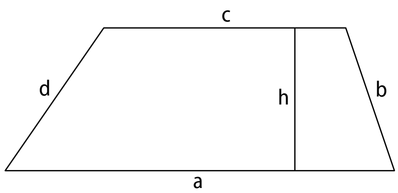
1 Startklar

Grundwissen

Mediencode 63033-01

Aufgabe	Ich kann schon …
1, 2	… Flächenberechnungen durchführen.
2	… Berechnungen an Körpern vornehmen.
3	… Stammfunktionen rechnerisch und grafisch ermitteln.
4	… Methoden der Differentialrechnung in Sachkontexten anwenden.

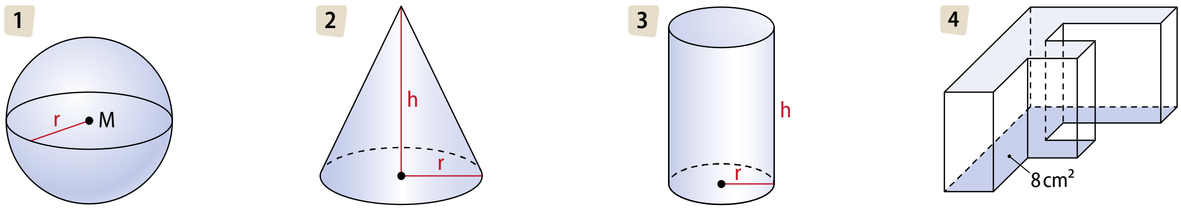
1 Die Querschnittsfläche eines Hochwasserdamms ist ein Trapez.



a) Begründen Sie anschaulich, warum der Flächeninhalt unabhängig von den Seitenlängen d und b ist.

b) Berechnen Sie das Volumen des auf 1 km Länge verbauten Materials ($a = 10$ m, $c = 3$ m, $h = 5$ m; Skizze nicht maßstäblich).

2 Gegeben sind die folgenden Körper (Skizzen nicht maßstäblich).

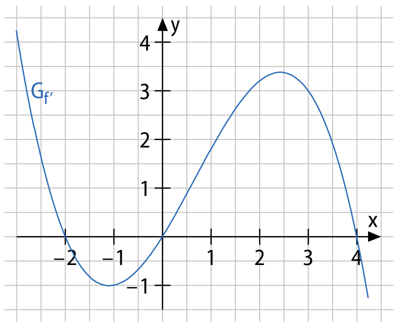


a) Begründen Sie, welche dieser Körper durch Rotation einer Fläche um eine Achse entstehen. Geben Sie die Lage der möglichen Drehachse(n) und die Form der Fläche an.

b) Geben Sie jeweils eine Formel zur Berechnung des Volumens des Körpers an.

c) Beschreiben Sie die Oberflächen der Körper 2 und 3 und berechnen Sie deren Inhalt für $r = 2$ und $h = 4$.

3 Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f. Entscheiden Sie jeweils begründet, ob die Aussage wahr oder falsch ist.



a) An der Stelle $x = 4$ hat der Graph von f ein lokales Minimum.

b) Die mittlere Änderungsrate von f' im Intervall $[-3; 0]$ beträgt etwa $-1{,}7$.

c) Der Graph von f'' verläuft durch den Ursprung.

d) Der Graph von f besitzt keinen Terrassenpunkt.

4 Das Profil der Schanze einer BMX-Bahn kann durch die Funktion $f\colon x \mapsto -\frac{5}{256}x^3 + \frac{15}{32}x^2 - 3x + 7$, $D_f = [0; 7]$, modelliert werden (x: horizontale Entfernung vom Startpunkt; alle Größen in Metern).

a) Bestimmen Sie einen Term der ersten Ableitung von f und geben Sie die anschauliche Bedeutung von $f'(0)$ im Sachzusammenhang an.

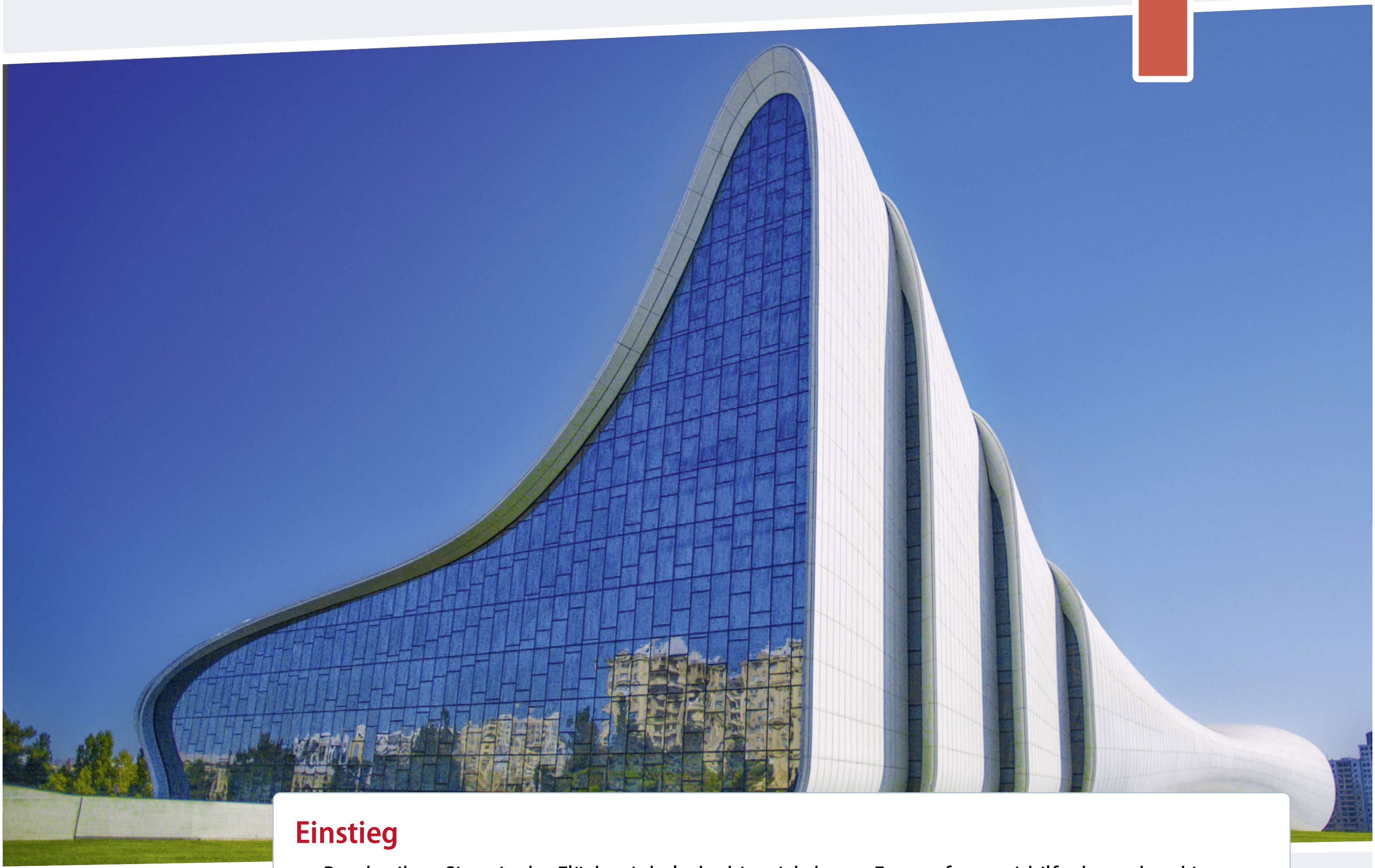
b) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass $f'(0) \cdot f'(7) < 0$ gilt, und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

c) Berechnen Sie (auf Zentimeter genau), um wie viel tiefer der tiefste Punkt gegenüber dem Startpunkt (bei $x = 0$) liegt, und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

d) Skizzieren Sie den Graphen G_f von f und ergänzen Sie den Verlauf des Graphen der Stammfunktion F von f, die durch den Ursprung geht. Begründen Sie Ihr Vorgehen und kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer DMS.

Flächeninhalt und bestimmtes Integral

1



Einstieg

- Beschreiben Sie, wie der Flächeninhalt der hier sichtbaren Fensterfront mithilfe der rechteckigen Scheiben abgeschätzt werden kann.
  Hinweis: Der in vielen Scheiben vorhandene Quersteg soll nicht berücksichtigt werden, so dass alle vollständigen Rechtecke die gleichen Maße haben.
- Einige Scheiben sind keine vollständigen Rechtecke (z. B. am oberen Rand). Begründen Sie, wie sich der berechnete Flächeninhalt zum tatsächlichen verhält, wenn diese Scheiben nicht bzw. als ganze Rechtecke berücksichtigt werden.
- Entwickeln Sie eine Strategie, wie die Abweichung des nach dieser Methode abgeschätzten Flächeninhalts vom tatsächlichen verringert werden kann.

Ausblick

Dieses Kapitel ist der Integralrechnung gewidmet, einer mathematischen Methode, die in verschiedenen Anwendungen eine große Rolle spielt, z. B. bei der Flächenberechnung und bei der Rekonstruktion eines Bestands aus der momentanen Änderungsrate.

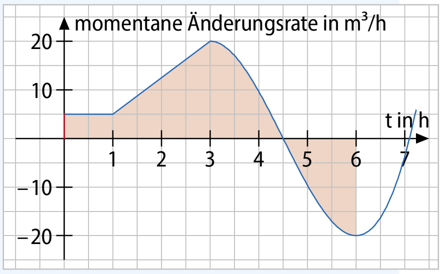
Historische Ecke

Mediencode 63033-02

1.1 Das bestimmte Integral

Entdecken

Die Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf der momentanen Änderungsrate des Wasservolumens in einem Becken, das einen Zufluss und einen Abfluss besitzt.



- Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen im Sachzusammenhang und geben Sie dabei begründet an, wann der Behälter den höchsten Füllstand erreicht.
- Bestimmen Sie die Änderung der Wassermenge näherungsweise in den ersten 4,5 Stunden und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.
- Erläutern Sie die Bedeutung der markierten Fläche im Sachkontext.

Verstehen

Ist f die momentane Änderungsrate einer Größe, so beschreibt die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall [a; b] die Gesamtänderung dieser Größe in [a; b].

*f heißt **Integrandenfunktion**, x ist die **Integrationsvariable**. a ist die **untere** und b die **obere Grenze** des Integrals.*

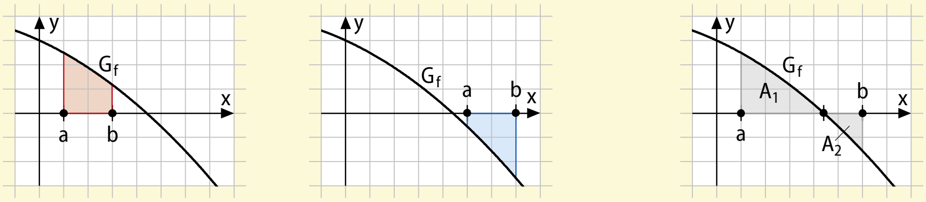
Auch nicht stetige Funktionen können integrierbar sein, siehe Vertiefung auf S. 15.

Ist f eine im Intervall [a; b] stetige Funktion, dann beschreibt das **bestimmte Integral** $\int_a^b f(x)\,dx$ die **Flächenbilanz** der vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall [a; b] begrenzten Fläche.

Für $f(x) \geq 0$ in [a; b] gilt $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

Für $f(x) \leq 0$ in [a; b] gilt $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

$$\int_a^b f(x)\,dx \begin{cases} > 0, \text{ wenn } A_1 > A_2 \\ = 0, \text{ wenn } A_1 = A_2 \\ < 0, \text{ wenn } A_1 < A_2 \end{cases}$$



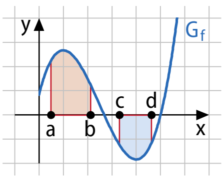
Daher gilt auch: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

Eigenschaften des bestimmten Integrals:

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ (**Intervalladditivität**)

Modelliert die Funktion f im Intervall [a; b] die momentane Änderungsrate eines Bestands B, so beschreibt das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ die Gesamtänderung von B im Intervall [a; b] und es gilt $B(b) = B(a) + \int_a^b f(x)\,dx$; B(a) ist der Anfangsbestand.

Beispiele



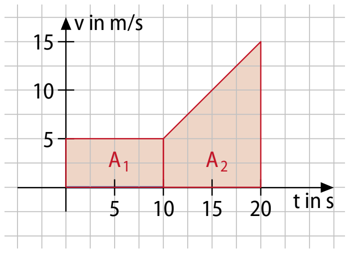
I. Erläutern Sie mithilfe der Abbildung in einem geeigneten Sachkontext, dass für die stetige Funktion f **1** $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ **2** $\int_c^d f(x)\,dx < 0$ gilt.

Lösung:

Beschreibt die Funktion f die momentane Änderungsrate von Wasser in einem Becken (in m^3/h), so läuft **1** für $f(x) > 0$ Wasser in das Becken hinein und **2** für $f(x) < 0$ Wasser aus dem Becken heraus. Die Gesamtänderung des Wassers im Becken ist daher **1** positiv **2** negativ. Gleiches gilt für das bestimmte Integral auf dem jeweils betrachteten Intervall.

II. Ein Fahrzeug fährt 10 s lang mit der konstanten Geschwindigkeit 5 m/s und beschleunigt dann gleichmäßig innerhalb von 10 s auf 15 m/s. Veranschaulichen Sie die Strecke, die das Fahrzeug innerhalb dieses Zeitraums zurückgelegt hat, grafisch und berechnen Sie diese.

Lösung:



1 Markieren Sie die Fläche zwischen dem Graphen und der t-Achse im Intervall [0; 20].

2 Zerlegen Sie sie in geeignete Teilflächen und berechnen Sie damit den Wert des Integrals.

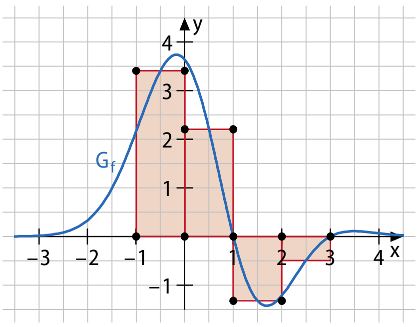
$\int_0^{20} v(t)\,dt = A_1 + A_2 = 5 \cdot 10 + \frac{5+15}{2} \cdot 10 = 150\ [\text{m}]$

Strategiewissen
Elementargeometrische Bestimmung von Integralen

III. Zeichnen Sie jeweils den Graphen G_f der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, mithilfe einer DMS und bestimmen Sie anhand von G_f näherungsweise den Wert des Integrals $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$.

a) $f(x) = 2(x-1)(x-3) \cdot e^{-0{,}5(x-1)^2}$ **b)** $f(x) = 0{,}25(x+1)^2(1-0{,}2x)$

Lösung:



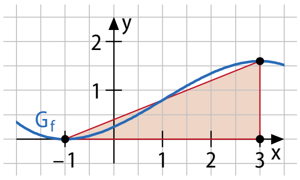
a) **1** Zerlegen Sie das Integrationsintervall [−1; 3] in vier gleich große Intervalle.

2 Nähern Sie in jedem Teilintervall die Fläche zwischen G_f und der x-Achse durch ein Rechteck mit der Breite 1 an. Nutzen Sie z. B. den Funktionswert in der Intervallmitte als Höhe.

3 Addieren Sie die Inhalte der Rechtecksflächen oberhalb der x-Achse und subtrahieren Sie jene unterhalb der x-Achse:

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx \approx 1 \cdot f(-0{,}5) + 1 \cdot f(0{,}5) - 1 \cdot f(1{,}5) - 1 \cdot f(2{,}5) \approx 3{,}4 + 2{,}2 - 1{,}3 - 0{,}5 = 3{,}8$

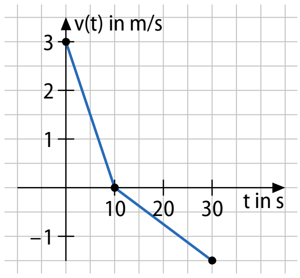
Strategiewissen
Näherungsweise Bestimmung von Integralen (zwei Arten)



b) Nähern Sie das Integral durch eine elementargeometrische Fläche an und berechnen Sie deren Inhalt:

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot f(3) = 2 \cdot 1{,}6 = 3{,}2$

IV. Mithilfe eines Brenners kann man erreichen, dass ein Heißluftballon steigt oder sinkt. Ein Ballon befindet sich auf 250 m Höhe, die Abbildung zeigt den Verlauf der Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit v in der nächsten halben Minute der Fahrt. Bestimmen Sie die Höhe h, auf der sich der Ballon nach einer halben Minute befindet, und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.



Lösung:

Berechnen Sie den Wert des Terms mithilfe der Formel $B(b) = B(a) + \int_a^b f(x)\,dx$:

$h(30) = h(0) + \int_0^{30} v(t)\,dt = h(0) + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 1{,}5$

$= h(0) + 15 - 15 = h(0) = 250\ [\text{m}]$

Der Ballon befindet sich zum Zeitpunkt 30 s auf derselben Höhe wie zu Beginn des Beobachtungszeitraums, da das Integral $\int_0^{30} v(t)\,dt = 0$ ist.

Strategiewissen
Bestimmen eines Bestands aus der Änderungsrate

Nachgefragt

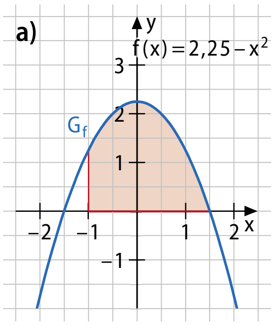
- Geben Sie begründet den Wert des Integrals $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx$; $a \in \mathbb{R}^+$, an, wenn der Graph der stetigen Funktion f punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.
- Erläutern Sie, dass $\int\limits_{a}^{b} f(t)\,dt$ im Allgemeinen nicht den Bestand zum Zeitpunkt b angibt, wenn f die zugehörige momentane Änderungsrate ist.

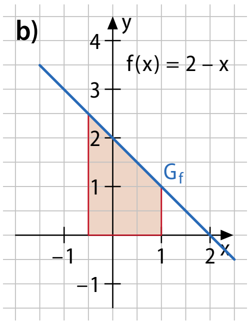
Aufgaben

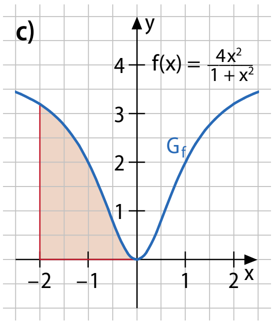
1 Veranschaulichen Sie jeweils das Integral grafisch und berechnen Sie seinen Wert.

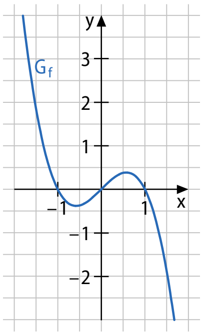
a) $\int\limits_{1}^{3} (2x + 1)\,dx$ **b)** $\int\limits_{-1}^{2} (5 - 0{,}5x)\,dx$ **c)** $\int\limits_{0}^{4} 3\,dx$ **d)** $\int\limits_{-4}^{-1} \left(2 + \frac{1}{3}x\right)dx$

2 Drücken Sie jeweils den Inhalt des getönten Flächenstücks durch ein Integral aus.





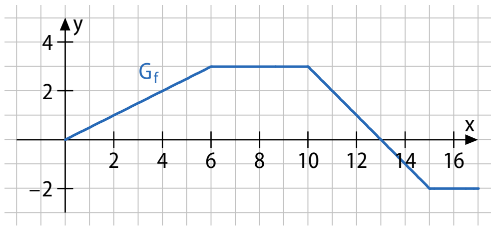




3 Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der in ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion f. Er ist punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Geben Sie jeweils an, ob der Wert des Integrals kleiner als null, gleich null oder größer als null ist.

a) $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$ **b)** $\int\limits_{-1}^{1{,}5} f(x)\,dx$ **c)** $\int\limits_{-1{,}5}^{1} f(x)\,dx$ **d)** $\int\limits_{a}^{1} f(x)\,dx,\ -1{,}5 \le a < -1$

4 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f. Ermitteln Sie $\int\limits_{0}^{16} f(x)\,dx$ und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

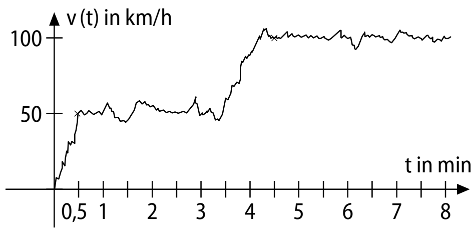


5 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto 2 - \ln(2x^2 + 1)$, $D_f = \mathbb{R}$, mithilfe einer DMS und begründen Sie, dass …

a) $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx > \int\limits_{0}^{3} f(x)\,dx$ gilt.

b) es einen Wert $a > 0$ gibt, so dass $\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$ gilt.

