

Das bieten wir für das erhöhte Anforderungsniveau zusätzlich an:

Inhalt

A Statische elektrische und magnetische Felder

- 1 Spezialfall für elektrische Felder:
Das radialsymmetrische Feld
- 2 Materie im elektrischen Feld
- 3 Auf- und Entladevorgang bei einem RC-Glied
- 4 Energie im radialsymmetrischen elektrischen Feld

B Induktion und elektromagnetische Schwingung

- 5 Schaltvorgänge in einem RL-Glied
- 6 Differentialgleichung der elektromagnetischen Schwingung
- 7 Gedämpfte Schwingung und Abklingverhalten
- 8 Resonanzphänomene
- 9 Zeigerdiagramme
- 10 Spule, Kondensator und Wechselstromwiderstand
- 11 Frequenzfilter

C Elektromagnetische Wellen

- 12 Änderung von Q und I im Nahbereich eines Dipols
- 13 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Fernbereich eines Dipols
- 14 Beschreibung der ebenen elektromagnetischen Welle
- 15 Beschreibung von Superposition mithilfe von Zeigerdiagrammen
- 16 Interferenz am Doppelspalt
- 17 Interferenz am Mehrfachspalt und optischem Gitter mit Zeigerdiagrammen
- 18 Interferenz am Einfachspalt mit Zeigerdiagrammen
- 19 Bragg-Reflexion
- 20 Verfahren zur Wellenlängenbestimmung

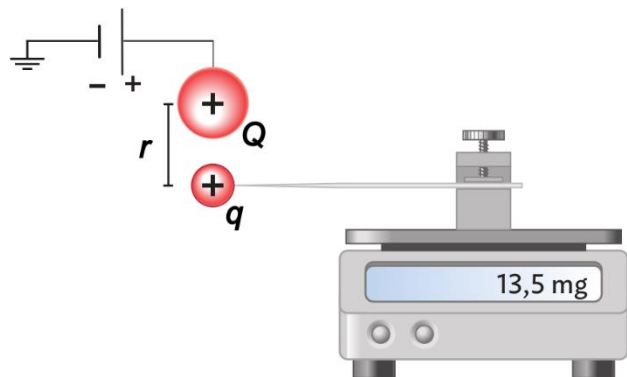
Ph12 Lernbereich 1: Statische elektrische und magnetische Felder

Die Schülerinnen und Schüler...

- bestätigen anhand von Messwerten durch Regression den Term für die Coulombkraft.

Kraft zwischen zwei punktförmigen Ladungen

Zur Bestimmung der Kraftwirkung auf eine Probeladung q im statischen Feld einer Feldladung Q kann wie im vergleichbaren Fall des Plattenkondensators vorgegangen werden (vgl. B1 im Buch auf S. 20). Statt der beiden Platten wird eine positiv geladene Kugel als felderzeugende Ladung über die ebenfalls positiv geladene Probekugel platziert. Die Änderung der Kraft auf die Probekugel ist hier wieder auf die elektrostatische Kraft zwischen den beiden Kugeln zurück zu führen und zeigt sich in der Zunahme der von der Waage angezeigten „Masse“.



Die Aufnahme und Auswertung der Messergebnisse bei Änderung von einer der Messgrößen und Konstanthaltung der anderen Größen erfolgt dann beispielsweise so:

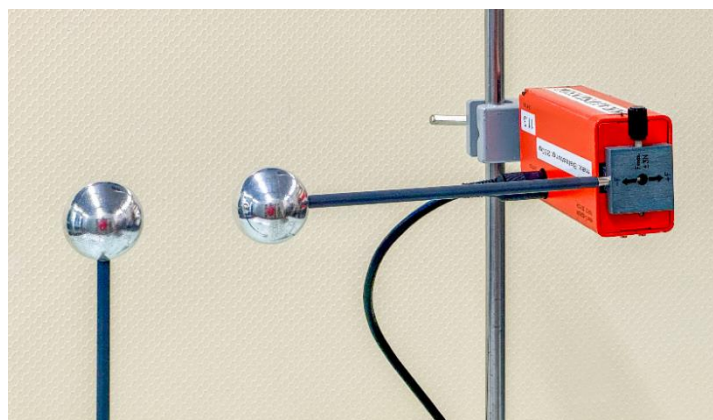
- Die Ladung Q der felderzeugenden Kugel sowie die Ladung q der Probekugel werden mit einem empfindlichen Ladungsmessgerät bestimmt und konstant gehalten.
- Der Abstand r zwischen den Mittelpunkten der beiden Kugeln wird variiert.

Nachteil bei diesem Aufbau des Experiments ist neben der ungenauen Ladungsbestimmung auch die geringe Änderung der Kraft bzw. der Massenanzeige an der Waage.

Versuch 1: Untersuchung der Abhängigkeit von r

Im ersten Versuch wird nun die Abhängigkeit der Kraft vom Abstand der beiden Kugeln untersucht und daher, wie oben beschrieben, die Ladung der beiden Kugeln konstant gehalten.

Die Kraftmessung kann genauer erfolgen, wenn statt der Waage ein Sensor verwendet wird, der auch noch sehr kleine Kräfte erfassen kann (vgl. Foto rechts). Wird zusätzlich der Abstand der beiden Kugeln elektronisch erfasst, lassen sich alle Messdaten bequem exportieren und weiter auswerten.



© Rainer Dietrich, Schweinfurt

Im Folgenden werden mögliche Ergebnisse des Versuchs, sowie die Durchführung der darauf basierenden Regressionsanalyse dargestellt.

Messergebnisse

Bei einem wie oben beschriebenen Versuch wurden folgende Messwerte aufgezeichnet:

r in m	0,100	0,150	0,200	0,250	0,300	0,350	0,400	0,500	0,750
F_{el} in mN	8,45	3,60	2,10	1,27	0,93	0,64	0,48	0,25	0,08

Berücksichtigung von Messunsicherheiten

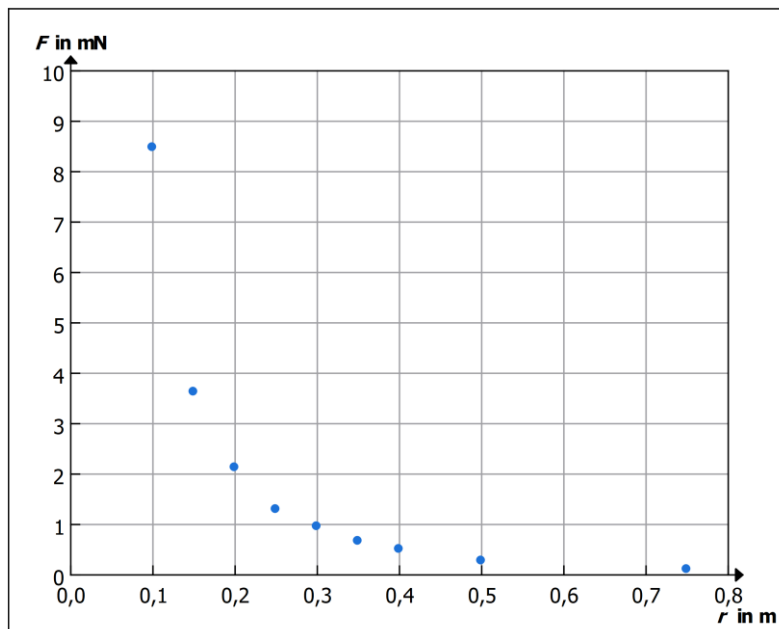
Sollen Gesetzmäßigkeiten aus der Durchführung eines Versuchs hergeleitet werden, spielt die Genauigkeit der Messwerte eine wichtige Rolle. Vor der Datenanalyse müssen daher Messunsicherheiten erfasst und möglichst klein gehalten werden.

In unserem Fall lies sich die Entfernung der Probeladung von der Hohlkugel auf mm genau ablesen, was jeweils zu einer Messunsicherheit von $\pm 0,001$ m führt. Der Kraftmesser bot eine Skala, die die Kraft mit einer Nachkommastelle in Newton angab. Die messunsicherheit beträgt dort jeweils $\pm 0,05$ mN. Alternativ können für jedes Wertepaar mehrere Messungen (im gleichen Abstand, aber an einer anderen Position) durchgeführt und der Durchschnittswert dieser Messungen als Messwert verwendet werden. Die Spannweite der Messwerte wird in der Tabelle als Unsicherheitswert angegeben.

Grundsätzlich sind bei Messungen in der Physik stets auch die Messunsicherheiten mit zu dokumentieren.

Visualisierung der Messwerte

Das Diagramm der Messwerte offenbart, dass kein linearer Zusammenhang zwischen dem Abstand r und der Kraft F besteht – wir können keine sinnvolle Ausgleichsgerade durch die Messpunkte ziehen.



Hingegen wären Zusammenhänge wie $F \sim \frac{1}{r}$ oder $F \sim \frac{1}{r^2}$ möglich, da die (gedachte) Kurvenform eine indirekte Proportionalität nahelegt. Um zu beurteilen, ob diese Hypothesen zutreffen, kommen verschiedene Möglichkeiten in Betracht.

Möglichkeit 1: Algebraische Auswertung mit geeigneter Tabelle

Um die Daten mithilfe einer Tabelle auszuwerten und die vermuteten Zusammenhänge zu untersuchen, wird die Messwerttabelle um die berechneten Werte für $F \cdot r$ bzw. $F \cdot r^2$ erweitert. Ergibt sich für einen der beiden letzten Terme ein konstanter Wert, so kann damit die entsprechende Hypothese als bestätigt gelten.

Natürlich wird man nicht erwarten, dass diese Bedingung exakt erfüllt ist. Dies führt auf die Frage, welche Abweichungen denn noch tolerierbar sind, um die Hypothese als erfüllt anzusehen. Dazu muss auch für die zusammengesetzten Werte $F \cdot r$ bzw. $F \cdot r^2$ eine Unsicherheit angegeben werden; das Verfahren dazu wird im **Methodenkasten** behandelt.

r in m	0,100 $\pm 0,001$	0,150 $\pm 0,001$	0,200 $\pm 0,001$	0,250 $\pm 0,001$	0,300 $\pm 0,001$	0,350 $\pm 0,001$	0,400 $\pm 0,001$	0,500 $\pm 0,001$	0,750 $\pm 0,001$
F_{el} in mN	8,45 $\pm 0,05$	3,60 $\pm 0,05$	2,10 $\pm 0,05$	1,27 $\pm 0,05$	0,93 $\pm 0,05$	0,64 $\pm 0,05$	0,48 $\pm 0,05$	0,25 $\pm 0,05$	0,08 $\pm 0,05$
$F \cdot r$ in 10^{-3} Nm	0,845 $\pm 0,013$	0,540 $\pm 0,011$	0,420 $\pm 0,012$	0,318 $\pm 0,014$	0,280 $\pm 0,016$	0,224 $\pm 0,018$	0,192 $\pm 0,020$	0,125 $\pm 0,025$	0,060 $\pm 0,038$
$F \cdot r^2$ in 10^{-3} Nm ²	0,085 $\pm 0,002$	0,081 $\pm 0,002$	0,084 $\pm 0,003$	0,079 $\pm 0,004$	0,084 $\pm 0,005$	0,078 $\pm 0,007$	0,077 $\pm 0,008$	0,063 $\pm 0,013$	0,045 $\pm 0,028$

Fazit: Vergleicht man nun die letzten beiden Zeilen der Tabelle, so muss aufgrund der Messwerte und ihrer Unsicherheiten die Hypothese $F \sim \frac{1}{r}$ verworfen werden, während die Hypothese $F \sim \frac{1}{r^2}$ als bestätigt betrachtet werden darf.

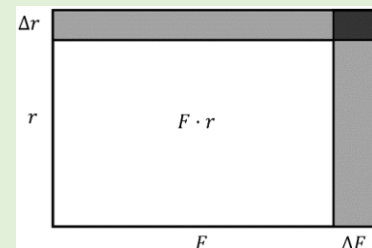
Methode

Messunsicherheit bei zusammengesetzten Termen

Betrachten wir beispielhaft die gemessenen Größen F und r , zusammen mit ihren absoluten Messunsicherheiten ΔF und Δr . Häufig werden auch die zugehörigen relativen Unsicherheiten verwendet, das sind dann $\gamma_F = \frac{\Delta F}{F}$ und $\gamma_r = \frac{\Delta r}{r}$.

Bei Summen und Differenzen addieren sich die absoluten Messunsicherheiten. Denn z. B. bei der Addition zweier Strecken $r_1 \pm \Delta r_1$ und $r_2 \pm \Delta r_2$ wären im „schlimmsten Fall“ die größten bzw. kleinsten Messergebnisse $(r_1 + r_2) + (\Delta r_1 + \Delta r_2)$ bzw. $(r_1 + r_2) - (\Delta r_1 + \Delta r_2)$.

Bei Produkten und Quotienten addieren sich die relativen Messunsicherheiten. Dies lässt sich einsehen, wenn man z. B. ein Produkt graphisch darstellt. Dann wird z. B. $F \cdot r$ durch ein Rechteck dargestellt (vgl. Abbildung). Im „schlimmsten Fall“ würde man einen zu großen Flächeninhalt $(F + \Delta F) \cdot (r + \Delta r)$ messen. Ausmultiplizieren ergibt: $(F + \Delta F) \cdot (r + \Delta r) = F \cdot r + \Delta F \cdot r + F \cdot \Delta r + \Delta F \cdot \Delta r$



Den letzten Summanden kann man im Vergleich mit den restlichen Summanden vernachlässigen und die relative Messunsicherheit des Produkts wird $\gamma_{F \cdot r} = \frac{\Delta(F \cdot r)}{F \cdot r} = \frac{\Delta F \cdot r + F \cdot \Delta r}{F \cdot r} = \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta r}{r} = \gamma_F + \gamma_r$.

Rechenbeispiel: Wir betrachten die erste Spalte der Tabelle oben, also $r = (0,100 \pm 0,001)$ m und $F_{\text{el}} = (8,45 \pm 0,05)$ mN. Für die jeweiligen relativen Unsicherheiten gilt dann $\gamma_r = \frac{0,001 \text{ m}}{0,100 \text{ m}} = 0,01$ und $\gamma_F = \frac{0,05 \text{ mN}}{8,45 \text{ mN}} = 0,0059$.

