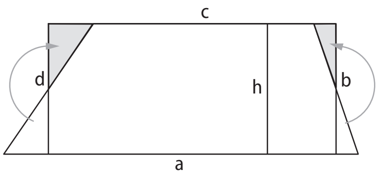
KX **1** **a)** Das Trapez lässt sich in ein flächengleiches Rechteck überführen (vgl. Abbildung). Daher ist der Flächeninhalt des Trapezes nur abhängig von den Seitenlängen h und $\frac{a+c}{2}$ des dadurch entstandenen Rechtecks und nicht von den Längen der Seiten b und d.



b) $V = G \cdot l = \frac{a+c}{2} \cdot h \cdot l = \frac{1}{2}(10+3) \cdot 5 \cdot 1000 = 32\,500\,[m^3]$

KX **2** 1 **a)** Die Kugel entsteht durch Rotation eines Halbkreises mit Radius r um diejenige Gerade, die durch den Mittelpunkt des Halbkreises senkrecht zu seinem Durchmesser verläuft.

b) $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$

2 **a)** Der Kegel entsteht durch Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten h und r um die Gerade, die die Kathete h enthält.

b) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \pi \cdot h = \frac{\pi}{3} r^2 h$

c) Die Oberfläche besteht aus dem Grundkreis und dem Kegelmantel. Dieser ist ein Kreissektor mit Radius $s = \sqrt{h^2 + r^2}$.

$A = G + M = r^2 \pi + r \pi s = 2^2 \cdot \pi + \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{2^2 + 4^2} = 4\pi \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right) \approx 40{,}7\,[cm^2]$

3 **a)** Der Zylinder entsteht durch Rotation eines Rechtecks mit den Seitenlängen r und h um die Gerade, die die Höhe h enthält.

b) $V = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h$

c) Die Oberfläche besteht aus zwei kongruenten Kreisen und der Mantelfläche. Diese ist ein Rechteck mit den Seitenlängen h und $2r\pi$.

$A = 2G + M = 2r^2\pi + h \cdot 2r\pi = 2 \cdot 2^2 \cdot \pi + 4 \cdot 2 \cdot 2\pi = 24\pi \approx 75{,}4\,[cm^2]$

4 **a)** Der Körper ist kein Rotationskörper.

b) $V = 8\,cm^2 \cdot h$

KX **3** **a)** Die Aussage ist falsch, da die Ableitung f′ an der Stelle x = 4 eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Werten besitzt. Bei x = 4 liegt daher ein Maximum vor.

b) Die Aussage ist wahr. Die mittlere Änderungsrate von f′ im Intervall [–3; 0] berechnet sich durch $\frac{f'(0) - f'(-3)}{0 - (-3)} \approx \frac{0-4}{3} = -\frac{4}{3} \approx -1{,}7$.

c) Die Aussage ist im Allgemeinen falsch. Die Ableitung f′ einer Funktion f legt den Verlauf von G_f bis auf eine Verschiebung in y-Richtung fest. Daher kann aufgrund von $G_{f'}$ keine Aussage über einen bestimmten Funktionswert von f getroffen werden.

d) Die Aussage ist wahr. Besitzt G_f einen Terrassenpunkt $W\left(x_W \,|\, f\left(x_W\right)\right)$, dann ist x_W eine Nullstelle von f′ ohne Vorzeichenwechsel. Eine solche ist aus der Abbildung nicht ersichtlich.

KX **4** **a)** $f'(x) = -\frac{15}{256}x^2 + \frac{15}{16}x - 3$

f'(0) beschreibt die Steigung der Schanze am Startpunkt.

b) $f'(0) = -3 < 0$;

$f'(7) = -\frac{15}{256} \cdot 7^2 + \frac{15}{16} \cdot 7 - 3 = \frac{177}{256} > 0$

Daher gilt: $f'(0) \cdot f'(7) < 0$.

Am Start- und am Zielpunkt liegen unterschiedliche Arten der Steigung (Gefälle bzw. Anstieg) vor.

c) Man bestimmt den Tiefpunkt der Bahn.

Notwendige Bedingung:

$f'(x) = 0 \iff -\frac{15}{256}x^2 + \frac{15}{16}x - 3 = 0 \iff -\frac{15}{256}\left(x^2 - 16x + \frac{256}{5}\right) = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{256}{5}}}{2} = 8 \pm \frac{8}{5}\sqrt{5};$

$x_1 = 8 + \frac{8}{5}\sqrt{5} \approx 11{,}6 > 7;$

$x_2 = 8 - \frac{8}{5}\sqrt{5} \approx 4{,}4$

Hinreichende Bedingung:

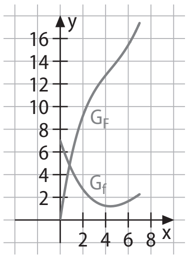
$f''(x) = -\frac{15}{128}x + \frac{15}{16};\ f''(x_2) \approx 0{,}42 > 0$

Der Graph von f hat einen Tiefpunkt $T(x_2 \mid f(x_2))$ mit $f(x_2) = f\left(8 - \frac{8}{5}\sqrt{5}\right) \approx 1{,}21\,[\text{m}]$.

Es gilt $f(0) = 7\,[\text{m}]$ und $f(7) = \frac{581}{256} \approx 2{,}27\,[\text{m}]$.

Der tiefste Punkt der Bahn liegt um $f(0) - f(x_2) \approx 7 - 1{,}21 = 5{,}79\,[\text{m}]$ tiefer als der Startpunkt.

d)



Wegen $f(x) > 0$ ist G_F streng monoton steigend.

Da G_f bei etwa $x = 4{,}4$ einen Tiefpunkt besitzt, ist G_F für $0 \le x < 4{,}4$ rechtsgekrümmt und für $4{,}4 < x \le 7$ linksgekrümmt. Bei etwa $x = 4{,}4$ besitzt G_F einen Wendepunkt.

Flächeninhalt und bestimmtes Integral

1

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schülerinnen und Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülerinnen und Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft in ihrem Leben vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

Individuelle Lösungen. Beispiele:

KX
- Man kann die Fläche einer einzelnen Fensterscheibe abschätzen und diese mit der Anzahl der verwendeten Scheiben multiplizieren. Fensterscheiben am Rand, die nicht rechteckig in der „Standardgröße“ sind, können anteilig miteinbezogen werden.

KX
- Wenn die unvollständigen Scheiben gar nicht gezählt werden, ist der berechnete Flächeninhalt kleiner als der tatsächliche.
  Wenn die unvollständigen Scheiben als ganze Scheiben gezählt werden, ist der berechnete Flächeninhalt größer als der tatsächliche.

KX
- Man kann unvollständige Fensterscheiben flächenmäßig so zusammenfassen, dass sie zusammen eine „vollständige“ Scheibe ergeben und sie dann zusammen als eine zählen.

Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Lernende und Lehrkräfte. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Lernende und Lehrkräfte auf das Kommende einstellen. Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Entdecken

KX
- [0; 1]: Zufluss von Wasser mit $5\,\frac{m^3}{h}$
  [1; 3]: Die momentane Zuflussrate steigt linear an von $5\,\frac{m^3}{h}$ auf $20\,\frac{m^3}{h}$.
  [3; 4,5]: Die momentane Zuflussrate fällt (nicht-linear) von $20\,\frac{m^3}{h}$ auf $0\,\frac{m^3}{h}$ ab.
  [4,5; 6]: Die momentane Änderungsrate wird negativ, es fließt Wasser ab. Die momentane Änderungsrate erhöht sich betragsmäßig.
  [6; 7,2]: Die momentane Änderungsrate nähert sich wieder $0\,\frac{m^3}{h}$.
  Der Behälter hat den höchsten Füllstand 4,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn, da im Intervall [0; 4,5] Wasser zufließt (positive momentane Änderungsrate) und im Intervall [4,5; 7] Wasser abfließt (negative momentane Änderungsrate).

KX
- Die Änderung der Wassermenge lässt sich geometrisch als Fläche zwischen dem Graphen und der t-Achse deuten.
  $I_1 = [0; 1]$: $5\,\frac{m^3}{h} \cdot 1\,h = 5\,m^3$
  $I_2 = [1; 3]$: $\frac{5\,\frac{m^3}{h} + 20\,\frac{m^3}{h}}{2} \cdot 2h = 25\,m^3$
  $I_3 = [3; 4,5]$: näherungsweise: $\frac{1}{2} \cdot 20\,\frac{m^3}{h} \cdot 1{,}5\,h = 15\,m^3$
  Gesamtzunahme: $5\,m^3 + 25\,m^3 + 15\,m^3 = 45\,m^3$

KX
- Die markierte Fläche beschreibt die Gesamtänderung des Wasservolumens im Becken in den ersten 6 Stunden.

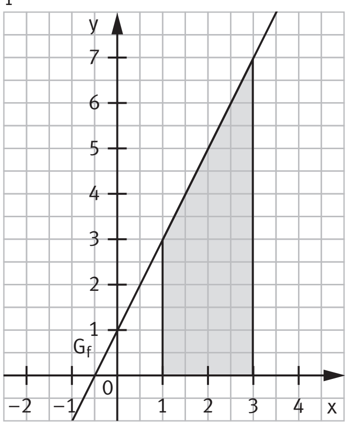
Nachgefragt

KX
- Wenn der Graph von f punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist, so ist die Flächenbilanz im Intervall [–a; 0] gegengleich zur Flächenbilanz im Intervall [0; a].
  Somit gilt $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

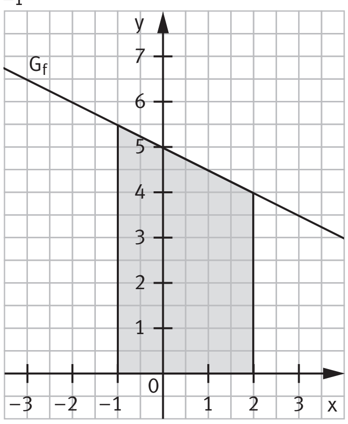
KX
- $\int_a^b f(t)\,dt$ gibt die Gesamtänderung einer Größe an, deren momentane Änderungsrate f ist.
  Dabei wird der Anfangsbestand nicht berücksichtigt.

Aufgaben

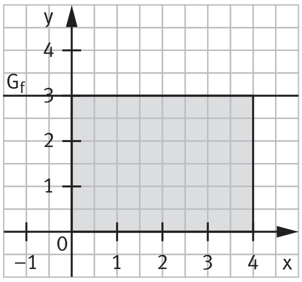
KX **1** **a)** $\int_1^3 (2x + 1)\,dx = \frac{3 + 7}{2} \cdot 2 = 10$



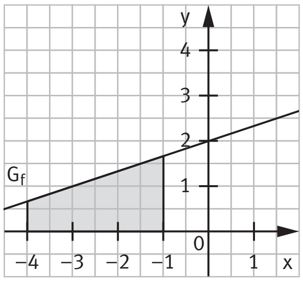
b) $\int_{-1}^{2} (5 - 0{,}5x)\,dx = \frac{5{,}5 + 4}{2} \cdot 3 = 14{,}25$



c) $\int_0^4 3\,dx = 3 \cdot 4 = 12$



d) $\int_{-4}^{-1} \left(2 + \frac{1}{3}x\right) dx = \frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{3}}{2} \cdot 3 = 3{,}5$



KX **2** **a)** $\int_{-1}^{1,5} (2{,}25 - x^2)\,dx$ **b)** $\int_{-0,5}^{1} (2 - x)\,dx$ **c)** $\int_{-2}^{0} \frac{4x^2}{1 + x^2}\,dx$

KX **3** **a)** $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ **b)** $\int_{-1}^{1,5} f(x)\,dx < 0$

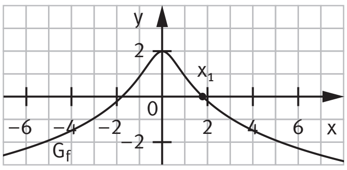
c) $\int_{-1,5}^{1} f(x)\,dx > 0$ **d)** $\int_{a}^{1} f(x)\,dx > 0$ für jeden Wert von $a \in [-1{,}5; -1[$

KX **4** Das Integrationsintervall wird in Abschnitte unterteilt, so dass elementargeometrische Flächenberechnungen möglich sind:

$$\int_0^{16} f(x)\,dx = \int_0^{6} f(x)\,dx + \int_6^{10} f(x)\,dx + \int_{10}^{13} f(x)\,dx + \int_{13}^{15} f(x)\,dx + \int_{15}^{16} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 9 + 12 + 4{,}5 - 2 - 2 = 21{,}5$$

KX **5**



x_1 ist die positive Nullstelle von f.

a) $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx$

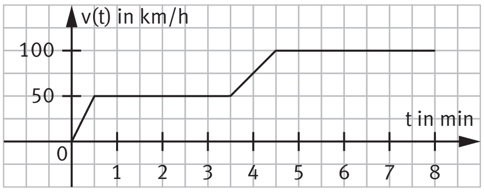
Der Wert des Integrals $\int_1^3 f(x)\,dx$ ist negativ, da der Graph von f zusammen mit der x-Achse im Intervall [1; 3]eine negative Flächenbilanz aufweist, was sich z. B. durch Abzählen von Kästchen ergibt.

Daher gilt $\int_0^1 f(x)\,dx > \int_0^3 f(x)\,dx$.

b) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^a f(x)\,dx$

Der Wert des Integrals $\int_{x_1}^a f(x)\,dx$ ist für $a > x_1$ negativ und es gilt $\lim\limits_{a \to +\infty} \int_{x_1}^a f(x)\,dx = -\infty$. Daher gibt es ein $a > x_1$, für das gilt $\int_{x_1}^a f(x)\,dx = -\int_0^{x_1} f(x)\,dx$ und damit $\int_0^a f(x)\,dx = 0$.

KX **6** Der zurückgelegte Weg wird im Diagramm als Fläche zwischen dem Graphen und der t-Achse dargestellt.
Mögliche Lösung: abschnittsweise Annäherung der Daten des Fahrtenschreibers mithilfe von linearen und konstanten Funktionen:



Berechnung der Flächeninhalte in Teilintervallen:

[0; 0,5]: $\frac{1}{2} \cdot 0{,}5\,\text{min} \cdot 50\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5\,\text{min} \cdot 50\frac{\text{km}}{60\,\text{min}} = \frac{5}{24}\,\text{km}$

[0,5; 3,5]: $50\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 3\,\text{min} = 50\frac{\text{km}}{60\,\text{min}} \cdot 3\,\text{min} = 2{,}5\,\text{km}$

[3,5; 4,5]: $\frac{100\frac{\text{km}}{\text{h}} + 50\frac{\text{km}}{\text{h}}}{2} \cdot 1\,\text{min} = 75\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1\,\text{min} = 75\frac{\text{km}}{60\,\text{min}} \cdot 1\,\text{min} = 1{,}25\,\text{km}$

[4,5; 8]: $100\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 3{,}5\text{min} = 100\frac{\text{km}}{60\,\text{min}} \cdot 3{,}5\,\text{min} = \frac{35}{6}\,\text{km}$

Für den insgesamt zurückgelegten Weg gilt: $\frac{5}{24} + 2{,}5 + 1{,}25 + \frac{35}{6} = \frac{235}{24}\,\text{km} \approx 9{,}79\,\text{km}$

KX **7** **a)** Die Aussage ist falsch. Es gilt $\int_{-2}^{4} 2\,dx = 6 \cdot 2 = 12 \neq 8$.

b) Die Aussage ist falsch. Es gilt $\int_{0}^{4} -2\,dx = -(2 \cdot 4) = -8 \neq 8$.

c) Die Aussage ist wahr, da der Graph der Sinusfunktion punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.

d) Die Aussage ist falsch. Es gilt $\int_{-2}^{4} 0\,dx = 0 \neq 6$.

KX **8** Das Integral gibt jeweils die Gesamtänderung der Größe in den ersten fünf Minuten an.
Möglicher Sachkontext: Zu- bzw. Abfluss von Wasser (in l) aus einem Becken.

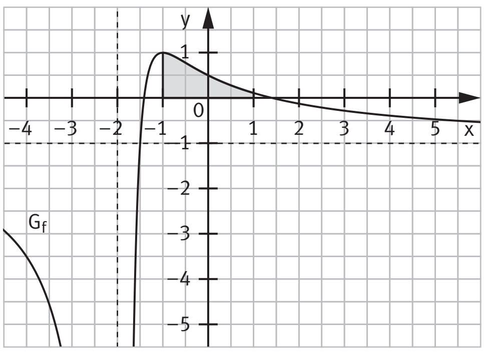
a) $\int_{0}^{5} f(t)\,dt = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 16\,[l]$

b) $\int_{0}^{5} f(t)\,dt = 2 \cdot 1{,}5 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 5\,[l]$

c) $\int_{0}^{5} f(t)\,dt = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1{,}5 - 1 \cdot 1{,}5 = 1\,[l]$

KX **9** **a)** Nullstellen: $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt{2}$
Asymptoten: waagrechte Asymptote: $y = -1$
senkrechte Asymptote: $x = -2$

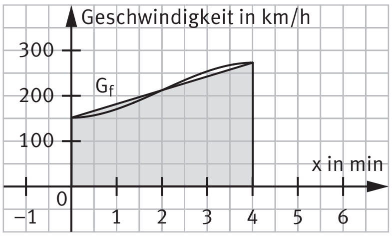
b)



Die im Intervall [−1; 1] zwischen dem Graphen G_f und der x-Achse eingeschlossene Fläche lässt sich mithilfe eines Trapezes annähern.

$\int_{1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2} \cdot (f(-1) + f(1)) \cdot 2 = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$

KX **10**



$$\int_0^4 f(x)\,dx \approx \frac{\left(150\,\frac{km}{h} + 270\,\frac{km}{h}\right)}{2} \cdot 4\,min = 210\,\frac{km}{h} \cdot 4\,min = 210\,\frac{km}{60\,min} \cdot 4\,min = 14\,km$$

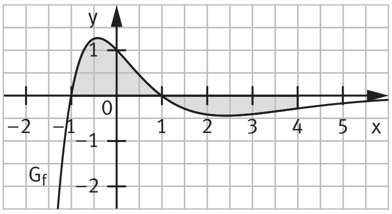
KX **11** Individuelle Lösungen. Beispiele

a) $I_1 = [0;\,4]$ $I_2 = [4;\,7]$ $I_3 = [6;\,12]$

b) $I_1 = [0;\,2]$ $I_2 = [1;\,11]$ $I_3 = [0;\,6]$

KX **12** $\int_c^e f(x)\,dx < \int_a^e f(x)\,dx < \int_a^d f(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^c f(x)\,dx < \int_e^f f(x)\,dx$

KX **13**



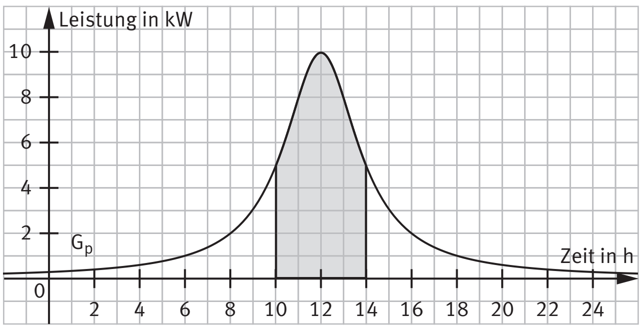
Durch Zählen von Kästchen erhält man näherungsweise:

$$\int_{-1}^4 f(x)\,dx = \int_{-1}^1 f(x)\,dx + \int_1^4 f(x)\,dx \approx 1{,}5 - 1 = 0{,}5$$

KX **14 a)** Das Flugzeug steigt in den ersten zwei Minuten mit konstanter Geschwindigkeit von $10\,\frac{m}{s}$ auf. In den nächsten drei Minuten gewinnt es weiter mit konstanter Geschwindigkeit an Höhe, aber nicht mehr so schnell wie zuvor (jetzt: $6\,\frac{m}{s}$). Nachdem es weitere drei Minuten seine Höhe beibehält, sinkt es zwei Minuten lang etwas ab $\left(-4\,\frac{m}{s}\right)$. Nach weiteren zwei Minuten auf der gleichen Höhe sinkt es mit konstanter Sinkgeschwindigkeit $\left(-4\,\frac{m}{s}\right)$ acht Minuten lang.

b) Das Integral $\int_0^5 f(t)\,dt$ beschreibt die Höhenänderung des Flugzeugs in den ersten 5 Minuten.