6 Der Fahrtenschreiber eines Lkw zeichnet die Geschwindigkeit auf. Bestimmen Sie näherungsweise die Strecke, die der Lkw in den ersten 8 Minuten seiner Fahrt zurückgelegt hat, und erläutern Sie Ihr Vorgehen. Beachten Sie die Einheiten.

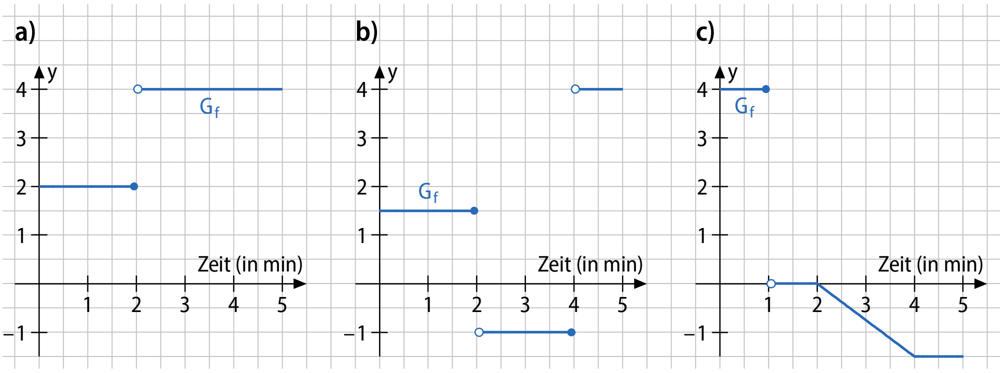


7 Geben Sie jeweils begründet an, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) $\int_{-2}^{4} 2\,dx = 8$ **b)** $\int_{0}^{4} -2\,dx = 8$ **c)** $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = 0$ **d)** $\int_{-2}^{4} 0\,dx = 6$

8 In den Diagrammen ist jeweils die momentane Änderungsrate f einer Größe pro Minute dargestellt.
Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{0}^{5} f(t)\,dt$ und interpretieren Sie das Ergebnis in einem geeigneten Sachkontext. Präsentieren Sie Ihre Überlegungen in einer Kleingruppe.

Derartige Treppenfunktionen sind zwar nicht stetig, aber integrierbar.



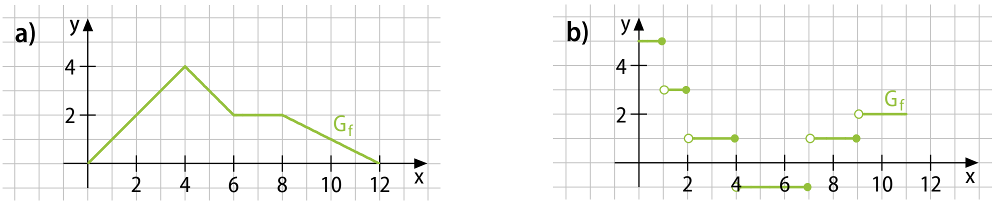
9 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2-x^2}{(x+2)^2}$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$; ihr Graph ist G_f.

a) Geben Sie die Nullstellen von f sowie Gleichungen aller Asymptoten von G_f an.

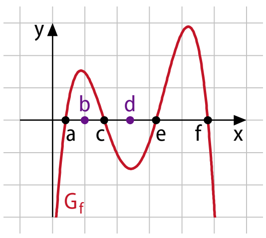
b) Zeichnen Sie den Graphen von f mithilfe einer DMS und bestimmen Sie näherungsweise den Wert des Integrals $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

10 Ein ICE beschleunigt auf einem vierminütigen Abschnitt seiner Fahrt von 150 km/h auf 270 km/h. Die Funktion $f: x \mapsto -\frac{15}{4}x^3 + \frac{45}{2}x^2 + 150$ modelliert die Geschwindigkeit in km/h (x: Zeit in Minuten) während der Beschleunigung. Zeichnen Sie den Graphen von f ggf. mithilfe einer DMS und bestimmen Sie näherungsweise die Länge der Strecke, die der Zug innerhalb des betrachteten Zeitraums zurücklegt.

11 Geben Sie jeweils drei verschiedene Intervalle [a; b] an, so dass $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = 8$ gilt.



12 Ordnen Sie die Integrale anhand des abgebildeten Graphen der Funktion f der Größe nach. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis in einer Kleingruppe.



$I_1 = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ $I_2 = \int_{a}^{c} f(x)\,dx$ $I_3 = \int_{a}^{d} f(x)\,dx$

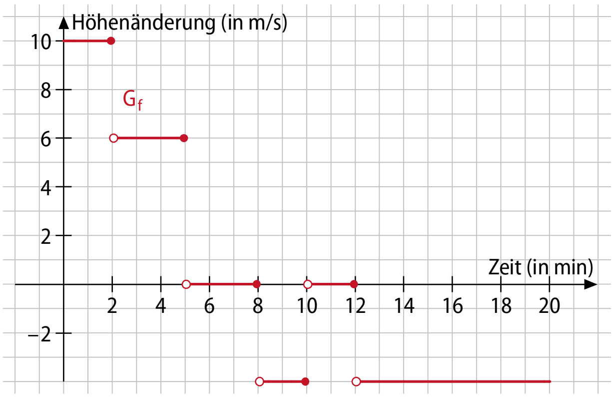
$I_4 = \int_{a}^{e} f(x)\,dx$ $I_5 = \int_{c}^{e} f(x)\,dx$ $I_6 = \int_{e}^{f} f(x)\,dx$

13 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto (1 - x^2)\,e^{-x}$. Zeichnen Sie den Graphen von f z. B. mithilfe einer DMS und ermitteln Sie anhand des Graphen einen Näherungswert für das Integral $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$.

14 Der Graph zeigt die momentane Änderung der Flughöhe eines Flugzeugs (in m/s).

a) Beschreiben Sie die vertikale Bewegung des Flugzeugs in den einzelnen Zeitabschnitten.

b) Deuten Sie das Integral $\int_{0}^{5} f(t)\,dt$ im Sachkontext.



Energiefluss: Leistung bzw. zeitliche Änderungsrate der Energie

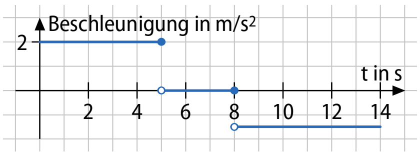
15 Für $4 \le x \le 20$ beschreibt die Funktion p mit $p(x) = \frac{40}{(x-12)^2 + 4}$ modellhaft die zeitliche Entwicklung des Energieflusses einer Photovoltaikanlage auf einem Hausdach an einem bestimmten Tag. Dabei ist x die seit Mitternacht vergangene Zeit in Stunden und p (x) der Energiefluss in kWh pro h. G_p ist der Graph von p.

a) Zeichnen Sie G_p mithilfe einer DMS und beurteilen Sie die Modellierung.

b) Beschreiben Sie, wie G_p aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h: x \mapsto \frac{5}{x^2 + 4}$ schrittweise hervorgeht, und begründen Sie damit, dass G_p bezüglich der Geraden mit der Gleichung $x = 12$ symmetrisch ist.

c) Die von der Anlage produzierte elektrische Energie wird vollständig in das Stromnetz eingespeist. Der Hauseigentümer erhält dafür eine Vergütung von 10 Cent pro Kilowattstunde (kWh). Die in [4; 20] definierte Funktion $x \mapsto E(x)$ gibt die elektrische Energie in kWh an, die die Anlage am betrachteten Tag von 4.00 Uhr bis x Stunden nach Mitternacht in das Stromnetz einspeist. Bestimmen Sie mithilfe von G_p einen Näherungswert für die Vergütung, die man für die von 10.00 Uhr bis 14.00 Uhr eingespeiste elektrische Energie erhält.

16 Ein Elektroauto kann mit konstanter Beschleunigung anfahren. Im t-a-Diagramm ist die Beschleunigung und Verzögerung (negative Beschleunigung) einer kurzen Fahrt zu sehen.



a) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung jeweils den Wert des Integrals.

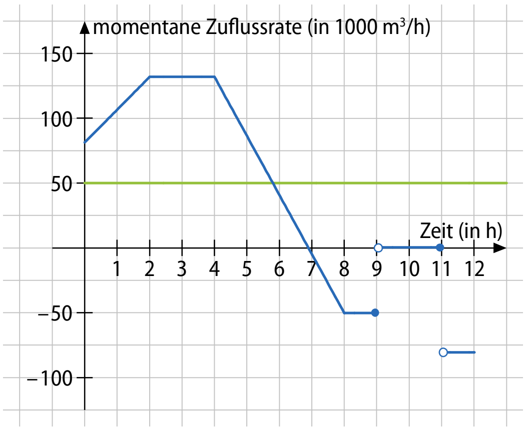
1 $\int_{0}^{5} a(t)\,dt$ **2** $\int_{5}^{8} a(t)\,dt$ **3** $\int_{8}^{14} a(t)\,dt$

b) Zeichnen Sie mithilfe der Ergebnisse aus Teilaufgabe a) das t-v-Diagramm dieser Bewegung für den Fall, dass das Fahrzeug zu Beginn in Ruhe ist.

c) Beschreiben Sie die sich ergebenden Veränderungen im Graphen aus Teilaufgabe b), wenn das Fahrzeug zu Beginn eine Geschwindigkeit von 5 m/s hat.

d) Recherchieren Sie die Entwicklung der Zulassungszahlen von E-Autos und finden Sie Ursachen für diese.

17 Ein Pumpspeicherkraftwerk liegt zwischen zwei verschieden hoch gelegenen Seen. In Zeiträumen erhöhten Strombedarfs fließt Wasser vom oberen See durch die Turbinen nach unten und es wird Strom erzeugt. Wird wenig Energie benötigt, arbeitet das Kraftwerk als Pumpstation und das Wasser wird vom unteren See wieder nach oben gepumpt.
Der blaue Graph zeigt die momentane Zu- bzw. Abflussrate (in $1000\,\frac{m^3}{h}$) von Wasser im oberen See innerhalb von 12 Stunden.



a) Geben Sie an, wann das meiste Wasser durch die Turbinen fließt.

b) Begründen Sie, zu welchem Zeitpunkt sich das meiste Wasser im oberen See befindet und warum mit den bisherigen Angaben die absolute Wassermenge im See nicht ermittelt werden kann.

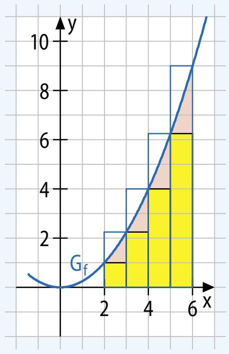
c) Skizzieren Sie den Graphen für die Wassermenge im oberen See, wenn dieser zu Beginn leer war.

d) Bearbeiten Sie die Teilaufgaben a) bis c) erneut. Berücksichtigen Sie dabei, dass der obere See einen zusätzlichen Wasserzufluss durch Regen erhält (grüner Graph der Abbildung). Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

Vertiefung

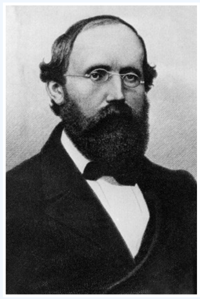
Das Riemann-Integral

Integrale lassen sich näherungsweise auch mithilfe von Rechtecken („Streifen") bestimmen.
Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^2$, $D_f = \mathbb{R}$.
Es gilt $13{,}5 \leq \int_2^6 f(x)\,dx \leq 21{,}5$ wegen der folgenden Abschätzungen:



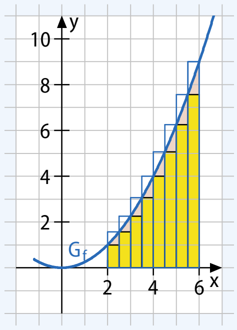
1 „Untersumme" $s_{gelb} = 1 \cdot [f(2) + f(3) + f(4) + f(5)]$
$= 1 + 2{,}25 + 4 + 6{,}25 = 13{,}5$

2 „Obersumme" $S_{blau} = 1 \cdot [f(3) + f(4) + f(5) + f(6)]$
$= 2{,}25 + 4 + 6{,}25 + 9 = 21{,}5$


Bernhard Riemann (1826 – 1866)

- Erläutern Sie anhand der Abbildung das Vorgehen, um einen Näherungswert für das Integral $\int_2^6 \frac{1}{4}x^2\,dx$ zu erhalten, sowie die Begriffe „Untersumme" und „Obersumme".
- Ermitteln Sie auf dieselbe Weise einen Näherungswert für das Integral $\int_0^4 x^3\,dx$.

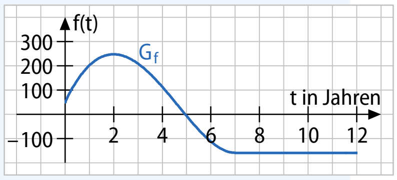
Wenn man die Anzahl der Streifen immer weiter erhöht und damit deren Breite verkleinert, nähert sich die Obersumme bzw. die Untersumme immer besser dem Wert des Integrals an.
Nach dem Mathematiker Bernhard Riemann wird eine Funktion „Riemann-integrierbar" über einem Intervall [a; b] ihres Definitionsbereichs genannt, wenn die Ober- bzw. die Untersumme für eine immer feiner werdende Unterteilung des Intervalls [a; b] gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergieren. Dieser Grenzwert heißt dann das Riemann-Integral $\int_a^b f(x)\,dx$.



1.2 Die Integralfunktion

Entdecken

In einer Prognose wird die lokale zeitliche Änderungsrate f der Bevölkerung einer Stadt (in Personen/Jahr) für die nächsten 12 Jahre durch den abgebildeten Graphen modelliert.



- Bestimmen Sie näherungsweise die prognostizierte Änderung der Bevölkerung in verschiedenen Zeitintervallen.
- Interpretieren Sie das Integral $\int_0^b f(t)\,dt,\ 0 \le b \le 12$, bei Veränderung der Werte von b **1** grafisch **2** im Sachkontext und diskutieren Sie Ihre Ergebnisse in einer Kleingruppe.

Verstehen

Fixiert man bei einem Integral die untere Integrationsgrenze und variiert die obere Integrationsgrenze, so erhält man eine neue Funktion, deren Variable die obere Integrationsgrenze ist.

Ist die Funktion f stetig in einem Intervall I der Definitionsmenge D_f und $a \in I$, dann heißt die Funktion F_a mit

$$\mathbf{F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt},\ D_{F_a} = I,$$

die jedem Wert von $x \in I$ den Wert des Integrals zuordnet, **Integralfunktion** von f mit der unteren Integrationsgrenze a.

Es gilt: $\mathbf{F_a(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0}$ und $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt = -\int_x^a f(t)\,dt$ für alle $a \in I$.

Beispiele

I. Gegeben sind die Funktion $f\colon x \mapsto 2 - \frac{1}{2}x$ sowie die Integralfunktion $F_{-1}\colon x \mapsto \int_{-1}^x f(t)\,dt$, $D_f = D_{F_{-1}} = \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie $F_{-1}(2)$ sowie $F_{-1}(5)$ und interpretieren Sie die Werte geometrisch.

b) Begründen Sie, dass $\int_a^x f(t)\,dt = -\int_x^a f(t)\,dt$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt, und ermitteln Sie $F_{-1}(-3)$.

Lösung:

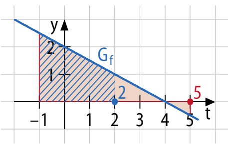
Strategiewissen
Funktionswerte einer Integralfunktion

a) **1** Setzen Sie den gegebenen x-Wert als obere Integrationsgrenze und den Term von f als Integrandenfunktion ein:

$$F_{-1}(2) = \int_{-1}^{2} f(t)\,dt = \int_{-1}^{2}\left(2 - \tfrac{1}{2}t\right)dt \qquad F_{-1}(5) = \int_{-1}^{5} f(t)\,dt = \int_{-1}^{5}\left(2 - \tfrac{1}{2}t\right)dt$$

2 Bestimmen Sie den Wert des Integrals mit elementargeometrischen Überlegungen:

$$F_{-1}(2) = \frac{f(-1) + f(2)}{2}\cdot 3 = \frac{21}{4} \qquad F_{-1}(5) = \frac{1}{2}\cdot 2{,}5\cdot 5 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = 6$$



$F_{-1}(2)$ ist der Inhalt des blau schraffierten Trapezes.

b) Aufgrund der Eigenschaften des bestimmten Integrals gilt $F_a(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$.

Andererseits gilt wegen der Intervalladditivität $\int_a^a f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt$, also

$\int_a^x f(t)\,dt = -\int_x^a f(t)\,dt$. Damit gilt

$$F_{-1}(-3) = \int_{-1}^{-3} f(t)\,dt = -\int_{-3}^{-1} f(t)\,dt = -\frac{f(-3) + f(-1)}{2}\cdot 2 = -(3{,}5 + 2{,}5) = -6.$$

Das Vertauschen der Integrationsgrenzen ändert das Vorzeichen des Werts des Integrals.

II. Gegeben sind die Funktion f mit $f\colon x \mapsto 0{,}3\,(x-3)\,(x-6)$ sowie die Integralfunktion F_1 mit $F_1(x) = \int\limits_1^x f(t)\,dt$ $(D_f = D_{F_1} = \mathbb{R})$.

a) Zeichnen Sie die Graphen von f und F_1 in einer DMS.

b) Begründen Sie mithilfe der Graphen aus Teilaufgabe a), dass die Funktion F_1 an der Stelle $x = 3$ ein lokales Maximum besitzt.

Lösung:

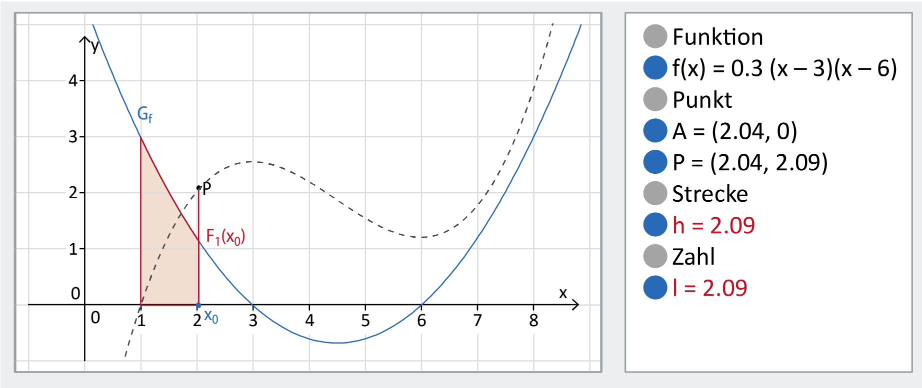
a) **1** Zeichnen Sie den Graphen von f in einer DMS. Markieren Sie einen Punkt A auf der x-Achse und beschriften Sie ihn mit „x_0“.