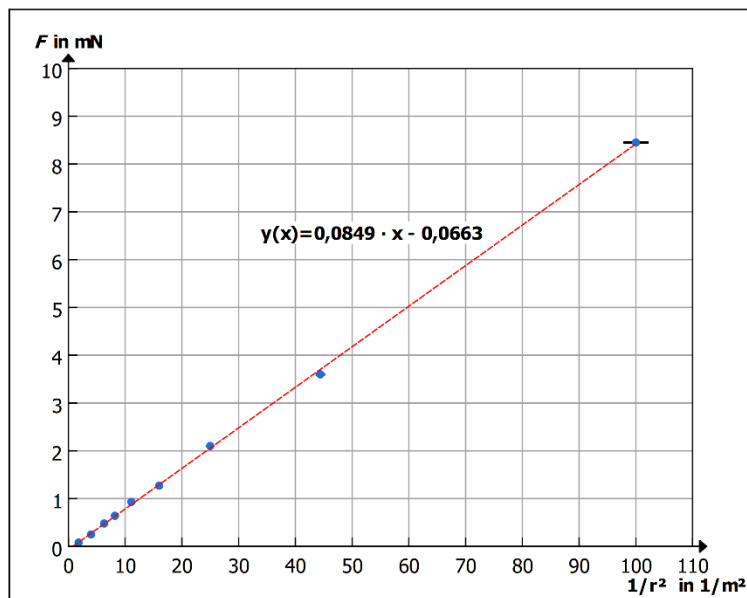
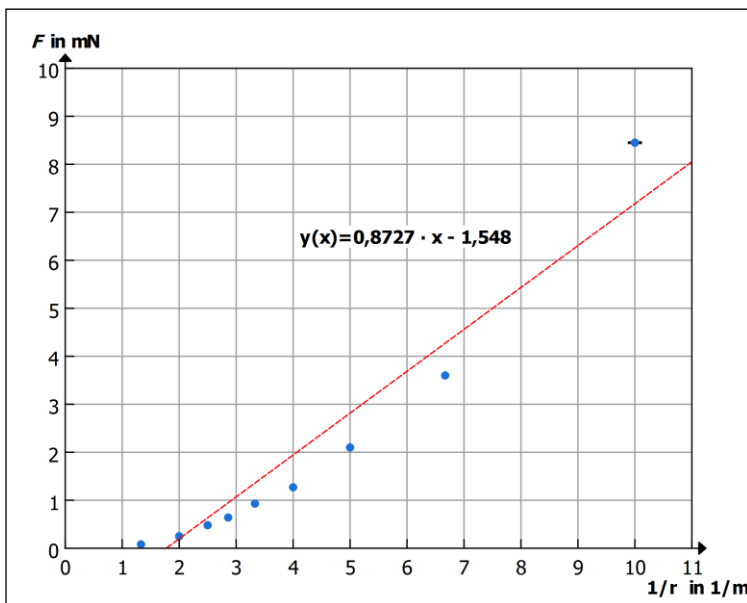
Nun berechnet man die relative Unsicherheit von $F \cdot r$: $\gamma_{F \cdot r} = \gamma_F + \gamma_r = 0,0159$.

Abschließend ermittelt man die absolute Unsicherheit $\Delta(F \cdot r)$ – das ist der Wert, der in der Tabelle angegeben wird: $\Delta(F \cdot r) = \gamma_{F \cdot r} \cdot (F \cdot r) = 0,0159 \cdot 0,845 \cdot 10^{-3} \text{ Nm} = 0,013 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$.

Möglichkeit 2: Graphische Auswertung durch Linearisierung

Diese Methode wurde bereits in früheren Jahrgangsstufen verwendet, wenn sich keine einfach erkennbare direkte Proportionalität zwischen zwei Messgrößen ergeben hatte. Aus dem Hyperbelgraph einer indirekten Proportionalität kann ein besser interpretierbarer linearer Graph einer direkten Proportionalität gewonnen werden. Dazu wird hier die Rechtswertachse (Abszisse) statt mit r mit den daraus berechneten Werte von $\frac{1}{r}$ bzw. $\frac{1}{r^2}$ skaliert und darüber die davon abhängigen Werte der elektrischen Kraft F_{el} aufgetragen.

In unserem Fall stehen die beiden Hypothesen $F \sim \frac{1}{r}$ oder $F \sim \frac{1}{r^2}$ zur Auswahl, entsprechend müssen auf der Rechtswertachse die Größen $\frac{1}{r}$ bzw. $\frac{1}{r^2}$ aufgetragen werden. Das Ergebnis (mit Unsicherheitsbalken) zeigen die folgenden beiden Diagramme.

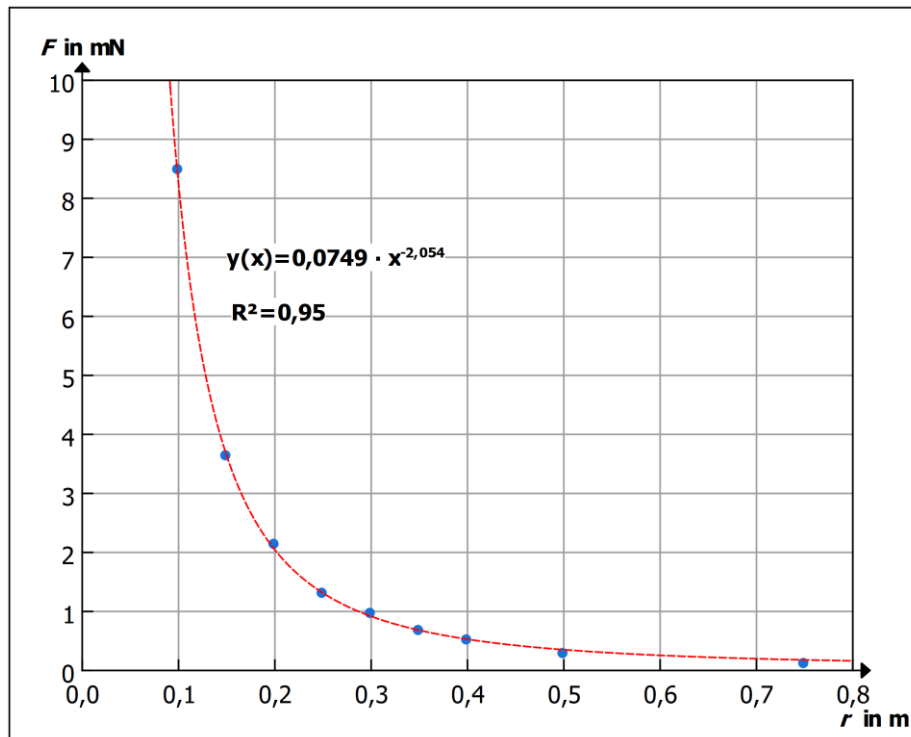


Fazit: Innerhalb der Unsicherheitsbereiche lässt sich im ersten Fall ganz sicher keine Ursprungsgerade durch die Messwerte legen, im zweiten Fall (näherungsweise) schon. Dadurch wird die Hypothese $F \sim \frac{1}{r}$ verworfen und die Hypothese $F \sim \frac{1}{r^2}$ bestätigt.

Möglichkeit 3: Graphische Auswertung mit Trendlinie

Das mathematische Verfahren, um durch eine Reihe von Datenpunkten den „besten“ Funktionsgraphen (innerhalb einer bestimmten Klasse von Funktionen) zu legen, heißt Regression. Genaueres dazu findet sich bei der **Methode** im Schulbuch auf S. 47.

Im vorliegenden Fall muss die Funktionsklasse „Potenzfunktionen“ ausgewählt werden; das Ergebnis zeigt das folgende Diagramm.



Das Bestimmtheitsmaß $R^2 = 0,95$ bedeutet, dass alle Datenpunkte nahezu exakt auf dem Funktionsgraphen liegen. Der Exponent -2,05 unterscheidet sich nur geringfügig vom einfacheren Exponenten -2.

Fazit: Anhand dieser Vorgehensweise lässt sich ein Funktionsterm angeben. Dieser bestätigt in guter Näherung die Hypothese $F \sim \frac{1}{r^2}$.

Versuch 2: Untersuchung der Abhängigkeit von Q

In einem zweiten Versuch wird nun die Abhängigkeit der Kraft F von der Größe der felderzeugenden Ladung Q untersucht. Hier wird nun also der Abstand der beiden Kugeln konstant gehalten und der Betrag der felderzeugenden Ladung Q variiert.

Die Auswertung in diesem Fall ist einfacher; es ergibt sich eine direkte Proportionalität: $F \sim Q$.

Hinweis: Aus Symmetriegründen (aufgrund des 3. Newtonschen Gesetzes) liegt ebenso eine direkte Proportionalität zu q vor, also $F \sim q$.

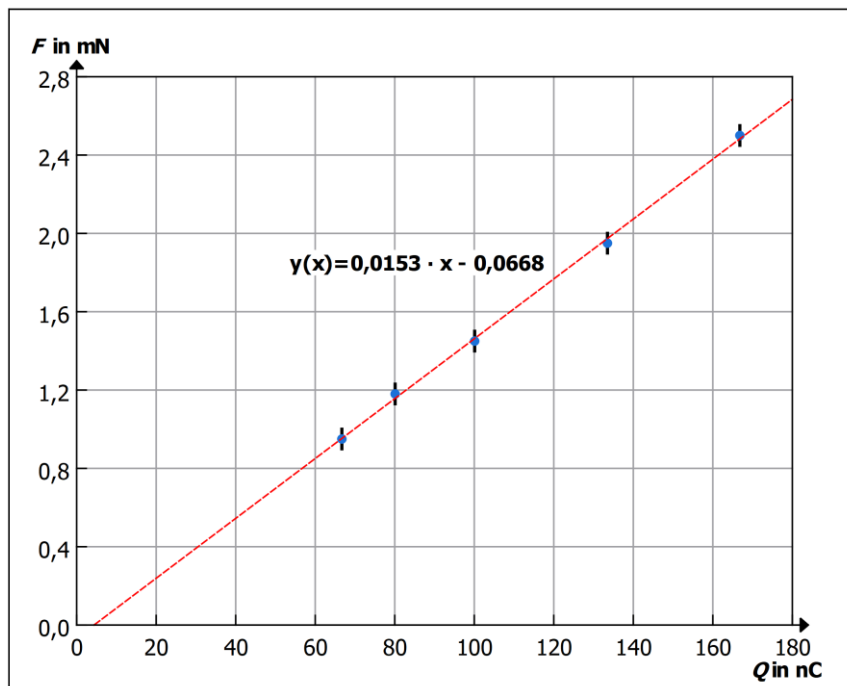
Messbeispiel:

Die aufgebrachte Ladungsmenge Q , die abhängig von der Aufladespannung U ist, wird vor und nach der Messung überprüft. Damit können Entladeverluste abgeschätzt werden und die Messung ggf. wiederholt werden.

Der Abstand $r = 0,200$ m sowie der Wert der Probeladung $q = 70,0$ nC bleibt während der Messung unverändert. Die Aufladespannung U wird variiert und die zugehörige Ladung Q sowie die Kraft F_{el} auf die Probeladung werden gemessen,

U in kV	$10,00 \pm 0,01$	$12,00 \pm 0,01$	$15,00 \pm 0,01$	$20,00 \pm 0,01$	$25,00 \pm 0,01$
Q in nC	$66,7 \pm 0,5$	$80,1 \pm 0,5$	$100,1 \pm 0,5$	$133,5 \pm 0,5$	$166,8 \pm 0,5$
F_{el} in mN	$0,95 \pm 0,05$	$1,18 \pm 0,05$	$1,45 \pm 0,05$	$1,95 \pm 0,05$	$2,50 \pm 0,05$

Das Diagramm zeigt die graphische Auswertung der Messdaten:



Fazit: Innerhalb der Unsicherheitsbereiche lässt sich (näherungsweise) eine Ursprungsgerade durch die Messwerte zeichnen. Dadurch wird die Hypothese $F \sim Q$ bestätigt.

Zusammenführung der Ergebnisse

Im Buch wurde in Kapitel 1.2 bei der Definition der elektrischen Feldstärke ausgenutzt, dass die Kraft auf eine Probeladung im elektrischen Feld direkt proportional zur Größe dieser Probeladung q ist. Dies gilt allgemein, also auch im Fall des radialsymmetrischen Feldes: $F_{\text{el}} \sim q$.

Damit können wir zusammen mit den Ergebnissen der beiden Versuche die Aussage treffen, dass die elektrische Kraft F_{el} , die zwischen zwei geladenen Kugeln wirkt, direkt proportional zu den Ladungen Q bzw. q ist und indirekt proportional zu $\frac{1}{r^2}$, also dem Quadrat des Abstands r .

Zusammenfassend gilt also $F_{\text{el}} \sim \frac{Q \cdot q}{r^2}$ bzw. $F_{\text{el}} = k \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$

Die Proportionalitätskonstante k lässt sich ermitteln, wenn Q und q mit einem möglichst empfindlichen Ladungsmessgerät bestimmt werden.

Die Tabelle zeigt eine Messreihe, bei der der Abstand von $r = 0,300 \pm 0,001$ konstant gehalten wurde und sowohl Q als auch q (und entsprechend auch F_{el}) variiert und gemessen wurden. Anhand von $k = F_{\text{el}} \cdot \frac{r^2}{Q \cdot q}$ wurde daraus dann die letzte Zeile der Tabelle berechnet.

Q in nC	$102,5 \pm 0,5$	$127,0 \pm 0,5$	$142,5 \pm 0,5$	$158,5 \pm 0,5$	$191 \pm 0,5$
q in nC	$42,0 \pm 0,5$	$109,5 \pm 0,5$	$75 \pm 0,5$	$141 \pm 0,5$	$91,5 \pm 0,5$
F_{el} in mN	$0,40 \pm 0,05$	$1,32 \pm 0,05$	$0,99 \pm 0,05$	$2,14 \pm 0,05$	$1,57 \pm 0,05$
k in $10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$	$8,27 \pm 1,18$	$8,54 \pm 0,40$	$8,36 \pm 0,51$	$8,63 \pm 0,26$	$8,09 \pm 0,32$

Die absoluten Unsicherheiten in der letzten Zeile ergeben sich so, wie bereits oben im Methodenkasten beschrieben. Wie zu erwarten, sind die Zahlenwerte im Rahmen der Messgenauigkeit konstant. Man erhält k dann aus dem Mittelwert der Einzelmessungen: $k = (8,38 \pm 0,53) \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$.