KX **15 a)**



Beurteilung: mögliche Aspekte:

- Höhere Leistung in den Mittagsstunden erscheint realistisch.
- Sommertag, da $p(x) > 0$ in $[4;\,20]$
- „Perfekte" Symmetrie zu $x = 12$ ist vermutlich idealisiert.

b) 1 Verschiebung um 12 Einheiten in positive x-Richtung

2 Streckung mit dem Faktor 8 in y-Richtung

Symmetrie: Der Graph von h ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse ($h(-x) = h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Wegen der Verschiebung um 12 Einheiten in positive x-Richtung folgt, dass G_p achsensymmetrisch bezüglich der Geraden mit der Gleichung $x = 12$ ist.

c) Es gilt $\int_{10}^{14} p(x)\,dx = 2 \cdot \int_{10}^{12} p(x)\,dx \approx 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5 + 10) \cdot 2 = 30$ [kWh]

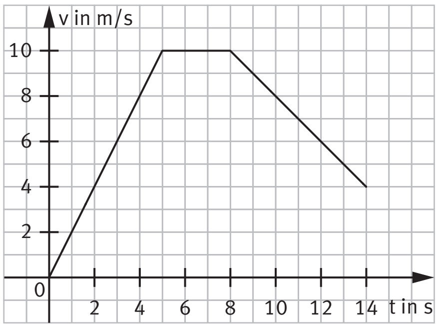
Die Anlage speist zwischen 10.00 Uhr und 14.00 Uhr etwa 30 kWh elektrische Energie in das Stromnetz ein. Dafür erhält der Eigentümer eine Vergütung von etwa $30\,\text{kWh} \cdot 0{,}1\,\frac{€}{\text{kWh}} = 3{,}00\,€$.

KX **16 a)** 1 $\int_0^5 a(t)\,dt = 2\,\frac{m}{s^2} \cdot 5\,s = 10\,\frac{m}{s}$

2 $\int_5^8 a(t)\,dt = 0\,\frac{m}{s^2} \cdot 3\,s = 0\,\frac{m}{s}$

3 $\int_8^{14} a(t)\,dt = \left(-1\,\frac{m}{s^2}\right) \cdot 6\,s = -6\,\frac{m}{s}$

b)



c) Der Graph wäre um 5 Einheiten in positive y-Richtung verschoben.

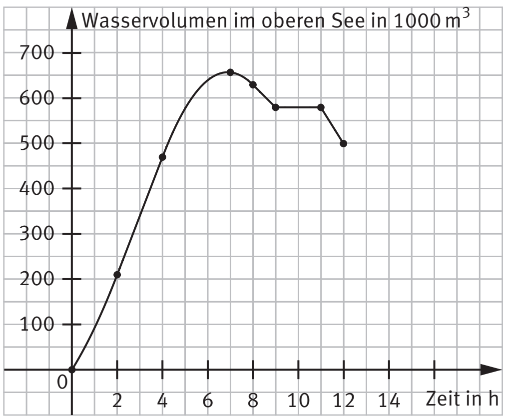
d) Individuelle Lösungen.

KX **17 a)** Im Intervall [11; 12] ist der Durchfluss durch die Turbinen am höchsten.

b) Bis $t = 7$ ist die momentane Zuflussrate positiv, danach nichtpositiv. Daher ist bei $t = 7$ der Pegel des oberen Sees am höchsten.

Die absolute Wassermenge kann mit den bisherigen Angaben nicht ermittelt werden, da keine Aussage darüber erfolgt, welche Wassermenge sich zu Beobachtungsbeginn im oberen See befindet.

c)

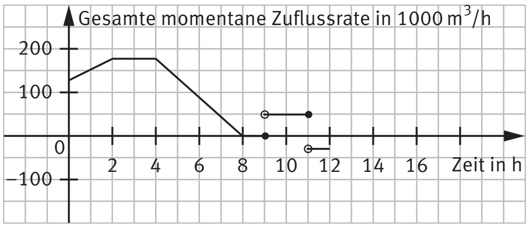


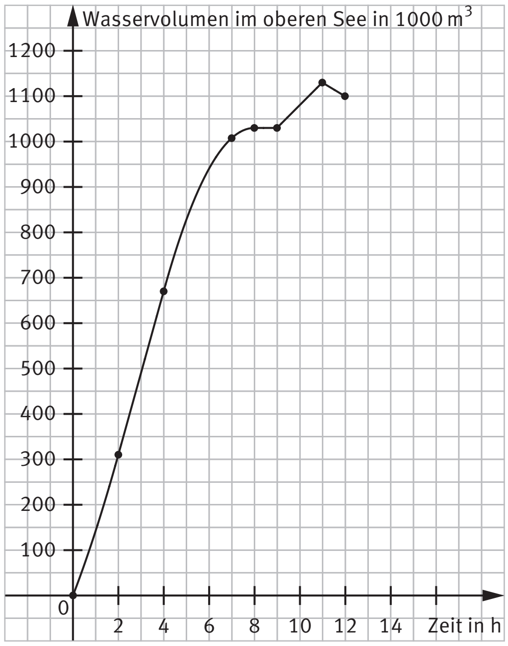
d) Der Graph der momentanen Änderungsrate wird um 50 Einheiten in positive y-Richtung verschoben.

a Das Intervall ändert sich nicht ([11; 12]), lediglich die (negative) Zuflussrate ist betragsmäßig geringer.

b Bis zum Zeitpunkt t = 11 ist die momentane Zuflussrate nichtnegativ, nach t = 11 ist die momentane Zuflussrate negativ. Daher ist bei t = 11 der Wasserstand am höchsten.

c Die gesamte Zuflussrate ergibt sich aus der Zuflussrate durch die Turbinen sowie der aus dem Regen, der blaue Graph muss daher um 50 Einheiten in positive y-Richtung verschoben werden. Das gesamte Wasservolumen ergibt sich dann durch Integration der Funktion des verschobenen Graphen.



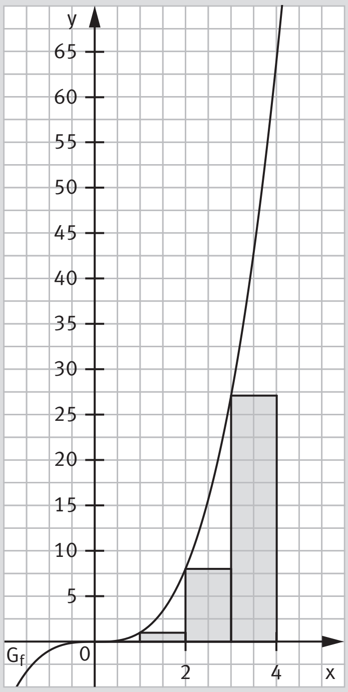


Vertiefung

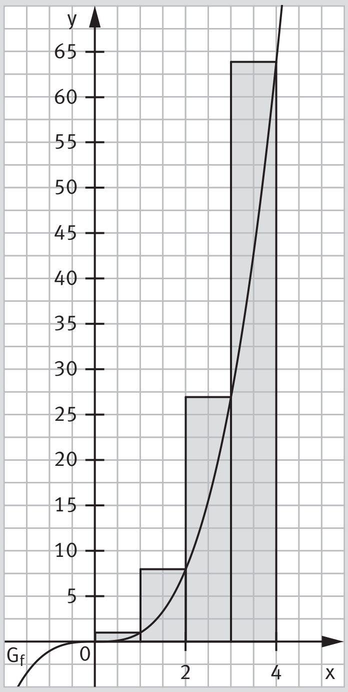
KX

Das Riemann-Integral

- Die Ober- und Untersumme sind Näherungen für das Integral. Dabei wird das Integrationsintervall in Streifen gleicher Breite (hier: 1 LE) unterteilt und in diesen Intervallen Rechtecke errichtet. Bei der Untersumme beträgt die Rechteckshöhe jeweils das Minimum der Funktionswerte im Intervall, bei der Obersumme das Maximum der Funktionswerte. Die Summe der Inhalte der Rechtecke entspricht näherungsweise in beiden Fällen dem Wert des Integrals. Je schmaler die Streifen sind, desto genauer ist die Näherung.
- Untersumme: s = 0 + 1 + 8 + 27 = 36



Obersumme: S = 1 + 8 + 27 + 64 = 100



Entdecken

KX ■ Individuelle Lösungen.

KX ■ Das Integral $\int_0^b f(t)\,dt$, $0 \le b \le 12$ gibt 1 die Flächenbilanz zwischen G_f und der t-Achse im Intervall $[0;\, b]$ bzw. 2 die prognostizierte Gesamtänderung der Sta dtbevölkerung in den nächsten b Jahren an.

Nachgefragt

KX ■ Die Aussage ist wahr, da für jede Integralfunktion mit dem Term $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ gilt $F_a(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$. Somit hat jede Integralfunktion mindestens eine Nullstelle.

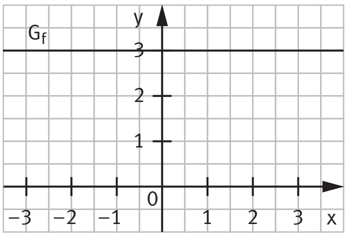
KX ■ Die Aussage ist falsch. Ist die Funktion f in einem Intervall $[a;\, b]$ negativ (und zunehmend), so gilt $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt < 0$ für $x \in \,]a,\, b]$ unabhängig vom Monotonieverhalten von f.

Aufgaben

KX **1** **a)** 1 $F_0(-3) = -3 \cdot 3 = -9$

2 $F_0(1) = 1 \cdot 3 = 3$

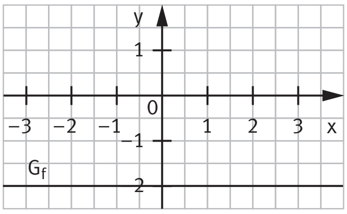
3 $F_0(2) = 2 \cdot 3 = 6$



b) 1 $F_0(-3) = (-3) \cdot (-2) = 6$

2 $F_0(1) = 1 \cdot (-2) = -2$

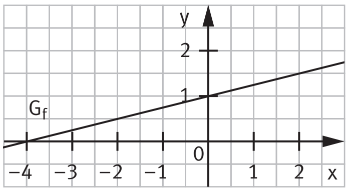
3 $F_0(2) = 2 \cdot (-2) = -4$



c) 1 $F_0(-3) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} + 1\right) \cdot 3 = -\frac{15}{8}$

2 $F_0(1) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{5}{4}\right) \cdot 1 = \frac{9}{8}$

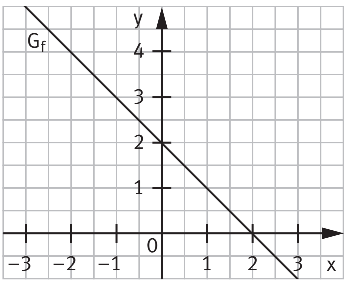
3 $F_0(2) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{3}{2}\right) \cdot 2 = \frac{5}{2}$



d) 1 $F_0(-3) = -\frac{1}{2} \cdot (2 + 5) \cdot 3 = -\frac{21}{2}$

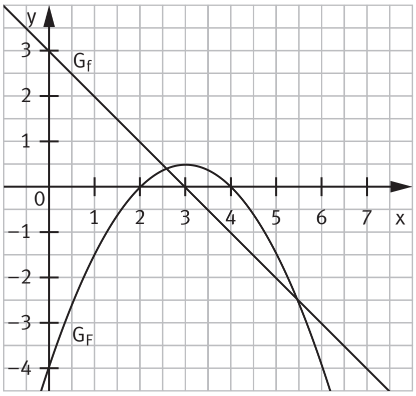
2 $F_0(1) = \frac{1}{2} \cdot (2 + 1) \cdot 1 = \frac{3}{2}$

3 $F_0(2) = \frac{1}{2} \cdot (2 + 0) \cdot 2 = 2$

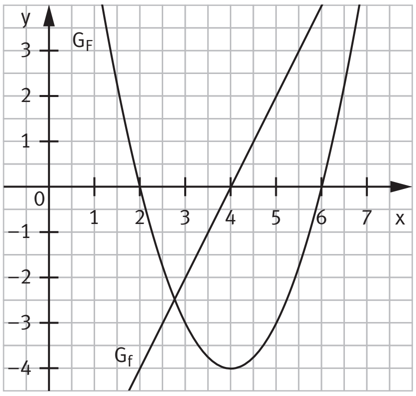


KX **2** Die Nullstellen von F_2 sind jeweils diejenigen Stellen, an denen die Flächenbilanz der von G_f und der x-Achse im Intervall [2; x] bzw. [x; 2] eingeschlossenen Fläche null beträgt.

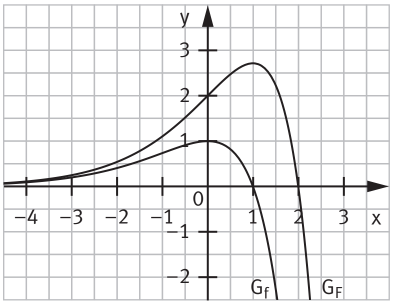
a) $x_1 = 2; x_2 = 4$



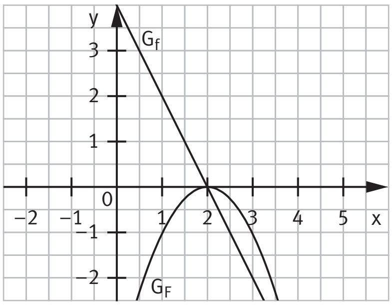
b) $x_1 = 2; x_2 = 6$



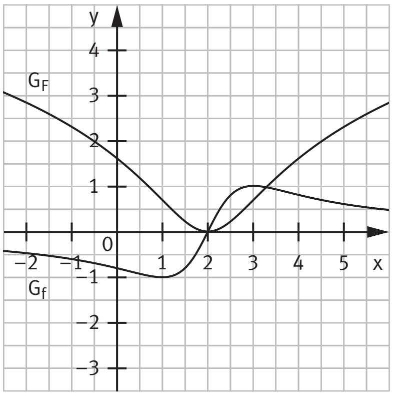
c) $x_1 = 2$



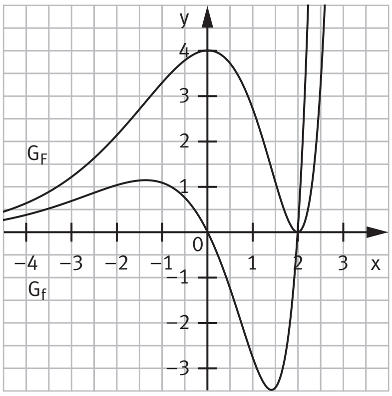
d) $x_1 = 2$



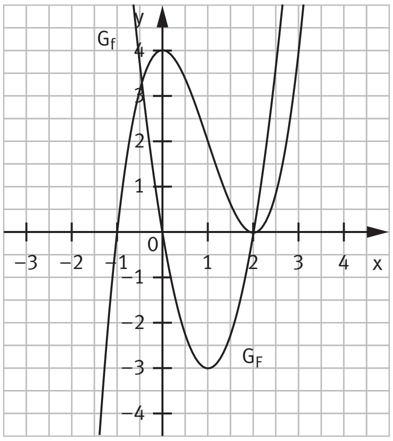
e) $x_1 = 2$



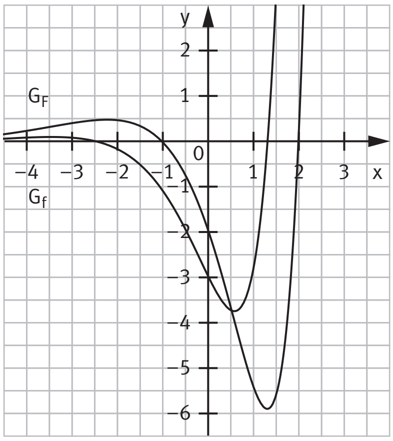
f) $x_1 = 2$



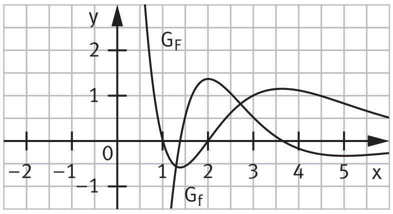
g) $x_1 = -1; x_2 = 2$



h) $x_1 = 2; x_2 = -1$



i) $x_1 = 2$; $x_2 = 1$

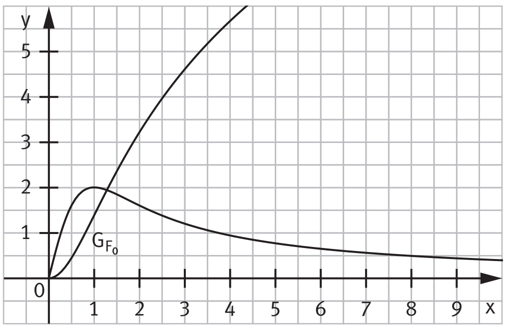


KX **3** **a)** $G_A = G_{F_1}$: F_1 muss wegen $\int_1^1 f(t)\,dt = 0$ bei $x = 1$ eine Nullstelle besitzen. Der einzige Graph, der dies erfüllt, ist G_A.

b) $G_B = G_{F_1}$: Da der Graph eine Nullstelle bei $x = 1$ haben muss (siehe Teilaufgabe a)), entfällt G_C.
Zudem gilt $F_1(2) = \int_1^2 f(x)\,dx > 0$. Dies gilt nicht für G_A.

c) $G_A = G_{F_1}$: Da der Graph eine Nullstelle bei $x = 1$ haben muss (siehe Teilaufgabe a)), entfällt G_B.
Zudem gilt $F_1(4) = \int_1^4 f(x)\,dx < 0$. Dies gilt nicht für G_C.

KX **4**

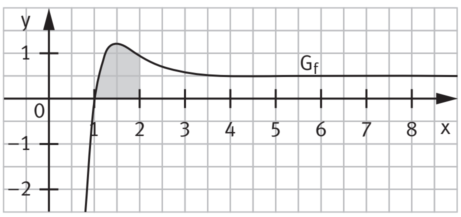


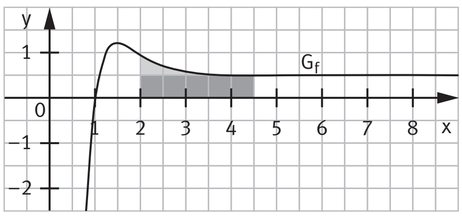
Mögliche Zusammenhänge:

- Wegen $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ nimmt die Gesamtmenge an ausgestoßenen Schadstoffen zu, F_0 ist streng monoton zunehmend.
- Je größer $f(x)$ ist, desto größer die momentan ausgestoßene Schadstoffmenge, desto steiler verläuft G_{F_0}.

KX **5** Es gilt $J(1) = \int_2^1 f(t)\,dt = -\int_1^2 f(t)\,dt$. Dieses lässt sich mithilfe der Abbildung abschätzen: $J(1) \approx -1$.
Das zugehörige Flächenstück lässt sich zerlegen und dann abschätzen:

$J(4{,}5) = \int_2^{4,5} f(t)\,dt \approx 0{,}5 \cdot 2{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 1 = 1{,}5$





KX **6** F hat genau drei Nullstellen.

- $x_1 = 3$: $F(3) = \int_3^3 f(t)\,dt = 0$
- $x_2 > 4{,}5$ und $x_3 < 1{,}5$ mit $\int_3^{x_2} f(t)\,dt = \int_3^{x_3} f(t)\,dt = 0$. Wegen $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = -\infty$ gibt es die Stellen x_2 und x_3, bei denen die Flächenbilanz null ergibt.
- Wegen des Monotonieverhaltens von f gibt es keine weiteren Nullstellen von G_f.

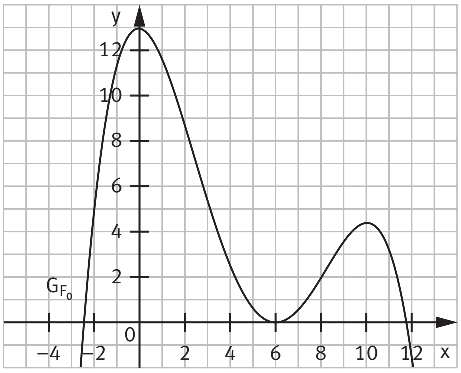
KX **7** **a)** Maximum bei $x_1 = 0$, Minimum bei $x_2 = 6$, Maximum bei $x_3 = 10$
Die Funktion f_a hat an diesen Stellen jeweils eine Nullstelle mit VZW. Liegt in f_a ein VZW von positiven zu negativen Werten vor (x_1, x_3), so hat F_a dort ein lokales Maximum; liegt in f_a ein VZW von negativen zu positiven Werten vor (x_2), so hat F_a dort ein lokales Minimum.

b) Für $x \in]-\infty; 0[$ ist $F_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt = -\int_x^0 f(t)\,dt \le 0$, da G_f oberhalb der x-Achse verläuft.
Für $x \in [0; 6]$ ist $F_0(x) \le 0$, da G_f unterhalb der x-Achse verläuft.
Für $x \in [6; 10]$ ist $F_0(x) \le 0$, da sich aus der Abbildung ergibt, dass $\left|\int_0^6 f(t)\,dt\right| > \left|\int_6^{10} f(t)\,dt\right|$ gilt.
Für $x \in [10; +\infty[$ ist $F_0(x) \le 0$, da G_f unterhalb der x-Achse verläuft.
Insgesamt folgt die Behauptung.