2 Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int\limits_1^x f(t)\,dt$: Nutzen Sie dafür z. B. den Befehl *Integral(…)* durch Eingabe von I = *Integral(f, 1, x (A))*.

3 Zeichnen Sie den Punkt P=(x (A), I) ein: Die y-Koordinate von P stellt den Funktionswert der Integralfunktion an der gewählten Stelle x_0 dar.

4 Lassen Sie die Spur von P zeichnen, während Sie A auf der x-Achse bewegen.

Strategiewissen
Zeichnen des Graphen der Integralfunktion mithilfe einer DMS



b) Für $x < 3$ ist f (x) positiv, d. h. die Flächenbilanz im Intervall $[1; x]$ und damit $F_1(x)$ nehmen für $x < 3$ mit wachsendem x zu.
Für $3 < x < 6$ ist f (x) negativ, d. h. die Flächenbilanz im Intervall $[1; x]$ und damit $F_1(x)$ nehmen für $3 < x < 6$ mit wachsendem x ab. Daher besitzt die Funktion F_1 an der Stelle $x = 3$ ein lokales Maximum.

III. Die in $\mathbb{R}_0^+$ definierte Funktion f beschreibt die momentane Änderungsrate der Wassermenge in einem Behälter (in ℓ/h), der zu Beobachtungsbeginn ($t = 0$; Zeit in h) die Wassermenge V (0) enthielt. Interpretieren Sie den Term $V(t) = V(0) + \int\limits_0^t f(x)\,dx$ im Sachkontext.

Lösung:
Das Integral $\int\limits_0^t f(x)\,dx$ beschreibt die Gesamtänderung der Wassermenge im Behälter (in ℓ) im Zeitintervall [0; t]. Enthält der Behälter zu Beginn die Wassermenge V (0), so stellt der Term V (t) die zum Zeitpunkt t vorhandene Wassermenge (in ℓ) im Behälter dar.

Nachgefragt

- Begründen oder widerlegen Sie: Jede Integralfunktion hat mindestens eine Nullstelle.
- Begründen oder widerlegen Sie: An Stellen, an denen f zunehmend ist, ist auch jede Integralfunktion von f zunehmend.

Aufgaben

1 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto f(x)$. Zeichnen Sie den Graphen von f und berechnen Sie jeweils **1** $F_0(-3)$ **2** $F_0(1)$ **3** $F_0(2)$ der Integralfunktion F_0 mit $F_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $D_f = D_{F_0} = \mathbb{R}$.

a) $f(x) = 3$ **b)** $f(x) = -2$ **c)** $f(x) = 1 + \frac{1}{4}x$ **d)** $f(x) = 2 - x$

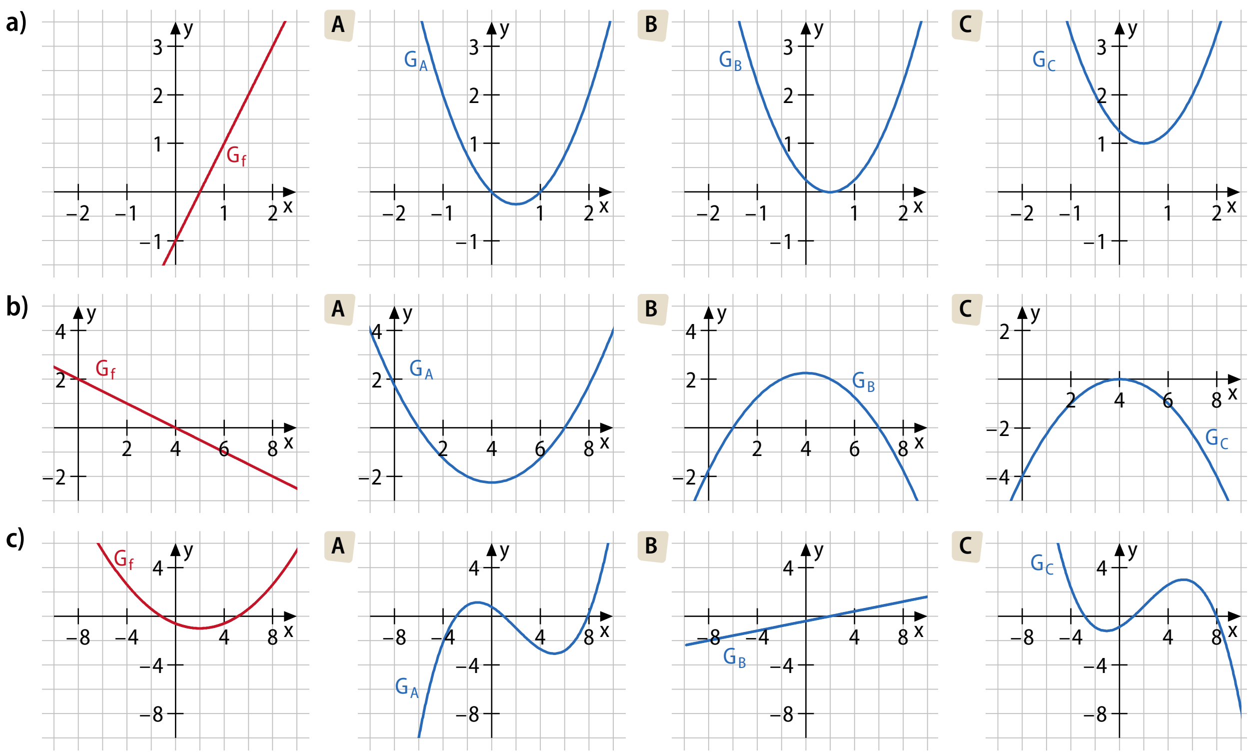
2 Zeichnen Sie jeweils die Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto f(x)$ und der Integralfunktion F_2 mit $F_2(x) = \int_2^x f(t)\,dt$, $D_f = D_{F_2} = \mathbb{R}$, mithilfe einer DMS. Geben Sie die Nullstellen der Funktion F_2 an und interpretieren Sie diese geometrisch.

a) $f(x) = 3 - x$ **b)** $f(x) = 2x - 8$ **c)** $f(x) = e^x(1 - x)$

d) $f(x) = 4 - 2x$ **e)** $f(x) = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5}$ **f)** $f(x) = e^x(x^2 - 2x)$

g) $f(x) = 3x^2 - 6x$ **h)** $f(x) = e^x(x^2 + x - 3)$ **i)** $f(x) = \frac{10}{e^x}(5x - x^2 - 5)$

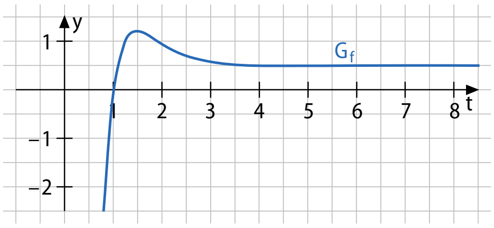
3 Genau eine der Abbildungen **A** bis **C** zeigt jeweils den Graphen der Integralfunktion F_1 der Funktion f. Geben Sie den passenden Graphen begründet an und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer DMS.



4 Der momentane Schadstoffausstoß einer Betriebsanlage (in g/h) lässt sich durch die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{4x}{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}_0^+$, modellhaft beschreiben (x: Zeit in h). Zeichnen Sie den Graphen von f sowie den Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Integralfunktion $F_0\colon x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ mithilfe einer DMS. Geben Sie Zusammenhänge zwischen den beiden Graphen an und interpretieren Sie diese im Sachkontext. Präsentieren Sie Ihre Ergebnisse in einer Kleingruppe.

5 Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $[0{,}8; +\infty[$ definierten Funktion f. Betrachtet wird zudem die in $[0{,}8; +\infty[$ definierte Integralfunktion $J\colon x \mapsto \int_2^x f(t)\,dt$.

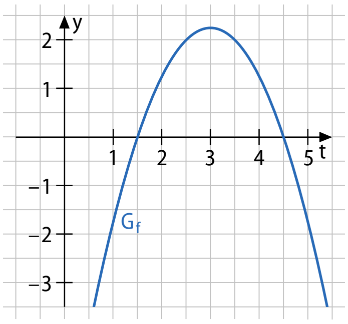
Abituraufgabe



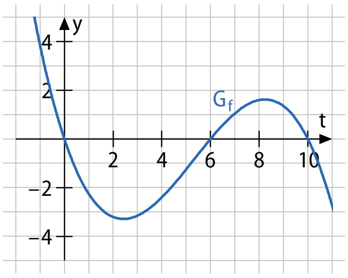
Begründen Sie mithilfe der Abbildung, dass $J(1) \approx -1$ gilt, und geben Sie einen Näherungswert für den Funktionswert $J(4{,}5)$ an.
Skizzieren Sie den Graphen von J in Ihren Unterlagen.

6 Die Abbildung zeigt eine nach unten geöffnete Parabel, die zu einer Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ gehört. Der Scheitel der Parabel hat die x-Koordinate 3. Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F\colon x \mapsto \int_3^x f(t)\,dt$.
Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von F an und begründen Sie Ihre Angabe ohne Rechnung.

Abituraufgabe



7 Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ wird die Integralfunktion F_a mit $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ betrachtet.
Begründen Sie im Folgenden Ihre Antworten jeweils mithilfe der Abbildung.



a) Geben Sie Lage und Art der Extremstellen von F_0 an.
b) Begründen Sie, dass $F_0(x) \le 0$ in ganz $\mathbb{R}$ gilt.
c) Begründen oder widerlegen Sie: Es gilt $F_a(x) \le 0$ in ganz $\mathbb{R}$ für jeden Wert von a.
d) Begründen Sie: Die x-Werte und die Art der Extremstellen von F_2 stimmen mit denen von F_0 überein. Geben Sie an, wie sich die y-Werte dieser Stellen ändern, und welche Rolle dabei der Wert $F_0(2)$ spielt.
e) Skizzieren Sie näherungsweise den Graphen von F_6.

8 Die momentane Änderungsrate der Wassermenge in einem Becken (in ℓ/min) wird durch die abschnittsweise definierte Funktion f mit

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{für } 0 \le t < 12 \\ 6 & \text{für } 12 \le t < 30 \\ -2 & \text{für } t \ge 30 \end{cases}$$

modelliert (t in min).

a) Zeichnen Sie den Graphen von f sowie den der Integralfunktion $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ mithilfe einer DMS und interpretieren Sie die Verläufe im Sachkontext.
b) Begründen Sie, dass der Wert der Funktion F im Allgemeinen nicht dem Wasservolumen im Becken zum Zeitpunkt t entspricht. Ermitteln Sie den Beckeninhalt zur Zeit $t = 0$, wenn gilt: $F(15) = 54$.
c) Ermitteln Sie anhand von G_f einen Zeitpunkt, zu dem das Becken wieder dieselbe Menge an Wasser enthält wie zu Beginn.

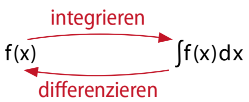
Entdecken

Die momentane Änderungsrate der Wassermenge in einem Stausee kann durch die Funktion $f(t) = \frac{t}{10}(10 - 0{,}2\,t) - 5$ modelliert werden $\left(0 \le t \le 50 \text{ in h}, f(t) \text{ in } 1000\,\frac{m^3}{h}\right)$.

- Zeichnen Sie die Graphen der Funktion f sowie der Integralfunktion $F_0(t) = \int\limits_0^t f(x)\,dx$ mithilfe einer DMS.
- Diskutieren Sie Zusammenhänge zwischen den beiden Graphen in einer Kleingruppe und begründen Sie diese grafisch und im Sachkontext.
- Geben Sie eine integralfreie Darstellung des Terms $F_0(t)$ an und überprüfen Sie diese mithilfe der DMS.

Verstehen

Integrale lassen sich einfach berechnen, wenn man eine Stammfunktion der Integrandenfunktion kennt.



Die Differentiation ist die Umkehrung der Integration.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI):

Jede Integralfunktion einer stetigen Funktion f ist eine **Stammfunktion** von f.

Aus $F_a(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$; $a, x \in D_f$, folgt $\mathbf{F'_a(x) = f(x)}$.

Die Ableitung jeder Integralfunktion ist die Integrandenfunktion.

Mit einer Stammfunktion F von f gilt: $\mathbf{\int\limits_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)}$.

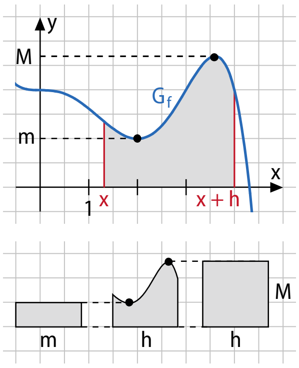
Besondere Integrationsregeln ($c \in \mathbb{R}$):

- $\int (f'(x) \cdot e^{f(x)})\,dx = e^{f(x)} + c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$
- $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + c$; $F'(x) = f(x)$, $a \neq 0$

*Das **unbestimmte Integral** $\int f(x)\,dx$ beschreibt die Menge aller Stammfunktionen von f.*

Begründungen

I. Begründen Sie den HDI mithilfe des abgebildeten Graphen der stetigen Funktion f.



Lösung:

Der Ableitungsterm $F'_a(x)$ von F_a ist gegeben durch $F'_a(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$.

Dabei entspricht $F_a(x+h) - F_a(x)$ dem Inhalt der grauen Fläche in der Abbildung.

Wegen der Intervalladditivität des bestimmten Integrals gilt:

$F_a(x+h) - F_a(x) = \int\limits_a^{x+h} f(t)\,dt - \int\limits_a^x f(t)\,dt = \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt$ (*)

Im Intervall $[x; x+h]$ $(h > 0)$ lässt sich das Integral mithilfe des Minimums m und des Maximums M der Funktion f durch die Inhalte der Rechtecke (s. Abbildung) abschätzen:

$m \cdot h \le \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt \le M \cdot h$

Daraus ergibt sich mit (*) und der Division durch h: $m \le \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \le M$

Für $h \to 0^+$ gilt $m \to f(x)$ und $M \to f(x)$ und damit: $f(x) \le \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \le f(x)$

Der Grenzübergang für $h \to 0^-$ führt zum gleichen Ergebnis. Daher gilt: $F'_a(x) = f(x)$.

II. Begründen Sie, dass $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ gilt; F ist eine beliebige Stammfunktion von f.

Lösung:

Die Terme zweier Stammfunktionen von f unterscheiden sich nur um eine additive Konstante $c \in \mathbb{R}$, d. h. es gilt: $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c$. Daraus ergibt sich: $c = \int_a^x f(t)\,dt - F(x)$.

Zudem gilt: $\int_a^a f(t)\,dt = 0$, woraus $c = -F(a)$ und damit $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$ bzw.

insbesondere $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ folgt.

Beispiele

I. Berechnen Sie die bestimmten Integrale.

a) $\int_1^2 (x^2 - x)\,dx$ **b)** $\int_0^\pi \sin x\,dx$

Lösung:

a) **1** Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Integrandenfunktion f. Nutzen Sie dafür die Schreibweise in eckigen Klammern:

$$\int_1^2 (x^2 - x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

2 Setzen Sie zunächst die obere, dann die untere Grenze in die Stammfunktion ein:

$$\int_1^2 (x^2 - x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{2} \cdot 1^2\right)$$

$$= \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}$$

Strategiewissen
Berechnen von Integralen mithilfe von Stammfunktionen

Beachten Sie die „Minusklammer".

b) $\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$

II. **a)** Begründen Sie, dass $F(x) = e^{f(x)}$ der Term einer Stammfunktion der Funktion $x \mapsto f'(x) \cdot e^{f(x)}$ ist, wenn f eine differenzierbare Funktion ist und $D_F = D_f$ gilt.

b) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 2x \cdot e^{x^2} dx$.

Lösung:

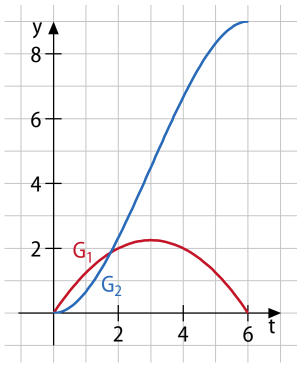
a) Für die Ableitung von F(x) gilt nach der Kettenregel: $F'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)}$.

b) $\int_0^1 2x \cdot e^{x^2} dx = \left[e^{x^2}\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

III. Die Abbildung veranschaulicht die Geschwindigkeit v (in m/s) des Wagens einer Achterbahn sowie die von ihm zurückgelegte Strecke s (in m) während 6 Sekunden seiner Fahrt.

a) Geben Sie begründet an, welcher der beiden Graphen die Geschwindigkeit modelliert.

b) Interpretieren Sie die Gleichung $s(6) = \int_0^6 v(t)\,dt$ grafisch und im Sachkontext.



Lösung:

a) Der Graph G_2 zeigt nicht die Ableitung der Funktion zu G_1, da G_2 an der Extremstelle von G_1 bei etwa 3 nicht die x-Achse schneidet. Daher gilt: G_1 ist der Ableitungsgraph und gehört damit zur Funktion v.

b) Das Integral $\int_0^6 v(t)\,dt$ beschreibt die Gesamtänderung, also die im Intervall [0; 6] zurückgelegte Strecke, d. h. s(6). Grafisch lässt es sich als Flächenbilanz der von G_1 und der t-Achse eingeschlossenen Fläche deuten.

Nachgefragt

- Formulieren Sie die Umkehrung des Satzes „Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion." und beurteilen Sie seine Richtigkeit.
- Beurteilen Sie: Jede Funktion F, die eine Nullstelle besitzt, ist Stammfunktion einer Funktion f.

Aufgaben

1 Überprüfen Sie jeweils, ob die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist. Falls ja, entscheiden Sie begründet, ob F auch eine Integralfunktion von f sein kann.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
F (x)	$2+\frac{1}{4}x^4$	$2-\cos x$	$(x+2)\,e^{2x}+1$	$\ln(x^2+4)$	$1-\sqrt{2x^2+4}$	$e^{2x}+e^{-2x}$
f (x)	x^3	$\sin x$	$(2x+5)\,e^{2x}$	$\frac{2x}{x^2+1}$	$-\frac{4x}{\sqrt{2x^2+4}}$	$2(e^{2x}+e^{-2x})$

2 Berechnen Sie jeweils den Wert des bestimmten Integrals.

Hinweis: siehe Beispiel I auf Seite 21.

a) $\int_0^3 (5x^2-x)\,dx$ b) $\int_0^{10} 4\,dx$ c) $\int_1^2 \left(e^x+\frac{1}{x}\right)dx$ d) $\int_0^9 (x^3-\sqrt{x})\,dx$

e) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left(\frac{1}{x^2}-\cos x\right)dx$ f) $\int_0^2 3x^2e^{x^3}\,dx$ g) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx$ h) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin x}\cdot\cos x\,dx$

3 a) Begründen Sie, dass $F(x) = \ln|f(x)|$ der Term einer Stammfunktion der Funktion $x \mapsto \frac{f'(x)}{f(x)}$ ist.

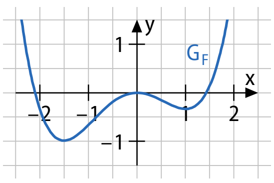
b) Berechnen Sie jeweils den Wert des bestimmten Integrals.

1 $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ **2** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$ **3** $\int_1^5 \frac{3x^2}{x^3+8}\,dx$ **4** $\int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$

4 a) Begründen Sie, dass $\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)$ der Term einer Stammfunktion der Funktion $x \mapsto f(ax+b)$ ist, wenn F eine Stammfunktion von f und $a \neq 0$ ist.

b) Berechnen Sie jeweils den Wert des bestimmten Integrals.

