Fit für die Oberstufe – Lösungen zu den Seiten 6 und 7

1. a) $2x - 54 = 11x;$
$-9x = 54;$
$x = -6 \in G; \quad L = \{-6\}$

b) $2(x - 4) + 18 = 1 - (2x + 4);$
$2x - 8 + 18 = 1 - 2x - 4;$
$2x + 10 = -2x - 3;$
$4x = -13;$
$x = -\frac{13}{4} = -3{,}25 \in G; \quad L = \{-3{,}25\}$

c) $\frac{x + 7}{x^2 + 1} = 0; \quad x + 7 = 0; \quad x = -7 \notin G; \quad L = \{\,\}$

d) $\frac{x + 1}{2^x} = 0; \quad x + 1 = 0; \quad x = -1 \in G; \quad L = \{-1\}$

e) $(3 - x)^2 - (4 + x)^2 = 0;$
$9 - 6x + x^2 - 16 - 8x - x^2 = 0;$
$-14x - 7 = 0; \quad 14x = -7; \quad x = -0{,}5 \in G; \quad L = \{-0{,}5\}$

f) $y^2 + 11y^2 - 12 = 0;$
$12y^2 = 12$
$y^2 = 1; \quad y_1 = 1 \in G; \quad y_2 = -1 \in G; \quad L = \{-1\,;\,1\}$

g) $2y^2 - 6y + 1 = 0;$
$y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 8}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2};$
$y_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{7}) \in G; \quad y_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{7}) \in G;$
$L = \left\{\frac{1}{2}(3 + \sqrt{7}); \quad \frac{1}{2}(3 - \sqrt{7})\right\}$

h) $15(7 - x) - 7(7 - x) = 7 - x;$
$8(7 - x) - (7 - x) = 0;$
$7(7 - x) = 0;$
$x = 7 \in G; \quad L = \{7\}$

i) $x^2 - 5x - 6 = 0;$
$(x - 6)(x + 1) = 0;$
$x_1 = 6 \in G; \quad x_2 = -1 \in G; \quad L = \{-1\,;\,6\}$

j) $y^2 - 6 = 0;$
$y^2 = 6; \quad y_1 = \sqrt{6} \notin G; \quad y_2 = -\sqrt{6} \in G; \quad L = \{-\sqrt{6}\}$

k) $x + \frac{2}{x} = 0; \quad x^2 + 2 = 0; \quad L = \{\,\}$

l) $\frac{x^3 + x^2 + 4x}{2x^2} = 0;$
$x^3 + x^2 + 4x = 0;$
$x(x^2 + x + 4) = 0;$
$x_1 = 0 \notin G;$
$x^2 + x + 4 = 0; \quad D = 1 - 16 = -12 < 0; \quad L = \{\,\}$

m) $y^3 - 3y^2 + 2y = 0;$
$y(y^2 - 3y + 2) = 0;$
$y(y - 2)(y - 1) = 0;$
$y_1 = 0 \notin G;$
$y_2 = 2 \in G;$
$y_3 = 1 \in G; \quad L = \{1\,;\,2\}$

n) $(x^2 - 9)(x^2 - 1) = 0;$
$(x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1) = 0;$
$x_1 = 3 \in G;$
$x_2 = -3 \in G;$
$x_3 = 1 \in G;$
$x_4 = -1 \in G; \quad L = \{-3\,;\,-1\,;\,1\,;\,3\}$

o) $\frac{x^2-3}{x^2-9} = 0$; $x^2 - 3 = 0$; $x^2 = 3$;
$x_1 = \sqrt{3} \in G$; $x_2 = -\sqrt{3} \notin G$; $L = \{\sqrt{3}\}$

p) $\frac{ax^2-5}{x^2} = 0$; $ax^2 - 5 = 0$; $x^2 = \frac{5}{a} > 0$ wegen $a \in \mathbb{R}^+$;
$x_1 = \sqrt{\frac{5}{a}} \in G$; $x_2 = -\sqrt{\frac{5}{a}} \in G$;
$L = \left\{-\sqrt{\frac{5}{a}}\,;\,\sqrt{\frac{5}{a}}\right\}$

q) $(\log_{10}y)^2 = 1$; $\log_{10}y = \pm 1$;
$y_1 = 10 \in G$; $y_2 = \frac{1}{10} \in G$;
$L = \left\{\frac{1}{10}\,;\,10\right\}$

r) $2^x + 4 \cdot 2^{-x} - 5 = 0$;
$2^{2x} + 4 - 5 \cdot 2^x = 0$;
$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$;
$(2^x - 4)(2^x - 1) = 0$;
$2^x - 4 = 0$; $2^x = 4 = 2^2$; $x_1 = 2 \in G$;
$2^x - 1 = 0$; $2^x = 1 = 2^0$; $x_2 = 0 \in G$;
$L = \{0\,;\,2\}$

s) $2\sin x = 1$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $x \in]0\,;\,\pi[$:
$x_1 = \frac{\pi}{6} \in 6$; $x_2 = \frac{5\pi}{6} \in G$;
$L = \left\{\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{5\pi}{6}\right\}$

t) $\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$; $x \in]\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}[$: $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3}$; $x = \frac{2\pi}{3} \in G$;
$L = \frac{2\pi}{3}$

u) $3^{x^2-5} = 81^x$; $3^{x^2-5} = 3^{4x}$;
$x^2 - 5 = 4x$; $x^2 - 4x - 5 = 0$;
$(x-5)(x+1) = 0$;
$x_1 = 5 \in G$; $x^2 = -1 \in G$; $L = \{-1\,;\,5\}$

v) $(x+5)(x^2 - x - 12) = 0$;
$(x+5)(x-4)(x+3) = 0$;
$x_1 = -5 \in G$; $x_2 = 4 \in G$; $x_3 = -3 \in G$;
$L = \{-5\,;\,-3\,;\,4\}$

2. a) I $y = -x + 2$ eingesetzt in
II $4x + 3y = 2$ ergibt
$4x + 3(-x + 2) = 2$;
$4x - 3x + 6 = 2$;
$x = -4$ eingesetzt in I ergibt $y = 4 + 2 = 6$;
$L = \{(-4\,;\,6)\}$

b) I $3x + 5y = 10$
II $3x + 2y = 13$
I – II $3y = -3$; $y = -1$ eingesetzt in I:
$3x - 5 = 10$; $3x = 15$; $x = 5$;

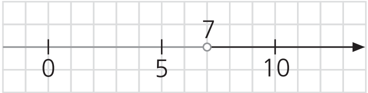
$L = \{(5\,;\,-1)\}$

c) I $2x - y - 5 = 0$
II $x + y - 1 = 0$
I + II $3x - 6 = 0$; $3x = 6$; $x = 2$
eingesetzt in II ergibt
$2 + y - 1 = 0$;
$y = -1$;
$L = \{(2\,;\,-1)\}$

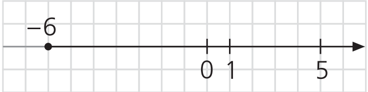
d) I $x + y = 5$
II $2y - 2 = -2x + 8$
II' $2x + 2y = 10$; $|:2$
$x + y = 5$ (identisch mit I)
Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen:

$L = \{(x\,;\,y) \mid y = -x + 5\}$

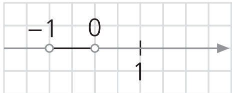
3. a) $2x - 14 > 0$; $2x > 14$; $x > 7$;
$L =]7\,;\,\infty[$



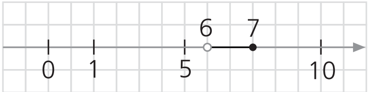
b) $1 - 0{,}5x \leqq 4$; $-0{,}5x \leqq 3$; $x \geqq -6$;
$L = [-6\,;\,\infty[$



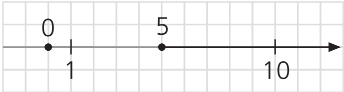
c) $2x(x + 1) < 0$
1. Fall: $2x > 0 \quad \wedge \quad x + 1 < 0$
$x > 0 \quad \wedge \quad x < -1$: nicht möglich
2. Fall: $2x < 0 \quad \wedge \quad x + 1 > 0$
$x < 0 \quad \wedge \quad x > -1$
$-1 < x < 0$;
$L =]-1\,;\,0[$



d) $1 < x - 5 \leqq 2$;
$6 < x \leqq 7$;
$L =]6\,;\,7]$



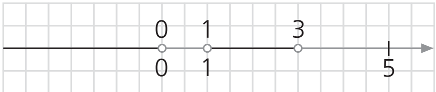
e) $x^2(x - 5) \geqq 0$ Da stets $x^2 \geqq 0$ ist, muss entweder $x = 0$ sein oder $x - 5 \geqq 0$;
$x \geqq 5$;
$L = \{0\} \cup [5\,;\,+\infty[$



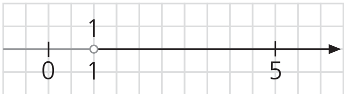
f) $x(x - 1)(x - 3) < 0$
Vorzeichen der Faktoren bei negativem Produktwert:

+	+	–	d. h. (1) $x > 0 \ \wedge\ x > 1 \ \wedge\ x < 3$; $1 < x < 3$
+	–	+	d. h. (2) $x > 0 \ \wedge\ x < 1 \ \wedge\ x > 3$; nicht möglich
–	+	+	d. h. (3) $x < 0 \ \wedge\ x > 1 \ \wedge\ x > 3$; nicht möglich
–	–	–	d. h. (4) $x < 0 \ \wedge\ x < 1 \ \wedge\ x < 3$; $x < 0$

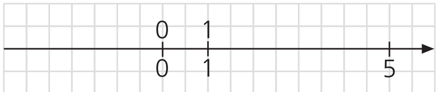
$L = \mathbb{R}^- \cup]1\,;\,3[$



g) $2^x(x - 1) > 0$ Wegen $2^x > 0$ für jeden Wert von $x \in \mathbb{R}$
muss $x - 1 > 0$, also $x > 1$ sein:
$L =]1\,;\,\infty[$



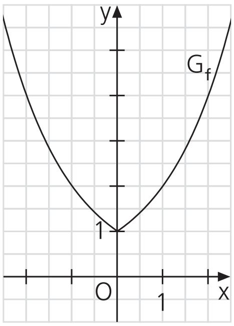
h) $x^2 + \frac{1}{x^2 + 1} > 0$ gilt für jeden Wert von $x \in \mathbb{R}$: $L = \mathbb{R}$.



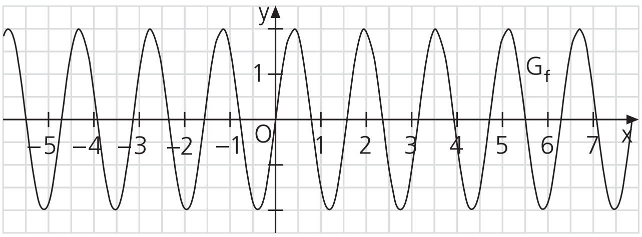
4.

	$D_{f\,max}$	G_f achsensymmetrisch zur y-Achse	G_f punktsymmetrisch zum Ursprung
a)	$\mathbb{R}$	x	–
b)	$\mathbb{R}\setminus\{-1;\,1\}$	–	x
c)	$\mathbb{R}_0^+$	–	–
d)	$\mathbb{R}$	x	–
e)	$\mathbb{R}$	x	–
f)	$\mathbb{R}$	–	x

zu e)



zu f)



5.