Aus Gründen, die in späteren Kapiteln behandelt werden, schreibt man den endgültigen Zusammenhang nicht als $F_{\text{el}} = k \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$, sondern – scheinbar komplizierter – als $F_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$. Die Konstante ϵ_0 heißt elektrische Feldkonstante; aus unseren Messungen finden wir:

$$\epsilon_0 = (9,50 \pm 0,15) \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} = (9,50 \pm 0,15) \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$$

In der Formelsammlung ist der Wert nach den genauesten Labormessungen angegeben zu

$$\epsilon_0 = 8,8541878128 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$$

Die elektrische Kraft F_{el} zwischen zwei Kugelladungen mit Größen Q und q , die sich in einem Abstand r der Kugelmitten voneinander befinden, wird als Coulombkraft bezeichnet. Sie tritt immer in radialsymmetrischen elektrischen Feldern auf. Es gilt:

$$F_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$$

A Arbeitsaufträge

- 1) **Der Versuch 2** (Aufbau s. o.) wird bei konstanter Ladung Q der felderzeugenden Kugel und konstantem Abstand r mit Variation der Probekugelladung q durchgeführt. Nachstehend die Messergebnisse.

Dabei soll die Hypothese $F_{\text{el}} \sim q$ untersucht werden.

q in nC	52,5	79,0	110,0	153,0	200,5
F_{el} in mN	1,9	2,8	4,0	5,5	7,2

- Werten Sie das Experiment zeichnerisch in einem q - F_{el} -Diagramm und rechnerisch anhand einer Tabelle aus.
 - Das verwendete Coulombmeter hat eine Genauigkeit von $\pm 0,5$ nC, der Kraftmesser eine Genauigkeit von $\pm 0,5$ mN. Zeichnen Sie die sich daraus ergebenden Unsicherheitsbalken in Ihr Diagramm aus a) ein.
 - Stellen Sie mithilfe einer Tabellenkalkulation die Gleichung einer Ausgleichsgeraden der Messpunkte im Diagramm auf.
 - Übertragen Sie die Gerade in Ihr Diagramm. Bewerten Sie die Aussagekraft des Experiments im Hinblick auf den Term der Coulombkraft.
- 2) Erläutern Sie anhand einer Kurzpräsentation Ihre Vorgehensweise bei der Erstellung einer Trendlinie in einem Tabellenkalkulationsprogramm. Verwenden Sie beispielsweise die Messwerte von Versuch 2 oder die aus Aufgabe 1.
- 3) Zeigen Sie anhand eines selbst gewählten Beispiels auf, wie aus einer indirekten Proportionalität zweier Messgrößen ein Diagramm mit einer linearen Messkurve entwickelt werden kann.
- 4) Geben Sie mögliche Gründe dafür an, dass der Wert von ε_0 bei der **Zusammenführung der Ergebnisse** von der vorherigen Seite vom Wert aus der Formelsammlung abweicht.
Hinweis: Beachten Sie, dass die im Experiment verwendeten Kugeln nicht als Punktladungen angesehen werden können!
- 5)
- Führen Sie die in **Versuch 1** und **Versuch 2** beschriebenen Experimente durch, inklusive einer vollständigen Betrachtung der Messunsicherheiten.
Hinweis: Hierbei bieten sich beispielsweise Torsionskraftmesser im mN-Bereich an, die eine Genauigkeit im Bereich von 0,1 mN aufweisen.
 - Bestimmen Sie die Messabweichung Ihres Ergebnisses für ε_0 von dem Wert aus der Formelsammlung.
- 6) Bestimmen Sie die elektrische Kraft, die auf eine Punktladung $q = 4,5$ nC wirkt, wenn sich in 8,0 cm Abstand dazu eine weitere Punktladung mit $Q = 30$ nC befindet.

Ph12 Lernbereich 1: Statische elektrische und magnetische Felder

Die Schülerinnen und Schüler...

- bestätigen anhand von Messwerten durch Regression den Term für die Coulombkraft.

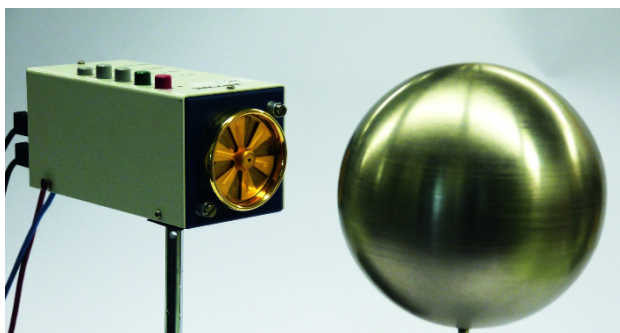
Feldstärke für das elektrische radialsymmetrische Feld

Im Arbeitsblatt „Experimente zur Coulombkraft – Teil 1“ wird die Wirkung des elektrischen Feldes einer geladenen Kugel anhand der Kraftwirkung zwischen einer felderzeugenden Kugelladung und einer Probeladungskugel untersucht. Das elektrische Feld einer Kugelladung kann aber auch direkt untersucht werden – mithilfe eines Elektrofeldmeters.

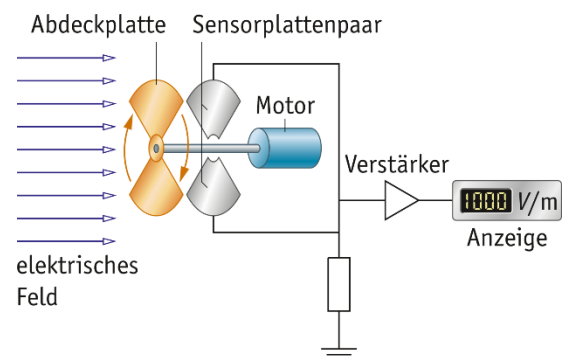
Quantitative Ergebnisse für das elektrische Feld in der Umgebung einer felderzeugenden Kugelladung lassen sich auch mathematisch aus dem Term für die Coulombkraft herleiten – das geschieht dann in AB05. Hier soll nun erstmal die experimentelle Untersuchung anhand des Elektrofeldmeters im Vordergrund stehen.

Versuch: Elektrofeldmeter

Ein Elektrofeldmeter ist ein Gerät, mit dem direkt elektrische Felder vermessen werden können (vgl. Abbildungen unten). Dazu sind an der Vorderseite Flügelräder angebracht. Diese werden vergoldet, da Gold eine sehr große Leitfähigkeit aufweist. Das vordere Flügelrad gibt bei der Drehung periodisch Öffnungen frei und verschließt diese wieder. Das hintere Flügelrad dient als Messelektrode. Wenn es abgedeckt ist, befindet sich die Messelektrode in einem Faradayschen Käfig und ist ladungsfrei. Wenn sich das vordere Flügelrad bewegt, kann das elektrische Feld ins Innere eindringen und sorgt an der Messelektrode für Influenz. Dabei fließen Ladungen über den Widerstand ab und können mit einem Verstärker gemessen werden. Diese influenzierte Ladung ist proportional zur elektrischen Feldstärke. Dadurch kann das Elektrofeldmeter einen Wert für die elektrische Feldstärke am jeweiligen Ort in der Einheit $\frac{\text{V}}{\text{m}}$ anzeigen.



© Rainer Dietrich, Schweinfurt



Mithilfe des Elektrofeldmeters kann nun also das Feld einer Kugelladung untersucht werden. Dafür werden zwei unterschiedliche Messreihen aufgenommen:

- Der Abstand r zwischen Kugel und Elektrofeldmeter wird konstant gehalten. Die elektrische Feldstärke E wird in Abhängigkeit von der Kugelladung Q gemessen. Die Kugelladung wird dabei nicht direkt bestimmt, sondern aufgrund von $Q = C \cdot U$ als direkt proportional zur Aufladespannung U angenommen. Gemessen wird also die Aufladespannung, nicht die Ladung.
- Die Kugelladung Q wird konstant gehalten. Die elektrische Feldstärke E wird in Abhängigkeit vom Abstand r gemessen.

Messergebnisse

Messreihe 1 ($r = (30,0 \pm 0,1)$ cm; U (und damit Q) wird variiert und E jeweils gemessen):

U in kV	$5,00 \pm 0,05$	$8,00 \pm 0,05$	$12,00 \pm 0,05$	$15,00 \pm 0,05$	$20,00 \pm 0,05$
E in $\frac{\text{kV}}{\text{m}}$	17 ± 1	28 ± 1	42 ± 1	53 ± 1	72 ± 1

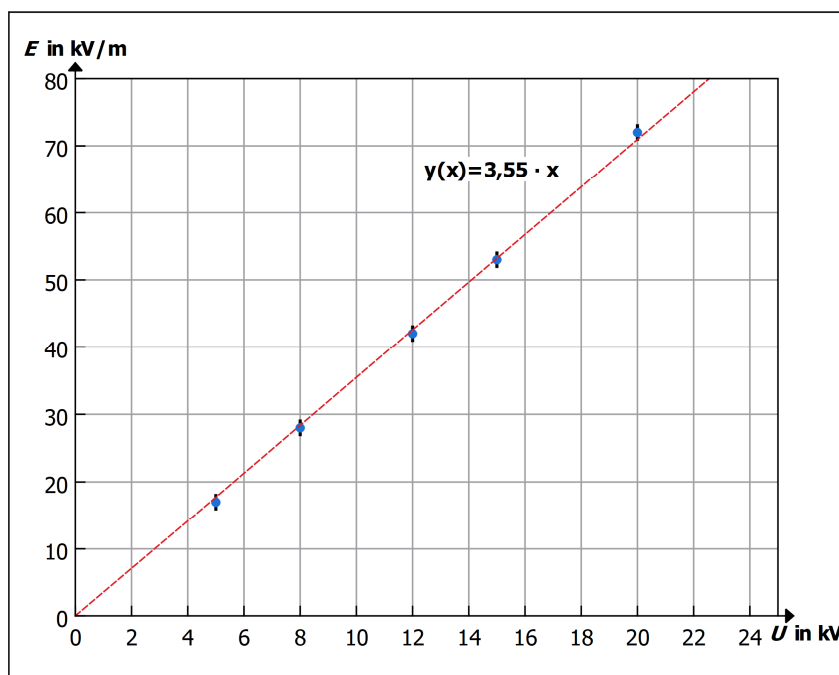
Messreihe 2 ($U = 8,0$ kV; r wird variiert und E jeweils gemessen):

r in m	$0,10 \pm 0,001$	$0,20 \pm 0,001$	$0,30 \pm 0,001$	$0,40 \pm 0,001$	$0,50 \pm 0,001$
E in $\frac{\text{kV}}{\text{m}}$	220 ± 1	64 ± 1	28 ± 1	16 ± 1	10 ± 1

Auswertung

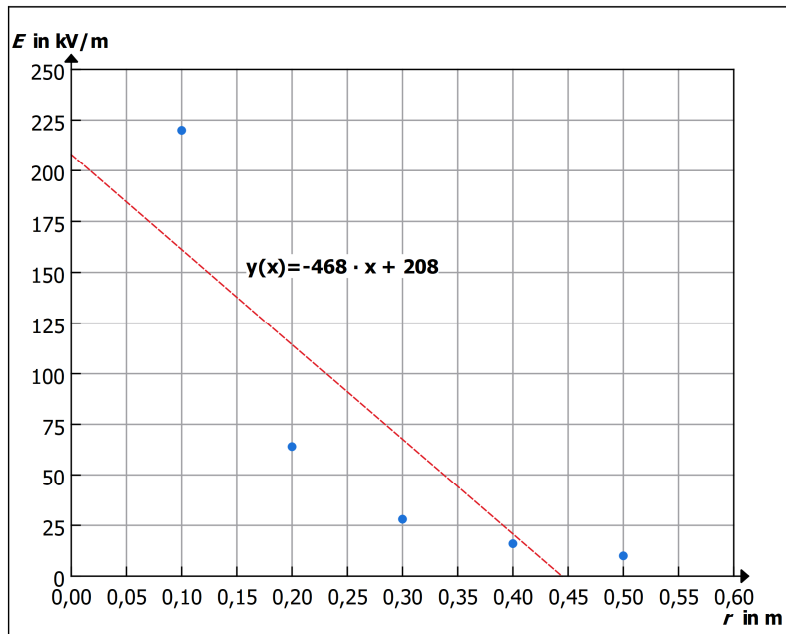
Das mathematische Verfahren, um durch eine Reihe von Datenpunkten den „besten“ Funktionsgraphen (innerhalb einer bestimmten Klasse von Funktionen) zu legen, heißt Regression. Genauer dazu findet sich bei der **Methode** im Schulbuch auf S. 47.

Das folgende U - E -Diagramm stellt die Daten aus der *Messreihe 1* dar:

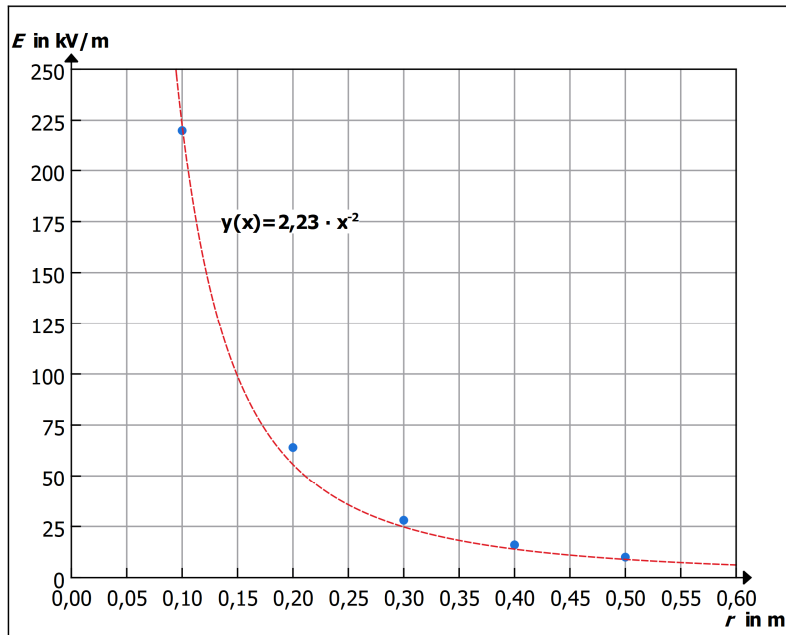


Fazit: Man kann erkennen, dass sich unter Berücksichtigung der Messunsicherheiten eine Ursprungsgerade der Form $y(x) = 3,55 \cdot x$ durch die Messwerte legen lässt. Die direkte Proportionalität $E \sim U$ und somit auch $E \sim Q$ wird damit bestätigt.

