2 Reelle Zahlen

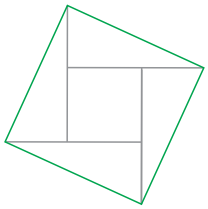
Einstieg

- Der Pariser Platz in Berlin ist ein rund 1,5 ha großer quadratischer Platz, an dem das Brandenburger Tor steht. Du läufst einmal um den Pariser Platz herum. Ermittle die Länge des Weges, den du dabei zurücklegst. Beschreibe deinen Lösungsweg.
- Wie lang ist die Strecke, wenn man einmal quer über den Pariser Platz läuft? Bestimme zeichnerisch die Länge der zurückgelegten Strecke.
- Auf dem Pariser Platz sind rechteckige Gartenanlagen. Welche Seitenlänge hat ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt? Beschreibe dein Vorgehen.

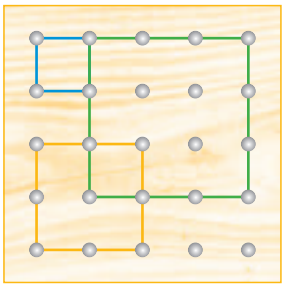
Ausblick

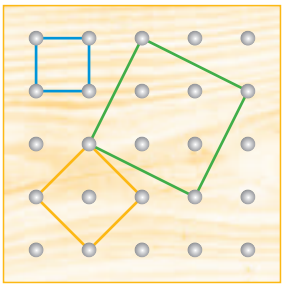
Am Ende dieses Kapitels hast du gelernt, …

- was Quadratwurzeln sind.
- wie man Quadratwurzeln ermittelt.
- was reelle Zahlen sind.
- wie man mit reellen Zahlen rechnen kann.



Auf dem Geobrett wurden Quadrate gespannt. Das blaue Quadrat mit 2 cm Seitenlänge hat einen Flächeninhalt von 4 cm².

1 

2 

- Bestimme die Flächeninhalte der gelben und grünen Quadrate im Vergleich zum blauen Quadrat. Zerlege die Quadrate gegebenenfalls.
- Ermittle die Seitenlängen der Quadrate. Beschreibe auftretende Probleme.

Radix (lat.) bedeutet „Wurzel“. Radieschen sind Wurzelgemüse mit dem gleichen Wortstamm.

$\sqrt{a}$ ⟶ *Quadrieren* ⟶ a

a ⟶ *Wurzelziehen* ⟶ $\sqrt{a}$

Beachte:
$\sqrt{0} = 0$, *denn* $0^2 = 0$

MERKWISSEN

Die **Umkehrung des Potenzierens** bezeichnet man als **Wurzelziehen** (**Radizieren**).

Aus negativen Zahlen kann man keine Wurzeln ziehen. Für alle anderen Zahlen a ist die **Quadratwurzel** die nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt.
Man schreibt $\sqrt{a} = x$, wenn $x^2 = a$ mit $a, x \geqq \mathbb{Q}$.
Sprechweise:
„Die Quadratwurzel aus a ist x.“ oder kurz: „Die Wurzel aus a ist x.“
Den Term unter der Wurzel (hier die Zahl a) nennt man **Radikand**.

Beispiel: $\sqrt{144} = 12$. „Die Wurzel aus 144 ist 12.“

AUFGABEN

I Gegeben sind Quadrate mit den Flächeninhalten 169 cm² und 324 cm². Gib die Seitenlänge der Quadrate an. Nutze die Wurzelschreibweise.

Lösung:
$\sqrt{169\ \text{cm}^2} = 13$ cm, da $13\ \text{cm} \cdot 13\ \text{cm} = 169\ \text{cm}^2$
$\sqrt{324\ \text{cm}^2} = 18$ cm, da $18\ \text{cm} \cdot 18\ \text{cm} = 324\ \text{cm}^2$

II Bestimme die folgenden Quadratwurzeln und begründe deine Rechnung.

a) $\sqrt{289}$ **b)** $\sqrt{625}$ **c)** $\sqrt{1{,}44}$ **d)** $\sqrt{0{,}64}$

Lösung:
a) $\sqrt{289} = 17$, denn $17 \cdot 17 = 289$
b) $\sqrt{625} = 25$, denn $25 \cdot 25 = 625$
c) $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, denn $1{,}2 \cdot 1{,}2 = 1{,}44$
d) $\sqrt{0{,}64} = 0{,}8$, denn $0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$

VERSTÄNDNIS

- Begründe, warum es keine Quadratwurzeln aus negativen Zahlen gibt.
- „Verzehnfacht man eine rationale Zahl, so verzehnfacht sich auch der Wert ihrer Quadratwurzel.“ Stimmt das? Begründe.

AUFGABEN

1 Ein rechteckiges Grundstück ist 64 m lang und 25 m breit. Welche Maße muss ein quadratisches Grundstück mit dem gleichen Flächeninhalt haben?

2 **a)** Beschreibe den Zusammenhang zwischen den Quadratzahlen und den Quadratwurzeln. Welche Gesetzmäßigkeit erkennst du?

1 $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{400} = 20$ $\sqrt{40\,000} = 200$ $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$ $\sqrt{0{,}0004} = 0{,}02$

2 $\sqrt{196} = 14$ $\sqrt{19\,600} = 140$ $\sqrt{1{,}96} = 1{,}4$ $\sqrt{0{,}0196} = 0{,}14$

b) Radiziere im Kopf.

1 $\sqrt{625} = 25$: $\sqrt{62\,500}$ $\sqrt{0{,}0625}$ $\sqrt{6{,}25}$ $\sqrt{625\,000\,000}$

2 $\sqrt{3{,}61} = 1{,}9$: $\sqrt{3\,610\,000}$ $\sqrt{0{,}000361}$ $\sqrt{361}$ $\sqrt{36\,100}$

3 $\sqrt{48\,400} = 220$: $\sqrt{\square} = 2{,}2$ $\sqrt{\square} = 0{,}22$ $\sqrt{\square} = 22\,000$ $\sqrt{\square} = 22$

3 Bestimme die Quadratwurzeln im Kopf.

a) $\sqrt{36}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{169}$; $\sqrt{225}$; $\sqrt{400}$; $\sqrt{625}$; $\sqrt{900}$; $\sqrt{10\,000}$

b) $\sqrt{1}$; $\sqrt{0{,}64}$; $\sqrt{0{,}25}$; $\sqrt{0{,}09}$; $\sqrt{0{,}81}$; $\sqrt{1{,}21}$; $\sqrt{1{,}44}$; $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{0{,}0001}$; $\sqrt{0{,}0016}$

4 Welche Ziffern fehlen? Bestimme die Quadratwurzeln.

Findest du mehrere Möglichkeiten?

a) $\sqrt{1\square1} = 11$ $\sqrt{\square4} = 8$

b) $\sqrt{\square00} = 10$ $\sqrt{\square00} = 20$

c) $\sqrt{14\square} = 12$ $\sqrt{25\square} = 16$

d) $\sqrt{\square25} = \square5$ $\sqrt{\square76} = 2\square$

5 Die Quadrate mit den Seitenlängen a und die Rechtecke mit den Seitenlängen b und c sollen flächeninhaltsgleich sein. Vervollständige die Tabelle im Heft.

Lösungen zu 5:
130; 169; 49; 7; 134,56; 46,4; 35; 25; 576; 40; 12; 18
Die Einheiten sind nicht angegeben.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
A	324 cm²	☐	12,25 dm²	☐	1,69 ha	☐
a	☐	24 m	☐	116 mm	☐	☐
b	27 cm	☐	☐	2,9 cm	100 m	3,5 dm
c	☐	14,4 m	49 cm	☐	☐	1,4 m

6

Die **Kubikwurzel** aus einer positiven Zahl a ist diejenige positive Zahl b, deren dritte Potenz a ergibt. Wir betrachten vor allem die Kubikwurzeln von Kubikzahlen.
Es gilt: $\sqrt[3]{a} = b$, wenn $b \cdot b \cdot b = b^3 = a$ $\quad (a, b > 0)$
Sprechweise: „Die 3. Wurzel aus a ist b." oder „Die Kubikwurzel aus a ist b."

Wie lautet jeweils die zugehörige Kubikwurzel bzw. Kubikzahl?

Kubikzahl	1	☐	☐	☐	1 000 000
Kubikwurzel	☐	3	5	50	☐

WISSEN

Wurzeln mit dem Taschenrechner bestimmen

Mit dem Taschenrechner kann man quadrieren (Taste z. B. x^2) und Quadratwurzeln ziehen (Taste z. B. $\sqrt{\ }$).

- Berechne mit deinem Taschenrechner: 3^2; 62^2; 245^2; $3{,}7^2$; $0{,}27^2$; $0{,}054^2$
- Berechne folgende Wurzeln mit dem Taschenrechner.
  a) $\sqrt{64}$; $\sqrt{361}$; $\sqrt{0{,}64}$; $\sqrt{1{,}21}$; $\sqrt{0{,}49}$ **b)** $\sqrt{\frac{16}{9}}$; $\sqrt{\frac{49}{196}}$; $\sqrt{\frac{361}{10\,000}}$; $\sqrt{0{,}0289}$
- Mit der Taste $(\sqrt[3]{\ })$ können auch 3. Wurzeln bestimmt werden, beispielsweise die Kantenlänge eines Würfels mit dem Volumen 27 cm³: $\sqrt[3]{27} = 3$.
  Berechne mit dem Taschenrechner: $\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$; $\sqrt[3]{729}$; $\sqrt[3]{3375}$; $\sqrt[3]{1}$

aus: Hans Magnus Enzensberger: Der Zahlenteufel. Carl Hanser Verlag, München 1997, S. 77 f.

Der Zahlenteufel und Robert unterhalten sich:
Zahlenteufel: Rettich aus vier?
Robert: Rettich aus vier ist zwei.
Zahlenteufel: Rettich aus 5929?
Robert: Du spinnst ja. Wie soll ich das denn ausrechnen?
Zahlenteufel: Immer mit der Ruhe. Für solche kleinen Probleme haben wir doch unsern Taschenrechner. Also probier mal.
Robert: 77
Zahlenteufel: Wunderbar. Aber jetzt kommt's! Drücke bitte $\sqrt{2}$, aber halte dich gut fest!

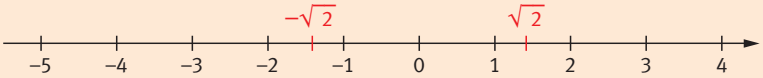
- Informiere dich über die Bedeutung des Wortes „Rettich" im Text.
- Was liest Robert nach der Eingabe von $\sqrt{2}$ auf dem Taschenrechner? Probiere.

MERKWISSEN

Eine Zahl nennt man **irrational**, wenn man sie nicht als Bruch $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$ schreiben kann. Rationale Zahlen lassen sich als endliche oder periodische Dezimalbrüche darstellen, irrationale Zahlen nur als unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche.

