Aufgabe 1

1.1

Ermittlung des besten Angebots für Herrn Zink:
Angebot 1:
Anzahlung eines Betrags (120 000 €), Rest (100 000 €) ein Jahr später zu einem Zinssatz von 3,5 %

$$K_0 = 120\,000\text{ €} + \frac{100\,000\text{ €}}{1{,}035} = 216\,618{,}36\text{ €}$$

Angebot 2:
In zwei Jahren fünf vorschüssige Zahlungen in Höhe von 50 000 €

$$K_0 = 50\,000\text{ €} \cdot 1{,}035 \cdot \frac{1{,}035^5 - 1}{1{,}035^7 \cdot 0{,}035} = 218\,118{,}47\text{ €}$$

Angebot 3:
Anzahlung eines Betrags (15 000 €), Rest als vier nachschüssige Zahlungen in Höhe von 52 000 €

$$K_0 = 15\,000\text{ €} + 52\,000 \cdot \frac{1{,}035^4 - 1}{1{,}035^4 \cdot 0{,}035} = 206\,000{,}12\text{ €}$$

Herr Zink sollte sich für das Angebot 3 entscheiden.

1.2

Berechnung der Jahre über die Formel zur Kapitalminderung:

$$K_0 = 500\,000\text{ €} \cdot 0{,}2 = 100\,000\text{ €}$$

$$0 = 100\,000\text{ €} \cdot 1{,}025^n - 8\,000\text{ €} \cdot \frac{1{,}025^n - 1}{0{,}025}$$

$$0 = 100\,000\text{ €} \cdot 1{,}025^n - 320\,000\text{ €} \cdot 1{,}025^n + 320\,000\text{ €}$$

$$-320\,000\text{ €} = (100\,000\text{ €} - 320\,000\text{ €}) \cdot 1{,}025^n$$

$$\lg \frac{16}{11} = n \cdot \lg 1{,}025$$

$$n = 15{,}17 \approx 15 \text{ (Jahre)}$$

Herr Zink könnte sich den vollständigen Betrag 15 Jahre lang auszahlen lassen.

1.3

$$0 = 100\,000\text{ €} \cdot 1{,}025^{10} - r \cdot 1{,}025 \cdot \frac{1{,}025^{10} - 1}{0{,}025}$$

$$r \cdot 1{,}025 \cdot \frac{1{,}025^{10} - 1}{0{,}025} = 100\,000\text{ €} \cdot 1{,}025^{10}$$

$$r = 100\,000\text{ €} \cdot 1{,}025^{10} \cdot \frac{0{,}025}{1{,}025 \cdot (1{,}025^{10} - 1)}$$

$$r = 11\,147{,}20\text{ €}$$

Sollen die Auszahlungen nur über 10 Jahre laufen, entspräche dies einer jährlichen Rate von etwa 11 100 €.

1.4

Berechnung der konstanten Annuität:

$$A = \frac{150\,000\text{ €} \cdot 1{,}029^{10} \cdot 0{,}029}{1{,}029^{10} - 1} = 17\,494{,}95\text{ €}$$

Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	150 000,00 €	4 350,00 €	13 144,95 €	17 494,95 €
2	136 855,05 €	3 968,80 €	13 526,15 €	17 494,95 €

1.5

Berechnung der Restschuld am Ende des 5. Jahres

$$K_5 = 150\,000\text{ €} \cdot 1{,}029^5 - \frac{17\,494{,}95\text{ €} \cdot (1{,}029^5 - 1)}{0{,}029} = 80\,351{,}05\text{ €}$$

$\Rightarrow$ Die Summe reicht nicht aus.

Aufgabe 2

2.1

Ermittlung des besten Angebots für Herrn Sauer:

Angebot A:

Anzahlung eines Betrags (85 000 €), Rest nach drei Jahren in Form von sieben nachschüssigen Zahlungen mit einer jährlichen Rate von 55 000 €

$$\text{Angebot A: } B = 55\,000{,}00\text{ €} \cdot 1{,}025 \frac{1{,}025^7 - 1}{1{,}025^7 \cdot (1{,}025 - 1)} = 357\,946{,}89\text{ €}$$

$$B = 357\,946{,}89\text{ €} : 1{,}025^3 = 332\,389{,}28\text{ €}$$

$$B = 85\,000{,}00\text{ €} + 332\,389{,}28\text{ €} = 417\,389{,}28\text{ €}$$

Angebot B:

Fünf Jahre nachschüssige Zahlungen mit einer jährlichen Rate von 88 000 €

$$\text{Angebot B: } B = 88\,000{,}00\text{ €} \cdot \frac{1{,}025^5 - 1}{1{,}025^5 \cdot (1{,}025 - 1)} = 408\,832{,}91\text{ €}$$

Angebot C:
Die Zahlung erfolgt in drei gleichen Raten à 155 000 € im Abstand von 4 Jahren. Die erste Rate ist sofort fällig.

Angebot C: $B = 155\,000{,}00\text{ €} + \dfrac{155\,000{,}00\text{ €}}{1{,}025^4} + \dfrac{155\,000{,}00\text{ €}}{1{,}025^8} = 422\,638{,}07\text{ €}$

Das Angebot C ist für Herrn Sauer finanziell am besten.

