2 Quadratische Funktionen und Gleichungen

Einstieg

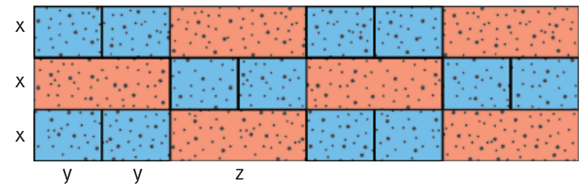
- Beschreibe den Verlauf der Rutschbahnen auf dem Gelände der Technischen Universität München, wenn man am Auslauf vor ihr steht.
- Skizziere im Koordinatensystem einen Graphen, der die Form einer dieser Rutschbahnen hat, wenn man am Auslauf vor ihr steht. Vereinfache dazu die Darstellung der Rutschbahn zu einer einfachen Linie und beginne im Koordinatenursprung.
- Kann es sich bei dieser Linie um eine Funktion handeln? Begründe.
- Spiegle den Graphen an der y-Achse.
- Beschreibe einem Mitschüler deine Skizze. Achte bei der Beschreibung auf die Form des Graphen und besondere Punkte wie z. B. die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
- Nenne weitere Beispiele aus deiner Umwelt, die ähnliche Darstellungen ergeben.

Ausblick

Am Ende dieses Kapitels hast du gelernt, …

- quadratische Funktionen zu erkennen.
- quadratische Funktionen grafisch darzustellen.
- Eigenschaften quadratischer Funktionen anzugeben und zu beschreiben.
- quadratische Gleichungen grafisch und rechnerisch zu lösen.
- Problemstellungen aus dem Alltag mithilfe quadratischer Gleichungen zu bearbeiten.

Familie Huber möchte einen Stellplatz für Fahrräder nach folgendem Muster pflastern.



- Übertrage das Muster ins Heft. Färbe alle Flächen $x \cdot y$ blau und alle Flächen $x \cdot z$ rot.
- Stelle unterschiedliche Terme zur Berechnung des Flächeninhalts der Fahrradstellfläche auf. Überprüfe, ob die Terme äquivalent sind.
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen deinen Termen und der Anzahl der farbigen Flächen?

Merkwissen

Terme lassen sich oft **vereinfachen**. Es gelten die bekannten **Rechenregeln**.

- Eine **Summe gleicher Summanden** lässt sich als **Produkt** schreiben. **Gleichartige Variablen** lassen sich **ordnen** (**Kommutativgesetz**) und **zusammenfassen** (**Distributivgesetz**).
  $a + b + a + a + b = a + a + a + b + b = 3 \cdot a + 2 \cdot b$
  $6 \cdot a - 4 \cdot a = (6 - 4) \cdot a = 2 \cdot a$
  $15x + (8 - x) = 15x + 8 - x = 15x - x + 8$
  $8y - (-5 - 2y) - 3 = 8y + 5 + 2y - 3 = 8y + 2y + 5 - 3 = 10y + 2$
- Ein **Produkt** aus Termen mit **Zahlen und Variablen** wird vereinfacht, indem man **Zahlen mit Zahlen** und **Variablen mit Variablen** multipliziert. **Dividiert** man einen **Term durch eine Zahl**, dividiert man die **Zahlen**.
  $7x \cdot 2y = (7 \cdot 2) \cdot (x \cdot y) = 14xy$ $\quad 3x^2 \cdot 4x^3 = (3 \cdot 4) \cdot (x^2 \cdot x^3) = 12x^5$

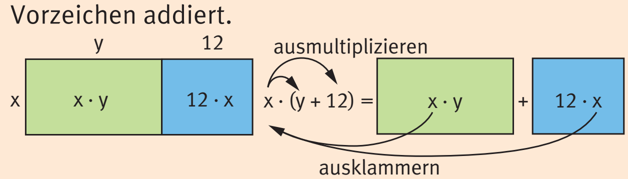
Die Potenzgesetze müssen beim Zusammenfassen berücksichtigt werden.

Mithilfe des **Distributivgesetzes** kann man Zahlen und einzelne Variablen aus**multiplizieren bzw. ausklammern**:

Vorzeichenregeln:
(–) · (–) ergibt +
(+) · (+) ergibt +
(–) · (+) ergibt –
(+) · (–) ergibt –

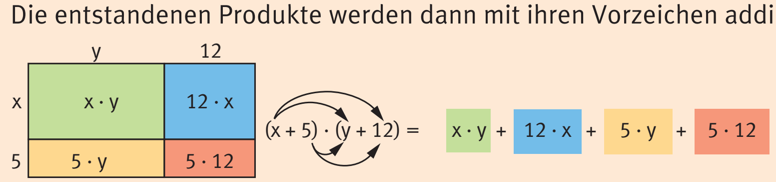
(–) : (–) ergibt +
(+) : (+) ergibt +
(–) : (+) ergibt –
(+) : (–) ergibt –

- Wird eine Summe mit einem Faktor multipliziert, dann wird **jeder Summand mit dem Faktor multipliziert**. Die entstandenen Produkte werden mit ihren Vorzeichen addiert.



- Kommt in einer Summe von Produkten in jedem Summanden derselbe Faktor vor, so kann dieser **gemeinsame Faktor ausgeklammert** werden.
  Beim **Ausklammern (Faktorisieren)** wird jeder Summand durch den gemeinsamen Faktor geteilt.
- Werden Summen miteinander multipliziert, dann muss man **jeden Summanden der ersten Summe** mit **jedem Summanden der zweiten Summe** multiplizieren.
  Die entstandenen Produkte werden dann mit ihren Vorzeichen addiert.

Es wird „jeder mit jedem“ multipliziert.



Beispiele

I Vereinfache die Terme so weit wie möglich.

a) $3x \cdot 6x \cdot x^3$ **b)** $-y \cdot 5z^2 \cdot 7y^3 \cdot \frac{2}{5}z$

Lösung:

a) $3x \cdot 6x \cdot x^3$
$= 3x \cdot 6x \cdot 1x^3$
$= 3 \cdot 6 \cdot 1 \cdot x \cdot x \cdot x^3$
$= 18x^5$

b) $-y \cdot 5z^2 \cdot 7y^3 \cdot \frac{2}{5}z$
$= (-1)y \cdot 5z^2 \cdot 7y^3 \cdot \frac{2}{5}z$
$= (-1) \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{2}{5} \cdot y \cdot y^3 \cdot z^2 \cdot z$
$= -14y^4z^3$

$x = 1 \cdot x$
$-x = (-1) \cdot x$

II Multipliziere die Klammern aus und vereinfache.

a) $(3x + y) \cdot 5$ **b)** $\frac{2}{3} \cdot (19{,}2x + 1)$ **c)** $(7{,}2r - 8{,}8\,s) : \frac{4}{5}$

Lösung:

a) $(3x + y) \cdot 5$
$= 3x \cdot 5 + y \cdot 5$
$= 15x + 5y$

b) $\frac{2}{3} \cdot (19{,}2x + 1)$
$= \frac{2}{3} \cdot 19{,}2\,x + \frac{2}{3} \cdot 1$
$= 12\,\frac{4}{5}x + \frac{2}{3}$

c) $(7{,}2r - 8{,}8s) : \frac{4}{5}$
$= 7{,}2\,r : \frac{4}{5} - 8{,}8s : \frac{4}{5}$
$= 9r - 11s$

Die Division durch eine Zahl bzw. Variable lässt sich in eine Multiplikation mit dem Kehrwert umformen.

III Wie lautet der gemeinsame Faktor? Klammere ihn aus und vereinfache.

a) $5ab + 7a - 3ac$ **b)** $12xy + 4xz + 8vx$

Lösung:

a) $5ab + 7a - 3ac$
$= a \cdot (5b + 7 - 3c)$

a ist der gemeinsame Faktor aller Summanden.

b) $12xy + 4xz + 8vx$
$= 3 \cdot 4xy + 4xz + 2 \cdot 4vx$
$= 4x \cdot (3y + z + 2v)$

Der gemeinsame Faktor ist 4x.

IV Das Produkt von Summen lässt sich übersichtlich mithilfe einer Verknüpfungstabelle darstellen.

$(3x + 7) \cdot (4x - 5)$
$= 12x^2 + \underbrace{28x - 15x}_{} - 35$
$= 12x^2 \quad + 13x \quad - 35$

$\cdot$	$4x$	-5
$3x$	$12x^2$	$-15x$
7	$28x$	-35

Beachte:
$x \cdot x = x^2$, aber
$x + x = 2x$

a) Erkläre das Vorgehen.

b) Berechne ebenso: $(2a - 3b) \cdot (12 - 6a)$

Lösung:

a) Jeder Summand der ersten Klammer muss mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert werden. Dies erreicht man durch die Darstellung der Summanden in den Spalten bzw. Zeilen einer Verknüpfungstabelle.

b) $(2a - 3b) \cdot (12 - 6a)$
$= 24a - 12a^2 - 36b + 18ab$
$= -12a^2 + 24a + 18ab - 36ab$

$\cdot$	12	$-6a$
$2a$	$24a$	$-12a^2$
$-3b$	$-36b$	$+18ab$

Verständnis

- Lässt sich jeder Term als Produkt schreiben? Begründe.
- $6ab + a = a \cdot (6b + 1)$ oder $6ab + a = a \cdot (6b + 0)$. Was ist richtig? Begründe.

AUFGABEN

1 Multipliziere aus und vereinfache so weit wie möglich.

Variablen stets alphabetisch ordnen.

a) $7 \cdot (4x + 2)$ **b)** $(-3b + a) \cdot 5$ **c)** $1{,}7 \cdot (2c + a)$
d) $2x \cdot (x + 2{,}5)$ **e)** $y \cdot (15 - x)$ **f)** $3z\,(3z + 4)$
g) $\frac{1}{3}k \cdot (6k + 1)$ **h)** $\left(-\frac{3}{4}l\right) \cdot (4l - 12)$ **i)** $\frac{4}{5}s \cdot \left(0{,}75t - \frac{3}{2}u\right)$
j) $(-1{,}5a + 4{,}9b) \cdot (-c)$ **k)** $(-3k + 0{,}2l) \cdot (-3m)$ **l)** $(-2{,}4s^2 + 3{,}6ts) \cdot (4s)$

2 **a)** Begründe anhand der Beispiele, dass die Division einer Summe oder Differenz durch einen Divisor in eine Multiplikation umgewandelt werden kann.

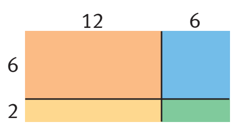
Beispiele: 1 $(3x - 6y) : 3 = (3x - 6y) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 3x - \frac{1}{3} \cdot 6y = x - 2y$

2 $(8x - 4y) : \frac{1}{4} = (8x - 4y) \cdot 4 = 4 \cdot 8x - 4 \cdot 4y = 32x - 16y$

3 $(5xy - 10y) : (-5y) = (5xy - 10y) \cdot \left(-\frac{1}{5y}\right) = 5xy \cdot \left(-\frac{1}{5y}\right) - 10y \cdot \left(-\frac{1}{5y}\right) = -x + 2$

b) Wandle zunächst in eine Multiplikation um und vereinfache dann.

1 $(x + y + z) : 2$ 2 $(5a - 2b + c) : \frac{1}{10}$ 3 $(4r^2 - 8r^3 + 2r^4) : \frac{8}{7}$
4 $(-1{,}2e + 8{,}4f^2) : \left(-\frac{1}{5}\right)$ 5 $(-3z^4 - z^5) : (-7)$ 6 $-(2a + 4b) : (-2)$



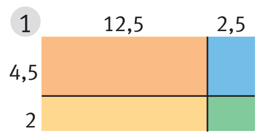
Alle Maßangaben in cm

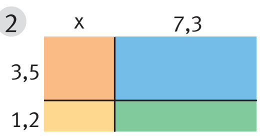
3 **a)** Der Flächeninhalt der Figur in der Randspalte wurde auf zwei Arten berechnet. Erkläre das Vorgehen.

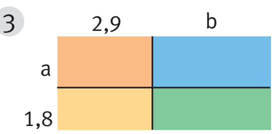
1 $A = 6\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} + 6\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} + 2\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} + 2\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = 144\text{ cm}^2$

2 $A = (6\text{ cm} + 2\text{ cm}) \cdot (12\text{ cm} + 6\text{ cm}) = 8\text{ cm} \cdot 18\text{ cm} = 144\text{ cm}^2$

b) Beschreibe analog zu a) den Flächeninhalt auf zwei verschiedene Arten.

1


2


3


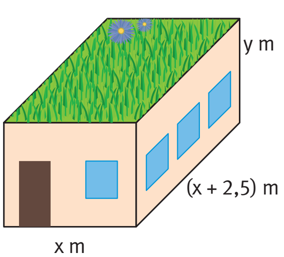
4 Multipliziere aus und vereinfache so weit wie möglich.

Du kannst eine Verknüpfungstabelle wie in Beispiel II verwenden.

a) $(x + 3) \cdot (x + 5)$ **b)** $(z + 2) \cdot (z - 10)$ **c)** $(v - 3) \cdot (3 + v)$
d) $(y - 5) \cdot (y - 3)$ **e)** $(-c + 3) \cdot (3 + c)$ **f)** $(4 + 3r) \cdot (-r + 3)$
g) $(a + 3) \cdot (2b + 5)$ **h)** $\left(\frac{1}{2}u - \frac{1}{5}v\right) \cdot \left(\frac{3}{2}v + \frac{5}{7}u\right)$ **i)** $(0{,}2a^2 + 1{,}2a) \cdot (0{,}5a - 3)$

5 Finde einen gemeinsamen Faktor. Klammere ihn aus und vereinfache.

a) $\frac{1}{2}ax + 3x - 7xy$ **b)** $a^2bc - ab^2 + 3{,}2abc$ **c)** $6mn + 4km + 8m$
d) $2{,}5s^2f - 1{,}5s^2t + 12s^2$ **e)** $-35rs + 21r - 49rs^2$ **f)** $1{,}2gh + 0{,}3g - 1{,}5gk$
g) $\frac{2}{3}d^2 - 1\frac{1}{3}cd + d$ **h)** $0{,}8k^2l^2 - 1{,}6kl^2 + mkl^2$ **i)** $1{,}9x^3y - 4{,}6x^2y^2 + x^2y^3$



6 Die Kalkulation der Kosten für den Neubau eines Hauses kann über die Kubatur (= Volumen) des Hauses erfolgen. Architekt Baugern hat verschiedene Häuser mit Flachdach im Angebot, die so geplant sind, dass die Länge des Hauses um 2,5 m größer ist als die Breite. Die Höhe richtet sich nach den Wünschen der Bauherren.

a) Erstelle einen Term zur Berechnung der Baukosten, wenn 1 m^3 umbauter Raum mit 250 € veranschlagt wird.

b) Berechne die Kosten, wenn das Haus 11 m breit und 6,5 m hoch ist.

c) Wie hoch ist ein 13 m breites Haus, wenn die kalkulierten Baukosten 483 600 € betragen?

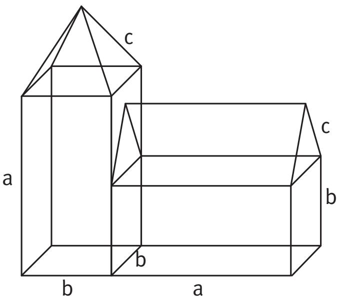
Ergebnis zu a): *$(250x^2y + 625xy)$ €*

7 Markus baut ein Drahtmodell einer Kirche. Dabei soll keine Kante doppelt besetzt sein.

a) Stelle einen Term auf, mit dem man die Länge eines Drahtes für das Modell bestimmen kann. Vereinfache den Term so weit wie möglich.

b) Für den Term aus a) gilt:
$a = 2b + 4$ cm und $c = b + 2$ cm. Ersetze die Variablen und vereinfache erneut.

c) Wie lang muss der Draht für $b = 8$ cm mindestens sein? Warum mindestens?



8 Bei der Multiplikation von Summen und Differenzen gibt es drei Sonderfälle. Diese werden binomische Formeln genannt.

1. Binomische Formel: $\underbrace{(a + b) \cdot (a + b)}_{(a+b)^2} = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Binomische Formel: $\underbrace{(a - b) \cdot (a - b)}_{(a-b)^2} = a^2 - ab - ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2$

3. Binomische Formel: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Die binomischen Formeln sind ein **zeitsparendes Hilfsmittel zum Ausmultiplizieren** von Summen und Differenzen. Umgekehrt dienen sie auch zur Umwandlung einer Summe in ein Produkt (**Faktorisieren**).

a) Übertrage die drei Umformungen in dein Heft und überprüfe.

b) Beschreibe, worin sich die 1. und 2. binomische Formel unterscheiden.

c) Erkläre, warum der mittlere Teil bei der 3. binomischen Formel entfällt.

9 Berechne möglichst im Kopf. Wende die binomischen Formeln an.

a) $(x + y)^2$ **b)** $(v - w)^2$ **c)** $(3 + z)^2$ **d)** $(7 - m)^2$

e) $(2u + v)^2$ **f)** $(a - 5b)^2$ **g)** $(4x - 5y)^2$ **h)** $(p - 3)^2$

i) $(a + 0{,}5)^2$ **j)** $(0{,}7 - b)^2$ **k)** $\left(s + \frac{1}{2}\right)^2$ **l)** $\left(\frac{8}{9} - t\right)^2$

m) $\left(x + 2\frac{3}{4}\right)^2$ **n)** $(x^2 + 5)^2$ **o)** $(a^4 - 15)^2$ **p)** $(3a^2 + 2b^3)^2$

10 Nutze die 3. binomische Formel zum Ausmultiplizieren. Rechne im Kopf.

a) $(x + 2) \cdot (x - 2)$ **b)** $(x - 3) \cdot (3 + x)$ **c)** $(y - 4) \cdot (y + 4)$

d) $(6 - x) \cdot (6 + x)$ **e)** $\left(y + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(y - \frac{2}{5}\right)$ **f)** $\left(\frac{4}{9} - x\right) \cdot \left(\frac{4}{9} + x\right)$

g) $(x + y) \cdot (x - y)$ **h)** $(x + 3) \cdot (x - 3)$ **i)** $(y - 2) \cdot (y + 2)$

j) $(3 + b) \cdot (3 - b)$ **k)** $(a - 0{,}5) \cdot (0{,}5 + a)$ **l)** $\left(x^2 + \frac{7}{2}\right) \cdot \left(x^2 - \frac{7}{2}\right)$

11 Fasse geschickt mithilfe binomischer Formeln zusammen.

a) $x^2 + 22x + 121$ **b)** $a^2 - 26a + 169$ **c)** $25 - y^2$

d) $1 + 2x + x^2$ **e)** $\frac{1}{4}t^2 - st + s^2$ **f)** $4a^2 - 36a + 81$

g) $9x^2 + 30xy + 25y^2$ **h)** $\frac{1}{4}s^2 - s + 1$ **i)** $36k^2 - 144m^2$

j) $0{,}64a^2 + 6{,}4a + 16$ **k)** $\frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{15}x + \frac{1}{25}$ **l)** $0{,}49r^2 - \frac{121}{169}$

- Betrachte die Abbildungen und beschreibe das Aussehen der Bögen.
- Begründe, dass man die Verläufe der Bögen mathematisch nicht durch lineare Funktionen beschreiben kann.
- Gib weitere Beispiele dieser Art aus deiner Umwelt an.