Beispiel: $\sqrt{2}$ ist irrational, denn es gibt keine rationale Zahl, die quadriert 2 ergibt (zum Beweis siehe nächste Seite).

Jeder irrationalen Zahl ist ein Punkt auf der Zahlengeraden zugeordnet.



Es gilt beim Wurzelziehen die Monotonie:
$0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

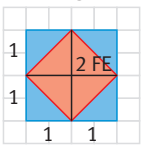
endlicher Dezimalbruch:
0,5; 1,4; 4,25; −8

periodischer Dezimalbruch:
0,333...; 1,45454545...

BEISPIELE

I Zeige grafisch, dass die Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 1 LE die Länge $\sqrt{2}$ LE hat.

Lösung:



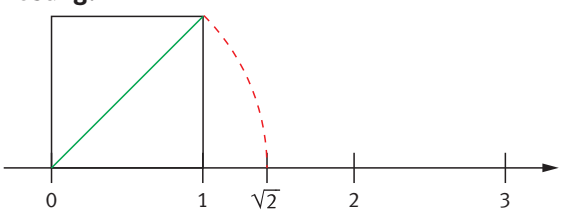
Setzt man vier Quadrate der Seitenlänge 1 LE zu einem großen Quadrat zusammen, dann hat es den Flächeninhalt 4 FE.
Das rote Quadrat, dessen Seiten die Diagonalen der kleinen Quadrate sind, hat den halben Flächeninhalt, also 2 FE. Also müssen die Diagonalen die Länge $\sqrt{2}$ LE haben, denn $\sqrt{2}$ LE $\cdot \sqrt{2}$ LE = 2 FE.

LE steht für Längeneinheit, z. B. cm, dm, ...

FE steht für Flächeneinheit, z. B. cm², dm², ...

II Stelle die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ auf dem Zahlenstrahl dar.

Lösung:



VERSTÄNDNIS

- Erkläre den Unterschied zwischen endlichen und periodischen Dezimalbrüchen.
- Welche natürlichen Zahlen kennst du, deren Wurzel auf keinen Fall eine irrationale Zahl ist? Beschreibe.
- Begründe die Monotonie des Wurzelziehens aus dem Merkwissen.

AUFGABEN

Versuche, Quadratzahlen zu erkennen.

1 Entscheide ohne Taschenrechner, ob die Zahl rational oder irrational ist.

a) $\sqrt{1}$ b) $\sqrt{2}+3$ c) $3\sqrt{2}$ d) $5+\sqrt{11}$

e) $\sqrt{20}+5$ f) $\sqrt{5}\cdot\frac{1}{20}$ g) $\sqrt{1{,}44}$ h) $-\sqrt{4}$

2 Bestimme mit dem Taschenrechner. Runde irrationale Zahlen auf zwei Dezimalen.

a) $\sqrt{15}$ b) $\sqrt{36}$ c) $\sqrt{0{,}25}$ d) $\sqrt{\frac{17}{100}}$

e) $\sqrt{40}$ f) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ g) $\sqrt{\frac{3}{4}}$ h) $\sqrt{0}$

3 Stelle die irrationale Zahl $\sqrt{18}$ auf dem Zahlenstrahl dar, indem du sie wie in Beispiel II als Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 3 cm abträgst. Versuche ein solches Vorgehen auch für Wurzel 8.

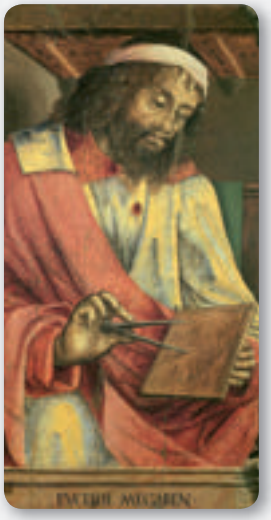
4 Vergleiche und setze <, > oder =.

a) $\sqrt{5}\square\sqrt{6}$ b) $1{,}5\square\sqrt{3}$ c) $\sqrt{10}\square(\sqrt{10})^2$ d) $\sqrt{25{,}25}\square 5$

e) $\frac{12}{7}\square\sqrt{3}$ f) $3\frac{1}{3}\square\sqrt{11}$ g) $\sqrt{27{,}04}\square 5{,}2$ h) $\sqrt{\frac{1}{9}}\square\sqrt{\frac{1}{3}}$

WISSEN

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl



Ein Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, stammt von Euklid von Alexandria, der von ungefähr 360 bis 280 vor Christus gelebt hat.

Dabei nimmt man zunächst an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, und folgert dann, dass dies zu einem Widerspruch führt („Widerspruchsbeweis“).

Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, so kann man sie als vollständig gekürzten Bruch schreiben ($p, q \in \mathbb{N}$): p und q haben also keine gemeinsamen Teiler mehr.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ | $()^2$

Man quadriert beide Seiten:

$2 = \frac{p^2}{q^2}$ | $\cdot q^2$

Durch Umformung erhält man:

$2 \cdot q^2 = p^2$

$2 \cdot q^2 = p \cdot p$

Da $2 \cdot q^2$ durch 2 teilbar ist, ist auch $p \cdot p$ durch 2 teilbar. Also ist p gerade und es gilt:

$\mathbf{p = 2 \cdot k}$ $(k \in \mathbb{N})$

Dann gilt also:

$2 \cdot q^2 = (2 \cdot k)^2$

$\mathbf{q^2 = 2 \cdot k^2}$

Auf die gleiche Weise zeigt man, dass auch q durch 2 teilbar ist.

Damit sind p und q durch 2 teilbar. Folglich ist $\frac{p}{q}$ aber kein vollständig gekürzter Bruch. Widerspruch!

Demzufolge ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl, da sie sich nicht als Bruch $\frac{p}{q}$ aus zwei natürlichen Zahlen p und q darstellen lässt.

- Übertrage die Umformungen in dein Heft und beschreibe sie mit eigenen Worten.
- Zeige auf gleiche Weise, dass $\sqrt{3}$ ebenfalls eine irrationale Zahl ist.

Zwischen uns passt nichts mehr …

Zwischen zwei rationalen Zahlen auf dem Zahlenstrahl liegen unendlich viele weitere rationale Zahlen. Man sagt: Die rationalen Zahlen liegen dicht. Ist noch Platz für die irrationalen Zahlen?

- Stelle $\frac{7}{5}$ und $\frac{8}{5}$ auf dem Zahlenstrahl dar (1 LE ≙ 10 cm).
- Bilde den Mittelwert der beiden Zahlen und dann jeweils den Mittelwert der neuen Zahl und der gegebenen Zahlen. Setze dieses Verfahren mindestens zweimal fort.
- Trage alle entstehenden Zahlen auf dem Zahlenstrahl ein.
- Wo liegt $\sqrt{2}$?

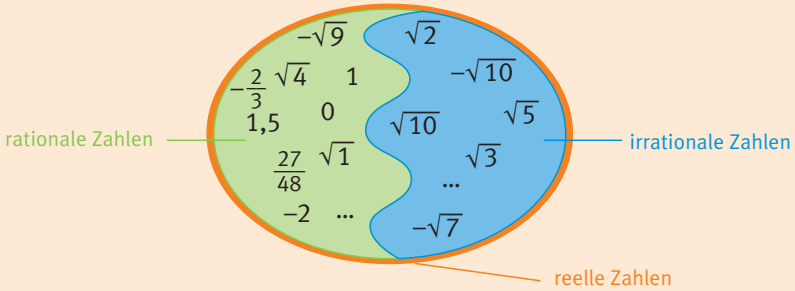
Geschlossenes Intervall $[2{,}6;\ 2{,}7]$ bedeutet $2{,}6 \leqq x \leqq 2{,}7$, offenes Intervall $]2{,}6;\ 2{,}7[$ bedeutet $2{,}6 < x < 2{,}7$.

Symbol	Bedeutung
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen

MERKWISSEN

Jede **rationale Zahl** kann man als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen. Jeder unendliche, nicht periodische Dezimalbruch ist eine **irrationale** Zahl. Jede irrationale Zahl lässt sich beliebig genau zwischen zwei rationalen Zahlen **einschachteln**. Eine Folge von unendlich vielen Intervallen nennt man **Intervallschachtelung**, wenn jedes Intervall im vorhergehenden Intervall ganz enthalten ist und die Intervalllänge mit jedem Schritt kleiner wird.

Die Gesamtheit der rationalen und irrationalen Zahlen bezeichnet man als die Menge der **reellen Zahlen** mit dem Symbol $\mathbb{R}$.



Jedem Punkt der Zahlengeraden ist genau eine reelle Zahl zugeordnet und jede reelle Zahl besitzt genau einen Punkt auf der Zahlengeraden.

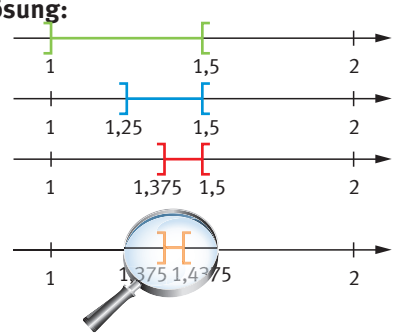
BEISPIELE

Vergleiche die Genauigkeit deiner Ergebnisse.

I $\sqrt{2}$ liegt im Intervall $]1;\ 2[$, denn $1^2 < 2 < 2^2$. Gib vier weitere Intervalle für $\sqrt{2}$ an …
a) durch Halbierung der Intervalle. **b)** durch sinnvolle Einschachtelung.
Vergleiche die Genauigkeit deiner Ergebnisse.

Lösung:

a)



$\sqrt{2} \in\ ]1;\ 1{,}5[$, denn $1^2 < 2 < 1{,}5^2$

$\sqrt{2} \in\ ]1{,}25;\ 1{,}5[$, denn $1{,}25^2 < 2 < 1{,}5^2$

$\sqrt{2} \in\ ]1{,}375;\ 1{,}5[$, denn $1{,}375^2 < 2 < 1{,}5^2$

$\sqrt{2} \in\ ]1{,}375;\ 1{,}4375[$, denn $1{,}375^2 < 2 < 1{,}4375^2$

Das Intervall wird halbiert. Es wird entschieden, ob das Quadrat der gesuchten Zahl zwischen den Quadraten der Intervallgrenzen liegt.

b) $\sqrt{2} \in]1{,}4;\ 1{,}5[$, denn $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$
$\sqrt{2} \in]1{,}41;\ 1{,}42[$, denn $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$
$\sqrt{2} \in]1{,}414;\ 1{,}415[$, denn $1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$
$\sqrt{2} \in]1{,}4142;\ 1{,}4143[$, denn $1{,}4142^2 < 2 < 1{,}4143^2$

Durch jeweils eine Dezimale mehr („dezimale" Intervallschachtelung) gelangt man schneller zu einem näherungsweisen Wert für $\sqrt{2}$, Taschenrechner zeigen z. B. an: $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$.