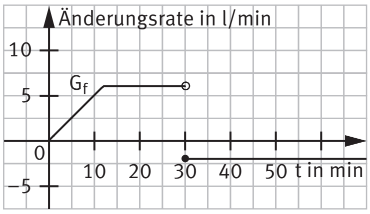
c) Die Aussage ist falsch, da z. B. für $a = 6$ gilt: $F_6(8) = \int_6^8 f(t)\,dt > 0$.

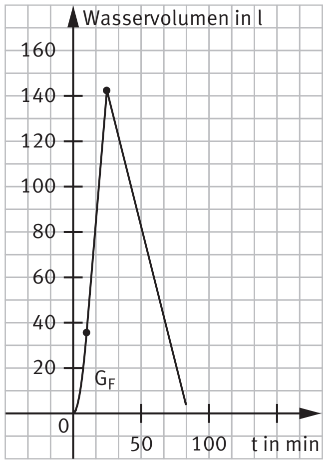
d) Es gilt: $F_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^2 f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt = F_0(2) + F_2(x)$.
Der Graph der Funktion F_0 entsteht aus dem der Funktion F_2 durch Verschiebung um $F_0(2)$ Einheiten in positive y-Richtung. Daher haben beide Funktionen an denselben x-Werten Extremstellen derselben Art. Die y-Werte unterscheiden sich um den Wert $F_0(2)$.

e)



KX **8** **a)**





Mögliche Interpretationen:
- Für $0 \le t < 12$ nimmt das Wasservolumen im Becken mit steigender Geschwindigkeit zu.
- Für $12 \le t < 30$ nimmt das Wasservolumen im Becken mit konstanter Geschwindigkeit zu.
- Für $t \ge 30$ nimmt das Wasservolumen im Becken mit konstanter Geschwindigkeit ab.

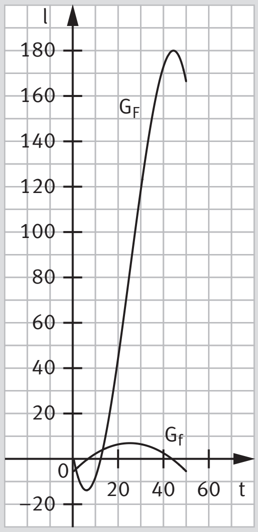
b) Da die Funktion f die momentane Änderungsrate angibt, gibt die Integralfunktion die Gesamtänderung des Wasservolumens im Becken an. Dies entspricht dem absoluten Wasservolumen im Becken nur dann, wenn das Becken zu Beginn leer war. In allen anderen Fällen muss der Füllstand zu Beginn berücksichtigt werden.
Es gilt $F(15) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = 54$. In den ersten 15 min fließen also 54 l Wasser hinzu. Da dies auch dem Beckeninhalt zum Zeitpunkt $t = 15$ entspricht, war das Becken zum Zeitpunkt $t = 0$ leer.

c) Gesamtänderung im Intervall [0; 30]: $\Delta V = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 + 18 \cdot 6 = 144\,[l]$
Gesamtänderung im Intervall [30; t]: $\Delta V = -2 \cdot (t - 30)$
$2 \cdot (t - 30) = 144 \Rightarrow t = \frac{144}{2} + 30 = 102\,[\text{min}]$

1.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Entdecken

KX
- siehe Zeichnung



KX
- Mögliche Lösungen:
  - Ist die Änderungsrate f negativ (positiv), so nimmt die Wassermenge F ab (zu).
  - Hat die Änderungsrate f ein Maximum, so nimmt die Wassermenge F am stärksten zu.

KX
- $F_0(t) = \int\limits_0^t f(x)\,dx = \int\limits_0^t (x - 0{,}02\,x^2 - 5)\,dx$
  $= \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{150}t^3 - 5t$

Nachgefragt

KX
- Umkehrung des Satzes: „Jede Stammfunktion ist eine Integralfunktion.“
  Diese Aussage ist falsch: $g{:}x \mapsto x^2 + 4$ ist Stammfunktion zu $f{:}x \mapsto 2x$, $D_f = D_g = \mathbb{R}$, da $g'(x) = 2x = f(x)$ gilt. Jedoch besitzt die Funktion g keine Nullstelle, kann also keine Integralfunktion sein.

KX
- Die Aussage ist im Allgemeinen falsch. Sie gilt nur für differenzierbare Funktionen.

Aufgaben

KX **1**
a) $F'(x) = x^3 = f(x)$
b) $F'(x) = \sin x = f(x)$
c) $F'(x) = 1 \cdot e^{2x} + (x+2) \cdot e^{2x} \cdot 2 = e^{2x}(2x+5) = f(x)$
d) $F'(x) = \frac{1}{x^2+4} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+4} \neq f(x)$
e) $F'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2x^2+4}} \cdot 4x = -\frac{2x}{\sqrt{2x^2+4}} \neq f(x)$
f) $F'(x) = e^{2x} \cdot 2 + e^{-2x} \cdot (-2) = 2\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) \neq f(x)$

KX **2**
a) $\int\limits_0^3 (5x^2 - x)\,dx = \left[\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^3 = \left(\frac{5}{3} \cdot 3^3 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 0\right) = 40{,}5$
b) $\int\limits_0^{10} 4\,dx = [4x]_0^{10} = 4 \cdot 10 - 0 = 40$
c) $\int\limits_1^2 \left(e^x + \frac{1}{x}\right)dx = [e^x + \ln|x|]_1^2 = e^2 + \ln 2 - (e^1 + \ln 1) = e^2 + \ln 2 - e \approx 5{,}36$
d) $\int\limits_0^9 (x^3 - \sqrt{x})\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = \left[\frac{1}{4} \cdot 9^4 - \frac{2}{3} \cdot 9^{\frac{3}{2}} - 0\right] = 1622{,}25$
e) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left(\frac{1}{x^2} - \cos x\right)dx = \left[-\frac{1}{x} - \sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = -\frac{1}{2\pi} - \sin(2\pi) - \left(-\frac{2}{\pi} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2\pi} + \frac{2}{\pi} + 1 = \frac{3}{2\pi} + 1 \approx 1{,}48$
f) $\int\limits_0^2 (3x^2 e^{x^3})\,dx = [e^{x^3}]_0^2 = e^{2^3} - e^0 = e^{2^3} - 1 \approx 2979{,}96$

g) $\int\limits_1^4 \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\right) dx = [e^{\sqrt{x}}]_1^4 = e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}} = e^2 - e \approx 4{,}67$

h) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (e^{\sin x} \cdot \cos x)\, dx = [e^{\sin x}]_{-\pi}^{\pi} = e^{\sin \pi} - e^{\sin(-\pi)} = e^0 - e^0 = 0$

KX **3** **a)** Mithilfe der Kettenregel gilt $(\ln|f(x)|)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

b) 1 $\int\limits_0^4 \frac{2x}{x^2+1}\, dx = [\ln|x^2+1|]_0^4 = \ln 17 - \ln 1 = \ln 17 \approx 2{,}83$

2 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = [\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) - \ln(\cos 0) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx -0{,}35$

3 $\int\limits_1^5 \frac{3x^2}{x^3+8}\, dx = [\ln|x^3+8|]_1^5 = \ln 133 - \ln 9 = \ln\frac{133}{9} \approx 2{,}69$

4 $\int\limits_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, dx = [\ln|\ln x|]_e^{e^2} = \ln|\ln e^2| - \ln|\ln e| = \ln 2 \approx 0{,}69$

KX **4** **a)** Mithilfe der Kettenregel gilt $\left(\frac{1}{a} \cdot F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a} \cdot F'(ax+b) \cdot a = F'(ax+b) = f(ax+b)$.

b) 1 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\, dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot \cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\cos\pi - \left(-\frac{1}{2}\cos 0\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

2 $\int\limits_{-2}^{6} e^{-x}\, dx = [-e^{-x}]_{-2}^{6} = -e^{-6} - (-e^{-(-2)}) = e^2 - \frac{1}{e^6} \approx 7{,}39$

3 $\int\limits_{-1}^{1} e^{2x+3}\, dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x+3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}e^{2\cdot 1+3} - \frac{1}{2}e^{2\cdot(-1)+3} = \frac{1}{2}(e^5 - e) \approx 72{,}85$

4 $\int\limits_{-\frac{1}{\pi}}^{0} \cos(\pi x)\, dx = \left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_{-\frac{1}{\pi}}^{0} = \frac{1}{\pi}\sin 0 - \frac{1}{\pi}\sin(-1) = \frac{1}{\pi}\sin(1) \approx 0{,}27$

KX **5** **a)** Die Aussage ist wahr. Da die Funktion f drei Extremstellen besitzt, hat die Funktion f drei Nullstellen.

b) Die Aussage ist wahr. Der Graph von F besitzt im Intervall [0; 1] eine Stelle mit kleinster Steigung, daher besitzt G_f im Intervall [0; 1] einen Tiefpunkt.

c) Die Aussage ist falsch. Es gilt $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\, dx = F(0) - F(-1) = -F(-1) > 0$, da $F(-1) < 0$ gilt.

d) Die Aussage ist wahr. Es gilt $f(0{,}5) = F'(0{,}5)$ und $f(-2) = F'(-2)$. Da G_F an der Stelle $x = -2$ steiler fällt als an der Stelle $x = 0{,}5$, ist $F'(-2) < F'(0{,}5)$ und damit $f(0{,}5) > f(-2)$.

e) Die Aussage ist falsch. Den Graphen jeder weiteren Stammfunktion von f erhält man aus dem Graphen von F durch Verschiebung in y-Richtung. Verschiebt man G_F um 2 Einheiten in positive y-Richtung, so erhält man den Graphen einer Stammfunktion von f, der die x-Achse nicht schneidet. Diese Stammfunktion ist daher keine Integralfunktion.

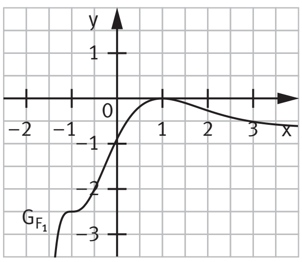
KX **6** **a)** 1 Im Intervall $]-\infty; 1]$ ist F_1 streng monoton zunehmend, da $F'(x) = f(x) \geq 0$ gilt.

2 Im Intervall $]1; +\infty]$ ist F_1 streng monoton abnehmend, da $F'(x) = f(x) \leq 0$ gilt.

Extremstelle: $x_1 = 1$, da bei $x_1 = 1$ die Funktion f eine Nullstelle mit VZW von positiven zu negativen Werten besitzt.

b) $F_1(0) = \int\limits_1^0 f(x)\, dx = -\int\limits_0^1 f(x)\, dx < 0$, da im Intervall [0; 1] gilt $f(x) \geq 0$ und daher $\int\limits_0^1 f(x)\, dx > 0$ ist.

c) Individuelle Ergebnisse in der Diskussion.



KX **7** **a)** Da $F(1) = 0$ gilt, ist die Aussage wahr.

b) Da G_F genau zwei Wendepunkte besitzt, hat G_f genau zwei Extrempunkte.

c) Da G_F eine waagrechte Asymptote für $|x| \to +\infty$ besitzt, gilt $\lim\limits_{|x| \to +\infty} F'(x) = 0$.
Daher ist die Aussage wahr.

d) Es gilt: $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = 0 - (-1) = 1$.

KX **8** Es wird so umgeformt, dass eine der folgenden Integrationsregeln angewandt werden kann ($c \in \mathbb{R}$):

1 $\int (f'(x) \cdot e^{f(x)})\,dx = e^{f(x)} + c$

2 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c,\ c \in \mathbb{R}$

3 $\int f(ax + b)\,dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax + b) + c;\ F'(x) = f(x),\ a \neq 0$

a) Regel 1 oder 3: $\int\limits_0^1 e^{3x+1}\,dx = \frac{1}{3} \cdot \int\limits_0^1 3\,e^{3x+1}\,dx = \frac{1}{3} \cdot [e^{3x+1}]_0^1 = \frac{1}{3}(e^4 - e) \approx 17{,}29$

b) Regel 2: $\int\limits_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{-1}^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2} \cdot [\ln(x^2+1)]_{-1}^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 2) = 0$

c) Regel 2: $\int\limits_1^2 \frac{1}{5x-4}\,dx = \frac{1}{5} \cdot \int\limits_1^2 \frac{5}{5x-4}\,dx = \frac{1}{5} \cdot [\ln|5x-4|]_1^2 = \frac{1}{5}(\ln 6 - \ln 1) = \frac{1}{5} \cdot \ln 6 \approx 0{,}36$

d) Regel 3: $\int\limits_0^2 (2x+5)^3\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^2 \left[2\,(2x+5)^3\right]dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{4}(2x+5)^4\right]_0^2 = \frac{1}{8} \cdot (9^4 - 5^4) = 742$

e) Regel 3: $\int\limits_1^5 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx = \frac{2}{3} \cdot \int\limits_1^5 \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx = \frac{2}{3} \cdot [\sqrt{3x+1}]_1^5 = \frac{2}{3} \cdot (4 - 2) = \frac{4}{3}$

f) Regel 1: $\int\limits_0^1 \sin(1-x)\,dx = -\int\limits_0^1 [-\sin(1-x)]\,dx = -[-\cos(1-x)]_0^1 = \cos 0 - \cos 1 = 1 - \cos 1 \approx 0{,}46$

g) Regel 2: $\int\limits_{-2}^0 \frac{e^x}{e^x+2}\,dx = [\ln|e^x+2|]_{-2}^0 = \ln 3 - \ln\left(\frac{1}{e^2} + 2\right) \approx 0{,}34$

h) Regel 2: $\int\limits_{-2}^{-1} \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)dx = \left[2\ln|x| - \frac{3}{x}\right]_{-2}^{-1} = 2\ln 1 + 3 - \left(2\ln 2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - 2\ln 2$

KX **9** **a)** $2\int\limits_0^a x^2\,dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a = \frac{2}{3}a^3;$
$\frac{2}{3}a^3 = 18 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$

b) $\int\limits_{-2}^a (2x - 3x^2)\,dx = [x^2 - x^3]_{-2}^a = a^2 - a^3 - (4 + 8) = a^2 - a^3 - 12;$
$a^2 - a^3 - 12 = -12 \Leftrightarrow a^2(1 - a) = 0 \Rightarrow a_1 = 0;\ a_2 = 1$

c) $\int\limits_{-a}^a (a^2 - x^2)\,dx = \left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^a = a^3 - \frac{1}{3}a^3 - \left(-a^3 + \frac{1}{3}a^3\right) = \frac{4}{3}a^3;$
$\frac{4}{3}a^3 = 36 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$

d) $\int\limits_a^5 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_a^5 = \frac{-1}{5} - \left(\frac{-1}{a}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{5};$
$\frac{1}{a} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{3}{10} \Rightarrow a = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

e) $\int\limits_0^a e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^a = \frac{1}{2}(e^{2a} - 1);$
$\frac{1}{2}(e^{2a} - 1) = \frac{e-1}{2} \Rightarrow e^{2a} = e \Rightarrow a = 0{,}5$

f) $\int\limits_e^a \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_e^a = \ln|a| - 1;$
$\ln|a| - 1 = 1 \Rightarrow \ln|a| = 2 \Rightarrow a = e^2$ ($a = -e^2$ ist nicht möglich, da das Integral $\int\limits_e^{-e^2} \frac{1}{x}\,dx$ nicht definiert ist.)

KX **10** Es gilt nach dem HDI: $F'(x) = f(x)$ und $F''(x) = f'(x)$ sowie $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Daraus ergibt sich:

1, 6, 8, 12: $\int_a^b f'(x)\,dx = \int_a^b F''(x)\,dx = F'(b) - F'(a) = f(b) - f(a)$

2, 5, 9, 11: $\int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f''(x)\,dx = f'(b) - f'(a) = F''(b) - F''(a)$

3, 4, 7, 10: $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$

KX **11** **a)** Mögliche Werte für a: $a_1 = -4$; $a_2 = 1$; $a_3 = 5$ Da jede Integralfunktion eine Nullstelle an der unteren Integrationsgrenze besitzt, sind nur die Nullstellen von F_a mögliche Werte von a.

b) 1 Es gilt $f(1) = F'(1)$, d. h. man erhält $f(1)$ näherungsweise als Steigung von G_{F_a} an der Stelle $x = 1$. D. h. es gilt $f(1) \approx -2$.

2 Die Stellen, an denen G_{F_a} eine waagrechte Tangente besitzt, sind die Nullstellen von f: $x_1 \approx -2$; $x_2 \approx 3{,}25$.

3 Extremstellen von f sind Stellen extremaler Steigung von G_{F_a}: $x \approx 0{,}5$.

4 $\int_0^5 f(x)\,dx = F(5) - F(0) = 0 - 2 = -2$

c) Den Graphen jeder weiteren Stammfunktion von f erhält man aus dem Graphen G_{F_a} durch Verschiebung in y-Richtung. Wegen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ hat jede Stammfunktion von f eine Nullstelle und ist daher Integralfunktion von f.

KX **12** **a)** $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t (50 + 20 \cdot e^{0,2x})\,dx = [50x + 100\,e^{0,2x}]_0^t$

$= 50t + 100\,e^{0,2t} - (0 + 100) = 50t + 100\,e^{0,2t} - 100$

b) $F(5) = 50 \cdot 5 + 100 \cdot e^{0,2 \cdot 5} - 100 = 150 + 100e \approx 421{,}8$

Nach 5 Jahren haben rund 421 Personen an dem Programm teilgenommen.

c) Grenzen des Modells:

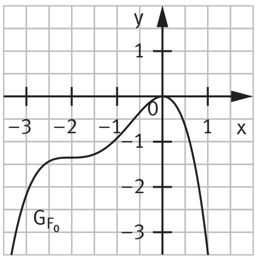
Wegen $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ist die Modellierung für lange Zeiträume nicht realistisch.

Individuelle Lösungen für Modellierungen für längere Zeiträume.

KX **13** **a)** Für $x < 0$ ist $g(x) \geq 0$. Da G_1 und G_2 für $-2 < x < 0$ streng monoton fallend sind, sind sie nicht G_0.

Da $G_0(0) = 0$ und $G_3(0) \neq 0$ ist, kann G_3 nicht G_0 sein.

b)



KX **14** **a)** $\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \left(-\frac{x^3}{2}(x-3)\right)dx = \int_1^3 \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right)dx = \left[\frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{10}x^5\right]_1^3 = \frac{3}{8} \cdot 3^4 - \frac{1}{10} \cdot 3^5 - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{10}\right) = 5{,}8\,[\text{m}]$

b) Es gilt $G_3 = G_{F_1}$.

F_1 hat eine Nullstelle bei $x = 1$. Daher kann G_1 nicht G_{F_1} sein.

Für $x < 0$ ist $f(x) < 0$, d. h. F_1 ist streng monoton abnehmend für $x < 0$. Da G_2 für $x < 0$ streng monoton steigt, kann G_2 nicht G_{F_1} sein.

Durch Abzählen von Kästchen erhält man die Ungleichung $F_1(3) = \int_1^3 f(x)\,dx > 3$, weswegen G_4 nicht G_{F_1} sein kann.