	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$
a)	$f(x) \to +\infty$	$f(x) \to -\infty$
b)	$f(x) \to 0+$	$f(x) \to 0+$
c)	$f(x) \to 0+$	$f(x) \to 0-$
d)	$f(x) \to 4-$	$f(x) \to 4-$
e)	$f(x) \to 0$	$f(x) \to 0$
f)	keine Aussage möglich	

6. Allgemein: $y = mx + t$ mit $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ bzw. $\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ $(x_A \neq x_B)$

a) $y = 1{,}5x$

b) $\frac{y + 4}{x - 1} = \frac{1 + 4}{-2 - 1} = -\frac{5}{3}$;

$y + 4 = -\frac{5}{3}(x - 1)$; $\quad y = -\frac{5}{3}x - \frac{7}{3}$; $\quad 5x + 3y + 7 = 0$

c) $y = -x - 1$

d) $y = 4$

e) $x = -3$

f) $\frac{y - 3}{x - 1} = \frac{-3 - 3}{-1 - 1} = \frac{-6}{-2} = 3$; $\quad y - 3 = 3x - 3$; $\quad y = 3x$

7. a) $P_a = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 33{,}5\%$

b) $P_b = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{120}{6^5} \approx 1{,}5\%$

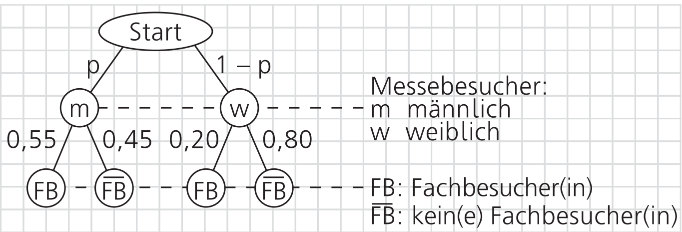
c) $P_c = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64} \approx 1{,}6\%$

d) $P_d = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 66{,}5\ \%$

e) $P_e = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot 6 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3\,125}{7\,776} \approx 40{,}2\ \%$

f) $P_f = \left(\frac{5}{6}\right)^6 + 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6} + 1\right) \approx 73{,}7\%$

8. a)



$0{,}55p + 0{,}20(1 - p) = 0{,}40$;
$0{,}55p + 0{,}20 - 0{,}20p = 0{,}40$;
$0{,}35p = 0{,}20$;
$p = \frac{0{,}20}{0{,}35} = \frac{4}{7}$; Insgesamt $\frac{4}{7} \approx 57{,}1\%$ der Messegäste sind männliche Fachbesucher.

b) $P_{FB}(m) = \frac{\frac{4}{7} \cdot 0{,}55}{0{,}40} = \frac{11}{14} \approx 78{,}6\%$

Die augewählte Person ist mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 79% männlich.

9. (1) **a)** Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, da $\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 5^2}$ cm $= \sqrt{34}$ cm $= \overline{CA}$ ist; somit gilt $x_H = 5$.

$m_{CA} = \frac{5}{3}$; $m_{h_b} = -\frac{3}{5}$;

h_b: $y = -\frac{3}{5}x + t$;

$B \in h_b$: $1 = -\frac{3}{5} \cdot 8 + t$; $t = 5{,}8$;

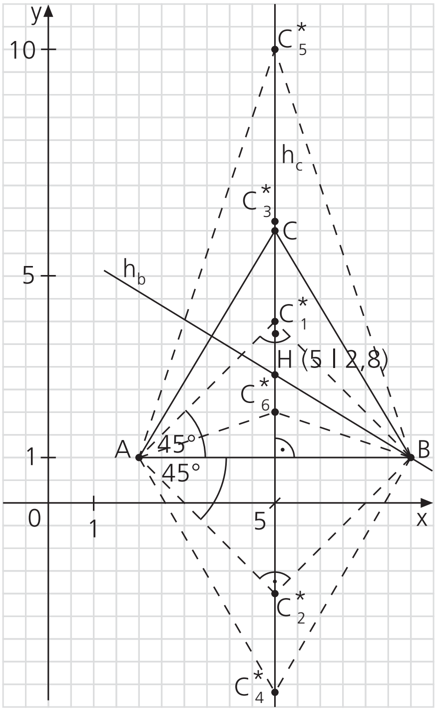
h_b: $y = -0{,}6x + 5{,}8$;

da $x_H = 5$ ist folgt $y_H = 2{,}8$:

H (5 | 2,8).

$\tan\alpha = \frac{5}{3}$; $\alpha \approx 59°$;

$\gamma \approx 180° - 2 \cdot 59° = 62°$



b) Für C_1^* (5 | 4) und für C_2^* (5 | –2) ist das Dreieck ABC_1^* bzw. das Dreieck AC_2^*B rechtwinklig.

Hinweis: $y_{C^*_{1,2}} = 1 \pm \frac{1}{2}\,\overline{AB} = 1 \pm 3$

Für C_3^* $(5 \mid 1 + 3\sqrt{3})$ und für C_4^* $(5 \mid 1 - 3\sqrt{3})$ ist das Dreieck ABC_3^* bzw. das Dreieck AC_4^*B gleichseitig.

Hinweis: $y_{C^*_{3,4}} = 1 \pm \frac{1}{2}\,\overline{AB} \cdot \sqrt{3} = 1 \pm 3\sqrt{3}$

C_5^* (5 | h); $A_{\text{Viereck } ACBC_5^*} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot (h - 1) - \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (h - 1) - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 =$

$= 3h - 3 - 15 = 3h - 18$;

$3h - 18 = 12$; $h = 10$; C_5^* (5 | 10)

C_6^* (5 | h*); $A_{\text{Viereck } AC_6^*BC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (h^* - 1) = 18 - 3h^*$;

$18 - 3h^* = 12$; $h^* = 2$; C_6^* (5 | 2)

Hinweis: $y_{C^*_{5,6}} = y_C \pm 4 = 6 \pm 4$

(2) **a)** *Beispiele*:

OD ∥ ER; ∢ DOR = ∢ EDO;

$\overline{DE} = \overline{RO}$ $(= \sqrt{50} = 5\sqrt{2})$: das Trapez ODER ist gleichschenklig; das Trapez ODER ist achsensymmetrisch zur Geraden g mit der Gleichung x = 4.

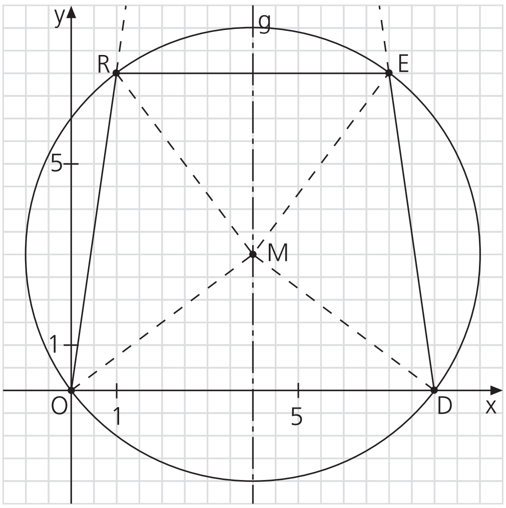
b) $\overline{MO} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$

$\overline{MD} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

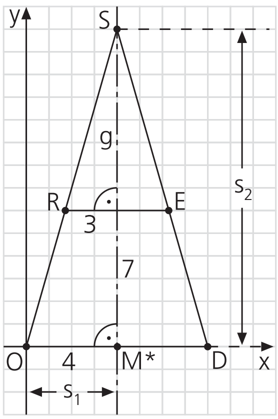
$\overline{ME} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\overline{MR} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

Da $\overline{MO} = \overline{MD} = \overline{ME} = \overline{MR}$ ist, ist M der Mittelpunkt des Umkreises des Trapezes ODER.



c)



(Skizze nicht maßstäblich)

$s_1 = x_s = x_{M^*} = 4$; da die Geraden SO und g von dem Parallelenpaar ER und OD geschnitten werden, gilt nach dem 2. Strahlensatz für die „X-Figur" OSM*:

$\frac{s_2 - 7}{s_2} = \frac{3}{4}$; $4s_2 - 28 = 3s_2$; $s_2 = 28$; S (4 | 28)

10. a) $r^{*2}\pi = 4r^2\pi$; $r^{*2} = 4r^2$; $r^* = 2r$: r* ist doppelt so groß wie r.

b) $V_{\text{Luft usw.}} = 14\text{ cm} \cdot 7{,}0\text{ cm} \cdot 7{,}4\text{ cm} - 16 \cdot \frac{4}{3} \cdot (1{,}7\text{ cm})^3 \cdot \pi \approx 725{,}2\text{ cm}^3 - 329{,}3\text{ cm}^3 = 395{,}9\text{ cm}^3$:

$\frac{395{,}9\text{ cm}^3}{725{,}2\text{ cm}^3} \approx 0{,}546 = 54{,}6\%$

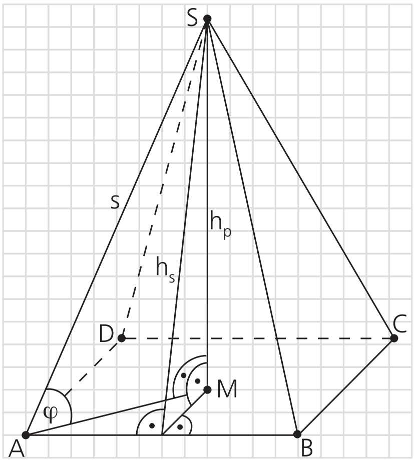
Von der Packung ist also weniger als die Hälfte „Inhalt".

c) $h = 6$ cm; $r = 6$ cm;

$V = r^2\pi h = (6\text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 6\text{ cm} = 216\pi\text{ cm}^3 \approx 679\text{ cm}^3$

$A = 2r^2\pi + 2r\pi h = 2 \cdot (6\text{ cm})^2 \cdot \pi + 2 \cdot 6\text{ cm} \cdot \pi \cdot 6\text{ cm} = 144\pi\text{ cm}^2 \approx 452\text{ cm}^2$

11.



Basishöhe h_s jeder der vier Seitenflächen:

$h_s^2 = (8\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2 = 73\text{ cm}^2$; $h_s \approx 8{,}5$ cm;

$A_p \approx (6\text{ cm})^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6\text{ cm} \cdot 8{,}5\text{ cm} = 36\text{ cm}^2 + 102\text{ cm}^2 = 138\text{ cm}^2$

$V_p = \frac{1}{3} \cdot (6\text{ cm})^2 \cdot 8\text{ cm} = 96\text{ cm}^3$

$\tan\varphi = \frac{8}{3\sqrt{2}}$; $\varphi \approx 62{,}1°$

$V_k = \frac{1}{3}(3\sqrt{2}\text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 8\text{ cm} = 48\pi\text{ cm}^3 \approx 150{,}8\text{ cm}^3$

$s^2 = \overline{SA}^2 = (3\sqrt{2}\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2 = (18 + 64)\text{ cm}^2 = 82\text{ cm}^2$; $s \approx 9{,}1$ cm;

$A_K = (3\sqrt{2}\text{ cm})^2\,\pi + 3\sqrt{2}\text{ cm} \cdot \pi \cdot \overline{SA} = 18\,\pi\text{ cm}^2 + 3\sqrt{2}\text{ cm} \cdot \pi \cdot \sqrt{82}\text{ cm} = 18\,\pi\text{ cm}^2 + 6\sqrt{41}\,\pi\text{ cm}^2 \approx 177\text{ cm}^2$

$\frac{V_P}{V_K} \approx \frac{96\text{ cm}^3}{150{,}8\text{ cm}^3} \approx 64\%$

Die Pyramide nimmt etwa 64% des Kegelvolumens ein.

Kann ich das? – Lösungen zu Seite 26

1.

	Nullstelle(n)	Polstelle(n)	$D_{f\,max}$
a)	$x = 0$	$x = 1$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$
b)	$x_1 = 0;\ x_2 = 1$	$x = -1$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
c)	$x = 0$	–	$\mathbb{R}$

2.