VERSTÄNDNIS

- Gib je drei rationale Zahlen an mit $\sqrt{a} > a$ bzw. $\sqrt{a} < a$.
- Vervollständige folgende Sätze und gib einige Beispiele an.
  Die Wurzeln aus Primzahlen sind … Zahlen.
  Ein gemischt periodischer Dezimalbruch ist eine … Zahl.

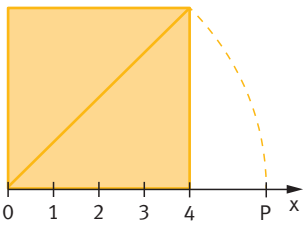
AUFGABEN

1 Ermittle ohne Taschenrechner, zwischen welchen natürlichen Zahlen die folgenden Wurzeln liegen.
a) $\sqrt{6}$ **b)** $\sqrt{13}$ **c)** $\sqrt{170}$ **d)** $\sqrt{650}$ **e)** $\sqrt{990}$

2 Gib eine Intervallschachtelung für $\sqrt{5}$ ($\sqrt{11}$, $\sqrt{29}$) an.

oHiMi 1–2, 5–6

3 **a)** Bestimme die ersten vier Dezimalen des angegebenen Punkts P auf dem Zahlenstrahl.
b) Konstruiere mithilfe eines Quadrats der Seitenlänge 7 cm den Punkt der reellen Zahl $\sqrt{98}$ auf der Zahlengeraden. Erläutere dein Vorgehen.



4 Führe analog zum Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ Euklid von Alexandria den Nachweis, dass $\sqrt{11}$ eine irrationale Zahl ist.

5 Gib die Zahlen als Dezimalzahl an.
a) $-\frac{3}{4}$ **b)** $3\frac{6}{8}$ **c)** $11\frac{3}{7}$ **d)** $\frac{3}{9}$ **e)** $\frac{13}{40}$ **f)** $\frac{7}{13}$

6 Gib die Dezimalzahlen in der Bruchschreibweise an.
a) 1,25 **b)** $10{,}\overline{3}$ **c)** $1{,}0\overline{1}$ **d)** 0,34 **e)** $0{,}1\overline{4}$ **f)** $1{,}\overline{72}$

7 Stelle die angegebenen Zahlen auf der Zahlengeraden dar. Was stellst du fest?
a) $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{8}$ **c)** $\sqrt{18}$ **d)** $\sqrt{3}$ **e)** $\sqrt{12}$ **f)** $\sqrt{27}$

8 (1) $\sqrt{50}$ (2) $\sqrt{245}$ (3) $\sqrt{1040}$ (4) $\sqrt{600}$ (5) $\sqrt{4000}$
a) Gib die beiden natürlichen Zahlen an, zwischen denen die Wurzel liegt. Begründe jeweils.
b) Bestimme mit dem Taschenrechner einen Wert für die angegebene Wurzel. Runde auf zwei Dezimalen.

9 Addiere $\frac{1}{3}$ dreimal mit sich selbst in der Bruchschreibweise und in der Dezimalschreibweise. Was stellst du fest?

Ist $0{,}\overline{9} = 1$ oder gilt $0{,}\overline{9} < 1$?

$\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}} \stackrel{?}{=} \sqrt{\frac{225}{100}}$ $\quad \sqrt{7+9} \stackrel{?}{=} \sqrt{7}+\sqrt{9}$ $\quad \sqrt{9}\cdot\sqrt{4} \stackrel{?}{=} \sqrt{9\cdot 4}$ $\quad \sqrt{\frac{144}{169}} \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}}$

$\sqrt{64}-\sqrt{15} \stackrel{?}{=} \sqrt{64-15}$ $\quad \sqrt{6\cdot 13{,}5} \stackrel{?}{=} \sqrt{6}\cdot\sqrt{13{,}5}$ $\quad \sqrt{16-9} \stackrel{?}{=} \sqrt{16}-\sqrt{9}$ $\quad \sqrt{81}+\sqrt{16} \stackrel{?}{=} \sqrt{81+16}$

- Überprüfe, ob das Gleichheitszeichen gesetzt werden kann.
- Nenne die Rechenarten, für die die Gleichheit gilt.
- Beschreibe die Gesetzmäßigkeiten in Worten und überprüfe an weiteren Beispielen.

MERKWISSEN

Die bisher **bekannten Rechengesetze** (Kommutativgesetz, Assoziativgesetz und Distributivgesetz) gelten auch für **reelle Zahlen**.

Terme mit Wurzeln lassen sich wie folgt vereinfachen:
Die **Multiplikation** und **Division** zweier Quadratwurzeln lässt sich zu einer Quadratwurzel **zusammenfassen**.

Beispiel	**Beispiel**
$\sqrt{16}\cdot\sqrt{9} = 4\cdot 3 = 12$ $\sqrt{16\cdot 9} = \sqrt{144} = 12$ (=) Also gilt: $\sqrt{16}\cdot\sqrt{9} = \sqrt{16\cdot 9}$	$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{64}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ $\sqrt{\frac{4}{64}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{4}$ (=) Also gilt: $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{64}} = \sqrt{\frac{4}{64}}$
Multiplikation	**Division**
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$ für $a, b \geq 0$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, für $a \geq 0, b > 0$

Bei der **Addition** und **Subtraktion** lassen sich zwei Quadratwurzeln **nicht** zu einer Quadratwurzel **zusammenfassen**. Ausnahme: Wurzeln mit gleichen Radikanden kann man mithilfe des Distributivgesetzes zusammenfassen.

Beispiel

$\sqrt{9}+\sqrt{16} = 3+4 = 7$
$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ ($\neq$)

gleicher Radikand:
$2\sqrt{5}+4\sqrt{5} = (2+4)\cdot\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

Lässt sich ein Radikand in ein Produkt zerlegen, bei dem mindestens ein Faktor das Quadrat einer Zahl ist, so kann man **teilweise radizieren**.

Beispiele:

$\sqrt{75} = \sqrt{25\cdot 3} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ $\quad \sqrt{45a^5} = \sqrt{9\cdot 5\cdot a^4\cdot a} = 3a^2\cdot\sqrt{5a}$

BEISPIELE

Durch Zusammenfassen lassen sich manchmal Wurzeln einfacher ziehen.

I Vereinfache, wenn möglich.

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$ **b)** $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ **c)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{32}}$ **d)** $3\sqrt{7}-5\sqrt{7}$

Lösung:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32} = \sqrt{2\cdot 32} = \sqrt{64} = 8$

b) Es ist keine Vereinfachung möglich.

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{32}} = \sqrt{\frac{2}{32}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

d) $3\sqrt{7}-5\sqrt{7} = (3-5)\cdot\sqrt{7} = -2\sqrt{7}$

II Radiziere teilweise.

a) $\sqrt{192}$ **b)** $\sqrt{180 \cdot x^5}$ mit $x \geq 0$

Lösung:

a) $\sqrt{192} = \sqrt{64 \cdot 3} = 8 \cdot \sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{180 \cdot x^5} = \sqrt{36 \cdot x^4 \cdot 5 \cdot x} = 6x^2 \cdot \sqrt{5x}$

III Entscheide, ob die Umformungen richtig sind.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$ **b)** $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2$ **c)** $\sqrt{20} + \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5$

Lösung:

a) richtig **b)** richtig **c)** falsch

VERSTÄNDNIS

- Warum gilt folgende Gleichheit: $\sqrt{0} + \sqrt{0} = \sqrt{0 + 0}$?
- Ist $\sqrt{8} + \sqrt{6} = \sqrt{6} + \sqrt{8}$? Begründe ohne Rechnung.
- Begründe die Regel zur Multiplikation und Division von Wurzeln.

AUFGABEN

1 Berechne. Welche Aufgabe kannst du im Kopf lösen?

a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ **b)** $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$ **c)** $\sqrt{49} \cdot \sqrt{4}$ **d)** $\sqrt{144} \cdot \sqrt{9}$

e) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ **f)** $\sqrt{100} : \sqrt{25}$ **g)** $\sqrt{45} \cdot \sqrt{5}$ **h)** $\sqrt{169 \cdot 16}$

i) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$ **j)** $\sqrt{\frac{36}{49}}$ **k)** $\sqrt{\frac{81}{144}}$ **l)** $\sqrt{225} \cdot \sqrt{\frac{1}{25}}$

Lösungen zu 1:
$\frac{3}{4}$; $\frac{6}{7}$; 2; 2; 3; 6; 9; 14; 15; 15; 36; 52

2 Berechne im Kopf. Nutze Gesetzmäßigkeiten.

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ **b)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$ **c)** $3\sqrt{4} + 6\sqrt{4}$ **d)** $\sqrt{0{,}1} \cdot \sqrt{1000}$

e) $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{3}$ **f)** $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{75}}$ **g)** $\frac{\sqrt{1350}}{\sqrt{6}}$ **h)** $\sqrt{0} \cdot \sqrt{7}$

i) $\sqrt{25} + \sqrt{9}$ **j)** $\sqrt{36 \cdot 81}$ **k)** $\sqrt{\frac{5}{245}}$ **l)** $\sqrt{4 \cdot 144 \cdot 25}$

Lösungen zu 2:
0; $\frac{1}{7}$; 0,8; 1,5; 8; 10; 10; 10; 15; 18; 54; 120

3 Lege die Steine gedanklich zu einer geschlossenen Kette zusammen. Schaffst du es, die Aufgabe im Kopf zu lösen? Notiere als Lösung die Folge der Ergebniszahlen.

20	$\sqrt{1125} : \sqrt{5}$	18	$\sqrt{36} \cdot \sqrt{16}$	9	$\sqrt{1690} : \sqrt{10}$
16	$\sqrt{324} : \sqrt{4}$	24	$\frac{\sqrt{432}}{\sqrt{27}}$	15	$\sqrt{32} \cdot \sqrt{8}$
4	$\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}$	13	$\sqrt{6} \cdot \sqrt{54}$	12	$\frac{\sqrt{2000}}{\sqrt{5}}$

Der vordere Teil ist jeweils das Ergebnis eines Aufgabenteils.