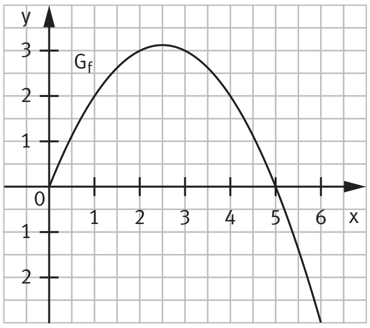
KX **15 a)** $B(t) = 300 + \int_0^t f(x)\,dx = 300 + \int_0^t (x^3 - 13x^2 + 14x + 88)\,dx$

$= 300 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{3}x^3 + 7x^2 + 88x\right]_0^t = \frac{1}{4}t^4 - \frac{13}{3}t^3 + 7t^2 + 88t + 300$

b) Die Extremstellen des Bestands sind die Nullstellen mit VZW von f.
$f(t) = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t-4)(t-11) = 0 \Rightarrow t_1 = 4;\ t_2 = 11$ sind jeweils einfache Nullstellen von f und daher Extremstellen von B ($t = -2 \notin D_f$).
$B(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^4 - \frac{13}{3} \cdot 4^3 + 7 \cdot 4^2 + 88 \cdot 4 + 300 \approx 550{,}67$
$B(11) = \frac{1}{4} \cdot 11^4 - \frac{13}{3} \cdot 11^3 + 7 \cdot 11^2 + 88 \cdot 11 + 300 \approx 7{,}58$
Randuntersuchung: $B(0) = 300;\ B(12) = 60$
Es gilt $B(11) < B(12) < B(0) < B(4)$. Daher ist B(4) der maximale und B(11) der minimale Bestandswert im betrachteten Zeitraum.

c) $B''(t) = f'(t) = 3t^2 - 26t + 14$
notwendige Bedingung: $B''(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 26t + 14 = 0 \Rightarrow t^2 - \frac{26}{3}t + \frac{14}{3} = 0$
$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{13}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{3}\right)^2 - \frac{14}{3}} = \frac{13}{3} \pm \sqrt{\frac{169}{9} - \frac{42}{9}} = \frac{13}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{127};$
$t_1 = \frac{13}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{127} \approx 0{,}58;\ t_2 = \frac{13}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{127} \approx 8{,}09$
$t_{1/2}$ sind jeweils einfache Nullstellen von B″ und damit Wendestellen von B.
Zuwachsrate: $f(t_1) = B'(t_1) \approx 91{,}94;\ f(t_2) = B'(t_2) \approx -120{,}09$
Der Bestand wächst zum Zeitpunkt $t_1 \approx 0{,}58$ [Tage] am stärksten. Die maximale Zuwachsrate beträgt $B'(t_1) \approx 91{,}94$ pro Tag.

KX **16 a)** Nullstellen: $x_1 = 0;\ x_2 = 5$
Extremstelle: $x = 2{,}5$



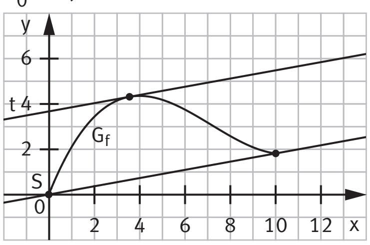
b) Dafür $0 \le t \le 5$ gilt $f(t) \ge 0$ nimmt die Wassermenge im Becken in dieser Zeit zu.

c) Die Lösung x der Gleichung gibt an, zu welchem Zeitpunkt das Becken eine Füllmenge von 7000 l hat.

KX **17 a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
Da der Term f(x) der ganzrationalen Funktion f sowohl gerade als auch ungerade Exponenten besitzt, ist der Graph G_f nicht punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

b) $f'(x) = \frac{1}{100} \cdot (6x^2 - 86x + 248);\ f''(x) = \frac{1}{100} \cdot (12x - 86)$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 86 = 0 \Rightarrow x = \frac{43}{6} = 7\frac{1}{6}$ ist einfache Nullstell von f″
$f''(7) = \frac{1}{100} \cdot (12 \cdot 7 - 86) = -\frac{1}{50} < 0$
Daher ist G_f für $x < 7\frac{1}{6}$ rechtsgekrümmt.

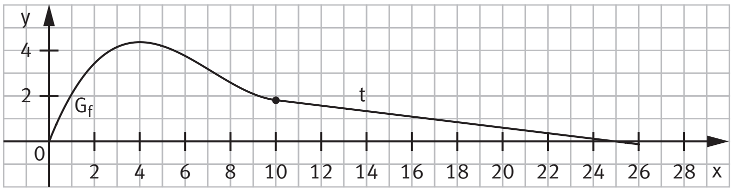
c) $x_0 \approx 3{,}6$



d) Aussage 2 beschreibt, dass G_f punktsymmetrisch bezüglich des Punkts $\left(7\frac{1}{6}\middle|f\left(7\frac{1}{6}\right)\right)$ ist.
Den Tiefpunkt von G_f erhält man daher als Spiegelpunkt des Hochpunkts am Punkt $\left(7\frac{1}{6}\middle|f\left(7\frac{1}{6}\right)\right)$.
Für $a = 3\frac{1}{6}$ gilt daher:
$f(4) - f\left(7\frac{1}{6}\right) = f\left(7\frac{1}{6}\right) - f\left(10\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f\left(10\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot f\left(7\frac{1}{6}\right) - f(4) \approx 2 \cdot 3{,}05 - 4{,}32 \approx 1{,}78.$
Der Tiefpunkt hat näherungsweise die Koordinaten $\left(10\frac{1}{3}\middle|1{,}78\right)$.

e) $f'(10) = \frac{1}{100} \cdot (6 \cdot 10^2 - 86 \cdot 10 + 248) = -0{,}12$; $f(10) = 1{,}8$
$t: y = -0{,}12x + t$
$1{,}8 = -0{,}12 \cdot 10 + t \Rightarrow c = 3$
$t: y = -0{,}12x + 3$

f)



$-0{,}12x = 3 \Leftrightarrow x = 25$ [Monate]

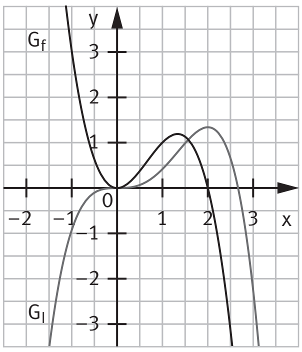
g) $\int_0^{10} f(x)\,dx$ ist die Gesamtzunahme an Masse in den ersten 10 Monaten. In den weiteren 15 Monaten entspricht die zugenommene Masse in der Maßzahl der Fläche unter der Tangente, also $\frac{1}{2} \cdot f(10) \cdot (25 - 10) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}18 \cdot 15 = 13{,}5$. Daher lässt sich die Gesamtänderung der Masse in den ersten 25 Monaten nach der Geburt durch den Term $\int_0^{10} f(x)\,dx + 13{,}5$ berechnen.

KX **18 a)** 1 Da $f(x) = I'(x) > 0$ für $x < 0$ gilt, ist G_I streng monoton steigend für $x < 0$. Wegen $I(0) = 0$ ist $I(x) < 0$ für $x < 0$.

2 Es gilt $I(0) = 0$. Außerdem besitzt I eine weitere Nullstelle bei einem Wert $x_2 > 2$, für den gilt
$\int_0^2 f(x)\,dx = -\int_2^{x_2} f(x)\,dx.$
Aufgrund des Monotonieverhaltens von f kann es keine weiteren Nullstellen von I geben. Daher hat I genau zwei Nullstellen.

3 Da f bei $x = 0$ eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel besitzt, besitzt I an dieser Stelle einen Terrassenpunkt.

b)



KX **19 a)** höchster Wasserstand: 10 Uhr
niedrigster Wasserstand: 22 Uhr
Die Periodenlänge der Funktion beträgt $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$.
Die Funktion f nimmt ihr Maximum (Minimum) jeweils ein Viertel (ein Dreiviertel) nach dem Nulldurchgang in positive Richtung an. Zudem ist der Graph von f gegenüber der Sinuskurve um 4 Einheiten in positive t-Richtung verschoben.
Damit ergibt sich der Zeitpunkt für das Maximum zu $t_1 = 4 + 6 = 10$ und der für das Minimum zu $t_2 = 4 + 18 = 22$.

b) $2 \cdot \int_4^{16} f(t)\,dt = 12 \cdot \int_4^{16} \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-4)\right] dt = 12 \cdot \left[-\frac{12}{\pi} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{12}(t-4)\right]\right]_4^{16}$

$-\frac{144}{\pi} \cdot (\cos\pi - \cos 0) = \frac{288}{\pi} \approx 91{,}67$ [Mio. m³]

c) Individuelle Recherche-Ergebnisse.

KX **20 a)** $\Delta h_1 = \int_0^{40} \left(-\frac{1}{32}t^2 + 2{,}5t\right) dt = \left[-\frac{1}{96}t^3 + \frac{5}{4}t^2\right]_0^{40} = -\frac{1}{96} \cdot 40^3 + \frac{5}{4} \cdot 40^2 - 0 \approx 1333{,}3$ [m]

b) $v_1(40) = 50$

$\Delta h_2 = 50 \cdot 30 = 1500$ [m]

c) Fallzeit mit Fallschirm. 190 s – 70 s = 120 s

$\Delta h_3 = \int_{70}^{190} \left(\frac{1}{288}(t-190)^2\right) dt = \left[\frac{1}{864}(t-190)^3\right]_{70}^{190} = \frac{1}{864} \cdot \left[0 - (70-190)^3\right] = 2000$ [m]

Gesamthöhe: $h_{Ges} = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 \approx 4833{,}3$ m

KX **21 a)** Aus $p(0) = 2520$ folgt $a \cdot e^{-k \cdot 0} = 2520$ und damit $a = 2520$.

Der jährliche Änderungsfaktor beträgt 1 – 5,5 % = 0,945, und damit $e^{-k} = 0{,}945 \Rightarrow k = -\ln 0{,}945$.

$p(t) = 2520 \cdot e^{t \cdot \ln 0{,}945}$

b) $p'(t) = 2520 \cdot \ln 0{,}945 \cdot e^{t \cdot \ln 0{,}945}$

$p'(4) = 2520 \cdot \ln 0{,}945 \cdot e^{4 \cdot \ln 0{,}945} \approx -113{,}69$

Die momentane Preisänderung zu Beginn des Jahres 2017 betrug rund –113,69 € pro Jahr.

c) $\int_0^{10} p'(t)\,dt = [p(t)]_0^{10} = p(10) - p(0)$.

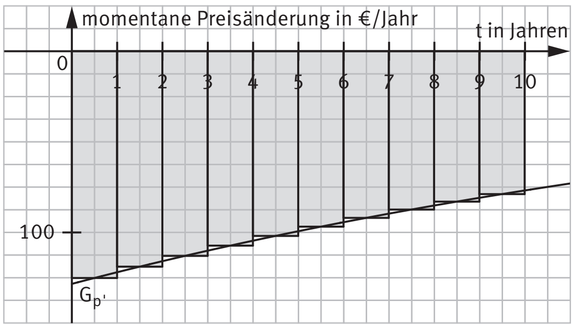
Die Gesamtänderung des Preises für Solarzellen in den Jahren 2013 bis 2023 entspricht der Differenz der Preise in den Jahren 2023 und 2013.

d) $p'(0{,}5) + p'(1{,}5) + \ldots + p'(9{,}5) \approx -1088{,}59$

$p(10) - p(0) \approx -1088{,}74$

Die Gesamtänderung des Preises für Solarzellen in den Jahren 2013 bis 2023 ($p(10) - p(0)$) lässt sich durch die Summe der momentanen Preisänderungen in der jeweiligen Jahresmitte annähern.

Die Summe $p'(0{,}5) + p'(1{,}5) + \ldots + p'(9{,}5)$ lässt sich als Summe der Inhalte von Rechtecksflächen veranschaulichen, die in guter Näherung dem Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von p' und der t-Achse entspricht.



KX **22 a)** 1 $\int_0^{0{,}5} v(t)\,dt = \int_0^{0{,}5} (5 - 10t)\,dt = [5t - 5t^2]_0^{0{,}5} = 1{,}25$ [m]. In den ersten 0,5 s steigt der Stein um 1,25 m an.

2 $\int_0^{1} v(t)\,dt = [5t - 5t^2]_0^{1} = 0$ [m]. Nach 1 s ist der Stein wieder auf Abwurfhöhe.

3 $\int_0^{2} v(t)\,dt = [5t - 5t^2]_0^{2} = -10$ [m] Nach 2 s ist der Stein auf dem Boden.

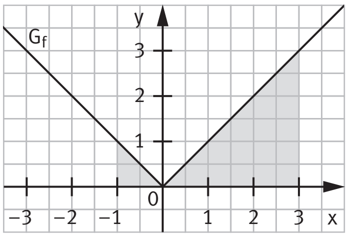
b) $h(t) = 10 + \int_0^t v(x)\,dx$

Da die Geschwindigkeit v die Änderung der Höhe h über dem Boden darstellt, gilt $h'(t) = v(t)$, h ist also Stammfunktion von v.

Da h für t = 0 keine Nullstelle besitzt, sondern h(0) = 10 gilt, kann h nicht $\int_0^t v(x)\,dx$ sein.

c) $s = 2 \cdot 1{,}25\,m + 10\,m = 12{,}5\,m$

KX **23 a)**



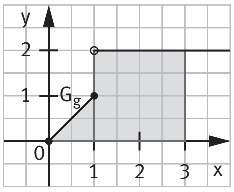
Die Funktion $g: x \mapsto \frac{x^2}{2}$, $D_g = \mathbb{R}$, ist für $x < 0$ keine Stammfunktion von f.

Es gilt: $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3} = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3^2}{2} - 0 = 5$

b) Für abschnittsweise definierte Funktionen f mit Abschnittsgrenze bei b und $a \le b \le c$ gilt für das Integral: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$. Bei der Berechnung muss für jedes Teilintervall eine Stammfunktion gebildet werden.

c) $\int_0^3 g(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^3 2\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + [2x]_1^3 = \frac{1}{2} - 0 + 6 - 2 = 4{,}5$

Dies lässt sich elementargeometrisch überprüfen, vgl. Abbildung: $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + 2^2 = 4{,}5$.



Vertiefung

KX

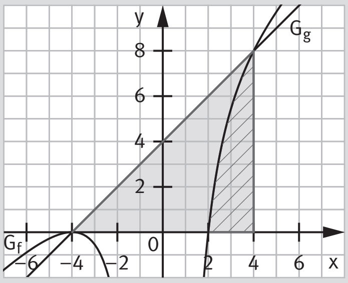
Mittelwerte von Funktionen

- $\overline{a} = \frac{1}{4} \cdot (T(6) + T(8) + T(10) + T(12)) = 3{,}88\,[°C]$
- Dividiert man den Wert des Integrals $\int_a^b f(t)\,dt$ durch die Länge des Integrationsintervalls $b - a$, so erhält man die Länge eines Rechtecks, dessen Flächeninhalt genauso groß ist, wie der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der t-Achse.

  $\int_a^b f(t)\,dt = \overline{m} \cdot \frac{1}{b-a} \Leftrightarrow \overline{m} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t)\,dt$
- $\overline{m}_{[6;12]} = \frac{1}{12-6} \cdot \int_6^{12} \left(-\frac{1}{100}t\,(t-6)(t-23)\right)dt = -\frac{1}{600} \cdot \int_6^{12} (t^3 - 29t^2 + 138t)\,dt$

  $= -\frac{1}{600} \cdot \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{29}{3}t^3 + 69t^2\right]_6^{12} = \frac{96}{25} = 3{,}84\,[°C]$
- Individuelle Lösungen.

Entdecken



KX ■ Der Flächeninhalt des Segels lässt sich berechnen, indem man vom Inhalt der Dreiecksfläche den Wert des Integrals $\int_2^4 f(x)\,dx$ subtrahiert.

$$A_{Segel} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8 - \int_2^4 f(x)\,dx = 32 - \int_2^4 \left(x + 6 - \frac{32}{x^2}\right)dx = 32 - \left[\frac{1}{2}x^2 + 6x + \frac{32}{x}\right]_2^4$$
$$= 32 - (8 + 24 + 8 - (2 + 12 + 16)) = 32 - 10 = 22\,[FE]$$

KX ■ Individuelle Lösungen.

Nachgefragt

KX ■ Die Aussage ist falsch.
Gegenbeispiel: Für $f(x) = x$ und $g(x) = 1 - x$ ist $\int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx = 0$, obwohl $f(x) \neq g(x)$ in $[0; 1]$ gilt.

KX ■ Die Aussage ist wahr.
Angenommen, es gilt nicht $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Dann gibt es eine Zahl $a \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $x \in [1; +\infty[$ gilt $|f(x)| > a$. Dann ist für $b > 1$ das Integral $\int_1^b f(x)\,dx > a\cdot(b - 1)$. Damit kann das uneigentliche Integral $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)\,dx = +\infty$ keinen endlichen Wert haben. Das widerspricht der Voraussetzung.

Aufgaben

KX **1** **a)** x-Koordinaten der Schnittpunkte: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$

$$\int_{-2}^{2}[g(x) - f(x)]\,dx = 2\cdot\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = 2\cdot\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 2\cdot\left(8 - \frac{8}{3} - 0\right) = \frac{32}{3}$$

b) x-Koordinaten der Schnittpunkte: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2 = 1 \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2\pi$

$$\int_0^{2\pi}[f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^{2\pi}\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2 - 1\right)dx = \left[-\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + x\right]_0^{2\pi} = 0 + 2\pi - 0 = 2\pi$$

c) x-Koordinaten der Schnittpunkte: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -1{,}5x^2 + 1{,}5 = -x^2 + 1 \Rightarrow 0{,}5x^2 = 0{,}5 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 1$

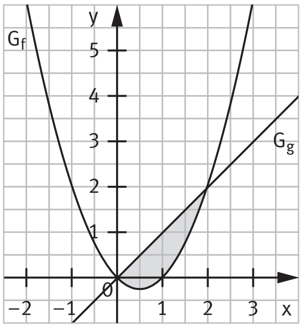
$$\int_{-1}^{1}[f(x) - g(x)]\,dx = 2\cdot\int_0^1[-1{,}5x^2 + 1{,}5 - (-x^2 + 1)]\,dx = 2\int_0^1(-0{,}5x^2 + 0{,}5)\,dx = 2\cdot\left[-\frac{1}{6}x^3 + 0{,}5x\right]_0^1$$
$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - 0\right) = \frac{2}{3}$$

KX **2** **a)** x-Koordinaten der Schnittpunkte: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - x = x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2$

$A = \int_0^2 [g(x) - f(x)]\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}$ [FE]

b) Fläche im IV. Quadranten: $A = \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 (x^2 - x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right| = \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 0\right| = \frac{1}{6}$ [FE]

Anteil der Fläche im IV. Quadranten: $\frac{A}{A} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{8} = 12{,}5\,\%$



KX **3** **a)** Die Fläche wird begrenzt von den Graphen G_f und G_g.
x-Koordinaten der Schnittstellen:
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2 - (x+2)^2 = x + 2 \Leftrightarrow 2 - x^2 - 5x - 4 = x + 2 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x+1) = 0$
$\Rightarrow x_1 = -4;\ x_2 = -1$

$A_1 = \int_{-4}^{-1} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-4}^{-1} \left[2 - (x+2)^2 - (x+2)\right]dx = \int_{-4}^{-1} (-x^2 - 5x - 4)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 4x\right]_{-4}^{-1}$

$= \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 - \left(\frac{64}{3} - 40 + 16\right) = 4{,}5$ [FE]

b) $A_2 = \int_{-1}^{0} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-1}^{0} \left[x + 2 - \left[2 - (x+2)^2\right]\right]dx = \left[4x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-4 - \frac{1}{3} + \frac{5}{2}\right) = \frac{11}{6}$ [FE]

c) Nullstellen von f: $2 - (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x_3 = -2 - \sqrt{2};\ x_4 = -2 + \sqrt{2}$

$A_3 = \left|\int_{-4}^{-2} g(x)\,dx\right| - \left|\int_{-4}^{-2-\sqrt{2}} f(x)\,dx\right| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \left|\int_{-4}^{-2-\sqrt{2}} \left[2 - (x+2)^2\right]dx\right| = 2 - \left|\left[2x - \frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{-4}^{-2-\sqrt{2}}\right|$

$= 2 - \left|2(-2 - \sqrt{2}) + \frac{2}{3}\sqrt{2} - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)\right| = 2 - \left|\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}\right| = \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3}$ [FE]

d) $A_4 = A_1 - A_3 = \frac{9}{2} - \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3} = \frac{7 + 8\sqrt{2}}{6}$ [FE]

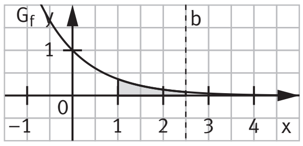
e) $A_5 = \int_{-2}^{-1} g(x)\,dx + \int_{-1}^{-2+\sqrt{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \int_{-1}^{-2+\sqrt{2}} \left[2 - (x+2)^2\right]dx = \frac{1}{2} + + \left[2x - \frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{-1}^{-2+\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{2} + 2(-2 + \sqrt{2}) - \frac{2}{3}\sqrt{2} - \left(-2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{-7}{6} + \frac{4}{3}\sqrt{2} = \frac{-7 + 8\sqrt{2}}{6}$ [FE]

f) $A_6 = A_4 + \int_{-2}^{0} g(x)\,dx = A_4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{7 + 8\sqrt{2}}{6} + 2 = \frac{19 + 8\sqrt{2}}{6}$ [FE]

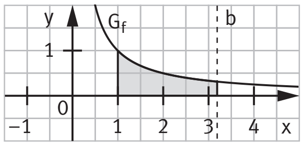
KX **4** 1 **a)** $\int_1^b \frac{1}{e^x}\,dx = \left[-\frac{1}{e^x}\right]_1^b = \frac{1}{e^b} - \frac{1}{e}$

b) $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{e^x}\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{e^b} - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$



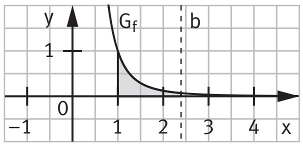
2 **a)** $\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b$

b) $\lim\limits_{b\to+\infty} (\ln b) = +\infty$, das uneigentliche Integral existiert nicht.