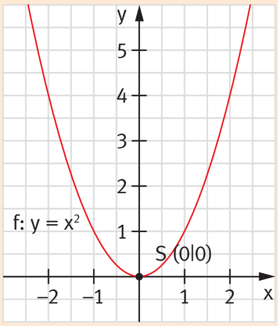
*Der **Definitionsbereich** $\mathbb{D}$ ist die Menge aller x-Werte, die man in die Funktionsgleichung einsetzen darf.*

*Der **Wertebereich** $\mathbb{W}$ ist die Menge aller y-Werte, die als Funktionswerte auftreten können.*

Merkwissen

Viele Sachverhalte in Natur und Technik können **nicht** durch lineare Funktionen beschrieben werden.
Eine Möglichkeit Vorgänge zu beschreiben, deren Graphen eine gekrümmte, achsensymmetrische Form aufweisen, sind **quadratische Funktionen**.
Ihre Graphen nennt man **Parabel**.

Die **einfachste quadratische Funktion** hat die Funktionsgleichung $\mathbf{y = x^2}$ bzw. $\mathbf{f(x) = x^2}$.
Eigenschaften:
- $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, somit ist $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$
- $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 0$ (**minimaler** Funktionswert)



Der Graph zur Funktion f: $y = x^2$ ist eine **Normalparabel** mit folgenden Eigenschaften:
- Der Graph verläuft „oberhalb“ der x-Achse.
- Der Graph ist **symmetrisch** zur y-Achse.
- Der Punkt **S (0|0)** heißt **Scheitelpunkt**. Der Scheitelpunkt ist der Schnittpunkt des Graphen mit der Symmetrieachse und der tiefste Punkt des Graphen (**Extremwert**).
- Die Nullstelle liegt bei $x = 0$.

*Die **Nullstelle** ist der Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse.*

Beispiel

I Gegeben ist die Funktion f mit $y = x^2$.

a) Erstelle eine Wertetabelle für $x \in [-2; 2]$ und $\Delta x = 0{,}5$.
b) Zeichne die Normalparabel und beschreibe ihren Verlauf.
c) Gib den Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und den Wertebereiche $\mathbb{W}$ an.
d) Wie lautet die Nullstelle dieser Funktion?

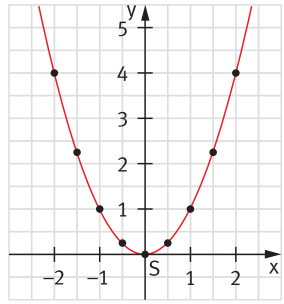
Lösung:

a)

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4

Die Normalparabel ist **symmetrisch** zur y-Achse, da das Quadrat einer Zahl und ihrer Gegenzahl jeweils gleich groß ist. Der **Scheitelpunkt** der **Normalparabel** ist **S (0 | 0)**, da die y-Werte niemals negativ werden können. Es dürfen alle Zahlen eingesetzt werden: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, jedoch erhält man durch das Quadrieren keine negativen Zahlen als Funktionswerte: $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$.

b)



c) Die Funktion hat im Scheitelpunkt die **Nullstelle** $x = 0$.

Verständnis

- Erkläre den Unterschied zwischen $y = 2x$ und $y = x^2$.
- Begründe, dass der Scheitelpunkt der Normalparabel auch „Tiefpunkt“ genannt wird.
- Lukas behauptet: „Der Scheitelpunkt der Funktion $y = x^2$ ist identisch mit der Nullstelle dieser Funktion.“ Hat Lukas Recht? Begründe.

Aufgaben

*Die x-Werte nennt man auch **Argumente**, die y-Werte **Funktionswerte**.*

1 Sandra möchte mithilfe einer Wertetabelle eine Normalparabel mit $y = x^2$ zeichnen.

a) Erkläre, dass in der Wertetabelle keine negativen Argumente notwendig sind.

b) Zeichne die Normalparabel mindestens im Intervall $-3 \leqq x \leqq 3$.

c) Zeige, dass der Graph der Funktion $y = x^2$ achsensymmetrisch ist. Kennzeichne hierfür gleiche Funktionswerte und die Symmetrieachse.

2 Die Punkte A bis F liegen auf der Normalparabel.

a) Berechne die fehlenden Funktionswerte.
A (–2,8 | □) B (–1,4 | □) C (–0,3 | □) D (0,85 | □) E (1,2 | □) F (2,3 | □)

b) Berechne die fehlenden Argumente.
A (□ | 100) B (□ | 0,01) C (□ | 64)
D $\left(\square \mid \frac{4}{9}\right)$ E (□ | 1,69) F (□ | 0,25)

3 Prüfe rechnerisch, ob folgende Punkte auf der Normalparabel liegen.

a) A (–12,5 | 156,25) **b)** B (–3,8 | –14,44)
c) C (–0,2 | 0,4) **d)** D (0,8 | 0,64)
e) E (5,1 | 26,01) **f)** F (16,4 | 268,96)

4 Zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = -x^2$ mithilfe einer Wertetabelle für $x \in [-3; 3]$ mit $\Delta x = 1$ in ein geeignetes Koordinatensystem.

a) Begründe, dass es sich um eine Funktion handelt.

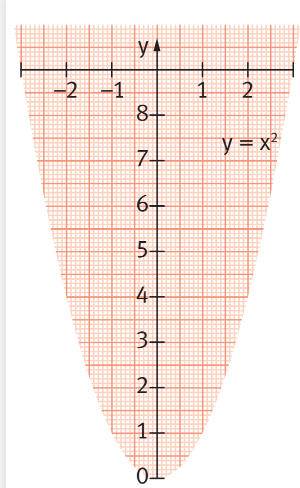
b) Beschreibe die Eigenschaften des Graphen.

Basteln

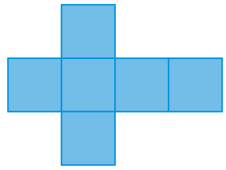
Zeichenschablone

Beim Lösen von Aufgaben rund um die Normalparabel muss immer wieder derselbe Verlauf des Graphen von $y = x^2$ gezeichnet werden. Dazu kann man eine Schablone verwenden, die man kaufen oder sich auch wie folgt leicht selbst herstellen kann.

- Zeichne die Normalparabel auf Millimeterpapier. Berechne dazu im Intervall $-3 \leqq x \leqq 3$ möglichst viele Werte. Klebe deine Zeichnung auf Pappe und schneide die Normalparabel aus.



2.3 Reinquadratische Gleichungen lösen

1 

Das Netz eines Würfels hat den Flächeninhalt 486 cm^2.

2 

Ein Quadrat hat den Flächeninhalt 36 m^2.

3 

Die kreisförmige Rosette einer Kirche überdeckt eine Fläche von 1018 dm^2.

- Stelle jeden Sachverhalt als Gleichung dar und löse sie.
- Beurteile die Lösungen in Hinblick auf den Sachverhalt.

Bei einer reinquadratischen Gleichung kommen außer dem Quadrat der Variablen nur Zahlen vor.

*Als **Radikand** bezeichnet man den **Wert** unter der Wurzel.*

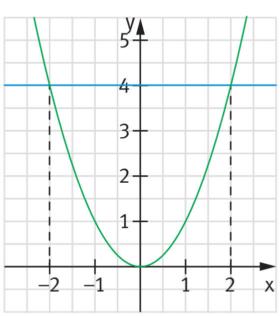
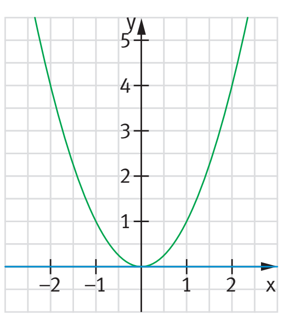
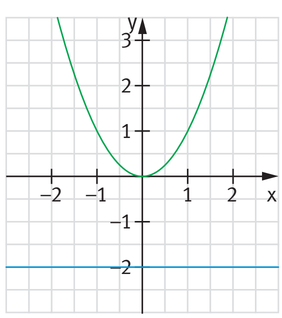
Beim grafischen Lösen von quadratischen Gleichungen sind die abgelesenen Werte oft nur Näherungswerte.

Zur Probe kannst du das jeweils andere Verfahren verwenden.

Merkwissen

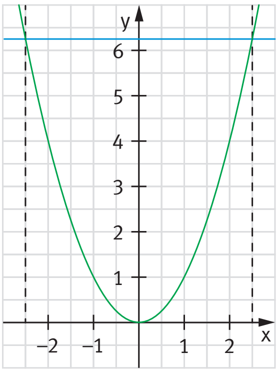
Bei einer **quadratischen Gleichung** kommt die Variable in der 2. Potenz vor.

Eine Gleichung der Form $\mathbf{ax^2 + c = 0}$ mit $a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ nennt man **reinquadratische Gleichung**. Sie lässt sich durch Umformen auf die Form $\mathbf{x^2 = d}$ bringen mit $d = -\frac{c}{a}$. Reinquadratische Gleichungen können rechnerisch oder grafisch gelöst werden. Man unterscheidet folgende Fälle:

$d > 0$	$d = 0$	$d < 0$
Beispiel: $x^2 = 4$ 1 rechnerisch: $x_{1/2} = \pm\sqrt{4}$ $x_1 = -2$; $x_2 = 2$ Der **Radikand** ist **positiv**, die Gleichung hat **zwei Lösungen**. $\mathbb{L} = \{-2; 2\}$	Beispiel: $x^2 = 0$ 1 rechnerisch: $x_{1/2} = \pm\sqrt{0} = \pm 0$ $x = 0$ Der **Radikand** ist **null**, die Gleichung hat **eine Lösung**. $\mathbb{L} = \{0\}$	Beispiel: $x^2 = -2$ 1 rechnerisch: $x^2 = -2$ Der **Radikand** ist **negativ**, die Gleichung hat **keine Lösung**. $\mathbb{L} = \varnothing$
2 grafisch:  Mit der Gerade $y = 4$ hat die Normalparabel $y = x^2$ **zwei Schnittpunkte**: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$ $\mathbb{L} = \{-2; 2\}$	2 grafisch:  Mit der Gerade $y = 0$ hat die Normalparabel $y = x^2$ **einen Schnittpunkt**: $x = 0$ $\mathbb{L} = \{0\}$	2 grafisch:  Mit der Gerade $y = -2$ hat die Normalparabel $y = x^2$ **keinen Schnittpunkt**. $\mathbb{L} = \varnothing$

Aufgaben

I Löse die Gleichung $0{,}5x^2 - 9{,}3 = -6{,}175$ grafisch. Beschreibe dein Vorgehen.



Lösung:

1 Bringe die Gleichung auf die Form $x^2 = d$.

$$\begin{aligned} 0{,}5x^2 - 9{,}3 &= -6{,}175 && \mid +9{,}3 \\ 0{,}5x^2 &= 3{,}125 && \mid \cdot 2 \\ x^2 &= 6{,}25 \end{aligned}$$

2 Zeichne die Normalparabel $y = x^2$ und den Graphen der Funktion $y = 6{,}25$ in dasselbe Koordinatensystem. $y = 6{,}25$ ist dabei eine Parallele zur x-Achse.

3 Bestimme die Schnittpunkte der Gerade $y = 6{,}25$ mit der Normalparabel: $x_1 = -2{,}5$ und $x_2 = 2{,}5$

Probe: $0{,}5 \cdot (-2{,}5)^2 - 9{,}3 = 3{,}125 - 9{,}3 = -6{,}175$ wahr
$0{,}5 \cdot 2{,}5^2 - 9{,}3 = 3{,}125 - 9{,}3 = -6{,}175$ wahr $\Longrightarrow \mathbb{L} = \{-2{,}5;\ 2{,}5\}$

II Bestimme rechnerisch die Lösung der quadratischen Gleichung.

a) $6x^2 - 1424 = -1700$ b) $3x^2 + 420 = 1095$

Lösung:

a)
$$\begin{aligned} 6x^2 - 1424 &= -1700 && \mid +1424 \\ 6x^2 &= -276 && \mid :6 \\ x^2 &= -46 \end{aligned}$$

Der Radikand ist negativ. Die quadratische Gleichung hat keine Lösung: $\mathbb{L} = \varnothing$

b)
$$\begin{aligned} 3x^2 + 420 &= 1095 && \mid -420 \\ 3x^2 &= 675 && \mid :3 \\ x^2 &= 225 \\ x_{1/2} &= \pm\sqrt{225} && = \pm 15 \end{aligned}$$

Der Radikand ist positiv. Die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen: $\mathbb{L} = \{-15;\ 15\}$

Verständnis

- Nenne Vor- und Nachteile der grafischen Lösung von quadratischen Gleichungen.
- Mirko behauptet: „Eine quadratische Gleichung hat immer zwei Lösungen.“ Stimmt das? Begründe.

Aufgaben

1 Löse die Gleichungen im Kopf.

a) $x^2 = 144$ b) $x^2 - 49 = 0$ c) $x^2 = 0{,}81$
d) $x^2 - 625 = 0$ e) $x^2 = 0{,}01$ f) $x^2 + 7 = 23$
g) $x^2 - \frac{4}{9} = 0$ h) $x^2 - 2 = 0$ i) $0{,}04 - x^2 = 0$

Lösungen zu 1:
$\pm 0{,}1;\ \pm 0{,}2;\ \pm\frac{2}{3};\ \pm 0{,}9;\ \pm\sqrt{2};\ \pm 4;\ \pm 7;\ \pm 12;\ \pm 25$

2 Überprüfe die folgende rechnerischen Lösungen der Gleichungen ($\mathbb{D} = \mathbb{R}$). Berichtige fehlerhafte oder unvollständige Angaben.

a)
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}x^2 &= 4 && \mid \cdot 4 \\ x^2 &= 16 \\ x &= 4 \\ \Longrightarrow \mathbb{L} &= \{4\} \end{aligned}$$

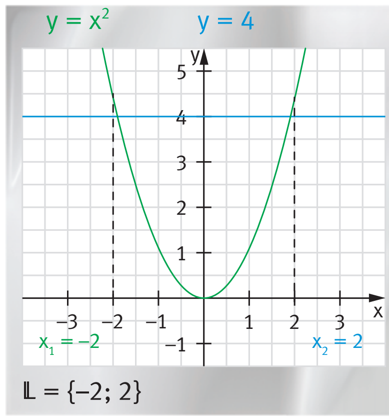
b)
$$\begin{aligned} 3 - x^2 &= 6 && \mid +3 \\ x^2 &= 9 \\ x_1 &= -3;\ x_2 = 3 \\ \Longrightarrow \mathbb{L} &= \{-3;\ 3\} \end{aligned}$$

Lösungen zu 3:
keine Lösung (2 x); 0; 0; ±1; ±2; ±4; $\pm\sqrt{\frac{7}{22}}$; $\pm\sqrt{\frac{8}{3}}$; $\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{27}$

3 Bestimme die Lösungsmenge rechnerisch.

a) $x^2 + 2 = 18$ **b)** $y^2 - 5 = 22$ **c)** $9 - x^2 = 5$
d) $7 - 4t^2 = 18t^2$ **e)** $12x^2 - 7 = -7$ **f)** $2{,}25a^2 + 15 = 12$
g) $2t + 8 = t \cdot (2 + 3t)$ **h)** $x \cdot (2x - 6) = 4 - 6x$ **i)** $z \cdot (z^2 + 8) = 0$
j) $7x \cdot (3x + 5) - 11 = 5x \cdot (2x + 7)$ **k)** $(x + 3)^2 - 7x + 8 = (x - 5) \cdot (x + 5) - x$

4 Peter hat die Gleichung $0{,}5x^2 = 2$ grafisch gelöst.



a) Beschreibe sein Vorgehen.
b) Löse ebenso grafisch.

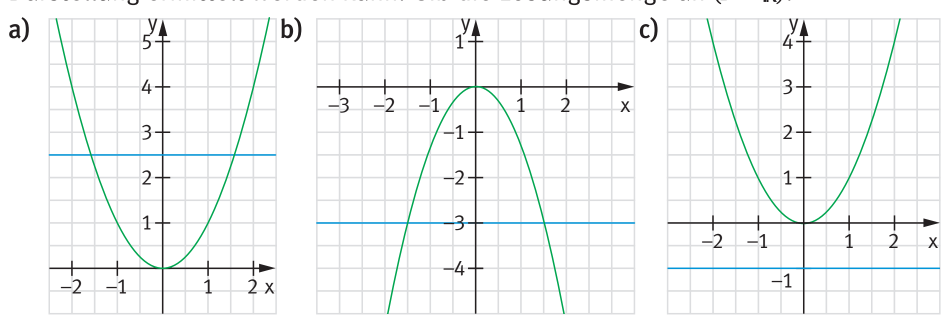
1 $x^2 + 2 = 5$

2 $\frac{1}{3}x^2 + 3 = \frac{8}{3}$

3 $x^2 - \frac{24}{6} = -4$

4 $-2x^2 = -4{,}5$

5 Finde jeweils eine quadratische Gleichung, deren Lösung mithilfe der grafischen Darstellung ermittelt werden kann. Gib die Lösungsmenge an ($\mathbb{D} = \mathbb{R}$).



Satz vom Nullprodukt:
Ein Produkt ist null, wenn einer der beiden Faktoren null ist.

6 Begründe, dass die Gleichung …

a) $x^2 + 6 = 4$ keine Lösung hat. **b)** $25x^2 = 4$ zwei Lösungen hat.
c) $16x^2 = 0$ eine Lösung hat. **d)** $(x - 2)^2 = 0$ eine Lösung hat.