4 Vereinfache durch teilweises Radizieren.

a) $\sqrt{18}$ **b)** $\sqrt{50}$ **c)** $\sqrt{63}$ **d)** $\sqrt{343}$

e) $\sqrt{48}$ **f)** $\sqrt{18} + \sqrt{45}$ **g)** $\sqrt{80} - \sqrt{112}$ **h)** $\sqrt{99} + \sqrt{44}$

i) $\frac{\sqrt{60} + \sqrt{15}}{\sqrt{3}}$ **j)** $\frac{\sqrt{25} - \sqrt{175}}{\sqrt{63}}$ **k)** $\frac{\sqrt{700} - \sqrt{112}}{\sqrt{175} + \sqrt{63}}$ **l)** $\frac{\sqrt{1331}}{\sqrt{176}}$

5 Vereinfache mithilfe von Gesetzmäßigkeiten so weit wie möglich.

a) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{12{,}5}$ b) $\frac{\sqrt{144-32}}{\sqrt{14}}$ c) $\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \sqrt{91}$

d) $\sqrt{0{,}0045} : \sqrt{0{,}0003}$ e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3{,}6} \cdot \sqrt{50}$ f) $\sqrt{12{,}5} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{8}$

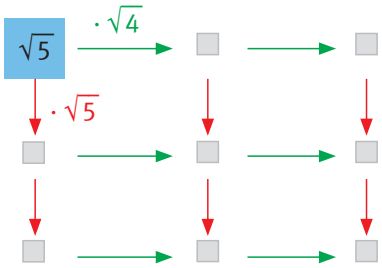
g) $\sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{9}} \cdot \sqrt{49}$ h) $\sqrt{0{,}75} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{15}$ i) $\frac{\sqrt{31} \cdot \sqrt{32}}{\sqrt{6{,}4}}$

6 Radiziere die folgenden Zahlen mit dem Taschenrechner.
Was stellst du fest? Begründe mithilfe der Regeln.

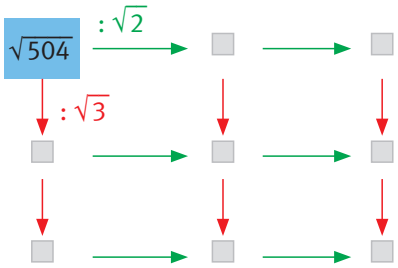
1	0,729	7,29	72,9	729	7290	72 900
2	1258	125,8	12,58	1,258	0,1258	0,01258

7 Übertrage das Rechennetz in dein Heft und vervollständige es.
Entlang derselben Richtung wird immer mit derselben Zahl multipliziert bzw. dividiert.

a)



b)



Alle Variablen stehen für positive rationale Zahlen.

8 a) Beschreibe die Vereinfachungen ($D = \mathbb{R}^+$).

1 $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{8x} = \sqrt{2 \cdot 8 \cdot x \cdot x} = \sqrt{16x^2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x^2} = 4x$

2 $\frac{\sqrt{x^3y}}{\sqrt{xy}} = \sqrt{\frac{x^3y}{xy}} = \sqrt{x^2} = x$

Lösungen zu 8 b):
$\frac{3}{7a}$; $6ab$; $\frac{2}{a}$; $4ax$; $\frac{y}{x}$; $3ab$; $8x$; $12xy$; $\frac{4}{5}a$; $\frac{5}{6}x$

b) Vereinfache ebenso folgende Terme so weit wie möglich ($D = \mathbb{R}^+$).

1 $\frac{\sqrt{xy^5}}{\sqrt{x^3y^3}}$ 2 $\sqrt{4x} \cdot \sqrt{16x}$ 3 $\sqrt{\frac{0{,}4a^2}{0{,}625}}$ 4 $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{12ab^2}$ 5 $\frac{\sqrt{12a}}{\sqrt{3a^3}}$

6 $\frac{\sqrt{18a^3b^3}}{\sqrt{2ab}}$ 7 $\frac{\sqrt{150x^3}}{\sqrt{216x}}$ 8 $\sqrt{8x^2y} \cdot \sqrt{18y}$ 9 $\frac{\sqrt{45a^2}}{\sqrt{245a^4}}$ 10 $\frac{\sqrt{48a^5x^3}}{\sqrt{3a^3x}}$

Alle Variablen stehen für positive rationale Zahlen.

9 Vereinfache durch teilweises Radizieren. Finde den Weg vom Start zum Ziel.

$5a^2bc\sqrt{7ac}$	$\frac{\sqrt{18a^3b}}{\sqrt{27b^6}}$	Start	$\sqrt{5a^2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	Ziel
$a \cdot \sqrt{5}$	$\sqrt{27a^3}$	$5a^3\sqrt{2a}$	$\frac{\sqrt{80a^5 + 9a^5}}{\sqrt{2b^2 \cdot 14b^3}}$	$3a\sqrt{3a}$	$\sqrt{175a^5b^2c^3}$
$\frac{a^2}{2b^2} \cdot \sqrt{\frac{89a}{7b}}$	$\frac{\sqrt{3a^3 \cdot 2b^4}}{\sqrt{4a^3 \cdot 3b^4}}$	$\frac{a}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{2a}{3b}}$	$\sqrt{21a^7 + 29a^7}$		

10 Brüche werden in der Mathematik meist ohne Wurzeln im Nenner geschrieben.

Nenner von **Brüchen** lassen sich **durch Erweitern rational** machen.
Beispiele:

1 $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{5}$

2 $\frac{7}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} = \frac{7 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{2})}{(\sqrt{7} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{2})} = \frac{7 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{2})}{7 - 2} = \frac{7}{5} \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{2})$

a) Begründe, warum Summenterme im Nenner nur durch die 3. bionomische Formel, aber nicht durch die 1. oder 2. binomische Formel rational gemacht werden können.

b) Mache den Nenner rational und vereinfache so weit wie möglich.

1 $\frac{1}{\sqrt{7}}$ 2 $\frac{8}{\sqrt{5}}$ 3 $\frac{12}{\sqrt{15}}$ 4 $\frac{5}{\sqrt{15}}$ 5 $\frac{24}{\sqrt{32}}$

6 $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4} - \sqrt{7}}$ 7 $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3} - \sqrt{11}}$ 8 $\frac{9}{2 + \sqrt{7}}$ 9 $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{13}}{\sqrt{7} - \sqrt{13}}$ 10 $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{12}}$

Lösungen zu 10 b):
$\frac{8}{5}\sqrt{5}; -\frac{1}{3}\sqrt{3}; -3(2 - \sqrt{7}); 3\sqrt{2}; \frac{10 + \sqrt{91}}{3}; \frac{4 + 2\sqrt{7}}{-3}; \frac{\sqrt{7}}{7}; \frac{3 + \sqrt{33}}{-4}; \frac{1}{3}\sqrt{15}; \frac{4}{5}\sqrt{15}$

Beachte die binomischen Formeln.

11 Mache den Nenner rational und vereinfache, falls möglich.

a) $\frac{3}{\sqrt{x}}$ **b)** $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6 - c}}$ **c)** $\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ **d)** $\frac{a}{\sqrt{3a} - \sqrt{2a}}$ **e)** $\frac{12x}{\sqrt{6}}$

f) $\frac{\sqrt{4x}}{\sqrt{4x} - \sqrt{9x}}$ **g)** $\frac{8b}{\sqrt{11b} - \sqrt{7b}}$ **h)** $\frac{\sqrt{5x} - 3\sqrt{2y}}{\sqrt{20x} + 4\sqrt{8y}}$ **i)** $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{4x} + \sqrt{5y}}$ **j)** $\frac{3x - 4\sqrt{y}}{3x + 4\sqrt{y}}$

12 Quadratische Gleichungen können mit Wurzeln gelöst werden.

Für das Lösen von einfachen quadratischen Gleichungen gilt:
Die Gleichung $x^2 = a$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ hat die Lösungsmenge $L = \{-\sqrt{a}; +\sqrt{a}\}$.
Beispiel:
$x^2 = 169$ hat die Lösungen $x = -13$ und $x = +13$, denn $(+13)^2 = 169$ und $(-13)^2 = 169$.

Bestimme die Lösungsmenge in $D = \mathbb{R}$.

a) $x^2 = 5$ **b)** $x^2 = 36$ **c)** $x^2 = -25$ **d)** $x^2 - 7 = 0$
e) $x^2 = 0{,}5$ **f)** $2x^2 - 12 = 0$ **g)** $0{,}5x^2 = 5$ **h)** $0{,}75x^2 - 9 = 0$
i) $x^2 - 6{,}25 = 0$ **j)** $x^2 + 5 = 0$ **k)** $3x^2 = 44 - x^2$ **l)** $4x^2 = 2 - x^2$

13 Vereinfache so weit wie möglich. Bestimme die Lösungsmenge in $D = \mathbb{R}$.

a) $(4x + 1)^2 - (5x - 2)^2 = 13x - 15 \cdot (2 - x)$
b) $(5x - 3) \cdot (2x - 1) - 16x^2 + 1 = x - (x + 6)^2$
c) $(3x - 4)^2 + (2x - 5)^2 = (7 - 3x) \cdot (8 - 6x) + 22x$
d) $(x + 3)^2 + (x - 3)^2 = (x + 3) \cdot (x - 3) + 31$
e) $(x + 3) \cdot (x - 4) + (x + 4) \cdot (x - 3) = 8$
f) $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 + 45 = (2x + 3)^2$
g) $(2x - 3) \cdot (x + 4) - (x - 0{,}5)^2 = 6x + 8$

2.5 Aufgaben zur Differenzierung

Zu 2.1

1 Berechne im Kopf.

a) $\sqrt{4}$ $\sqrt{400}$ $\sqrt{0{,}04}$
b) $\sqrt{25}$ $\sqrt{225}$ $\sqrt{2{,}25}$

a) $\sqrt{64}$ $\sqrt[3]{64}$ $\sqrt{6400}$
b) $\sqrt[3]{8}$ $\sqrt[3]{27}$ $\sqrt[3]{125}$

2 Wie lautet die Gleichung? Jede Lücke steht für eine Ziffer.

a) $\sqrt{8\square} = 9$
b) $\sqrt{\square} = 2$
c) $\sqrt[3]{\square 7} = 3$

a) $\sqrt{\square\square} = 8$
b) $\sqrt[3]{0{,}0\square 7} = 0{,}\square$
c) $\sqrt{22\square} = 1\square$

3 Korrigiere die Hausaufgaben von Peter.

a) $\sqrt{90} = 30$
b) $\sqrt{0{,}16} = 0{,}04$

a) $\sqrt[3]{8000} = 200$
b) $\sqrt[3]{0{,}27} = 0{,}3$

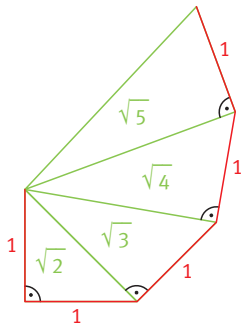
Zu 2.2

4 Finde mindestens drei verschiedene x so, dass die Zahl rational (irrational) wird.
Beispiel:
$\sqrt{20 + x}$ ist …
rational für x = 5, denn $\sqrt{25} = 5$; …
irrational für x = 3, denn $\sqrt{23}$ ist irrational; …

a) $\sqrt{x + 10}$
b) $\sqrt{x \cdot 10}$

a) $\sqrt{x - 10}$
b) $\sqrt{\frac{x}{10}}$

5 Die Abbildung zeigt den Beginn einer Quadratwurzelschnecke.



a) Zeichne selbst eine solche Quadratwurzelschnecke bis $\sqrt{5}$.
b) Miss in deiner Zeichnung nach, wie lang die Strecken für $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, … sind, und vergleiche jeweils mit dem Wert, den du auf deinem Taschenrechner erhältst.

a) Zeichne selbst eine solche Quadratwurzelschnecke bis $\sqrt{7}$.
b) Begründe, warum die grün dargestellte Seitenlänge im ersten Dreieck der Schnecke $\sqrt{2}$ ergibt.