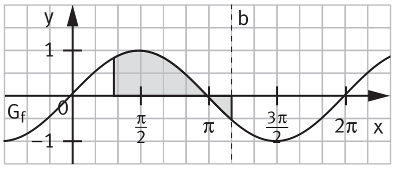
3 **a)** $\int_1^b \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2}$

b) $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^3}\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2}\right) = \frac{1}{2}$



4 **a)** $\int_1^b \sin x\,dx = [-\cos x]_1^b = \cos 1 - \cos b$

b) $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_1^b \sin x\,dx$ existiert nicht.



KX **5** $f(x_1) = 4 \Leftrightarrow e^{-x_1} = 4 \Leftrightarrow x_1 = -\ln 4$

$g(x_2) = 4 \Leftrightarrow e^{-x_2+1} = 4 \Leftrightarrow x_2 = 1 - \ln 4$

$$A_{\text{Querschnitt}} = \int_{x_1}^{x_2} [4 - f(x)]\,dx + \int_{x_2}^{3} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (4 - e^{-x})\,dx + (e-1)\cdot\int_{x_2}^{3} (e^{-x})\,dx$$

$$= [4x + e^{-x}]_{x_1}^{x_2} + (e-1)\cdot[-e^{-x}]_{x_2}^{3} = 4\cdot(1 - \ln 4) + \frac{4}{e} - (-4\ln 4 + 4) + (e-1)\cdot\left(-e^{-3} + \frac{4}{e}\right)$$

$$= \frac{4}{e} - e^{-2} + e^{-3} + 4 - \frac{4}{e} = \frac{1}{e^3} - \frac{1}{e^2} + 4 \approx 3{,}91\ [\text{mm}^2]$$

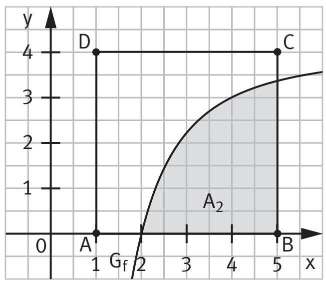
$V = A_{\text{Querschnitt}} \cdot 0{,}2 \approx 0{,}78\,[\text{mm}^3] = 0{,}00078\,[\text{cm}^3]$

$m = V\cdot\rho \approx 0{,}00078\,\text{cm}^3 \cdot 21{,}45\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 0{,}0168\,\text{g}$

KX **6** Das Rechteck wird von G_f in eine Teilfläche A_1 oberhalb von G_f und eine Teilfläche A_2 unterhalb von G_f geteilt. $A_1 = 16 - A_2$

a) $A_2 = \int_2^5 \left(4 - \frac{16}{x^2}\right)dx = \left[4x + \frac{16}{x}\right]_2^5 = 20 + \frac{16}{5} - (8 + 8) = 7{,}2$ [FE]

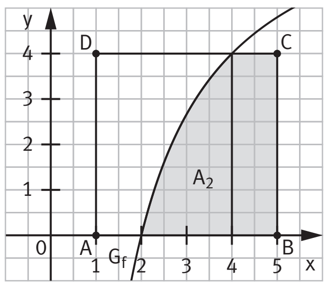
Anteil: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{16 - 7{,}2}{7{,}2} = \frac{11}{9} \approx 122{,}22\,\%$



b) $A_2 = 4 + \int_2^4 \left(8 - \frac{16}{x}\right)dx = 4 + [8x - 16\ln x]_2^4$

$= 4 + 32 - 16\ln 4 - (16 - 16\ln 2) = 20 - 16\ln 2 \approx 8{,}91$ [FE]

Anteil: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{16 - (20 - 16\ln 2)}{20 - 16\ln 2} \approx 79{,}58\,\%$



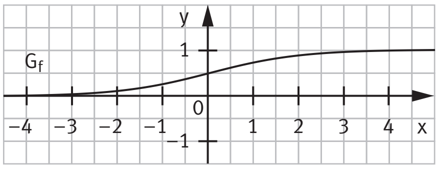
KX **7** **a)** Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$ hat keine Lösung, f hat keine Nullstellen

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = \frac{1}{2}$; $S_y(0\,|\,0{,}5)$

Asymptoten: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{0}{1} = 0$; $y = 0$ ist waagrechte Asymptote für $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{1} = 1$; $y = 1$ ist waagrechte Asymptote für $x \to +\infty$.

Ableitung: $f'(x) = \frac{(e^x + 1) \cdot e^x - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; G_f ist streng monoton steigend.



b) $\int\limits_{-\ln 3}^{0} \left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) dx = [\ln(e^x + 1)]_{-\ln 3}^{0} = \ln(e^0 + 1) - \ln(e^{-\ln 3} + 1) = \ln 2 - \ln\frac{4}{3} = \ln\left(\frac{2}{\frac{4}{3}}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$\int\limits_{0}^{b} \left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) dx = [\ln(e^x + 1)]_0^b = \ln(e^b + 1) - \ln 2$

$\ln(e^b + 1) - \ln 2 = \ln\frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln(e^b + 1) = \ln 3 \Leftrightarrow e^b + 1 = 3 \Leftrightarrow b = \ln 2$

KX **8** **a)** Symmetrie: $f(-t) = -\frac{t}{12} \cdot e^{-\frac{(-t)^2}{288}} = -\left(\frac{t}{12} \cdot e^{-\frac{t^2}{288}}\right) = -f(t)$;

G_f ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs.

Extremstellen: $f'(t) = \frac{1}{12} \cdot e^{-\frac{t^2}{288}} + \frac{t}{12} \cdot e^{-\frac{t^2}{288}} \cdot \left(-\frac{1}{144}t\right) = \frac{1}{1728} e^{-\frac{t^2}{288}} \cdot (144 - t^2)$

((alle „–" vor den Bruch?))

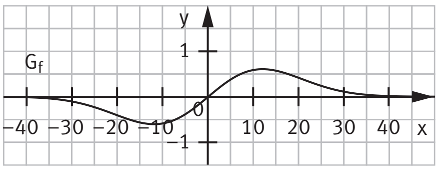
$f''(t) = \frac{1}{1728} e^{-\frac{t^2}{288}} \cdot \left(-\frac{t}{144}\right) \cdot (144 - t^2) + \frac{1}{1728} e^{-\frac{t^2}{288}} \cdot (-2t)$

$= \frac{t}{1728} e^{-\frac{t^2}{288}} \cdot \left(\frac{1}{144}t^2 - 1 - 2\right) = \frac{t}{1728} e^{-\frac{t^2}{288}} \cdot \left(\frac{1}{144}t^2 - 3\right)$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 144 - t^2 = 0 \Rightarrow t_1 = -12$; $t_2 = 12$; $f''(12) = -\frac{1}{48} e^{-0{,}5}$

G_f hat ein lokales Maximum bei $t_2 = 12$ und wegen der Punktsymmetrie ein lokales Minimum bei $t_1 = -12$.

Asymptote: $\lim\limits_{|t| \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{|t| \to +\infty} \left(\frac{t}{12} \cdot e^{-\frac{t^2}{288}}\right) = 0$; die x-Achse ist waagrechte Asymptote von G_f für $x \to \pm\infty$.

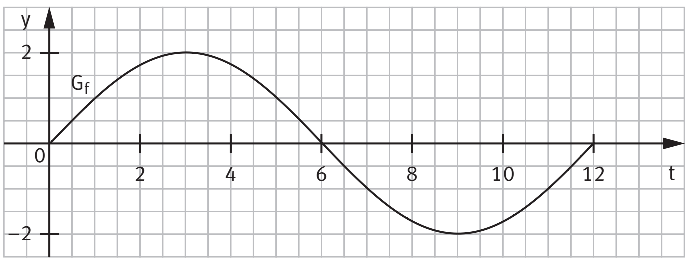


b) Die Verkaufszahlen nehmen ab $t_2 = 12$ [Monaten] ab.

c) $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_0^b \left(\frac{t}{12} \cdot e^{-\frac{t^2}{288}}\right) dt = \lim\limits_{b \to +\infty} \left[-12\,e^{-\frac{t^2}{288}}\right]_0^b = \lim\limits_{b \to +\infty} \left(12 - 12\,e^{-\frac{b^2}{288}}\right) = 12$

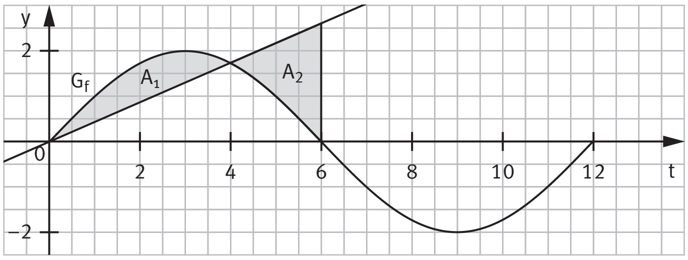
Der unbegrenzten Fläche zwischen dem Graphen G_f und der t-Achse im I. Quadranten kann der Wert 12 [FE] zugewiesen werden. Im Sachkontext bedeutet dies, dass auf sehr lange Sicht 12 000 E-Bikes verkauft werden.

KX **9** **a)** H (3 | 2), T (9 | –2), W (6 | 0)



b) Es gilt $A_1 = A_2$ genau dann, wenn $\int_0^6 [f(x) - g(x)]\,dx = 0$ ist.

$\int_0^6 \left[2\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) - mx\right] dx = 0 \Leftrightarrow \left[-\frac{12}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) - \frac{m}{2}x^2\right]_0^6 = 0 \Leftrightarrow \frac{12}{\pi} - 18m + \frac{12}{\pi} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3\pi}$



KX **10 a)** $f'(x) = \frac{(x+1)^2 \cdot 4 - 4x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{4x + 4 - 8x}{(x+1)^3} = \frac{4(1-x)}{(x+1)^3}$

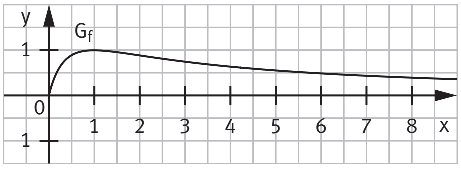
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(1 - x) = 0 \Rightarrow x = 1$

Mit $f'(0) = 4 > 0$ und $f'(2) = -\frac{4}{27} < 0$ und $f(1) = \frac{4}{2^2} = 1$ folgt, dass G_f einen Hochpunkt $H\,(1\,|\,1)$ besitzt.

Die Wirkstoffkonzentration ist eine Stunde nach Einnahme des Medikaments am größten und beträgt $1\,\frac{mg}{l}$.

b) $f(0{,}5) = \frac{2}{1{,}5^2} = \frac{8}{9} \approx 0{,}89\left[\frac{mg}{l}\right]$

$f(6) = \frac{24}{7^2} = \frac{24}{49} \approx \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot f(1)$



c) $F'(x) = \frac{4}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{4(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{4x}{(x+1)^2} = f(x)$; also ist F Stammfunktion zu f.

d) Vorgehen:

- Bilden der zweiten Ableitung f″ von f.
- Nachweis, dass $f''(2) = 0$ und gilt und dass f″ bei $x = 2$ einen VZW besitzt.

Im Sachkontext bedeutet dies, dass zwei Stunden nach Einnahme des Medikaments die Wirkstoffkonzentration am stärksten abnimmt.

e) $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_0^b \left(\frac{4x}{(x+1)^2}\right) dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \left[4\left(\frac{1}{x+1} + \ln|x+1|\right)\right]_0^b = \lim\limits_{b \to +\infty} \left[4\left(\frac{1}{b+1} + \ln|b+1|\right) - 4(1+0)\right]$

$= -4 + 4 \cdot \lim\limits_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{b+1} + \ln|b+1|\right)$

Das uneigentliche Integral existiert nicht, da $\lim\limits_{b \to +\infty} \ln|b+1| = +\infty$ gilt. Daher kann die Funktion die Wirkstoffkonzentration für lange Zeiträume nicht realistisch beschreiben.

KX **11 a)** Monotonie: $f'(x) = -2 \cdot \left(1 + e^{(1-x)}\right)^{-2} \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = 2 \cdot \frac{e^{1-x}}{(1 + e^{1-x})^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

G_f ist streng monoton steigend.

Asymptoten: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{1 + e^{1-x}} = 0$; $y = 0$ ist waagrechte Asymptote für $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{1 + e^{1-x}} = \frac{2}{1} = 2$; $y = 2$ ist waagrechte Asymptote für $x \to +\infty$.

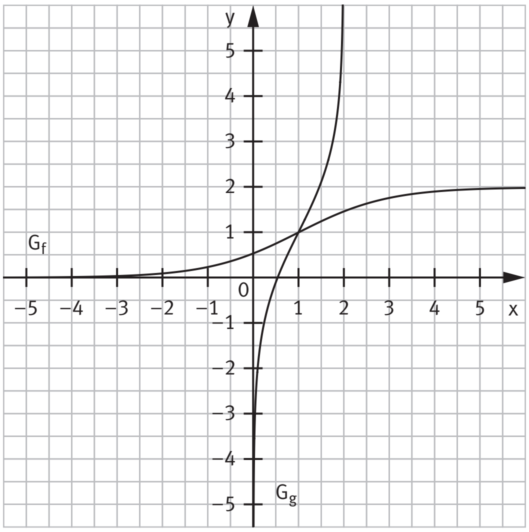
Wendepunkt: $f''(x) = 2 \cdot \frac{-(1 + e^{1-x})^2 \cdot e^{1-x} - e^{1-x} \cdot 2(1 + e^{1-x}) \cdot e^{1-x} \cdot (-1)}{(1 + e^{1-x})^4} = 2 \cdot \frac{2\,(e^{1-x})^2 - (1 + e^{1-x}) \cdot e^{1-x}}{(1 + e^{1-x})^3}$

$= 2 \cdot \frac{e^{1-x} \cdot (2\,e^{1-x} - 1 - e^{1-x})}{(1 + e^{1-x})^3} = 2 \cdot \frac{e^{1-x} \cdot (e^{1-x} - 1)}{(1 + e^{1-x})^3}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Mit $f''(0) = \frac{2e \cdot (e-1)}{(1+e)^3} > 0$ und $f''(2) = \frac{2e^{-1} \cdot (e^{-1} - 1)}{(1 + e^{-1})^3} < 0$ folgt, dass $W\,(1\,|\,f(1))$ der einzige Wendepunkt von G_f ist.

b) f ist umkehrbar, weil G_f streng monoton steigend ist.
$D_g = W_f =]0; 2[$; $W_g = D_f = \mathbb{R}$



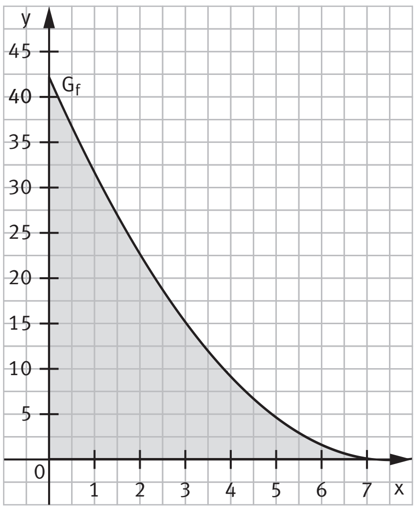
c) $\frac{2\,e^{x-1}}{1+e^{x-1}} = \frac{2\,e^{x-1}\cdot e^{1-x}}{(1+e^{x-1})\cdot e^{1-x}} = \frac{2}{1+e^{1-x}} = f(x)$

d) Der Graph der Umkehrfunktion g entsteht aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten (w: y = x). Die Fläche, die von den beiden Graphen und den Koordinatenachsen begrenzt wird, ist daher doppelt so groß wie die Fläche, die G_f und die Gerade w im I. Quadranten einschließen.

$A = 2\cdot\int_0^1 [f(x) - x]\,dx = 2\cdot\left[2\cdot(\ln(1+e^{x-1})) - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = [4\cdot(\ln(1+e^{x-1})) - x^2]_0^1$

$= 4\ln(2) - 1 - (4\ln(1+e^{-1}) - 0) \approx 0{,}52$ [FE]

KX **12 a)**



Grafisch: x = 7

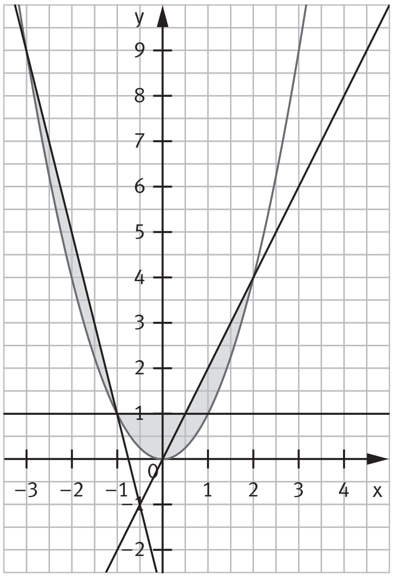
Rechnerisch: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}75(t^2 - 15t + 56) = 0 \Leftrightarrow 0{,}75(t-7)(t-8) = 0 \Rightarrow t_1 = 7$; ($t_2 = 8$ entfällt)

Die Schadstoffeinleitung endet 7 Jahre nach dem Eingreifen.

b) $\int_0^7 f(t)\,dt = 0{,}75\cdot\int_0^7 (t^2 - 15t - 56)\,dt = 0{,}75\cdot\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 56t\right]_0^7$

$= 0{,}75\left(\frac{343}{3} - \frac{735}{2} + 392 - 0\right) = 0{,}75\cdot\frac{833}{6} = \frac{833}{8} \approx 104{,}13\ [m^3]$

KX **13 a)**



Geradengleichung in Abhängigkeit von a:

Geradensteigung: $m = \frac{f(a+2) - f(a)}{2} = \frac{1}{2}\left[(a+2)^2 - a^2\right] = 2a + 2$

$y = mx + t \Rightarrow y = (2a+2)x + t$

$a^2 = (2a+2) \cdot a + t \Rightarrow t = a^2 - 2a^2 - 2a \Rightarrow t = -a^2 - 2a;\ y = (2a+2)x - a^2 - 2a$

$$\int_a^{a+2} ((2a+2)x - a^2 - 2a - x^2)\,dx = \left[(a+1)x^2 - a^2x - 2ax - \frac{1}{3}x^3\right]_a^{a+2}$$

$$= (a+1)(a+2)^2 - a^2(a+2) - 2a(a+2) - \frac{1}{3}(a+2)^3 -$$

$$\left[(a+1) \cdot a^2 - a^3 - 2a^2 - \frac{1}{3}a^3\right] = (a+2) \cdot$$

$$\left[a^2 + 3a + 2 - a^2 - 2a - \frac{1}{3}a^2 - \frac{4}{3}a - \frac{4}{3}\right] + \frac{1}{3}a^3 + a^2$$

$$= (a+2) \cdot \left(-\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}a^3 + a^2$$

$$= -\frac{1}{3}a^3 - \frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}a^3 + a^2 = \frac{4}{3}\,[\text{FE}] \text{ unabhängig von a}$$

b) Geradengleichung in Abhängigkeit von a, b:

Geradensteigung: $m = \frac{f(a+b) - f(a)}{b} = \frac{1}{b}\left[(a+b)^2 - a^2\right] = 2a + b$

$y = mx + t \Rightarrow y = (2a+b)x + t$

$a^2 = (2a+b) \cdot a + t \Rightarrow t = a^2 - 2a^2 - ab = -a^2 - ab;\ y = (2a+b)x - a^2 - ab$

$$\int_a^{a+b} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_a^{a+2} ((2a+b)x - a^2 - ab - x^2)\,dx = \left[\frac{1}{2}(2a+b)x^2 - a^2x - abx - \frac{1}{3}x^3\right]_a^{a+b}$$

$$= \frac{1}{2}(2a+b)\left[(a+b)^2 - a^2\right] - a^2(a+b-a) - ab(a+b-a) - \frac{1}{3}\left[(a+b)^3 - a^3\right]$$

$$= \frac{1}{2}(2a+b)(2ab + b^2) - a^2b - ab^2 - a^2b - ab^2 - \frac{1}{3}b^3$$

$$= 2a^2b + 2ab^2 + \frac{1}{2}b^3 - 2a^2b - 2ab^2 - \frac{1}{3}b^3 = \frac{b^3}{6}$$

Der Wert des Integrals ist auch für eine variable Intervalllänge b unabhängig von a.