7 Überprüfe rechnerisch, ob die Gleichungen zwei, eine oder keine Lösung haben. Kontrolliere deine Lösungen durch eine Skizze.

a) $-5x^2 = 0$ **b)** $\frac{1}{2}x^2 - 4 = 0$ **c)** $2x^2 - \frac{1}{2} = 0$
d) $\frac{1}{4}x^2 - 12 = 4$ **e)** $5x^2 - 9 = -24$ **f)** $7x^2 - 37 = -8x^2 - 38$

8 Gib zur angegebenen Lösungsmenge eine reinquadratische Gleichung an. Kontrolliere dein Ergebnis mit einem dynamischen Geometrieprogramm.

a) $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$ **b)** $\mathbb{L} = \{-\sqrt{0{,}5}; \sqrt{0{,}5}\}$ **c)** $\mathbb{L} = \{-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\}$
d) $\mathbb{L} = \{0\}$ **e)** $\mathbb{L} = \varnothing$ **f)** $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$

9 Löse die Gleichungen mit einem Verfahren deiner Wahl. Runde evtl. geeignet.

a) $24x^2 + 48 = 78x^2 - 6$ **b)** $3x^2 - 8 = 27 - 12x^2$
c) $(2x - 6) \cdot (4x + 2) = 8x - 12$ **d)** $(6x - 2) \cdot (6x + 2) = 1292$
e) $2x^2 - 10 = 7x^2 - 5{,}2$ **f)** $(x + \sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2}) = 0$

Lösungen zu 9:
$\mathbb{L} = \emptyset$; $\mathbb{L} = \{0; 3{,}5\}$;
$\mathbb{L} = \{-1; 1\}$; $\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$;
$\mathbb{L} = \left\{-\frac{\sqrt{21}}{3}; \frac{\sqrt{21}}{3}\right\}$;
$\mathbb{L} = \{-6; 6\}$

10 Gib eine Gleichung an und löse diese. Gib die Definitionsmenge an.

a) Addiert man 33 zum Quadrat einer natürlichen Zahl, so erhält man 154.
b) Multipliziert man eine ganze Zahl mit sich selbst und subtrahiert 88, so erhält man 696.
c) Multipliziert man das Dreifache einer natürlichen Zahl mit dem Fünffachen dieser Zahl, so erhält man 375.
d) Das Fünffache einer natürlichen Zahl multipliziert mit ihrer Hälfte ergibt 250.

11 a) Die Seite eines Quadrats ist 8,5 cm lang. Ermittle die Länge der Diagonale.
b) Die Diagonale eines Quadrats ist 98 cm lang. Berechne seine Seitenlänge.

12 a) Ein quadratisches Grundstück hat einen Flächeninhalt von 1,5625 ha. Berechne die Seitenlänge des Grundstücks.
b) Ein Fußballfeld ist doppelt so lang wie breit. Der Flächeninhalt des Fußballfeldes ist 6272 m^2 groß. Berechne die Maße des Fußballfelds.

13 Auf einer Palette befinden sich 288 quadratische Fliesen. Laut Lieferschein reicht eine Palette für eine Fläche von 25,92 m^2. Ermittle die Seitenlängen dieser Fliesen. Fugen sollen vernachlässigt werden.

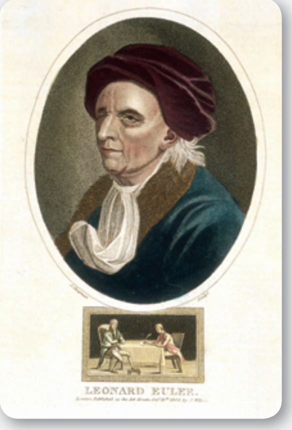
14 ① $x^2 = a$ ② $\frac{1}{2}x^2 - a = 0$ ③ $2x^2 = -a$
④ $\frac{1}{2}x^2 - 4a = 0$ ⑤ $7x^2 - 7a = 0$ ⑥ $ax^2 - a = 0$

a) Gib Zahlen für a so an, dass die Gleichung zwei, eine oder keine Lösung hat ($-5 \leqq a \leqq 5$).
b) Begründe deine Lösung rechnerisch oder grafisch.

Geschichte

Quadratische Gleichungen und Leonhard Euler

Leonhard Euler (1703–1783) ist einer der berühmtesten Mathematiker der Welt. In einem von Euler 1748 veröffentlichten Werk spielt zum ersten Mal der Begriff Funktion eine Rolle. Im Jahr 1770 wurde das Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra“ auf Deutsch veröffentlicht. Man findet in diesem Buch folgende Aufgaben:

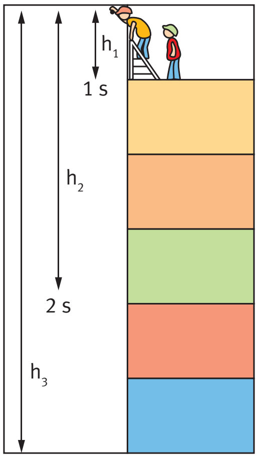


1 *Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte mit ihrem 3. Theil multipliciret 24 gebe.*

2 *Man suche zwei Zahlen, deren Product = 35 und deren Differenz ihrer Quadraten = 24 ist.*

- Löse diese historischen Aufgaben.
- Auf Euler geht auch die Schreibweise zurück, für eine Funktion das Symbol f (x) („sprich: „f von x“) statt y zu verwenden. Gib die Bedeutung des Symbols f (x) an.

Baumeister Bob zeigt seinem Lehrling, wie er die Tiefe des Aufzugschachts des im Rohbau befindlichen Bürogebäudes bestimmen kann. Dazu lässt er vom obersten Ende des Aufzugschachts eine Stahlkugel fallen und bestimmt deren Fallzeit in Sekunden. Die Funktion $f(x) = 5x^2$ ordnet der in Sekunden gemessenen Fallzeit ungefähr die Höhe in Meter zu.



- Erstelle für f eine Wertetabelle und zeichne den Graphen. Ermittle, aus welcher Höhe die Stahlkugel fallen gelassen wurde, wenn x = 1,5 (x = 2,0) ist.
- Ergänze den Graphen von f durch Spiegelung an der y-Achse und gib für den neuen Graphen die Definitions- und Wertemenge an.
- Zeichne in das Koordinatensystem die Graphen der Funktionen f_1: $y = x^2$ und f_2: $y = \frac{1}{5}x^2$ ein und vergleiche den Verlauf der drei Graphen miteinander. Was stellst du fest?

Berücksichtige bei deinen Überlegungen auch die Funktionsgleichungen.

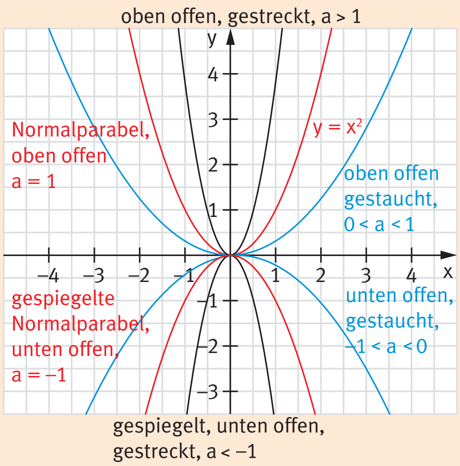
Merkwissen

Funktionen mit der Gleichung $y = \mathbf{a}x^2$ mit der **Formvariablen (Koeffizienten)** $\mathbf{a} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beschreiben Parabeln, deren Scheitel S im Ursprung liegt.

Für die Form der Parabeln gilt:

Die Parabel ist für
- $a > 0$ nach oben geöffnet.
- $a < 0$ nach unten geöffnet.

Die Parabel ist für
- $a > 1$ oder $a < -1$ gestreckt.
- $-1 < a < +1$ gestaucht.



Parabeln der Form $y=ax^2$ gehen immer durch den Punkt P (1 | a).

Ist a = 1, so liegt eine Normalparabel vor. Ist a = −1, so liegt eine gespiegelte Normalparabel vor.

Eine gestreckte (gestauchte) Parabel ist „enger/schmäler“ („weiter/breiter“) als die Normalparabel.

Beispiele

I Gegeben ist die quadratische Funktion f: $y = -\frac{1}{2}x^2$.

a) Beschreibe die Form der Parabel zunächst ohne Zeichnung.

b) Fertige eine Wertetabelle für die Funktion f für $x \in [-3; 3]$ mit $\Delta x = 1$ an und zeichne den zugehörigen Graphen.

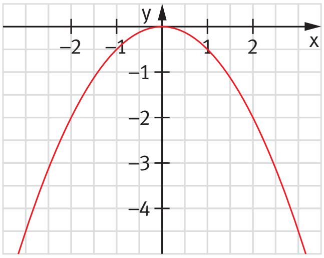
Lösung:

a) Da $a < 0$ und $-1 < a < +1$ $\Longrightarrow$ gestauchte Parabel, die nach unten geöffnet ist.

b)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−4,5	−2	−0,5	0	−0,5	−2	−4,5

Zu b):



II Der Punkt P (1,2 | –3,6) liegt auf der Parabel f: $y = ax^2$. Bestimme die Gleichung der Parabel.

Lösung:
Einsetzen der Koordinaten des Punktes P (1,2 | –3,6) in $y = ax^2$ liefert:
$-3{,}6 = a \cdot 1{,}2^2 \;\; | : 1{,}2^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -2{,}5 \quad \Rightarrow \quad f\colon y = -2{,}5x^2$

Verständnis

- Die Formvariable a in $y = ax^2$ wird auch Streckungsfaktor a genannt. Erkläre diese Aussage.
- Beschreibe den Verlauf des Graphen für $y = ax^2$, der Funktion mit a = 0 ist.

Aufgaben

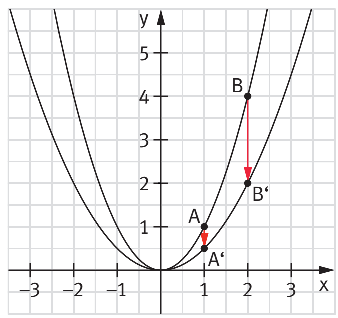
1 Beschreibe die Form der Parabel zunächst ohne Zeichnung. Zeichne dann den Graphen der Funktion f im angegebenen Intervall.

a) f: $y = 1{,}2x^2$ $\quad x \in [-3; 3] \quad \Delta x = 1$ **b)** f: $y = -2x^2$ $\quad x \in [-2; 2] \quad \Delta x = 0{,}5$
c) f: $y= 0{,}75x^2$ $\quad x \in [-3; 3] \quad \Delta x = 1$ **d)** f: $y = -\frac{1}{3}x^2$ $\quad x \in [-4; 4] \quad \Delta x = 0{,}5$

2 Zeichne den Graphen der Funktion f mithilfe einer Parabelschablone wie von S. 39.

a) f: $y = 2x^2$ **b)** f: $y = 0{,}5x^2$
c) f: $y = -1{,}5x^2$ **d)** f: $y = -\frac{1}{4}x^2$

Beachte: Gestauchte und gestreckte Parabeln können mithilfe der Parabelschablone gezeichnet werden, indem man einzelne Funktionswerte der Normalparabel mit der Formvariablen a multipliziert und die so gewonnenen Werte neu aufträgt.

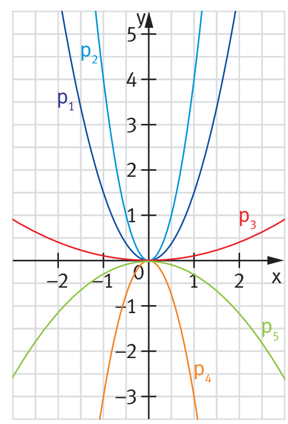


3 Bestimme a so, dass P auf der Parabel p mit $y = ax^2$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) liegt.

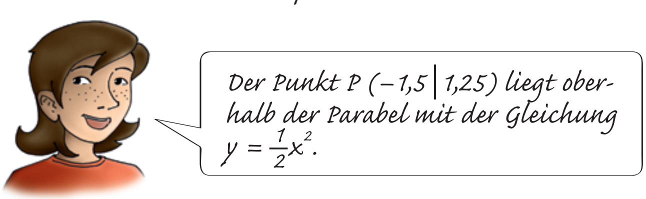
a) P (1 | –3) **b)** P ($\sqrt{2}$ | –3) **c)** P (1,6 | –7,04) **d)** P (–0,3 | 0,09) **e)** P ($\sqrt{5}$ | 4)

4 Ordne den Graphen in der Randspalte die entsprechende Funktionsgleichung zu.

(A) $y = 0{,}1x^2$ (B) $y = -\frac{2}{7}x^2$ (C) $y = -3x^2$ (D) $y = 1{,}5x^2$ (E) $y = 4x^2$



5



a) Überlege, wie Eva zu dieser Feststellung kommen könnte, ohne dabei eine Zeichnung anzufertigen.

b) Entscheide, ob der Punkt oberhalb, unterhalb oder auf dem Graphen liegt.

(1) P (4,4 | 7,26) $\quad$ f: $y = -\frac{3}{8}x^2$ $\qquad$ (2) P (–4,8 | –57,8) $\quad$ f: $y = -2{,}5x^2$
(3) P (–1,5 | 0,45) $\quad$ f: $y = 0{,}2x^2$ $\qquad$ (4) P (0,5 | –0,8) $\quad$ f: $y = 3{,}2x^2$

6 Bestimme die fehlenden Koordinaten so, dass gilt: A, B ∈ p.

a) A (–2 | y_A) $\quad$ B (x_B | 4) $\quad$ f: $y = 3x^2$ $\qquad$ **b)** A (x_A | –4,9) $\quad$ B (–2 | y_B) $\quad$ f: $y = -0{,}4x^2$

Es soll gelten: $x_A < x_B$.

7 Der Graph einer quadratischen Funktion f: $y = ax^2$ verläuft durch die Punkte P_1, P_2 und P_3. Bestimme die Funktionsgleichung.

a) $P_1\ (0|0)$; $P_2\ (1|2)$; $P_3\ (3|18)$
b) $P_1\ (1|-0{,}5)$; $P_2\ (1{,}5|-1{,}125)$; $P_3\ (2|-2)$
c) $P_1\ (-1|1)$; $P_2\ (0|0)$; $P_3\ (1|1)$
d) $P_1\ (-3|-27)$; $P_2\ (1|-3)$; $P_3\ (4|-48)$

8 Ist die Aussage für $y = ax^2$ wahr? Begründe deine Antwort.

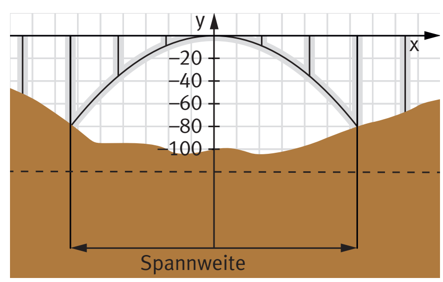
a)	Die Parabel ist achsensymmetrisch zur x-Achse.
b)	Für $a > 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet.
c)	Für $\lvert a \rvert < 1$ ist die Parabel gestaucht.
d)	Für $a = -1$ wird die Normalparabel an der y-Achse gespiegelt.
e)	Für $a > 0$ hat die Parabel im Scheitelpunkt ein Minimum.
f)	Der Graph der Funktion f: $y = -0{,}75x^2$ verläuft durch den Punkt $P\ (-1|0{,}75)$.
g)	Der Graph der Funktion f: $y = ax^2$ verläuft immer durch den Ursprung.

9 Gegeben ist die Normalparabel f: $y = x^2$ und vier weitere Parabeln. Beschreibe in Worten, wie die vier Parabeln aus der Normalparabel hervorgehen.

a) $y = -x^2$ **b)** $y = 1{,}5x^2$ **c)** $y = -3x^2$ **d)** $y = \frac{1}{4}x^2$

10 Der Punkt $Q\ (2|4)$ liegt auf der Normalparabel. Ein zusätzlicher Punkt $P\ (2|y)$ liegt auf den vier Parabeln aus Aufgabe 9. Ist der Funktionswert des Punktes P größer oder kleiner als bei Q. Begründe.

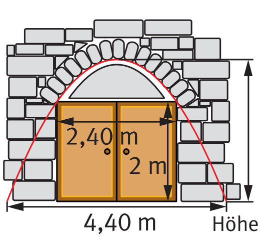
11 Die Talbrücke „Wilde Gera" der A71 ist eine der größten Stahlbetonbogenbrücken Deutschlands. Der Bogen lässt sich im abgebildeten Koordinatensystem annähernd durch $y = -0{,}005x^2$ beschreiben.



a) Bestimme die Spannweite des Bogens, wenn die Brücke am Fuß des Bogens 80 m hoch ist.

b) Von einigen Brücken ist jeweils die Funktionsgleichung des tragenden Bogens gegeben. Zeichne ihn in ein Koordinatensystem und bestimme grafisch und rechnerisch die fehlende Größe.

	Funktionsvorschrift	Höhe	Spannweite
Fehmarnsundbrücke	$y = -0{,}003x^2$	45 m	☐
Brooklyn Bridge	$y = 0{,}0015x^2$	☐	486 m
Akashi-Kaiky-Bridge	$y = 0{,}0002x^2$	208 m	☐
Hoover Dam Bypass Bridge	$y = -0{,}00052x^2$	☐	332 m



12 Oftmals werden Kellertüren durch Bögen abgestützt, um die Lasten des darüber liegenden Mauerwerks gut zu verteilen. Das Weingut „Riesling" plant für den Weinkeller den Bau eins neuen parabelförmigen Eingangs. Um mit einem Gabelstapler in den Weinkeller fahren zu können, muss der Eingang nebenstehende Bedingungen erfüllen:

a) Bestimme eine Funktionsgleichung diese parabelförmigen Eingangs.

b) Wie hoch muss der Keller mindestens sein, damit man den Eingang in dieser Form mauern kann.

13 Ermittle eine Funktionsgleichung der Form $y = ax^2$ mit $a < 0$ für die Brücken.

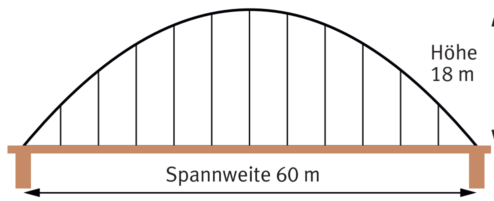
Bogenbrücke im Kromlauer Park
Höhe: 6,5 m Spannweite: 15,6 m

Müngstener Brücke
Höhe: 69 m Spannweite: 79 m

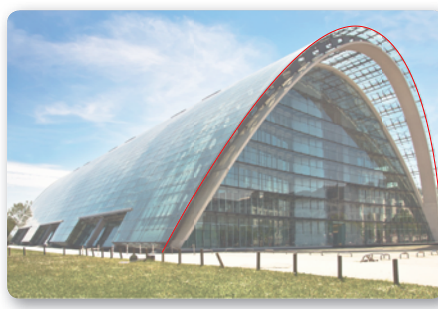
14 Viele Brückenbögen werden zusätzlich durch senkrechte Träger verstärkt.

a) Bestimme die Funktionsgleichung der parabelförmigen Brücke.

b) Der Abstand zwischen den einzelnen Trägern ist gleich. Berechne die Länge der einzelnen Träger.