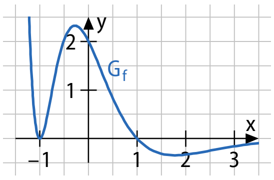
1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx$ **2** $\int_{-2}^{6} e^{-x}\,dx$ **3** $\int_{-1}^{1} e^{2x+3}\,dx$ **4** $\int_{-\frac{1}{\pi}}^{0} \cos(\pi x)\,dx$



5 Gegeben ist der Graph einer Integralfunktion F einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades. Beurteilen Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) f hat genau drei Nullstellen. b) Im Intervall $[0; 1]$ besitzt G_f einen Tiefpunkt.

c) $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx < 0$ d) $f(0{,}5) > f(-2)$ e) Jede Stammfunktion von f ist Integralfunktion.



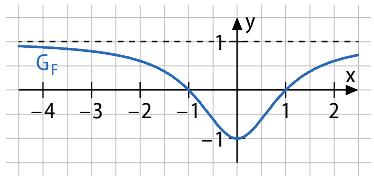
6 Gegeben ist der Graph einer Funktion f sowie die Integralfunktion F_1 mit $F_1(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, $D_f = D_{F_1} = \mathbb{R}$.

a) Geben Sie begründet Intervalle, in denen F_1 **1** streng monoton zunehmend **2** abnehmend ist, sowie die Extremstellen des Graphen von F_1 an.

b) Begründen Sie, dass $F_1(0)$ negativ ist.

c) Skizzieren Sie den Graphen von F_1 und besprechen Sie Ihre Ergebnisse in einer Kleingruppe.

7 Gegeben ist der Graph einer Stammfunktion F einer Funktion f und seine waagrechte Asymptote. Begründen Sie jeweils die Aussage.



a) F kann die Integralfunktion von f bezüglich der unteren Grenze 1 sein.
b) Der Graph von f hat genau zwei Extrempunkte.
c) Der Graph von f hat die x-Achse als waagrechte Asymptote.
d) $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$

8 Formen Sie, falls nötig, die Integrandenfunktion um und berechnen Sie dann den Wert des Integrals. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.
Beispiel: $\int_0^1 xe^{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 2xe^{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[e^{x^2+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot(e^2-e)$

a) $\int_0^1 e^{3x+1}\,dx$ **b)** $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ **c)** $\int_1^2 \frac{1}{5x-4}\,dx$ **d)** $\int_0^1 (2x+5)^3\,dx$
e) $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx$ **f)** $\int_0^1 \sin(1-x)\,dx$ **g)** $\int_{-2}^0 \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$ **h)** $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx$

9 Bestimmen Sie jeweils den Wert von a so, dass eine wahre Aussage entsteht.

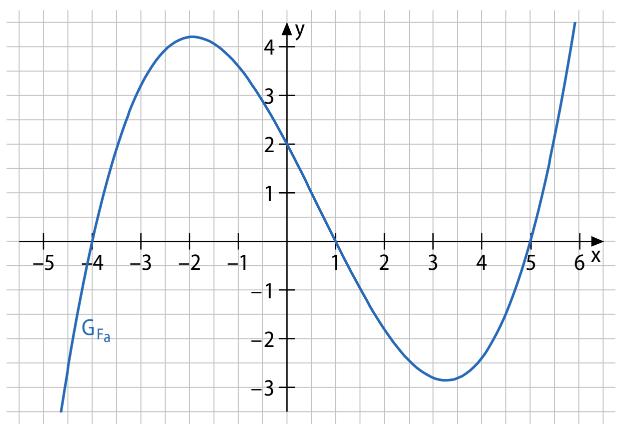
Parameterwerte zu 9:
0; 0,5; 1; 3; $3\frac{1}{3}$; e^2

a) $2\int_0^a x^2\,dx = 18$ **b)** $\int_{-2}^a (2x-3x^2)\,dx = -12$ **c)** $\int_{-a}^a (a^2-x^2)\,dx = 36$
d) $\int_a^5 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{10}$ **e)** $\int_0^a e^{2x}\,dx = \frac{e-1}{2}$ **f)** $\int_e^a \frac{1}{x}\,dx = 1$

10 Ordnen Sie die Kärtchen, die dasselbe beschreiben, einander begründet zu.

1 $F'(b)-F'(a)$ **2** $f'(b)-f'(a)$ **3** $\int_a^b f(x)\,dx$ **4** $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$
5 $F''(b)-F''(a)$ **6** $\int_a^b F''(x)\,dx$ **7** $\int_a^b F'(x)\,dx$ **8** $f(b)-f(a)$
9 $\int_a^b f''(x)\,dx$ **10** $F(b)-F(a)$ **11** $-\int_b^a f''(x)\,dx$ **12** $\int_a^b f'(x)\,dx$

11 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Integralfunktion F_a von f, $D_f = D_{F_a} = \mathbb{R}$.



a) Geben Sie begründet alle für $a \in \mathbb{R}$ möglichen Werte an.
b) Ermitteln Sie jeweils anhand der Abbildung näherungsweise die gesuchte(n) Größe(n) und erläutern Sie Ihr Vorgehen.
1 f(1) **2** die Nullstelle(n) von f
3 die Extremstelle(n) von f
4 $\int_0^5 f(x)\,dx$
c) Begründen Sie, dass jede Stammfunktion von f Integralfunktion zu f ist.

12 Ein Austauschprogramm ermöglicht es Schülerinnen und Schülern, verschiedene Kulturen kennenzulernen. Die Funktion $f\colon t \mapsto 50 + 20 \cdot e^{0{,}2t}$, $D_f = \mathbb{R}_0^+$, modelliert die Entwicklung der Teilnehmendenzahl seit Programmbeginn (t in Jahren).

a) Ermitteln Sie einen Term F (t) für die Anzahl der Personen, die nach t Jahren am Programm teilgenommen haben, mithilfe eines bestimmten Integrals und in integralfreier Darstellung.

b) Bestimmen Sie, wie viele Personen nach 5 Jahren am Programm teilgenommen haben.

c) Beurteilen Sie die Grenzen des Modells und diskutieren Sie in einer Kleingruppe eine passende Modellierung für längere Zeiträume.

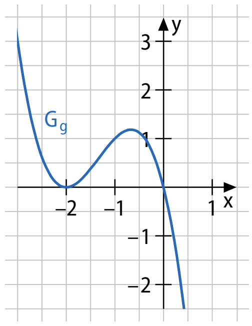
13 Die linke Abbildung zeigt den Graphen G_g einer Funktion g.

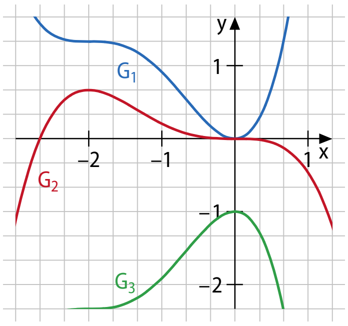
a) Begründen Sie, dass keiner der drei Graphen G_1, G_2 bzw. G_3 in der rechten Abbildung Graph der Integralfunktion

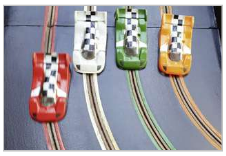
G_0 mit $G_0(x) = \int_0^x g(t)\,dt$

$(D_{G_0} = D_g = \mathbb{R})$ sein kann.

b) Skizzieren Sie den Graphen von G_0 in Ihren Unterlagen.



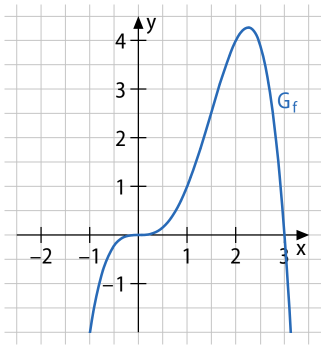


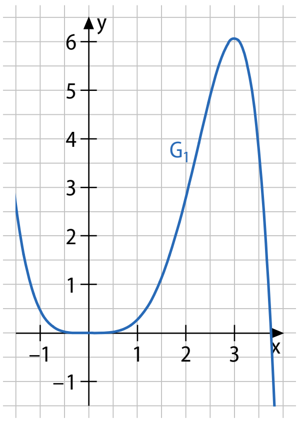


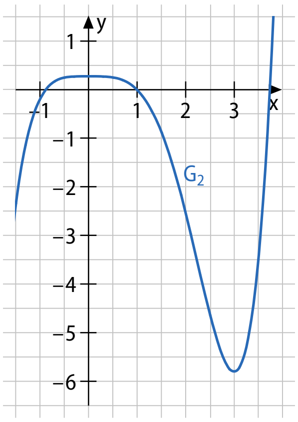
14 Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto -\frac{x^3}{2}(x-3)$, $D_f = \mathbb{R}$. Sie beschreibt im Intervall [0; 3] die Geschwindigkeit eines Modellautos auf einer Rennstrecke (f (x) in m/s; x in s). Die Funktion $F_1\colon x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$, $D_{F_1} = \mathbb{R}$, ist Integralfunktion von f.

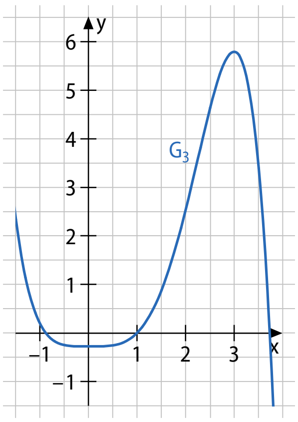
a) Berechnen Sie, welche Strecke das Modellauto im Intervall [1; 3] zurücklegt.

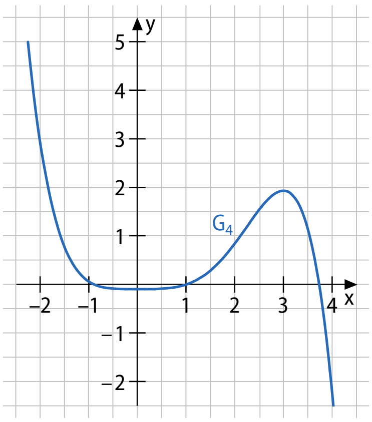
b) Ermitteln Sie, welcher der vier Graphen G_1 bis G_4 der Graph der Funktion F_1 ist, indem Sie bei jedem der drei übrigen Graphen angeben, warum es sich bei ihm nicht um G_{F_1} handelt.











15 Die momentane Änderungsrate eines Bestands B wird durch die Funktion $f\colon t \mapsto (t+2)(t-4)(t-11),\ D_f = [0; 12]$, beschrieben (t: Zeit in Tagen).

a) Ermitteln Sie einen Term B (t), wenn der Anfangsbestand 300 beträgt.

b) Berechnen Sie den maximalen und den minimalen Bestandswert innerhalb des betrachteten Zeitraums und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

c) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem der Bestand am stärksten anwächst, und berechnen Sie die maximale Zuwachsrate.

16 In einem Becken befinden sich zu Beobachtungsbeginn 2000 Liter Wasser. Die Funktion $f\colon t \mapsto -\frac{1}{2}t(t-5)$ gibt für die folgenden 6 Stunden die momentane Zuflussrate des Wassers an (in 1000 ℓ/h). Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit (in h).

a) Geben Sie die Nullstellen und die Extremstelle von f an und skizzieren Sie den Graphen von f.

b) Begründen Sie, dass die Wassermenge in dem Becken innerhalb der ersten 5 Stunden nach Beobachtungsbeginn durchgehend zunimmt.

c) Interpretieren Sie die Gleichung $2 + \int_0^x f(t)\,dt = 7$ im Sachkontext.

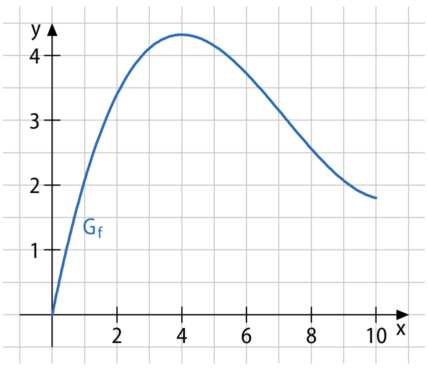
17 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f\colon x \mapsto \frac{1}{100} \cdot (2x^3 - 43x^2 + 248x)$.

Abituraufgabe

a) Geben Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ sowie für $x \to +\infty$ an und begründen Sie, dass der Graph G_f nicht symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass G_f für $x < 7\frac{1}{6}$ rechtsgekrümmt ist.

c) Es gibt eine Stelle $x_0 \in [0; 10]$, an der die lokale Änderungsrate von f mit der mittleren Änderungsrate von f im Intervall [0; 10] übereinstimmt. Übertragen Sie die Abbildung in Ihre Unterlagen (Platzbedarf $0 \le x \le 26$) und ermitteln Sie grafisch einen Näherungswert für x_0.



d) Es gelten folgende Aussagen:

1 Der Punkt $H(4\,|\,4{,}32)$ ist der einzige Hochpunkt von G_f.

2 Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: $f\left(7\frac{1}{6} - a\right) - f\left(7\frac{1}{6}\right) = f\left(7\frac{1}{6}\right) - f\left(7\frac{1}{6} + a\right)$.

Interpretieren Sie die Aussage **2** in Bezug auf die Symmetrie von G_f und berechnen Sie ausschließlich mithilfe der beiden Aussagen sowie des Näherungswerts $f\left(7\frac{1}{6}\right) \approx 3{,}05$ die Koordinaten des Tiefpunkts T von G_f.

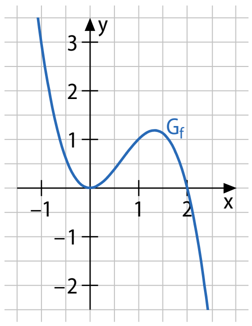
e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an G_f im Punkt $(10\,|\,f(10))$ und ergänzen Sie diese für $x \ge 10$ in Ihrer Zeichnung.

Zur Beschreibung der Zunahme der Körpermasse eines Hundes einer bestimmten Rasse in den ersten 25 Lebensmonaten wird das folgende Modell betrachtet: Für $0 \le x \le 10$ wird die momentane Änderungsrate der Körpermasse des Hundes (in Kilogramm pro Monat) durch die Funktion f und für $10 < x \le 25$ durch die Tangente t modelliert (x: Zeit in Monaten seit der Geburt des Hundes).

Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass jeder Monat 30 Tage hat.

f) Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells, wie viele Monate nach der Geburt ein Hund der betrachteten Rasse erstmals nicht mehr an Körpermasse zunimmt.

g) Begründen Sie, dass auf der Basis des Modells die Masse in Kilogramm, um die ein Hund der betrachteten Rasse in den ersten 25 Lebensmonaten insgesamt zunimmt, mit dem Term $\int_0^{10} f(x)\,dx + 13{,}5$ berechnet werden kann, und berechnen Sie seinen Wert.



18 Gegeben sind die Funktion $f\colon x \mapsto 2x^2 - x^3$ und die Integralfunktion $I\colon x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$, $D_I = D_f = \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.

a) Begründen Sie die folgenden Eigenschaften der Funktion I bzw. ihres Graphen G_I anhand des Graphen G_f oder des Funktionsterms f (x).

1 Für jeden Wert von $x < 0$ ist $I(x) < 0$.

2 I besitzt genau zwei Nullstellen.

3 G_I besitzt im Ursprung einen Terrassenpunkt.

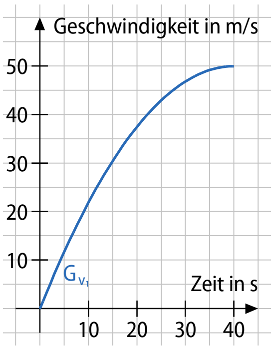
b) Zeichnen Sie zunächst G_f in Ihren Unterlagen und skizzieren Sie dann in dasselbe Koordinatensystem G_I. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer DMS.

19 Ein Gezeitenkraftwerk nutzt die Meeresströmungen zwischen Hoch- und Niedrigwasser zur CO_2-armen Stromerzeugung: Bei Flut fließt Wasser in einen Speicher, bei Ebbe wieder heraus. Die Durchflussgeschwindigkeit in einem solchen Kraftwerk lässt sich an einem bestimmten Tag mithilfe der Funktion $f\colon t \mapsto 6 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-4)\right]$, $D_T = [0; 24]$, modellieren (t: Zeit in Stunden; f(t): Durchflussgeschwindigkeit in Mio. m^3/h).

a) Entscheiden Sie begründet und ohne Rechnung, zu welcher Uhrzeit an diesem Tag der höchste bzw. der niedrigste Wasserstand herrscht.

b) Berechnen Sie die gesamte durch die Turbinen geflossene Wassermenge an diesem Tag.

c) Recherchieren Sie über Gezeitenkraftwerke und präsentieren Sie Ihre Ergebnisse.



20 Ein Fallschirmspringer springt aus einem Flugzeug ab. Seine Vertikalgeschwindigkeit v wird in den ersten 40 Sekunden durch die Funktion $v_1\colon t \mapsto -\frac{1}{32}t^2 + 2{,}5t$ beschrieben (t: Zeit in Sekunden; $v_1(t)$ in m/s). Die Abbildung zeigt den Graphen von v_1.

a) Berechnen Sie, wie viel Höhenmeter der Fallschirmspringer nach 40 Sekunden zurückgelegt hat.

b) Ab dem Zeitpunkt $t = 40$ s behält der Springer seine Geschwindigkeit bei und fällt weitere 30 s mit dieser Geschwindigkeit. Berechnen Sie die Höhe, die er in diesem Zeitraum verliert.

c) Nach insgesamt 70 s öffnet er seinen Fallschirm. Seine Geschwindigkeit wird jetzt durch die Funktion $v_2\colon t \mapsto \frac{1}{288}(t-190)^2$ beschrieben. Berechnen Sie die Höhe, aus der er ursprünglich abgesprungen ist, wenn er nach insgesamt 190 s den Boden erreicht.

21 Die Preise für Solarzellen sanken von 2013 bis 2024 um etwa 5,5 % pro Jahr. 2013 musste der Endverbraucher für ein Kilowatt Spitzenleistung 2520 € bezahlen.

a) Der Preis (in €) soll mithilfe der Funktion $p\colon t \mapsto a \cdot e^{-kt}$ (t: Zeit in Jahren seit 2013) modelliert werden. Ermitteln Sie a und k.

b) Berechnen Sie p′(4) und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

c) Bestätigen Sie, dass $p(10) - p(0) = \int_0^{10} p'(t)\,dt$ gilt, und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

d) Berechnen Sie $p'(0{,}5) + p'(1{,}5) + \ldots + p'(9{,}5)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. Begründen Sie, wie dieses Ergebnis näherungsweise direkt mithilfe von p (t) ermittelt werden kann, und erläutern Sie die geringe Differenz der beiden Werte mithilfe einer Skizze.

22 Die Geschwindigkeit eines Steins, der von einem 10 m hohen Turm aus senkrecht nach oben geworfen wird, wird näherungsweise durch die Funktion v mit $v(t) = 5 - 10t$, $D_v = [0; 2]$ (t in s, v (t) in m/s) modelliert.

a) Berechnen Sie jeweils den Wert des bestimmten Integrals und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.

1 $\int_0^{0,5} v(t)\,dt$ **2** $\int_0^{1} v(t)\,dt$ **3** $\int_0^{2} v(t)\,dt$

b) Die Funktion h soll die Höhe des Steins über der Erdoberfläche beschreiben. Geben Sie einen Term der Funktion h an und begründen Sie, dass h eine Stammfunktion von v, aber nicht die Integralfunktion $t \mapsto \int_0^t v(x)\,dx$ ist.

c) Berechnen Sie die Länge der Strecke, die der Stein beim Flug zurücklegt.

23 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$.

a) Veranschaulichen Sie anhand einer Skizze das Integral $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$, begründen Sie, warum die folgende Rechnung falsch sein muss, und korrigieren Sie diese:

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \frac{3^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 4.$$

b) Formulieren Sie eine Regel für die Integration abschnittsweise definierter Funktionen.

c) Die Funktion g mit $g(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{für } 1 < x < +\infty \end{cases}$ enthält im Gegensatz zu f eine Unstetigkeitsstelle. Überprüfen Sie, ob Ihre Regel aus Teilaufgabe b) auch für unstetige Funktionen gilt, und berechnen Sie damit $\int_0^3 g(x)\,dx$.