Das folgende r - E -Diagramm stellt die Daten aus der *Messreihe 2* dar, hier zunächst wieder mit dem Versuch, die direkte Proportionalität $E \sim r$ nachzuweisen:



Man erkennt leicht: Die Ausgleichsgerade stimmt überhaupt nicht mit den Messwerten überein. In Analogie zum Kraft-Experiment aus „Experimente zur Coulombkraft – Teil 1“ wird nun stattdessen die Proportionalität $E \sim \frac{1}{r^2}$ überprüft:



Fazit: Die Ausgleichskurve der Form $y(x) = 2,23 \cdot x^{-2} = 2,23 \cdot \frac{1}{x^2}$ stellt unter Berücksichtigung der Messunsicherheiten eine gute Übereinstimmung mit den Messwerten dar. Die vermutete Proportionalität $E \sim \frac{1}{r^2}$ kann also als bestätigt angesehen werden.

Zusammenführung der Ergebnisse

Die beiden durchgeführten Messreihen haben gezeigt, dass die elektrische Feldstärke einer Kugelladung direkt proportional zur Ladung der Kugel ist ($E \sim Q$) und indirekt proportional zum Quadrat des Abstandes von der Kugel ($E \sim \frac{1}{r^2}$).

Zudem ist bereits aus Kapitel 1.2 des Buchs bekannt, dass in einem elektrischen Feld die elektrische Kraft F_{el} auf eine Probeladung q mit der elektrischen Feldstärke E wie folgt zusammenhängt: $F_{\text{el}} = E \cdot q$

Führen wir diese beiden Erkenntnisse zusammen, können wir einen Term für die auf eine Probeladung ausgeübte elektrische Kraft herleiten: $F_{\text{el}} = E \cdot q \sim \frac{Q}{r^2} \cdot q$

Und damit $E = k \cdot \frac{Q}{r^2}$ sowie $F_{\text{el}} = k \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$.

Die Proportionalitätskonstante $k = E \cdot \frac{r^2}{Q}$ können wir aus unseren Messungen zumindest näherungsweise bestimmen. Hierfür wird dann allerdings der Wert für die Ladung der Kugel benötigt, den wir bei den bisherigen Betrachtungen nicht direkt gemessen haben. Für führen die Bestimmung von k daher nun beispielhaft mit folgenden Werten aus einer anderen Messung durch:

$$U = (8,00 \pm 0,01) \text{ kV}; r = (0,25 \pm 0,01) \text{ m}; E = (35 \pm 0,5) \frac{\text{kV}}{\text{m}}; Q = (50 \pm 1) \text{ nC}$$

$$\Rightarrow k = 35 \frac{\text{kV}}{\text{m}} \cdot \frac{(0,25 \text{ m})^2}{50 \text{ nC}} = 4,4 \cdot 10^{10} \frac{\text{Vm}}{\text{As}}$$

Die Messunsicherheit für k wird bestimmt, indem die relativen Messunsicherheiten der Einzelgrößen addiert und mit k multipliziert werden, vgl. [Methode](#) zur Messunsicherheit in „Experimente zur Coulombkraft – Teil 1“.

$$\text{Insgesamt erhalten wir dann: } k = (4,4 \pm 0,5) \cdot 10^{10} \frac{\text{Vm}}{\text{As}}$$

Aus Gründen, die in späteren Kapiteln behandelt werden, schreibt man den endgültigen Zusammenhang nicht als $F_{\text{el}} = k \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$, sondern – scheinbar komplizierter – als $F_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$. Die Konstante ϵ_0 ist die elektrische Feldkonstante; aus unseren Messungen finden wir dann:

$$\epsilon_0 = (1,81 \pm 0,16) \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} = (1,81 \pm 0,16) \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$$

In der Formelsammlung ist der Wert nach den genauesten Labormessungen angegeben zu

$$\epsilon_0 = 8,8541878128 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$$

Die elektrische Kraft zwischen zwei Kugelladungen mit Größen Q und q , die sich in einem Abstand r der Kugelmitten voneinander befinden, wird Coulombkraft genannt. Sie tritt immer in radialsymmetrischen elektrischen Feldern auf. Es gilt:

$$F_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$$

Die elektrische Feldstärke E eines radialsymmetrischen Feldes der Punktladung Q im Abstand r lautet:

$$E = \frac{F_{\text{el}}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Kritische Betrachtung der Messunsicherheiten

Kommen wir nochmal auf die oben auf Basis der Messwerte durchgeführte Berechnung der elektrischen Feldkonstante ϵ_0 zurück:

$$U = (8,00 \pm 0,01) \text{ kV}; r = (0,25 \pm 0,01) \text{ m}; E = (35 \pm 0,5) \frac{\text{kV}}{\text{m}}; Q = (50 \pm 1) \text{ nC}$$

$$\Rightarrow k = (4,4 \pm 0,5) \cdot 10^{10} \frac{\text{Vm}}{\text{As}}$$

Ein Vergleich mit dem Wert aus der Formelsammlung zeigt, dass der aus unseren Messwerten bestimmte Wert in etwa fünfmal größer ist. Die Messunsicherheit von $0,5 \cdot 10^{10} \frac{\text{Vm}}{\text{As}}$ kann diese große Abweichung nicht ausreichend erklären, wie auch eine genauere Betrachtung der Messunsicherheiten der Einzelgrößen zeigt:

Messgröße	Messwert	± Genauigkeit der Ablesung	prozentuale Abweichung
Spannung U	8,00 kV	0,01 kV	0,13 %
Abstand r	0,25 m	0,01 m	4,0 %
Feldstärke E	$35 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$	$0,5 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$	1,4 %
Ladung Q	50 nC	0,5 nC	1,0 %

Alle diese Unsicherheiten sind noch in einem tolerierbaren Bereich und liefern keine Erklärung für die große Abweichung bei der Bestimmung von ϵ_0 . Es müssen also noch weitere Faktoren eine Rolle spielen, die bei den bisherigen Betrachtungen nicht berücksichtigt wurden:

- Bei der Bestimmung des Abstandes r wird davon ausgegangen, dass sich die gesamte Ladung der Kugel in deren Zentrum befindet. Gerade bei kleinen Abständen im Vergleich zum Kugelradius findet jedoch eine Ladungsverschiebung (Influenz) auf der Kugel statt. Bei großen Abständen machen sich Störeinflüsse von äußeren Ladungen in der Umgebung bemerkbar.
- Experimente werden dadurch erschwert, dass sich die Kugel schnell über die Luft entlädt. Das verhindert in vielen Fällen die genaue Bestimmung der Messwerte.

Der Einfluss dieser Faktoren lässt sich allerdings nicht quantitativ ermitteln. Daher kommt es in diesem Fall zu einer großen Abweichung der ermittelten Größe ϵ_0 vom Wert aus der Formelsammlung – obwohl die Messunsicherheiten der einzelnen Größen eigentlich klein genug sind, um eine hinreichende Genauigkeit erwarten zu können.

A Arbeitsaufträge

- 1\
- Führen Sie den auf diesem Arbeitsblatt beschriebenen Versuch mit dem Elektrofeldmeter selbst durch. Fertigen Sie dabei ein Versuchsprotokoll an.
 - Führen Sie wie im Abschnitt **Auswertung** oben beschrieben eine graphische Auswertung mittels Regression durch. Sie können dafür auch alternativ die in diesem Arbeitsblatt verwendeten Messwerte nutzen.
 - Führen Sie eine ausführliche Analyse der Messunsicherheiten bei Ihrem Experiment durch.
 - Berechnen Sie aus den Messwerten den Wert für die elektrische Feldkonstante. Bestimmen Sie auch die Messunsicherheit des von Ihnen ermittelten Werts und vergleichen Sie mit dem Wert aus der Formelsammlung. Begründen Sie eventuelle Abweichungen.
- 2\ Begründen Sie, dass bei der Messung mit dem Elektrofeldmeter die verwendete felderzeugende Kugel nicht als Punktladung angenommen werden kann. Beschreiben Sie, wie dadurch das Ergebnis der Messungen beeinflusst wird.

- 3\ Die Messung mithilfe des Elektrofeldmeters zur Untersuchung der Abstandsabhängigkeit des elektrischen Feldes („Messreihe 2“) wird erneut durchgeführt. Dabei werden für $U = (8,0 \pm 0,05) \text{ kV}$ folgende Werte gemessen:

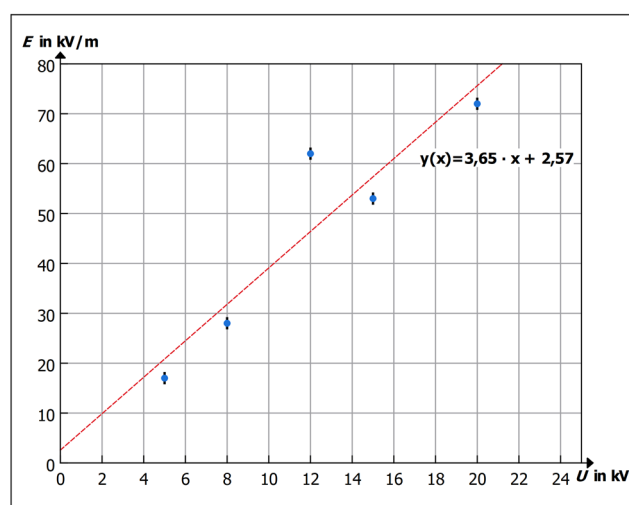
$r \text{ in m}$	$0,15 \pm 0,001$	$0,20 \pm 0,001$	$0,30 \pm 0,001$	$0,40 \pm 0,001$	$0,50 \pm 0,001$
$E \text{ in } \frac{\text{kV}}{\text{m}}$	220 ± 1	125 ± 1	53 ± 1	29 ± 1	21 ± 1

- Die Hypothese $E \sim \frac{1}{r^2}$ soll überprüft werden. Führen Sie mithilfe dieser Daten die Auswertung wie zuvor beschrieben durch. Begründen Sie, ob damit die Hypothese bestätigt wird.
 - Bestimmen Sie anhand eines beispielhaften Wertepaares den Wert für die elektrische Feldkonstante. Gehen Sie dabei von einer Feldladung $Q = 50 \text{ nC}$ aus. Geben Sie dabei auch die Messunsicherheit an.
- 4\ Führen Sie eine Recherche zum Elektrofeldmeter an. Stellen Sie anschließend dessen Funktionsweise in einer Kurzpräsentation vor.

- 5\ Rechts ist eine Auswertung zur Untersuchung der Abhängigkeit des elektrischen Felds von der Ladespannung der Kugel dargestellt, analog zur „Messreihe 1“.

- Begründen Sie, dass auf Basis dieser Messung die direkte Proportionalität $E \sim U$ **nicht** bestätigt werden kann.
- Jacob meint: „Wenn man den Messwert bei $U = 12,0 \text{ kV}$ weglässt, erhält man eine schöne Ursprungsgerade. Wir sollten den Wert also einfach streichen, dann erhalten wir das gesuchte Ergebnis!“

Beziehen Sie zu dieser Aussage Stellung. Gehen Sie insbesondere darauf ein, ob es physikalisch vertretbar ist, Messwerte anzupassen, wenn man dann dadurch das ursprünglich erwartete Ergebnis erhält und die aufgestellte Hypothese bestätigt wird.

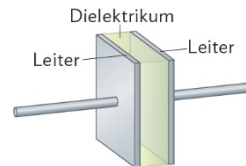


Ph12 Lernbereich 1: Statische elektrische und magnetische Felder

Die Schülerinnen und Schüler **modellieren die Wirkung elektrischer Felder auf Materie anhand der Phänomene der Influenz und Polarisierung und erläutern die Auswirkung eines Dielektrikums auf die Kapazität eines Plattenkondensators, insbesondere im Kontext technischer Anwendungen im Alltag.**

Kondensator mit Dielektrikum

Im technischen Einsatz verwendet man keine luftgefüllten Kondensatoren, sondern Kondensatoren mit einer isolierenden Schicht zwischen den beiden leitenden Platten. Diese isolierende Schicht nennt man Dielektrikum (vgl. Abbildung rechts).



Die Verwendung des Dielektrikums hat mehrere Vorteile:

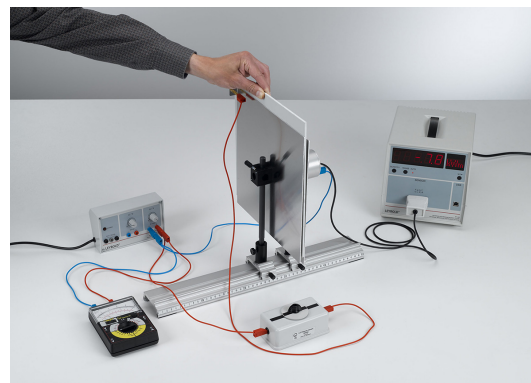
- Da die elektrische Feldkonstante ϵ_0 mit $\epsilon_0 = 8,8541878128 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ sehr klein ist, beträgt die Kapazität bei luftgefüllten Kondensatoren meist weniger als 1 nF. Durch das Einbringen eines Dielektrikums kann die Kapazität deutlich erhöht werden.
- Die Platten können enger beieinander liegen, ohne dass sie sich berühren. Auch dies führt zu einer höheren Kapazität.
- Durch den Isolator kommt es nicht so schnell zum Spannungsdurchschlag wie bei luftgefüllten Kondensatoren, somit ist die maximal anlegbare Spannung höher.
Hinweis: Beim Spannungsdurchschlag springt ein Funke von einer Kondensatorplatte zur anderen, es kommt zu einem schlagartigen Ladungsausgleich zwischen den Platten.
- Das Dielektrikum dient auch als mechanischer Abstandshalter der beiden Platten, der Kondensator wird somit stabiler.

Betrachten wir nun im Experiment, wie sich ein Dielektrikum auf die Kapazität des Kondensators auswirkt.

Versuch 1

Ein Plattenkondensator wird mit 100 V aufgeladen und anschließend von der Spannungsquelle getrennt. Wird nun eine Kunststoffplatte zwischen die Platten geschoben, die den Zwischenraum vollständig ausfüllt, so kann man beobachten, dass die Spannung sinkt. Wird die Kunststoffplatte wieder entfernt, dann steigt die Spannung wieder auf den ursprünglichen Wert an.