6 Ordne der Größe nach. Beginne mit der kleinsten Zahl.

a) $\sqrt{2}$; $\sqrt{16}$; 2; 6; $\sqrt{4}$

b) $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt{64}$; 6; 64; 4

c) $\sqrt[3]{81}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{27}$; $\sqrt{10}$

Zu 2.3

Ersetze die Lücken durch Ziffern. Finde mehrere Lösungen, wenn möglich.

a) $\sqrt{\square\square} = 4$ b) $\sqrt{12\square} = 11$

c) $\sqrt{16} < \square < \sqrt{81}$ d) $\sqrt{19} > \square$

e) $3 < \sqrt{\square\square} < 4$ f) $\sqrt{1\square} < \sqrt{\square 7}$

7 Berechne im Kopf.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{48}$

c) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{12{,}5}$ d) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{50}}$

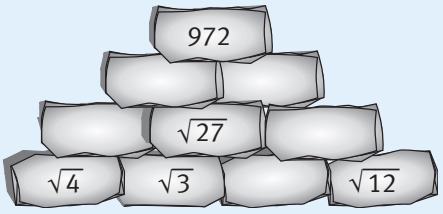
Zu 2.4

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$

c) $\sqrt{\frac{25}{16}}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{15}$

e) $\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$ f) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1{,}5}}$

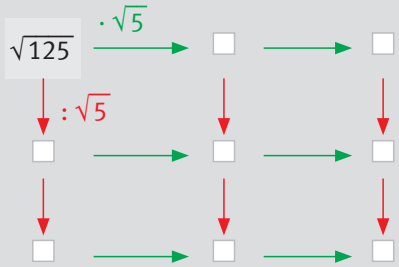
8



a) Vervollständige die Zahlenmauer in deinem Heft.

b) Beschreibe dein Vorgehen bei der Berechnung.

c) Welche Wurzeln ergeben irrationale, welche rationale Zahlen?

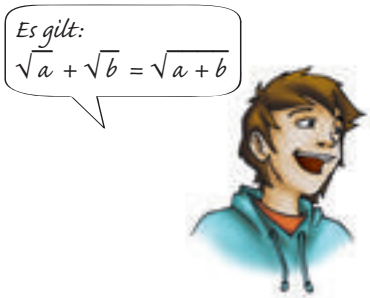


a) Zeichne das Rechennetz in dein Heft und ergänze die fehlenden Zahlen.

b) Kannst du Muster erkennen? Erkläre, wie diese zustande kommen.

c) Welche Wurzeln ergeben irrationale, welche rationale Zahlen?

9



Für welche Zahlen gilt $\sqrt{(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?
Findest du mehrere Möglichkeiten?
Setze das Gespräch fort.

Quadriere die Gleichung $\sqrt{(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ auf beiden Seiten.
Beachte die binomische Formel.
Was muss gelten, damit beide Seiten gleich sind?

2.6 Vermischte Aufgaben

1 Peter berechnet mit dem Taschenrechner $\sqrt{3}$.
Begründe, dass die dargestellte Anzeige des Taschenrechners nicht exakt sein kann.

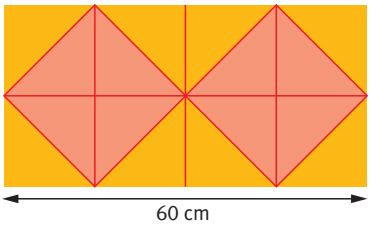
2 Zwischen welchen benachbarten natürlichen Zahlen liegt die Wurzel?
Begründe deine Antwort. Rechne im Kopf.

a) $\sqrt{40}$	**b)** $\sqrt{18}$	**c)** $\sqrt{316}$	**d)** $\sqrt{88}$	**e)** $\sqrt{112}$	**f)** $\sqrt{360}$
$\sqrt{10}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{145}$	$\sqrt{77}$	$\sqrt{170}$	$\sqrt{420}$
$\sqrt{5}$	$\sqrt{60}$	$\sqrt{200}$	$\sqrt{99}$	$\sqrt{168}$	$\sqrt{501}$

3 Ein Fliesenleger legt Muster aus dreieckigen roten und gelben Fliesen. Aus jeweils zwei bzw. vier bzw. acht Fliesen legt er ein Quadrat. Bestimme die Seitenlängen einer Fliese …

a) zeichnerisch.

b) rechnerisch.



4 Entscheide, ob die Aussage wahr oder falsch ist.
Begründe.

a) $\sqrt{16}$ ist diejenige rationale Zahl, die quadriert 16 ergibt.

b) $\sqrt{81}$ kann +9 oder –9 sein.

c) $\sqrt{25}$ ist größer als $\sqrt{36}$.

d) Wenn a größer wird, wird auch $\sqrt{a}$ größer ($a \in \mathbb{R}^+$).

e) Es gibt natürliche Zahlen, die reelle Zahlen sind.

f) Zwischen den irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ liegen unendlich viele weitere irrationale Zahlen (rationale Zahlen, reelle Zahlen).

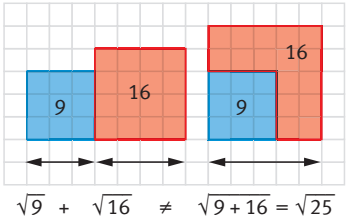
5 Finde eine natürliche Zahl, deren Quadratwurzel möglichst nahe an …

a) 20 **b)** 25 **c)** 100 **d)** 500

liegt, aber nicht gleich dieser Zahl ist. Bestimme jeweils die Abweichung.

6 **a)** Erkläre mithilfe der Darstellung, dass $\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9+16}$.

b) Überprüfe die Aussage aus a) an mindestens einem weiteren Beispiel.



7 Fülle die Lücken richtig aus.

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{\square} = \sqrt{10}$	**b)** $\sqrt{7} \cdot \sqrt{\square} = \sqrt{21}$	**c)** $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\square}} = \sqrt{3}$
d) $\sqrt{\square} \cdot \sqrt{2{,}5} = \sqrt{20}$	**e)** $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{\square}} = \sqrt{30}$	**f)** $\sqrt{13} \cdot \sqrt{\square} = 13$
g) $\frac{\sqrt{\square}}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$	**h)** $\sqrt{12} \cdot \sqrt{\square} = \sqrt{576}$	**i)** $\sqrt{\square} \cdot \sqrt{36} = 18$
j) $\sqrt{\square 36} : \sqrt{\square 1} = 4$	**k)** $\sqrt{121} \cdot \sqrt{\square} = 0$	**l)** $\sqrt{169} : \sqrt{\square} = \sqrt{13}$

Lösungen zu 8:
5; 2,5; 9; 24; 8

8 Berechne.

a) $(\sqrt{5})^2$ **b)** $3 \cdot (\sqrt{8})^2$ **c)** $1{,}5 \cdot (\sqrt{6})^2$ **d)** $(0{,}5 \cdot \sqrt{10})^2$ **e)** $\frac{2}{3} \cdot (\sqrt{12^2})$

9 Radiziere teilweise.

Alle Variablen stehen für positive rationale Zahlen.

a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt{250}$ c) $\sqrt{49 \cdot x^5}$ d) $\sqrt{275} - \sqrt{99}$

e) $\sqrt{288x^3y}$ f) $\sqrt{10a^3 + 22a^3}$ g) $\frac{\sqrt{45} + \sqrt{80}}{\sqrt{147}}$ h) $\frac{\sqrt{363a^2b^7c^9}}{ab^2c}$

10 Mache den Nenner rational.

a) $\frac{1}{\sqrt{32}}$ b) $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{288}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{3} - \sqrt{15}}$ d) $\frac{a}{7 - \sqrt{a}}$

e) $\frac{\sqrt{6a} - \sqrt{3b}}{\sqrt{3b} - \sqrt{6a}}$ f) $\frac{\sqrt{3x} + \sqrt{3y}}{\sqrt{9x} - \sqrt{9y}}$ g) $\frac{x - 5}{\sqrt{x - 5}}$ h) $\frac{9}{3 - \sqrt{7}} - \frac{7}{3 - \sqrt{7}}$

11 Ordne wertgleiche Terme einander zu. Ein Term bleibt übrig.

$\sqrt{100 + 44}$ $(\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2}$ 2^2 $\sqrt{100} + \sqrt{44}$ $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$

12 $2^2 \cdot \sqrt{2}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{32}$

12 Radiziere wenn möglich im Kopf.

a) $\sqrt{9}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{0{,}25}$; $\sqrt{10^6}$; $\sqrt{0{,}0169}$; $\sqrt{3{,}24}$

b) $\sqrt{\frac{1}{36}}$; $\sqrt{\frac{48}{75}}$; $\sqrt{57\,600}$; $\sqrt{10^8}$; $\sqrt{\frac{20}{45}}$; $\sqrt{0{,}000144}$; $\sqrt{\frac{180}{405}}$

c) $\sqrt{\sqrt{81}}$; $\sqrt{\sqrt{625}}$; $\sqrt{\sqrt{0{,}0001}}$; $\sqrt{\sqrt{0{,}0625}}$; $\sqrt{\sqrt{10\,000}}$

d) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{64}}$; $\sqrt{6 \cdot \sqrt{36}}$; $\sqrt{3 \cdot \sqrt{144}}$; $\sqrt{25 \cdot \sqrt{8 \cdot \sqrt{4}}}$; $\sqrt{0{,}8 \cdot \sqrt{0{,}04}}$

Es gilt:
$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$

13 Ordne der Größe nach. Beginne mit der kleinsten Zahl.

a) $\sqrt{\frac{121}{324}}$; $\sqrt{1{,}2}$; 0,45; $\sqrt{\frac{48}{147}}$ b) $-\sqrt{2{,}25}$; $-\sqrt{\frac{3}{7}}$; $-\sqrt{2{,}45}$; $-\sqrt{2}$

c) $\sqrt{45{,}3}$; $\sqrt{\frac{3}{7}}$; $0{,}\overline{3}$; $\sqrt{1{,}1}$ d) $\sqrt{1{,}4}$; $\frac{6}{5}$; $\sqrt{\frac{64}{49}}$; $\sqrt{\frac{162}{128}}$; $\sqrt{1{,}3225}$

