0{,}5$ FE, d. h.:

$A_{Segment} = A_{Sektor} - A_{Dreieck}$
$= A_{Sektor} - 0{,}5$ FE

$\Rightarrow$ Es gibt Mittelpunktswinkel mit $A_{Segment} \neq A_{Sektor}$.

Damit können die Flächen von Kreissegment und zugehörigem Kreissektor nicht direkt proportional sein.



K 1/6 **26** Die Aussage ist falsch.

Gegenbeispiel sind die Mittelpunktswinkel $\mu_1 = 60°$ und $\mu_2 = 90°$ am Kreis mit r = 1 LE.

Die zugehörigen Dreiecke sind gleichseitig bzw. rechtwinklig, ihr Flächeninhalt A_1 bzw. A_2 lässt sich leicht berechnen:

$A_1 = 0{,}25 \cdot \sqrt{3}\text{ FE} \approx 0{,}433\text{ FE}$ für $\mu_1 = 60°$

$A_2 = 0{,}5\text{ FE}$ für $\mu_2 = 90°$

Damit gilt:

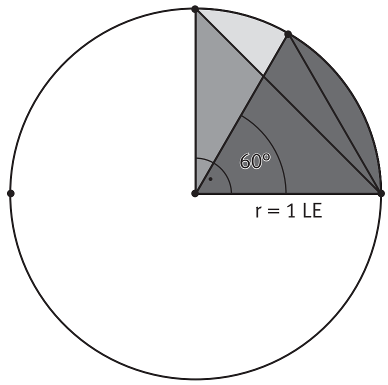
$\mu_1 = 60°$: $A_{Segment} = \frac{60°}{360°} \cdot \pi\text{ FE} - A_1$
$\approx 0{,}524\text{ FE} - 0{,}433\text{ FE} \approx 0{,}091\text{ FE}$

$\mu_2 = 90°$: $A_{Segment} = \frac{90°}{360°} \cdot \pi\text{ FE} - A_2$
$= 0{,}785\text{ FE} - 0{,}5\text{ FE} \approx 0{,}285\text{ FE}$

$\Rightarrow \frac{60°}{0{,}091\text{ FE}} \approx 659°/\text{FE}$ und $\frac{90°}{0{,}285\text{ FE}} \approx 316°/\text{FE}$

$\Rightarrow \frac{60°}{0{,}091\text{ FE}} \neq \frac{90°}{0{,}285\text{ FE}}$

$\Rightarrow$ Es gibt keinen Proportionalitätsfaktor k mit $\frac{\mu_1}{A_1} = k \cdot \frac{\mu_2}{A_2}$.



KX **1** $\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{\overline{AB}}{\overline{ZA}} \cdot \overline{ZD} \quad \Rightarrow \overline{CD} = \frac{3\,cm}{4\,cm} \cdot 5\,cm = 3{,}75\,cm$

$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZD}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}} \Leftrightarrow \overline{ZB} = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZD}} \cdot \overline{ZC} \quad \Rightarrow \overline{ZB} = \frac{4\,cm}{5\,cm} \cdot 6{,}5\,cm = 5{,}2\,cm$

KX **2** **a)** 1 $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ 2 $\frac{f}{e} = \frac{c+d}{c}$ **b)** 3 $\frac{u}{v} = \frac{t}{k} = \frac{r}{s}$

KX **3** „x ist 4-mal so lang wie y“: $x = 4y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 4 \Leftrightarrow x = y + y + y + y$

KX **4** Julias Vorgehen mit Zuhilfenahme des Vierstreckensatzes beruht auf der Annahme, [DE] und [BC] seien parallel. Dies ist jedoch nicht gegeben, daher ist Julias Vorgehen falsch.

KX **5** **a)** $\frac{2}{9} = \frac{8}{36}$ und $\frac{3{,}5}{14} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = \frac{9}{36} \Rightarrow \frac{2}{9} \neq \frac{3{,}5}{14} \Rightarrow g \nparallel h$

b) $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ und $\frac{8}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{8}{16} \Rightarrow g \parallel h$

KX **6** **a)** −2; 2 **b)** −10; 10 **c)** / **d)** 0
e) −1; 1 **f)** / **g)** $-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}$ **h)** −0,9; 0,9

KX **7** **a)** 5 **b)** 4 **c)** 9 **d)** 1 **e)** / **f)** 0 **g)** 3 **h)** 9 **i)** 9

KX **8** **a)** $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$ **b)** $\mathbb{L} = \{-1; 1\}$ **c)** $\mathbb{L} = \varnothing$
d) $\mathbb{L} = \{-0{,}8; 0{,}8\}$ **e)** $\mathbb{L} = \{-0{,}3; 0{,}3\}$ **f)** $\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\} = \{-1{,}41; 1{,}41\}$
g) $\mathbb{L} = \{-6; 6\}$ **h)** $\mathbb{L} = \{-2; 2\}$ **i)** $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$

KX **9** **a)** $a^2 = 400\,cm^2 \Rightarrow a = 20\,cm$ Die Seite ist 20 cm lang.
b) $6a^2 = 121{,}5\,cm^2 \Leftrightarrow a^2 = 20{,}25\,cm^2 \Rightarrow a = 4{,}5\,cm$ Eine Kante ist 4,5 cm lang.