KX **14 a)** $A = 2\text{m} \cdot (3{,}30\text{m} + 2{,}95\text{m} + 1{,}45\text{m} + 1{,}20\text{m}) = 17{,}80\,\text{m}^2$

b) $$\left|\int_0^8 \left(\frac{x}{320}(7x^3 - 128x^2 + 792x - 1728)\right)dx\right| = \frac{1}{320} \cdot \left|\int_0^8 (7x^4 - 128x^3 + 792x^2 - 1728x)\,dx\right|$$

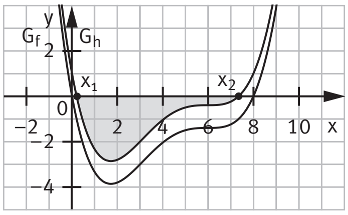
$$= \frac{1}{320} \cdot \left|\left[\frac{7}{5}x^5 - 32x^4 + 264x^3 - 864x^2\right]_0^8\right|$$

$$= \frac{1}{320} \cdot \left|\left(\frac{7}{5} \cdot 8^5 - 32 \cdot 8^4 + 264 \cdot 8^3 - 864 \cdot 8^2 - 0\right)\right|$$

$$= 16{,}64\,[\text{m}^2]$$

c) Die neue Querschnittsfläche lässt sich durch die Funktion $h(x) = f(x) + 1$ modellieren, da der Wasserstand um 1 m gesunken ist. Die Nullstellen dieser Funktion sind $x_1 \approx 0{,}2036$ und $x_2 \approx 7{,}3154$.

Die Querschnittsfläche ist $\left| \int_{x_1}^{x_2} h(x)\,dx \right| \approx 9{,}0281\ [m^2]$.



1.5 Das Volumen eines Rotationskörpers

Entdecken

KX

Rotationskörper	Fläche	Formel zur Volumenberechnung
Gerader Kreiszylinder	Rechteck	$V = \pi r^2 h$
Gerader Kreiskegel	Dreieck	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Rohr	Rechteck, das im Abstand d parallel zur Rotationsachse liegt	$V = \pi h\left(r^2 - d^2\right)$
Kugel	Halbkreis	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

KX

- Mögliche Lösung: siehe Lehrbuch S. 34 unten.

Nachgefragt

KX

- Die Aussage ist falsch.
  Gegenbeispiel: $f(x) = 1$, $a = 0$, $b = 2$:

$$\pi \cdot \int_0^1 (f(x))^2\,dx = \pi \int_0^2 (1)^2\,dx = \pi\,[x]_0^2 = 2\pi$$

$$\pi \cdot \left[\int_0^1 f(x)\,dx\right]^2 = \pi\left[\int_0^2 1\,dx\right]^2 = \pi\left([x]_0^2\right)^2 = 4\pi \neq \pi \cdot \int_0^1 (f(x))^2\,dx$$

KX

- Die Aussage ist falsch.
  Gegenbeispiel: $f(x) = x$, $a = 0$, $b = 2$; $k = 3$

$$\pi \cdot \int_0^2 (f(x))^2\,dx = \pi \int_0^2 (x)^2\,dx = \pi\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \tfrac{8}{3}\pi$$

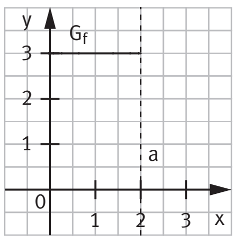
$$\pi \cdot \int_0^2 (f(x)+3)^2\,dx = \pi \int_0^2 (x+3)^2\,dx = \pi\left[\tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x\right]_0^2 = \pi \cdot \left(\tfrac{8}{3} + 12 + 18 - 0\right)$$

$$= \tfrac{98}{3}\pi \neq \pi \cdot \int_0^2 (f(x))^2\,dx$$

Aufgaben

KX **1**

1 **a)** für $r = 3$; $a = 2$

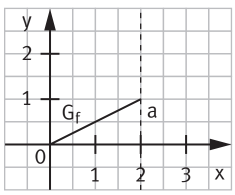


Bei der Rotation um die x-Achse entsteht ein Zylinder.

b) $V = \pi \int_0^a r^2\,dx = \pi r^2 [x]_0^a = \pi r^2 a$

Dies entspricht der bekannten Formel $V_{Zylinder} = \pi r^2 h$ mit $h = a$.

2 **a)** für $m = 0{,}5$; $a = 2$



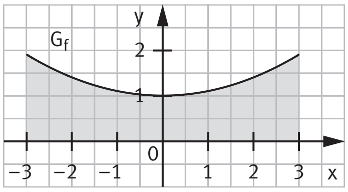
Bei der Rotation um die x-Achse entsteht ein gerader Kreiskegel.

b) $V = \pi \int_0^a (mx)^2\,dx = \pi m^2 \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^a = \tfrac{1}{3}\pi m^2 a^3$

$= \tfrac{1}{3}\pi \cdot (f(a))^2 \cdot a$

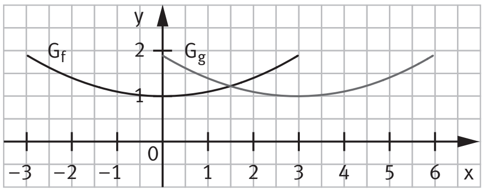
Dies entspricht der bekannten Formel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ mit $h = a$ und $r = f(a)$.

KX **2** **a)**



$$V = \pi\int_3^3 \left(\frac{1}{10}x^2 + 1\right)^2 dx = 2\pi\int_0^3 \left(\frac{1}{10}x^2 + 1\right)^2 dx = 2\pi\left[\frac{1}{500}x^5 + \frac{1}{15}x^3 + x\right]_0^3$$
$$= 2\pi\left(\frac{243}{500} + \frac{9}{15} + 3\right) = \frac{2643}{250}\pi \approx 33{,}21\ [\text{cm}^3]$$
$$m = V \cdot \rho = \frac{2643}{250}\pi\text{cm}^3 \cdot 2{,}7\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 89{,}67\text{ g}$$

b)



G_g entsteht durch Verschiebung von G_f um 3 Einheiten in positive x-Richtung. Daher hat das Integral von g(x) in dem ebenfalls um 3 Einheiten in positive x-Richtung verschobenen Intervall denselben Wert wie das in Teilaufgabe a) betrachtete Integral.

KX **3** $V = \pi\int_0^{16} (2\sqrt{x})^2 dx = \pi\int_0^{16} 4x\,dx = \pi[2x^2]_0^{16} = 512\pi \approx 1608{,}5$ [VE]

KX **4** **a)** $f(0) = 1 \Leftrightarrow a \cdot e^{b\cdot 0} = 1 \Rightarrow a = 1$
$f(10) = 5 \Leftrightarrow 1 \cdot e^{10b} = 5 \Leftrightarrow b = \frac{\ln 5}{10}$

b) $V = \pi\int_0^{10} \left(e^{\frac{x\ln 5}{10}}\right)^2 dx = \pi\int_0^{10} \left(e^{\frac{x\ln 5}{5}}\right) dx = \pi \cdot \frac{5}{\ln 5} \cdot \left[e^{\frac{x\ln 5}{5}}\right]_0^{10} = \pi \cdot \frac{5}{\ln 5} \cdot (25 - 1) = \frac{120\pi}{\ln 5} \approx 234{,}24\ [\text{cm}^3]$

KX **5** **a)** $f'(x) = 2x > 0$ für $x \in\ ]0; 1]$; G_f ist auf D_f streng monoton wachsend und somit umkehrbar.
$y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt{y - 1}$
Variablentausch: $g(x) = \sqrt{x - 1}$

b) Die Graphen G_f und G_g sind achsensymmetrisch zueinander bezüglich der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten. Daher gilt dies auch für die beiden Rotationskörper. Somit sind diese gleich groß.

c) $V = \pi\int_1^2 (\sqrt{x - 1})^2 dx = \pi\int_1^2 (x - 1)\,dx = \pi\left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^2 = \pi\,[(2 - 2) - (0{,}5 - 1)] = \frac{\pi}{2}$

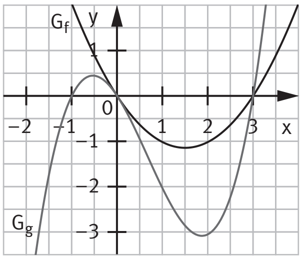
KX **6** **a)** Einen Term der begrenzenden Funktion g erhält man, indem man einen Term der Umkehrfunktion der Funktion $f: x \mapsto x^2$, $D_f = [0; 3]$, ermittelt.
Funktionsterm: $g(x) = \sqrt{x}$, $D_g = [0; 9]$

b) $V = \pi\int_0^9 (\sqrt{x})^2 dx = \pi\int_0^9 x\,dx = \frac{\pi}{2}[x^2]_0^9 = \frac{81}{2}\pi\ [\text{cm}^3]$

c) $\int_0^h x\,dx = \frac{81}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2}[x^2]_0^h = \frac{81}{8} \Leftrightarrow h^2 = \frac{81}{4} \Leftrightarrow h = \frac{9}{2}$ [cm]

KX **7** Bestimmen eines Terms der Umkehrfunktion g von f:
$y = \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow x^2 = 4y \Rightarrow x = 2\sqrt{y}$
Variablentausch: $g(x) = 2\sqrt{x}$
$V = \pi\int_0^1 (2\sqrt{x})^2 dx = \pi\int_0^1 (4x)\,dx = \pi \cdot [2x^2]_0^1 = 2\pi$

KX **8**



Schnittpunkte: Die Nullstellen von f sind auch Nullstellen von g und damit die Schnittstellen:

$x_1 = 0;\ x_2 = 3$

$g(x) = 0{,}5x(x+1)(x-3) = 0{,}5x^3 - x^2 - 1{,}5x;\ (g(x))^2 = 0{,}25x^6 - x^5 - 0{,}5x^4 + 3x^3 + 2{,}25x^2$

$f(x) = 0{,}5x(x-3) = 0{,}5x^2 - 1{,}5x;\ (f(x))^2 = 0{,}25x^4 - 1{,}5x^3 + 2{,}25x^2$

$V = V_{\text{außen}} - V_{\text{innen}}$

$$V_{\text{außen}} = \pi\int_0^3 (g(x))^2\,dx = \pi\int_0^3 (0{,}25x^6 - x^5 - 0{,}5x^4 + 3x^3 + 2{,}25x^2)\,dx = \pi\left[\tfrac{1}{28}x^7 - \tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{1}{10}x^5 + \tfrac{3}{4}x^4 + \tfrac{3}{4}x^3\right]_0^3$$

$$= \pi\left(\tfrac{1}{28}\cdot 3^7 - \tfrac{1}{6}\cdot 3^6 - \tfrac{1}{10}\cdot 3^5 + \tfrac{3}{4}\cdot 3^4 + \tfrac{3}{4}\cdot 3^3\right) = \tfrac{1863}{140}\pi$$

$$V_{\text{innen}} = \pi\int_0^3 (f(x))^2\,dx = \pi\int_0^3 (0{,}25x^4 - 1{,}5x^3 + 2{,}25x^2)\,dx = \pi\left[\tfrac{1}{20}x^5 - \tfrac{3}{8}x^4 + \tfrac{3}{4}x^3\right]_0^3$$

$$= \pi\left(\tfrac{1}{20}\cdot 3^5 - \tfrac{3}{8}\cdot 3^4 + \tfrac{3}{4}\cdot 3^3\right) = \tfrac{81}{40}\pi$$

$$V = \tfrac{1863}{140}\pi - \tfrac{81}{40}\pi = \tfrac{3159}{280}\pi \approx 35{,}44\ [\text{VE}]$$

KX **9** $0{,}1\,l = 100\,\text{cm}^3$

Bestimmung eines Terms der Umkehrfunktion g von f:

$y = 6\sqrt{3x} \Leftrightarrow \left(\tfrac{y}{6}\right)^2 = 3x \Rightarrow x = \tfrac{1}{108}y^2$

Variablentausch: $g(x) = \tfrac{1}{108}x^2$

Volumen des bis zur Höhe h gefüllten Sektkelchs:

$$V(h) = \pi\int_0^h \left(\tfrac{1}{108}x^2\right)^2 dx = \tfrac{\pi}{11664}\cdot\left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^h = \tfrac{\pi}{58320}h^5$$

$$V(h) = 100 \Leftrightarrow \tfrac{\pi}{58320}h^5 = 100 \Rightarrow h^5 = \tfrac{5832000}{\pi} \Rightarrow h = \sqrt[5]{\tfrac{5832000}{\pi}} \approx 17{,}94\ [\text{cm}]$$

KX **10 a)** $\lim\limits_{b\to+\infty}\left[\int_1^b \tfrac{1}{x}\,dx\right] = \lim\limits_{b\to+\infty}[\ln|x|]_1^b = \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln|b|) = +\infty$

b) $\lim\limits_{b\to+\infty}\left[\pi\int_1^b \left(\tfrac{1}{x}\right)^2 dx\right] = \pi\cdot\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b \left(\tfrac{1}{x^2}\right)dx = \pi\cdot\lim\limits_{b\to+\infty}\left[-\tfrac{1}{x}\right]_1^b = \pi\cdot\left(1 - \lim\limits_{b\to+\infty}\tfrac{1}{b}\right)\lim\limits_{b\to+\infty}\tfrac{1}{b} = \pi$

Dem unendlich langen Rotationskörper, der durch Rotation des Graphen von f um die x-Achse im Intervall $[1; +\infty[$ entsteht, kann ein endliches Volumen zugeordnet werden.

c) Individuelle Recherche-Ergebnisse.

KX **11 a)** Es entsteht ein Torus.

b) Wegen $(f_o(x) - f_u(x))^2 \neq (f_o(x))^2 - (f_u(x))^2$ kann nicht die Differenzfunktion zur Berechnung des Volumens benutzt werden.

c) Das Volumen des Rotationskörpers berechnet sich aus

$f_o(x) = 4 - x^2;\ f_u(x) = 1 + x^2$

$$V = V_o - V_u = \pi\cdot\int_{-1}^{1}\left[f_o(x)^2 - f_u(x)^2\right]dx = \pi\cdot\int_{-1}^{1}\left[(4-x^2)^2 - (1+x^2)^2\right]dx$$

$$= \pi\cdot\int_{-1}^{1}[16 - 8x^2 + x^4 - 1 - 2x^2 - x^4]\,dx = \pi\cdot\int_{-1}^{1}[15 - 10x^2]\,dx = \pi\cdot\left[15x - \tfrac{10}{3}x^3\right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi\left[\left(15 - \tfrac{10}{3}\right) - \left(-15 + \tfrac{10}{3}\right)\right] = \tfrac{70}{3}\pi \approx 73{,}30\ [\text{VE}]$$

KX **12** **a)** $V = \pi \cdot \int_0^{10} [f(x)^2]\, dx = \pi \cdot \int_0^{10} \left[(0{,}1 \cdot (10 - x) \cdot \sqrt{x})^2\right] dx = \pi \cdot \int_0^{10} \left[0{,}01 \cdot (10 - x)^2 \cdot x\right] dx$

$= \frac{\pi}{100} \cdot \int_0^{10} (100x - 20x^2 + x^3)\, dx = \frac{\pi}{100} \cdot \left[50x^2 - \frac{20}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^{10} = \frac{\pi}{100} \cdot \left(5000 - \frac{20000}{3} + 2500\right)$

$= \frac{25}{3}\pi \approx 26\,179{,}94\ [m^3]$

b) $F = \rho_{Luft} \cdot V \cdot g = 1{,}29\,\frac{kg}{m^3} \cdot 26\,179{,}94\,m^3 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \approx 331{,}30\,kN$

c) Individuelle Recherche-Ergebnisse.

KX **1** **a)** 1 $\int_0^{10} f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2 = -2$

2 $\int_2^{8} f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot (2+1)\cdot 2$
$= 3$

b) $\int_4^{10} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6 = 6$

$\int_{10}^{b} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot (b-10)\cdot \left(5-\frac{1}{2}b\right)$
$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}b^2 + 10b - 50\right)$

$\int_{10}^{b} f(x)\,dx = -6 \Leftrightarrow b^2 - 20b + 76 = 0$
$\Rightarrow b_{1/2} = 10 \pm \sqrt{100-76};$
$b = 10 + \sqrt{24} \approx 14{,}90$

a) Wegen $\int_6^{10} f(x)\,dx > \frac{3}{2}$ gilt $6 < a < 10$.

$\int_a^{10} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot (10-a)\cdot \left(5-\frac{1}{2}a\right)$
$= \frac{1}{4}a^2 - 5a + 25$

$\int_a^{10} f(x)\,dx = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4}a^2 - 5a + 25$
$= \frac{3}{2} \Leftrightarrow a^2 - 20a + 94 = 0$
$\Rightarrow a_{1/2} = 10 \pm \sqrt{100-94};$
$a = 10 - \sqrt{6} \approx 7{,}55$

b) Individuelle Lösungen. Beispiel:
x: Zeit in Minuten
f(x): Zu- bzw. Abflussrate von Wasser aus einem Becken (in $\frac{l}{min}$)

KX **2** 1 $10 + \int_0^{12} f(t)\,dt = 10 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 8 + 6\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8$
$= 82$

Der Akku hat nach 12 Minuten einen Energieinhalt von 82 Wh, wenn er anfänglich einen Energieinhalt von 10 Wh besaß.

2 $\int_{12}^{24} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot (-4) + 10\cdot (-4) = -44$

In der Zeit von 12 min bis 24 min nach Beginn des Beobachtungszeitraums verringert sich der Energieinhalt des Akkus um 44 Wh.

3 $\int_0^{36} f(t)\,dt = 72 - 44 + 6\cdot (-4) + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot (-4) = -8$

In den ersten 36 Minuten nach Beobachtungsbeginn verliert der Akku insgesamt einen Energieinhalt von 8 Wh.

In den ersten 36 Minuten nach Beobachtungsbeginn verliert der Akku insgesamt einen Energieinhalt von 8 Wh (vgl. grüne Teilaufgabe 3).
Da der Energieinhalt des Akkus nicht kleiner als 0 Wh sein kann und $\int_0^{12} f(t)\,dt > 0$ gilt, muss er zu Beginn des Beobachtungszeitraums mindestens 8 Wh betragen haben.