Da zwischen der Spannung und der Ladung beim Plattenkondensator der Zusammenhang $Q = C \cdot U$ gilt und bei getrennter Spannungsquelle die Ladung auf den Platten näherungsweise konstant bleiben muss, muss sich durch die Kunststoffplatte die Kapazität des Kondensators erhöht haben.



© LEYBOLD / LD DIDACTIC GmbH,
<https://www.ld-didactic.de>, Hürth

Hinweis: Mithilfe des nebenstehenden Mediacodes gelangen Sie zu einer Simulation, mit der Sie den Einfluss des Dielektrikums auf die Kapazität selbst untersuchen können – sowohl im Zusammenhang mit dem oben beschriebenen *Versuch 1*, als auch bei *Versuch 2* auf der nächsten Seite. Nutzen Sie dafür den mit „Dielektrikum“ beschrifteten Teil der Simulation.



MC 67054-01

Versuch 2

Wieder wird der Plattenkondensator mit 100 V aufgeladen. Nun wird die Kunststoffplatte zwischen die Platten geschoben, ohne den Plattenkondensator zuvor von der Spannungsquelle zu trennen. Mithilfe eines Ladungsmessgeräts oder eines empfindlichen Stromstärkemessgeräts stellt man fest, dass Ladungen auf die Platten fließen. Beim Herausziehen der Platte kann man einen Stromfluss mit umgekehrter Polung feststellen, es fließen also wieder Ladungen von den Platten ab.

Auch bei diesem Versuch muss sich die Kapazität $C = \frac{Q}{U}$ erhöht haben, da die Spannung zwischen beiden Platten konstant gehalten wurde.

Wiederholt man beide Versuche mit einem anderen Material wie z. B. Glas als Dielektrikum, dann stellt man fest, dass die Änderung der Kapazität vom Material des Dielektrikums abhängt.

Ein Dielektrikum zwischen den Kondensatorplatten erhöht die Kapazität eines Kondensators um den materialabhängigen Faktor ϵ_r .

ϵ_r heißt Dielektrizitätszahl oder relative Permittivität des Dielektrikums.

Somit berechnet sich die Kapazität eines Kondensators mit Dielektrikum als $C = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$.

Die Dielektrizitätszahl ϵ_r

Die Dielektrizitätszahl heißt auch relative Permittivität, da sie den relativen Faktor bezogen auf einen Kondensator im Vakuum angibt. In der untenstehenden Tabelle ist außer der Dielektrizitätszahl gängiger Materialien auch ihre Durchschlagfestigkeit mit angegeben – also der größte Wert des elektrischen Feldes, für den noch kein direkter Ladungsfluss zwischen den Kondensatorplatten stattfindet.

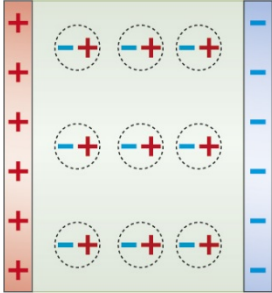
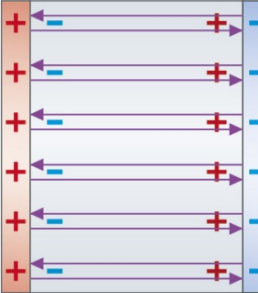
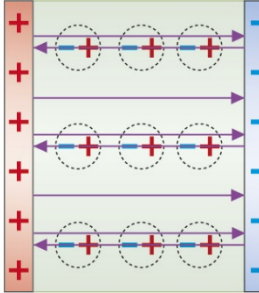
Material	Dielektrizitätszahl ϵ_r	Durchschlagfestigkeit in kV/mm
Glas	5,6	14
Luft	1,0006	3
Papier	3,7	16
Paraffin	2,1 - 2,5	10
Plexiglas	3,4	40
Polystryol	2,6	24
Porzellan	4,5 - 6,5	5,7
Wasser (20 °C)	81	65 - 70

Hinweis: Zwar beträgt ϵ_r von Luft 1,0006, meist rechnet man aber mit $\epsilon_r \approx 1$.

Leiter und Isolator im elektrischen Feld: Influenz und Polarisation

Betrachten wir den oben beschriebenen *Versuch 2* genauer: Wenn Ladungen auf die Platten des Kondensators fließen, müsste die elektrische Feldstärke im Inneren des Kondensators zunehmen. Dies ist aber nicht möglich, da die Spannung unverändert bleibt und somit wegen $E = \frac{U}{d}$ auch die elektrische Feldstärke unverändert bleiben muss. Ein Teil der Ladungen auf den Platten muss also durch das Dielektrikum „neutralisiert“ worden sein.

Um eine Erklärung dafür zu finden, betrachten wir die physikalischen Vorgänge im Inneren von Leitern und Isolatoren im elektrischen Feld genauer:

Leiter im elektrischen Feld	Isolatoren im elektrischen Feld
Leiter haben viele frei bewegliche Ladungen. Wird ein Leiter nun in ein elektrisches Feld gebracht, dann richten sich die Ladungen entgegengesetzt zum äußeren Feld aus. Diese Verschiebung der Ladungen im Leiter nennt man Influenz. Im Inneren des Leiters entsteht ein elektrisches Feld, das dem äußeren Feld entgegengesetzt gerichtet ist und genauso groß ist. Das Innere des Leiters ist also feldfrei.	In Isolatoren können sich die Ladungen nur innerhalb der Atome oder Moleküle verschieben. Wird ein Isolator in ein elektrisches Feld gebracht, dann werden die einzelnen Moleküle zu Dipolen. Durch das elektrische Feld kommt es zur Polarisierung. Im Inneren des Isolators entsteht ein elektrisches Feld, das dem äußeren Feld entgegengesetzt gerichtet ist, aber schwächer ist. Das elektrische Feld wird also abgeschwächt.
 Influenz im Leiter	 Polarisation im Isolator
 $E = 0$	 E abgeschwächt

Dabei gilt: je größer die Dielektrizitätszahl des Dielektrikums ist, desto mehr Ladung wird durch das äußere Feld verschoben und umso mehr wird das äußere Feld abgeschwächt.

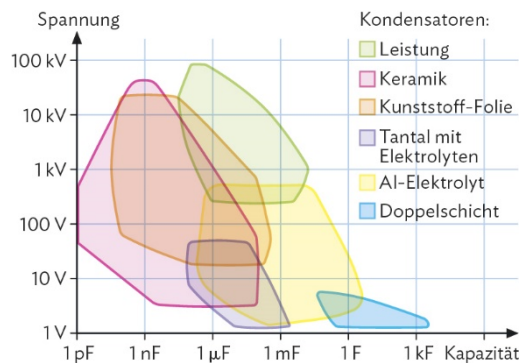
Wird ein Leiter in ein elektrisches Feld eingebracht, führt die Verschiebung der Ladungen (**Influenz**) im Leiter dazu, dass das Innere des Leiters feldfrei ist.

Wird ein Isolator in ein elektrisches Feld eingebracht, führt die Verschiebung der Ladungen innerhalb der Atome und Moleküle (**Polarisation**) im Leiter dazu, dass das elektrische Feld im Innern des Isolators abgeschwächt wird. Die Abschwächung ist abhängig von der Dielektrizitätszahl ϵ_r des Isolators.

Technische Anwendungen

Es gibt eine Vielzahl von Kondensatoren, die unterschiedliche Einsatzbereiche abdecken. Einen ersten Überblick über typische Kapazitäten und die Durchschlagsfestigkeit verschiedener Bauarten findet man im rechtsstehenden Diagramm.

Im technischen Bereich werden häufig Blockkondensatoren, Keramik Kondensatoren, Elektrolytkondensatoren, Superkondensatoren und Gold Caps eingesetzt. Am häufigsten findet man Kondensatoren als Speicher oder als Sensoren.



Kondensatoren als Speicher

Kondensatoren werden oft als Energiespeicher genutzt. Gegenüber Batterien oder Akkus haben sie den Vorteil, dass sie Energie schneller speichern und auch schneller wieder abgeben können. Außerdem sind deutlich mehr Ladezyklen als bei herkömmlichen Akkus möglich.

Im Alltag findet man häufig sog. Gold Caps; sie eignen sich mit ihrer hohen Kapazität gut als Energiespeicher für Fahrradbeleuchtungen oder auch für Modellflugzeuge.

Kondensatoren als Sensoren

Auch eine Vielzahl von Sensoren beruht auf dem Einsatz von Kondensatoren: man nennt sie kapazitive Sensoren. Es gibt z. B. kapazitive Füllstandanzeiger, Luftfeuchtemessmer, Regensensoren und auch Fingerabdrucksensoren. Sie alle beruhen auf dem Prinzip, dass sich die Kapazität des Kondensators durch äußere Einflüsse, wie z. B. die Luftfeuchtigkeit, ändern kann. Diese Kapazitätsänderung wird gemessen. Ein weiteres Anwendungsgebiet von Kondensatoren mit Dielektrika sind kapazitive Tastaturen und Touchscreens von Smartphones, Tablets und Computern.

Musteraufgabe

Ein Plattenkondensator mit quadratischen Platten der Länge 20 cm und Plattenabstand 4 mm wird mit einem Dielektrikum aus Plexiglas ($\epsilon_r = 3,4$) vollständig gefüllt und anschließend an eine Spannungsquelle mit $U = 100$ V angeschlossen. Nachdem der Kondensator voll aufgeladen ist, wird die Spannungsquelle wieder abgetrennt.

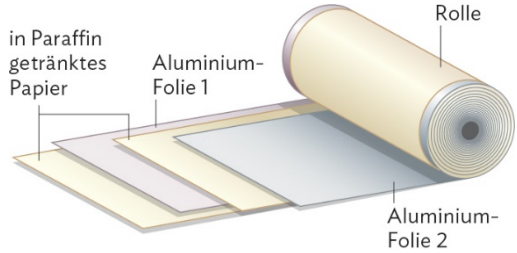
- Bestimmen Sie die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie.
- Nun wird das Dielektrikum wieder entfernt. Zeigen Sie, dass die im Kondensator gespeicherte Energie 3,4-mal so viel wie zuvor beträgt.
- Erläutern Sie, woher die zusätzliche Energie kommt, und erklären Sie den Effekt auf molekularer Ebene.

Lösung:

- Kapazität des Kondensators: $C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d} = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 3,4 \cdot \frac{(0,2 \text{ m})^2}{4 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 0,3 \text{ nF}$.
Somit erhält man als Energie $E_{\text{el}} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot (100 \text{ V})^2 = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ J}$.
- Da der Kondensator von der Spannungsquelle getrennt wird, befindet sich weiterhin die Ladung $Q = C \cdot U = 30 \text{ nC}$ auf ihm, die Kapazität beträgt ohne Dielektrikum aber nur noch $C_{\text{neu}} = C : 3,4 = 8,8 \cdot 10^{-11} \text{ F}$ und somit erhält man als jetzt im Kondensator gespeicherte Energie den Wert $E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C_{\text{neu}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(30 \cdot 10^{-9} \text{ C})^2}{8,8 \cdot 10^{-11} \text{ F}} = 5,1 \cdot 10^{-6} \text{ J} = 3,4 \cdot 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ J}$.
- Die im Kondensator gespeicherte Energie nimmt zu, weil Arbeit verrichtet werden muss, um das Dielektrikum aus dem Kondensator zu entfernen. Diese Arbeit ist nötig, weil die Dipole an den Rändern des Dielektrikums von den Ladungen der Platten angezogen werden.

A Arbeitsaufträge

- 1\ Ein Plattenkondensator wird an eine Spannungsquelle mit 100 V angeschlossen. Anschließend wird er vollständig mit einer Porzellan-Platte gefüllt. Beschreiben Sie, wie sich die Kapazität, die Ladung und die elektrische Feldstärke durch das Dielektrikum ändern.
- 2\ Ein Kondensator mit der Kapazität $0,1 \mu\text{F}$ hat eine Glasplatte als Dielektrikum. An den Kondensator werden Spannungen von maximal 10 kV angelegt. Bestimmen Sie, wie dick die Glasplatte sein muss und welche Plattenfläche der Kondensator haben sollte.
- 3\ Blockkondensatoren bestehen aus schmalen, aber sehr langen Bändern Alu-Folie, die mit Zwischenschichten aus Paraffin-Papier aufgewickelt werden und dann in ein Gehäuse verpackt werden.



 - a) Ein Blockkondensator besteht aus zwei 5 cm breiten und 100 m langen Alu-Folien. Dazwischen liegt ein 0,05 mm dickes, in Paraffin getränktes Papier. Zeigen Sie, dass die Kapazität des Kondensators etwa $2 \mu\text{F}$ beträgt. Verwenden Sie hierzu vereinfachend die Dielektrizitätszahl von Paraffin.
 - b) Berechnen Sie, welche Ladung der Kondensator bei einer Spannung von 10 V aufnimmt.
 - c) Planen Sie ein Experiment zur Bestimmung der Dielektrizitätszahl von Paraffin-Papier und führen Sie es anschließend durch.
- 4\ Elektrolytkondensatoren (kurz Elkos) liefern hohe Kapazitäten bei relativ geringen Kosten.



 - a) Recherchieren Sie, wie ein Elko aufgebaut ist und speziell auch, wie das Dielektrikum im Elko hergestellt wird.
 - b) Für elektronische Bauteile verwendet man häufig Aluminium als Anodenmaterial und Aluminiumoxid mit $\epsilon_r = 9,6$ als Dielektrikum. Berechnen Sie die Kapazität eines solchen Elkos mit Plattenfläche 40 cm^2 und einer Dicke des Dielektrikums von 10^{-4} mm .
 - c) Bestimmen Sie einen Richtwert für die Spannung, die höchstens angelegt werden darf, wenn die Durchschlagfestigkeit des Dielektrikums 350 kV/mm beträgt.
- 5\ In dieser Aufgabe sollen verschiedene Beobachtungen zu den Dielektrika auf molekularer Ebene betrachtet werden.
 - a) Erklären Sie *Versuch 1* auf molekularer Ebene.
 - b) Erläutern Sie, dass ein Dielektrikum für die Erhöhung der Durchschlagfestigkeit des Kondensators sorgt.
 - c) Die Dielektrizitätszahl von destilliertem Wasser ist mit $\epsilon_r = 80$ deutlich höher als die anderen Werte in der Tabelle. Erklären Sie dies mithilfe der Dipol-Eigenschaft von Wasser. Führen Sie dazu ggf. eine kurze Recherche zur Dipol-eigenschaft des Wassers durch.
- 6\ „Kondensatoren in Tablets, Smartphones und Tastaturen“. Erstellen Sie in Ihrem Kurs ein Erklärvideo zu diesem Thema. Erstellen Sie zunächst gemeinsam im Kurs mithilfe Ihrer Lehrkraft einen zweckmäßigen Arbeitsplan für das Video, bevor Sie sich in Kleingruppen aufteilen.