Funktion	f_1	f_2	f_3
Nullstelle(n)	–	–	–
Polstelle(n)	$x = 0$	$x = 0$	$x = 0$
Verhalten für $x \to +\infty$	$f(x) \to 0+$	$f(x) \to 1+$	$f(x) \to +\infty$
Verhalten für $x \to -\infty$	$f(x) \to 0-$	$f(x) \to 1+$	$f(x) \to -\infty$
Der Graph verläuft durch die Quadranten	III und I	II und I	III und I
Achsenpunkte des Graphen	–	–	–
Symmetrieverhalten: Der Funktionsgraph ist	punktsymmetrisch zum Ursprung	symmetrisch zur y-Achse	punktsymmetrisch zum Ursprung
Gleichungen der Asymptoten des Graphen	$x = 0$; $y = 0$	$x = 0$; $y = 1$	$x = 0$; $y = x$

3. a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4 - x^2}{1 + 2x^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{4}{x^2} - 1}{\frac{1}{x^2} + 2} = \dfrac{-1}{2} = -0{,}5$

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\left(\dfrac{2x}{1 + 4x}\right)^2\right] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\left(\dfrac{2}{\frac{1}{x} + 4}\right)^2\right] = \left(\dfrac{2}{4}\right)^2 = 0{,}25$

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{6 - x}{6 + x^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{6}{x^2} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 2} = \dfrac{0}{2} = 0$

4. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{kx^2 + 8x + 1}{3x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{k + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{k}{3};\quad \dfrac{k}{3} = 2;\quad k = 6$

5. a)

Nummer der Figur	Umfangslänge der Figur (in cm)	Flächeninhalt der Figur (in cm²)
(1)	$U_1 = 4a_1 = 4 \cdot 8 = 32$	$A_1 = a_1^2 = 8^2 = 64$
(2)	$a_2 = \frac{1}{2} a_1 = 4$ $U_2 = 6a_2 = 6 \cdot 4 = 24$	$A_2 = 2a_2^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} a_1\right)^2 = 2 \cdot 4^2 = 32$
(3)	$a_3 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{2^2} a_1 = 2$ $U_3 = 10a_3 = 10 \cdot 2 = 20$	$A_3 = 4a_3^2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2^2} a_1\right)^2 = 4 \cdot 2^2 = 16$
(n)	$a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot a_1$ $U_n = (2^n + 2) \cdot 2^{4-n} = 2^4 + 2^{5-n}$	$A_n = 2^{n-1} \cdot \left(\frac{a_1}{2^{n-1}}\right)^2 = 2^{n-1} \cdot \left(\frac{2^3}{2^{n-1}}\right)^2 =$ $= 2^{n-1} \cdot 2^{8-2n} = 2^{7-n}$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 16 \qquad \lim\limits_{n \to +\infty} A_n = 0$

6.

Funktionsgleichung	a)	b)	c)	d)
Wertetabelle	D	C	A	B
Graph	(4)	(1)	(3)	(2)

Kann ich das? – Lösungen zu den Seiten 83 und 84

1. a) (1) $m(x) = \frac{(x^2-1)-(2^2-1)}{x-2} = \frac{x^2-1-3}{x-2} = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2;\ x > 2$

$\lim\limits_{x\to 2+}(x+2) = 4$

(2) $m(x) = \frac{(2^2-1)-(x^2-1)}{2-x} = \frac{3-x^2+1}{2-x} = \frac{4-x^2}{2-x} = \frac{(2+x)(2-x)}{2-x} = 2+x;\ x < 2$

$\lim\limits_{x\to 2-}(x+2) = 4$

Wegen $\lim\limits_{x\to 2+} m(x) = \lim\limits_{x\to 2-} m(x) = 4$ ist $\lim\limits_{x\to 2} m(x) = 4$.

b) (1) $m(h) = \frac{(1+h)^2-1-(1^2-1)}{1+h-1} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = \frac{2+h}{1} = 2+h;\ h > 0$

$\lim\limits_{h\to 0+}(2+h) = 2$

(2) $m(x) = \frac{1-(1-h)^2}{1-(1-h)} = \frac{1-1+2h-h^2-1}{h} = \frac{h(2-h)}{h} = \frac{2-h}{1} = 2-h;\ h > 0$

$\lim\limits_{x\to 0+}(2-h) = 2$

Wegen $\lim\limits_{h\to 0+}(2+h) = \lim\limits_{h\to 0+}(2-h) = 2$ ist $\lim\limits_{h\to 0+} m(h) = 2$.

2. Der Term $\frac{V(r+h)-V(r)}{h}$ $(h > 0)$ bedeutet die mittlere Volumenzunahmerate, wenn die Radiuslänge um h zunimmt.

$\frac{V(r+h)-V(r)}{h} = \frac{\frac{4}{3}(r+h)^3\pi - \frac{4}{3}r^3\pi}{h} = \frac{\frac{4}{3}\pi(r^3+3r^2h+3rh^2+h^3-r^3)}{h} = \frac{\frac{4}{3}\pi\cdot h\,(3r^2+3rh+h^2)}{h} = \frac{4}{3}\pi\,(3r^2+3rh+h^2);$

$V'(r) = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{4}{3}\pi\,(3r^2+3rh+h^2)\right] = \frac{4}{3}\pi\cdot 3r^2 = 4r^2\pi$: Dies ist der Kugeloberflächeninhalt.

3. a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{-2(x+h)^2-(-2x^2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{-2x^2-4hx-2h^2+2x^2}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{-h(4x+2h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}[-(4x+2h)] = -4x$

Ableitungsfunktion: f': $f'(x) = -4x$; $D_{f'} = \mathbb{R}$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2(x+h)}-\frac{1}{2x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{2x(x+h)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{-h}{h\cdot 2x(x+h)} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{-1}{2x(x+h)} = -\frac{1}{2x^2}$

Ableitungsfunktion: f': $f'(x) = -\frac{1}{2x^2}$; $D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

4. a) $f(x) = 2x^4 + x^3$; $f'(x) = 8x^3 + 3x^2$; $f''(x) = 24x^2 + 6x$

$f(1) = 3$; $f'(1) = 11$; t_p: $y = 11x + t$; da $P \in t_p$ ist, gilt

$3 = 11 + t$; $t = -8$; t_p: $y = 11x - 8$

b) $f(x) = -x^2 + 4$; $f'(x) = -2x$; $f''(x) = -2$

$f(1) = 3$; $f'(1) = -2$; t_p: $y = -2x + t$; da $P \in t_p$ ist, gilt $3 = -2 + t$; $t = 5$; t_p: $y = -2x + 5$

Schnittpunkt von t_p mit der x-Achse: $y = 0$; $0 = -2x + 5$; $|+2x$ $2x = 5$; $|:2$

$x_1 = 2{,}5$; $S_1\,(2{,}5 \mid 0)$

Steigung von n_p: 0,5; n_p: $y = 0{,}5x + t^*$; da $P \in n_p$ ist, gilt $3 = 0{,}5 + t^*$; $|-0{,}5$

$t^* = 2{,}5$; n_p: $y = 0{,}5x + 2{,}5$

Schnittpunkt von n_p mit der x-Achse: $y = 0$; $0{,}5x + 2{,}5 = 0$; $|-2{,}5$

$0{,}5x = -2{,}5$; $|:0{,}5$

$x_2 = -5$; $S_2\,(-5 \mid 0)$

$A_{S_2S_1P} = \frac{1}{2}\cdot(5+2{,}5)\cdot 3 = 11{,}25$

$r_{Umkreis} = \frac{1}{2}\cdot(5+2{,}5) = 3{,}75$; $A_{Umkreis} = 3{,}75^2\cdot\pi \approx 44{,}2$;

Prozentsatz: etwa $\frac{11{,}25}{44{,}2} \approx 25\%$

c) $f(x) = x(3x-1) = 3x^2 - x$; $f'(x) = 6x - 1$; $f''(x) = 6$

oder (Produktregel) $f(x) = x(3x-1)$; $f''(x) = 1\cdot(3x-1) + x(3-0) = 3x - 1 + 3x = 6x - 1$

$f(1) = 2$; $f'(1) = 5$; t_p: $y = 5x + t$; da $P \in t_p$ ist, gilt $2 = 5 + t$; $t = -3$; t_p: $y = 5x - 3$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$; $f''(x) = \frac{6}{x^4}$
$f(1) = 1$; $f'(1) = -2$; t_p: $y = -2x + t$; da $P \in t_p$ ist, gilt $1 = -2 + t$; $t = 3$; t_p: $y = -2x + 3$

e) $f(x) = \sqrt{x}$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$
$f(1) = 1$; $f'(1) = 0{,}5$; t_p: $y = 0{,}5x + t$; da $P \in t_p$ ist, gilt $1 = 0{,}5 + t$; $t = 0{,}5$;
t_p: $y = 0{,}5x + 0{,}5$

f) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$; $f''(x) = \frac{(x^2+1)^2 \cdot (-2) - (-2x)(4x^3+4x)}{(x^2+1)^4} =$
$= \frac{-2(x^2+1)^2 + 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3}$
$f(1) = 0{,}5$; $f'(1) = \frac{-2}{(1+1)^2} = -0{,}5$; t_p: $y = -0{,}5x + t$; da $P \in t_p$ ist, gilt $0{,}5 = -0{,}5 + t$;
$t = 1$; t_p: $y = -0{,}5x + 1$
Schnittpunkt von t_p mit der x-Achse: $y = 0$; $0 = -0{,}5x + 1$; $| + 0{,}5x$ $0{,}5x = 1$; $| : 0{,}5$
$x_1 = 2$; $S_1\,(2 \mid 0)$
Steigung von n_p: 2; n_p: $y = 2x + t^*$; da $P \in n_p$ ist, gilt $0{,}5 = 2 + t^*$; $| -2$ $t^* = -1{,}5$;
n_p: $y = 2x - 1{,}5$
Schnittpunkt von n_p mit der x-Achse: $y = 0$; $2x - 1{,}5 = 0$; $| + 1{,}5$ $2x = 1{,}5$; $| : 2$
$x_2 = 0{,}75$; $S_2\,(0{,}75 \mid 0)$
$A_{S_2S_1P} = \frac{1}{2} \cdot (2 - 0{,}75) \cdot 0{,}5 = 0{,}3125$
$r_{\text{Umkreis}} = \frac{1}{2} \cdot (2 - 0{,}75) = 0{,}625$; $A_{\text{Umkreis}} = 0{,}625^2 \cdot \pi \approx 1{,}23$;
Prozentsatz: etwa $\frac{0{,}31}{1{,}23} \approx 25\%$

g) $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$; $f'(x) = \frac{(x-3) \cdot 1 - (x+3) \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{-6}{(x-3)^2}$; $f''(x) = \frac{-(-6)(2x-6)}{(x-3)^4} = \frac{12(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{12}{(x-3)^3}$
$f(1) = -2$; $f'(1) = -1{,}5$; t_p: $y = -1{,}5x + t$; da $P \in t_p$ ist, gilt $-2 = -1{,}5 + t$; $t = -0{,}5$;
t_p: $y = -1{,}5x - 0{,}5$

h) $f(x) = (1 + 2x)^2 = 1 + 4x + 4x^2$; $f'(x) = 4 + 4 \cdot 2x = 4 + 8x$; $f''(x) = 8$
$f(1) = 9$; $f'(1) = 12$; t_p: $y = 12x + t$; da $P \in t_p$ ist, gilt $9 = 12 + t$; $t = -3$; t_p: $y = 12x - 3$

5. Bei beiden Abbildungen ist einer der beiden Graphen G_f, der andere $G_{f'}$.
a) Die rote Kurve ② ist G_f, die grüne Kurve ① ist $G_{f'}$. Begründung: Die Abszissen der Punkte von ②, in denen ② eine horizontale Tangente besitzt, stimmen mit den
Nullstellen der durch ① dargestellten Funktion überein, aber nicht umgekehrt.
b) Die grüne Kurve ① ist G_f, die rote Kurve ② ist $G_{f'}$. Begründung: Die Tangentensteigung von ① nimmt zu, demgemäß ist ② steigend; umgekehrt ist dies nicht der Fall.