2.2

Berechnung des Zinssatzes:

$120\,000{,}00\text{ €} = 100\,000{,}00\text{ €} \cdot q^{10}$

$q^{10} = \frac{120\,000{,}00\text{ €}}{100\,000{,}00\text{ €}} \Rightarrow q = 1{,}0184 \Rightarrow p = 1{,}84\ \%$

2.3

Berechnung der Jahre über die Formel zur Kapitalminderung:

$0 = 24\,000{,}00\text{ €} \cdot 1{,}007^n - 4\,900{,}00\text{ €} \cdot 1{,}007 \cdot \dfrac{1{,}007^n - 1}{1{,}007 - 1}$

$0 = 24\,000{,}00\text{ €} \cdot 1{,}007^n - 704\,900{,}00\text{ €} \cdot (1{,}007^n - 1)$

$0 = 24\,000{,}00\text{ €} \cdot 1{,}007^n - 704\,900{,}00\text{ €} \cdot 1{,}007^n + 704\,900{,}00\text{ €}$

$-704\,900{,}00\text{ €} = -680\,900{,}00\text{ €} \cdot 1{,}007^n$

$\frac{704\,900{,}00\text{ €}}{680\,900{,}00\text{ €}} = 1{,}007^n \quad |\lg$

$n = 4{,}97 \approx 5$ (Jahre)

Nach fünf Jahren ist Katjas Guthaben aufgebraucht.

2.4

Tilgungsplan bei Annuitätentilgung mit einer konstanten Annuität in Höhe von 5 400 €

Jahr	Schuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	150 000,00 €	3 900,00 €	1 500,00 €	5 400,00 €
2	148 500,00 €	3 861,00 €	1 539,00 €	5 400,00 €

2.5

Berechnung der Restschuld nach 10 Jahren:

$146\,961{,}00\text{ €} - 10\,000{,}00\text{ €} = 136\,961{,}00\text{ €}$

$K_{10} = 136\,961{,}00\text{ €} \cdot 1{,}026^8 - \dfrac{5\,400{,}00\text{ €} \cdot (1{,}026^8 - 1)}{1{,}026 - 1} = 120\,838{,}16\text{ €}$

Die Restschuld am Ende des 10. Jahres beträgt 120 838,16 €.

Aufgabe 3

3.1

Berechnung des Kapitals mit der Zinseszinsformel:

$K_{10} = 50\,000{,}00\text{ €} \cdot 1{,}015^{10} = 58\,027{,}04\text{ €}$

$K_{15} = 58\,027{,}04\text{ €} \cdot 1{,}025^5 = 65\,652{,}27\text{ €}$

Herr Gigl würde bei Vertragsende 65 652,27 € ausbezahlt bekommen.

3.2
Berechnung des Zinssatzes mit der Zinseszinsformel:

$$100\,000{,}00\text{ €} = 50\,000{,}00\text{ €} \cdot q^{15}$$

$$q^{15} = \frac{100\,000{,}00\text{ €}}{50\,000{,}00\text{ €}} \Rightarrow q = 1{,}0473 \Rightarrow p = 4{,}73\ \%$$

Der durchschnittliche Zinssatz beträgt 4,73 %.

3.3
Ermittlung des besten Angebots für Herrn Gigl:

Angebot A:

Sofortzahlung in Höhe von 85 000 €

$K_0 = 85\,000{,}00$ €

Angebot B:

Die Auszahlung erfolgt in drei nachschüssigen jährlichen Zahlungen bei einer Rate von 31 000 €. Diese beginnen in einem Jahr.

$$R_0 = 31\,000{,}00\text{ €} \cdot \frac{1{,}026^3 - 1}{1{,}026^4 \cdot 0{,}026} = 86\,126{,}39\text{ €}$$

Angebot C:

Die Auszahlung erfolgt in vier vorschüssigen jährlichen Zahlungen bei einer Rate von 15 000 €. Zusätzlich erfolgt eine Abschlusszahlung in Höhe von 32 000 €.

$$R_0' = 15\,000{,}00\text{ €} \cdot 1{,}026 \cdot \frac{1{,}026^4 - 1}{1{,}026^4 \cdot 0{,}026} + \frac{32\,000{,}00\text{ €}}{1{,}026^5} = 85\,903{,}36\text{ €}$$

Herr Gigl sollte das Finanzierungsangebot A wählen.

3.4
Tilgungsplan bei Annuitätentilgung mit einer konstanten Annuität in Höhe von 2 800 €

Zinssatz im 1. Jahr: $\frac{700{,}00\text{ €} \cdot 100}{35\,000{,}00\text{ €}} = 2{,}00\ \%$

Jahr	Schuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	35 000,00 €	700,00 €	2 100,00 €	2 800,00 €
2	32 900,00 €	658,00 €	2 142,00 €	2 800,00 €

3.5
Berechnung der Zeit, bis alle Schulden getilgt sind:

$$2\,800{,}00\text{ €} = \frac{35\,000{,}00\text{ €} \cdot 1{,}02^n\,(1{,}02 - 1)}{1{,}02^n - 1}$$

$$2\,800{,}00\text{ €} \cdot (1{,}02^n - 1) = 700{,}00\text{ €} \cdot 1{,}02^n$$

$$2\,800{,}00\text{ €} \cdot 1{,}02^n - 2\,800{,}00\text{ €} = 700{,}00\text{ €} \cdot 1{,}02^n$$

$$2\,100{,}00\text{ €} \cdot 1{,}02^n = 2\,800{,}00\text{ €}$$

$$1{,}02^n = \frac{2\,800{,}00\text{ €}}{2\,100{,}00\text{ €}}$$

$$n = \frac{\lg\left(\frac{4}{3}\right)}{\lg 1{,}02} = 14{,}53 \approx 15\ \text{(Jahre)}$$

Herr Gigl kann sein Ziel erreichen und wäre in 15 Jahren schuldenfrei.