15 Im Hamburger Stadtteil Hammerbrook steht der „Berliner Bogen“, ein Gebäude, dessen gläsernes Dach einen parabelförmigen Querschnitt hat. Das Dach des Gebäudes ist 36 m hoch und 70 m breit. Die Länge (Tiefe) des Baus beträgt 140 m.



a) Bestimme die Funktionsgleichung für die parabelförmige Randlinie des Daches.

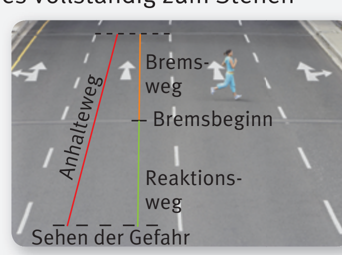
b) In der 6. Etage in 19 m Höhe sollen Büroflächen vermietet werden. Schätze die Gesamtfläche ab, die vermietet werden kann. Gehe dabei zunächst von der maximalen Grundfläche des Gebäudes aus.

VERKEHR

Bremsen

Für die Berechnung der Strecke, die ein sich bewegendes Fahrzeug braucht, bis es vollständig zum Stehen gekommen ist, gilt folgende Formel:

Anhalteweg = Reaktionsweg + Bremsweg



Faustformel für den Reaktionsweg in m: $3 \cdot \left(\dfrac{\text{Geschwindigkeit in } \frac{\text{km}}{\text{h}}}{10}\right)$

Faustformel für den Bremsweg in m: $\frac{3}{4} \cdot \left(\dfrac{\text{Geschwindigkeit in } \frac{\text{km}}{\text{h}}}{10}\right)^2$

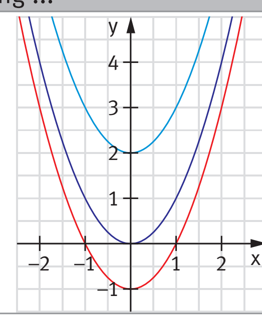
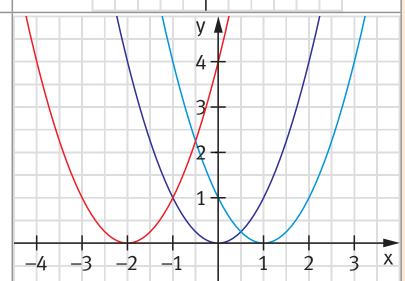
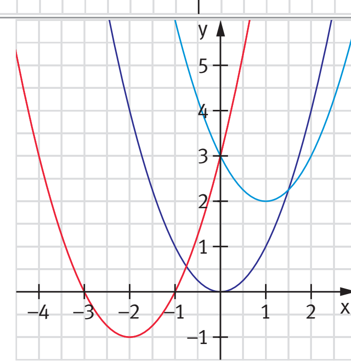
- Informiert euch, was genau mit Reaktionsweg und Bremsweg gemeint ist.
- Erstellt eine Tabelle für Reaktionsweg, Bremsweg und Anhalteweg für Geschwindigkeiten von $30\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $50\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
- Stellt für $30\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $50\frac{\text{km}}{\text{h}}$ alle „drei Wege“ auf dem Pausenhof dar.

Verwende bei der Zeichnung verschiedene Farben.

Die Aufgabe kann auch mit einem dynamischen Geometrieprogramm bearbeitet werden.

- Zeichne die Graphen der Funktionen f_1: $y = x^2$, f_2: $y = x^2 + 3$ und f_3: $y = x^2 - 3$ für $x \in [-3; 3]$ und $\Delta x = 1$ in ein Koordinatensystem.
- Beschreibe die Lage des Graphen zu f_2 (f_3) in Relation zum Graphen zu f_1. Vergleiche die Koordinaten der Scheitelpunkte der Parabeln miteinander.
- Zeichne die Graphen der Funktionen f_4: $y = (x - 3)^2$, f_5: $y = (x + 2)^2$ für $x \in [-3; 3]$ und $\Delta x = 1$ in ein neues Koordinatensystem und verfahre ebenso wie mit den vorherigen Graphen.
- Zeichne den Graphen zu f_1 auf ein kariertes Blatt und verschiebe die Parabel um 2 Einheiten in die positive y-Richtung. Bezeichne den neuen Graphen mit f_1'. Verschiebe diesen um 4 Einheiten in die positive x-Richtung, bezeichne den neuen Graphen mit f_1''. Gib die Funktionsgleichung von f_1' sowie f_1'' an und vergleiche mit der von f_1. Was fällt auf?
- Ersetze bei den Funktionen f_1 bis f_5 die Formvariable a = 1 durch a = 2 und führe alle Aufträge erneut aus. Was stellst du fest?

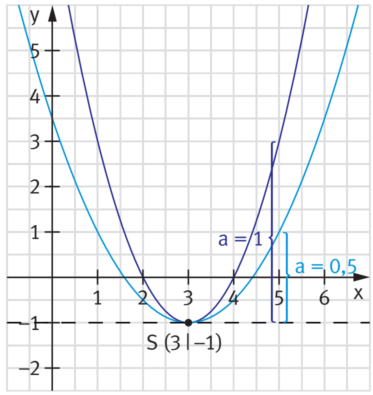
Merkwissen

Funktionen mit der Gleichung ...	
$\mathbf{y = ax^2 + y_S}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y_S \in \mathbb{R}$ beschreiben Parabeln, die entlang der y-Achse verschoben sind und den Scheitel **S** $(0 \mid y_S)$ besitzen. f_1: $y = x^2$ f_2: $y = x^2 + 2$ f_3: $y = x^2 - 1$	
$\mathbf{y = a(x - x_S)^2}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x_S \in \mathbb{R}$ beschreiben Parabeln, die entlang der x-Achse verschoben sind und den Scheitel **S** $(x_S \mid 0)$ besitzen. f_1: $y = x^2$ f_2: $y = (x - 1)^2$ f_3: $y = (x + 2)^2$	
$\mathbf{y = a(x - x_S)^2 + y_S}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, x_S, $y_S \in \mathbb{R}$ beschreiben Parabeln, die entlang der x- und y-Achse verschoben sind und den Scheitel **S** $(x_S \mid y_S)$ besitzen. f_1: $y = x^2$ f_2: $y = (x - 1)^2 + 2$ f_3: $y = (x + 2)^2 - 1$	

Die Gleichung $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und x_s, $y_s \in \mathbb{R}$ wird als **Scheitelpunktform der allgemeinen Parabel** bezeichnet.

BEISPIELE

I Gegeben ist der Graph einer quadratischen Funktion. Ermittle die Funktionsgleichung.



Lösung:

Der Scheitelpunkt der Parabel liegt bei S(3 | −1).

Es folgt: $y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$

$y = a \cdot (x - 3)^2 - 1$

Ein Vergleich mit der Normalparabel ergibt, dass die nach oben geöffnete (a > 0) Parabel breiter ist, d. h. sie ist gestaucht.

Für den Faktor a gilt somit: $0 < a < 1$.

Es folgt $a = 0{,}5$.

Die Funktionsgleichung heißt: $y = 0{,}5(x - 3)^2 - 1$

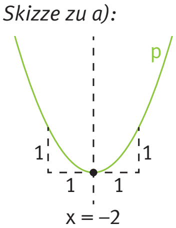
II Der Scheitel einer verschobenen Normalparabel p ist S (−2 | 4).

a) Gib die Wertemenge $\mathbb{W}$ und die Gleichung der Symmetrieachse s von p an.

b) Bestimme die Gleichung von p in der Scheitelpunktsform.

c) Gib die x-Koordinaten der Punkte $Q_1 \in p$ und $Q_2 \in p$ an, die beide die y-Koordinate 5 haben.

Skizze zu a):



Lösung:

a) Da $p(-2) = 4$ der minimale Funktionswert ist, gilt $\mathbb{W} = \{y \mid y \geqq 4\}$. Die Symmetrieachse s verläuft durch den Scheitel S mit der Gleichung $x = -2$.

b) $p\colon y = 1 \cdot (x - (-2))^2 + 4 \Longleftrightarrow p\colon y = (x + 2)^2 + 4$

c) Da p eine verschobene Normalparabel ist, ihr Scheitel die y-Koordinate 4 hat und $x = -2$ die Symmetrieachse ist, folgt: $x_{Q_1} = -3$; $x_{Q_2} = -1$

VERSTÄNDNIS

- Die Parabel $p\colon y = 0{,}5x^2$ wird in y-Richtung verschoben. Erläutere, wie viele Nullstellen die verschobene Parabel besitzen kann.
- Eine verschobene Parabel kann die y-Achse, ebenso wie eine Normalparabel $p\colon y = x^2$, nur in genau einem Punkt schneiden. Begründe.

AUFGABEN

1 Zeichne mithilfe der Normalparabel die Graphen der Funktionen. Beschreibe zunächst die Verschiebung der Normalparabel.

a) $y = x^2 + 4$ **b)** $y = x^2 + 1$ **c)** $y = x^2 - 1{,}5$

d) $y = (x + 2{,}5)^2$ **e)** $y = (x - 0{,}5)^2$ **f)** $y = (x - 2)^2$

g) $y = (x + 2)^2 - 0{,}5$ **h)** $y = (x - 1{,}5)^2 + 3$ **i)** $y = (x - 1)^2 - 4$

2 Bestimme das Aussehen des Graphen anhand der Funktionsgleichung und vergleiche mit der Normalparabel. Nutze die Beschreibungen in der Randspalte.

Beschreibungen:
- *Gestreckt oder gestaucht*
- *Nach oben oder nach unten geöffnet*
- *Entlang der x-Achse nach links oder rechts verschoben*
- *Entlang der y-Achse nach oben oder unten verschoben*

> $y = 3 \cdot (x - 1)^2 - 0{,}5$
> Die Parabel ist gestreckt und nach oben geöffnet. Der Scheitelpunkt S wurde entlang der x-Achse um 1 Einheit nach rechts und entlang der y-Achse um 0,5 Einheiten nach unten verschoben.

a) $y = 0{,}5 \cdot (x - 3)^2 + 2$ **b)** $y = -2 \cdot (x + 0{,}5)^2$ **c)** $y = -(x - 2{,}5)^2 + 4$

d) $y = 1{,}5 \cdot (x + 1)^2 - 3{,}5$ **e)** $y = -\frac{1}{3}x^2 + 5$ **f)** $y = (x + 5{,}5)^2 - 1$

3 Ist die Aussage für eine Funktion $y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ richtig oder falsch? Begründe.

a)	Wenn a negativ ist, ergibt sich eine nach unten geöffnete Parabel.
b)	Für $a > 0$ ist der Scheitelpunkt S der Tiefpunkt der Parabel.
c)	Die Konstante y_s gibt den Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse an.
d)	Je größer y_s ist, desto weiter ist die Parabel nach unten verschoben.
e)	Ist $a = 0$ und $y_s = 0$, dann erhält man eine Normalparabel.
f)	Wenn $x_s > 0$, dann verschiebt sich der Scheitelpunkt der Parabel nach rechts.
g)	Wenn a positiv und y_s negativ ist, dann schneidet die Parabel die x-Achse genau zwei Mal.
h)	Für $a = 0$ ist der Graph eine Gerade parallel zur x-Achse.
i)	Der Koeffizient x_s gibt an, um wie viele Einheiten die Parabel auf der y-Achse verschoben wird.

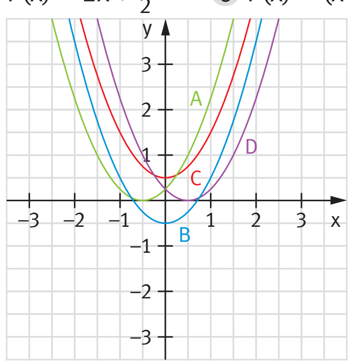
Verwende zur Kontrolle ein dynamisches Geometrieprogramm.

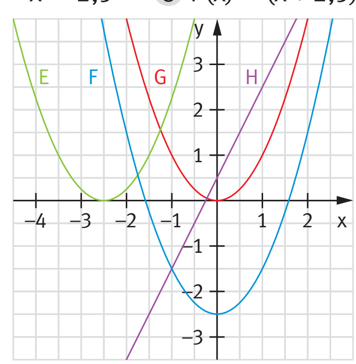
4 Gib die Koordinaten des Scheitelpunktes S an und zeichne den Graphen. Bestimme zeichnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte der Parabel mit den Koordinatenachsen.

a) f_1: $y = (x - 1)^2 + 2$ **b)** f_2: $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 4$ **c)** f_3: $y = -0{,}1\,(x + 2{,}5)^2 + 3$
d) f_4: $y = 3x^2 - 2$ **e)** f_5: $y = (x - 3)^2$ **f)** f_6: $y = (x - 7) \cdot (x - 7) + 1$
g) f_7: $y = 3 - 2\,(x + 6)^2$ **h)** f_8: $4y = (x - 2)^2 - 28$ **i)** f_9: $y = -\frac{1}{5}(x - 2)(x + 2)$

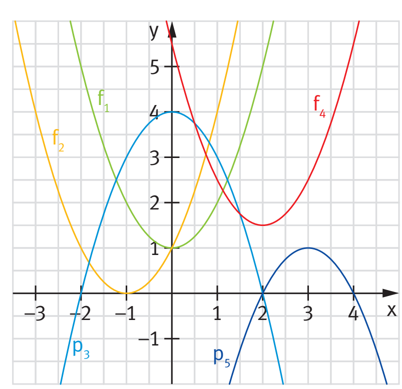
5 Gegeben sind die Graphen von Funktionen. Ordne den Graphen die zugehörige Funktionsgleichung zu.

1 $f(x) = x^2$ 2 $f(x) = x^2 - 0{,}5$ 3 $f(x) = x^2 + 0{,}5$ 4 $f(x) = (x - 0{,}5)^2$
5 $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$ 6 $f(x) = (x + 0{,}5)^2$ 7 $f(x) = x^2 - 2{,}5$ 8 $f(x) = (x + 2{,}5)^2$





6 Gib zu den Graphen der Funktionen f_1 bis f_5 die Gleichung in Scheitelpunktsform, die Wertemenge sowie die Gleichung der zugehörigen Symmetrieachse an.



7 Der Scheitelpunkt S und die Formvariable a einer quadratischen Funktion sind bekannt. Bestimme die Funktionsgleichung in Scheitelpunktsform.

a) S (1|2); a = 0,5 **b)** S (−3|7); a = −1
c) S (0,5|−3,5); a = −3 **d)** S (0|2); $a = \frac{1}{4}$
e) S (−4,5|−2); a = 7 **f)** S (8,2|0); $a = -\frac{2}{3}$

8 Überprüfe ob der Punkt P $(-1|5)$ auf der verschobenen Normalparabel mit dem Scheitelpunkt S liegt.

a) S $(-3|1)$ **b)** S $(1|-2)$ **c)** S $(0|4)$

9 Der Punkt Q liegt auf dem Graphen der Funktion p: $y = 0{,}25x^2 + y_S$ ($y_S \in \mathbb{R}$). Gib den Scheitelpunkt des Graphen an.

a) Q $(0|2)$ **b)** Q $(1|4)$ **c)** Q $(4|0)$ **d)** Q $(0|0)$ **e)** Q $(-4{,}5|3)$

10 Der Scheitel einer an der x-Achse gespiegelten und verschobenen Normalparabel f ist S $(6|-3)$. Die Punkte P_1 und P_2 liegen beide auf f und haben die y-Koordinate -7. Wie lauten die zugehörigen x-Koordinaten? Erläutere.

11 Bestimme den fehlenden Koeffizienten so, dass der Punkt auf p liegt ($a, c \in \mathbb{R}$).

a) f: $y = a\,(x+1)^2 + 3$ P $(-2|7)$ **b)** f: $y = -2\,(x-2)^2 - c$ Q $(-1|-20)$

c) f: $y = \frac{1}{3}\,(x+5)^2 + c$ B $(-2{,}5|1{,}75)$ **d)** f: $y = ax^2 - 1{,}5$ D $(3|34{,}5)$

12 Ordne die Punkte den Funktionsgleichungen zu, auf deren Graphen sie liegen.

1 $y = 2\,(x-2)^2 + 4$ 2 $y = x^2 + 1$

3 $y + 2 = 3x^2$ 4 $y = (x-2)^2 + 3$

5 $y = 0{,}5\,(x+1)^2$

A $(1|6)$ B $(1|2)$ F $(2|4{,}5)$ C $(1{,}5|3{,}25)$ D $(-1|1)$ G $(-5|52)$ E $(-3|10)$

13 Bekannt sind der Punkt P $(-3|20)$ und die Funktion f: $y = 3x^2 + 2$.

a) Erläutere, wie man die Lage von P in Bezug zum Graphen von f festgestellen kann.

b) Überprüfe rechnerisch die Lage des Punktes P in Bezug zum Graphen von f.

14 Silvio überlegt:

Wenn bekannt ist, dass eine Parabel weder gestaucht noch gestreckt ist, reichen dann beide Nullstellen aus, um den Funktionsterm anzugeben?

a) Was meinst du dazu? Begründe.

b) Gib alle möglichen Funktionsterme in Scheitelpunktsform an, wenn die Parabel die Nullstellen -4 und 0 hat und weder gestaucht noch gestreckt ist.

15

Die Nullstellen des Graphen zu f: $y = (x-3)(x+3)$ kann ich ohne weitere Berechnung angeben.

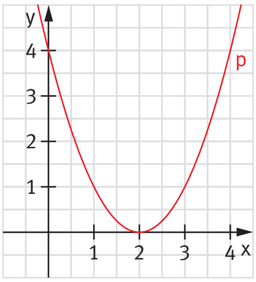
a) Erläutere Valentins Aussage.

b) Gib die Nullstellen der Funktion ohne Berechnung an.

1 f_1: $y = x^2 - 4$ 2 f_2: $y = (x-1)^2$ 3 f_3: $y = (x+5)(x+5)$

c) Gib die Gleichung einer Parabel p an, die keine Nullstelle besitzt.

2.6 Die allgemeine Form einer quadratischen Funktion



Dargestellt ist eine verschobene Normalparabel p.

- Gib die Gleichung der Funktion f an.
- Welche der Gleichungen beschreibt ebenfalls die Funktion f? Begründe.

$y = x^2 - 6x + 9$ $y = x^2 - 2x + 1$ $y = x^2 - 4x + 4$

- Ermittle, welche Gleichungen jeweils dieselbe Funktion beschreiben. Erläutere dein Vorgehen.