Vertiefung

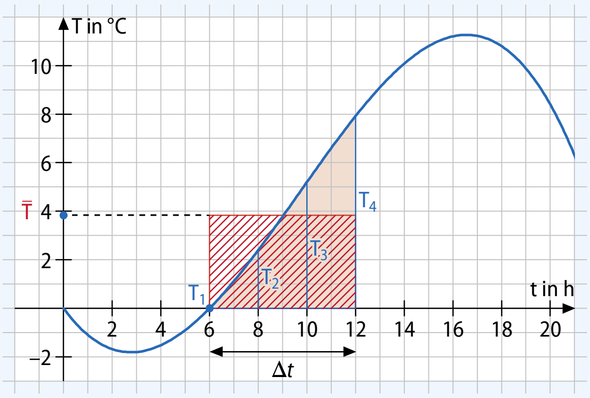
Mittelwerte von Funktionen

Das **arithmetische Mittel $\bar{a}$** endlich vieler Werte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$ erhält man, indem man die Summe der Werte durch ihre Anzahl n dividiert, also $\bar{a} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$.

An einem Herbsttag beschreibt die Funktion T mit $T(t) = -\frac{1}{100} t(t-6)(t-23)$, $D_T = [0; 24]$, den Temperaturverlauf (in °C; t: Zeit in h).

- Berechnen Sie den Mittelwert der um 6 Uhr, 8 Uhr, 10 Uhr und 12 Uhr gemessenen Temperaturen.

Den **Mittelwert $\bar{m}$ einer stetigen Größe f** innerhalb eines Intervalls $I = [a; b]$ ermittelt man mithilfe eines bestimmten Integrals: $\bar{m} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t)\,dt$.



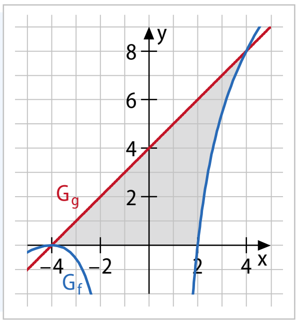
- Begründen Sie die Formel für den Mittelwert einer stetigen Größe mithilfe der Abbildung.
- Berechnen Sie den Mittelwert der Temperatur zwischen 6 Uhr und 12 Uhr.
- Geben Sie weitere Beispiele für die Mittelwertberechnung mithilfe des bestimmten Integrals an und präsentieren Sie Ihre Ergebnisse im Kurs.

1.4 Berechnung von Flächeninhalten

Entdecken

Der Rand des Segels in der Abbildung kann durch die Graphen G_f und G_g der Funktionen $f: x \mapsto x + 6 - \frac{32}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, und $g: x \mapsto x + 4$, $D_g = \mathbb{R}$, modelliert werden.

- Entwickeln Sie eine Strategie zur Bestimmung des Flächeninhalts des Segels und berechnen Sie diesen.
- Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse in einer Kleingruppe.



Verstehen

Mithilfe von bestimmten Integralen kann man Flächenberechnungen an Graphen durchführen.

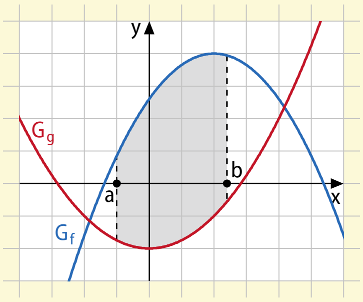
Sind f und g zwei im Intervall $I = [a; b]$ stetige Funktionen mit $f(x) \geq g(x)$ bzw. $f(x) \leq g(x)$ in I, so gilt für den Inhalt A der von ihren Graphen in I begrenzten Fläche

$$A = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx\right|.$$

Merke: „Integral über obere Funktion minus untere Funktion"

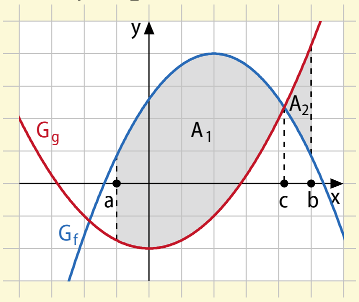
Liegt G_f in ganz I oberhalb von G_g, so gilt

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



Bilden die Graphen G_f und G_g in I zwei Teilflächen, so addiert man deren Inhalte:

$$A = A_1 + A_2$$

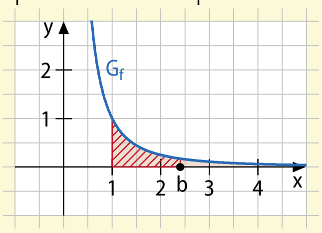


Dies gilt insbesondere, wenn einer der Graphen die x-Achse ist.

Auch „ins Unendliche reichenden" Flächen kann man oft endliche Flächeninhalte zuordnen. Die hierfür verwendeten Integrale bezeichnet man als **uneigentliche Integrale**.

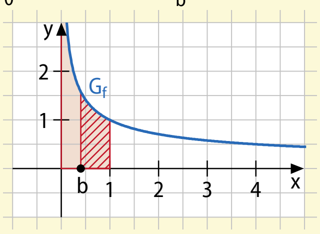
Integrationsintervall reicht ins Unendliche

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx$$



Integrandenfunktion strebt an einer Grenze ins Unendliche

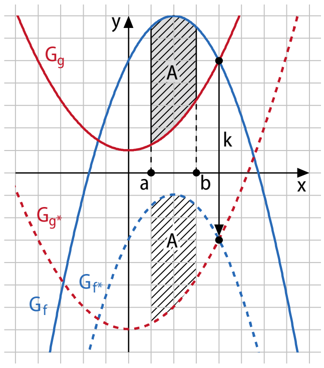
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b \to 0^+} \int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$



Begründung

Gegeben sind zwei in einem Intervall $I = [a; b]$ stetige Funktionen f und g mit den Graphen G_f und G_g mit $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in I$. Begründen Sie, dass für den Inhalt A der von den beiden Graphen im Intervall $[a; b]$ eingeschlossenen Fläche unabhängig von der Lage bezüglich des Koordinatensystems gilt: $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$.

Lösung:



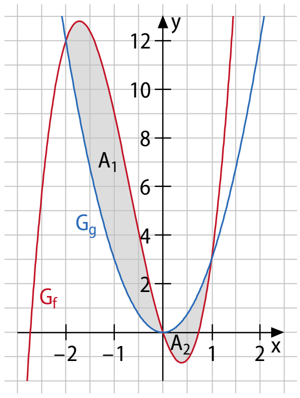
Verlaufen G_f und G_g im Intervall $[a; b]$ oberhalb der x-Achse, gibt das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ bzw. $\int_a^b g(x)\,dx$ den Inhalt der vom jeweiligen Graphen und der x-Achse in $[a; b]$ eingeschlossenen Fläche an. Dann gilt: $A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$.

Werden beide Graphen gleichermaßen in y-Richtung verschoben, ändert sich der Inhalt der eingeschlossenen Fläche nicht:

$$\int_a^b [f^*(x) - g^*(x)]\,dx = \int_a^b [(f(x) - k) - (g(x) - k)]\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Für die Berechnung des Flächeninhalts ist keine Verschiebung der Graphen in y-Richtung notwendig.

Beispiele



Beachten Sie:
$\int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]\,dx$ ist nicht der Inhalt der eingeschlossenen Fläche

Strategiewissen
Berechnen von Flächeninhalten

I. Gegeben sind die Funktionen $f\colon x \mapsto 3x^3 + 6x^2 - 6x$ und $g\colon x \mapsto 3x^2$, $D_f = D_g = \mathbb{R}$, mit ihren Graphen G_f und G_g. Bestimmen Sie den Inhalt der von G_f und G_g begrenzten Fläche.

Lösung:

1 x-Koordinaten der Schnittpunkte von G_f und G_g:

$f(x) = g(x) \iff 3x^3 + 6x^2 - 6x = 3x^2$

$\iff 3x(x^2 + x - 2) = 0 \iff 3x(x+2)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1$

2 Ermitteln Sie den Wert der Integrale in den Teilintervallen:

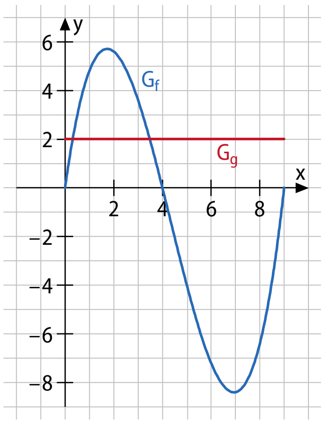
$$A_1 = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{-2}^{0} (3x^3 + 6x^2 - 6x - 3x^2)\,dx = \int_{-2}^{0} (3x^3 + 3x^2 - 6x)\,dx$$

$$= \left[\tfrac{3}{4}x^4 + x^3 - 3x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(\tfrac{3}{4} \cdot 16 + (-2)^3 - 3 \cdot 4\right) = 8$$

$$A_2 = \int_0^1 [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^1 [3x^2 - (3x^3 + 6x^2 - 6x)]\,dx = \int_0^1 (-3x^3 - 3x^2 + 6x)\,dx$$

$$= \left[-\tfrac{3}{4}x^4 - x^3 + 3x^2\right]_0^1 = -\tfrac{3}{4} - 1 + 3 - 0 = 1{,}25$$

3 Addieren Sie die Inhalte der Teilflächen: $A = A_1 + A_2 = 9{,}25$ [FE]



II. Ein Produkt wird zunächst für 1,50 € im Handel angeboten, dabei erzielt der Händler pro Stück einen Gewinn von 30 Cent.
Die Funktion $f\colon t \mapsto \frac{1}{5}t(t-4)(t-9)$, $D_f = [0; 9]$, modelliert die Preisänderung in Cent pro Jahr (t: Zeit in Jahren). Die Funktion g mit $g(t) = 2$ beschreibt die jährliche Zunahme des Einkaufspreise (in Cent pro Jahr), den der Händler zahlen muss.
Begründen Sie, dass sich der Gewinn pro Stück nach neun Jahren mit dem Ansatz $B(9) = 30 + \int_0^9 [f(t) - g(t)]\,dt$ berechnen lässt, ohne dass die Schnittstellen der Graphen von f und g ermittelt werden müssen.

Lösung:

Die jährliche Änderungsrate des Gewinns berechnet sich als Differenz $f(t) - g(t)$ der Preisänderung f und der jährlichen Zunahme des Einkaufspreises g. Damit erhält man die Gesamtänderung des Gewinns innerhalb des betrachteten Zeitraums mithilfe des Integrals $\int_0^9 [f(t) - g(t)]\,dt$.

Mit dem Anfangsgewinn $B(0) = 30$ ergibt sich der Gewinn nach neun Jahren durch $B(9) = 30 + \int_0^9 [f(t) - g(t)]\,dt$.

Die Schnittstellen der beiden Graphen müssen nicht berechnet werden, da das Integral bereits die Gesamtänderung angibt. Wenn im Intervall [a; b] gilt

1 $f(t) > g(t)$, dann ist $\int_a^b [f(t) - g(t)]\,dt > 0$.

2 $f(t) < g(t)$, dann ist $\int_a^b [f(t) - g(t)]\,dt < 0$.

III. Bestimmen Sie das uneigentliche Integral und veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen grafisch.

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ **b)** $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Lösung:

Strategiewissen
Berechnen uneigentlicher Integrale

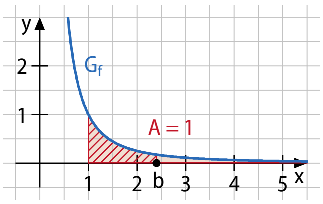
Zu a):
Der Wert des Integrals $I(b)$ wächst für $b \to +\infty$, wird aber nicht größer als 1.

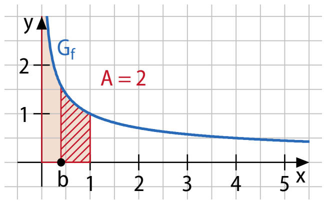
Zu b):
Der Wert des Integrals $I(b)$ wächst für $b \to 0^+$, wird aber nicht größer als 2.

1 Ersetzen Sie die Integrationsgrenze, die nicht in der Definitionsmenge der Funktion liegt, durch einen Parameter b und berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals.

a) $I(b) = \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^b = \frac{-1}{b} - (-1) = 1 - \frac{1}{b}$

b) $I(b) = \int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = [2\sqrt{x}]_b^1 = 2 - 2\sqrt{b}$





2 Bestimmen Sie den Grenzwert:

a) $\lim\limits_{b \to +\infty} I(b) = \lim\limits_{b \to +\infty} \left[1 - \frac{1}{b}\right] = 1$

b) $\lim\limits_{b \to 0^+} I(b) = \lim\limits_{b \to 0^+} \left[2 - 2\sqrt{b}\right] = 2$

Den ins Unendliche reichenden Flächen können endliche Inhalte zugeordnet werden.

a) $A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$ **b)** $A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$

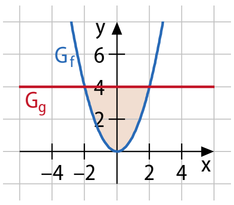
Nachgefragt

- Entscheiden Sie begründet, ob die folgende Aussage richtig ist: Wenn für zwei Funktionen f und g gilt $\int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx = 0$, dann sind die Funktionen im Intervall [0; 1] identisch.
- Begründen oder widerlegen Sie: Aus $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = 2$ folgt, dass die Funktion f für $x \to +\infty$ gegen 0 konvergiert.

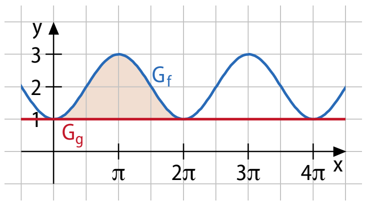
Aufgaben

1 Berechnen Sie jeweils den Inhalt der markierten Fläche zwischen den Graphen der Funktionen $f\colon x \mapsto f(x)$ und $g\colon x \mapsto g(x)$ ($D_f = D_g = \mathbb{R}$).

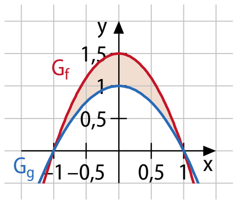
a) $f(x) = x^2$
$g(x) = 4$



b) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$
$g(x) = 1$



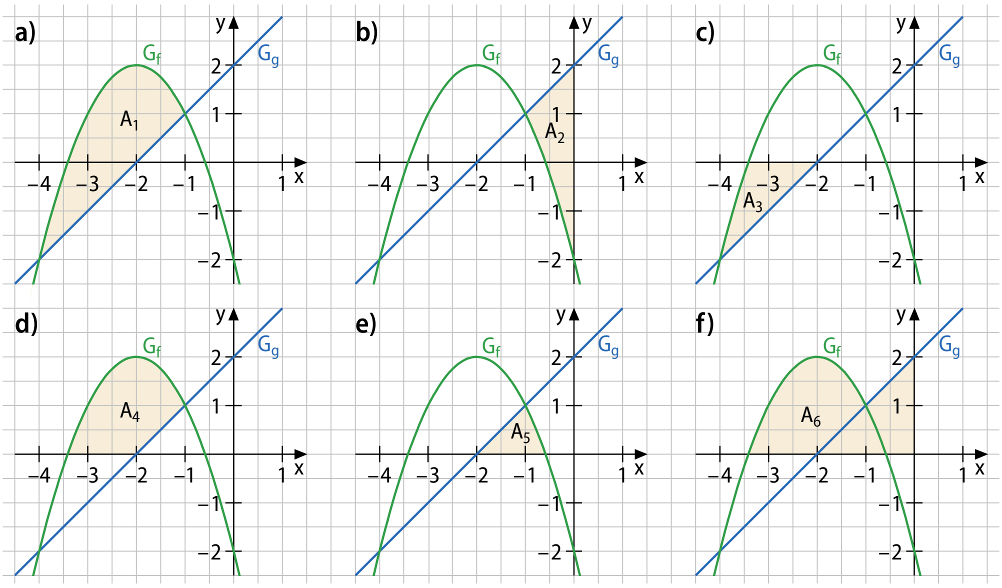
c) $f(x) = -1{,}5x^2 + 1{,}5$
$g(x) = -x^2 + 1$



2 **a)** Berechnen Sie den Inhalt A der Fläche, die die Graphen der Funktionen $f\colon x \mapsto x^2 - x$ und $g\colon x \mapsto x$, $D_f = D_g = [0; 2]$, miteinander einschließen.

b) Bestimmen Sie den Anteil der Fläche aus Teilaufgabe a), die im IV. Quadranten liegt.

3 Vorgelegt sind die Funktionen $f\colon x \mapsto 2 - (x + 2)^2$, $D_f = \mathbb{R}$, und $g\colon x \mapsto x + 2$, $D_g = \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Inhalte A_1 bis A_6 der getönten Flächenstücke und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.



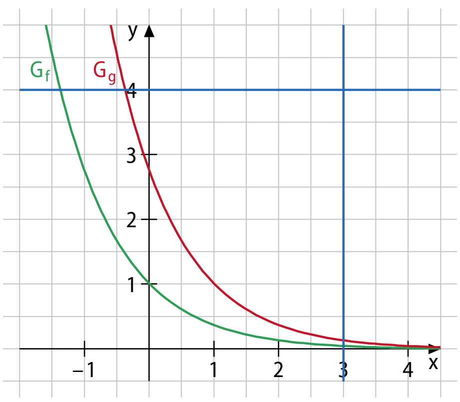
4 Gegeben ist jeweils die Funktion $f\colon x \mapsto f(x)$ mit maximaler Definitionsmenge.

1 $f(x) = \frac{1}{e^x}$ **2** $f(x) = \frac{1}{x}$ **3** $f(x) = \frac{1}{x^3}$ **4** $f(x) = \sin x$

a) Veranschaulichen Sie jeweils das Integral $\int_1^b f(x)\,dx$, $b > 1$, und ermitteln Sie eine integralfreie Darstellung.

b) Bestimmen Sie dann das uneigentliche Integral $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$, falls möglich.

5 Ein Werkstück soll aus Iridium gefertigt werden. Der Umriss wird durch die Graphen der Funktionen $f\colon x \mapsto e^{-x}$ und $g\colon x \mapsto e^{-x+1}$ ($D_f = D_g = \mathbb{R}$) sowie die Geraden mit den Gleichungen $y = 4$ und $x = 3$ begrenzt (Längen in Millimeter), die Dicke des Werkstücks beträgt 0,2 mm. Berechnen Sie die Masse des benötigten Iridiums (Dichte Iridium: $\rho = 21{,}45\ \text{g/cm}^3$).



6 Das Rechteck ABCD mit A(1|0), B(5|0), C(5|4) und D(1|4) wird durch den Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $f\colon x \mapsto f(x)$ in zwei Teilflächen geteilt. Ermitteln Sie jeweils, in welchem prozentualen Verhältnis die Inhalte der beiden Teilflächen stehen. Begründen Sie Ihr Vorgehen.

a) $f(x) = 4 - \frac{16}{x^2}$ **b)** $f(x) = 8 - \frac{16}{x}$

7 Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f\colon x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$ und ihr Graph G_f.

a) Untersuchen Sie G_f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Asymptoten und Monotonie. Zeichnen Sie G_f, ggf. mithilfe einer DMS.

b) Es wird nun das Flächenstück betrachtet, das von G_f und der x-Achse im Bereich $-\ln 3 \le x \le b,\ b > 0$, eingeschlossen wird. Bestimmen Sie den Wert von b so, dass die y-Achse dieses Flächenstück halbiert.

8 Gegeben ist die Funktion $f\colon t \mapsto \frac{t}{12} \cdot e^{-\frac{t^2}{288}}$, $D_f = \mathbb{R}$; ihr Graph ist G_f.

a) Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie, Extremstellen und Asymptoten. Zeichnen Sie G_f, ggf. mithilfe einer DMS.