Ph12 Lernbereich 1: Statische elektrische und magnetische Felder

Die Schülerinnen und Schüler **modellieren den zeitlichen Verlauf von Spannung und Stromstärke bei der Auf- und Entladung eines Kondensators mithilfe von Differentialgleichungen und ermitteln die im Kondensator gespeicherte Ladung.**

Voraussetzung: Experimentelle Bestimmung der Ladung eines Kondensators anhand eines t-I-Diagramms mithilfe graphischer Integration (Schülerexperiment im Buch S. 34-37)

Mathematische Modellierung des Aufladevorgangs

Zunächst soll der Aufladevorgang eines Kondensators mathematisch beschrieben werden. Über einen Wechselschalter werden der Widerstand R und der Kondensator C mit der Spannungsquelle U_0 verbunden (vgl. Abb.). Die Kombination von Widerstand und Kondensator nennt man ein **RC-Glied**.

Aufgrund der Maschenregel („Die Summe aller Teilspannungen ist gleich der Spannung der Quelle.“) gilt:

$$U_0 = U_R + U_C$$

$$U_0 = RI + U_C$$

$$RI = U_0 - U_C$$

$$I = \frac{U_0}{R} - \frac{U_C}{R} \quad (1)$$

Definitionsgemäß gilt:

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = Q'(t) = \dot{Q} \quad (2)$$

In Worten: Die Stromstärkefunktion ist die Ableitung der Ladungsfunktion. Der Punkt über einer Funktion, die den zeitlichen Verlauf einer physikalischen Größe beschreibt, ist die sogenannte „zeitliche Ableitung“ oder die „Ableitung nach der Zeit“. Dieser Ausdruck wird „Q Punkt“ ausgesprochen.

Außerdem gilt beim Kondensator:

$$C = \frac{Q}{U_C} \Leftrightarrow U_C = \frac{Q}{C} \quad (3)$$

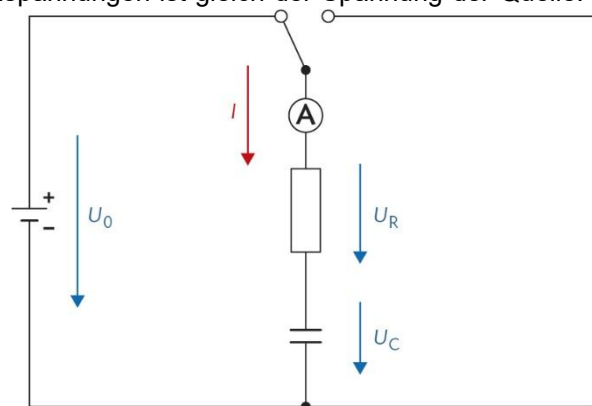
Gleichung (2) und (3) werden in (1) eingesetzt:

$$\dot{Q} = \frac{U_0}{R} - \frac{Q}{RC}$$

bzw.

$$\dot{Q} = \frac{U_0}{R} - \frac{1}{RC} \cdot Q \quad (4)$$

Gleichung (4) enthält die Funktion $Q(t)$, die die Ladung des Kondensators zu jedem Zeitpunkt angibt, und ihre Ableitung $\dot{Q}(t)$, also die Funktion $I(t)$, die die Stromstärke zu jedem Zeitpunkt angibt. Man nennt eine Gleichung, die eine Funktion und deren eigene Ableitung enthält, eine **Differentialgleichung (DGL)**, hier ist es eine Differentialgleichung **1. Ordnung**, weil sie lediglich eine 1. Ableitung enthält.



Der nächste Schritt ist es, eine Lösung für die DGL zu finden, sodass die Funktionen $Q(t)$ und $I(t)$ tatsächlich bekannt sind und die Ladungs- und Stromstärkewerte zu jedem Zeitpunkt berechnet werden können.

Lösungsweg

In Gleichung (4) erkennt man, dass die Ableitung von Q zu einem Ausdruck führt, in dem Q wieder enthalten ist. Mathematisch ist das bei den Exponentialfunktionen der Fall: Die Ableitung der Exponentialfunktion ergibt wieder einen Term, der die ursprüngliche Exponentialfunktion enthält.

Lösungsansatz

Folgende Exponentialfunktion zur Basis e soll als Lösung angesetzt werden, denn diese Lösung passt zur physikalischen Realität, dass die Kondensatorladung zu Beginn null ist, also $Q(t = 0) = 0$, und sich auf lange Sicht einem Sättigungswert annähert, also $Q(t \rightarrow \infty) = Q_0$.¹

$$Q(t) = Q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (5)$$

Durch Ableiten nach der Zeit (Achtung: Kettenregel!) erhält man:

$$\dot{Q} = Q_0 \cdot \left(0 - e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right)\right)$$

$$\dot{Q} = \frac{Q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\dot{Q} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (6)$$

Lösungsprobe

Ob die Lösung (5) tatsächlich funktioniert, soll überprüft werden, indem der Lösungsansatz (5) und dessen Ableitung (6) in die DGL (4) eingesetzt werden:

$$\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_0}{R} - \frac{1}{RC} \cdot Q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_0}{R} - \frac{Q_0}{RC} + \frac{Q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \underbrace{\frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R}}_0 + \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$1 = 1$$

¹ Man könnte auch andere Exponentialfunktionen aufstellen, etwa $Q(t) = a \cdot b^{c \cdot t} + d$, mit denen man zum Ziel kommt. Doch der o. g. Ansatz erweist sich als der einfachste.

Gleichungen für den Aufladevorgang

Auf Grundlage der Lösung (5) lassen sich nun die Funktionen aller Größen, die sich beim Aufladen des Kondensators ändern, aufstellen:

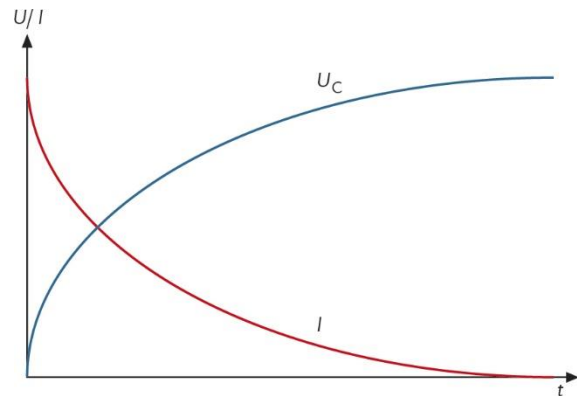
$$Q(t) = Q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \text{mit} \quad Q_0 = C \cdot U_0$$

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{Gleichung (6) vereinfacht}) \quad \text{mit} \quad I_0 = \frac{U_0}{R}$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Die t - I - und t - U_C -Diagramme passen zu den Diagrammen, die in der Auswertung des Schülerexperiments erstellt wurden (vgl. Abb. rechts und Buch S. 37). Die mathematische Modellierung des Ladevorgangs eines RC-Glieds passt also grundsätzlich zu den experimentell gewonnenen Erkenntnissen. Dennoch ist klar, dass man die Modelle nicht mit der Wirklichkeit verwechseln darf: Während sich die e-Funktionen mathematisch nur asymptotisch ihren Grenzwerten Q_0 , U_C bzw. 0 annähern, werden sie in der Realität tatsächlich erreicht – was aber auch auf die in der Realität begrenzte Messgenauigkeit zurückzuführen ist.

Die Modellfunktionen passen also nur eingeschränkt zur Realität.

**Mathematische Modellierung des Entladevorgangs**

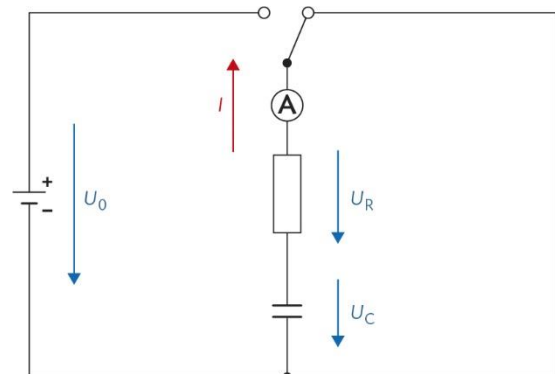
Betrachten wir nun den Entladevorgang des RC-Glieds. Dazu wird mit dem Wechselschalter die Spannungsquelle U_0 vom Kondensator getrennt, der sich nun über den Widerstand R entladen kann. Die äußere Spannung ist also null. Gemäß der Maschenregel gilt demnach:

$$0 = U_C + U_R$$

$$0 = \frac{Q}{C} + RI$$

$$-RI = \frac{1}{C} \cdot Q \Rightarrow I = -\frac{1}{RC} \cdot Q$$

$$\dot{Q} = -\frac{1}{RC} \cdot Q \quad (7)$$



Lösungsansatz

Für die DGL (7) suchen wir eine Lösung, das heißt die Funktion $Q(t)$, die bis auf den Vorfaktor $-1/RC$ identisch mit ihrer Ableitung ist. Die Lösungsfunktion muss außerdem gewährleisten, dass $Q(t=0) = Q_0$ ist, also dass der Kondensator zu Beginn des Entladevorgangs die Maximalladung Q_0 trägt, und dass $Q(t \rightarrow \infty) = 0$ ist, der Kondensator also nach langer Zeit vollständig entladen ist. Folgende Lösung wird deshalb angesetzt:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (8)$$

Die zeitliche Ableitung von (8) ergibt unmittelbar:

$$\dot{Q} = -\frac{1}{RC} \cdot Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\dot{Q} = -\frac{U_C}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (9)$$

Lösungsprobe

Wir setzen (9) und (8) in (7) ein, um den Lösungsansatz noch einmal zu überprüfen:

$$-\frac{U_C}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{1}{RC} \cdot Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{U_C}{R} = \frac{Q_0}{RC}$$

$$1 = 1$$

Gleichungen für den Entladevorgang

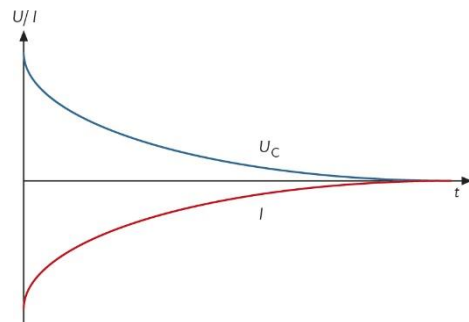
Nun lassen sich auf Basis von (8) und (9) die Funktionen von $Q(t)$, $I(t)$ und $U(t)$ aufstellen:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{mit } Q_0 = C \cdot U_0$$

$$I(t) = -I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{Gleichung (9) vereinfacht}) \quad \text{mit } I_0 = \frac{U_C}{R}$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Nebstehend sind die t - I - und t - U_C -Diagramme dargestellt. Man sieht, dass die Stromstärke negativ ist, was bedeutet, dass – im Gegensatz zum Aufladevorgang – die Richtung des Stroms umgekehrt ist. Außerdem nähert sich die Stromstärke wieder asymptotisch dem Wert null an, was dem experimentellen Befund (vgl. Buch S. 35) entspricht.

***Zeitkonstante τ**

Das Produkt $\tau = R \cdot C$ (gesprochen „Tau“) wird als **Zeitkonstante** des Ladevorgangs bezeichnet. Da $1 \Omega \cdot 1 \text{ F} = \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ A}} \cdot \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ A}} = \frac{1 \text{ As}}{1 \text{ A}} = 1 \text{ s}$, besitzt τ die Bedeutung einer Zeitspanne. Innerhalb dieser Zeit sinkt der Ladestrom beim Aufladen auf etwa 37 % des Anfangswerts, die Kondensatorspannung steigt in dieser Zeit auf etwa 63 % des Maximalwerts. Je größer τ ist, desto länger dauert also der Ladevorgang. Mithilfe der Zeitkonstanten lassen sich alle o. g. Gleichungen vereinfachen, etwa beim Aufladevorgang zu $I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$.

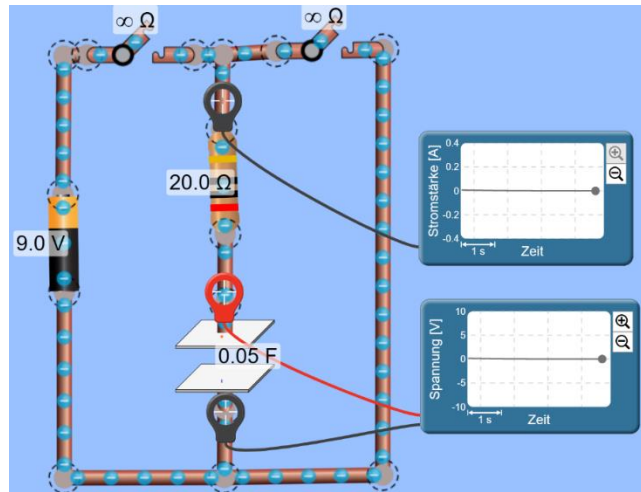
A Arbeitsaufträge

- 1 | Erklären Sie das Zustandekommen der unterschiedlich raschen Abnahme der Stromstärke beim Entladevorgang eines Kondensators für unterschiedliche Widerstandswerte. Argumentieren Sie sowohl physikalisch als auch mathematisch.
- 2 | Die Flächen unter den t - I -Kurven des (vollständigen) Auflade- und Entladevorgangs eines Kondensators müssen gleich groß sein. Begründen Sie dies.

- 3 | Erstellen Sie unter Verwendung einer Simulation (Beispiel: siehe Medieneencode) eine Schaltung für den Ladevorgang eines RC-Glieds. Wenn in der Simulation kein Wechselschalter zur Verfügung steht, nutzen Sie zwei Einzelschalter (vgl. Abb.). Verwenden Sie die Werte $U_0 = 9,0 \text{ V}$, $R = 20 \Omega$ und $C = 50 \text{ mF}$. Erstellen Sie charakteristische Screenshots der Diagramme beim Aufladen und Entladen des Kondensators. Erklären Sie mögliche Unterschiede zu den Diagrammen, die Sie im Schülerexperiment erstellt haben (Buch S. 34ff).