6. a) 1. Art: $f(x) = x^3 + 4x^2$; $f'(x) = 3x^2 + 4 \cdot 2x = 3x^2 + 8x$
2. Art: $f'(x) = 2x(x + 4) + x^2 \cdot (1 + 0) = 2x^2 + 8x + x^2 = 3x^2 + 8x$
b) 1. Art: $f(r) = 1 - 8r + 16r^2$; $f'(r) = 0 - 8 + 16 \cdot 2r = -8 + 32r$
2. Art: $f(r) = (1 - 4r)(1 - 4r)$; $f'(r) = (0 - 4)(1 - 4r) + (1 - 4r)(0 - 4) = -4 + 16r - 4 + 16r = -8 + 32r$
c) 1. Art: $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$; $f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$
2. Art: $f(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$; $f'(x) = \frac{(2 \cdot 2x - 0) \cdot x - (2x^2 - 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 + 1}{x^2} = \frac{2x^2 + 1}{x^2} = 2 + \frac{1}{x^2}$
d) 1. Art: $f(a) = a^4 \cdot a^5 = a^9$; $f'(a) = 9a^8$
2. Art: $f'(a) = 4a^3 \cdot a^5 + a^4 \cdot 5a^4 = 4a^8 + 5a^8 = 9a^8$

7. $b = 1$, da $S_1\,(-1 \mid 0) \in G_f$ ist; $c = 2$, da $S_2\,(2 \mid 0) \in G_f$ ist. Der Graph hat eine schräge Asymptote; somit ist $n = 2 - 1 = 1$ (das Zählerpolynom hat den Grad 2).
Wegen $f(1) = -2$ ist $\frac{a(1+1)(1-2)}{1} = -2$; $a = 1$.
Als Funktionsterm ergibt sich $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x} = x - 1 - \frac{2}{x}$.

8. Für $x > 0$ gilt $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^4 - 0}{x - 0} = \frac{x^4}{x} = x^3$; $\lim\limits_{x \to 0+} x^3 = 0$;

für $x < 0$ gilt $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^4 - 0}{x - 0} = \frac{x^4}{x} = x^3$; $\lim\limits_{x \to 0-} x^3 = 0 = \lim\limits_{x \to 0+} x^3$:

Die Funktion f: $f(x) = |x^4|$; $D_f = \mathbb{R}$, ist also an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar, und es ist $f'(0) = 0$.

9. Q (2 | 3); Gleichung der Parabel P_1: $y = a(x - 1)^2 + 2$; $Q \in P_1$:
$3 = a \cdot (2 - 1)^2 + 2$; $| -2$ $\quad a = 1$
P_1: $y = (x - 1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 1 + 2 = x^2 - 2x + 3$
Steigung von P_1 (und von P_2) im Punkt Q:
1. Ableitung: $y' = 2x - 2$; an der Stelle $x = 2$: $m_{t_Q} = 4 - 2 = 2$
Gleichung der Tangente t_Q: $y = 2x + t$; $Q \in t_Q$: $3 = 2 \cdot 2 + t$; $3 = 4 + t$; $| -4$ $\quad t = -1$
t_Q: $y = 2x - 1$
Parabel P_2: $y = f(x) = -x^2 + bx + c$
$Q \in P_2$: $3 = -2^2 + 2b + c$; $| +4$ $\quad 2b + c = 7$ (I)
$f'(x) = -2x + b$; $f'(2) = -4 + b = m_{t_Q} = 2$; $\quad b = 6$; eingesetzt in (I)
$2 \cdot 6 + c = 7$; $| -12$ $\quad c = -5$
Gleichung von P_2: $y = -x^2 + 6x - 5 = -(x - 3)^2 + 9 - 5 = -(x - 3)^2 + 4$
a) Der Teil der Parabel P_1 links oberhalb des Punkts R_1 $(1 - \sqrt{2} \mid 4)$
b) Der Teil der Parabel P_2 links unterhalb des Punkts R_2 (1 | 0).

10. a) $x = 1$ ist eine doppelte Nullstelle von f; f besitzt keinen Pol, G_f also keine senkrechte Asymptote.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 2$; G_f besitzt somit eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 2$.

$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^2 + 1}$;

Extremstellen:

$f'(x) = \frac{(4x - 4)(x^2 + 1) - (2x^2 - 4x + 2) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^3 + 4x - 4x^2 - 4 - 4x^3 + 8x^2 - 4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 - 4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$

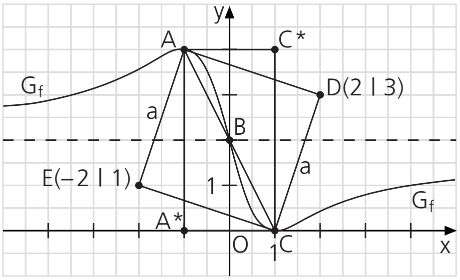
$f'(x) = 0$: $\;4(x^2 - 1) = 0$; $| : 4$ $\quad (x + 1)(x - 1) = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 1$

Monotonietabelle:

x	$-\infty < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < \infty$
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
Vorzeichenwechsel von $f'(x)$	——	von + nach –	——	von – nach +	——
Graph G_f	steigend	Hochpunkt A (–1 | 4)	fallend	Tiefpunkt C (1 | 1)	steigend

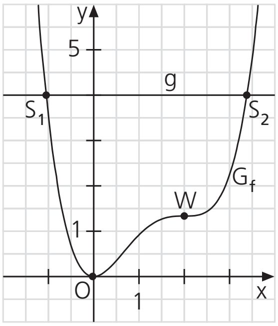
Wertetabelle:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
f(x)	2,8	2,9	3,2	3,6	4,0	2,0	0,0	0,4	0,8	1,1	1,2



b) Tangentengleichungen:
$f(-1) = 4$; $f'(-1) = \frac{0}{4} = 0$; t_A: $y = 4$
$f(0) = 2$; $f'(0) = -4$; t_B: $y = -4x + 2$
$f(1) = 0$; $f'(1) = 0$; t_C: $y = 0$
Streckenhalbierung:
$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + 2^2}$ LE $= \sqrt{5}$ LE; $\overline{CB} = \sqrt{1^2 + 2^2}$ LE $= \sqrt{5}$ LE; $\overline{AB} = \overline{CB}$ (I)
$m_{AC} = -\frac{4}{2} = -2$; $y = -2x + t$; da $A \in AC$ ist, gilt $4 = 2 + t$; $t = 2$; AC: $y = -2x + 2$
B liegt auf AC, da $2 = -2 = -2 \cdot 0 + 2$ ist, also ist wegen (I) B Mittelpunkt der Strecke [AC].
Rechteck AA*CC*:
$A^*(-1 \mid 0)$, $C^*(1 \mid 4)$; $A_{\text{Rechteck } AA^*CC^*} = 4$ LE $\cdot$ 2 LE $= 8$ FE
Flächeninhalt des Quadrats:
Für die Länge d jeder der Diagonalen eines Quadrats der Seitenlälnge a gilt $d = a\sqrt{2}$.
$\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 4^2}$ LE $= \sqrt{20}$ LE $= a\sqrt{2}$; $\mid : \sqrt{2}$ $\quad a = \sqrt{10}$ LE
$A_{\text{Quadrat}} = a^2 = 10$ FE
Die Quadratfläche ist um 2 FE, das sind ($\frac{2}{8}$ =) 25%, größer als die Rechtecksfläche.

11. Der Graph verläuft durch den Ursprung O (0 | 0), da $f(0) = 0$ ist.
(Weitere) gemeinsame Punkte mit der x-Achse: $x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{3}x + 2\right) = 0$; $x = 0$ (siehe oben)
$D = \frac{16}{9} - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{16}{9} - 2 < 0$; also hat G_f mit der x-Achse
(und mit der y-Achse) nur den Ursprung gemeinsam.
Punkte von G_f, in denen die Tangente horizontal ist:
$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - \frac{4}{3} \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2$
Für $x = 0$ und für $x = 2$ gilt $f'(x) = 0$;
$f(0) = 0$; $f(2) = 4 - \frac{32}{3} + 8 = \frac{4}{3}$.
Im Ursprung O (0 | 0) und im Punkt W (2 | $\frac{4}{3}$) besitzt G_f
die horizontale Tangente t_O: $y = 0$ bzw. t_W: $y = \frac{4}{3}$.



Monotonietabelle:

x	$-\infty < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < \infty$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
Vorzeichenwechsel von $f'(x)$	———	von – nach +	———	kein Vorzeichenwechsel	———
Graph G_f	fallend	Tiefunkt O	steigend	Terrassenpunkt W	steigend

Newton´sches Näherungsverfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$; $n \in \mathbb{N}$. Dabei ist
$g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 4$ und $g'(x) = x(x-2)^2$; Anfangsnäherung für x_{S_2} ist $x_1 = 3{,}5$:

n	x_n	$g(x_n)$	$g'(x_n)$	$x_n + 1$
0	3,500	0,849	7,875	3,392
1	3,392	0,070	6,575	3,381
2	3,381	0,001	6,448	3,381

$x_{S_2} \approx 3{,}38$

12. $f(x) = \frac{3}{20}x^5 - x^3$; $f'(x) = \frac{3}{20} \cdot 5x^4 - 3x^2 = \frac{3}{4}x^4 - 3x^2 = \frac{3}{4}x^2(x^2 - a) = \frac{3}{4}x^2(x+2)(x-2)$

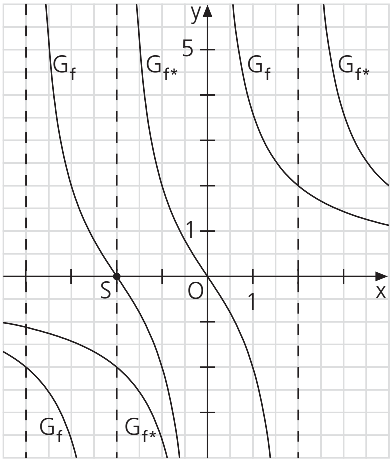
f′ besitzt nur die Nullstellen 0, −2 und 2.

Monotonietabelle:

x	$-\infty < x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < \infty$
f′(x)	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
Vorzeichenwechsel von f′(x)	———	von + nach −	———	kein Vorzeichenwechsel	———	von − nach +	———
Graph G_f	steigend	Hochpunkt	fallend	Terrassenpunkt	fallend	Tiefpunkt	steigend

Der Graph ② besitzt andere Extrempunkte als G_f, der Graph ③ ebenfalls; G_f wird also durch den Graphen ① dargestellt.

13. $D_{f\,max} = \mathbb{R}\setminus\{-4; 0\}$



Achsenpunkte:

G_f hat mit der y-Achse keinen Punkt gemeinsam.

Gemeinsamer Punkt mit der x-Achse:

$f(x) = 0$; $6x + 12 = 0$; $| -12$

$6x = -12$; $| : 6$ $\quad x = -2$

S (−2 | 0)

Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x + 12}{x^2 + 4x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{6}{x} + \frac{12}{x^2}}{1 + \frac{4}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

Die x-Achse (Gleichung: y = 0) ist also horizontale Asymptote von G_f.

An den Stellen x = 0 und x = −4 hat f Pole

(1.Ordnung, also Pole mit Vorzeichenwechsel:

Für $x \to -4-$ gilt $f(x) \quad -\infty$.

Für $x \to -4+$ gilt $f(x) \quad +\infty$.

Für $x \to 0-$ gilt $f(x) \quad -\infty$.

Für $x \to 0+$ gilt $f(x) \quad +\infty$.