KX **3** **a)** $G_f = G_{grün}$, $G_F = G_{orange}$: Der orange Graph verläuft für $x < -3$ oberhalb der x-Achse, während der grüne Graph fällt. Daher kann der orange Graph nicht zur Ableitung der Integralfunktion gehören.
Mögliche Werte für a: $a_1 = -3$, $a_2 \approx 1{,}6$

b) $G_f = G_{grün}$, $G_F = G_{orange}$: Der orange Graph verläuft für $0 < x < 2$ unterhalb der x-Achse, während der grüne Graph steigt. Daher kann der orange Graph nicht zur Ableitung der Integralfunktion gehören.
Mögliche Werte für a: $a = 2$

a) $G_f = G_{blau}$, $G_F = G_{rot}$: Der rote Graph verläuft für $0 < x < 5$ oberhalb der x-Achse, während der blaue Graph fällt. Daher kann der rote Graph nicht zur Ableitung der Integralfunktion gehören.
Mögliche Werte für a: $a_1 = 5$, $a_2 = 12$

b) $G_f = G_{blau}$, $G_F = G_{rot}$: Der rote Graph verläuft für $3 < x < 4$ oberhalb der x-Achse, während der blaue Graph fällt. Daher kann der rote Graph nicht zur Ableitung der Integralfunktion gehören.
Mögliche Werte für a: $a_1 = 3$, $a_2 = 4$

KX **4** **a)** $\int_0^{x} (t^3 - 6t^2 + 1)\,dt = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + x$

b) $\int_{-\pi}^{x} \sin(2t)\,dt = \left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_{-\pi}^{x}$
$= -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos(2\pi)$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

a) $\int_{-2}^{x} te^{3t^2+1}\,dt = \left[\frac{1}{3}e^{3t^2+1}\right]_{-2}^{x} = \frac{1}{3}e^{3x^2+1} - \frac{1}{3}e^{13}$

b) $\int_1^{x} \frac{t}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{x} \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\left[\ln(t^2+1)\right]_1^{x}$
$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln 2$

KX **5** **a)** Höhe: $h = 2a$; Länge: $b = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4a}} = 8a$

b) $A_{0,25} = \int_0^2 (0{,}25 - 0{,}25\cos(\pi x))\,dx$

$= \left[0{,}25x - \frac{1}{4\pi}\sin(\pi x)\right]_0^2 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2};$

$V_{0,25} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}25 = 0{,}625\,[m^3]$

$A_{0,2} = \int_0^{1,6} \left(0{,}2 - 0{,}2\cos\left(\frac{5\pi}{4}x\right)\right)dx$

$= \left[0{,}2x - \frac{4}{25\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{4}x\right)\right]_0^{1,6} = \frac{8}{25} = 0{,}32$

$V_{0,2} = 0{,}32 \cdot 1{,}25 = 0{,}4\,[m^3]$

$V_{ges} = V_{0,25} + V_{0,2} = 1{,}025\,[m^3]$

Summe der Inhalte der Querschnittsflächen:

$A_{ges} = \frac{V}{1{,}25} = \frac{1{,}4}{1{,}25} = \frac{28}{25}\,[m^2]$

Querschnittsfläche eines Hügels:

$A = \int_0^{8a} \left[a - a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4a}x\right)\right] dx$

$= \left[ax - \frac{a^2}{4\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4a}x\right)\right]_0^{8a} = 8a^2$

Höhe des kleinsten Hügels:

$h_1;\ a_1 = \frac{1}{2}h_1;\ A_1 = 8a_1^2 = 8\left(\frac{1}{2}h_1\right)^2 = 2h_1^2$

Höhe des mittleren Hügels:

$h_2 = 2h_1;\ a_2 = \frac{1}{2}h_2 = h_1;\ A_2 = 8a_2^2 = 8h_1^2$

Höhe des größten Hügels:

$h_3 = 3h_1;\ a_3 = \frac{1}{2}h_3 = \frac{3}{2}h_1;$

$A_3 = 8a_3^2 = 8\left(\frac{3}{2}h_1\right)^2 = 18h_1^2$

$A_1 + A_2 + A_3 = 2h_1^2 + 8h_1^2 + 18h_1^2 = 28h_1^2$

$28h_1^2 = \frac{28}{25} \Rightarrow h_1^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow h_1 = \frac{1}{5} \Rightarrow h_3 = \frac{3}{5} = 60\,[cm]$

KX **6** **a)** $f(1) = \frac{4}{1^2} - 1 = 3;\ g(1) = 4 - 1 = 3 = f(1);$

P ist gemeinsamer Punkt der Graphen.

b) $A = \int_0^1 g(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$

$= \int_0^1 (4 - x)\,dx + \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - 1\right)dx$

$= \left[4x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{4}{x} - x\right]_1^2$

$= 3{,}5 \pm 2 - 2 - (-4 - 1) = 4{,}5$

a) Differenzfunktion:

$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{4}{x^2} + x - 5;\ h'(x) = -\frac{8}{x^3} + 1$

Newton-Verfahren mit Startwert $x_0 = 5$

$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = \frac{565}{117}$

$x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} \approx 4{,}8284$

$x_3 = x_2 - \frac{h(x_2)}{h'(x_2)} \approx 4{,}8284$

Bei weiteren Schritten ändern sich die ersten 5 Dezimalen nicht.

Die Graphen schneiden sich etwa bei $x \approx 4{,}8$.

b) $A = \int_1^{4,8} (g(x) - f(x))\,dx = \int_1^{4,8} \left(5 - x - \frac{4}{x^2}\right)dx$

$= \left[5x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{x}\right]_1^{4,8}$

$= \left(5 \cdot 4{,}8 - \frac{1}{2} \cdot 4{,}8^2 + \frac{4}{4{,}8}\right) - \left(5 - \frac{1}{2} + 4\right)$

$\approx 4{,}81[FE]$

KX **7** $V = 140 + \int_0^2 f(x)\,dx - \int_0^2 g(x)\,dx$

$= 140 + \int_0^2 (-1{,}5x^2 + 7{,}5x)\,dx - \int_0^2 (2e^{-0,5x} + 2)\,dx$

$= 140 + [-0{,}5x^3 + 3{,}75x^2]_0^2 - [-4e^{-0,5x} + 2x]_0^2$

$= 140 - 4 + 15 - 0 - \left[-\frac{4}{e} + 4 - (-4 + 0)\right]$

$= 143 + \frac{4}{e} \approx 144{,}47\,[l]$

Die Wanne läuft über. Mögliche Lösung:

$\int_0^4 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^4 (-1{,}5x^2 + 7{,}5x - 2e^{-0,5x} - 2)\,dx$

$= [-0{,}5x^3 + 3{,}75x^2 + 4e^{-0,5x} - 2x]_0^4$

$= -32 + 60 + \frac{4}{e^2} - 8 - (0 + 4 - 0)$

$\approx 16{,}54\,[l] > 10\,[l]$

Hinweis: Es kann auch die Gleichung $\int_0^t [f(x) - g(x)]\,dx = 0$ auf Lösbarkeit überprüft werden.

KX **8** **a)** $V = \pi \cdot \int_{-1}^{5} \left(\frac{1}{20}x^2 + 1\right)^2 dx$

$= \pi \cdot \int_{-1}^{5} \left(\frac{1}{400}x^4 + \frac{1}{10}x^2 + 1\right) dx$

$= \pi \cdot \left[\frac{1}{2000}x^5 + \frac{1}{30}x^3 + x\right]_{-1}^{5}$

$= \pi \cdot \left[\frac{25}{16} + \frac{25}{6} + 5 - \left(-\frac{1}{2000} - \frac{1}{30} - 1\right)\right]$

$\approx 11{,}76\pi \approx 36{,}95$ [VE]

b) Es ändern sich die Werte a und b. Zudem muss der Funktionsterm zu $g_k(x) = \frac{1}{20}(x-5)^2 + k$ angepasst werden. k ändert sich nicht.

a) $V_k = \pi \cdot \int_{-1}^{5} \left(\frac{1}{20}x^2 + k\right)^2 dx$

$= \pi \cdot \int_{-1}^{5} \left(\frac{1}{400}x^4 + \frac{1}{10}kx^2 + k^2\right) dx$

$= \pi \cdot \left[\frac{1}{2000}x^5 + \frac{1}{30}kx^3 + k^2x\right]_{-1}^{5}$

$= \pi \cdot \left[\frac{25}{16} + \frac{25}{6}k + 5k^2 - \left(-\frac{1}{2000} - \frac{1}{30}k - k^2\right)\right]$

$= \pi \cdot (6k^2 + 4{,}2k + 1{,}563)$

$V_K = 170 \Leftrightarrow 6k^2 + 4{,}2k + 1{,}563$
$= \frac{170}{\pi} \Leftrightarrow k^2 + 0{,}7k + 0{,}2605 - \frac{85}{3\pi} = 0$

$\Rightarrow k_{1/2} = -0{,}35 \pm \sqrt{0{,}1225 - 0{,}2605 + \frac{85}{3\pi}}$

$k_1 \approx 2{,}63$ ($k_2 \approx 3{,}33$ entfällt)

b) $V_k = \pi \cdot \int_{-1}^{2k} \left(\frac{1}{20}x^2 + k\right)^2 dx$

$= \pi \cdot \int_{-1}^{2k} \left(\frac{1}{400}x^4 + \frac{1}{10}kx^2 + k^2\right) dx$

$= \pi \cdot \left[\frac{1}{2000}x^5 + \frac{1}{30}kx^3 + k^2x\right]_{-1}^{2k}$

$= \pi \cdot \left[\left(\frac{2}{125}k^5 + \frac{4}{15}k^4 + 2k^3\right)\right.$
$\left. - \left(-\frac{1}{2000} - \frac{1}{30}k - k^2\right)\right]$

$= \pi \cdot \left[\frac{2}{125}k^5 + \frac{4}{15}k^4 + 2k^3 + k^2 + \frac{1}{30}k + \frac{1}{2000}\right]$

$V_K = 44 \Leftrightarrow \pi \cdot \left[\frac{2}{125}k^5 + \frac{4}{15}k^4 + 2k^3 + k^2 + \right.$
$\left.\frac{1}{30}k + \frac{1}{2000}\right]$
$= 44 \Leftrightarrow \frac{2}{125}k^5 + \frac{4}{15}k^4 + 2k^3 + k^2 + \frac{1}{30}k +$
$\frac{1}{2000} - \frac{44}{\pi}$
$= 0$

Hilfsfunktion h mit
$h(k) = \frac{2}{125}k^5 + \frac{4}{15}k^4 + 2k^3 + k^2 + \frac{1}{30}k +$
$\frac{1}{2000} - \frac{44}{\pi}$

$h'(k) = \frac{2}{25}k^4 + \frac{16}{15}k^3 + 6k^2 + 2k + \frac{1}{30}$

Newtonverfahren mit Startwert $k_0 = 2$

$k_1 = k_0 - \frac{h(k_0)}{h'(k_0)} \approx 1{,}71358$

$k_2 = k_1 - \frac{h(k_1)}{h'(k_1)} \approx 1{,}65508$

$k_3 = k_2 - \frac{h(k_2)}{h'(k_2)} \approx 1{,}65284$

$k_4 = k_3 - \frac{h(k_3)}{h'(k_3)} \approx 1{,}65284$

$k \approx 1{,}65$

KX **9** Nullstellen von f: $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 2$

$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

$\int_0^a (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a = 4a - \frac{1}{3}a^3$

$4a - \frac{1}{3}a^3 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow a^3 - 12a + 8 = 0$

Hilfsfunktion h mit $h(a) = a^3 - 12a + 8$; $h'(a) = 3a^2 - 12$

Newton-Verfahren mit Startwert: $a_0 = 1$

$a_1 = a_0 - \frac{h(a_0)}{h'(a_0)} \approx 0{,}66667$

$a_2 = a_1 - \frac{h(a_1)}{h'(a_1)} \approx 0{,}69444$

$a_3 = a_2 - \frac{h(a_2)}{h'(a_2)} \approx 0{,}69459$

$a_4 = a_3 - \frac{h(a_3)}{h'(a_3)} \approx 0{,}69459$

$a \approx 0{,}695$

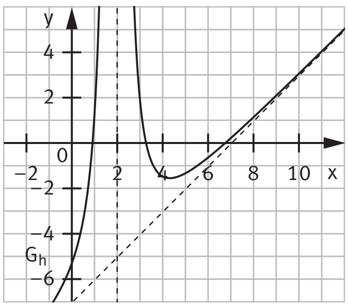
KX **10** **a)** $F'(t) = -10(2t + 2)\,e^{-t} - 10(t^2 + 2t + 2)\,e^{-t} \cdot (-1) = 10t^2\,e^{-t} = f(t)$

b) $V = \int_0^6 f(t)\,dt = F(6) - F(0) = -10 \cdot (6^2 + 2 \cdot 6 + 2) \cdot e^{-6} + 10 \cdot (0^2 + 2 \cdot 0 + 2) \cdot e^{-0} = 20 - \frac{500}{e^6} \approx 18{,}76\,[m^3]$

c) $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim\limits_{b \to +\infty} [F(b) - F(0)] = \lim\limits_{b \to +\infty} \left[20 - 10(b^2 + 2b + 2)\,e^{-b}\right] = 20 - \lim\limits_{b \to +\infty} \left(\frac{10(b^2 + 2b + 2)}{e^b}\right) = 20\,[m^3]$

Das Becken müsste mindestens ein Volumen von 20 m³ haben.

KX **11** **a)**



b) $\int_{10}^{20} h(x)\,dx \approx \int_{10}^{20} (x - 7)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 7x\right]_{10}^{20} = 200 - 140 - (50 - 70) = 80\,[FE]$

KX **12** Der untere Rahmen wird mit einer quadratischen Funktion f modelliert, der obere mit einer quadratischen Funktion g.

f(x): untere Begrenzung des Fensters

Nullstellen von f: $x_{1/2} = \pm 292$; Scheitel: $S_f(0\,|\,656)$

$f(x) = a(x - 292)(x + 292)$

$656 = -292^2 \cdot a \Rightarrow a = -\frac{656}{292^2} = -\frac{41}{5329}$

$f(x) = -\frac{41}{5329}(x^2 - 292^2)$; $f(x) = 656 - \frac{41}{5329}x^2$

g(x): obere Begrenzung des Fensters

Nullstellen von g: $x_{3/4} = \pm 388$; Scheitel: $S_g(0\,|\,856)$

$g(x) = b(x - 388)(x + 388)$

$856 = -388^2 \cdot b \Rightarrow b = -\frac{856}{388^2} = -\frac{107}{18818}$

$g(x) = -\frac{107}{18\,818}(x^2 - 388^2)$; $g(x) = 856 - \frac{107}{18\,818}x^2$

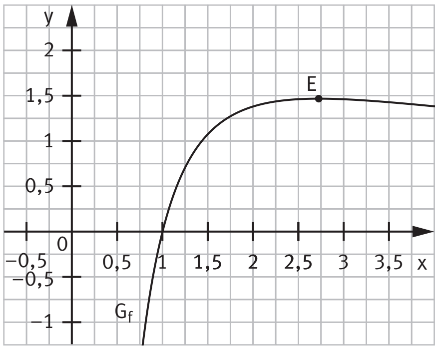
$$A_{Fenster} = \int_{-388}^{388} g(x)\,dx - \int_{-292}^{+292} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{388} \left(856 - \frac{107}{18818}x^2\right) dx - 2 \cdot \int_{0}^{292} \left(656 - \frac{41}{5329}x^2\right) dx$$
$$= 2 \cdot \left[856x - \frac{107}{56454}x^3\right]_0^{388} - 2 \cdot \left[656x - \frac{656}{15987}x^3\right]_0^{292}$$
$$= 2 \cdot \left[\left(856 \cdot 388 - \frac{107}{56454} \cdot 388^3\right)\right] - 2 \cdot \left[\left(656 \cdot 292 - \frac{656}{15987} \cdot 292^3\right)\right]$$
$$\approx 187\,435\,[cm^2] \approx 18{,}7\,[m^2]$$

KX **13 a)** $f'(x) = -\frac{4}{x^2} \cdot \ln x + \frac{4}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{4 - 4\ln x}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

Wegen $f'(1) = 4 > 0$ und $f'(e^2) = \frac{4-8}{e^4} = -\frac{4}{e^4} < 0$ hat G_f an der Stelle $x = e$ ein lokales Maximum.

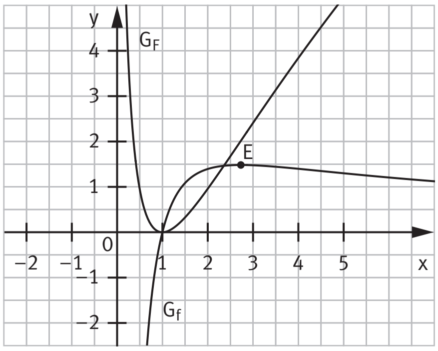
$f(e) = \frac{4}{e}$; $E\left(e \middle| \frac{4}{e}\right)$



b) $F'(x) = 2 \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{x} \cdot \ln x = f(x)$

Extremstelle von F ist $x = 1$, da f an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle mit VZW hat.

Wendestelle von F ist $x = e$, da f an der Stelle $x = e$ eine Extremstelle hat.



c) $A = \int_{1}^{e^{1,5}} f(x)\,dx = F(e^{1,5}) - F(1) = 2 \cdot (1{,}5)^2 - 2 \cdot 0 = 4{,}5$

KX **14 a)** Symmetrie: $f(-x) = 5(-x) \cdot e^{-(-x)^2} = -5 \cdot e^{-x^2} = -f(x)$; G_f ist punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 5x \cdot e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$; $N(0|0)$ ist gleichzeitig Schnittpunkt mit der y-Achse

Ableitungen: $f'(x) = 5e^{-x^2} + 5x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = 5e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

$f''(x) = 5e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (1 - 2x^2) + 5e^{-x^2} \cdot (-4x) = 10xe^{-x^2}(2x^2 - 3)$

Extremstellen: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = x^2$; $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$

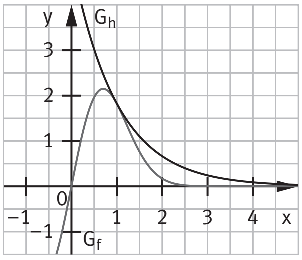
$f''\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 5\sqrt{2} \cdot e^{-0,5} \cdot (1 - 3) = -10\sqrt{2} \cdot e^{-0,5} < 0$; $f\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{5}{2}\sqrt{2} \cdot e^{-0,5}$; G_f hat einen Hochpunkt $H\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \middle| \frac{5}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$ und wegen der Symmetrie einen Tiefpunkt $T\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} \middle| -\frac{5}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$.

Wendestellen: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_{2/3} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{6}$ sind jeweils Nullstellen von f″ mit VZW und daher Wendestellen von f.

$W_1(0|0)$; $W_2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6} \middle| -\frac{5}{2}\sqrt{6} \cdot e^{-1,5}\right)$; $W_3\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} \middle| \frac{5}{2}\sqrt{6} \cdot e^{-1,5}\right)$

b) $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b (5x\cdot e^{-x^2})\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left[-2{,}5e^{-x^2}\right]_0^b = 2{,}5 - \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-2{,}5e^{-b^2}\right) = 2{,}5$

c)



Es gilt $f(1) = \frac{5}{e}$ und $h(1) = \frac{5}{e} = f(1)$.

Außerdem gilt: $f'(1) = -\frac{5}{e}$ sowie $h'(x) = -5e^{-1}$ und damit $h'(1) = -\frac{5}{e} = f'(1)$.

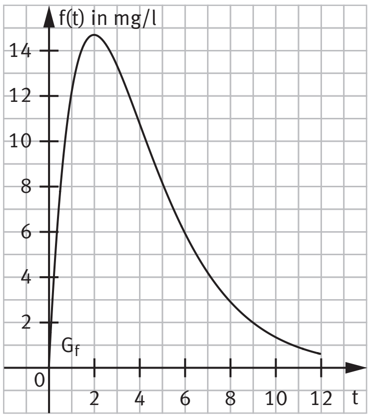
Die Graphen von f und g berühren sich an der Stelle x = 1.

d) $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b [h(x)-f(x)]\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b (5\,e^{-x} - 5x\cdot e^{-x^2})\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left[-5\,e^{-x} + 2{,}5\,e^{-x^2}\right]_1^b$

$$= \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-5\,e^{-b} + 2{,}5^{-b^2} - \left(-\frac{5}{e} + \frac{5}{2e}\right)\right) = \frac{5}{2e}$$

Der Inhalt der begrenzten Fläche ist endlich.

KX **15 a)**



Die Modellierung erscheint für kürzere Zeiträume realistisch, da die Wirkstoffkonzentration im Blut nach Einnahme des Medikaments ansteigt und dann wieder absinkt. Für längere Zeiträume ist sie nicht realistisch, da die Wirkstoffkonzentration in der Wirklichkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt auf null abgesunken sein wird.

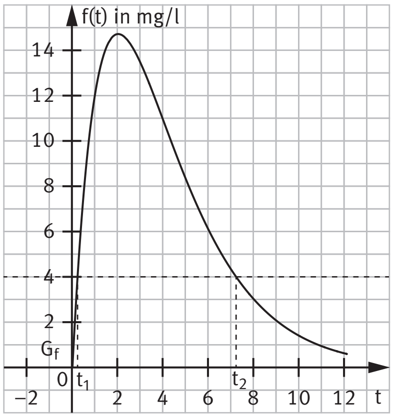
b) Ableitungen: $f'(t) = 20\,e^{-0{,}5t} + 20t\cdot e^{-0{,}5t}\cdot(-0{,}5) = 10\,e^{-0{,}5t}(2-t)$

$f''(t) = 10\,e^{-0{,}5t}\cdot(-0{,}5)\cdot(2-t) + 10\,e^{-0{,}5t}\cdot(-1) = 5\,e^{-0{,}5t}(t-4)$

Extremstellen: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2-t = 0 \Rightarrow t = 2$; $f''(2) = -\frac{10}{e} < 0$

$f(2) = 20\cdot 2\cdot e^{-0{,}5\cdot 2} = \frac{40}{e} \approx 14{,}72\left[\frac{mg}{l}\right]$

Die maximale Wirkstoffkonzentration ist zwei Stunden nach Einnahme des Medikaments mit rund $14{,}74\,\frac{mg}{l}$ am größten.

c) 

Mithilfe der Zeichnung ergibt sich: $t_1 \approx 0{,}2$; $t_2 \approx 7{,}2$

Das Medikament ist also rund 7 Stunden wirksam.

d) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4$ ist Nullstelle von f″ mit VZW.