$y = 2(x + 3)^2 - 1$ $y = 2x^2 - 4x + 7$ $y = 2(x - 4)^2 - 2$ $y = 2(x - 1)^2 + 3$ $y = 2x^2 - 16x + 30$ $y = 2x^2 + 12x + 17$

Durch Ausmultiplizieren der Scheitelpunktform erhält man:

$y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$

$\Leftrightarrow y = a \cdot (x^2 - 2x_S \cdot x + x_S^2) + y_S$

$\Leftrightarrow y = ax^2 - 2ax_S \cdot x + ax_S^2 + y_S$

Setzt man $-2ax_S = b$ *und* $ax_S^2 + y_S = c$ *fest, so erhält man:*

$y = ax^2 + bx + c$

Durch Umformen der Gleichungen $b = -2ax_s$ *und* $c = ax_s^2 + y_s$ *erhält man die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel.*

$\Rightarrow S\left(\frac{-b}{2a} \middle| c - \frac{b^2}{4a}\right)$

Merkwissen

Quadratische Funktionen können auf unterschiedliche Art und Weise dargestellt werden.
Dazu gehören unter anderem:

- die **Normalform** $y = x^2 + px + q$ $p, q \in \mathbb{R}$
- die **Scheitelpunktform** $y = a\,(x - x_s)^2 + y_s$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $x_s, y_s \in \mathbb{R}$
- die **allgemeine Form** $y = ax^2 + bx + c$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b, c \in \mathbb{R}$
- und die **Produktform** (**Linearfaktorzerlegung**) $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Quadratische Funktionen können durch Umformung von einer in die andere Form überführt werden.

Der Scheitelpunkt S kann mithilfe der **Koeffizienten** a, b und c aus der allgemeinen Form berechnet werden.
Es gilt: $S\left(\frac{-b}{2a} \middle| c - \frac{b^2}{4a}\right)$

Um die Funktionsgleichung von Parabeln aufstellen zu können braucht man:

- einen Punkt P auf der Parabel und zwei der drei Koeffizienten a, b, c.
- den Scheitelpunkt S und einen weiteren Punkt P auf der Parabel.
- den Scheitelpunkt S und entweder den Koeffizienten a oder b.
- die Nullstellen x_1 und x_2.

Beispiele

I Von einer Parabel ist der Scheitelpunkt S (–2 | 3) und die Formvariable a = 0,5 bekannt. Bestimme die zugehörige Funktionsgleichung in der allgemeinen Form.

Lösung:

Scheitelpunktsform:	$y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$
S (–2 | 3) und a = 0,5 einsetzen:	$y = 0{,}5 \cdot (x - (-2))^2 + 3$
Umformen:	$y = 0{,}5 \cdot (x + 2)^2 + 3$
	$y = 0{,}5x^2 + 2x + 5$

Die allgemeine Form lautet:
$y = 0{,}5x^2 + 2x + 5$ mit a = 0,5; b = d; c = 5.

II Überführe die quadratische Funktion f: $y = -3x^2 - 6x + 9$ in die Scheitelpunktsform.

Lösung:

Allgemeine Form:	$y = -3x^2 - 6x + 9$
a, b und c bestimmen:	$a = -3,\ b = -6,\ c = 9$
Scheitelpunktskoordinaten mit der Formel berechnen:	$S\left(-\frac{-6}{2(-3)}\middle\vert 9 - \frac{-36}{4(-3)}\right)$; $S(-1\vert 12)$
$S(-1\vert 12)$ und $a = -3$ einsetzen:	$y = -3 \cdot (x+1)^2 + 12$

III a) Gib die Gleichung der Parabel p mit $y = -4x^2 + bx + 2$ ($b \in \mathbb{R}$) an, wenn $P(-1\vert -5) \in p$ ist.

b) Stelle die Gleichung für eine an der x-Achse gespiegelte und verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(3\vert -7)$ auf.

c) Ermittle die Gleichung der Parabel p, wenn der Scheitelpunkt $S(-3\vert 2)$ und der Punkt $P(1\vert -5) \in p$ bekannt sind.

d) Wie lautet die Gleichung der Parabel p, wenn bekannt ist: $S(3\vert -3)$ und $b = -3$?

Lösung:

a) $P \in p$ liefert: $-5 = -4 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 2$

$\Leftrightarrow b = 3 \qquad \Longrightarrow$ p: $y = -4x^2 + 3x + 2$

b) gespiegelte Normalparabel: $a = -1 \qquad \Longrightarrow$ p: $y = -(x-3)^2 - 7$

c) Einsetzen der Punktkoordinaten von S und P in die Scheitelpunktsform liefert:

$-5 = a\,(1 - (-3))^2 + 2$

$\Leftrightarrow a = -\frac{7}{16} \qquad \Longrightarrow$ p: $y = -\frac{7}{16}(x+3)^2 + 2$

d) Aus der allgemeinen Formel für die Koordinaten des Scheitelpunkts folgt:

$$\left.\begin{array}{ll} 3 = -\frac{(-3)}{2a} & \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \\ -3 = c - \frac{(-3)^2}{4 \cdot \frac{1}{2}} & \Leftrightarrow c = 1{,}5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{p: } y = 0{,}5x^2 - 3x + 1{,}5$$

Verständnis

- Leite ausgehend von der Form $y = x^2 + px + q$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ eine allgemeine Formel für die Koordinaten des Scheitelpunktes S einer verschobenen Normalparabel her.
- Wie lauten die Koordinaten des Scheitelpunktes S einer Parabel p mit der Funktionsgleichung $y = (x-m)(x+m)$ mit $m \in \mathbb{R}$?

Aufgaben

1 Überführe die quadratische Funktion in die allgemeine Form.

a) $y = 0{,}5(x-3)^2 + 1$ **b)** $y = (x+2)^2 - 1{,}5$ **c)** $y = -2(x+1)^2 + 4$

d) $y = 1{,}5(x-2)^2 - 2$ **e)** $y = -0{,}75(x+5)^2$ **f)** $y = -3(x-0)^2 + 1$

2 Gegeben ist der Scheitelpunkt einer verschobenen Normalparabel. Bestimme die zugehörige Funktionsgleichung.

a) $S(2\vert 3)$ **b)** $S(-2\vert 4)$ **c)** $S(-3\vert -6)$ **d)** $S(-1{,}5\vert 4)$

Lösungen zu 2:
$y = x^2 + 4x + 8$
$y = x^2 + 6x + 3$
$y = x^2 - 4x + 7$
$y = x^2 + 3x + 6{,}25$

3 Berechne den Scheitelpunkt. Überführe dann die quadratische Funktion in die Scheitelpunktsform.

a) $y = 2x^2 + 4x + 1$ **b)** $y = x^2 - 2$ **c)** $y = -0{,}5x^2 + 3x$
d) $y = \frac{1}{3}x^2 + x + \frac{2}{3}$ **e)** $y = -1{,}5x^2 + 3x - 5$ **f)** $y = -x^2 - 2x + 3$

4 Überführe die quadratische Funktion in die allgemeine Form und zeichne den Funktionsgraphen. Was stellst du fest?

a) $y = (x-1)(x-3)$ **b)** $y = -(x-3)(x+0{,}5)$ **c)** $y = 2(x+5)(x+1{,}5)$
d) $y = -0{,}5(x+2)(x-1)$ **e)** $y = 2{,}5(x-1{,}5)(x+1{,}5)$ **f)** $y = 3(x-2{,}5)(x-4{,}5)$

5

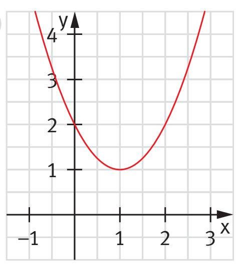
Der Punkt P (−9|2) ist der Scheitelpunkt der Parabel p mit y = 0,5 (x − 3)(x + 3) + 2.

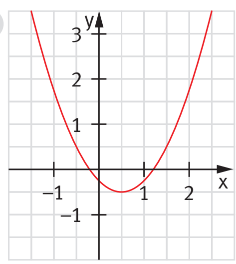
Hat Sid Recht? Begründe.

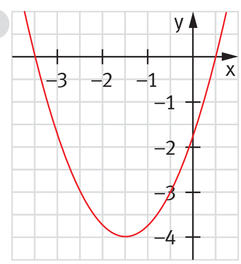
6 In der Randspalte dargestellt ist der Graph zur Funktion f mit $y = -0{,}5\,(x-1)^2 - 1$. Zeichne die Parabel in dein Heft und ergänze das Koordinatensystem passend.

7 Welcher Graph gehört zu welcher Funktionsgleichung? Ordne zu und begründe.

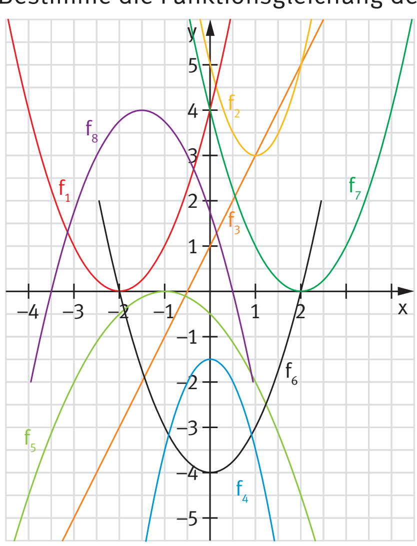
Ⓐ $y = x^2 - x - 0{,}25$ Ⓑ $y = x^2 - 2x + 2$ Ⓒ $y = x^2 + 3x - 1{,}75$

① 

② 

③ 

8 Bestimme die Funktionsgleichung der Graphen in der allgemeinen Form.



9 Ermittle die Gleichung der quadratischen Funktion f in der allgemeinen Form und zeichne den zugehörigen Graphen, wenn Folgendes bekannt ist:

a) S (1|6), P (−1|2) ∈ p
b) S (−2|−3), P (2|1) ∈ p
c) S (−4|6), P (−6|−2) ∈ p
d) S $(\frac{1}{4}|-8\frac{7}{8})$; b = 1
e) S (−0,5|−17); c = −16
f) S (72|44); $a = -\frac{1}{3}$
g) f: $y = ax^2 - 6x + 3$ Q (2|−5) ∈ p; $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
h) f: $y = -x^2 - 4x + c$ Q (−3|6) ∈ p; $c \in \mathbb{R}$
i) f: $y = -2x^2 + bx + 6$ Q (−3|0) ∈ p; $b \in \mathbb{R}$
j) f: $y = 0{,}5x^2 - 4x + c$ Q (0|6) ∈ p; $c \in \mathbb{R}$
k) P (4|−13), Q (−4|−5) ∈ p; c = −1 und $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $b \in \mathbb{R}$
l) P (1,5|4,5), Q (−1|−0,5) ∈ p; b = 0,5 und $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $c \in \mathbb{R}$
m) P (−6|1), Q (7|−5) ∈ p; a = −0,5 und $b, c \in \mathbb{R}$

10 Von einer Parabel p sind die Koordinaten eines Punktes P (−3|21) bekannt.

a) Welche zusätzlichen Informationen müssen bekannt sein, damit man die Parabelgleichung angeben kann? Finde verschiedene Möglichkeiten.
b) Gib dir für die Fälle aus a) konkrete Werte vor und berechne damit jeweils die Koordinaten des Scheitelpunktes S.

11 Gegeben ist eine Funktion f: $y = ax^2 + 4x + c$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $c \in \mathbb{R}$.

a) Bestimme die Koeffizienten a und c so, dass gilt: P (0|−4), Q (−8|−4) ∈ p.
b) Ermittle, welchen Wert a = c besitzen muss, damit R (0|−1) auf f liegt.

12 Überprüfe, ob es möglich ist, a = b so zu wählen, dass S_1 (−0,5|4) bzw. S_2 (0,5|−4) Scheitelpunkt der Parabel p mit $y = ax^2 + bx + 5$ wird.

13 Die Formvariablen a, b und c der Funktionsgleichung einer Parabel p haben alle denselben Wert. Ermittle die Funktionsgleichung, wenn p durch P verläuft.

a) P (−2|−6)
b) P (−3,5|2,5)
c) P (2|7)

14 Gegeben sind die Nullstellen einer verschobenen Normalparabel. Bestimme die Funktionsgleichung der Parabel p mithilfe der Produktform der quadratischen Gleichung.

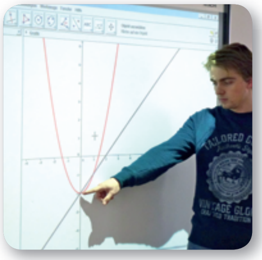
Produktform der quadratischen Gleichung: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

a) $x_1 = -2$; $x_2 = 5$
b) $x_1 = 6$; $x_2 = 18$
c) $x_1 = -7$; $x_2 = 4$
d) $x_1 = 3{,}5$; $x_2 = -2{,}5$
e) $x_1 = -1{,}2$; $x_2 = -3{,}6$
f) $x_1 = 8$; $x_2 = 0$

Spiel

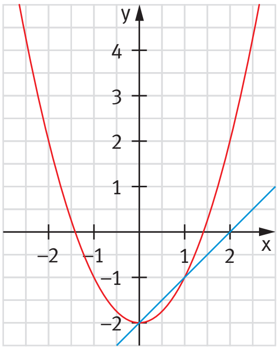
Parabeln versenken

Stelle zwischen dir und deiner Banknachbarin/deinem Banknachbarn eine Trennwand auf.
Anschließend denkt sich jeder von euch den Funktionsterm einer Parabel aus und zeichnet diese in ein Koordinatensystem.
Ihr nennt nun abwechselnd jeweils einen x-Wert und der andere teilt dann den zugehörigen Funktionswert zu seiner Parabel mit.
Ziel des Spiels ist es, mit möglichst wenigen Wertepaaren den Funktionsterm zu bestimmen.



René hat die Aufgabe, seinen Mitschülern grafische Darstellungen mit seinem bisherigen Wissen zu beschreiben. Kannst du ihm helfen?

- Gib Eigenschaften der Funktionen an, die der grafischen Darstellung entnommen werden können.
- Ermittle die zugehörige Funktionsgleichung beider Funktionsgraphen.
- Beschreibe mindestens zwei Unterschiede (Gemeinsamkeiten) beider Funktionen.
- Erzeugt mit einem dynamischen Geometrieprogramm weitere grafische Darstellungen und beschreibt möglichst viele Eigenschaften.



Weitere Eigenschaften zur Beschreibung quadratischer Funktionen:
- *Streckung/Stauchung*
- *Spiegelungen*
- *Lagebeziehung gegenüber der Normalparabel*

Merkwissen

Eine quadratische Funktion kann man anhand folgender Eigenschaften beschreiben:

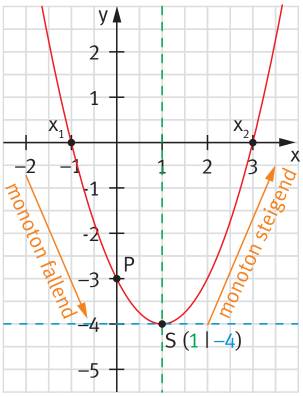
- Koordinaten des **Scheitelpunkts** S (x | y) der Parabel sowie Art des Scheitelpunkts: **Hochpunkt** oder **Tiefpunkt**
- **Definitionsbereich** $\mathbb{D}$ und **Wertebereich** $\mathbb{W}$: Welche Zahlen dürfen eingesetzt werden und welche können als Funktionswerte vorkommen?
- **Monotonie**: In welchen Bereichen **fällt** bzw. **steigt** der Graph?
- **Nullstellen**: An welchen Stellen schneidet der Graph die x-Achse?
- **Schnittpunkt P** der Parabel mit der y-Achse
- **Symmetrie**: Welche Lage hat die Symmetrieachse?

Beispiele

I Zeichne mit einem Computerprogramm den Graphen der Funktion $y = x^2 - 2x - 3$ und beschreibe ihn anhand der Eigenschaften im Merkwissen.

Lösung:

Eigenschaft	Beschreibung
Scheitelpunkt	Tiefpunkt S (1 | –4)
Definitionsbereich	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$
Wertebereich	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$ mit $y \geqq -4$ bzw. $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geqq -4$
Monotonie	fallend für: $x \leqq 1$ steigend für: $x \geqq 1$
Nullstellen	$x_1 = -1$; $x_2 = 3$ bzw. als Punkte: N_1 (–1 | 0); N_2 (3 | 0)
Schnittpunkt mit der y-Achse	P (0 | –3)
Symmetrie	achsensymmetrisch zu $x = 1$



Mathematisch korrekt müsste man sagen:
- *Verschiebung nach rechts/links: in positive/negative x-Richtung*
- *Verschiebung nach oben/unten: in positive/negative y-Richtung*

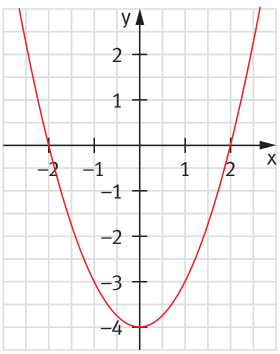
Der Graph dieser Funktion ist eine Normalparabel, die um eine Einheit nach rechts und vier Einheiten nach unten verschoben worden ist.

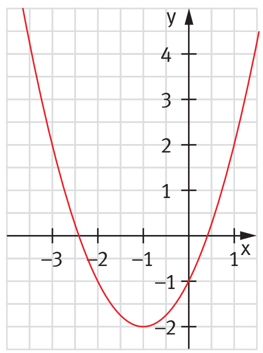
Verständnis

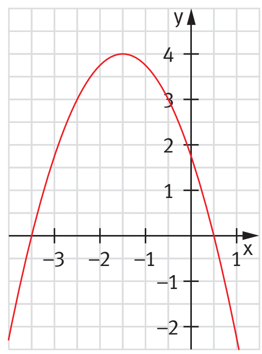
- Beschreibe jeweils den Graph einer quadratischen Funktion, die keine (eine, zwei) Nullstelle(n) hat. Unterscheide „nach oben“ und „nach unten“ geöffnete Parabeln.
- Beschreibe für quadratische Funktionen den Zusammenhang zwischen Scheitelpunkt und Wertebereich sowie zwischen Scheitelpunkt und Nullstellen.

Aufgaben

1 Beschreibe die Funktionen anhand ihrer Eigenschaften wie in Beispiel I.

a)


b)


c)


2 Gegeben sind die Scheitelpunkte von verschobenen Normalparabeln.

① S (0|3) ② S (0|–1) ③ S (2|0) ④ S (–3|0)
⑤ S (2,5|–4) ⑥ S (–1|–2,25) ⑦ S (3|–1) ⑧ S (–2|–6,25)

a) Welche Eigenschaften quadratischer Funktionen kannst du mithilfe des Scheitelpunktes direkt bestimmen?