14 Bestimme die Lösungsmenge im Kopf (D = $\mathbb{R}$).

a) $x^2 = 225$ b) $x^2 - 169 = 0$ c) $3x^2 - 3 = 2{,}07$ d) $\frac{1}{5}x^2 = 1$

e) $x^2 = 0$ f) $-x^2 + 1{,}44 = 0$ g) $-1{,}5x^2 + 0{,}54 = 0$ h) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2} = -\frac{19}{50}$

i) $x^2 = -4$ j) $x^2 + 0{,}16 = 0$ k) $1 + 2{,}5x^2 = 2{,}225$ l) $-\frac{4}{5} + \frac{3}{10}x^2 = -1\frac{2}{5}$

15 Vereinfache und bestimme die Lösungsmenge in D = $\mathbb{R}$.

a) $(x + 4)^2 = 19 + 8x$ b) $(x + 3) \cdot (x + 9) = 2 \cdot (x + 3)^2$

c) $2x^2 - 16x + 24 = (x - 8)^2$ d) $(x + 4{,}5) \cdot (x - 8) = -0{,}2 \cdot (17{,}5x - 65)$

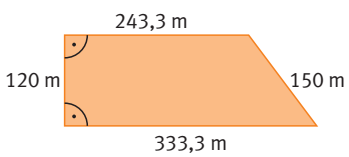
Lösungen zu 15:
L = {−3; 3}; L = {−7; 7};
L = {$-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$};
L = {$-2\sqrt{10}$; $2\sqrt{10}$}

16 Herr Müller hat ein großes trapezförmiges Grundstück.

a) Welchen Flächeninhalt hat das Grundstück?

b) Vergleiche den Umfang des trapezförmigen Grundstücks mit dem eines flächengleichen quadratischen Grundstücks.

c) Jassin sagt, dass man nicht hätte rechnen müssen, um zu wissen, dass der Umfang des Quadrats kleiner ist als der des Trapezes. Was meinst du?

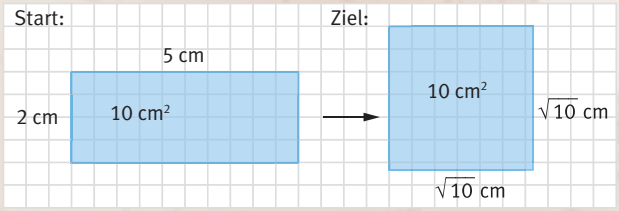


Das Heronverfahren nach klassischer Art

Schon seit Jahrtausenden nutzt man Näherungsverfahren, wenn man Wurzeln nicht exakt angeben kann. Eines davon ist nach Heron von Alexandria benannt, der vor 2000 Jahren in Ägypten lebte.

Beispiel: Bestimme einen Näherungswert für $\sqrt{10}$.

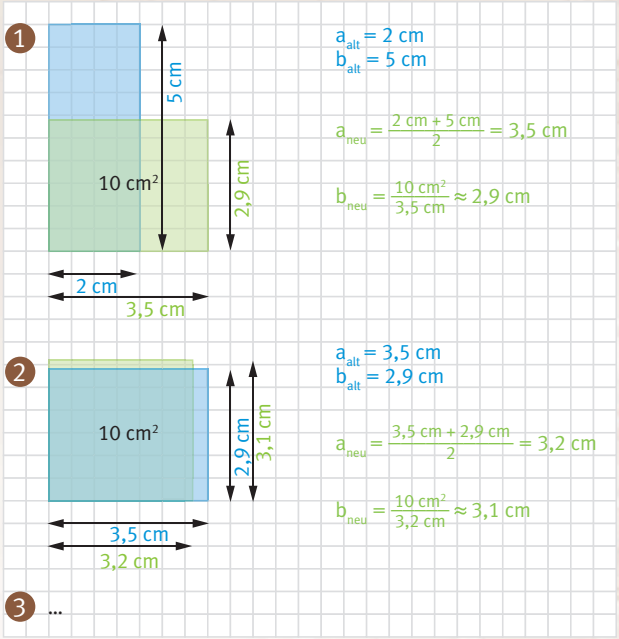
Idee



Ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 10 cm² wird schrittweise in ein flächengleiches Quadrat umgewandelt. Das Verfahren hat den Vorteil, dass man für jede Quadratwurzel $\sqrt{n}$ ein solches Ausgangsrechteck finden kann. Im einfachsten Fall hat es die Maße 1 cm · n cm. Im Beispiel starten wir mit den Seitenlängen a = 2 cm und b = 5 cm.

Ablauf

Wandle das bestehende Rechteck jeweils in ein flächengleiches Rechteck um, indem du als eine neue Seitenlänge das arithmetische Mittel aus den beiden alten Seitenlängen verwendest. Die zweite Seitenlänge ergibt sich dann, indem du den Flächeninhalt durch diese erste neue Seitenlänge teilst.



Das Heronverfahren kann bis zu jeder beliebigen Genauigkeit fortgesetzt werden. Man erkennt im Beispiel, dass bereits nach wenigen Schritten die Seitenlängen dicht beieinander liegen.

a) Bestimme einen Näherungswert für die Wurzel mit dem Heronverfahren auf zwei Dezimalen genau.
1 $\sqrt{2}$ 2 $\sqrt{6}$ 3 $\sqrt{12}$ 4 $\sqrt{20}$

b) Welche Rolle spielen die Startwerte beim Heronverfahren? Überprüfe am Beispiel $\sqrt{50}$.

Das Heronverfahren mit dem Computer

Beim Heronverfahren werden stets dieselben Rechenschritte durchlaufen, um $\sqrt{n}$ zu bestimmen.

neue Länge: $a_{neu} = \frac{a_{alt} + b_{alt}}{2}$ (alte Länge, alte Breite)

neue Breite: $b_{neu} = \frac{n}{a_{neu}}$

n steht dabei für den Flächeninhalt des Quadrats bzw. für die zu berechnende Wurzel.
Die Rechenschritte kann man gut durch ein Tabellenprogramm durchführen lassen.

	A	B	C	D
1	**Heronverfahren**			
2				
3	**Berechnung von Wurzel**		10	
4				
5	**Schritt**	**Länge**	**Breite**	**Kontrolle**
6	1	2	5	10
7	2	3,5	2,85714286	10
8	3	3,17857143	=$C$3/B8	10
9	4	3,16231942	3,1622359	10
10	5	3,16227766	3,16227766	10

a) Beschreibe den Aufbau und die Einträge des Tabellenblatts.

b) Übertrage das Tabellenblatt und berechne damit $\sqrt{40}$ ($\sqrt{99}$) auf vier Dezimalen genau.

Intervallhalbierung $\sqrt{x}\sqrt{x}$

Intervallhalbierung ist ein Näherungsverfahren. Es wird beim systematischen Probieren oftmals angewendet.

Beispiel: Bestimme einen Näherungswert für $\sqrt{10}$.

Idee

Das Quadrat von $\sqrt{10}$ ist 10. Man sucht jetzt einen unteren Wert, der quadriert kleiner als 10 ist, und einen oberen, der quadriert größer als 10 ist. Anschließend bestimmt man zwischen diesen beiden Werten einen neuen Wert und überprüft, ob man damit den unteren oder oberen Wert ersetzen kann.

Ablauf

Bei der Intervallhalbierung bestimmt man das arithmetische Mittel aus unterem und oberem Wert. Dann wird überprüft, ob das Quadrat des Mittelwerts größer oder kleiner als 10 ist. Je nachdem ersetzt man im nächsten Schritt den oberen oder unteren Wert durch den Mittelwert.

	unterer Wert	oberer Wert	Mittelwert
1	2, denn $2^2 = 4 < 10$	5, denn $5^2 = 25 > 10$	$\frac{2+5}{2} = 3{,}5$ $3{,}5^2 = 12{,}25 > 10$ $\Longrightarrow$ oberen Wert ersetzen
2	2,0, denn $2{,}0^2 = 4$ $4 < 10$	3,5 denn $3{,}5^2 = 12{,}25$ $12{,}25 > 10$	$\frac{2{,}0+3{,}5}{2} = 2{,}75$ $2{,}75^2 \approx 7{,}6 < 10$ $\Longrightarrow$ unteren Wert ersetzen
3	2,75, denn $2{,}75^2 \approx 7{,}6 < 10$	3,50 denn $3{,}50^2 = 12{,}25 > 10$	$\frac{2{,}75+3{,}50}{2} = 3{,}125$ $3{,}125^2 \approx 9{,}8 < 10$ $\Longrightarrow$ unteren Wert ersetzen
4	3,125, denn $3{,}125^2 \approx 9{,}8 < 10$	3,500, denn $3{,}500^2 = 12{,}25 > 10$	$\frac{3{,}125+3{,}500}{2} = 3{,}3125$ $3{,}3125^2 \approx 11{,}0 > 10$ $\Longrightarrow$ oberen Wert ersetzen
5	...		

a) Bei jedem Schritt betrachtet man eine Dezimale mehr. Erkläre die Aussage anhand des Beispiels.

b) Führe die ersten 4 Schritte des Intervallhalbierungsverfahrens für $\sqrt{2}$ ($\sqrt{8}$, $\sqrt{500}$) durch.

c) Erkläre den Begriff „Intervallhalbierung“.

d) Führe das Verfahren mit einem Tabellenkalkulationsprogramm durch. Präsentiere dein Ergebnis.

Alles Näherung $\sqrt{x}\sqrt{x}$

Beim systematischen Probieren ist uns das Hintereinandereinsetzen als geschicktes Vorgehen bekannt. Nutze dieses Verfahren.

Beispiel: Bestimme einen Näherungswert für $\sqrt{10}$.

Idee

Man sucht eine natürliche Zahl als Startwert, deren Quadrat gerade kleiner als 10 ist. Dann erhöht man schrittweise um 0,1.

Ablauf

Sobald das Quadrat des Wertes erstmals größer als 10 ist, wird der letzte kleinere Wert genommen und die nächste Dezimale schrittweise erhöht.

1

	A	B	C
1	Berechnung von Wurzel		10
2		Startwert	3
3		Schrittweite	0,1
4			
5	Schritt	a	a^2
6	1	3	9
7	2	=B6+$C$3	9,61
8	3	3,2	10,24

2

	A	B	C
1	Berechnung von Wurzel		10
2		Startwert	3,1
3		Schrittweite	0,01
4			
5	Schritt	a	a^2
6	1	3,1	9,61
7	2	3,11	9,6721
8	3	3,12	9,7344
9	4	3,13	9,7969
10	5	3,14	9,8596
11	6	3,15	9,9225
12	7	3,16	9,9856
13	8	3,17	10,0489

3 ...

a) Beschreibe den Aufbau des Tabellenblattes.

b) Bestimme mit diesem Verfahren einen Näherungswert für $\sqrt{3}$ ($\sqrt{12}$, $\sqrt{200}$) auf vier Dezimalen genau.

c) Beschreibe den Ablauf, wenn man einen Startwert wählt, dessen Quadrat gerade größer als 10 ist.