Senkrechte Asymptoten: x = −4 und x = 0

Extrema: $f'(x) = \frac{6(x^2 + 4x) - (6x + 12)(2x + 4)}{(x^2 + 4x)^2} = \frac{6x^2 + 24x - 12x^2 - 24x - 24x - 48}{(x^2 + 4x)^2} = \frac{-6x^2 - 24x - 48}{(x^2 + 4x)^2} = \frac{-6(x^2 + 4x + 8)}{(x^2 + 4x)^2}$

$f'(x) = 0$: $\quad x^2 + 4x + 8 = 0$; $D = 4^2 - 4 \cdot 8 = 16 - 32 = -16 < 0$. Da f überall in D_f differenzierbar ist und f′(x) für jeden Wert von $x \in D_f$ ungleich null ist, hat G_f keine lokalen Extrempunkte.

Tangente im Punkt S(−2 | 0): $f'(-2) = \frac{-6 \cdot (4 - 8 + 8)}{[(-2)^2 + 4 \cdot (-2)]^2} = \frac{-24}{16} = \frac{-3}{2}$

t_S: $y = -1{,}5x + t$; wegen $S \in t_S$ ist $0 = -1{,}5 \cdot (-2) + t$; $| -3 \quad t = -3$

t_S: $y = -1{,}5x - 3$

Verschiebung von G_f um 2 Einheiten nach rechts: $f^*(x) = f(x - 2)$

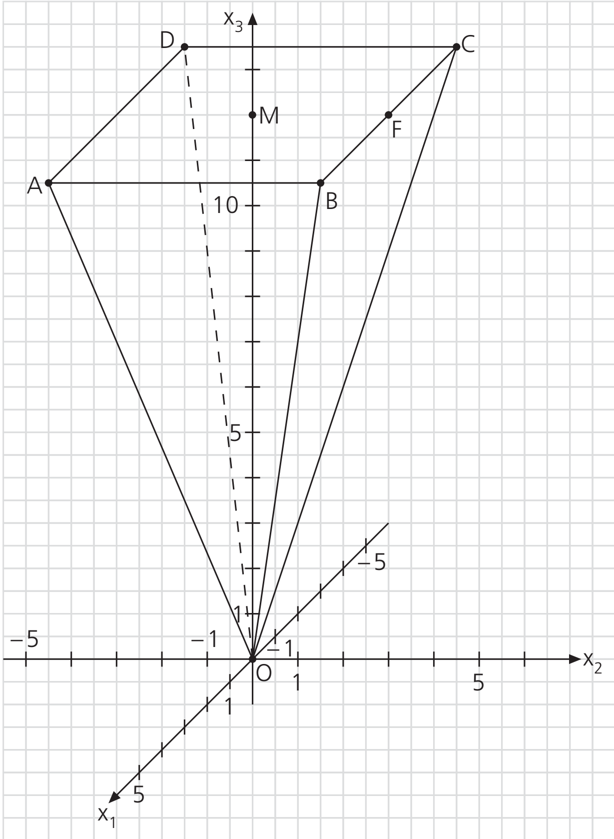
$f^*(x) = \frac{6(x-2) + 12}{(x-2)^2 + 4(x-2)} = \frac{6x - 12 + 12}{x^2 - 4x + 4 + 4x - 8} = \frac{6x}{x^2 - 4}$; $D_{f*} = \mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$

Da $f^*(-x) = \frac{6 \cdot (-x)}{(-x)^2 - 4} = -\frac{6x}{x^2 - 4} = -f^*(x)$ ist, ist G_{f*} punktsymmetrisch zum Ursprung

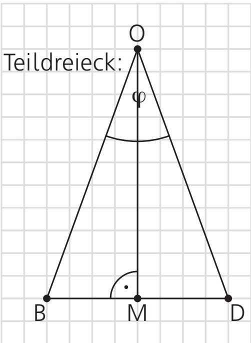
[und somit G_f punktsymmetrisch zum Punkt S (−2 | 0)].

Kann ich das? – Lösungen zu Seite 126

1. a) Zeichnung:



b) Größe φ des Winkels $\sphericalangle$ BOD:



Das Teildreieck BDO ist aufgrund der vorliegenden Symmetrie gleichschenklig mit Basis [BD].

Es gilt: $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{BD}|^2$

$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2} = \sqrt{(6\text{ cm})^2 + (6\text{ cm})^2} = 6\sqrt{2}\text{ cm};$

$|\overrightarrow{OB}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}\right|\text{ cm};\quad |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{(3\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2 + (12\text{ cm})^2} = 9\sqrt{2}\text{ cm};$

$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{OB}|} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\text{ cm}}{9\sqrt{2}\text{ cm}} = \frac{1}{3};\ \frac{\varphi}{2} = 19{,}47\ldots°;$

$\varphi = \sphericalangle\text{ BOD} \approx 38{,}9°$

Volumen der Pyramide P:

$V_P = \frac{1}{3}\cdot|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{3}\cdot(6\text{ cm})^2\cdot 12\text{ cm} = 144\text{ cm}^3$

Oberflächeninhalt der Pyramide P:

Aufgrund der Symmetrie der Pyramide gilt:

$A_P = |\overrightarrow{AB}|^2 + 4\cdot A_{\text{Dreieck BOC}} = (6\text{ cm})^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2 - \left(\frac{|\overrightarrow{BC}|}{2}\right)^2} =$

$= (6\text{ cm})^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\text{ cm}\cdot\sqrt{162\text{ cm}^2 - 9\text{ cm}^2} = 12(3 + \sqrt{153})\text{ cm}^2 \approx 184\text{ cm}^2$

c) Die Pyramide P* ist (12 cm – 6 cm =) 6 cm hoch, also halb so hoch wie die Pyramide P.

$V_{\text{Pyramidenstumpf}} = V_P - V_{P^*} = V_P - \left(\frac{1}{2}\right)^3 V_P = \frac{7}{8}V_P = \frac{7}{8}\cdot 144\text{ cm}^3 = 126\text{ cm}^3$

2. A $(-4 \mid 7 \mid 2)$; B $(-2 \mid 9 \mid 0)$;

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-(-4) \\ 9-7 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;

$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{a} \\ 2 \\ -\frac{4}{a} \end{pmatrix}$; $|\vec{x}| = \sqrt{\left(\frac{4}{a}\right)^2 + 2^2 + \left(-\frac{4}{a}\right)^2} = \sqrt{\frac{32}{a^2} + 4}$;

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = |\vec{x}|$;

$2\sqrt{3} = \sqrt{\frac{32}{a^2} + 4}$;

$12 = \frac{32}{a^2} + 4$; $\quad | -4 \quad | \cdot a^2$

$8a^2 = 32$; $\quad | : 8$

$a^2 = 4$; $\quad a = 2$ (wegen $a \in \mathbb{R}^+$)

3. **a)** Kugel K_1

$M\,(1 \mid 7 \mid -4)$; $\quad r = 5$

K_1: $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 7)^2 + (x_3 + 4)^2 = 25$

b) Kugel K_2

$M\,(1 \mid 7 \mid 4)$

Berechnung der Radiuslänge r:

$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 7-7 \\ -4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$;

$r = \left|\overrightarrow{MA}\right| = \sqrt{5^2 + 0^2 + (-8)^2} = \sqrt{89}$

K_2: $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 7)^2 + (x_3 - 4)^2 = 89$

c) Kugel K_3

$M\,(1 \mid 7 \mid 8)$

Der Betrag der x_3-Koordinate von M gibt den Abstand des Kugelmittelpunkts M von der x_1-x_2-Ebene, also die Radiuslänge von K_3, an: $\quad r = 8$.

K_3: $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 7)^2 + (x_3 - 8)^2 = 64$

Koordinaten des Berührpunkts:

$B\,(1 \mid 7 \mid 0)$, da B in der x_1-x_2-Ebene liegt (also $x_3 = 0$ ist) und senkrecht unter M liegt (also $x_1 = 1$ und $x_2 = 7$ ist); B entsteht durch senkrechte Projektion von M in die x_1-x_2-Ebene.

4. $O\,(0 \mid 0 \mid 0)$; $S\,(9 \mid 9 \mid -2)$; $T\,(4 \mid -1 \mid 7)$

K: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 140$;

$x_1^2 + 6x_1 + 9 - 9 + x_2^2 - 8x_2 + 16 - 16 + x_3^2 - 4x_3 + 4 - 4 = 140$;

$(x_1 + 3)^2 + (x_2 - 4)^2 + (x_3 - 2)^2 - 9 - 16 - 4 = 140$; $| + 29$

$(x_1 + 3)^2 + (x_2 - 4)^2 + (x_3 - 2)^2 = 13^2$, d. h.

$M\,(-3 \mid 4 \mid 2)$ und $r = 13$;

$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{29} < 13$: O liegt innerhalb der Kugel K.

$\overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix} -3-9 \\ 4-9 \\ 2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{SM}\right| = \sqrt{185} > 13$: S liegt außerhalb der Kugel K.

$\overrightarrow{TM} = \begin{pmatrix} -3-4 \\ 4-(-1) \\ 2-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{TM}\right| = \sqrt{99} < 13$: T liegt innerhalb der Kugel K.

5. A (4 | −4 | 3);   B (−1 | −1 | −1);   C (4 | 2 | −5)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-4 \\ -1-(-4) \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;

$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -1-4 \\ -1-2 \\ -1-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;

Wegen $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}|$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit Basis [CA].

Wegen $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{CB} = (-5) \cdot (-5) + 3 \cdot (-3) + (-4) \cdot 4 = 0$ ist das Dreieck ABC außerdem rechtwinklig (mit dem rechten Winkel bei B).

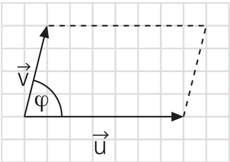
Kugelgleichung in Vektorform:

Da B Mittelpunkt der Kugel ist und A und C auf der Kugel liegen, gilt

$r = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{50}$;

K: $\left|\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{50}$

6.



$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Flächeninhalt des Parallelogramms:

$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-6) \cdot (-1) - (-2) \cdot 2 \\ (-2) \cdot 6 - 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 - (-6) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 40 \end{pmatrix}$

$A_P = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{10^2 + (-10)^2 + 40^2} = \sqrt{1800} = 30\sqrt{2}$

Winkelgröße φ:

$|\vec{u}| = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$;

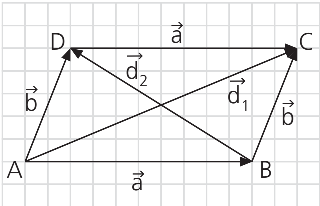
$|\vec{v}| = \sqrt{41}$;

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi$;

$\sin\varphi = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{30\sqrt{2}}{2\sqrt{11} \cdot \sqrt{41}} = 15\sqrt{\frac{2}{451}}$;

$\varphi \approx 87{,}3°$

7.



(1) Summe der Quadrate über den vier Seiten:
$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$

(2) Summe der Quadrate über den Diagonalen:
$|\vec{d}_1|^2 + |\vec{d}_2|^2 =$
$= |\vec{a} + \vec{b}|^2 + |-\vec{a} + \vec{b}|^2 =$
$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \circ \vec{b} + |\vec{b}|^2 + |-\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \circ \vec{b} + |\vec{b}|^2 =$
$= 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$

Da (1) = (2) ist, folgt die Behauptung.

8. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$;

$\vec{n} \circ \vec{a} = 3 \cdot 2 - 6 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 6 - 12 + 6 = 0$;

$\vec{n} \circ \vec{b} = 3 \cdot (-2) - 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = -6 - 6 + 12 = 0$ ✓

9. A (2 | −3 | 7); B (1 | 4 | 9), C (−3 | −4 | 5)

a) A′ (2 | −3 | 0); B′ (1 | 4 | 0); C′ (−3 | −4 | 0)

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 4-(-3) \\ 9-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3-2 \\ -4-(-3) \\ 5-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix}$;

$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1\,584} = 12\sqrt{11}$;

$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 6\sqrt{11}$;

$\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 4-(-3) \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} -3-2 \\ -4-(-3) \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 36 \end{pmatrix}$;

$\left|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}\right| = 36$;

$A_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \left|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}\right| = 18$;

$\frac{A_{A'B'C'}}{A_{ABC}} = \frac{18}{6\sqrt{11}} = \frac{3}{11}\sqrt{11} \approx 90{,}5\,\%$, d. h.:

Der Flächeninhalt des Dreiecks A′B′C′ ist um etwa 9,5 % kleiner als der Flächeninhalt tdes Dreiecks ABC.