Die monatlichen Verkaufszahlen eines E-Bike-Modells lassen sich für $t \ge 0$ durch die Funktion f modellieren (t: Zeit in Monaten; f(t): Verkaufsrate in 1000 Stück pro Monat).

b) Geben Sie an, ab welchem Zeitpunkt die monatlichen Verkaufszahlen abnehmen.

c) Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ und interpretieren Sie den Wert geometrisch anhand des Graphen sowie im Sachkontext.

9 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$, $D_f = [0; 12]$; ihr Graph ist G_f.

a) Zeichnen Sie G_f mithilfe einer DMS und geben Sie die Koordinaten der Extrempunkte und des Wendepunkts von G_f an.

b) Der Graph G_f und die Gerade g mit der Gleichung $y = mx;\ 0 < m \le 1$, beranden eine Fläche mit dem Inhalt A_1. Die Gerade g, der Graph G_f und die Gerade h mit der Gleichung $x = 6$ beranden eine weitere Fläche mit dem Inhalt A_2. Ermitteln Sie, ohne die Koordinaten des Schnittpunkts von g und G_f zu bestimmen, für welchen Wert von m die beiden Flächeninhalte A_1 und A_2 gleich groß sind.

Abituraufgabe

10 Die Konzentration des Wirkstoffs eines Medikaments im Blut eines Patienten kann im Intervall [0; 9] modellhaft durch die in $\mathbb{R}_0^+$ definierte Funktion $f\colon x \mapsto \frac{4x}{(x+1)^2}$ beschrieben werden (x: Zeit in Stunden seit der Einnahme des Medikaments; f(x): Wirkstoffkonzentration im Blut des Patienten in mg/ℓ).

a) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wirkstoffkonzentration maximal ist, und geben Sie diese maximale Wirkstoffkonzentration an.

b) Bestimmen Sie die Wirkstoffkonzentration 30 Minuten nach Einnahme des Medikaments und weisen Sie nach, dass 6 Stunden nach der Einnahme die Wirkstoffkonzentration etwa auf die Hälfte ihres Maximalwertes gesunken ist. Zeichnen Sie G_f.

c) Weisen Sie nach, dass die in $\mathbb{R}_0^+$ definierte Funktion $F\colon x \mapsto 4 \cdot \ln(x+1) + \frac{4}{x+1}$ eine Stammfunktion von f ist.

d) An der Stelle $x = 2$ hat der Graph von f einen Wendepunkt. Beschreiben Sie, wie man rechnerisch vorgehen könnte, um dies zu begründen. Geben Sie die Bedeutung der x-Koordinate des Wendepunkts im Sachkontext an.

e) Zwischen G_f und der x-Achse gibt es ein in positive x-Richtung unbegrenztes Flächenstück. Nur dann, wenn diesem Flächenstück ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann, kann die betrachtete Funktion f die zeitliche Entwicklung der Wirkstoffkonzentration auch für große Zeitwerte x realistisch beschreiben. Überprüfen Sie rechnerisch, ob dies im vorliegenden Modell der Fall ist.

11 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{2}{1 + e^{1-x}}$, $D_f = \mathbb{R}$; ihr Graph ist G_f.

a) Untersuchen Sie G_f auf Monotonie und Asymptoten. Weisen Sie rechnerisch nach, dass G_f genau einen Wendepunkt $W(1\,|\,f(1))$ besitzt.

b) Begründen Sie, dass G_f umkehrbar ist, und geben Sie die Definitions- und die Wertemenge der Umkehrfunktion g an. Zeichnen Sie die Graphen G_f und G_g in ein gemeinsames Koordinatensystem.

c) Zeigen Sie, dass $f(x)$ äquivalent zum Term $\frac{2e^{x-1}}{1 + e^{x-1}}$ ist.

d) Die Graphen G_f und G_g begrenzen mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück. Begründen Sie den Ansatz zur Berechnung seines Inhalts A und ermitteln Sie diesen:
$A = 2 \cdot \int_0^1 [f(x) - x]\,dx$.

12 Eine Papierfabrik hatte über einen längeren Zeitraum jährlich etwa 15 m^3 mit Tetrachlorkohlenstoff CCl_4 verseuchtes Abwasser in einen See eingeleitet. Als die Umweltbehörde darauf aufmerksam wurde, musste die Fabrik eine Filteranlage einbauen. Deren erste Erfolge zeigten sich nach drei Jahren: Die jährliche Schadstoffrate (in m^3/a) ab diesem Zeitpunkt bis zum völligen Ende der Schadstoffeinleitung lässt sich durch die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion f mit $f(t) = 0{,}75\,(t^2 - 15t + 56)$ modellieren (t: Zeit in Jahren seit der Entdeckung der Problematik durch die Umweltbehörde).

a) Zeichnen Sie den Graphen von f mithilfe einer DMS und ermitteln Sie grafisch und rechnerisch, wie viele Jahre nach dem Eingreifen der Behörde die Schadstoffeinleitung endete.

b) Berechnen Sie, wie viele Kubikmeter verseuchtes Abwasser in dieser Zeit insgesamt noch in den See eingeleitet wurden. Veranschaulichen Sie diese Menge in der Zeichnung zu Teilaufgabe a).

13 **a)** Die Gerade g schneidet die Normalparabel P an den Stellen a und $a + 2$ ($a \in \mathbb{R}$), so dass die beiden Graphen im Intervall $[a; a + 2]$ eine Fläche einschließen. Skizzieren Sie diese Fläche für drei verschiedene Werte von a und weisen Sie rechnerisch nach, dass der Inhalt der entstehenden Fläche unabhängig von a ist.

b) Untersuchen Sie, ob das Ergebnis aus Teilaufgabe a) auch dann gilt, wenn man die Intervalllänge 2 durch eine beliebige andere Intervalllänge $b \in \mathbb{R}^+$ ersetzt.

14 Um die Querschnittsfläche eines 8 Meter breiten Flusses zu bestimmen, wird 1 m, 3 m, 5 m und 7 m vom linken Ufer entfernt jeweils die Wassertiefe gemessen. Man erhält auf Zentimeter gerundet folgende Ergebnisse: 3,30 m, 2,95 m, 1,45 m und 1,20 m.

a) Berechnen Sie die Querschnittsfläche des Flusses unter der Annahme, dass die Wassertiefen jeweils im Bereich von einem Meter links und rechts des Messpunkts gleich dem Messwert sind.

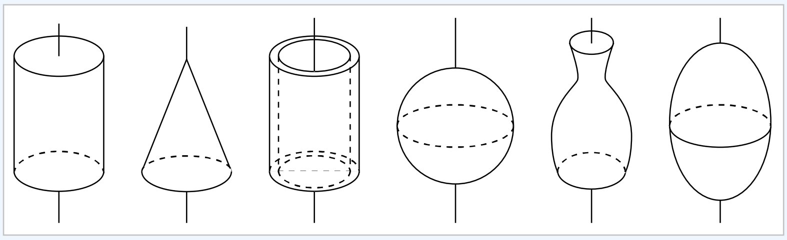
b) Durch genaue Messungen wurde festgestellt, dass sich die Wassertiefe durch die Funktion $f(x) = \frac{x}{320}(7x^3 - 128x^2 + 792x - 1728)$ modellieren lässt (x und f(x) in Metern). Berechnen Sie die Querschnittsfläche aufgrund dieses Modells.

c) Durch eine lange Trockenheit fällt der Wasserspiegel um 1 m. Ermitteln Sie mithilfe einer DMS die nötigen Angaben, um die Querschnittsfläche des Wassers zu diesem Zeitpunkt berechnen zu können. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen und geben Sie das bestimmte Integral an.

1.5 Das Volumen eines Rotationskörpers

Entdecken

Die abgebildeten Körper kann man sich durch Rotation eines Flächenstücks um eine Achse entstanden denken.



- Geben Sie an, welche Flächenstücke durch Rotation einen geraden Kreiszylinder, einen geraden Kreiskegel, ein Rohr bzw. eine Kugel ergeben, und geben Sie jeweils eine Formel zur Berechnung des Volumens des Körpers an.
- Beschreiben Sie anhand einer Skizze eine Strategie, um das Volumen von Körpern zu berechnen, die durch Rotation einer krummlinig begrenzten Fläche um eine Achse entstehen. Präsentieren Sie Ihre Ergebnisse im Kurs.

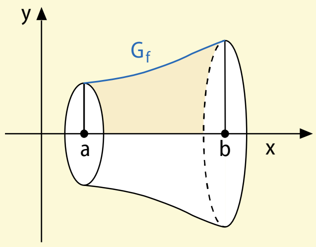
Verstehen

Körper, die man sich durch Rotation eines Flächenstücks um eine Achse entstanden denken kann, heißen Rotationskörper. Mithilfe von Integralen können auch Volumina von Rotationskörpern berechnet werden.

Die Formel gilt analog, wenn $f(x) \leq 0$ in $[a; b]$ ist.

Bei Rotation eines Graphen um die y-Achse kann man ggf. die Umkehrfunktion nutzen.

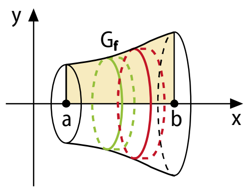
Rotiert ein Flächenstück, das vom Graphen G_f einer stetigen Funktion f mit $f(x) \geq 0$ für jeden Wert von $x \in [a; b]$, der x-Achse und den achsenparallelen Geraden $g: x = a$ und $h: x = b$ berandet wird, um die x-Achse, so entsteht ein **Rotationskörper** mit dem Volumen



$$\mathbf{V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\,dx.}$$

Begründung

Man unterteilt das Intervall [a; b] in n gleiche Abschnitte der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ und nähert damit den Rotationskörper durch schmale Zylinderscheiben mit der Höhe Δx und dem Grundkreisradius $f(x_i)$ an ($x_0 = a$; $x_n = b$; $x_i = a + i \cdot \Delta x$; $i \in \{0; 1; 2; \ldots; n-1\}$).



Die Summe der Volumina dieser Zylinderscheiben liefert einen Näherungswert für das Volumen des Rotationskörpers:

$$V \approx \pi \cdot [f(x_1)]^2 \cdot \Delta x + \pi \cdot [f(x_2)]^2 \cdot \Delta x + \pi \cdot [f(x_3)]^2 \cdot \Delta x + \ldots + \pi \cdot [f(x_n)]^2 \cdot \Delta x$$
$$= \pi \cdot \sum_{i=1}^{n} [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x.$$

Diese Näherung wird umso besser, je dünner die Scheiben sind. Man erhält als Grenzwert dieser Summe: $V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\,dx$.

Beispiele

I. Die Mantelfläche des abgebildeten Fasses entsteht, wenn der Graph der Funktion $f\colon x \mapsto -\frac{1}{200}x^2 + 11,\ D_f = [-15; 15]$, um die x-Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des Fasses (x und f(x) in cm).

Lösung:

$$V = \pi \cdot \int_{-15}^{15} [f(x)]^2\,dx$$

Wegen der Symmetrie des Graphen von f bezüglich der y-Achse gilt:

$$V = 2\pi \cdot \int_0^{15} \left[-\frac{1}{200}x^2 + 11\right]^2 dx = 2\pi \cdot \int_0^{15} \left(\frac{1}{40\,000}x^4 - \frac{11}{100}x^2 + 121\right)dx$$

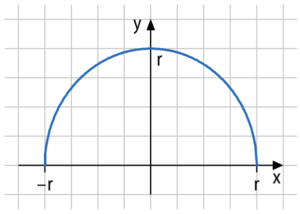
$$= 2\pi \cdot \left[\frac{1}{200\,000}x^5 - \frac{11}{300}x^3 + 121x\right]_0^{15} = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{200\,000} \cdot 15^5 - \frac{11}{300} \cdot 15^3 + 121 \cdot 15 - 0\right)$$

$$= \frac{108\,483}{32}\pi \approx 10\,650\ [\text{cm}^3] = 10{,}65\ [\text{Liter}]$$

II. Leiten Sie die Volumenformel für eine Kugel mit Radius r mithilfe der Integralrechnung her.

Lösung:

Der Graph der Funktion $f\colon x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2};\ D_f = [-r; r]$, ist ein Halbkreis. Er erzeugt durch Rotation um die x-Achse eine Kugel mit dem Volumen



$$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \cdot \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = 2\pi \cdot \left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

$$= 2\pi \cdot \left(r^2 \cdot r - \frac{r^3}{3} - 0\right) = 2\pi \cdot \frac{2}{3}r^3 = \frac{4}{3}r^3\pi$$

Nachgefragt

- Begründen oder widerlegen Sie: Es gilt $\pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\,dx = \pi \cdot \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2$.
- Begründen oder widerlegen Sie: Wird der Graph einer Funktion f längs der y-Achse verschoben, so ändert sich das Volumen des Rotationskörpers bei Rotation des Graphen um die x-Achse nicht.

Aufgaben

1 Gegeben ist jeweils die Funktion $f\colon x \mapsto f(x)$ und ihr Graph G_f.

1 $f(x) = r,\ r > 0,\ D_f = [0; a]$ **2** $f(x) = mx,\ m > 0,\ D_f = [0; a]$

a) Zeichnen Sie den Graphen G_f (ggf. mithilfe einer DMS) und geben Sie an, welcher elementargeometrische Rotationskörper entsteht, wenn G_f um die x-Achse rotiert.

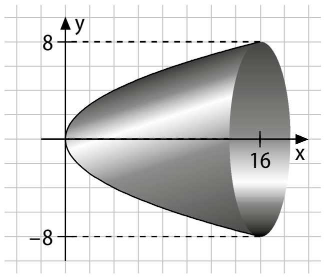
b) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers mithilfe der Integralrechnung und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der aus der Mittelstufe bekannten Formel.

2 Die Mantellinie eines rotationssymmetrischen Garderobenhakens kann durch die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{1}{10}x^2 + 1,\ D_f = [-3; 3]$, modelliert werden (x und f(x) in cm).

a) Zeichnen Sie den Graphen von f und berechnen Sie das Volumen eines solchen Hakens sowie seine Masse, wenn er aus Aluminium besteht $\left(\text{Dichte: } 2{,}7\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$.

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $g\colon x \mapsto \frac{1}{10} \cdot (x-3)^2 + 1,\ D_g = \mathbb{R}$, in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a) und begründen Sie anhand des Graphen, dass der Wert des Terms $\pi \cdot \int_0^6 [g(x)]^2\,dx$ ebenfalls das Volumen des Hakens ergibt.

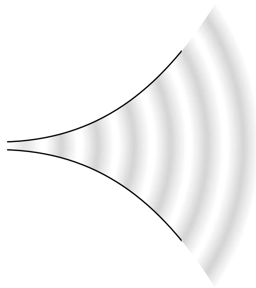
3 Ein Parabolscheinwerfer hat als Achsenschnitt die Parabel mit der Gleichung $y = 2\sqrt{x}$; der Scheinwerfer ist 16 LE lang und 16 LE breit. Berechnen Sie das Volumen, das der Scheinwerfer umschließt.



4 Wird in einem Rohr Schall erzeugt (z. B. in einer Trompete oder einem Lautsprecher), der nach außen gelangen soll, so wird der Schall genau dann optimal abgestrahlt, wenn der Trichter am Ende sich entsprechend einer Exponentialfunktion $f: x \mapsto a \cdot e^{bx}$ weitet (Exponentialtrichter).

a) Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b für den abgebildeten Trichter, der links 2 cm und rechts 10 cm Durchmesser hat und 10 cm lang ist.

b) Berechnen Sie das Volumen, das der Trichter umschließt.



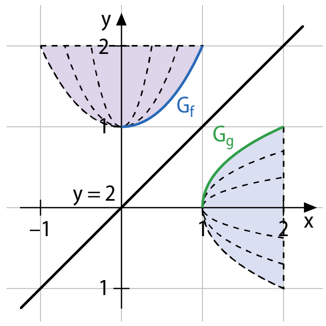
Rotiert der Graph von f um die y-Achse und ist f umkehrbar, so lässt sich das Volumen des Rotationskörpers mithilfe der Umkehrfunktion von f ermitteln.

5 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^2 + 1$, $D_f = [0; 1]$, und ihr Graph G_f.

a) Begründen Sie, dass die Funktion f umkehrbar ist, und bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion g.

b) Der Graph der Funktion f begrenzt mit der y-Achse eine Fläche, die um die y-Achse rotiert. Begründen Sie, dass der dadurch entstehende Körper dasselbe Volumen besitzt wie derjenige Körper, der durch die Rotation des Graphen von g um die x-Achse entsteht.

c) Ermitteln Sie mithilfe der Aussage aus Teilaufgabe b) das Volumen des Rotationskörpers.



6 Ein rotationssymmetrisches Gefäß ist 9 cm hoch und hat stehend im Querschnitt die Form einer Normalparabel.

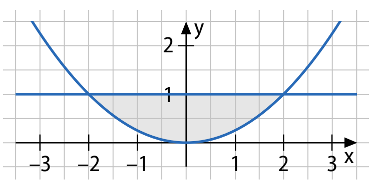
a) Ermitteln Sie einen Term der begrenzenden Funktion, wenn die Form des Gefäßes durch eine Rotation um die x-Achse erzeugt werden soll, und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

b) Bestimmen Sie den Rauminhalt des Gefäßes in Vielfachen von π.

c) Berechnen Sie, wie hoch die Flüssigkeit steht, wenn sich nur ein Viertel des maximal möglichen Inhalts im Gefäß befindet.

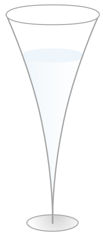
Abituraufgabe

7 Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^2$ und die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ schließen ein Flächenstück ein. Durch Rotation dieses Flächenstücks um die y-Achse wird ein Körper erzeugt. Bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.



8 Gegeben sind die beiden Funktionen $f: x \mapsto 0{,}5x(x-3)$ und $g: x \mapsto 0{,}5x(x+1)(x-3)$, $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Ihre Graphen schließen im IV. Quadranten eine Fläche ein, die um die x-Achse rotiert. Zeichnen Sie die Graphen mithilfe einer DMS und bestimmen Sie das Volumen des Hohlkörpers.

9 Die abgebildete Sektflöte ist 20 cm hoch und rotationssymmetrisch. Ihre Profillinie lässt sich durch einen Teil des Graphen der Funktion $f: x \mapsto 6\sqrt{3x}$, $D_f = \mathbb{R}_0^+$, beschreiben.
Ermitteln Sie, wie hoch die Sektflöte gefüllt ist, wenn sie 0,1 ℓ Sekt enthält. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen und besprechen Sie es in einer Kleingruppe.



10 Gegeben ist die in $[1; +\infty[$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und ihr Graph G_f.

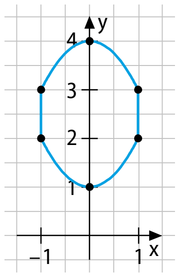
a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der nach rechts unbegrenzten Fläche zwischen G_f, der x-Achse und der Geraden mit $x = 1$ kein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann.

b) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral $\pi \cdot \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

c) Recherchieren Sie zu „Torricellis Trompete“ und präsentieren Sie Ihre Ergebnisse im Kurs.

Evangelista Torricelli (1608 – 1647)

11 Die in der Abbildung blau gezeichnete Figur rotiert um die x-Achse. Bei der oberen und der unteren Begrenzungslinie handelt es sich jeweils um Stücke von zur Normalparabel kongruenten Parabeln. Die markierten Punkte sind Gitterpunkte.