$f'(4) = 10\,e^{-0{,}5\cdot 4} \cdot (2 - 4) = -\frac{20}{e^2}$

Das Medikament wird bei t = 4 am stärksten abgebaut.

e) $g'(t) = a\,e^{-bt} + at\,e^{-bt} \cdot (-b) = a\,e^{-bt}(1 - bt)$

$g'(4) = 0 \Leftrightarrow a\,e^{-4b}(1 - 4b) = 0 \Rightarrow b = 0{,}25$

$g(4) = 10 \Leftrightarrow a \cdot 4 \cdot e^{-4\cdot 0{,}25} = 10 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}e$

KX **16 a)** $f'(x) = 5\,e^{-0{,}4x-x^2} + (5x + 1) \cdot e^{-0{,}4x-x^2} \cdot (-0{,}4 - 2x) = e^{-0{,}4x-x^2}[5 + (5x + 1)(-0{,}4 - 2x)]$

$= e^{-0{,}4x-x^2}(5 - 2x - 0{,}4 - 10x^2 - 2x) = e^{-0{,}4x-x^2}(-10x^2 - 4x + 4{,}6)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -10x^2 - 4x + 4{,}6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 0{,}4x - 0{,}46 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -0{,}2 \pm \sqrt{0{,}04 + 0{,}46}$

$x_1 = -0{,}2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}5071$ ($x_2 = -0{,}2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx -0{,}91 \notin D_f$)

$f\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0{,}2\right) \approx 2{,}232$; $D\,(0{,}51\,|\,2{,}23)$

$g(x) = 0{,}47x + t$; $t = 2{,}23 - 0{,}47 \cdot 0{,}51 \Rightarrow t \approx 1{,}99$; $g(x) = 0{,}47x + 1{,}99$

b) $h(x) = mx + t$

$m = -\frac{1{,}48}{3} = -\frac{37}{75}$

$y = -\frac{37}{75}x + t$; $1{,}48 = -\frac{37}{75} \cdot 1 + t \Rightarrow t = 1{,}48 + \frac{37}{75} = \frac{148}{75}$

$h(x) = -\frac{37}{75}x + \frac{148}{75}$

c) $A = \int_1^4 [h(x) - f(x)]\,dx = \int_1^4 \left[-\frac{37}{75}x + \frac{148}{75} - (5x + 1)\,e^{-0{,}4x-x^2}\right] dx = \left[-\frac{37}{150}x^2 + \frac{148}{75}x + \frac{1}{0{,}4}\,e^{-0{,}4x-x^2}\right]_1^4$

$= -\frac{296}{75} + \frac{592}{75} + \frac{5}{2} \cdot e^{-17{,}6} - \left(-\frac{37}{150} + \frac{148}{75} + \frac{5}{2}e^{-1{,}4}\right) \approx 1{,}60\,[\text{FE}] \approx 6{,}40\,[\text{m}^2]$

Je zehn laufende Meter werden etwa 64 m³ Sand-Kies-Gemisch benötigt.

KX **1** **a)** Der Bestand hat zum Zeitpunkt t = 8 seinen höchsten Wert, da die Funktion B′ an dieser Stelle eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Werten besitzt.
Zum Zeitpunkt t = 13 besitzt der Bestand ein Minimum, da B′ an dieser Stelle eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von negativen zu positiven Werten besitzt.

b) Dies ist nicht möglich. Die Zunahme des Bestands im Intervall [0; 8] entspricht dem Flächeninhalt des von $G_{B'}$ und der x-Achse in diesem Intervall gebildeten Dreiecks und ist größer als die Bestandsabnahme im Intervall [8; 13], beschrieben durch den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks. Im Intervall [13; 14] nimmt der Bestand noch weiter zu.

c) Die Änderung des Bestands in einem Intervall ergibt sich jeweils aus dem Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von B′ und der x-Achse.

Bestandszunahme im Intervall [0; 8]:

$\Delta B_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$

Bestandsabnahme im Intervall [8; 13]:

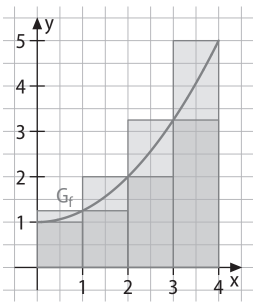
$\Delta B_2 = \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot 5 = -10$

Bestandszunahme im Intervall [13; 14]:

$\Delta B_3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$

$B(14) = B(0) + \Delta B_1 + \Delta B_2 + \Delta B_3 = 10 + 16 - 10 + 2 = 18$

KX **2**



Untersumme: $s_4 = 1 \cdot (f(0) + f(1) + f(2) + f(3)) = 1 + \frac{5}{4} + 2 + \frac{13}{4} = 7{,}5$ [FE]

Obersumme: $S_4 = 1 \cdot (f(1) + f(2) + f(3) + f(4)) = \frac{5}{4} + 2 + \frac{13}{4} + 5 = 11{,}5$ [FE]

Abschätzung: $\frac{1}{2} \cdot \left(s_4 + S_4\right) = 9{,}5$ [FE]

KX **3** **a)** $F_{-1}(x) = \int_{-1}^{x} (t^2 + 1)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + t\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{3}x^3 + x - \left[\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)\right] = \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{4}{3}$

b) $F_1(x) = \int_{1}^{x} \left(e^t + \frac{1}{t}\right) dt = [e^t + \ln t]_1^x = e^x + \ln x - [e^1 + \ln 1] = e^x + \ln x - e$

c) $F_0(x) = \int_{0}^{x} (t e^{t^2-2})\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{x} (2t e^{t^2-2})\,dt = \frac{1}{2} \cdot [e^{t^2-2}]_0^x = \frac{1}{2}(e^{x^2-2} - e^{0-2}) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{x^2-2} - \frac{1}{e^2}\right)$

KX **4** **a)** $\int_{1}^{2} \frac{2x}{x^2+2}\,dx = [\ln(x^2+2)]_1^2 = \ln 6 - \ln 3 = \ln\frac{6}{3} = \ln 2$

b) $\int_{-1}^{1} (x^2 \cdot e^{x^3-1})\,dx = \frac{1}{3} \cdot \int_{-1}^{1} (3x^2 \cdot e^{x^3-1})\,dx = \frac{1}{3} \cdot [e^{x^3-1}]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} \cdot (e^0 - e^{-2}) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$

c) $\int_{3}^{8} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2 \cdot \int_{3}^{8} \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx = 2 \cdot \left[\sqrt{x+1}\right]_3^8 = 2 \cdot (3 - 2) = 2$

KX **5** **a)** Die Aussage ist wahr, da aufgrund der Eigenschaften des Integrals dieses bei übereinstimmender oberer und unterer Grenze den Wert null hat.

b) Die Aussage ist wahr, da der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^3 + x$ im Intervall [2; 3] oberhalb der x-Achse verläuft.

c) Die Aussage ist wahr, da der Graph der natürlichen Exponentialfunktion oberhalb der x-Achse verläuft.

d) Die Aussage ist falsch.

Es gilt $5 \cdot \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$ wegen der Punktsymmetrie der Sinuskurve bezüglich des Punkts $(\pi \mid 0)$.

KX **6** **a)** Nullstelle von f: $e^x - 2 = 0 \Rightarrow x = \ln 2$

$$A = A_1 + A_2 = \left| \int_0^{\ln 2} (e^x - 2)\, dx \right| + \int_{\ln 2}^{2} (e^x - 2)\, dx = \left| [e^x - 2x]_0^{\ln 2} \right| + [e^x - 2x]_{\ln 2}^{2}$$
$$= 2 - 2\ln 2 - 1 + e^2 - 4 - (2 - 2\ln 2) = e^2 - 5$$

b) Schnittpunkt von G_f und G_g:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$

$$A = 2 \cdot \int_0^2 [3 - (x^2 - 1)]\, dx = 2 \cdot \int_0^2 (4 - x^2)\, dx$$
$$= 2 \cdot \left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 2 \cdot \left(8 - \tfrac{8}{3}\right) - 0 = \tfrac{32}{3}$$

c) Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$A = \lim_{b \to 0^+} \int_b^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) dx = \lim_{b \to 0^+} \left[2\sqrt{x} - x\right]_b^1$$
$$= \lim_{b \to 0^+} \left[2 - 1 - \left(2\sqrt{b} - b\right)\right]$$
$$= \lim_{b \to 0^+} \left(1 - 2\sqrt{b} + b\right) = 1$$

KX **7** **a)** Maximum der Zuflussrate:

$f'(t) = -3t^2 + 6t;\ f''(t) = -6t + 6$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t(t - 2) = 0 \Rightarrow t_1 = 0;\ t_2 = 2$

$f''(0) = 6 > 0;\ f''(2) = -6 < 0$

Die Zuflussrate hat ihr Maximum zum Zeitpunkt t = 2 [min] mit $f(2) = 4 \left[\frac{m^3}{min}\right]$

1 Beckeninhalt:

$$10 + \int_0^1 f(t)\, dt - 1 \cdot 1 = 9 + \int_0^1 (-t^3 + 3t^2)\, dt = 9 + \left[-\tfrac{1}{4}t^4 + t^3\right]_0^1 = 9 - \tfrac{1}{4} + 1 - 0 = 9{,}75\ [m^3]$$

2 Beckeninhalt:

$$10 + \int_0^2 f(t)\, dt + 8 \cdot 4 - 10 \cdot 1 = 32 + \int_0^2 (-t^3 + 3t^2)\, dt = 32 + \left[-\tfrac{1}{4}t^4 + t^3\right]_0^2 = 32 - \tfrac{1}{4} \cdot 2^4 + 2^3 - 0$$
$$= 36\ [m^3]$$

b) Nach 10 Minuten enthält das Becken 36 m^3. In jeder weiteren Minute laufen 4 m^3 zu und 1 m^3 ab, insgesamt also 3 m^3 zu.

$\Delta t = \frac{50 - 36}{3} = \frac{14}{3} \approx 4{,}67\,[min]$

Nach etwa 4,7 Minuten läuft das Becken über.

KX **8** $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\, dx = \pi \cdot \int_a^b (25e^{0,1x})\, dx = \pi \cdot [250e^{0,1x}]_a^b = 250\pi\,(e^{0,1b} - e^{0,1a})$

Aufgaben für Lernpartner

K1/6 **A** Die Aussage ist wahr. Das bestimmte Integral beschreibt die Flächenbilanz.

K1/6 **B** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $\int_{-1}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.
Das bestimmte Integral beschreibt die Flächenbilanz.

K1/6 **C** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Der Graph der Funktion f: $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, ist im Intervall $[1; +\infty[$ unendlich lang und begrenzt zusammen mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt
$A = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim\limits_{a \to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = \lim\limits_{a \to +\infty} \left(-\frac{1}{a} - (-1)\right) = 1\,[\text{FE}]$.

K1/6 **D** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: f: $x \mapsto 2x$, $D_f = \mathbb{R}$, ist Integrandenfunktion zur Integralfunktion
$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 2t\,dt = \left[t^2\right]_0^x = x^2$.
$x = 0$ ist Nullstelle von F, dort hat aber f die Steigung 2 und damit keine waagrechte Tangente.

K1/6 **E** Die Aussage ist wahr. Beispiel: Es gilt $\int_{-1}^{1} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.
Aber die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten ($y = x$) schließt mit der x-Achse sowohl im Intervall $[-1; 0]$ als auch im Intervall $[0; 1]$ eine Fläche mit von null verschiedenem Inhalt ein.

K1/6 **F** Die Aussage ist falsch. Es ist $\int_{-1}^{0} x^3\,dx < 0$, da der Graph von f im Intervall $[-1; 0[$ unterhalb der x-Achse verläuft und der Flächeninhalt A aber nichtnegativ ist. Es gilt $A = \left|\int_{-1}^{0} x^3\,dx\right|$.

K1/6 **G** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: f: $x \mapsto x^2 - 5$, $D_f = \mathbb{R}$.
Es gilt $f'(x) = 2x$ und $\int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x 2t\,dt = [t^2]_0^x = x^2 \neq f(x)$.

K1/6 **H** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: f: $x \mapsto 1$, $D_f = \mathbb{R}$, und $a = 0$, $b = 2$ und $c = 3$. Es gilt
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^2 1\,dx = [x]_0^2 = 2$,
- $\int_a^c f(x)\,dx = \int_0^3 1\,dx = [x]_0^3 = 3$ und
- $\int_c^b f(x)\,dx = \int_3^2 1\,dx = [x]_3^2 = 2 - 3 = -1$.

Damit gilt die angegebene Gleichung, obwohl nicht $a \leq c \leq b$ ist.

K1/6 **I** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: f: $x \mapsto x$ und g: $x \mapsto 2$ ($D_f = D_g = \mathbb{R}$).
Es gilt $\int_1^3 (f(x) - g(x))\,dx = \int_1^3 (x - 2)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_1^3 = \frac{9}{2} - 6 - \left(\frac{1}{2} - 2\right) = 0$,
aber nicht $f(x) = g(x)$ im Intervall $[1; 3]$.

K1/6 **J** Die Aussage ist falsch. Beispielsweise beschreibt ein negativer Bestand an Geld vorhandene Schulden.

K1/6 **K** Die Aussage ist falsch. Man benötigt zusätzlich noch die Kenntnis über den Bestand zu mindestens einem bestimmten Zeitpunkt.

K1/6 **L** Die Aussage ist falsch.

$$\int_0^2 \left(x \cdot e^{-x^2}\right) dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2}\right]_0^2 = -\frac{1}{2} \cdot e^{-4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{e^4}\right)$$

K1/6 **M** Die Aussage ist falsch. Zur Berechnung des Volumens desjenigen Körpers, der durch Rotation des Graphen von f um die y-Achse entsteht, benötigt man z. B. die Umkehrfunktion von f, sofern diese existiert.

K1/6 **N** Die Aussage ist wahr. Beispiel: $f: x \mapsto 3$ und $g: x \mapsto 2$ ($D_f = D_g = [0; 4]$). Durch Rotation der Graphen von f und g um die x-Achse entsteht ein Hohlzylinder mit dem Volumen

$V_1 = V_{\text{außen}} - V_{\text{innen}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 - \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 20\pi$.

Differenzfunktion $d(x) = f(x) - g(x) = 1$.

Bei Rotation des Graphen von d um die x-Achse entsteht ein Zylinder mit dem Volumen

$V_2 = \pi \cdot 1^2 \cdot 4 = 4\pi \neq 20\pi = V_1$.

K1/5 **1** **a)** $\int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to-\infty} \int_{b}^{2} [x(x-2)\cdot e^x]\,dx$

$= \lim\limits_{b\to-\infty} [(x^2-4x+4)\cdot e^x]_b^2 = (4-4\cdot 2+4)\cdot e^2 - \left[(b^2-4b+4)\cdot e^b\right] = 0$

Der von G_f und der x-Achse im Intervall $]-\infty; 0]$ eingeschlossenen Fläche kann ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden, der betragsmäßig genauso groß ist wie der Inhalt der von G_f und der x-Achse eingeschlossenen Fläche im Intervall [0; 2].

b) 1 Die Aussage ist falsch, da der Graph G_f im Intervall [0; 2] unterhalb der x-Achse verläuft.

2 Die Aussage ist wahr, da die Integrandenfunktion nichtnegativ ist.

Der Term gibt den Flächeninhalt einer Kreisscheibe mit Radius f (x) an.

K1/5 **2** **a)** Damit der Graph der Funktion g das Fenster modellieren kann, muss der Graph eine nach unten geöffnete Parabel 4. Ordnung sein ($a < 0$), die die y-Achse im Positiven schneidet ($b > 0$).

b) Graph II kann nicht zu einer Stammfunktion F von f gehören, da $f(0) = 2$ gilt, aber die Steigung des Graphen II im Ursprung deutlich kleiner als 2 ist.

Graph III kann nicht zu einer Stammfunktion F von f gehören, da dieser für $x > 4$ fällt, aber der Graph von f oberhalb der x-Achse verläuft.

c) $A = F(4) - F(-4) \approx 2\cdot 4{,}8 = 9{,}6\,[m^2]$

d) Bei einer Fensterhöhe von 1,50 m gilt $b = 1{,}5$ und damit $g(x) = ax^4 + 1{,}5$.

Die Nullstellen von g sind $x_1 = -\sqrt[4]{\frac{1{,}5}{a}}$ und $x_2 = \sqrt[4]{\frac{1{,}5}{a}}$.

Der Inhalt der Fensterfläche beträgt $9{,}6 - 6 = 3{,}6\,[m^2]$.

Man bestimmt a nun so, dass gilt $2\cdot\int_0^{x_2} g(x)\,dx = 3{,}6$.

K5 **3** **a)** $A = \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{2a} (-x^2+2ax)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax^2\right]_0^{2a} = -\frac{1}{3}\cdot(2a)^3 + a\cdot(2a)^2 - 0 = -\frac{8}{3}a^3 + 4a^3 = \frac{4}{3}a^3$

b) Wegen der Nullstellen 0 und 2a und der Symmetrie der Parabel hat der Hochpunkt die Koordinaten $(a\,|\,f(a))$ mit $f(a) = -a^2 + 2a^2 = a^2$. Die Seitenlänge des Quadrats ist $f(a) = a^2$.

Daher gilt für den Flächeninhalt des Quadrats: $A = a^4 \Leftrightarrow a^4 = \frac{4}{3}a^3 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$.

K1/3 **4** **a)** $x_1 = 0$: 6.00 Uhr; $x_2 = \frac{8}{5} = 1{,}6$: 7.36 Uhr; $x_3 = 4$: 10.00 Uhr.

Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades, d. h. sie besitzt (inkl. Vielfachheiten) höchstens vier Nullstellen. Da x_3 eine doppelte Nullstelle ist, gibt es keine weiteren Nullstellen.

b) Um 8.00 Uhr ($x = 2$) ist die momentane Änderungsrate der Staulänge negativ, der Stau nimmt zu diesem Zeitpunkt also ab.

c) Gesucht ist der Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate der Staulänge maximal ist.

Extremstelle: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{4}x\right)\cdot(5x^2 - 16x + 8) \Rightarrow x_1 = 4$;

$5x^2 - 16x + 8 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4\cdot 5\cdot 8}}{2\cdot 5} = \frac{16 \pm 4\sqrt{6}}{10} = \frac{8 \pm 2\sqrt{6}}{5}$;

$x_2 = \frac{8 + 2\sqrt{6}}{5} \approx 2{,}58$; $x_3 = \frac{8 - 2\sqrt{6}}{5} \approx 0{,}62$

Aus dem Graphen ergibt sich, dass die Funktion f das Maximum bei x_3 besitzt.

$x_3\cdot 60 \approx 37{,}3$. Etwa um 6.37 Uhr nimmt die Staulänge am stärksten zu.

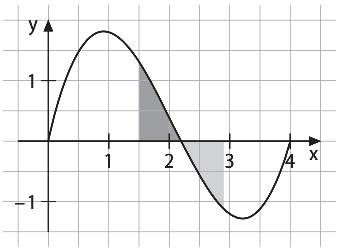
d) Es gilt $s(0) = 0$ und $s'(x) = -\frac{5}{16}x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 8x = f(x)$.

e) $s(4) = \left(\frac{4}{4}\right)^2\cdot(4-4)^3 = 0$

f) Zunahme der Staulänge: $s(2) - s(0{,}5) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot(4-2)^3 - \left(\frac{1}{8}\right)^2\cdot\left(4 - \frac{1}{2}\right)^3 = 2 - \frac{343}{512} = \frac{681}{512} \approx 1{,}33\,[km]$

Mittlere Änderungsrate: $\frac{s(2) - s(0{,}5)}{2 - 0{,}5} = \frac{227}{256} \approx 0{,}89\,\left[\frac{km}{h}\right]$

g) Die Zunahme des Staus nach 7.30 Uhr wird durch die dunkelgraue Fläche beschrieben.
Ab $x \approx 2,2$ verläuft der Graph unterhalb der x-Achse, die Staulänge nimmt ab. Der Stau hat wieder dieselbe Länge wie um 7.30 Uhr, wenn die dunkelgraue und die hellgraue Fläche den gleichen Inhalt haben. Dies ist für etwa $x \approx 2,9$ der Fall.



((Vakat-Seite))