Kann ich das? – Lösungen zu Seite 146

1. **a)** f: $f(x) = u(v(x)) = (\sqrt[3]{x^2})^3 = x^2$; g: $g(x) = v(u(x)) = \sqrt[3]{(x^3)^2} = \sqrt[3]{x^6} = x^2$; $D_f = \mathbb{R} = D_g$

b) f: $f(x) = u(v(x)) = \sin(\cos x)$; g: $g(x) = v(u(x)) = \cos(\sin x)$; $D_f = \mathbb{R} = D_g$

2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; zu $D_{f\,max} = \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$ gehören -10; -2; 2 und 10.

$g(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 1 = \frac{1}{x} - 1$; zu $D_{g\,max}$ gehören ± 1; ± 2 und ± 10.

3. **a)** $f'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} \cos\sqrt[3]{x}$; $f'(\pi^3) = \frac{1}{3\pi^2} \cos \pi = -\frac{1}{3\pi^2} \approx -0{,}034$

b) $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{8x}{\sqrt[4]{(4x^2)^3}} = \frac{2x}{2|x|\sqrt{2|x|}} = \frac{x}{|x|\sqrt{2|x|}}$; $f'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$

c) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x-4}{4+x}} \cdot \frac{x - 4 - (4 + x)}{(x-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-4}{4+x}} \cdot \frac{-8}{(x-4)^2} = \sqrt{\frac{x-4}{4+x}} \cdot \frac{-4}{(x-4)^2}$;

$f'(8) = \frac{-4}{16\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{12} \approx -0{,}144$

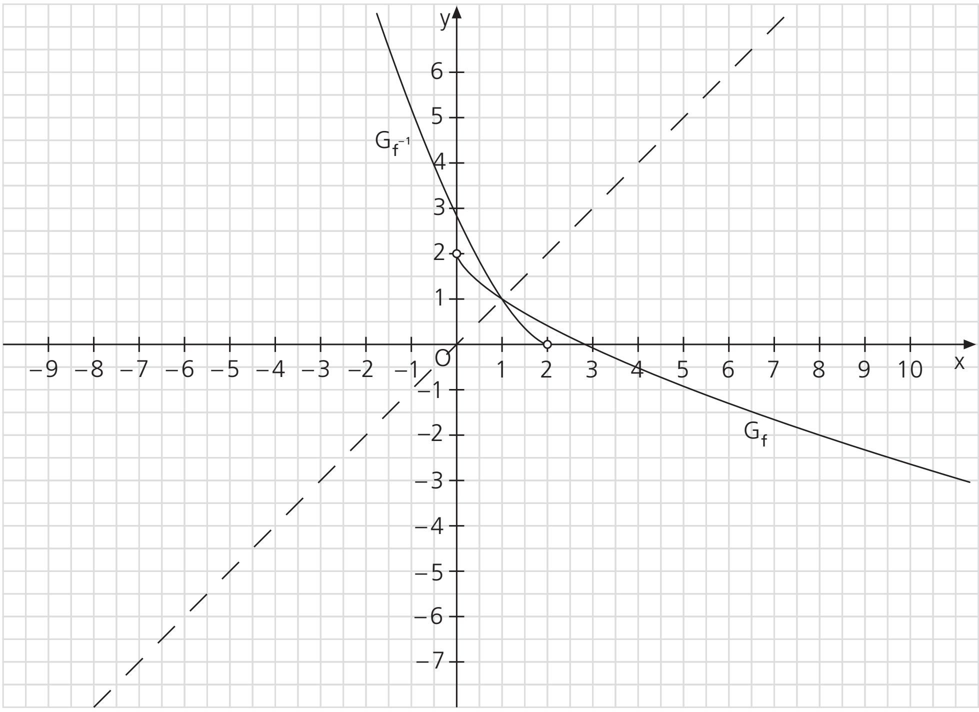
d) $f'(x) = -2\sin(2x)$; $f'(\pi) = -2\sin(2\pi) = 0$

e) $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

f) $f'(x) = 3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$; $f'(1) = 0$

4. $y = \sin(2x)$ (schwarz); $y' = 2\cos(2x)$ (blau); $y'' = -4\sin(2x)$ (rot)

5. Es ist $f'(x) = -\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} < 0$ für jeden Wert von $x \in D_{f'} = \mathbb{R}^+ = D_f$. Also ist f überall streng monoton abnehmend. Wertmenge: $W_f =]-\infty; 2[$

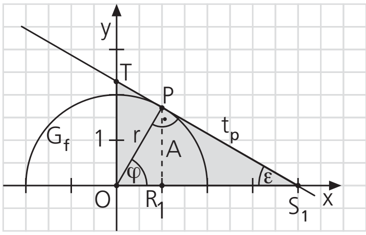


Umkehrfunktion: $y = 2 - \sqrt[3]{x^2}$; $\sqrt[3]{x^2} = 2 - y$; | „hoch 3“

$x^2 = (2 - y)^3$; $x = \sqrt{(2-y)^3}$, da $x \in \mathbb{R}^+$; x und y vertauschen:

f^{-1}: $f^{-1}(x) = \sqrt{(2-x)^3}$; $D_{f^{-1}} = W_f =]-\infty; 2[$.

6. a) $y = \sqrt{4 - x^2}$; $y^2 = 4 - x^2$; $| + x^2$
$x^2 + y^2 = 4$



b) (1) $P \in G_f$: $y_P = f(1) = \sqrt{3}$; $P\,(1 \mid \sqrt{3})$; $m_{OP} = \sqrt{3}$. Die Tangente t_P steht senkrecht auf OP; also ist
$m_{t_P} = -\frac{1}{m_{OP}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
(2) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$; $m_{t_P} = f'(1) = \frac{-1}{\sqrt{4-1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

c) $t_P: y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + t$; $P \in t_P$: $\sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + t$; $t = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$; t_P: $y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{3}$

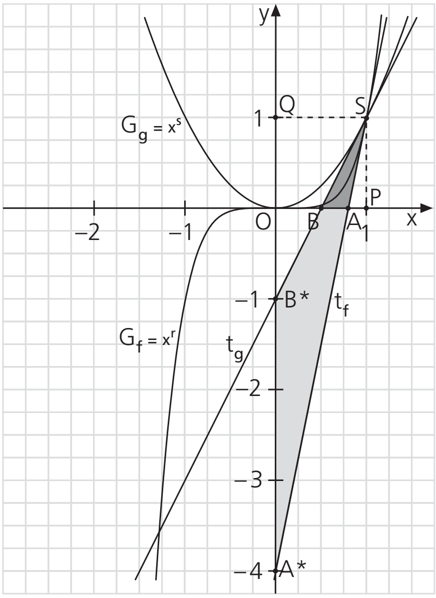
Schnittpunkt S von t_P mit der x-Achse: $0 = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{3}$; $| \cdot \sqrt{3}$ $x = 4$; $S\,(4 \mid 0)$

Schnittpunkt T von t_P mit der y-Achse: $T\,(0 \mid \frac{4}{3}\sqrt{3})$

Flächeninhalt des Dreiecks OST: $A_{OST} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3}$ FE $= \frac{8}{3}\sqrt{3}$ FE $\approx 4{,}62$ FE

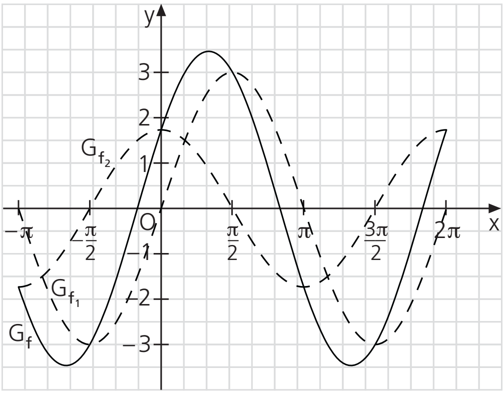
7. a) $V(r) = 3r^3\pi - \frac{2}{3}r^3\pi = \frac{7}{3}r^3\pi$ b) $r^3 = \frac{3V}{7\pi}$; $r(V) = \sqrt[3]{\frac{3V}{7\pi}}$

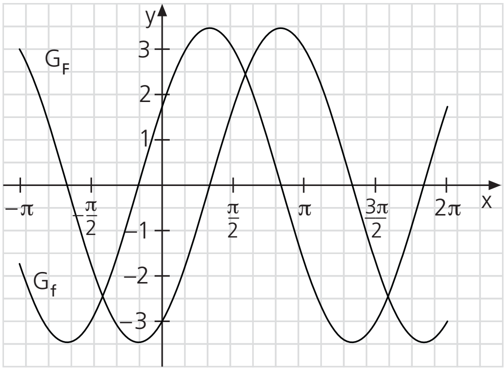
8.



Die Graphen G_f und G_g haben den Punkt S (1 I 1) gemeinsam.
Tangente t_1 an G_f in Punkt S: $f'(x) = rx^{r-1}$; $f'(1) = r$;
t_1: $y = rx + t$; $S \in t_1$: $1 = r + t$; $t = 1 - r$; t_1: $y = rx + 1 - r$
Schnittpunkt von t_1 mit der x-Achse: $A\,(1 - \frac{1}{r} \mid 0)$
Schnittpunkt von t_1 mit der y-Achse $A^*\,(0 \mid 1 - r)$
Tangente t_2 am G_g im Punkt S: $g'(x) = sx^{s-1}$; $g'(1) = s$;
t_2: $y = sx + t^*$; $S \in t_2$: $1 = s + t^*$; $t^* = 1 - s$; t_2: $y = sx + 1 - s$
Schnittpunkt von t_2 mit der x-Achse: $B\,(1 - \frac{1}{s} \mid 0)$
Schnittpunkt von t_2 mit der y-Achse: $B^*\,(0 \mid 1 - s)$
Flächeninhalt des Dreiecks BAS: $A_{BAS} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r} - 1 + \frac{1}{s}\right) \cdot 1 = \frac{r - s}{2rs}$
Flächeninhalt des Dreiecks B*A*S: $A_{B^*A^*S} = \frac{1}{2}(1 - s - 1 + r) \cdot 1 = \frac{r - s}{2}$
$A_{B^*A^*S} = rs \cdot A_{BAS}$

9.





a) G_f hat den Punkt T $(0 \mid \sqrt{3})$ mit der y-Achse gemeinsam.
Gemeinsame Punkte von G_f mit der x-Achse:
$f(x) = 3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0 \mid : (3 \cos x)$
$\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x = -\frac{\pi}{6}$; $x_2 = \frac{5\pi}{6}$; $x_3 = \frac{11\pi}{6}$
$S_1 (-\frac{\pi}{6} \mid 0)$; $S_2 (\frac{5\pi}{6} \mid 0)$; $S_3 (\frac{11\pi}{6} \mid 0)$
Extrempunkte: $f'(x) = 3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0; \mid : (\sqrt{3} \cos x)$
$\tan x = \sqrt{3}$; $x_4 = -\frac{2\pi}{3}$; $x_5 = \frac{\pi}{3}$; $x_6 = \frac{4\pi}{3}$
$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}$
$f''(x) = -3\sin x - \sqrt{3} \cos x$
$f''(x_4) = -3\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0$:
Der Punkt $T_1 (-\frac{2\pi}{3} \mid -2\sqrt{3})$ ist ein Tiefpunkt von G_f.
$f''(x_5) = 3 \sin \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{3} = -2\sqrt{3} < 0$:
$f\left(\frac{4p}{3}\right) = 2\sqrt{3}$
Der Punkt H $(\frac{\pi}{3} \mid 2\sqrt{3})$ ist ein Hochpunkt von G_f.
$f''(x_6) = -3 \sin \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \cos \frac{4\pi}{3} = 2\sqrt{3} > 0$:
Der Punkt $T_2 (\frac{4\pi}{2} \mid -2\sqrt{3})$ ist ein Tiefpunkt von G_f.