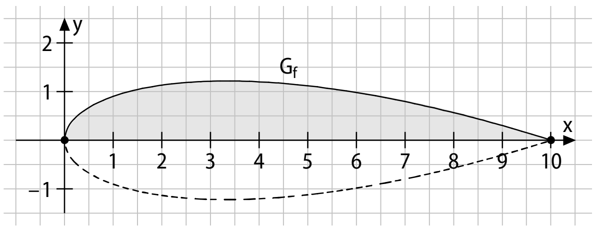


a) Beschreiben Sie, welcher Körper bei der Rotation entsteht.

b) Bei der Berechnung spielt die Funktion für die obere Begrenzung f_o und die für untere Begrenzung f_u eine Rolle. Begründen Sie, warum nicht mit der Differenzfunktion $f: x \mapsto f_o(x) - f_u(x)$ gerechnet werden darf.

c) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

12 Das getönte, von der x-Achse und dem Graphen G_f der Funktion $f: x \mapsto 0{,}1 \cdot (10 - x) \cdot \sqrt{x}$, $D_f = [0; 10]$, berandete Flächenstück rotiert um die x-Achse (1 LE ≙ 10 m).



a) Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

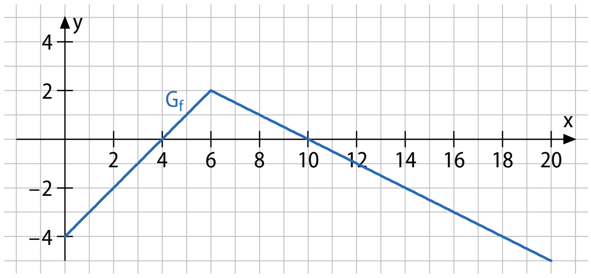
Auf einen Körper, der sich in einem Gas befindet, wirkt eine Auftriebskraft, die so groß ist wie die Gewichtskraft des von ihm verdrängten Gases.

b) Bestimmen Sie die Auftriebskraft, die der abgebildete Rotationskörper bei Füllung mit Helium (Dichte: 0,18 kg/m³) in Luft (1,29 kg/m³) erfährt.

c) Recherchieren Sie über die Formen von Tragflächen und ihren Auftrieb und präsentieren Sie Ihre Ergebnisse im Kurs.

1 Trainingsrunde: differenziert

Zu 1.1 **1** Die Abbildung zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten, stetigen Funktion f. Entnehmen Sie die benötigten Werte der Abbildung.



a) Berechnen Sie den Wert der Integrale

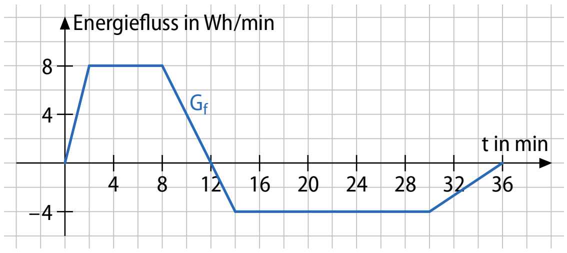
1 $\int_0^{10} f(x)\,dx$ **2** $\int_2^{8} f(x)\,dx$.

b) Bestimmen Sie $b > 0$ so, dass gilt: $\int_4^{b} f(x)\,dx = 0$.

a) Bestimmen Sie $a > 0$ so, dass gilt: $\int_a^{10} f(x)\,dx = \frac{3}{2}$.

b) Geben Sie einen möglichen Sachkontext an, der durch diese Funktion modelliert werden kann.

Zu 1.2 **2** Die Abbildung zeigt den momentanen Energiefluss (in Wh pro min) eines Akkus in Abhängigkeit von der Zeit (in min).



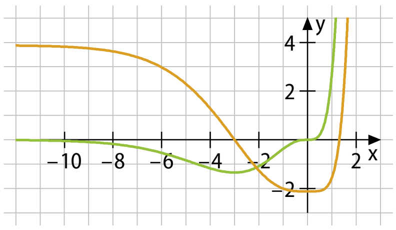
Berechnen Sie jeweils den Termwert und erläutern Sie seine Bedeutung im Sachkontext.

1 $10 + \int_0^{12} f(t)\,dt$ **2** $\int_{12}^{24} f(t)\,dt$ **3** $\int_0^{36} f(t)\,dt$

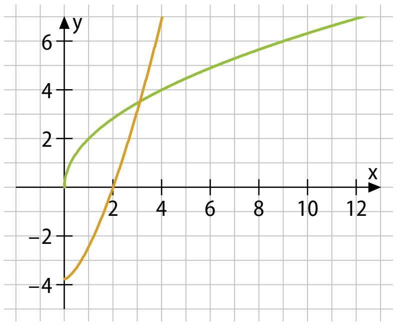
Ermitteln Sie, wie groß der Energieinhalt des Akkus zu Beginn des Beobachtungszeitraums mindestens gewesen sein muss, damit der gezeichnete Verlauf möglich ist.

Zu 1.2 **3** In den Diagrammen sind jeweils der Graph einer Funktion f und einer zugehörigen Integralfunktion $F_a\colon x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$, $a \in \mathbb{R}$, gezeichnet. Geben Sie an, welcher Graph zu f gehört, sowie mögliche Werte für a.

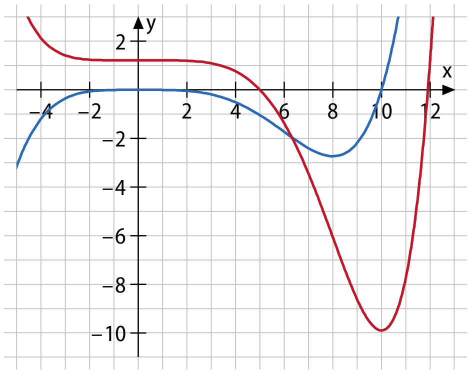
a)



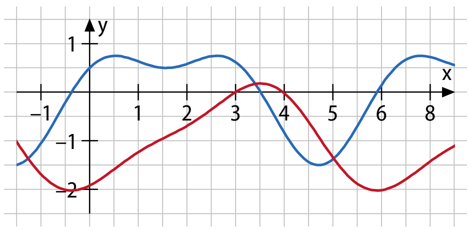
b)



a)



b)



Zu 1.3 **4** Ermitteln Sie jeweils eine integralfreie Darstellung der Integralfunktion.

a) $\int_0^x (t^3 - 6t^2 + 1)\,dt$ b) $\int_{-\pi}^x \sin(2t)\,dt$

a) $\int_{-2}^x te^{3t^2+1}\,dt$ b) $\int_1^x \frac{t}{t^2+1}\,dt$

Zu 1.4 **5** Auf einer Minigolfbahn befinden sich Hügel, deren Querschnitte mithilfe der Funktion $f_a\colon x \mapsto a - a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4a}x\right)$, $D_f = [0; 8a]$, $a \in \mathbb{R}$, modelliert werden können (x und f(x) in Metern). Eine Bahn ist 1,25 m breit.

a) Ermitteln Sie Höhe und Länge eines solchen Hügels in Abhängigkeit von a.

b) Berechnen Sie das gemeinsame Volumen der beiden Hügel, die mithilfe der Werte $a = 0{,}25$ und $a = 0{,}2$ modelliert werden können.

Eine weitere Bahn enthält drei Hügel, deren Höhen im Verhältnis 3 : 2 : 1 stehen. Berechnen Sie die Höhe des größten Hügels, wenn für alle drei Hügel zusammen 1,4 m^3 Material benötigt werden.

6 Die Graphen der Funktionen $f\colon x \mapsto \frac{4}{x^2} - 1$, $D_f = \mathbb{R}^+$, und $g\colon x \mapsto 4 - x$, $D_g = \mathbb{R}$, haben zwei gemeinsame Punkte.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass einer dieser Punkte $P(1\,|\,f(1))$ ist.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die von beiden Graphen und den Koordinatenachsen im Intervall [0; 2] begrenzt wird.

a) Zeigen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens, dass der andere gemeinsame Punkt bei $x \approx 4{,}8$ liegt.

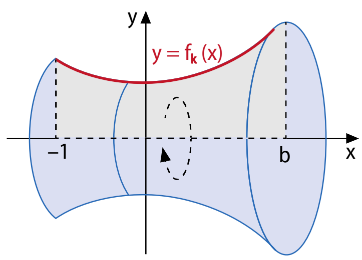
b) Bestimmen Sie mithilfe des Ergebnisses aus Teilaufgabe a) einen Näherungswert für den Inhalt der von den beiden Graphen eingeschlossenen Fläche.

7 Das Wasser in einer Badewanne (Fassungsvermögen 150 ℓ) ist kalt geworden. Daher wird neues Wasser eingelassen und gleichzeitig der Abfluss geöffnet. Die Funktion f mit $f(x) = -1{,}5x^2 + 7{,}5x$ beschreibt den momentanen Wasserzufluss, die Funktion g mit $g(x) = 2e^{-0{,}5x} + 2$, $D_f = D_g = [0; 5]$, den momentanen Wasserabfluss, jeweils in ℓ/min (x: Zeit in Minuten). Ursprünglich wurden 140 ℓ eingelassen.

Berechnen Sie, wie viel Wasser sich 2 Minuten nach Beginn des Vorgangs in der Wanne befindet.

Entscheiden Sie, ob die Wanne durch den Wasserwechsel überläuft.

Zu 1.5 **8** Der obere Rand der abgebildeten Düse wird von der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f_k\colon x \mapsto \frac{1}{20}x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}^+$, zwischen $x = -1$ und $x = b$, $b > 2$, modellhaft beschrieben. Die Düse entsteht durch Rotation der vom Graphen von f_k und der x-Achse eingeschlossenen Fläche um die x-Achse.



a) Berechnen Sie das umschlossene Volumen der Düse für $k = 1$ und $b = 5$.

b) Die Düse wird um 5 LE nach rechts verschoben. Geben Sie an, welche Werte sich ändern und welche nicht.

a) Für eine spezielle Anwendung mit $b = 5$ soll das Düsenvolumen möglichst genau 170 VE betragen. Berechnen Sie den zugehörigen Wert von k auf 2 Nachkommastellen genau.

b) Für eine andere Düse wird gefordert: $b = 2k$; $V = 44$ VE. Bestimmen Sie einen Näherungswert für k.

9 Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto 4 - x^2$ schließt mit den Koordinatenachsen im ersten Quadranten eine Fläche ein. Ermitteln Sie mithilfe des Newton-Verfahrens einen Wert von a so, dass die Gerade $x = a$ die Fläche in zwei gleich große Teile teilt.

10 Die in ein Becken fließende Wassermenge in Kubikmetern pro Stunde wird durch die Funktion $f: t \mapsto 10t^2e^{-t}$ modelliert ($t \geq 0$ in Stunden). Zu Beginn ist das Becken leer.

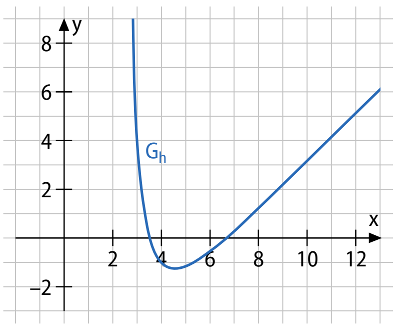
a) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(t) = -10(t^2 + 2t + 2)e^{-t}$, $D_F = D_f$, eine Stammfunktion von f ist.

b) Berechnen Sie die während der ersten sechs Stunden zugeflossene Wassermenge.

c) Ermitteln Sie, welches Fassungsvermögen das Becken mindestens haben muss, damit es auch nach beliebig langer Zeit nicht überläuft.

Abituraufgabe

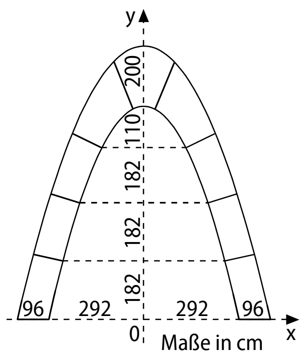
11 Die Abbildung zeigt einen Teil des Graphen G_h einer in $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ definierten gebrochen-rationalen Funktion h. Die Funktion h hat bei $x = 2$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel; zudem besitzt G_h die Gerade mit der Gleichung $y = x - 7$ als schräge Asymptote.



a) Übertragen Sie die Abbildung möglichst genau in Ihre Unterlagen und ergänzen Sie die Asymptoten von G_h. Skizzieren Sie im Bereich $x < 2$ einen möglichen Verlauf von G_h.

b) Berechnen Sie unter Berücksichtigung des asymptotischen Verhaltens von G_h einen Näherungswert für $\int_{10}^{20} h(x)\,dx$.

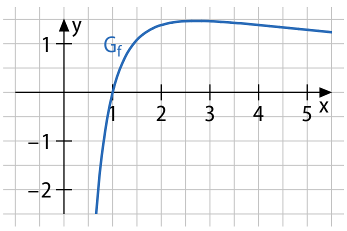
12 Die von dem Architekten Hördur Bjarnason entworfene Kópavogskirkja in Reykjavik (Island) besitzt Parabelgewölbe; auch die Rahmen der von der Künstlerin Gerdur Helgadóttir entworfenen Kirchenfenster haben (näherungsweise) Parabelform. Ermitteln Sie den Flächeninhalt des großen Glasfensters und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.



13 Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $f: x \mapsto \frac{4}{x} \cdot \ln x$. Die Abbildung zeigt ihren Graphen G_f.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten des Extrempunkts E von G_f. Übertragen Sie die Abbildung vergrößert in Ihre Unterlagen und tragen Sie dort den Punkt E ein.

b) Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion F mit $F(x) = 2 \cdot (\ln x)^2$ eine Stammfunktion von f ist. Geben Sie die Extrem- und die Wendestelle von G_F durch Überlegen an und begründen Sie Ihre Ergebnisse. Skizzieren Sie G_F in Ihren Unterlagen.



c) G_f, die x-Achse und die Parallele zur y-Achse durch den Punkt $P\left(e^{1,5} \mid f(e^{1,5})\right)$ beranden eine Fläche; ermitteln Sie deren Inhalt A.

14 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f\colon x \mapsto 5x \cdot e^{-x^2}$; ihr Graph ist G_f.

a) Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie sowie gemeinsame Punkte mit der x-Achse und bestimmen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte.

b) Bestätigen Sie rechnerisch, dass die im ersten Quadranten liegende Fläche zwischen G_f und der x-Achse endlichen Inhalt hat.

c) Zeichnen Sie die Graphen G_f und G_h für $h(x) = 5e^{-x}$, $D_h = \mathbb{R}$, mithilfe einer DMS. In der Zeichnung scheinen sich die Graphen zu berühren. Bestätigen Sie dies rechnerisch.

d) Untersuchen Sie, ob die von G_f und G_h begrenzte, nach rechts unbeschränkte Fläche einen endlichen Inhalt hat.

15 Mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f\colon t \mapsto 20t \cdot e^{-0{,}5t}$ lässt sich die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten modellhaft beschreiben; dabei wird die seit der Einnahme vergangene Zeit t in Stunden und die Konzentration f (t) in mg/ℓ gemessen.

a) Zeichnen Sie den zeitlichen Verlauf der Konzentration während der ersten 12 Stunden nach Einnahme des Medikaments und beurteilen Sie die Modellierung.

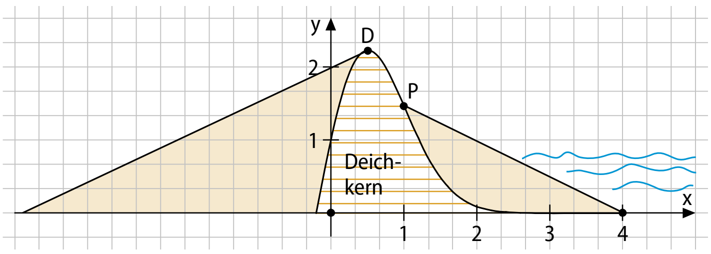
b) Ermitteln Sie, nach welcher Zeit die Konzentration ihren höchsten Wert erreicht, und geben Sie an, wie groß dieser Wert ist.

c) Das Medikament ist nur wirksam, wenn die Konzentration im Blut mindestens 4 mg/ℓ beträgt. Ermitteln Sie mithilfe Ihrer Zeichnung zu Teilaufgabe a) die Zeitspanne, innerhalb derer das Medikament wirksam ist.

d) Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt das Medikament am stärksten abgebaut wird, sowie die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 4$.

e) Für ein neues Medikament beschreibt die Funktion g mit $g(t) = ate^{-bt}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ und $t \geq 0$ die Konzentration. Dabei wird wieder die Zeit t seit der Einnahme in Stunden und die Konzentration g (t) in mg/ℓ gemessen.
Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b, wenn die Konzentration vier Stunden nach Einnahme ihren größten Wert 10 mg/ℓ erreicht hat.

16 An vielen Küsten schützen Deiche vor Überschwemmungen. Ein Deich besteht aus einem Deichkern sowie zum Land und zum Wasser hin auslaufenden Wällen. Der Querschnitt eines Deichkerns kann z. B. durch den Graphen der Funktion f mit
$f(x) = (5x + 1) \cdot e^{-0{,}4x - x^2}$, $D_f = [-0{,}2; 3]$,
beschrieben werden.



1 LE entspricht 2 m.

NHN: Normalhöhennull

a) Zur Landseite hin wird hinter dem Deichkern ein Sand-Kies-Gemisch aufgeschüttet. Das Profil der Aufschüttung kann durch eine lineare Funktion g beschrieben werden, deren Graph mit der Steigung 0,47 von der Deichkrone D bis NHN (bis zur x-Achse) reicht. Ermitteln Sie den Funktionsterm g (x).

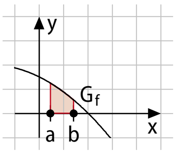
b) Zur Seeseite hin soll vor dem Deich vom Profilpunkt $P(1\,|\,1{,}48)$ aus abwärts ebenfalls ein Sand-Kies-Gemisch aufgeschüttet werden. NHN (hier die x-Achse) soll im Punkt $S(4\,|\,0)$ erreicht werden. Ermitteln Sie den Term h (x) einer linearen Funktion h, die das Profil dieser Aufschüttung beschreibt.

c) Ermitteln Sie, wie viele Kubikmeter Sand-Kies-Gemisch für je zehn laufende Meter der seeseitigen Aufschüttung benötigt werden.

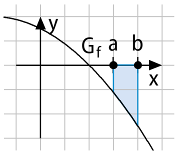
Das bestimmte Integral

Ist f eine im Intervall [a; b] stetige Funktion, dann beschreibt das **bestimmte Integral** $\int_a^b f(x)\,dx$ die **Flächenbilanz** der vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall [a; b] begrenzten Fläche.

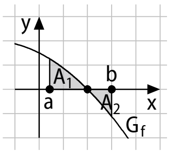
Für $f(x) \geq 0$ in [a; b] gilt $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.



Für $f(x) \leq 0$ in [a; b] gilt $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$.

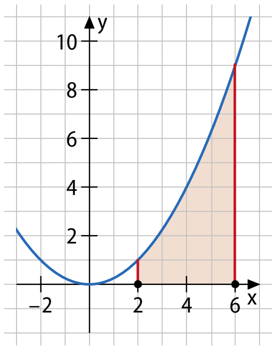


$$\int_a^b f(x)\,dx \begin{cases} > 0, & \text{wenn } A_1 > A_2 \\ = 0, & \text{wenn } A_1 = A_2 \\ < 0, & \text{wenn } A_1 < A_2 \end{cases} \text{ gilt.}$$



Der Inhalt der gekennzeichneten Fläche unter dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f\colon x \mapsto 0{,}25x^2$ entspricht dem Wert des Integrals

$A = \int_2^6 0{,}25x^2\,dx$

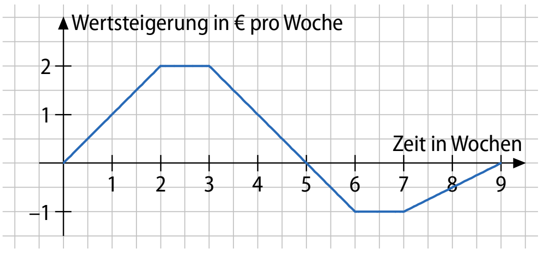


Eigenschaften:

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ (**Intervalladditivität**)
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Ist f die momentane Änderungsrate einer Größe, so gibt das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ die **Gesamtänderung** dieser Größe im Intervall [a; b] an.