MC 67054-02



Simulation by PhET Interactive Simulations, University of Colorado Boulder, licensed under CC-BY-4.0 (<https://phet.colorado.edu>)

- 4 | Gegeben ist das gleiche RC-Glied wie in Aufgabe 3 mit $U_0 = 9,0 \text{ V}$, $R = 20 \Omega$ und $C = 50 \text{ mF}$.
 - a) Stellen Sie die vollständigen Gleichungen für $I(t)$ und $U_C(t)$ beim Aufladevorgang auf und berechnen Sie die Strom- und Spannungswerte für die Zeitpunkte $t = 0 \text{ s}$; $0,20 \text{ s}$; $2,0 \text{ s}$; 20 s .
 - b) Der Kondensator sei vollständig geladen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt der Entladevorgang und die Stromstärke besitzt den Wert I_0 . Berechnen Sie die Zeit, nach der die Stromstärke auf die Hälfte des Werts gefallen ist.
- 5 | Ein geladener Kondensator wird über einen Widerstand mit $R = 10 \text{ k}\Omega$ zum Zeitpunkt $t = 0$ entladen. Folgende Zeit-Stromstärkewerte werden gemessen:

t in s	0	10	20	40	60
I in μA	50	30,3	18,4	6,75	2,5

- a) Erstellen Sie ein Diagramm, das den zeitlichen Verlauf der Stromstärke darstellt. Verwenden Sie entweder ein Tabellenkalkulationsprogramm und fügen eine passende Trendlinie mitsamt Formel ein oder zeichnen Sie das Diagramm auf Millimeterpapier oder in großem Format auf gewöhnliches Karopapier.
- b) Berechnen Sie unter Verwendung des Diagramms die ursprünglich auf dem Kondensator gespeicherte Ladung. (Kontrollwert: $Q_0 = 1,0 \text{ mC}$)
- c) Bestimmen die Ladung des Kondensators, indem Sie die Fläche unter der Kurve des t - I -Diagramms bestimmen. Vergleichen Sie den Wert mit dem in b) berechneten Wert.
 - Tabellenkalkulation: Bestimmen Sie die Fläche unter der Kurve, indem Sie einzelne Säulen bilden, deren Fläche Sie berechnen und anschließend addieren (Buch S. 36).
 - Papier: Zählen Sie die Kästchen unter der Kurve.

Ph12 Lernbereich 1: Statische elektrische und magnetische Felder

Die Schülerinnen und Schüler bestätigen anhand von Messwerten durch Regression den Term für die Coulombkraft.

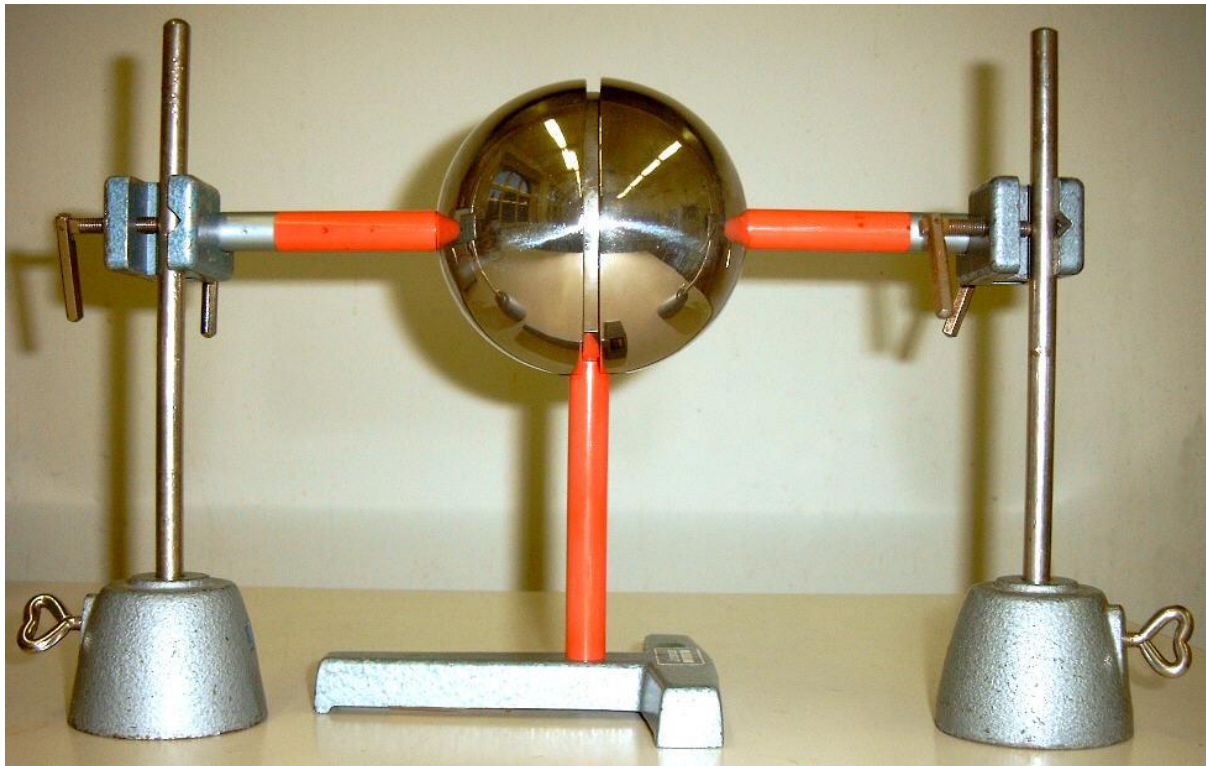
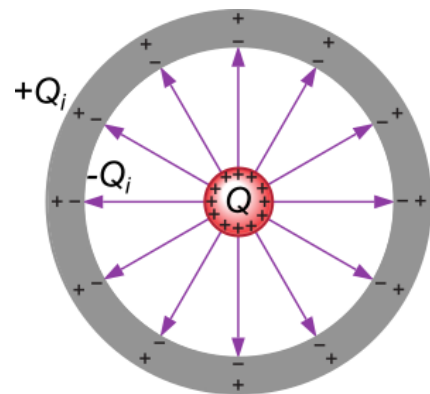
Sie nutzen die Analogien zwischen elektrischem Feld und Gravitationsfeld insbesondere für die Beschreibung von Kraft, Feldstärke, Energie und Potential für das radialsymmetrische Feld.

Energie im elektrischen Feld - Untersuchung eines radialsymmetrischen Feldes (Coulomb-Feld)

In den beiden Arbeitsblättern „Experimente zur Coulombkraft“ wurde bereits anhand verschiedener Experimente die Kraft und die elektrische Feldstärke in der Umgebung einer geladenen Kugel untersucht. Hier werden die Betrachtungen zum radialsymmetrischen Feld (oder: Coulomb-Feld) einer geladenen Kugel vertieft und die Konsequenzen für die Energie und das Potential diskutiert.

Versuch: Vergrößerung der Kugeloberfläche

Eine felderzeugende Metallkugel wird durch Anschließen an eine Hochspannungsquelle aufgeladen. Dann schiebt man vorsichtig zwei größere, metallene Halbkugeln darüber, sodass sie sich zu einer weiteren Kugel vereinen, die die erste Kugel komplett umschließt. Die äußere Kugel steht zwar nicht im direkten Kontakt mit der geladenen inneren Kugel und ist dadurch elektrisch neutral, aber aufgrund des elektrischen Feldes der inneren Kugel werden durch Influenz auf der äußeren Kugel Ladungsträger getrennt (vgl. Abbildung rechts).



Schlussfolgerungen

Verbindet man die Außenseite der zweiten Kugel mit einem empfindlichen Ladungsmessgerät, so registriert man genau die gleiche Ladungsmenge wie bei einer direkten Messung der inneren Kugel. Aus diesem Ergebnis lassen sich mehrere Schlussfolgerungen ziehen:

1. Das elektrische Feld an der Stelle der äußeren Kugel hängt nur von der Ladungsmenge ab, die auf der inneren Kugel sitzt. Der Durchmesser der inneren Kugel spielt hingegen keine Rolle. Das rechtfertigt im Nachhinein, dass wir in Experimenten zum radialsymmetrischen Feld immer mit Metallkugeln bestimmter Radien gearbeitet haben, auch wenn die Rede von Punktladungen war.
2. Betrachtet man den Raum zwischen den beiden Kugeln, so haben wir es hier mit einem Kondensator zu tun. Die eine Platte entspricht dabei der Oberfläche der äußeren Kugel, die andere der inneren Kugel – der Raum dazwischen ist mit Luft gefüllt. Die Stärke des elektrischen Feldes zwischen den Kondensatorplatten hängt dabei von der Ladungsverteilung auf den beiden Plattenflächen ab. Für eine quantitative Untersuchung führen wir uns noch einmal die Zusammenhänge beim Plattenkondensator vor Augen. Dort gilt (mit $\epsilon_r(\text{Luft}) = 1$) für das elektrische Feld:

$$E = \frac{U}{d} = \frac{Q}{C \cdot d} = \frac{d}{\epsilon_0 \cdot A} \cdot \frac{Q}{d} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{A}$$

Dieser Zusammenhang lässt sich so interpretieren, dass das elektrische Feld direkt an einer geladenen Fläche von der sogenannten „Flächenladungsdichte“ $\frac{Q}{A}$ bestimmt wird.

Übertragen wir diese Betrachtung auf das radialsymmetrische Feld zwischen den beiden Kugeln, so verteilt sich an der äußeren Kugel die Ladung Q auf die Fläche $A = 4\pi r^2$, wobei r hier der Radius der äußeren Kugel ist. Die elektrische Feldstärke ergibt sich analog zum Plattenkondensator:

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Diese Überlegungen bestätigen noch einmal das bereits bei den *Experimenten zur Coulombkraft* gewonnene Ergebnis. Sie rechtfertigen außerdem die Schreibweise des dortigen Proportionalitätsfaktors als $\frac{1}{4\pi \epsilon_0}$.

Die elektrische Feldstärke E des radialsymmetrischen Feldes einer Kugel mit Ladung Q ist unabhängig von deren Radius. Die Feldstärke hängt lediglich von der Kugelladung und dem Abstand r zum Kugelmittelpunkt ab:

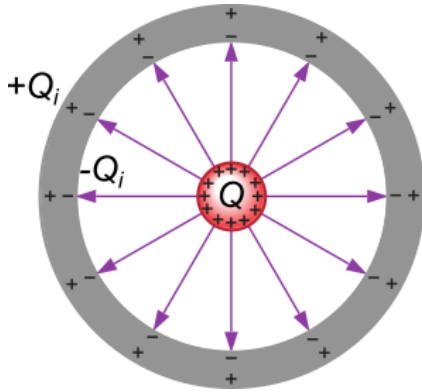
$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Das radialsymmetrische elektrische Feld einer Kugelladung ist vergleichbar mit dem von einer Masse hervorgerufenen Gravitationsfeld. Dieses wurde im Nahbereich (homogenes Gravitationsfeld bei geringen Abständen) in der 11. Jahrgangsstufe sowie im Buch der 12. Jahrgangsstufe in Kapitel 3 eingehend untersucht.

Im Folgenden werden Eigenschaften beider Felder einander vergleichend gegenüber gestellt.

Analogien zwischen radialsymmetrischem elektrischen Feld und Gravitationsfeld

radialsymmetrisches elektrisches Feld



Die Abbildung zeigt das radialsymmetrische Feldlinienbild, das durch einen geladenen Körper hervorgerufen wird. Befindet sich im Abstand r von der Ladung Q eine elektrische Probeladung q , so wirkt auf diese eine **Kraft F** . Ebenso wirkt eine gleich große, umgekehrt gerichtete Kraft von der Probeladung auf den geladenen Körper. Die zwischen den beiden Körpern wirkende Kraft kann anziehend (ungleichnamige Ladungen) oder abstoßend (gleichnamige Ladungen) sein.

Zur Vereinfachung beschreiben wir die beiden Ladungen Q und q als Punktladungen, die Kraft die zwischen diesen beiden Ladungen wirkt, wird durch das **Coulomb-Gesetz** beschrieben:

$$F_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot q}{r^2}$$

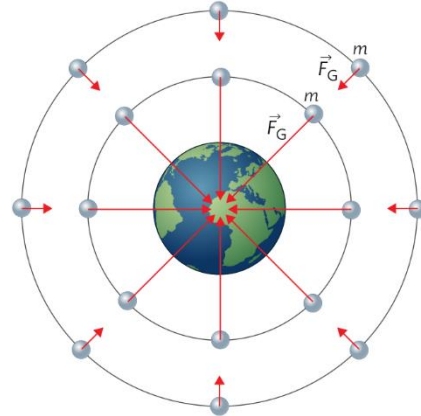
Die Kraft ist direkt proportional zur Stärke der Ladungen Q und q und indirekt proportional zum Quadrat des Abstands r zwischen beiden Punktladungen.

Die **elektrische Feldstärke E** einer Punktladung Q ist gegeben durch:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Je nach dem Vorzeichen der Ladung zeigt sie radial von der Ladung weg (positive Ladung) oder zur Ladung hin (negative Ladung).

Gravitationsfeld



Die Abbildung zeigt das Feldlinienbild eines Gravitationsfeldes, in dessen Mittelpunkt sich eine große Masse (Erde) befindet. Befindet sich im Abstand r von der Masse ein weiterer massebehafteter Körper m , wirkt eine anziehende **Kraft F** von der Erde auf den Körper. Ebenso wirkt eine gleich große, umgekehrt gerichtete Kraft von dem Körper auf die Erde. Die zwischen den beiden Körpern wirkende Kraft ist immer anziehend!

Die Kraft F zwischen zwei Massen m und M , die zur Vereinfachung als punktförmig angenommen werden dürfen, wird durch das **Gravitationsgesetz** beschrieben:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Die Kraft ist direkt proportional zur Größe der Massen M und m und indirekt proportional zum Quadrat des Abstands r zwischen beiden Massenmittelpunkten.

Die **Gravitationsfeldstärke g** einer Punktmasse M ist gegeben durch:

$$g = G \frac{M}{r^2}$$

Da die Masse immer positiv ist, zeigt die Gravitationsfeldstärke immer radial zur Masse hin.