b) $F'(x) = 3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = f(x)$; $D_{F'} = D_f$ ✓
$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -3 \cos x + \sqrt{3} \sin x = F(x)$ ✓

Kann ich das? – Lösungen zu Seite 168

1. a) $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0$; $e^x - 1 = 0$; $e^x - 1 = 0$; $e^x = 1$; $x = 0 \in G$;
$L = \{0\}$

b) $\ln(2 - e^{-x}) = 0$; $2 - e^{-x} = 1$; $e^{-x} = 1$; $e^{-x} = 1$; $x = 0 \in G$;
$L = \{0\}$

c) $\frac{\ln x^2 + k^2}{x} = 0$; $\frac{x^2 + k^2}{x} = 1$;
$x^2 + k^2 = x$; $x^2 - x + k^2 = 0$;
$D = 1 - 4k^2$;
$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4k^2}}{2}$
Fallunterscheidung:
I. $D = 1 - 4k^2 > 0$, $4k^2 < 1$; $k^2 < \frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$;
da $k > 0$ ist: $0 < k < \frac{1}{2}$
Es gibt zwei Lösungen $\in G$, wenn $0 < k < \frac{1}{2}$ ist:
$L = \left\{\frac{1 - \sqrt{1 - 4k^2}}{2}; \frac{1 + \sqrt{1 - 4k^2}}{2}\right\}$
II. $D = 1 - 4k^2 = 0$; $k_1 = -\frac{1}{2}$: nicht möglich, da $k > 0$ ist;
$k_2 = \frac{1}{2}$: Es gibt genau eine Lösung, nämlich
$x = \frac{1}{2} \in G$:
$L = \{\frac{1}{2}\}$
III. $D = 1 - 4k^2 < 0$: Es gibt keine Lösung $\in G$; also ist $L = \{\,\}$.

d) $e^x - 3 + 2e^{-x} = 0$; $| \cdot e^x$
$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$;
$(e^x - 2)(e^x - 1) = 0$;
$e^x = 2$;
$x_1 = \ln 2 \in G$;
$e^x = 1$
$x_2 = 0 \in G$;
$L = \{0\,;\, \ln 2\}$

2. a) $\ln(e^{-1}) + \ln(e^e) + e^{\ln 2} = -1 + e + 2 = e + 1$

b) $\ln[\ln(e^e)] = \ln(e \ln e) = \ln e = 1$

c) $(e^{\ln 5} + e^{\ln 2}) : e^{\ln 7} = (5 + 2) : 7 = 1$

3. a) Der kleinste Wert von $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\sin x - 2}$ ist $\left(\frac{3}{4}\right)^{1-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$;
er wird für $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) angenommen.

b) Der größte Wert von $g(x) = (\sqrt{2})^{2\cos x + 1}$ ist $(\sqrt{2})^{2+1} = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$;
er wird für $x = 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) angenommen.

4. a) $y' = 2(2x + 1) \cdot 2 \cdot e^x + (2x + 1)^2 e^x = (2x + 1)(2x + 5)e^x$

b) $y = e^{\ln x} = x$; $y' = 1$, falls $x > 0$ ist.

c) $y' = \frac{(4 + e^x) \cdot 4e^x - 4e^x \cdot e^x}{(4 + e^x)^2} = \frac{4e^x(4 + e^x - e^x)}{(4 + e^x)^2} = \frac{16e^x}{(4 + e^x)^2}$

d) $y' = \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1 + e^{2x}}} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$

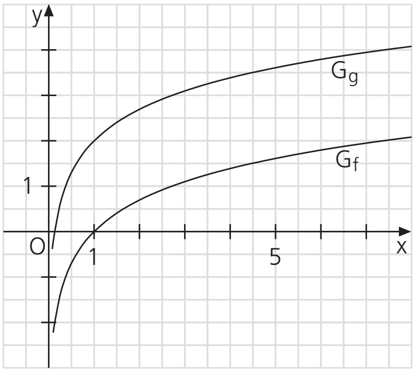
e) $y' = -e^{\cos x} \cdot \sin x$

f) $y = \ln \frac{e}{x} = \ln e - \ln x = 1 - \ln x$;
$y' = -\frac{1}{x}$

g) $y' = \frac{(\ln x)^2 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - (1 - \ln x) \cdot 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^4} = \frac{-\ln x - 2 + 2\ln x}{x(\ln x)^3} = \frac{\ln x - 2}{x(\ln x)^3}$

h) $y' = \dfrac{1 - \frac{1}{x^2}}{x + \frac{1}{x}} = \dfrac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}$

i) $y' = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - 1} = -\dfrac{1}{x(1 - x)} = \dfrac{1}{x(x - 1)}$

5. 

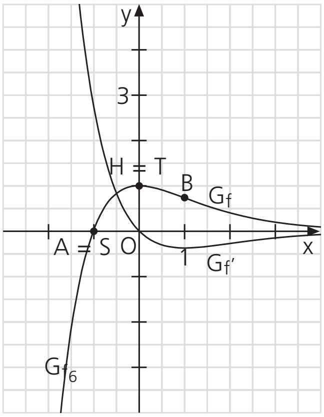
$\ln(e^2 x) = \ln e^2 + \ln x = 2 + \ln x$:
Man erhält G_g, indem man G_f um 2 Einheiten in Richtung der y-Achse nach oben verschiebt.
$\ln(ax) = \ln a + \ln x$:
Man erhält den Graphen der Funktion G_a, indem man G_f um ln a Einheiten in Richtung der y-Achse nach oben (für $a > 1$) bzw. um $|\ln a|$ Einheiten nach unten (für $0 < a < 1$) verschiebt.

6. $T(t) - T_0 = (T_1 - T_0)e^{-kt}$
Rechnung mit Maßzahlen: $105 - 24 = (120 - 24) \cdot e^{-k \cdot 1}$;
$81 = 96e^{-k}$; $e^{-k} = \frac{81}{96}$;
$-k = \ln \frac{81}{96} = -0{,}16989\ldots$; $k \approx 0{,}17$;
$40 - 24 = (105 - 24) \cdot e^{-0{,}17t}$;
$16 = 81 \cdot e^{-0{,}17t}$;
$e^{-0{,}17t} = \frac{16}{81}$; $-0{,}17t = \ln \frac{16}{81}$;
$t = -\frac{1}{0{,}17} \cdot \ln \frac{16}{81} = 9{,}540\ldots \approx 10$
Innerhalb von weiteren rund 10 Minuten kühlt sich die Pfanne von 105 °C auf 40 °C ab.

7. a) Schnittpunkt mit der x-Achse: $x + 1 = 0$; $x = -1$; $S(-1 \mid 0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$; $T(0 \mid 1)$

b) Ableitung:
$f'(x) = \dfrac{e^x \cdot 1 - (x + 1)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x(1 - x - 1)}{e^{2x}} = -\dfrac{x}{e^x}$;
$f'(0) = 0$

x	$-\infty < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < +\infty$
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$
Vorzeichenwechsel von $f'(x)$		von + nach –	
G_f hat		den Hochpunkt $H(0 \mid 1) = T$	



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ (Hinweis: vgl. 5.1 Aufgabe 17.);

für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.

c) $f'(-1) = \frac{1}{e^{-1}} = e$;

$f'(1) = -\frac{1}{e}$; da $f'(-1) \cdot f'(1) = e \cdot \left(-\frac{1}{e}\right) = -1$ ist, stehen die Tangenten t_A und t_B an G_f in den Graphpunkten A bzw. B aufeinander senkrecht.

d) $F'(x) = \frac{e^x \cdot b - (a + bx) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{b - a - bx}{e^x} = f(x)$;

$\frac{b - a - bx}{e^x} = \frac{1 + x}{e^x}$;

Es muss gelten $-b = 1$, d. h. $b = -1$, und $b - a = 1$; also $-1 - a = 1$, d. h. $a = -2$:

$F(x) = \frac{-2 - x}{e^x}$

Probe $F'(x) = \frac{e^x \cdot (-1) - (-2 - x)e^x}{e^{2x}} = \frac{-1 + 2 + x}{e^x} = \frac{x + 1}{e^x} = f(x)$ ✓

8. $f(0) = \frac{4}{2} = 2$; der Punkt T $(0 \mid 2) \in G_f$ liegt nicht auf G_{III}.

$f'(x) = \frac{(1 + e^x) \cdot 4e^x - 4e^x \cdot e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{4e^x(1 + e^x - e^x)}{(1 + e^x)^2} = \frac{4e^x}{(1 + e^x)^2}$;

$f'(0) = \frac{4}{4} = 1 > 0$;

Die Tangentensteigung im Punkt T ist nur bei G_{II} positiv: $G_{II} = G_f$.

G_I: $f_I(x) = \frac{4e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{4}{e^x + 1}$;

G_{III}: $f_{III}(x) = \frac{4e^{x-2}}{1 + e^{x-2}} = \frac{4e^x}{e^2 + e^x}$

Kann ich das? – Lösungen zu Seite 192

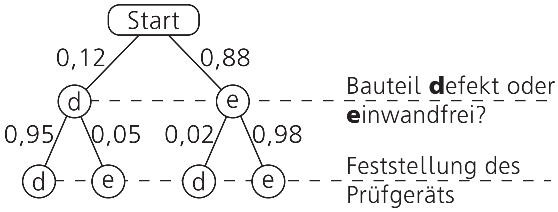
1. a) $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
$A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$; $P(A) = 0{,}5$; $B = \{3; 6; 9\}$; $P(B) = 0{,}3$;
$C = \{0; 1; 2; 3; 4\}$; $P(C) = 0{,}5$; $D = \{2; 3; 5; 7\}$; $P(D) = 0{,}4$;
$E = \{1; 4; 9\}$; $P(E) = 0{,}3$; $F = \{9\}$; $P(F) = 0{,}1$

b) $A \cap B = \{3; 9\}$: „Die Nummer ist ungerade und durch 3 teilbar"
$A \cup B = \{1; 3; 5; 6; 7; 9\}$: „Die Nummer ist ungerade und/ oder durch 3 teilbar"
$\overline{A \cup C} = \{6; 8\}$: „Die Nummer ist gerade und mindestens gleich 5"
$\overline{D \cap E} = \Omega$: „Die Nummer ist nicht gleichzeitig Primzahl und Quadrazahl"

c) (1) $B \cap \overline{E} = \{3; 6\}$ (2) $(A \cap \overline{E}) \cup (\overline{A} \cap E) = \{3; 4; 5; 7\}$ (3) $A \cup E = \{1; 3; 4; 5; 7; 9\}$

2. a) P(„genau ein Bauteil ist defekt") $= 5 \cdot 0{,}88^4 \cdot 0{,}12 \approx 36{,}0\%$
P(„höchstens ein Bauteil ist defekt") $= 5 \cdot 0{,}88^4 \cdot 0{,}12 + 0{,}88^5 \approx 88{,}8\%$
P(„mindestens ein Bauteil ist defekt") $= 1 - 0{,}88^5 \approx 47{,}2\%$

b) Baumdiagramm:



(1) P(„Das Prüfgerät zeigt ein Bauteil als defekt an") $= 0{,}12 \cdot 0{,}95 + 0{,}88 \cdot 0{,}02 \approx 13{,}2\%$

(2) $P_{\text{„Das Prüfgerät zeigt ‚defekt' an"}}(\text{„Bauteil ist defekt"}) = \dfrac{0{,}12 \cdot 0{,}95}{0{,}12 \cdot 0.95 + 0{,}88 \cdot 0{,}02} \approx 86{,}6\%$

(3) $P_{\text{„Das Prüfgrät zeigt ‚einwandfrei' an"}}(\text{„Bauteil ist einwandfrei"}) = \dfrac{0{,}88 \cdot 0{,}98}{0{,}12 \cdot 0{,}05 + 0{,}88 \cdot 0{,}98} \approx 99{,}3\%$

3. Anzahlen:

	K	$\overline{K}$	
A	x	12 – x	12
$\overline{A}$	39 – x	5x	59
	39	32	71

Relative Häufigkeiten:

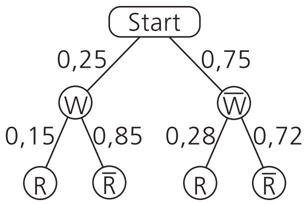
	K	$\overline{K}$	
A	0,070	0,099	0,169
$\overline{A}$	0,479	0,352	0,831
	0,549	0,451	1,000

$39 - x = 59 - 5x$; $| + 5x - 39$
$4x = 20$; $| : 4$
$x = 5$; $5x = 25$; $12 - x = 7$; $39 - x = 34$

a) Genau eines dieser beiden Mathematikprobleme haben (7 + 34 =) 41 der Befragten; das sind etwa 58%

b) $h(A \cap K) \approx 0{,}070$; $h(A) \cdot h(K) \approx 0{,}169 \cdot 0{,}549 \approx 0{,}093 \neq h(A \cap K)$:
Die beiden Probleme treten stochastisch nicht unabhängig voneinander auf.