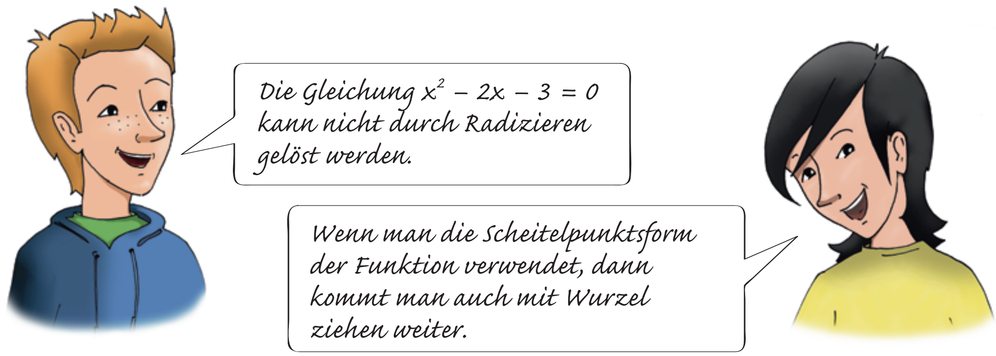
b) Zeichne jeweils den Graphen. Du kannst eine Schablone verwenden.

c) Beschreibe jeweils die Funktion anhand der Eigenschaften aus Beispiel I. Welche Angaben gegenüber a) entnimmst du dabei zusätzlich der Zeichnung?

3 Die Wertetabelle soll die Eigenschaften verschobener Normalparabeln mit dem gegebenen Scheitelpunkt darstellen ($\mathbb{D} = \mathbb{R}$). Doch hat der Fehlerteufel zugeschlagen. Übertrage die Tabellen in dein Heft und korrigiere fehlerhafte Einträge. Beschreibe jeweils den aufgetretenen Fehler, wenn möglich.

Scheitelpunkt	W: mit $y \in \mathbb{R}$	Symmetrieachse	monoton fallend	monoton steigend	Nullstellen
S (0|–9)	$y \geq 0$	$x = -9$	$x \leq -9$	$x \geq 9$	$x_1 = 4$; $x_2 = 6$
S (5|–1)	$y \geq 5$	$y = -1$	$x \leq 5$	$x \geq 5$	$x_1 = 0$; $x_2 = 3$
S (1|1)	$x \geq 1$	$x = 1$	$x \leq 1$	$x \geq 1$	$x_1 = 1$; $x_2 = 1$
S (2|–16)	$y \geq -4$	$x = 2$	$x \leq 0$	$x \geq 0$	keine
S (–4|–4)	$y \geq \sqrt{4}$	$x = \sqrt{4}$	$x \leq 2$	$x \geq 2$	$x_1 = -2$; $x_2 = -6$
S (3|0)	$y \geq -16$	$x = 9$	$x < -4$	$x > 5$	$x = 3$
S (1,5|–2,25)	$y \geq 1$	$x \geq 0$	$x < 2$	$x > -4$	$x_1 = 3$; $x_2 = -3$

Skizziere zur Überprüfung.



- Überprüfe Jakobs Aussage.
- Finde eine Möglichkeit, die Gleichung zu lösen und beurteile Evas Aussage.

Satz vom Nullprodukt:
Ein Produkt ist Null, wenn einer der beiden Faktoren Null ist.

Merkwissen

Quadratische Gleichungen, die neben dem quadratischen Glied $\mathbf{ax^2}$ noch ein lineares Glied $\mathbf{bx}$ besitzen, nennt man **gemischtquadratische Gleichungen**.
Alle quadratischen Gleichungen lassen sich **rechnerisch oder grafisch** lösen.
Die Lösung einer quadratischen Gleichung lässt sich grafisch als **Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der x-Achse (Nullstellen)** bestimmen.

Rechnerisch lassen sich quadratische Gleichungen der Form …

1 $ax^2 + bx = 0$ (a, b, $\in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$)

… durch **Ausklammern** und Anwendung des **Satzes von Nullprodukt** lösen:
$\mathbf{ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow}$ $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$

2 $ax^2 + bx + c = 0$ (allgemeine Form a, b, c $x \in \mathbb{R}$und $a \neq 0$)

… mithilfe der **abc-Formel** lösen: $\mathbf{x_{1/2} = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

Den Radikanden $b^2 - 4ac$ bezeichnet man als **Diskriminante D**.
Die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung ist abhängig von der **Diskriminante (Diskriminantenkriterium)**. Man unterscheidet drei Fälle:

$D = b^2 - 4ac > 0$	$D = b^2 - 4ac = 0$	$D = b^2 - 4ac < 0$
Die quadratische Gleichung hat **zwei Lösungen** (x_1 und x_2). Der Graph schneidet die x-Achse **in 2 Punkten**.	Die quadratische Gleichung hat **eine Lösung** ($x_1 = x_2$). Der Graph berührt die x-Achse **in 1 Punkt**.	Die quadratische Gleichung hat **keine Lösungen**. Der Graph schneidet die x-Achse **nicht**.

Beispiele

I Ermittle die Lösung der quadratischen Gleichung $-2x^2 - 5x = 0$ mithilfe des Ausklammerns in $\mathbb{R}$.

Lösung:
$-2x^2 - 5x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(-2x - 5) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0$ und $-2x - 5 = 0$
$\Leftrightarrow \quad x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{5}{(-2)} = -2{,}5 \qquad \mathbb{L} = \{-2{,}5; 0\}$

II Bestimme die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung $0{,}5x^2 - 0{,}5x - 3 = 0$ in $\mathbb{R}$ mithilfe der Diskriminante. Berechne dann die Lösungsmenge.

Lösung:
Mit $a = 0{,}5$, $b = -0{,}5$ und $c = -3$ ergibt die Diskriminante
$D = (-0{,}5)^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-3) = 6{,}25$
$D > 0 \Longrightarrow$ die Gleichung hat 2 Lösungen.

abc-Formel:

$$x_{1/2} = -(-0{,}5) \pm \frac{\sqrt{(-0{,}5)^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-3)}}{2 \cdot 0{,}5}$$

$$x_{1/2} = \frac{0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25}}{1}$$

$x_1 = 3$ und $x_2 = -2$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{L} = \{-2; 3\}$

Verständnis

- Begründe, dass es geschickt ist, zuerst die Diskriminante zu bestimmen und erst dann mögliche Nullstellen zu berechnen.
- Sophia behauptet: „Um die Anzahl der Nullstellen zu ermitteln, muss ich nicht rechnen, wenn ich den Scheitelpunkt einer quadratischen Funktion kenne.“ Erkläre diese Behauptung.

Aufgaben

1 Löse die Gleichungen rechnerisch mithilfe des Ausklammerns. Was stellst du fest?

a) $3x^2 + 6x = 0$ **b)** $-x^2 + 1{,}5x = 0$ **c)** $\frac{1}{4}x^2 - 2x = 0$
d) $-0{,}5x^2 - x = 0$ **e)** $2x^2 - 4x = 0$ $-5x^2 + 7{,}5x = 0$

2 Bestimme mithilfe der Diskriminante die Anzahl der Lösungen und dann die Lösungsmenge.

Verwende zur Kontrolle ein dynamisches Geometrieprogramm.

(1) $2x^2 - 20x + 42 = 0$ (2) $-3x^2 + 18x - 75 = 0$ (3) $3x^2 + 6x - 105 = 0$
(4) $-x^2 - 5x - 5{,}25 = 0$ (5) $-x^2 - 5x + 24 = 0$ (6) $7x^2 = 3{,}5x + 10{,}5$
(7) $-3x = -2{,}24 - x^2$ (8) $100x \cdot (x + 3) = 559$ (9) $2{,}5x^2 - 25x = 62{,}5$

3 Bringe die Gleichungen in die Form $ax^2 + bx + c = 0$. Bestimme die Lösungsmenge.

a) $x^2 = 2{,}4x - 1{,}43$ **b)** $1{,}5x^2 + 0{,}75x = 1{,}26$ **c)** $x^2 - 7x = 2{,}75$
d) $2x^2 = 0{,}4x + 0{,}48$ **e)** $x \cdot (x - 4) = -4$ **f)** $(3 - x) \cdot 3x = -15$

4

Quadratische Gleichungen in der **allgemeinen Form $ax^2 + bx + c = 0$** lassen sich **durch Division mit a** in die **Normalform $x^2 + px + q = 0$** ($p, q, x \in \mathbb{R}$) bringen.

Diese können rechnerisch durch die Anwendung der **pq-Formel** gelöst werden.

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Bei der pq-Formel bezeichnet man als Diskriminante D den Radikanden: $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

Forme die quadratische Gleichung in die Normalform um und bestimme die Lösung mithilfe der pq-Formel.

a) $\frac{1}{2}x^2 + x - 2 = 0$ **b)** $-3x^2 + 6x = -6$ **c)** $\frac{3}{4}x - 6 = -3x^2$
d) $\frac{3}{4}x = x^2 - 9$ **e)** $0{,}2x^2 + 1{,}5 = -2x$ **f)** $1{,}4x^2 + x = 2 - 4x^2$

Lösungen zu 5:
$\mathbb{L} = \{-2{,}41; 5{,}41\}$;
$\mathbb{L} = \{0{,}86; 4{,}64\}$;
$\mathbb{L} = \{-5{,}45; -0{,}55\}$;
$\mathbb{L} = \{-2\}$; $\mathbb{L} = \{0\}$;
$\mathbb{L} = \{1{,}34; 18{,}66\}$

5 Löse rechnerisch. Runde gegebenenfalls auf zwei Dezimalen.

a) $2x^2 + 6x = x^2 - 3$ **b)** $2 \cdot (x - 2)^2 + x^2 = x \cdot (x + 3)$
c) $x^2 - 3x + 16 = 2x^2 - 6x + 3$ **d)** $4x^2 - 9 - x \cdot (x - 4) = (-2x + 4)^2$
e) $(x + 7) \cdot (x + 3) = (x - 3) \cdot (x + 1)$ **f)** $(x - 2) \cdot (x + 3) = (x - 3) \cdot (x + 2)$

6 Du weißt bereits, wie man reinquadratische Gleichungen grafisch lösen kann.

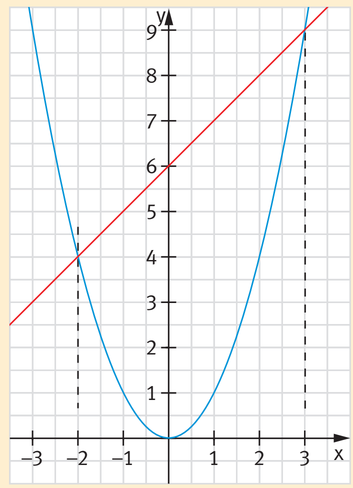
Quadratische Gleichungen der allgemeinen Form $ax^2 + bx + c = 0$ lassen sich grafisch lösen, indem man sie zunächst in die Normalform $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$ bringt und anschließend die **Schnittstellen (x-Koordinaten der Schnittpunkte) der Normalparabel $\mathbf{y = x^2}$ und der Geraden $\mathbf{y = -px - q}$** ermittelt.

Beispiel:

$$0{,}5x^2 - 0{,}5x - 3 = 0 \quad | \cdot 2$$
$$x^2 - x - 6 = 0 \quad | + x + 6$$
$$x^2 = x + 6$$

Gesucht sind die Schnittstellen der Graphen von $y = x^2$ und $y = x + 6$

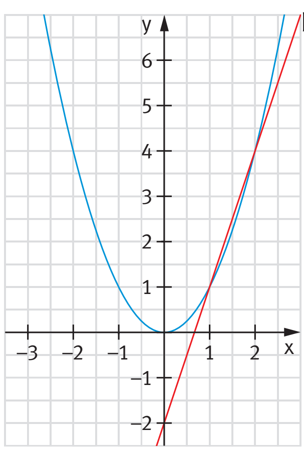
$x_1 = -2$, $x_2 = 3$ $\mathbb{L} = \{-2; 3\}$

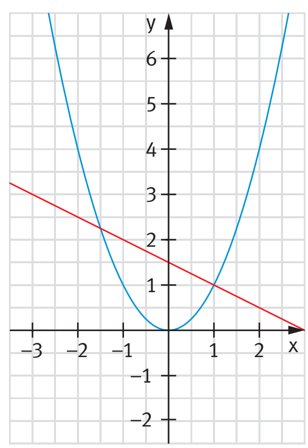


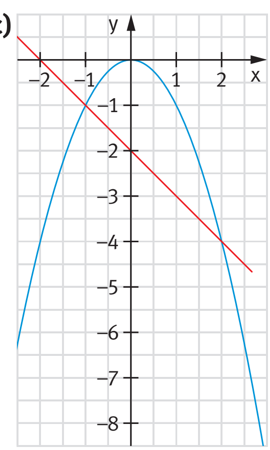
Löse die quadratischen Gleichungen grafisch mit einem dynamischen Geometrieprogramm.

a) $x^2 = 2x + 3$ **b)** $x^2 - 6x + 5 = 0$ **c)** $4x^2 + 36x + 77 = 0$
d) $x^2 - x = 0{,}75$ **e)** $x \cdot (x - 1) = -2$ **f)** $x^2 + 2x = 0$

7 Gib eine Gleichung an, die hier grafisch gelöst wurde. Löse sie rechnerisch und überprüfe.

a)


b)


c)


8 Bestimme die Belegung des Koeffizienten a so, dass die Gleichung keine, eine oder zwei Lösung(en) hat.

a) $x^2 - 4x + a = 0$ **b)** $x^2 + ax + 12 = 0$ **c)** $(x - a)^2 = 0$
d) $(x + a)^2 = 0$ **e)** $x^2 + 7x + a = 0$ **f)** $x^2 - ax + 3 = 0$

9 Die Gleichung $x^2 + 8x = a$ wünscht sich …

a) zwei Lösungen.
b) –2 und eine weitere Zahl als Lösung.
c) zwei positive Lösungen.
d) zwei negative Lösungen.
e) nur eine Lösung.
f) eine positive und eine negative Lösung.

Finde für jeden Wunsch einen passenden Wert für a.

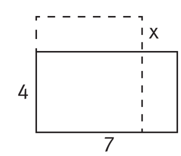
10 Bestimme die Zahl.

a) Subtrahiert man vom Quadrat einer natürlichen Zahl das Dreifache der Zahl, so erhält man 130.
b) Die Differenz aus einer Zahl und ihrem Kehrwert ist 2,1.
c) Man erhält die fünffache Differenz einer Zahl und 3, wenn man die Zahl mit der Summe der Zahl und 13 multipliziert.

11 Ein rechteckiges Grundstück hat eine Fläche von 476 m^2. Die Länge des Grundstücks ist um 11 m größer als die Breite. Berechne den Umfang des Grundstücks.

12 a) Die Seiten eines Rechtecks sind 4 cm und 7 cm lang. Eine Seite wird um x cm verkürzt, die andere um x cm verlängert. Bestimme x so, dass das neue Rechteck den Flächeninhalt 21,25 cm^2 hat.
b) Die Seiten eines Quadrats der Seitenlänge 12 cm werden um x cm verkürzt bzw. 2x cm verlängert. Prüfe, ob ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 165 cm^2 (160 cm^2) entstehen kann.

Skizze zu 12:



Geschichte

François Viète

François Viète (1540–1603) war ein begeisterter französischer Hobbymathematiker, der bis heute weltberühmt ist.
Unter anderem entdeckte er den Zusammenhang zwischen den Nullstellen einer quadratischen Funktion und der Normalform der zugehörigen Funktionsgleichung. Dieser Zusammenhang steckt im „Satz von Vieta“, der lateinischen Form seines Nachnamens.

- Recherchiere über das Leben von François Viète.
- Nenne weitere bedeutende Erkenntnisse des Mathematikers François Viète.

Satz von Vieta

Besitzt die quadratische Funktion $y = x^2 + px + q$ die Nullstellen x_1 und x_2,
so gilt: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$

Weiterhin gilt: $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Mithilfe dieses Satzes kannst du Nullstellen kontrollieren oder auch Nullstellen geschickt erraten.

Beispiel:

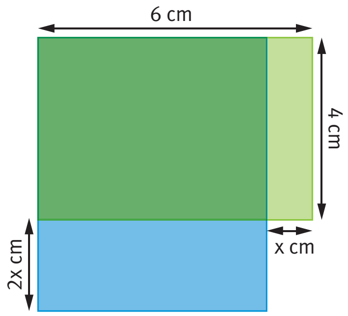
Funktionsgleichung: $y = x^2 - x - 72$
Für $p = -1$ und $q = -72$ lassen sich mit der Lösungsformel die Nullstellen $x_1 = -8$ und $x_2 = 9$ bestimmen.
Probe mit dem Satz von Vieta:

$x_1 + x_2 = -p \qquad -8 + 9 = 1 \qquad \Longrightarrow p = -1$
$x_1 \cdot x_2 = q \qquad (-8) \cdot 9 = -72 \qquad \Longrightarrow q = -72$

*Man spricht von einer **funktionalen Abhängigkeit**, wenn zwischen zwei Größen ein funktionaler Zusammenhang besteht.*

Berücksichtige auch die Intervallgrenzen.

Bei einem Rechteck mit den Seitenlängen 6 cm und 4 cm wird die längere Seite um x cm verkürzt und gleichzeitig die andere Seite um 2x cm verlängert, wobei $x \in [0{,}5; 5{,}5]_{\mathbb{R}}$.



- Gib einen Term an, der den Flächeninhalt A der entstehenden Rechtecke in Abhängigkeit von x beschreibt.
- Zeichne den zu diesem Term gehörenden Graphen in ein Koordinatensystem und ermittle anhand der Zeichnung, für welche Belegungen von x der Flächeninhalt jeweils einen Extremwert annimmt.
- Bestätige die betreffenden Belegungen von x rechnerisch und gib den zugehörigen Flächeninhalt A_{min} bzw. A_{max} an.

Merkwissen

Viele Sachverhalte in Natur und Technik können mithilfe von quadratischen Funktionen beschrieben werden.

Dabei unterscheiden wir zwei Arten von Problemstellungen:
- Aufgaben bei denen der **Extremwert (Scheitelpunkt)** und
- Aufgaben bei denen die **Lösung der quadratischen Gleichung (Nullstellen)** gesucht ist.

Häufig muss zudem erst eine **Funktionsgleichung** aus einer Realsituation ermittelt werden.

Vorgehensweise bei der Lösung von anwendungsbezogenen Aufgaben

1. Skizze mit Bezeichnung der Variablen anfertigen.
2. Zusammenhang zwischen der Größe, die berechnet werden soll, und den Variablen in Form einer Gleichung aufstellen (Zielfunktion).
3. Beziehung zwischen den Variablen in Form einer Gleichung aufstellen (Nebenbedingungen).
4. Die Nebenbedingungen nach einer Variablen umstellen und in die Zielfunktion einsetzen, so dass diese nur noch von einer Variablen abhängig ist.
5. Lösung mithilfe des Scheitelpunktes oder der Lösungsformel berechnen und auf den Sachverhalt übertragen und ggf. beurteilen.