Die potentielle **Energie** E_{pot} einer Ladung q im elektrischen Feld einer Punktladung Q lautet:

$$E_{\text{pot}} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot q}{r}$$

Das **elektrische Potential** φ im Abstand r von einer Punktladung Q wird angegeben durch:

$$\varphi = \frac{E_{\text{pot}}}{q} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Die potentielle **Energie** E_{pot} einer Masse m im Gravitationsfeld einer Punktmasse M lautet:

$$E_{\text{pot}} = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Das **Gravitationspotential** φ im Abstand r von einer Punktmasse M wird angegeben durch:

$$\varphi = \frac{E_{\text{pot}}}{m} = -G \frac{M}{r}$$

Herleitung der Formel für die potentielle Energie

Aus Kapitel 3.1 des Buches ist bereits bekannt: Die Änderung der potentiellen Energie ergibt sich aus dem Produkt von Kraft F und Wegstrecke Δs , um die das Objekt (Masse, Ladung, ...) im Feld verschoben wird. Also: $\Delta E_{\text{pot}} = F \cdot \Delta s$

Dieser Zusammenhang lässt sich auch anders formulieren: Bei bekanntem Term für die potentielle Energie lässt sich die Kraft auf das Objekt berechnen durch $F = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta s}$

- **Beispiel Höhenenergie:** Hier ist $E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$ bzw. $\Delta E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot \Delta s$. Es ergibt sich für die Kraft $F = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta s} = \frac{m \cdot g \cdot \Delta s}{\Delta s} = m \cdot g$ also der bekannte Ausdruck für die Gewichtskraft.
- **Beispiel potentielle Energie im homogenen elektrischen Feld:** Hier ist $E_{\text{pot}} = q \cdot E \cdot s$ bzw. $\Delta E_{\text{pot}} = q \cdot E \cdot \Delta s$. Entsprechend gilt für die Kraft $F = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta s} = \frac{q \cdot E \cdot \Delta s}{\Delta s} = q \cdot E$.

Diese neue Darstellungsweise ist interessant, weil in ihr das Konzept auch auf Situationen erweitert werden kann, in denen die Kraft nicht konstant ist. Dann wird aus dem Differenzenquotienten im Grenzfalle der Differentialquotient, d. h. die Ableitung: $F = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta s} = \frac{dE_{\text{pot}}}{ds}$

- **Beispiel Spannenergie (vgl. 8. Klasse):** Falls wir uns im Hookeschen Bereich des Dehnungs-Kraft-Diagramms bewegen, gilt $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$, denn für die Kraft erhält man dann: $F = \frac{dE_{\text{pot}}}{ds} = \frac{1}{2} D \cdot 2s = D \cdot s$. Die Kraft, die zum Dehnen einer Feder benötigt wird, ist direkt proportional zur Dehnungsstrecke. Die Proportionalitätskonstante D heißt Federhärte.

Die Aufgabe, die sich in unserem Zusammenhang im radialsymmetrischen Feld stellt, lautet: Finde einen Term $E_{\text{pot}}(r)$, dessen Ableitung die Coulombkraft $F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$ ist!

Die Lösung dazu ist: $E_{\text{pot}}(r) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r}$; dies lässt sich mathematisch leicht durch Ableiten bestätigen.

Das elektrische Potential hängt mit der potentiellen Energie zusammen durch $\varphi = \frac{E_{\text{pot}}}{q}$, also für das radialsymmetrische Feld: $\varphi(r) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$.

Analoge Betrachtungen lassen sich auch für das Gravitationsfeld anstellen.

Zwischen radialsymmetrischem elektrischen Feld einer Punktladung und Gravitationsfeld einer Masse bestehen folgende Gemeinsamkeiten:

- **Kraft:** Beide Kräfte sind umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands und direkt proportional zu den jeweiligen Quellen (Ladungen bzw. Massen).
- **Feldstärke:** Beide Feldstärken nehmen mit dem Quadrat des Abstands ab und sind radialsymmetrisch.
- **Energie:** Die potentielle Energie in beiden Feldern hängt von der Quelle und dem Abstand ab.
- **Potential:** Beide Potentiale sind umgekehrt proportional zum Abstand von der Quelle, mit einem negativen Vorzeichen im Gravitationsfeld.

Anwendungsbeispiele für radialsymmetrische Felder

Wie oben gezeigt, spielt die Ausdehnung der geladenen Kugel für das elektrische Feld keine Rolle. Dennoch führt die Ausdehnung einer felderzeugenden Kugel bzw. der Probeladungskugel zu nicht vernachlässigbaren Influenzeffekten, wie die *Experimente zur Coulombkraft* gezeigt haben. Bei Punktladungen treten diese Störeffekte nicht auf. Da das elektrische Feld um eine Punktladung ein klassisches Beispiel für die Anwendung eines radialsymmetrischen Feldes ist, beschränken wir uns auf Anwendungsbeispiele in diesem Kontext. Im elektrischen Feld um eine Punktladung ist die Feldstärke in allen Punkten, die den gleichen Abstand von der Ladung haben, gleich und zeigt radial nach außen. Dieses Prinzip findet Anwendung in vielen Bereichen der Physik und Technik, wie zum Beispiel:

- **Elektrostatistische Geräte:** Bei elektrostatischen Generatoren oder Farbspritzpistolen wird die radialsymmetrische Verteilung der elektrischen Feldstärke genutzt, um Partikel gleichmäßig zu verteilen oder anzuziehen.
- **Teilchenbeschleuniger:** In der Teilchenphysik werden radialsymmetrische Felder verwendet, um geladene Teilchen auf kreisförmigen Bahnen zu halten und zu beschleunigen.
- **Medizinische Anwendungen:** In der medizinischen Bildgebung, wie der Magnetresonanztomographie (MRT), spielen radialsymmetrische Felder eine Rolle bei der Erzeugung von Bildern des Körperinneren.

Musteraufgabe

Elektrisches Feld einer Punktladung

Gegeben ist eine Punktladung Q im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ an einem Punkt $\vec{r}$ im Raum.

Lösung:

Der Betrag der elektrischen Feldstärke ist definiert über $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$

Um auch die Richtung der Feldstärke an einem Punkt im Raum zu bestimmen, erinnern wir uns an das Modell der elektrischen Feldlinien: Diese beschreiben die Stärke und den Verlauf des elektrischen Feldes. Sie verzweigen und schneiden sich nicht und je enger sie nebeneinander liegen, desto stärker ist das elektrische Feld an dieser Stelle. Der Anfang bzw. das Ende elektrischer Feldlinien sind positive (Anfang) bzw. negative (Ende) Ladungen. Anhand dieses Modells lässt sich nachvollziehen, dass das elektrische Feld stets radial von bzw. zu der Punktladung ausgerichtet ist.

Das elektrische Feld ist also radial von der Punktladung weg (bei positiver Ladung) oder zur Punktladung hin (bei negativer Ladung) gerichtet und nimmt mit dem Quadrat des Abstands ab. Durch Einsetzen konkreter Zahlenwerte kann dann die Stärke des elektrischen Feldes $\vec{E}$ an einem Punkt $\vec{r}$ im Raum berechnet werden.

Musteraufgabe

Elektrisches Potential einer geladenen Kugel

Eine geladene Kugel mit Radius $R = 2,0 \text{ cm}$ hat eine Gesamtladung $Q = 30 \text{ nC}$. Berechnen Sie das elektrische Potential φ an einem Punkt im Abstand $r = 15 \text{ cm}$ außerhalb der Kugel.

Lösung:

Das elektrische Potential φ aufgrund einer Punktladung Q in einer Entfernung r ist gegeben durch:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Hierbei ist ϵ_0 die elektrische Feldkonstante (auch Permittivität des Vakuums genannt). Da die Kugel symmetrisch geladen ist, können wir sie als Punktladung betrachten, wenn wir das Potential außerhalb der Kugel berechnen. Dies bedeutet, dass wir die gesamte Ladung Q im Zentrum der Kugel konzentriert betrachten können.

Für einen Punkt im Abstand von $r = 15 \text{ cm}$ von der Kugeloberfläche, also im Abstand von 17 cm vom Kugelmittelpunkt, ist das Potential φ einer Punktladung mit $Q = 30 \text{ nC}$ daher:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{30 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{0,17 \text{ m}} = -1,6 \text{ kV}$$

Musteraufgabe

Potentielle Energie einer geladenen Kugel

- Eine Probeladung mit $q = 5,0 \text{ nC}$ hat in einem bestimmten Abstand r zur einer felderzeugenden Kugel mit $Q = 30 \text{ nC}$ eine potentielle Energie von $E_{\text{pot}} = 24 \cdot 10^{-6} \text{ J}$. Berechnen Sie den Abstand, den die Probeladung vom Mittelpunkt der felderzeugenden Ladung hat.
- Begründen Sie, dass Sie mit den Angaben die exakte Position der Probeladung nicht bestimmen können.

Lösung:

- Für die potentielle Energie der Probeladung gilt: $E_{\text{pot}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot q}{r}$. Daraus folgt:

$$r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{E_{\text{pot}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{30 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot 5,0 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{24 \cdot 10^{-6} \text{ J}} = 0,056 \text{ m} = 5,6 \text{ cm}$$

Die Probeladung ist also $5,6 \text{ cm}$ vom Mittelpunkt der felderzeugenden Ladung entfernt.

- Da das elektrische Feld der felderzeugenden Kugel radialsymmetrisch ist, hat die Probeladung auf einer Kugelfläche mit Radius $5,6 \text{ cm}$ rund um die felderzeugende Kugel überall die gleiche potentielle Energie. Die genaue Position auf dieser Kugelfläche kann so also nicht ermittelt werden.

A Arbeitsaufträge

1\

- a) Zeichnen Sie das elektrische Feld innerhalb und außerhalb einer negativ geladene Hohlkugel.
- b) Erklären Sie den Verlauf der Feldlinien.
- c) Diskutieren Sie die Änderungen des elektrischen Feldes, wenn die Ladung positiv wäre.

2\

Berechnen Sie die elektrische Feldstärke E in einer Entfernung von $r = 0,10$ m von einer Punktladung mit $Q = 5,0$ nC.

3\

- a) Beschreiben Sie die Unterschiede und Gemeinsamkeiten des Feldes einer Punktladung und des Feldes einer gleichmäßig geladenen Kugel.
- b) Erklären Sie, dass das elektrische Feld außerhalb einer gleichmäßig geladenen Kugel ununterscheidbar zu dem einer Punktladung ist. Diskutieren Sie dann das Verhalten des Feldes innerhalb der Kugel.

4\

- a) Berechnen Sie jeweils das elektrische Potential φ in einer Entfernung von $r_1 = 0,050$ m; $r_2 = 0,50$ m; $r_3 = 5,0$ m von einer Punktladung mit $Q = 90$ nC.
- b) Vergleichen Sie die berechneten Ergebnisse und geben Sie einen quantitativen Zusammenhang zwischen dem Abstand und dem elektrischen Potential an.

5\

Zwischen dem Coulombschen Gesetz und dem Gravitationsgesetz gibt es viele Gemeinsamkeiten, aber auch ein paar Unterschiede.

- a) Vergleichen Sie die Berechnung der Kräfte zwischen zwei Punktladungen und zwei Massen.
- b) Diskutieren Sie die Abhängigkeit der Kräfte von der Entfernung zwischen den Objekten.
- c) Vergleichen Sie die Wirkungsweise der beiden Kräfte (anziehend vs. abstoßend).

6\

- a) Berechnen Sie die elektrische Kraft sowie die Gravitationskraft zwischen zwei Elektronen, die sich in einem Abstand von $r = 1,0$ nm befinden.
- b) Diskutieren Sie das Größenverhältnis der beiden Kräfte. Gehen Sie dabei darauf ein, ob bei elektrischen Situationen, auch im Atom, die Gravitation immer mit berücksichtigt werden muss.

7\

In der Rasterkraftmikroskopie werden winzige Spitzen verwendet, um die Oberflächen von Proben zu untersuchen. Diese Spitzen können elektrisch geladen sein und üben Kräfte auf die Proben aus. Mit einer Spitze der Ladung $Q_1 = 2,0$ μC soll eine Probe in einem Abstand von $r = 0,10$ mm mit einer Ladung von $Q_2 = -1,0$ μC untersucht werden.

- a) Berechnen Sie die elektrische Kraft F_{el} , die zwischen der Spitze und der Probe wirkt.
- b) Ein Problem, das bei der Verwendung sehr dünner Spitzen auftreten kann, ist das von elektrischen Überschlüssen zwischen zwei Bauteilen. Begründen Sie, dass das elektrische Feld in der direkten Umgebung einer dünnen Spitze stärker ist als in der Umgebung einer dickeren „Spitze“. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Ladungsmenge auf den beiden Spitzen jeweils gleich ist, und modellieren Sie die Spitzen durch Kugelflächen.

A Arbeitsaufträge

- 8) Ein Kugelkondensator besteht aus zwei konzentrischen Metallkugeln mit den Radien r_1 und r_2 . Die innere Kugel trägt die Ladungsmenge Q .
- a) Bestimmen Sie aus der Potentialdifferenz die Spannung U , die zwischen den beiden Metallkugeln besteht, und berechnen Sie dann allgemein die Kapazität $C = \frac{Q}{U}$ dieser Anordnung.
- b) Auch eine einzelne Kugel besitzt eine Kapazität. Das Modell aus Aufgabe a) kann dabei verwendet werden, wenn der Radius der äußeren Kugel als unendlich angenommen wird, d. h. im Grenzfalle $r_2 \rightarrow \infty$. Zeigen Sie, dass die Kapazität einer Kugel vom Radius R gegeben ist durch $C_{\text{Kugel}} = 4\pi\epsilon_0 \cdot R$.
- c) Eine Metallkugel mit Durchmesser 15 cm wird mit einer Hochspannungsquelle ($U = 2,5 \text{ kV}$) verbunden. Berechnen Sie die Ladungsmenge, die dabei auf der Oberfläche der Metallkugel sitzt.
- 9) Die Elektrokardiographie (EKG) ermöglicht Messungen von elektrischen Signalen des Herzens. Diese Signale entstehen durch die Verschiebung von Ionen in den Herzmuskelzellen und die dadurch erzeugten elektrischen Felder. Zwei Ionen mit Ladungen $Q_1 = 1,0 \text{ nC}$ und $Q_2 = -1,0 \text{ nC}$ befinden sich $r = 1,0 \text{ cm}$ voneinander entfernt.
- a) Berechnen Sie die elektrische Kraft F_{el} zwischen den beiden Ionen.
- b) Bestimmen Sie, wie weit zwei Protonen voneinander entfernt sein müssten, damit die Gravitationskraft zwischen ihnen den gleichen Wert annimmt, wie die Kraft F_{el} aus Aufgabe a).