KX **10** **a)** 2,24 **b)** 3,16 **c)** 26,80 **d)** 0,82 **e)** 3,65 **f)** 3,15 **g)** 0,71 **h)** 6,32 **i)** 0,41

KX **11** **a)** irrat. **b)** rat. **c)** rat. **d)** rat. **e)** rat. **f)** rat.

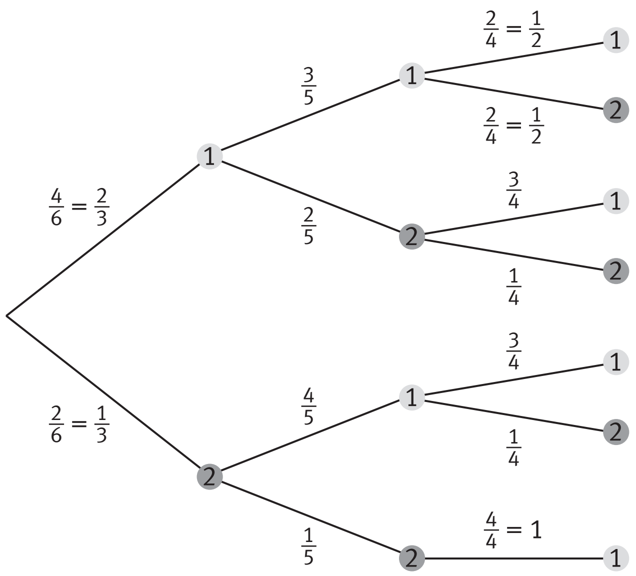
KX **12** **a)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{100}$ **b)** $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = 10$ **c)** $\sqrt{17} \cdot \sqrt{17} = 17$ **d)** $\sqrt{0} : \sqrt{4} = \sqrt{0}$

KX **13** Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:
Für irrationale Zahlen ist „… Vorgänger von …“ bzw. „… Nachfolger von …“ nicht definiert, die Aussage ist daher sinnlos.

KX **14** **a)** $\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$ **b)** $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

KX **15** Nach dem ersten Kontrolldurchgang sind noch 20 % der ursprünglichen Fehlern unentdeckt. Nach dem zweiten Kontrolldurchgang sind 50 % der noch vorhandenen, also 50 % der 20 % der ursprünglichen Fehler, d. h. 10 % der ursprünglichen Fehler unentdeckt. Damit bleibt ein ursprünglich vorhandener Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % unentdeckt.

KX **16 a)**



b) Es sind individuelle Antworten möglich, z. B:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine grüne Kugel zu ziehen?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, maximal 3 Punkte zu bekommen?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 6 Punkte zu bekommen?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 5 Punkte zu bekommen?

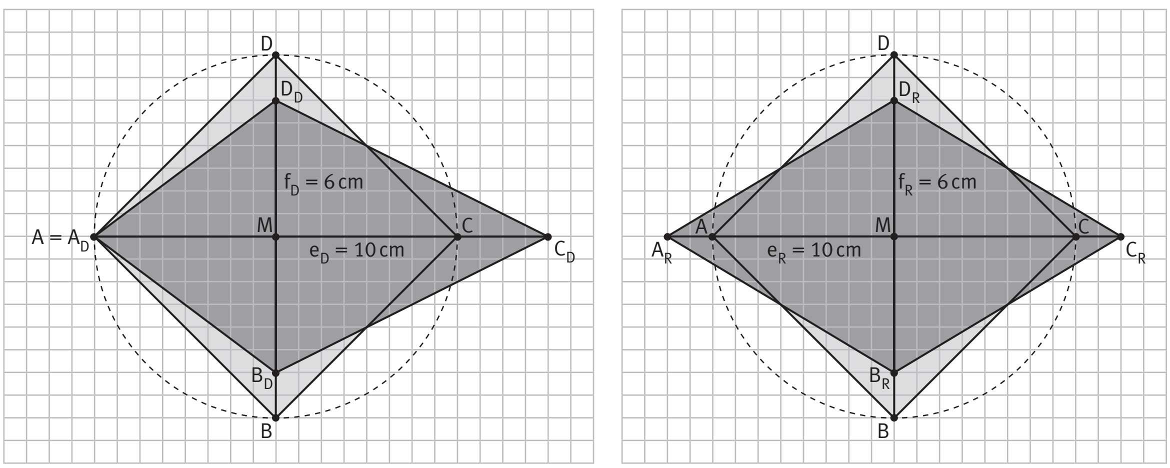
KX **17** Der Summenwert ist positiv bei den drei Kartenpaaren $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ bzw. $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{3}\right)$.