Beispiele

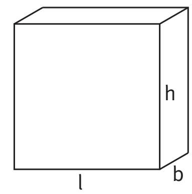
I Für einen Kunden soll eine neue Produktverpackung entwickelt werden, die den folgenden Anforderungen genügt:

- Die Verpackung ist quaderförmig und nach oben hin offen.
- Die Ausschnitte an den vier Ecken betragen jeweils 4 x 4 cm.
- Der Umfang der fertigen Verpackung beträgt 84 cm.
- Das Volumen soll möglichst groß sein.

Bestimme die Abmessung dieser Verpackung, wenn diese ein maximales Volumen besitzt.

Lösung:

1 und 2 Skizze und Zielfunktion: $V = l \cdot b \cdot h$



3 Nebenbedingung:

$u = 2 \cdot (l + b)$
$84 = 2 \cdot (l + b) \quad | : 2$
$42 = l + b \quad | - l$
$b = 42 - l$

4 Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen: $V = l \cdot (42 - l) \cdot 4 = -4\,l^2 + 168\,l$

Scheitelpunkt
$S\left(\frac{-b}{2a} \,\middle|\, c - \frac{b^2}{4a}\right)$

5 Lösung mithilfe des Scheitelpunktes berechnen:

$a = -4;\ b = 168;\ c = 0$
$S\left(\frac{-168}{2 \cdot (-4)} \,\middle|\, 0 - \frac{(168)^2}{4 \cdot (-4)}\right) \Longrightarrow S\,(21\,|\,1764)$

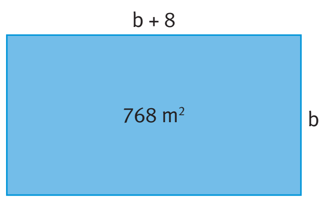
Abmessungen:

Länge: $l = 21$ cm
Breite: $b = 42 - 21 = 21$ cm
Max. Volumen: $V = 21 \cdot 21 \cdot 4 = 1764\ \text{cm}^2$

II Das rechteckige Baugrundstück von Familie Merkl ist 768 m² groß. Die Länge des Grundstücks ist um 8 m größer als die Breite. Berechne die Abmessungen des Baugrundstücks.

Lösung:

1 und 2 Skizze und Zielfunktion:



$A = l \cdot b$

3 Nebenbedingung: $l = b + 8$

4 Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$768 = (b + 8) \cdot b$
$0 = b^2 + 8b - 768$

5 Lösung mithilfe der Lösungsformel berechnen:

Lösungsformel
$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a = 1;\ b = 8;\ c = -768$
$b_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-768)}}{2 \cdot 1}$
$b_1 = \frac{-8 + 56}{2} = 24$ cm
$b_2 = -\frac{8 - 56}{2} = -32$ cm (nicht sinnvoll)

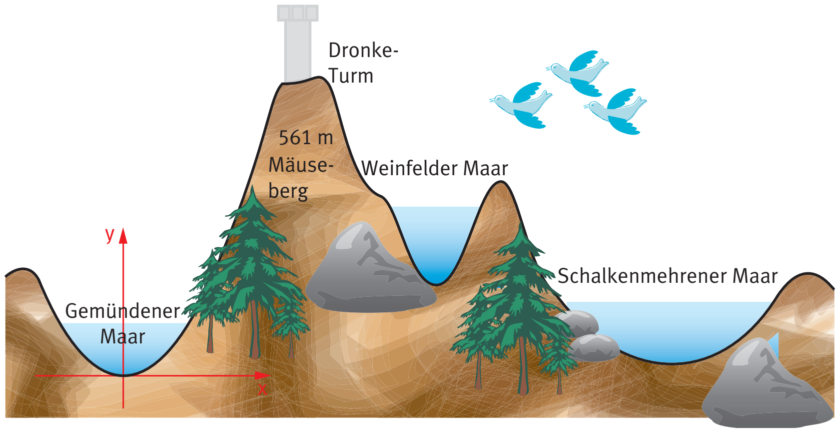
Abmessungen: Breite: $b = 24$ m Länge: $l = 32$ m

Verständnis

- Warum ist es sinnvoll beim Aufstellen der Funktionsgleichung einer Parabel den Ursprung des Koordinatensystems in den Scheitelpunkt der Parabel zu legen?

Aufgaben

1 In der Eifel gibt es in den Kratern erloschener Vulkane annähernd kreisförmige Seen, die man Maare nennt.



a) Die Querschnitte der Maare können mit Funktionsgleichungen der Form $y = ax^2$ beschrieben werden. Für welches Maar ist der Faktor a am kleinsten? Entscheiden Sie anhand der Skizze.

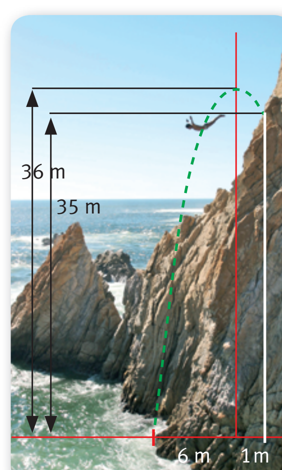
b) Der Querschnitt des Gemündener Maars wird annähernd durch die Funktionsgleichung $y = 0{,}0016x^2$ beschrieben. Die maximale Tiefe dieses Sees beträgt 38 m. Ermitteln Sie den Durchmesser der Wasserfläche.

c) Berechnen Sie die Wasserfläche des annähernd kreisförmigen Sees in Hektar.

2 Die Bewässerungsanlage auf Sportplätzen schützt die empfindlichen Rasenflächen im Sommer vor dem Austrocknen. Das Wasser, das aus einer Vielzahl von Düsen spritzt, beschreibt einen annähernd parabelförmigen Bogen mit der Funktionsgleichung $y = -0{,}05^2 + 0{,}5x$.
Welche praktische Bedeutung haben die Variablen x und y in diesem Beispiel?
Erstelle eine Wertetabelle für $x \in [0; 11]$ und $\Delta x = 1$ und zeichne den Funktionsgraphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
Bestimme graphisch und rechnerisch die maximale Höhe, die der Wasserstrahl erreicht.
Welchen Abstand sollten die Düsen haben, damit der gesamte Rasen bewässert wird?

Unabhängig von der Form und Bewegung des Körpers betrachtet man bei Flugbahnen nur den Schwerpunkt des Körpers (hier z. B. die Badehose).

3 Die Klippenspringer von Acapulco sind weltberühmt. Sie springen von einem 35 m hohen Felsen in den Pazifik. Durch Überdecken mit einem Koordinatensystem kann die Flugbahn dieser Springer als Parabel modelliert werden.

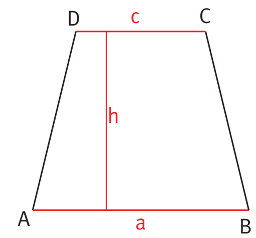


a) Der Funktionswert des Scheitelpunkts entspricht der maximalen Höhe von 36 m, obwohl der Fels nur 35 m hoch ist. Begründe.

b) Ermittle die Funktionsgleichung dieser Flugparabel.

c) Ein anderer Springer springt von einem 3 m hohen Sprungbrett (10 m hohen Sprungturm). Gehe von einer identischen Flugkurve aus und bestimme so erneut die Funktionsgleichung der Flugparabel. In welcher horizontalen Entfernung vom Absprungpunkt tauchen die Springer ins Wasser ein?

4 Die Grundseite eines Trapezes misst 21 cm und der Flächeninhalt beträgt 221 cm^2. Die zur Grundseite parallele Seite hat die gleiche Länge wie die Höhe. Berechne die Länge der parallelen Seite und die Höhe.



$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$

5 Ein 2,5 m hoher Quader hat eine Oberfläche von 85 m^2 und ein Volumen von 52,5 m^3. Berechne Länge und Breite dieses Quaders.

6 Eine Kleinstadt plant ein neues Freibad. In der Vergangenheit kamen an einem gewöhnlichen Sommertag bei einem Eintrittspreis von 2 € durchschnittlich 1500 Badegäste. Die Preise für das neue Freibad müssen jedoch erhöht werden. Man schätzt, dass bei einer Erhöhung des Eintrittspreises um 0,50 € die Zahl der Badegäste um durchschnittlich 200 abnehmen wird, bei einer Erhöhung um 1 € um 400, bei einer Erhöhung um 1,50 € um 600 usw.

a) Erstelle eine Wertetabelle, die der Preiserhöhung die Einnahmen gegenüberstellt. Was stellst du fest?

b) Zeichne einen Graphen, der den funktionalen Zusammenhang zwischen der Preiserhöhung und den Einnahmen beschreibt.

c) Welchen Eintrittspreis empfiehlst du den Betreibern des Freibades. Begründe.

7 Ein Weinhändler verkauft im Monat 1000 Flaschen Wein zu einem Preis von je 6 Euro. Testverkäufe haben ergeben, dass eine Preissenkung von 0,10 Euro pro Flasche zu einer Absatzsteigerung von 20 Flaschen führen würde. Bei welchem Verkaufspreis pro Flasche wäre der Umsatz des Weinhändlers maximal?

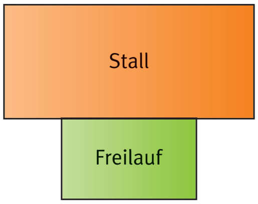
8 Bauer Ösil will mit einem 78 m langen Stück Zaun einen rechteckigen Hühnerfreilauf so bauen, dass die Hühner eine möglichst große Fläche zur Verfügung haben.

a) Wie lange sollte er die Seitenlängen des Freilaufs wählen?

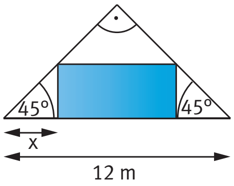
b) Nun überlegt er, das Gehege an die Seite seines Stalles zu bauen, dass er den Zaun nur für 3 Seiten benötigt. Bestimme nun den maximalen Flächeninhalt.

c) Welche Variante empfiehlst du Herrn Ösil? Begründe.

Variante b:



9 In einem Dachstudio soll an der 12 m breiten Giebelwand ein bodentiefes, rechteckiges Kunstwerk so installiert werden, dass zwei Ecken mit der Bodenkante zusammenfallen und die beiden anderen Ecken mit den Dachschrägen.
Um möglichst große Gestaltungsfreiheit zu haben, möchte der Künstler für sein Kunstwerk den größtmöglichen Flächeninhalt haben.



a) Bestimme den Flächeninhalt des Kunstwerks in Abhängigkeit von x.

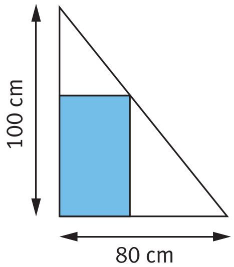
b) Begründe, dass für x = 0 und x = 6 der Termwert für den Flächeninhalt null ist.

c) Berechne x für den größten Flächeninhalt und gib diesen an.

d) Finde mit einer Wertetabelle den x-Wert, für den das Kunstwerk quadratisch ist.

e) Berechne, um wie viel Prozent die quadratische Fläche kleiner ist als die größte rechteckige Fläche.

10 In einer Schreinerei fallen dreieckige, rechtwinklige Holzabschnitte an. Aus den Reststücken sollen Rechtecke mit einer größtmöglichen Fläche herausgeschnitten werden. Welche Abmessungen besitzen diese Rechtecke?

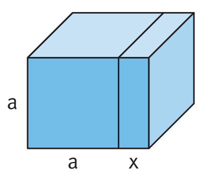


1 Hier stimmt doch was nicht. Finde den Fehler und verbessere die Rechnung.

a) $2x - (3x + 4) = -x + 4$ **b)** $3 \cdot (4a + 7) = 12a + 7$
c) $b + (2y + 4z) = 2by + 4bz$ **d)** $(8g - 14r) : 2 = 8g - 7r$
e) $6y - 3yz = 3y \cdot (2 - yz)$ **f)** $10x \cdot (xz + 2yz) = 10xz + 20xz$

2 Vereinfache die Terme.
a) $6 \cdot (3a + 2b) + 7 \cdot (4b - 7a) - 13b$
b) $\frac{1}{2}ab + 3b \cdot \left(\frac{1}{2}a - 7\right) - \frac{2}{3}b \cdot \left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}\right)$
c) $2 \cdot [6x \cdot (3y - 2x) - (xy + x) \cdot 0{,}5x] \cdot 2x$
d) $2p + 0{,}2q \cdot (3{,}5q - 0{,}3) - [-0{,}48q - (0{,}5r - 3{,}6) \cdot 2r] - [-5p \cdot (0{,}2p - 0{,}3)]$

3 Multipliziere aus und vereinfache, wenn möglich.
a) $(3 + 2x) \cdot (4y - 1)$ **b)** $(x - 4)^2 - (x + 3)^2$
c) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (x - 2{,}5)^2$ **d)** $(3x - 7)^2 + (4x + 3)^2 - (5x - 6)^2$



4 Bei einem Würfel mit der Kantenlänge a cm wird eine Kante um x cm verlängert. Gib einen Term für die Größe der Oberfläche und das Volumen des so entstandenen Quaders an.

5 Faktorisiere so weit wie möglich.
a) $12xy + 8x$ **b)** $14xy - 21xyz$ **c)** $42a^2b - 28ab^2$
d) $75rs^2t - 50r^2st$ **e)** $48x + 24xy - 12x^2$ **f)** $39ef + 26f - 13e$

$11^2 = (10 + 1)^2$
$= 100 + 20 + 1$

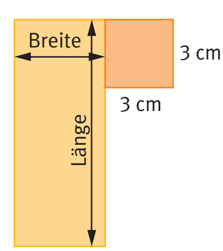
$12^2 = (10 + 2)^2$
$= 100 + 40 + 4$

$13^2 = (10 + 3)^2$
$= 100 + 60 + 9$

$14^2 = \ldots$

6 **a)** Betrachte die Quadratzahlen nebenan.
① Setze die Reihe um mindestens drei Schritte fort. Welche Gesetzmäßigkeiten erkennst du?
② Wie lautet allgemein ein Term $(10 + n)^2$, wenn man für n natürliche Zahlen einsetzt? Wie sieht es bei $(10 - n)^2$ aus?
b) Beschreibe, wie man Quadratzahlen der Form $(20 + n)^2$ und $(30 + n)^2$ berechnen kann. Überprüfe zunächst an Beispielen.
c) Wie kann man allgemein einen Term $(a + n)^2$ berechnen, wenn a ein Vielfaches von 10 ist? Beschreibe in Worten. Erkläre den Zusammenhang mit einer Verknüpfungstabelle.
d) Berechne ohne Taschenrechner, indem du die bisherigen Zusammenhänge nutzt.
18^2 24^2 26^2 35^2 41^2 44^2 57^2 61^2 73^2

7 Gegeben sind Rechtecke mit der Länge x cm und der Breite (x – 6) cm sowie ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm.
a) Zeichne das Rechteck für x = 10 cm in dein Heft und füge das Quadrat an.
b) Zeichne ein Quadrat in dein Heft, das denselben Flächeninhalt hat wie die beiden Figuren in a) zusammen.
c) Bestimme in Abhängigkeit von x die Seitenlänge eines Quadrats, dessen Flächeninhalt so groß ist wie der Flächeninhalt der gegebenen Figuren.



8 Eine Normalparabel wird um eine Einheit nach unten verschoben. Entscheide, ob die Punkte P1 bis P4 auf der Parabel liegen.
$P_1\,(1\,|\,0)$; $P_2\,(3\,|-2)$; $P_3\,(-2\,|\,3)$; $P_4\left(\frac{1}{2}\,\middle|-\frac{1}{4}\right)$

9 Gegeben sind die Funktionsgleichungen:

1 $y = \frac{1}{3}x^2$ 2 $y = -2x^2$ 3 $y = -x^2 + 5$

4 $y = x^2 - 2{,}5$ 5 $y = (x - 3)^2$ 6 $y = -(x + 1{,}5)^2$

a) Zeichne die Graphen dieser Funktionen.

b) Worin unterscheiden sich die Graphen dieser Funktionen von dem der Normalparabel?

10 Dargestellt sind die Graphen verschiedener quadratischer Funktionen.

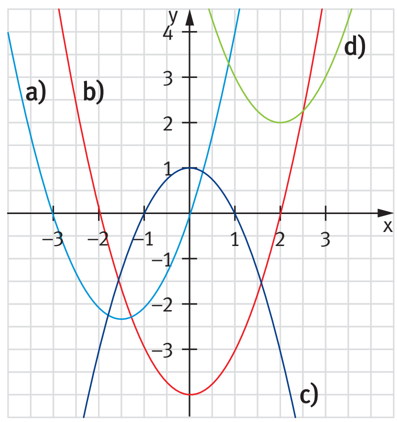
a) Gib eine Funktionsgleichung in mindestens zwei verschiedenen Formen an.

b) Bestimme die Eigenschaften der Funktionen.

c) Welche Eigenschaften quadratischer Funktionen sind ...

1 ... vom x-Wert des Scheitelpunktes abhängig?

2 ... vom y-Wert des Scheitelpunktes abhängig?



11 Ermittle, welche Gleichungen jeweils dieselbe Funktion beschreiben.

1 $y = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1{,}5$

2 $y = \sqrt{2}\cdot(x - 4\sqrt{2})^2 - 33\sqrt{2}$

3 $y = -\frac{3}{4}x^2 + x - 4$

4 $y = -\frac{3}{4}\cdot\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - 3\frac{2}{3}$

5 $y = \sqrt{2}x^2 - \sqrt{8}x + 5$

6 $y = -\frac{3}{4}\cdot\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - 2\frac{5}{6}$

7 $y = \sqrt{2}x^2 + 16x - \sqrt{2}$

8 $y = \sqrt{2}\cdot(x - 1)^2 - \sqrt{2} + 5$

12 Ermittle die Gleichung der quadratischen Funktion f in der allgemeinen Form.

a) $A\,(5\,|-1)$, $B\,(10\,|\,4) \in f$: $y = 0{,}2x^2 - bx + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$

b) Der Graph der Funktion f stellt eine an der x-Achse gespiegelte und verschobene Normalparabel mit dem Scheitel $S\,(-3\,|\,4)$ dar.

c) $A\,(3\,|-1)$, $B\,(2\,|-7) \in f$: $y = ax^2 + bx + c$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $b, c \in \mathbb{R}$.
Die Gleichung der Symmetrieachse des Graphen zu f lautet: $x = 4$.