Überprüfe deine Fähigkeiten und Kenntnisse. Bearbeite dazu die folgenden Aufgaben und bewerte anschließend deine Lösungen mit einem Smiley.

☺	😐	☹
Das kann ich!	Das kann ich fast!	Das kann ich noch nicht!

Hinweise zum Nacharbeiten findest du auf der folgenden Seite. Die Lösungen stehen im Anhang.

Aufgaben zur Einzelarbeit

1 Berechne im Kopf.

a) $\sqrt{25}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{144}$; $\sqrt{625}$; $\sqrt{10\,000}$

b) $\sqrt{0{,}04}$; $\sqrt{0{,}16}$; $\sqrt{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{0{,}25}$; $\sqrt{\frac{36}{49}}$; $\sqrt{0{,}0009}$

2 Berechne mit dem Taschenrechner und runde auf zwei Dezimalen.

a) $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{80}$; $\sqrt{111}$; $\sqrt{300}$

b) $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt{2{,}5}$; $\sqrt{1{,}44}$; $\sqrt{17{,}6}$; $\sqrt{35{,}8}$; $\sqrt{\frac{4}{8}}$

3 Zeichne jeweils ein Quadrat mit folgendem Flächeninhalt in dein Heft.

a) 6 cm² **b)** 20 cm² **c)** 30 cm²

4 1 $\sqrt{4}$; $\sqrt{40}$; $\sqrt{400}$; $\sqrt{4000}$; $\sqrt{40\,000}$; ...

2 $\sqrt{9}$; $\sqrt{90}$; $\sqrt{900}$; $\sqrt{9000}$; $\sqrt{90\,000}$; ...

a) Berechne und setze die Reihe um drei weitere Schritte fort.

b) Beschreibe auftretende Gesetzmäßigkeiten und überprüfe diese an weiteren Beispielen.

5 Das Rechteck mit den Seitenlängen a und b und das Quadrat mit der Seitenlänge c haben den gleichen Flächeninhalt. Vervollständige die Tabelle. Runde auf zwei Dezimalen.

A in cm²	a in cm	b in cm	c in cm
144	☐	32	☐
625	12,5	☐	☐
☐	7	19	☐
☐	☐	5	$\sqrt{7}$
150	13	☐	☐
☐	10,75	43	☐

6 Gib alle $a \in \mathbb{N}$ im Intervall $]1; 1000[$ an, für die die Gleichung $x^2 = a$ eine rationale Lösung hat. Gib jeweils die Lösungsmenge an.

7 Übertrage die Tabelle ins Heft. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen in den angegebenen Definitionsmengen.

Lösungsmenge in		$D = \mathbb{N}_0$	$D = \mathbb{Q}$	$D = \mathbb{R}$
a)	$x^2 - 196 = 0$	☐	☐	☐
b)	$x^2 = 7{,}29$	☐	☐	☐
c)	$x^2 + 169 = 0$	☐	☐	☐
d)	$x^2 - \frac{5}{16} = 0{,}25$	☐	☐	☐
e)	$3x^2 - 35 = 9 - x^2$	☐	☐	☐

8 Für Rechtecke mit einem Flächeninhalt von 12 FE gilt für die Maßzahlen der Seitenlängen x und y mit $x, y \in \mathbb{R}^+$: $x \cdot y = 12$.

a) Fertige eine Tabelle für $x \in [1; 12]$ und $\Delta x = 1$ an und trage die möglichen Werte für x und y in ein Koordinatensystem ein.

b) Unter allen Rechtecken mit dem gegebenen Flächeninhalt befindet sich ein Quadrat. Ermittle die Seitenlänge des Quadrats aus dem Diagramm aus a). Überprüfe durch eine Rechnung.

9 Kontrolliere ohne Taschenrechner. Berichtige gegebenenfalls.

a) $\sqrt{1600} = 400$ **b)** $\sqrt{9{,}3^2} = 9{,}3$ **c)** $\sqrt{0{,}36} = -0{,}6$

d) $-\sqrt{(1{,}5)^2} = -1{,}5$ **e)** $\sqrt{0{,}09} = 0{,}03$ **f)** $\sqrt{0{,}5^2} = 0{,}25$

10 Berechne, wenn möglich, im Kopf.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$ **c)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

d) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$ **e)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$ **f)** $\sqrt{8} \cdot \sqrt{50}$

g) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$ **h)** $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}}$ **i)** $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{54}}$

11 Vereinfache, falls möglich.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{8}$ $\sqrt{3} + \sqrt{8}$ $\sqrt{3} : \sqrt{8}$

b) $\sqrt{27} : \sqrt{18}$ $\sqrt{27} - \sqrt{18}$ $\sqrt{27} \cdot \sqrt{18}$

c) $\sqrt{99} - \sqrt{11}$ $\sqrt{99} + \sqrt{11}$ $\sqrt{99} : \sqrt{11}$

d) $\sqrt{2{,}5} \cdot \sqrt{4}$ $\sqrt{2{,}5} + \sqrt{4}$ $\sqrt{2{,}5} - \sqrt{4}$

12 Radiziere teilweise mit $a, b \in \mathbb{R}^+$.

a) $\sqrt{48}$ **b)** $\sqrt{96a^3}$ **c)** $\sqrt{320ab^2}$ **d)** $\sqrt{1000a^4b^3c^2}$

Das kann

13 Setze Ziffern so in die Lücken ein, dass die Rechnungen stimmen. Findest du mehrere Möglichkeiten?

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\square} = \sqrt{50}$ b) $\sqrt{\square 9} \cdot \sqrt{\square} = \sqrt{196}$

c) $\sqrt{\square 0} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{1\square\square}$ d) $\sqrt{432} : \sqrt{\square} = 6$

e) $\frac{\sqrt{1083}}{\sqrt{\square}} = 19$ f) $\sqrt{\square} \cdot \sqrt{57,\square} = 17$

14 Welche Zahlen sind irrational, welche rational?

a) $\sqrt{4}; \sqrt{6}; \sqrt{8}; \sqrt{100}; \sqrt{104}; \sqrt{400}; \sqrt{1000}$

b) $0; 1; \sqrt{0}; \sqrt{1}; \frac{1}{3}; \sqrt{\frac{1}{3}}; \frac{1}{9}; \sqrt{\frac{1}{9}}; \sqrt{\frac{12}{7}}$

15 Bestimme die Lösungsmenge in $D = \mathbb{R}$.

a) $x^2 = 5{,}67$

b) $x^2 - 0{,}36 = 2x^2$

c) $(x - 0{,}2)^2 = \frac{2}{5} \cdot (0{,}2 - x)$

16 Mache den Nenner rational.

a) $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{100}}$ b) $\frac{5}{2 + \sqrt{3}}$ c) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x} - \sqrt{5}}$

Aufgaben für Lernpartner

Arbeitsschritte

1. Bearbeite die folgenden Aufgaben alleine.
2. Suche dir einen Partner und erkläre ihm deine Lösungen. Höre aufmerksam und gewissenhaft zu, wenn dein Partner dir seine Lösungen erklärt.
3. Korrigiere gegebenenfalls deine Antworten und benutze dazu eine andere Farbe.

Sind folgende Behauptungen **richtig** oder **falsch**? Begründe schriftlich.

17 Wenn $a < b$ ist, dann ist auch $a^2 < b^2$.

18 Wenn $a = a^2$ ist, dann ist $a = 1$.

19 Wenn a eine gerade Zahl ist, dann ist auch a^2 eine gerade Zahl.

20 Quadrieren lässt sich durch das Ziehen der Wurzel rückgängig machen.

21 $\sqrt{5^2} = 5^2$

22 Jede Gleichung $x^2 = a$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat mindestens eine Lösung.

23 Es gibt eine Gleichung $x^2 = a$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$, die genau eine Lösung besitzt.

24 Ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 5 m^2 hat die Seitenlänge 2,5 m.

25 Ein Rechteck mit den Seitenlängen 3 cm und 4 cm kann in ein flächeninhaltsgleiches Quadrat mit der Seitenlänge $\sqrt{12}$ cm umgewandelt werden.

26 $\sqrt{100} + \sqrt{49} = \sqrt{100 + 49}$

27 Zwei Quadratwurzeln, die multipliziert werden, lassen sich zu einer Quadratwurzel zusammenfassen.

28 $\sqrt{100} : \sqrt{36} = \frac{5}{3}$

29 $3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$

30 Jede irrationale Zahl lässt sich als Bruch darstellen.

31 Jeder Bruch lässt sich in eine Dezimalzahl mit endlich vielen Dezimalstellen umwandeln.

32 $\sqrt{6}$ ist eine irrationale Zahl.

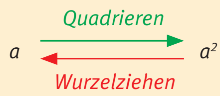
33 Jede Quadratwurzel ist eine irrationale Zahl.

34 Beim Rationalmachen des Nenners muss der Quotient immer mit dem Nenner erweitert werden.

35 Jede durch vier teilbare natürliche Zahl lässt sich teilweise radizieren.

Aufgabe	Ich kann ...	Hilfe
1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 25	Quadratwurzeln bestimmen.	S. 34
14, 17, 30, 31, 32, 33	irrationale von rationalen Zahlen unterscheiden.	S. 36
8, 25	irrationale Zahlen näherungsweise bestimmen.	S. 48
10, 11, 12, 13, 26, 27, 28, 29	einfache Terme mit Quadratwurzeln vereinfachen.	S. 40
6, 7, 15, 22, 23	Gleichungen der Art $x^2 = a$ lösen.	S. 40
12, 35	Quadratwurzeln teilweise radizieren.	S. 40
16, 34	Nenner von Bruchtermen rational machen.	S. 43

S. 34



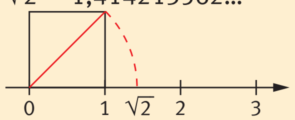
$\sqrt{0} = 0$

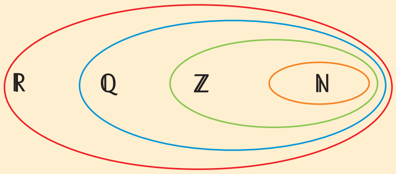
$\sqrt{144} = 12$, denn $12 \cdot 12 = 144$
„Die Quadratwurzel aus 144 ist 12."
„12 ist die Wurzel aus 144."