Modelliert die Funktion f im Intervall [a; b] die momentane Änderungsrate eines Bestands B, so lässt sich der **Bestand B(b)** mithilfe des Terms $B(b) = B(a) + \int_a^b f(x)\,dx$ beschreiben; B(a) ist der **Anfangsbestand**.



Die Abbildung zeigt die momentane Änderungsrate des Werts einer Aktie, die anfänglich $B(0) = 13{,}25$ € wert war (f(t) in €/Woche; t: Zeit in Wochen).

Es gilt $\int_0^5 f(t)\,dt = \frac{5+1}{2} \cdot 2 = 6 > 0$. Die Aktie gewinnt in den ersten 5 Wochen 6 €.

Es gilt $\int_5^9 f(t)\,dt = -\frac{4+1}{2} \cdot 1 = -2{,}5 < 0$. Die Aktie verliert in den weiteren 4 Wochen 2,5 €.

Der Wert der Aktie beträgt nach 9 Wochen

$B(9) = B(0) + \int_0^9 f(t)\,dt = 13{,}25 + 3{,}5 = 16{,}75$ [€].

Die Integralfunktion

Ist die Funktion f stetig in einem Intervall I der Definitionsmenge und $a \in I$, dann heißt die Funktion F_a mit

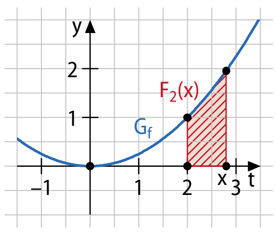
$\mathbf{F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$, $D_{F_a} = I$,

die jedem Wert von $x \in I$ den Wert des Integrals zuordnet, **Integralfunktion** von f mit der unteren Integrationsgrenze a.

Es gilt: $F_a(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ für alle $a \in D_f$.

$f(t) = \frac{1}{4}t^2$

$$F_2(x) = \int_2^x f(t)\,dt = \left[\frac{1}{12}t^3\right]_2^x$$
$$= \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{12} \cdot 2^3$$
$$= \frac{1}{12}x^3 - \frac{2}{3}$$



Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Jede Integralfunktion einer stetigen Funktion f ist eine **Stammfunktion** von f. Aus $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$; $a, x \in D_f$, folgt $\mathbf{F_a'(x) = f(x)}$.
Die Ableitung jeder Integralfunktion ist die Integrandenfunktion. Mit einer Stammfunktion F von f gilt dann:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Besondere Stammfunktionen ($c \in \mathbb{R}$):

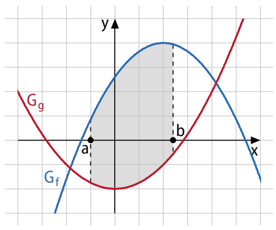
- $\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$
- $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + c$; $F'(x) = f(x)$, $a \neq 0$

$$\int_2^6 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^6 = \frac{1}{3} \cdot 6^3 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 = \frac{216}{3} - \frac{8}{3} = \frac{208}{3}$$

Berechnung von Flächeninhalten

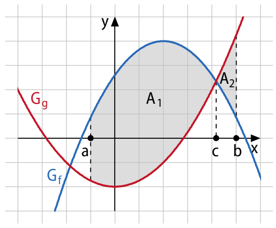
Für zwei in einem Intervall $I = [a; b]$ stetige Funktionen f und g und die von ihnen eingeschlossene Fläche mit dem Inhalt A gilt: Liegt der Graph von f in ganz I oberhalb des Graphen von g, so ist

$$\mathbf{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.}$$



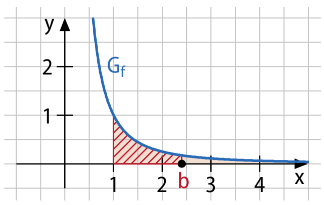
Bilden die Graphen G_f und G_g in I zwei Teilflächen, so ist

$$\mathbf{A = A_1 + A_2}$$
$$= \int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\,dx.$$



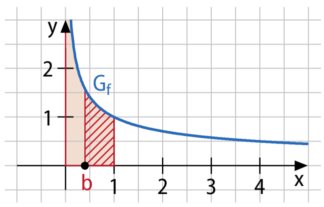
Uneigentliche Integrale

Integrandenfunktion reicht ins Unendliche



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right)$$
$$= 1$$

Integrandenfunktion strebt an einer Grenze ins Unendliche



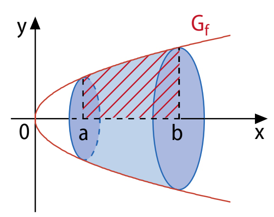
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b \to 0^+} \int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_b^1 = \lim_{b \to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{b}\right)$$
$$= 2$$

Das Volumen eines Rotationskörpers

Rotiert ein Flächenstück, das vom Graphen G_f einer stetigen Funktion f mit $f(x) \geq 0$ für jeden Wert von $x \in [a; b]$, der x-Achse und den achsenparallelen Geraden $g\colon x = a$ und $h\colon x = b > a$ berandet wird, um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper mit dem Volumen $\mathbf{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx}$.

$f(x) = \sqrt{x}$

$$V_1 = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\,dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$
$$= \frac{\pi}{2}(b^2 - a^2)$$



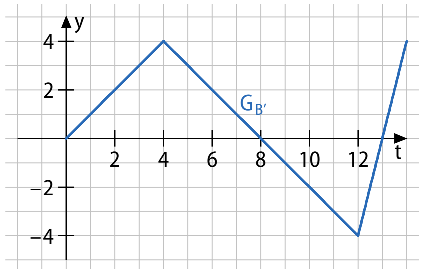
1 Am Ziel

Aufgaben zur Einzelarbeit

Das kann ich!	Das kann ich fast!	Das kann ich noch nicht!

Überprüfen Sie Ihre Fähigkeiten und Kompetenzen. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Aufgaben und bewerten Sie Ihre Lösungen mit einem Smiley.

1 Der gezeichnete Graph $G_{B'}$ beschreibt die momentane Änderungsrate eines Bestands B. Für $t = 0$ hat der Bestand den Wert 10.



a) Begründen Sie, zu welchen Zeitpunkten B maximal (minimal) ist.

b) Ermitteln Sie mithilfe von $G_{B'}$, ob B im Intervall $]0; 14]$ wieder den Wert 10 erreichen kann.

c) Berechnen Sie B (14) und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

2 Der Graph der Funktion $f: x \mapsto 0{,}25x^2 + 1$, $D_f = [0; 4]$, ist der Parabelbogen P. Zerlegen Sie das Intervall $I = [0; 4]$ in vier gleich lange Teilintervalle und geben Sie eine Abschätzung für den Inhalt A der Fläche, die von P, der y-Achse, der x-Achse und der Geraden g mit der Gleichung $x = 4$ berandet wird, an.

3 Geben Sie jeweils einen Term der Integralfunktion in integralfreier Schreibweise an.

a) $F_{-1}(x) = \int_{-1}^{x} (t^2 + 1)\,dt$

b) $F_1(x) = \int_{1}^{x} \left(e^t + \frac{1}{t}\right)dt$

c) $F_0(x) = \int_{0}^{x} \left(te^{t^2-2}\right)dt$

4 Berechnen Sie jeweils den Wert des Integrals.

a) $\int_{1}^{2} \frac{2x}{x^2+2}\,dx$ **b)** $\int_{-1}^{1} \left(x^2 \cdot e^{x^3-1}\right)dx$ **c)** $\int_{3}^{8} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

5 Begründen Sie jeweils, ob die Aussage wahr ist. Stellen Sie falsche Aussagen richtig. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer DMS.

a) $\int_{3}^{3} x^3\,dx = 0$ **b)** $\int_{2}^{3} (x^3 + x)\,dx > 0$

c) $\int_{-1}^{1} e^x\,dx + \int_{1}^{2} e^x\,dx > 0$ **d)** $5 \cdot \int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx > 0$

6 Berechnen Sie jeweils den Inhalt der Fläche …

a) zwischen dem Graphen von $f: x \mapsto e^x - 2$ und der x-Achse im Intervall $[0; 2]$.

b) zwischen den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f: x \mapsto x^2 - 1$ und $g: x \mapsto 3$.

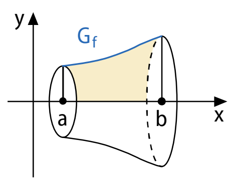
c) zwischen den Koordinatenachsen und dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$, $D_f = \mathbb{R}^+$.

7 Wird beim Befüllen eines Beckens der Hahn aufgedreht, so steigt die momentane Zuflussrate der Wassermenge $\left(\text{in } \frac{m^3}{min}\right)$ gemäß der Funktion $f: t \mapsto -t^3 + 3t^2$ ($t \geq 0$ in Minuten) bis zum Maximalwert an und bleibt dann konstant. Das Becken enthält zu Beginn 10 m^3 Wasser und über den gesamten Zeitraum fließen $1\,\frac{m^3}{min}$ ab.

a) Berechnen Sie den Inhalt des Beckens nach **1** 1 Minute **2** 10 Minuten.

b) Berechnen Sie, wann das Becken beginnt überzulaufen, wenn es 50 m^3 fasst.

8 Die obere Grenzlinie dieses Rotationskörpers kann durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 5e^{0{,}05x}$ modelliert werden.
Berechnen Sie sein Volumen in Abhängigkeit von a und b.



Aufgaben für Lernpartner

1 Bearbeiten Sie diese Aufgaben zuerst alleine.

2 Suchen Sie sich einen Partner oder eine Partnerin und arbeiten Sie zusammen weiter: Erklären Sie sich gegenseitig Ihre Lösungen. Korrigieren Sie fehlerhafte Antworten.

Sind folgende Behauptungen richtig oder falsch? Begründen Sie.

A Der Wert des bestimmten Integrals ist eine Zahl.

B Jedes bestimmte Integral liefert einen Flächeninhalt.

C Wenn die Begrenzungslinie einer Fläche unendlich lang ist, so muss auch der Flächeninhalt unendlich groß sein.

D An den Nullstellen einer Integralfunktion hat die Integrandenfunktion eine waagrechte Tangente.

E Eine Integralfunktion kann den Wert null annehmen, obwohl die entsprechenden Flächeninhalte nicht null sind.

F Der Wert des Integrals $\int_{-1}^{0} x^3\,dx$ ist der Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto x^3$, $D_f = [-1; 0]$, und der x-Achse eingeschlossen wird.

G Wird von der Ableitung einer Funktion die Integralfunktion berechnet, so erhält man wieder die ursprüngliche Funktion.

H Aus $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ folgt $a \leq c \leq b$.

I Aus $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = 0$ folgt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [a; b]$.

J Eine Funktion, die einen Bestand beschreibt, darf keine negativen Funktionswerte haben.

K Es reicht aus, die Funktion zu kennen, die die Änderung eines Bestands angibt, um den Bestand zu jedem Zeitpunkt berechnen zu können.

L Es gilt: $\int_0^2 (x \cdot e^{-x^2})\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot e^{-x^2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}e^{-4}$.

M Wenn mithilfe der Funktion f das Volumen eines Rotationskörpers berechnet werden kann, der durch Rotation des Graphen von f um die x-Achse entstanden ist, so kann mit derselben Funktion auch das Volumen des Körpers berechnet werden, der durch Rotation des Graphen von f um die y-Achse entsteht.

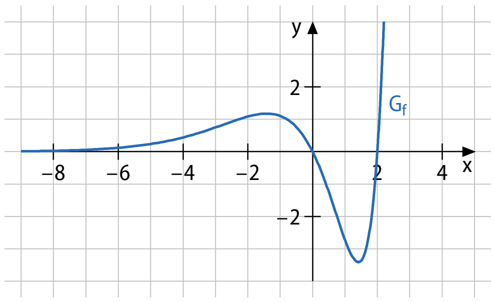
N Ist ein Rotationskörper innen hohl, so kann sein Volumen nicht berechnet werden, indem man den Graphen der Differenzfunktion von Außen- und Innenseite um die x-Achse rotieren lässt.

Ich kann …	Aufgaben	Hilfe
… mit bestimmten Integralen umgehen.	1, 3, 5, A, B, J	S. 10
… das bestimmte Integral als Gesamtänderung einer Größe interpretieren.	1, 6, H, K, L	S. 10, 11
… Integralfunktionen ermitteln.	2, D, E, G	S. 16
… mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung umgehen.	2, 3, 4, D	S. 20
… Flächeninhalte berechnen.	1, 5, C, E, F, I	S. 28
… das Volumen von Rotationskörpern berechnen.	7, M, N	S. 34

Abituraufgabe

Auch für mündliche Prüfungen geeignet.

1 Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der Funktion $f: x \mapsto x \cdot (x-2) \cdot e^x$, $D_f = \mathbb{R}$. Die Funktion $F: x \mapsto (x^2 - 4x + 4) \cdot e^x$, $D_F = \mathbb{R}$, ist eine Stammfunktion von f.



a) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int\limits_{-\infty}^{2} f(x)\,dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

b) Der Graph G_f und die x-Achse begrenzen im Bereich $-4 \le x \le 2$ eine Fläche. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

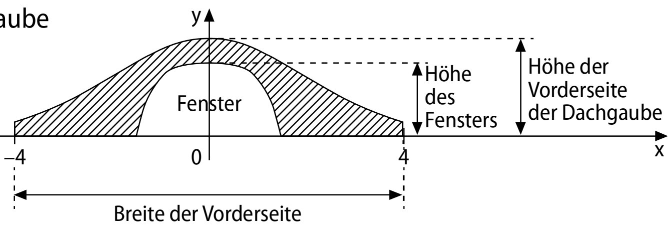
1 Der Inhalt der Fläche ist durch den Term $\int\limits_{-4}^{2} f(x)\,dx$ gegeben.

2 Das Volumen des Körpers, der durch Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht, ist durch den Term $\int\limits_{-4}^{2} \pi \cdot [f(x)]^2\,dx$ gegeben.

Interpretieren Sie den Term $\pi \cdot [f(x)]^2$ geometrisch.

Abituraufgabe

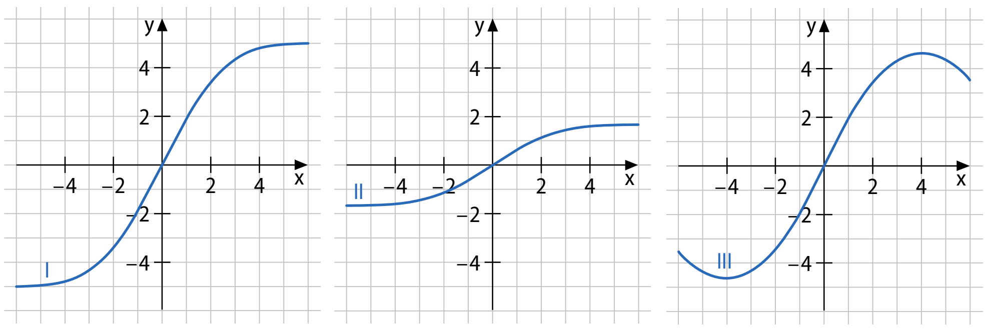
2 Die Vorderseite einer Dachgaube wird modellhaft durch das Flächenstück beschrieben, das der Graph G_f der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto 2e^{-\frac{1}{8}x^2}$, die x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen $x = 4$ und $x = -4$ einschließen (1 LE $\widehat{=}$ 1 m).



In der Vorderseite der Dachgaube befindet sich ein Fenster. Dem Fenster entspricht im Modell das Flächenstück, das der Graph der Funktion g mit $g(x) = ax^4 + b$ und geeigneten Werten $a, b \in \mathbb{R}$ mit der x-Achse einschließt.

a) Begründen Sie, dass a negativ und b positiv ist.

b) Um den Flächeninhalt der Vorderseite der Dachgaube zu ermitteln, wird eine Stammfunktion F von f betrachtet. Einer der Graphen I, II und III ist der Graph von F. Begründen Sie, dass dies Graph I ist, indem Sie jeweils einen Grund dafür angeben, dass Graph II und Graph III nicht infrage kommen.



c) Bestimmen Sie mithilfe des Graphen von F aus Teilaufgabe b) den Flächeninhalt der gesamten Vorderseite der Dachgaube (einschließlich des Fensters).

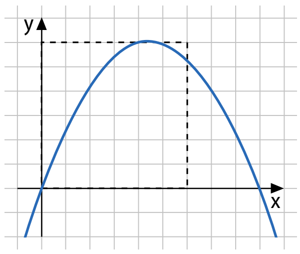
d) Beschreiben Sie unter Einbeziehung dieses Flächeninhalts die wesentlichen Schritte eines Lösungswegs, mit dem der Wert von a rechnerisch so bestimmt werden könnte, dass bei einer Fensterhöhe von 1,50 m der Teil der Vorderseite der Dachgaube, der in der Abbildung schraffiert dargestellt ist, den Flächeninhalt 6 m^2 hat.

3 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f\colon x \mapsto -x^2 + 2ax$ mit $a \in\,]1; +\infty[$. Die Nullstellen von f sind 0 und 2a.

Abituraufgabe

a) Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ besitzt.

b) Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abbildung). Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, überein. Bestimmen Sie den Wert von a.

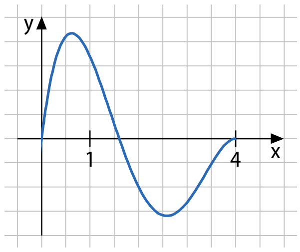


4 Auf einer Autobahn entsteht morgens an einer Baustelle häufig ein Stau. An einem bestimmten Tag entsteht der Stau um 6.00 Uhr und löst sich bis 10.00 Uhr vollständig auf. Für diesen Tag kann die momentane Änderungsrate der Staulänge mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit

$f(x) = x \cdot (8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2 = -\frac{5}{16}x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 8x$

beschrieben werden (x: die nach 6.00 Uhr vergangene Zeit in Stunden; f (x) die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometern pro Stunde). Die Abbildung zeigt den Graphen von f für $0 \le x \le 4$.

Abituraufgabe



a) Nennen Sie die Zeitpunkte, zu denen die lokale Änderungsrate der Staulänge den Wert null hat, und begründen Sie anhand der Struktur des Funktionsterms von f, dass es keine weiteren solchen Zeitpunkte gibt.

$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{4}x\right) \cdot (5x^2 - 16x + 8)$

b) Es gilt $f(2) < 0$. Interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang.

c) Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge am stärksten zunimmt.

Im Sachzusammenhang ist neben der Funktion f die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion s mit

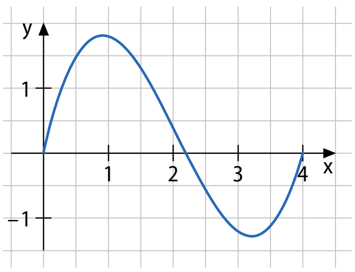
$s(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot (4 - x)^3 = -\frac{1}{16}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 3x^3 + 4x^2$ von Bedeutung.

d) Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: Die Staulänge kann für jeden Zeitpunkt von 6.00 Uhr bis 10.00 Uhr durch die Funktion s angegeben werden.

e) Bestätigen Sie rechnerisch, dass sich der Stau um 10.00 Uhr vollständig aufgelöst hat.

f) Berechnen Sie die Zunahme der Staulänge von 6.30 Uhr bis 8.00 Uhr und bestimmen Sie für diesen Zeitraum die mittlere Änderungsrate der Staulänge.

g) Für einen anderen Tag wird die momentane Änderungsrate der Staulänge für den Zeitraum von 6.00 Uhr bis 10.00 Uhr durch den in der nebenstehenden Abbildung gezeigten Graphen dargestellt. Dabei ist x die nach 6.00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und y die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometern pro Stunde. Um 7.30 Uhr hat der Stau eine bestimmte Länge. Es gibt einen anderen Zeitpunkt, zu dem der Stau die gleiche Länge hat. Übertragen Sie die Abbildung in Ihre Unterlagen und markieren Sie dort diesen Zeitpunkt, begründen Sie Ihre Markierung und veranschaulichen Sie Ihre Begründung in Ihrer Abbildung.



Lösungen

Mediencode 63033-03