13 Bestimme zunächst die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung mithilfe der Diskriminate D. Ermittle anschließend die Lösungsmenge.

a) $x^2 + x + 1 = 0$ **b)** $x^2 - 4x + 8 = 0$ **c)** $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} = 0$

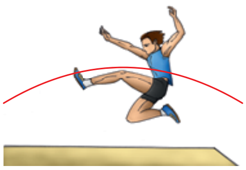
d) $2x^2 + x + 1 = 0$ **e)** $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0$ **f)** $2x^2 - 28x + 98 = 0$

14 Löse die Gleichung graphisch.

a) $x^2 - x - 2 = 0$ **b)** $-x^2 + 0{,}5x + 3 = 0$

c) $0{,}5^2 - 0{,}25x - 0{,}75 = 0$ **d)** $-2x^2 + 6x - 4$

15 Die Carrick-a-Rede ist eine Insel in Nordirland, die man nur zu Fuß über eine schmale Hängebrücke erreichen kann. Sie überspannt eine Meerenge von 20 m, der tiefste Punkt der Brücke liegt 30 m über der Wasseroberfläche. Ermittle eine Gleichung für die parabelförmige Hängebrücke, wenn sie 0,4 m durchhängt.



16 Bei der Weltmeisterschaft 1991 in Tokio übertraf Mike Powell (USA) im Weitsprung den bis dato aktuellen Weltrekord von 8,90 m um 5 cm. Analysen ergaben, dass sich die Flugbahn seines Körperschwerpunkts bei diesem Sprung näherungsweise durch die Funktion f: $y = -0{,}05x^2 + 0{,}3x + 1{,}35$ beschreiben lässt, wobei x die horizontale Entfernung vom Absprungpunkt und y die Höhe des Körperschwerpunkts über dem Boden darstellt (beides in m gemessen).

a) 

Beim Absprung war der Körperschwerpunkt in einer Höhe von 1,35 m über dem Boden und bei der Landung nur wenige Zentimeter über dem Boden.

Wie könnte Carl zu seiner Aussage kommen? Erläutere.

b) Ermittle mithilfe des Graphen, bei welcher horizontalen Entfernung vom Absprungpunkt sich der Körperschwerpunkt in einer Höhe von 1,00 m über dem Boden befand.

c) Wäre beim Weltrekordsprung ein Smart Fortwo (Länge 2,50 m; Breite 1,51 m; Höhe 1,52 m) übersprungen worden? Erläutere deine Überlegungen.

Es gibt mehrere Möglichkeiten.

17 Auf einer Wiese soll ein rechteckiger Weideplatz eingezäunt werden. Es stehen 24 m Zaun zur Verfügung. Die umzäunte Fläche soll möglichst groß sein.

a) Überprüfe, ob die gegebenen Rechtecke mit den Seitenlängen a und b diese Bedingung erfüllen. Gib, falls zutreffend, den zugehörigen Flächeninhalt an.

1 a = 2 m; b = 10 m	2 a = 4 m; b = 8 m
3 a = 6 m; b = 8 m	4 a = 7 m; b = 5 m

b) Ermittle den Flächeninhalt in Abhängigkeit von der Länge des Rechtecks.

c) Stelle die Funktion grafisch dar und zeige damit die Angaben von a).

d) Bestimme die Seitenlängen des Weideplatzes anhand des folgenden Vorgehens. Gib den zugehörigen Flächeninhalt an.

18 Ein rechteckiges Spielgelände ist 80 m lang und 60 m breit. Ein 3500 m^2 großer Bolzplatz soll so abgesteckt werden, dass ringsum ein gleich breiter Rand für Zuschauer bleibt. Berechne die Breite des Randes.

19 Verlängert man die Seitenlängen eines Quadrats um 4 cm, vergrößert sich die Fläche auf das Neunfache. Gib die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrats an.

20 Wolfgang tankt immer für 50,00 €. Nach einer Benzinpreiserhöhung um fünf Cent erhält er etwa 1 Liter weniger Benzin.
Wie teuer war ein Liter Benzin vor der Preiserhöhung? Runde geeignet.

Stunt Scooter

Situationsbeschreibung

Deine ältere Schwester ist ein begeisterter Freestyle Shooter. Nach der Schule hat sie ihre Passion zum Beruf gemacht und vertreibt nun über das Internet Stunt Scooter. Nach kurzer Zeit stellt sie fest, dass der erzielte monatliche Gewinn (in Tausend €) eine quadratische Funktion der verkauften Menge (in Tausend Stück) ist, die mithilfe der Funktion $g(x) = -3{,}5\,x^2 + 18x - 13{,}5$ beschrieben werden kann. Sie bitte dich, ihr bei der Analyse der Verkaufszahlen zu helfen, da du als „noch-Schüler" viel tiefer in der Materie steckst als sie.

Wie kannst du herausfinden welche Verkaufszahlen deine Schwester anstreben sollte? Bei welcher Stückzahl macht sie den meisten Gewinn? Wann macht sie Verlust? Die folgenden Teilschritte helfen dir bei deiner Analyse.

Handlungsaufträge

1. Informiere dich im Internet über das Produkt Stunt Scooter (Marken, Preise, technische Details), die Szene und die aktuellen Freestyle Events in Deutschland.
2. Zeichne den Graphen der Gewinnfunktion für $x \in [0; 5]$ und $\Delta x = 1$ und markiere die Nutzenschwelle, Nutzengrenze und den maximalen Gewinn.
3. Welche Bedeutung haben die Begriffe Nutzenschwelle und Nutzengrenze in diesem Beispiel? Erkläre mit eigenen Worten.
4. Berechne in welchem Intervall für x der Gewinn positiv ausfällt.
5. Wie groß ist der Verlust, wenn in einem Monat keine Stunt Shooter verkauft werden?
6. Wie viele Scooter sollte deine Schwester jeden Monat verkaufen? Begründe.
7. Wie groß ist der Jahresgewinn, wenn sie im zweiten Geschäftsjahr monatlich durchschnittlich 1750 Scooter verkauft?
8. Diskutiere mit deinen Mitschülern warum der Gewinn ab einer gewissen Stückzahl wieder abnimmt. Was könnte hierzu führen?

Lernsituation

Überprüfe deine Fähigkeiten und Kenntnisse. Bearbeite dazu die folgenden Aufgaben und bewerte anschließend deine Lösungen mit einem Smiley.

☺	😐	☹
Das kann ich!	Das kann ich fast!	Das kann ich noch nicht!

Hinweise zum Nacharbeiten findest du auf der folgenden Seite. Die Lösungen stehen im Anhang.

Aufgaben zur Einzelarbeit

1 Ergänze so, dass eine wahre Aussage entsteht.

a) $4 \cdot (6x + 7y) = 24x + \square \cdot y$

b) $\frac{1}{3}xy \cdot (\square xy + 15y) = -2x^2y^2 + \square xy^2$

c) $2{,}2a \cdot (\square a - 3{,}1b) = 8{,}8a^2 - 6{,}82ab$

d) $\square pq^2 \cdot (3{,}5p - 1{,}75q) = \square p^2q^2 - 3{,}5pq^3$

e) $\square a \cdot (2b - 4a) = 6ab - 12a^2$

2 Erstelle eine Wertetabelle für $x \in [-5; +5]$ und $\Delta x = 1$. Zeichne den Graphen und bestimme den Defintions- und Wertebereich.

a) f: $y = 1{,}5x^2$ **b)** f: $y = 0{,}25\,(x + 3)^2 + 2$

c) f: $y = -x^2 + x$ **d)** f: $y = -3x^2 - 4x - 1$

e) f: $y = -\frac{2}{3}\,(x - 2)^2$ **f)** f: $y = (x + 1{,}6)(x - 1{,}6)$

3 Prüfe rechnerisch, ob die angegebenen Punkte auf der Parabel liegen.

a) p_1: $y = -x^2$ P (1,3 | 1,69)

b) p_2: $y = 2x^2 + 5x$ P (–1 | 1)

c) p_3: $y = -0{,}5x^2 - 2x + 4$ P (1 | 3)

d) p_4: $y = 1{,}5(x - 2)^2 + 1$ P(3 | 2,5)

4 Von einer quadratischen Funktion f ist bekannt:

- Eine der Nullstellen ist $x = 5$.
- Der Graph von f schneidet die y-Achse bei $y = 1$.
- Die Symmetrieachse von f ist s: $x = 2$.

a) Ermittle die Gleichung der Funktion f.

b) Leticia fragt sich:

Was meinst du? Begründe.

5 Stelle die Gleichung der quadratischen Funktion f in der allgemeinen Form auf.

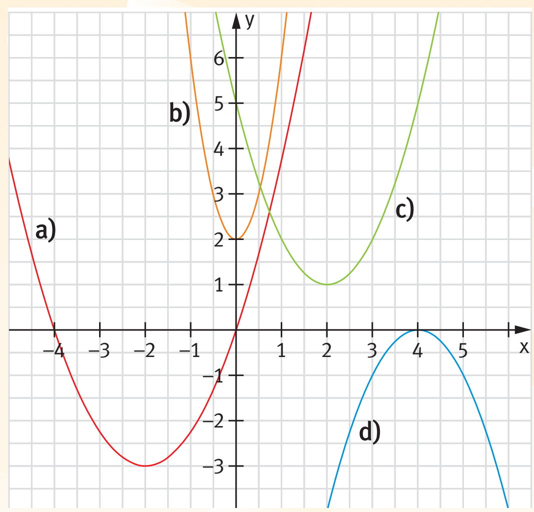
a) Der Graph von f ist eine an der x-Achse gespiegelte und verschobene Normalparabel mit der Symmetrieachse s: $x = -2$ und P (2 | –4) $\in$ f.

b) Die Gleichung von f beschreibt eine verschobene Normalparabel, die durch die Punkte A (–5 | 3) und B (2 | 10) verläuft.

c) P (–4,5 | –134), Q (8,5 | –420) $\in$ f: $y = ax^2 + bx - 3{,}5$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$

d) Der Graph von f: $y = -2{,}5 \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ mit $x_S, y_S \in \mathbb{R}$ schneidet die x- und die y-Achse jeweils im Wert 5.

6 Gib die Funktionsgleichungen der abgebildeten Parabeln an.



7 Überführe die quadratische Funktion in die allgemeine Form.

a) $y = 0{,}5 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$

b) $y = 2 \cdot (x - 3{,}5)^2 + 2$

c) $y = -2{,}5 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

d) $y = -(x + 1)^2 + 4$

8 Forme die quadratische Funktion in die Scheitelpunktsform um. Ermittle mindestens drei Eigenschaften der Funktion, ohne den Graphen zu zeichnen.

a) $y = x^2 - 2x - 3$

b) $y = x^2 + 4x + 3$

c) $y = x^2 - 4x$

d) $y = x^2 + 6x + 6{,}75$

9 Bestimme zuerst die Anzahl der Lösung mithilfe der Diskriminante. Löse dann rechnerisch.

a) $(x + 12) \cdot (x - 23) = 0$ **b)** $2x^2 - 8x = 330$

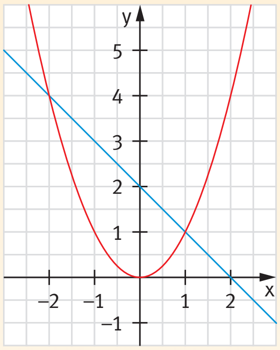
c) $0{,}5x^2 = 2x - 38{,}5$ **d)** $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{10}x = \frac{9}{25}$

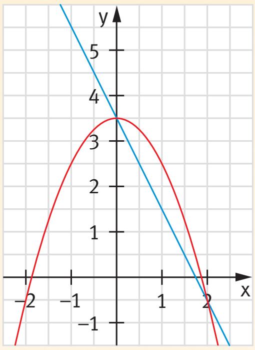
10 Löse die Gleichungen grafisch.

a) $x^2 = 3x - 2$ **b)** $x^2 - 5x = -4$

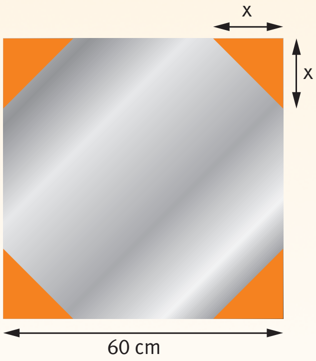
c) $2x^2 + x = 3$ **d)** $x^2 + 2x - 3 = 0$

11 Gib eine Gleichung an, die hier grafisch gelöst wurde. Löse sie rechnerisch und überprüfe.





12 Von einer quadratischen Metallplatte werden an allen vier Ecken kongruente gleichschenklige Dreiecke abgeschnitten. Berechne die Länge x, wenn sich der Flächeninhalt der Platte um 12,5 % verringern soll.



13 Sympathische und humorvolle, natürliche Zahl gesucht!

a) Multipliziere dich mit dir selbst und vermehre dich um dein Doppeltes, dann erhältst du 323.

b) Die Summe aus deiner Hälfte und deinem Quadrat ergibt 742,5.

c) Die Summe aus deinem Quadrat und dem zehnten Teil von dir ergibt 101.

d) Die Differenz aus deinem Quadrat und dir ergibt dich.

ich!

Aufgaben für Lernpartner

Arbeitsschritte

1 Bearbeite die folgenden Aufgaben alleine.
2 Suche dir einen Partner und erkläre ihm deine Lösungen. Höre aufmerksam und gewissenhaft zu, wenn dein Partner dir seine Lösungen erklärt.
3 Korrigiere gegebenenfalls deine Antworten und benutze dazu eine andere Farbe.

Sind folgende Behauptungen **richtig** oder **falsch**? Begründe schriftlich.

14 Eine gestauchte oder gestreckte Normalparabel hat stets eine Symmetrieachse.

15 Sind die beiden Nullstellen einer Parabel bekannt, lässt sich die x-Koordinate des Scheitels angeben.

16 Kennt man die Koordinaten des Scheitels einer Parabel, so kann man die Gleichung der Parabel rechnerisch ermitteln.

17 Jede quadratische Gleichung lässt sich in die Normalform bringen.

18 Nicht alle quadratischen Gleichungen können grafisch gelöst werden.

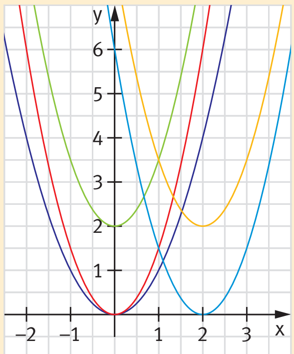
19 Ist die Diskriminante negativ, schneidet der Graph der quadratischen Funktion die x-Achse nicht.

20 Die Form einer Parabel wird einzig durch den Parameter a beeinflusst.

21 Quadratische Gleichungen der Form $y = ax^2 + bx$ haben immer zwei Lösungen.

Aufgabe	Ich kann …	Hilfe
1	Terme umformen und vereinfachen.	S. 34
2	Parabeln zeichnen.	S. 44
3	überprüfen, ob ein Punkt auf dem Graphen liegt.	S. 45
4, 5, 6, 16	Funktionsgleichungen quadratischer Funktionen bestimmen.	S. 49
7, 8, 19	Mit verschiedenen Formen quadratischer Funktionen umgehen.	S. 52
8, 14, 20	Eigenschaften quadratischer Funktionen bestimmen.	S. 56, 57
9, 10, 11, 12, 13, 18, 19	quadratische Gleichungen rechnerisch oder grafisch lösen.	S. 58, 59, S. 62, 63

S. 38



$y = x^2$
S (0|0)
$y = ax^2$
S (0|0)
$y = ax^2 + y_s$
S $(0|y_s)$
$y = a(x - x_s)^2$
S $(x_s|0)$
$y = a(x - x_s)^2 + y_s$
S$(x_s|y_s)$

Die **einfachste quadratische Funktion** hat die Funktionsgleichung **$y = x^2$**. Der **Graph** heißt **Normalparabel**.

Der Punkt S (0|0) heißt Scheitelpunkt.

Der **Koeffizient a** gibt an, ob der Graph der Funktion **gestreckt** **($a > 1$ oder $a < -1$)**, **gestaucht** **($-1 < a < 1$)** oder an der x-Achse **gespiegelt** **($a < 0$)** ist.

Weiterhin kann die Parabel auch entlang der x- und y-Achse verschoben sein.

S. 52

1 $y = x^2 + px + q$ $\quad S\left(-\frac{p}{2}\,\middle|\,q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$

2 $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ $\quad S\,(x_s|y_s)$

3 $y = ax^2 + bx + c$ $\quad S\left(-\frac{b}{2a}\,\middle|\,c - \frac{b^2}{4a}\right)$

4 $y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Darstellung quadratischer Funktionen:

1 Normalform
2 Scheitelpunktsform
3 allgemeine Form
4 Produktform

S. 56

f: $y = -3x^2 - 6x + 9 \iff y = -3 \cdot (x + 1)^2 + 12$
allgemeine Form — Scheitelpunktsform

1 $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$ 2 $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ mit $y \leqq 12$
3 Scheitelpunkt: Hochpunkt S (−1|12)
4 Die Parabel ist gestreckt, gespiegelt ($a = -3$) und um eine Einheit nach links und um 12 Einheiten nach oben verschoben.
5 P_{x1} (−3|0); P_{x2} (1|0); P_y (0|9)
6 steigend für $x \leqq -1$, steigend für $x \geqq -1$
7 Achsensymmetrisch zu $x = -1$

Eine quadratische Funktion f mit $y = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c, x \in \mathbb{R};\ a \neq 0)$ bzw. ihren Graphen kann man anhand folgender Eigenschaften beschreiben:

1 Definitionsbereich	2 Wertebereich
3 Scheitelpunkt	4 Form der Parabel
5 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen	
6 Scheitelpunkt	7 Symmetrie

S. 58
S. 60

$-x^2 + x + 2 = 0$

Rechnerische Lösung:

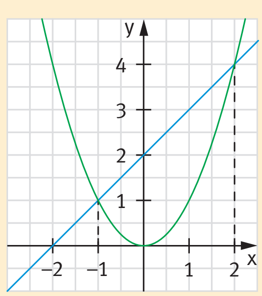
$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} \qquad x_1 = -1 \qquad x_2 = +2$$

Graphische Lösung:

$-x^2 + x + 2 = 0$
$\iff x^2 - x - 2 = 0$
$\iff x^2 = x + 2$

Schnittpunkte ergeben:
$x_1 = -1 \quad x_2 = 2$



Alle quadratischen Gleichungen können **rechnerisch oder graphisch** gelöst werden.
Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ werden rechnerisch mithilfe der **abc-Formel** gelöst.
Den Radikand $b^2 - 4ac$ bezeichnet man als **Diskriminante D**.

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$D > 0$, es gibt **2 Lösungen**
$D = 0$, es gibt **1 Lösung**
$D < 0$, es gibt **keine Lösung**

Quadratische Funktionen lassen sich **graphisch lösen**, indem man zunächst die quadratische Gleichung in die Normalform bringt und anschließend die **Schnittstellen der Normalparabel $y = x^2$ und der Geraden $y = -px - q$** ermittelt.