Der Summenwert ist negativ bei den zwei Kartenpaaren $\left(-1{,}5; \frac{2}{3}\right)$ bzw. $\left(-1{,}5; -\frac{1}{3}\right)$.

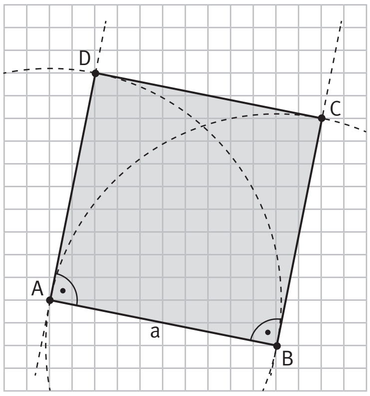
Der Summenwert ist null beim Kartenpaar $\left(-1{,}5; \frac{3}{2}\right)$.

P (positiv) $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ P (negativ) $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ P (null) $= \frac{1}{6}$

KX **18** Die ursprüngliche Figur ist ein Quadrat mit Diagonalen der Länge 8 cm, Seitenlänge $a = 4\sqrt{2}$ cm und einem Flächeninhalt von 32 cm². Die neue Figur ist ein Drachenviereck oder eine Raute mit Diagonalen der Länge 10 cm und 6 cm und einem Flächeninhalt von 30 cm². Bei der Änderung vom Quadrat zum Drachenviereck oder zur Raute verringert sich der Flächeninhalt von 32 cm² auf 30 cm², d. h. um 6,25 %.

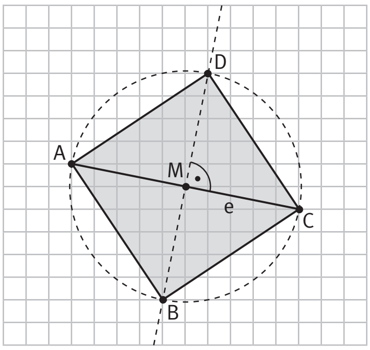


KX **19 a)**



Zeichne [AB].
Zeichne die Kreise um A und B mit r = $\overline{AB}$.
Errichte die Senkrechten zu [AB] in A und in B.
Die Kreise und die Senkrechten schneiden sich in D und C.

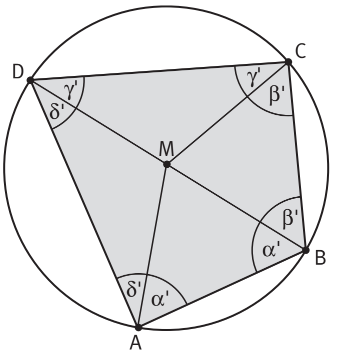
b)



Zeichne [AC].
Zeichne den Mittelpunkt M und die Mittelsenkrechte von [AC].
Zeichne den Thaleskreis um M mit r = $\overline{AM}$.
Der Kreis und die Mittelsenkrechte schneiden sich in B und D.

KX **20** Lösungswort: PFADREGEL

KX **21**



Voraussetzungen:
1. Kreismittelpunkt M und Viereck ABCD mit $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = \overline{DM}$ = r (Kreisradius).
2. Gleichschenklige Dreiecke ΔABM, ΔBCM, ΔCDM, ΔDAM mit Basiswinkel α' in ΔABM, β' in ΔBCM, γ' in ΔCDM, δ' in ΔDAM.
3. Innenwinkel im Viereck ABCD mit $\sphericalangle BAD = \alpha' + \delta'$, $\sphericalangle CBA = \beta' + \alpha'$, $\sphericalangle DCB = \gamma' + \beta'$, $\sphericalangle ADC = \delta' + \gamma'$.

Behauptung:
Im Sehnenviereck beträgt die Winkelsumme einander gegenüberliegender Winkel 180°, d. h.:
$\sphericalangle BAD + \sphericalangle DCB = 180°$ und $\sphericalangle CBA + \sphericalangle ADC = 180°$.

Beweis:
Im Viereck ABCD beträgt die Winkelsumme 360°, d. h.:
$2\alpha' + 2\beta' + 2\gamma' + 2\delta' = 360°$
$\Leftrightarrow \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 180°$
$\Leftrightarrow (\alpha' + \delta') + (\beta' + \gamma') = 180°$ und $(\beta' + \alpha') + (\delta' + \gamma') = 180°$
$\Rightarrow \sphericalangle BAD + \sphericalangle DCB = 180°$ und $\sphericalangle CBA + \sphericalangle ADC = 180°$