4.



	W	$\overline{W}$	
R	0,0375	0,21	0,2475
$\overline{R}$	0,2125	0,54	0,7525
	0,25	0,75	1,000

a) $P_{\text{„Person nimmt teil"}}(\text{„Person wiederholt"}) = \dfrac{0{,}25 \cdot 0{,}85}{0{,}25 \cdot 0{,}85 + 0{,}75 \cdot 0{,}72} \approx 28{,}2\%$

b) $P(W \cap R) = 0{,}0375$;
$P(W) \cdot P(R) = 0{,}25 \cdot 0{,}2475 \approx 0{,}0619 \neq P(W \cap R)$:
Die Ereignisse W und R sind stochastisch nicht voneinander unabhängig.

c) P(„Spätestens an 6. Stelle steht ein Wiederholer/ eine Wiederholerin") $= 1 - 0{,}75^6 \approx 82{,}2\%$

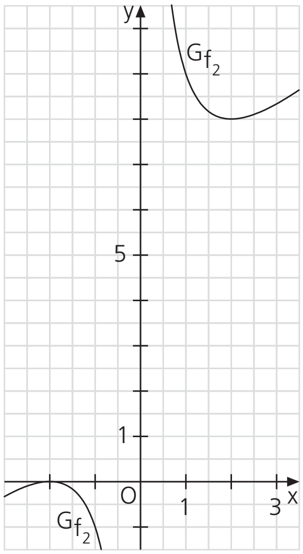
Kann ich das? – Lösungen zu Seite 216

1. $f'(x) = 0{,}5 \cdot 2(x-1)(x+2) + 0{,}5(x-1)^2 \cdot 1 =$
$= 0{,}5(x-1)(2x+4+x-1) =$
$= 0{,}5(x-1)(3x+3);$
$f''(x) = 0{,}5(3x+3) + 0{,}5(x-1) \cdot 3 =$
$= 0{,}5(3x+3+3x-3) =$
$= 3x;$
$f'(x) = 0; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = -1;$
$f''(1) = 3 > 0; \quad f''(-1) = -3 < 0:$
G_f hat einen Hochpunkt H $(-1 \mid 2)$ und einen Tiefpunkt T $(1 \mid 0)$.

a) $f(-2{,}5) = 0{,}5 \cdot (-3{,}5)^2 \cdot (-0{,}5) = -3{,}0625;$
$f(1{,}5) = 0{,}5 \cdot 0{,}5^2 \cdot 3{,}5 = 0{,}4375$
Die Funktion f hat im Intervall I_a das globale Maximum $f(-1) = 2$ und das globale Minimum $f(-2{,}5) = -3{,}0625$ (Randminimum).

b) $f(-1{,}5) = 0{,}5 \cdot (-2{,}5)^2 \cdot 0{,}5 = 1{,}5625;$
$f(2{,}5) = 0{,}5 \cdot 1{,}5^2 \cdot 4{,}5 = 5{,}0625$
Die Funktion f hat im Intervall I_b das globale Maximum $f(2{,}5) = 5{,}0625$ (Randmaximum) und das globale Minimum $f(1) = 0$.

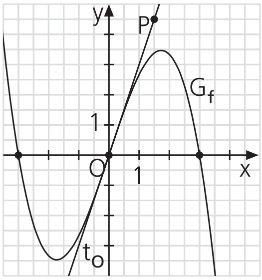
2. $f_a'(x) = 1 - \frac{a^2}{x^2}; \quad f_a''(x) = \frac{2a^2}{x^3};$
$f_a'(x) = 0: \; x^2 = a^2; \quad x = \pm a;$
$f_a''(a) = \frac{2a^2}{a^3} = \frac{2}{a} > 0$, da $a \in \mathbb{R}^+;$
$f(a) = a + a + \frac{8}{a} = 2a + \frac{8}{a};$
$f_a''(-a) = \frac{2a^2}{(-a)^3} = -\frac{2}{a} < 0; \quad f(-a) = -2a + \frac{8}{a}:$
lokaler Tiefpunkt von G_{f_a}: $\; T\left(a \mid 2a + \frac{8}{a}\right);$
$y_T(a) = 2a + \frac{8}{a}; \quad y_T'(a) = 2 - \frac{8}{a^2}; \quad y_T''(a) = \frac{16}{a^3};$
$y_T'(a) = 0: \; 2 - \frac{8}{a^2} = 0; \quad a^2 = 4; \quad a^* = 2;$ da $a^* \in \mathbb{R}^+;$
$y_T''(2) = \frac{16}{8} = 2 > 0:$
Für $a^* = 2$ ist die y-Koordinate des lokalen Tiefpunkts am kleinsten: $y_T(2) = 8$.



3. a) $F(x) = \frac{a}{x^2+3}; \quad F'(x) = \frac{-2ax}{(x^2+3)^2} = f(x):$
$-2ax = 20x; \quad a = -10 \; (D_{F'} = \mathbb{R} = D_f).$

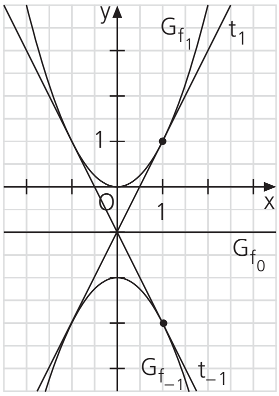
b) $F'(x) = ae^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\frac{2x}{2}\right) = -axe^{-\frac{x^2}{2}} = -4xe^{-\frac{x^2}{2}}:$
$a = 4 \; (D_{F'} = \mathbb{R} = D_f).$

4. a) Ansatz: $f(x) = Kx(x+3)(x-3) = K(x^3 - 9x);$
$f'(x) = K(3x^2 - 9);$
$f'(0) = -9K;$
$m_{to} = \frac{4{,}5}{1{,}5} = 3 = f'(0);$
$-9K = 3; \quad K = -\frac{1}{3}$
Funktionsterm: $f(x) = -\frac{x}{3}(x^2 - 9) = -\frac{x^3}{3} + 3x$

b) 

Eckpunkte:
V (–a | f(–a)), I (a | f(–a)),
E (a | f(a)), R (–a | f(a)) mit
$f(a) = -\frac{a^3}{3} + 3a$;
$f(-a) = \frac{a^3}{3} - 3a$
Flächeninhalt:
$A_{VIER} = A(a) = 2a \cdot 2f(a) = 2a \cdot 2\left(-\frac{a^3}{3} + 3a\right) = -\frac{4}{3}a^4 + 12a^2$;
$A'(a) = -\frac{16}{3}a^3 + 24a$; $A''(a) = -16a^2 + 24$;
$A'(a) = 0$: $-\frac{16}{3}a\left(a^2 - \frac{9}{2}\right) = 0$; $0 < a < 3$:
$a = \frac{3}{2}\sqrt{2}$;
$A''\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = -16 \cdot \frac{9}{2} + 24 = -48 < 0$:
$A\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{81}{4} + 12 \cdot \frac{9}{2} = -27 + 54 = 27$ ist das Maximum von A_{VIER}.

5. a) Die Graphen sind für $k \neq 0$ Parabeln mit dem Scheitel S (0 | k – 1); für k = 0 ergibt sich eine zur x-Achse parallele Gerade mit der Gleichung y = –1.

b) 

c) P (1 | 2k – 1)
$f_k'(x) = 2kx$; $f_k'(1) = 2k$;
t_k: $y = 2kx + t$;
$P \in t_k$: $2k - 1 = 2k + t$; $t = -1$;
t_k: $y = 2kx - 1$; daraus folgt, dass t_k für jeden Wert von k den gleichen y-Achsenabschnitt –1 hat, also durch T (0 | –1) verläuft.

d) x-Achsenabschnitt von t_k:
$2kx - 1 = 0$; $x = \frac{1}{2k} (k \neq 0)$
Flächeninhalt:
$A(k) = \left|\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2k}\right| = \left|\frac{1}{4k}\right|$; $A(-0{,}25) = \left|\frac{1}{4 \cdot (-0{,}25)}\right| = 1$
$\lim\limits_{k \to \infty} A(k) = \lim\limits_{k \to \infty} \left|\frac{1}{4k}\right| = 0$

6. $A(r) = 2r\pi h + 4r^2\pi$; Rechnung in Maßzahlen (Einheit mm, mm^2 bzw mm^3):
$4r^2\pi + 2r\pi h = 250$;
$h = \frac{250 - 4r^2\pi}{2r\pi}$;
Volumen des Zylinders:
$V_Z = r^2\pi h$;
$V_Z(r) = \frac{(250 - 4r^2\pi)r^2\pi}{2r\pi} = \frac{r}{2}(250 - 4r^2\pi) = 125r - 2r^3\pi$;
$V_Z'(r) = 125 - 6r^2\pi$;
$V_Z''(r) = -12r\pi < 0$ wegen $r > 0$
$V_Z'(r) = 0$: $6r^2\pi = 125$;
$r^2 = \frac{125}{6\pi}$;
$r = \sqrt{\frac{125}{6\pi}} \approx 2{,}58$;
$$h \approx \frac{250 - 4 \cdot \frac{125}{6\pi} \cdot \pi}{2\pi\sqrt{\frac{125}{6\pi}}} = \frac{\frac{500}{3}}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{125}{6\pi}}} \approx 10{,}30$$
Gesamtvolumen der Kapsel:
$V_K \approx 2{,}58^2\pi \cdot 10{,}30 + \frac{4}{3} \cdot 2{,}58^3 \cdot \pi \approx 286{,}1$:
Mit $r_0 \approx 2{,}58$ mm und $h_0 \approx 10{,}30$ mm (die optimale Kapsel ist also eta $1\frac{1}{2}$ cm lang und $\frac{1}{2}$ cm breit) ergibt sich ein Kapselvolumen von etwa 286 mm^3.

7. a) Graph von f ist B und Graph von f′ ist A, da nur dann $f'(-1) = 0$, $f'(1) = 0$ und $f'(0) < 0$ ist.
Graph von g ist D und Graph von g″ ist C, da nur dann $g''(x) < 0$ für $x < 1$ und $g''(x) > 0$ für $x > 1$ ist.

b) Jakob kann (3 + 2 + 1 =) 6 verschiedene Kartenpaare ziehen; er zieht also mit der Wahrscheinlichkeit ($\frac{2}{6} \approx$) 33% ein zusammenpassendes Paar.