Die **Umkehrung des Potenzierens** bezeichnet man als **Wurzelziehen** (**Radizieren**).
Aus negativen Zahlen kann man keine Wurzeln ziehen. Für alle anderen Zahlen a ist die Wurzel die nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt. Man schreibt $\sqrt{a} = x$, wenn $x^2 = a$ mit $a, x \geqq \mathbb{Q}$.
Den Term unter der Wurzel nennt man **Radikand**.

S. 36

$\sqrt{2} = 1{,}414213562...$





Eine Zahl nennt man **irrational**, wenn man sie **nicht als Bruch** zweier ganzer Zahlen darstellen kann. Die zugehörige Dezimalzahl hat unendlich viele Dezimalen, die nicht periodisch angeordnet sind.

Die Mengen der **rationalen** und **irrationalen Zahlen** bilden zusammen die Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$.

Jeder reellen Zahl entspricht genau ein Punkt der Zahlengeraden und umgekehrt.

S. 40

Multiplikation

$\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$
$\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{144} = 12$
Also gilt: $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{16 \cdot 9}$

Division

$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{64}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ $\qquad \sqrt{\frac{4}{64}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{4}$

Also gilt: $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{64}} = \sqrt{\frac{4}{64}}$

$\left.\begin{array}{l}\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \\ \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\end{array}\right\} \sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9 + 16}$

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (3 + 5) \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$\sqrt{45a^5} = \sqrt{9 \cdot 5 \cdot a^4 \cdot a} = 3a^2 \cdot \sqrt{5a}$

Beim Rechnen mit reellen Zahlen gelten die **bekannten Rechengesetze**.

Multiplikation zweier Quadratwurzeln
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ für $a, b \geqq 0$

Division zweier Quadratwurzeln
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ für $a \geqq 0, b > 0$

Bei der **Addition** und **Subtraktion** lassen sich zwei Quadratwurzeln **nicht** zu einer Quadratwurzel **zusammenfassen**.

Ausnahme: Wurzeln mit gleichen Radikanden kann man mithilfe des Distributivgesetzes zusammenfassen.

Lässt sich ein Radikand in ein Produkt zerlegen, bei dem ein Faktor eine Quadratzahl ist, so kann man **teilweise radizieren**.

S. 40

$x^2 = 144$	$L = \{-12; +12\}$
$x^2 = 7$	$L = \{-\sqrt{7}; +\sqrt{7}\}$
$x^2 = 0$	$L = \{0\}$
$x^2 = -5$	$L = \{\,\}$

Die Gleichung $\mathbf{x^2 = a}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ hat die Lösungsmenge $L = \{-\sqrt{a}; +\sqrt{a}\}$.

Gleichungssysteme lösen

1 Löse die Gleichungssysteme rechnerisch. Begründe die Wahl des von dir gewählten Verfahrens.

a) I $x + y = 2$
II $x - y = 0$

b) I $x + 2y = 3$
II $x = 7 - 4y$

c) I $x = 3y + 5$
II $x = 12 - 4y$

d) I $x - 2y = 2$
II $2x + y = 29$

2 Gib ein Gleichungssystem an, das folgende Lösungsmenge hat. Lass deinen Nachbarn dein Gleichungssystem lösen.

a) $L = \{(1\,|\,2)\}$

b) $L = \{(2\,|\,-3)\}$

c) $L = \{(11\,|\,0)\}$

d) $L = \{\,\}$

3 Nimm Stellung zu folgender Aussage:

„Das Gleichungssystem
I $x + y = -3$
II $-2x - 2y = 6$
hat die Lösungsmenge $L = \{(2\,|\,-5)\}$, denn wenn man für $x = 2$ und $y = -5$ einsetzt, ergeben beide Gleichungen wahre Aussagen."

4 Tanja muss sich zwischen diesen beiden Handytarifen entscheiden:

Grundgebühr: 10 €
Verbrauchskosten: 3 ct/min

Grundgebühr: 8 €
Verbrauchskosten: 9 ct/min

Gib ihr eine Entscheidungshilfe, bei welchem Telefonierverhalten sie sich für welchen Tarif entscheiden soll.

5 Von einem linearen Gleichungssystem ist aufgrund eines Druckfehlers nur noch die erste Gleichung sichtbar:
I $3x + 2y = 8$
II xxx
Die zweite Gleichung war ebenfalls in der Form $ax + by = c$ gegeben und die Lösungsmenge des Gleichungssystems war leer. Gib eine mögliche zweite Gleichung an. Findest du mehrere Möglichkeiten?

6 In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Basis 2 cm kürzer als einer der Schenkel. Die Summe der Länge der Schenkel ist 7 cm länger als die Basis. Bestimme die Längen von Basis und Schenkel.

Brüche

7 Ordne die Terme nach der Größe ihrer Ergebnisse.

a) 1 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ 2 $\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$ 3 $\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{3}$ 4 $\frac{6}{7} - \frac{2}{7}$ 5 $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$

b) 1 $1{,}25 - 0{,}8$ 2 $0{,}1 \cdot 10$ 3 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ 4 $0{,}4 : \frac{1}{2}$ 5 $\frac{1}{3} \cdot 0{,}1$

8

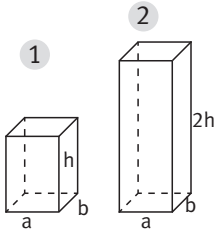
A $\frac{1}{5}$ von $\frac{1}{7}$	1 $\frac{1}{5} - \frac{1}{7}$
B $\frac{1}{5}$ vermehrt um $\frac{1}{7}$	2 $\frac{1}{5} + \frac{1}{7}$
C $\frac{1}{5}$ vermindert um $\frac{1}{7}$	3 $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7}$
D Wie oft passt $\frac{1}{7}$ in $\frac{1}{5}$?	4 $\frac{1}{5} : \frac{1}{7}$

a) Welche Aufgabe gehört zu welcher Beschreibung? Ordne zu.

b) Berechne zu jeder Aufgabe das Ergebnis.

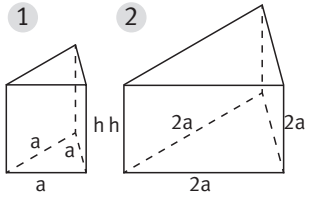
9 Gib das Verhältnis an, in dem die Volumina der Körper zueinander stehen.

a)



$\frac{V_2}{V_1} = \square$

b)



$\frac{V_2}{V_1} = \square$

10 Wie müsste man x verändern, sodass der Bruchterm $\frac{2 \cdot x}{3}$ ...

a) einen doppelt so großen Wert erhält?

b) vom Betrag denselben Wert erhält, aber niemals negativ wird?

c) um 1 vermehrt wird?

Figuren

11 Entscheide, welche Aussagen wahr und welche falsch sind.

a) Jedes Parallelogramm ist ein Rechteck.

b) Jedes Quadrat ist ein Drachenviereck.

c) Es gibt Trapeze, die Drachenvierecke sind.

d) Ein Rechteck ist niemals eine Raute.

12 Überprüfe, ob die Eigenschaftskarten zu dem Viereck gehören.

1 Gegenüberliegende Seiten sind parallel.

2 Hat mindestens zwei rechte Winkel.

3 Hat mindestens zwei Symmetrieachsen.

4 Hat vier gleich lange Seiten.

5 Hat mindestens zwei gleich große Winkel.

a) Trapez **b)** Quadrat

c) Raute **d)** Parallelogramm

13 Ein Viereck besitzt genau eine Symmetrieachse und hat einen Umfang von 20 cm.

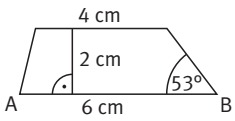
a) Begründe, dass es sich dabei nicht um ein Rechteck handeln kann.

b) Zeichne mindestens zwei verschiedene Vierecke, die diese Eigenschaft erfüllen.

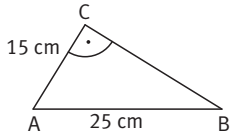
c) Entscheide, welche Viereckarten überhaupt bei den Eigenschaften möglich sind.

14 Bestimme Flächeninhalt und Umfang der dargestellten Figuren. Zeichne die Figur, wenn nötig.

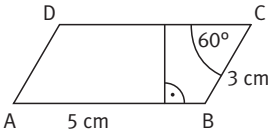
a) Trapez



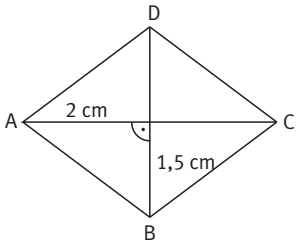
b) rechtwinkliges Dreieck



c) Parallelogramm



d) Raute



Daten und Zufall

15 Während eines Fußballspiels wurde notiert, welche Strecke jeder einzelne Spieler in dieser Zeit gelaufen ist:
7,2 km; 8,0 km; 12,1 km; 9,4 km; 10,0 km; 8,7 km; 8,9 km; 10,2 km; 0,5 km; 9,9 km; 4,5 km; 4,5 km

a) Bestimme Median, Modalwert und arithmetisches Mittel der Laufwege.

b) Welche der bei a) berechneten Größen stellt einen geeigneten Mittelwert für die Laufwege dar? Begründe auch, dass die anderen nicht so gut geeignet sind.

16 Bei einem Talentwettbewerb erhalten die Teilnehmer bis zu 10 Punkte. Die Tabelle zeigt die Punkteverteilung für die 19 Teilnehmer:
9; 9; 7; 10; 6; 8; 5; 9; 2; 7; 8; 8; 10; 9; 4; 7; 6; 8; 10

a) Zeichne einen Boxplot zum Sachverhalt.

b) Wie viele Punkte müsste ein weiterer Teilnehmer bekommen, damit sich der Boxplot nicht verändert?

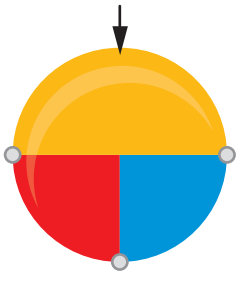
17 Gib für folgende Ereignisse das Gegenereignis an.

a) Beim Würfeln wird eine gerade Augenzahl geworfen.

b) Beim doppelten Münzwurf tritt mindestens einmal Wappen auf.

c) Beim Ziehen einer Karte aus einem Skatblatt zieht man entweder eine rote Karte oder das Pik Ass.

18 Ein Glücksrad besteht wie in der Abbildung aus einem roten, einem blauen und einem gelben Feld.



a) Gib für jede Farbe die Wahrscheinlichkeit beim einmaligen Drehen des Glücksrads an.

b) Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Wie viele verschiedene Farbkombinationen sind insgesamt möglich? Beachte die Reihenfolge.

c) Beim ersten Drehen wird Rot gedreht. Konrad sagt: „Dann ist es jetzt viel wahrscheinlicher als gerade eben, dass nun Gelb gedreht wird.“ Äußere dich zu dieser Aussage.