

2 Quadratische Funktionen und Gleichungen

EINSTIEG

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:

Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K6

- **Beschreibe den Verlauf der Rutschbahnen auf dem Gelände der Technischen Universität München, wenn man am Auslauf vor ihr steht.**

Individuelle Lösungen möglich, z. B.: Die beiden Rutschen gehen jeweils links und rechts spiegelsymmetrisch nach unten. Unten liegen die Ausläufe der beiden Rutschen nebeneinander, wobei die beiden Rutschen zusammen bogenförmig sind.

K3

- **Skizziere im Koordinatensystem einen Graphen, der die Form einer dieser Rutschbahnen hat, wenn man am Auslauf vor ihr steht. Vereinfache dazu die Darstellung der Rutschbahn zu einer einfachen Linie und beginne im Koordinatenursprung.**

Siehe Punkt Vier.

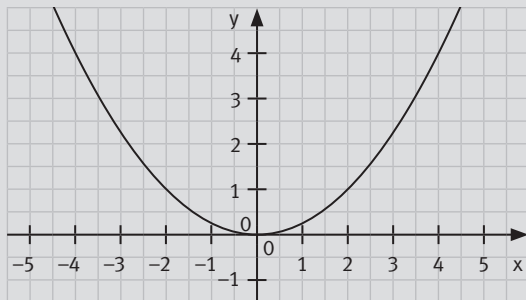
K1

- **Kann es sich bei dieser Linie um eine Funktion handeln? Begründe.**

Ja, es kann sich um eine Funktion handeln, jedoch ist sie keine lineare Funktion, sondern eine quadratische Funktion. Jedem x-Wert kann ein y-Wert zugeordnet werden.

K5

- **Spiegle den Graphen an der y-Achse.**



K6

- **Beschreibe einem Mitschüler deine Skizze. Achte bei der Beschreibung auf die Form des Graphen und besondere Punkte wie z. B. die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.**
Individuelle Lösungen möglich, z. B. bogenförmig, nach oben geöffnet, einziger Schnittpunkt mit der x-Achse und y-Achse liegt im Koordinatenursprung, symmetrisch zur y-Achse.

K6

- **Nenne weitere Beispiele aus deiner Umwelt, die ähnliche Darstellungen ergeben.**

Individuelle Lösungen möglich, z. B. Türbogen, Haarreif, Strahl eines Springbrunnens, etc.

AUSBLICK

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.

Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

VERSTÄNDNIS

- K1** ■ Jeder Term lässt sich als Produkt umschreiben. Das Umformen in ein Produkt ist nichts anderes als „ausklammern“. Beim Ausklammern zieht man eine Zahl oder eine Variable aus dem Term als Faktor heraus. Dabei werden alle Summanden des Terms durch diesen Vorfaktor dividiert. Beispiel:

$$10x + 15y = 5 \cdot (10x : 5) + 5 \cdot (15y : 5) = 5 \cdot (2x + 3y)$$

Die einfachste Möglichkeit, einen Term als Produkt zu schreiben, ist das Ausklammern des Vorfaktors 1.

Beispiel: $a = 1 \cdot a$

- K1** ■ Richtig ist: $6ab + a = a \cdot (6b + 1)$.

- K5** 1 a) $28x + 14$ b) $-15b + 5a$ c) $3,4c + 1,7a$
 d) $2x^2 + 5x$ e) $15y - xy$ f) $9z^2 + 12z$
 g) $2k^2 + \frac{1}{3}k$ h) $-3l^2 + 9l$ i) $\frac{3}{5}st - 1\frac{1}{5}su$
 j) $1,5ac - 4,9bc$ k) $9km - 0,6lm$ l) $-9,6s^3 + 14,4ts^2$

- K1** 2 a) Teilt man die Summe bzw. die Differenz durch einen Divisor (Zahl, Variable oder allgemein: Term), so ist dies gleichbedeutend mit der Multiplikation der Summe bzw. der Differenz mit dem Kehrwert des Divisors; in den Beispielen:

1 $(3x - 6y) : 3 = (3x - 6y) \cdot \frac{1}{3}$

2 $(8x - 4y) : \frac{1}{4} = (8x - 4y) \cdot 4$

3 $(5xy - 10y) : (-5y) = (5xy - 10y) \cdot \left(-\frac{1}{5y}\right)$

b) 1 $(x + y + z) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$

2 $(5a - 2b + c) \cdot 10 = 50a - 20b + 10c$

3 $(4r^2 - 8r^3 + 2r^4) \cdot \frac{7}{8} = 3\frac{1}{2}r^2 - 7r^3 + 1\frac{3}{4}r^4$

4 $(-1,2e + 8,4f^2) \cdot (-5) = 6e - 42f^2$

5 $(-3z^4 - z^5) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{3}{7}z^4 + \frac{1}{7}z^5$

6 $-(2a + 4b) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = a + 2b$

- K6** 3 a) 1 Berechnen der vier Teilflächen und Addition dieser Teilflächen.
 2 Bestimmung der Gesamtlänge und der Gesamtbreite durch Addition von je zwei Seitenlängen und anschließendes Berechnen der Gesamtfläche durch Multiplikation von Gesamtlänge und Gesamtbreite.

b) 1 $A_1 = (4,5 \text{ cm} \cdot 12,5 \text{ cm}) + (2 \text{ cm} \cdot 12,5 \text{ cm}) + (4,5 \text{ cm} \cdot 2,5 \text{ cm}) + (2 \text{ cm} \cdot 2,5 \text{ cm})$
 $= 56,25 \text{ cm}^2 + 25 \text{ cm}^2 + 11,25 \text{ cm}^2 + 5 \text{ cm}^2$
 $= 97,5 \text{ cm}^2$

$A_2 = (4,5 \text{ cm} + 2 \text{ cm}) \cdot (12,5 \text{ cm} + 2,5 \text{ cm})$
 $= 6,5 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm}$
 $= 97,5 \text{ cm}^2$

2 $A_1 = (3,5 \text{ cm} \cdot x \text{ cm}) + (1,2 \text{ cm} \cdot x \text{ cm}) + (3,5 \text{ cm} \cdot 7,3 \text{ cm}) + (1,2 \text{ cm} \cdot 7,3 \text{ cm})$
 $= 3,5 \cdot x \text{ cm}^2 + 1,2 \cdot x \text{ cm}^2 + 25,55 \text{ cm}^2 + 8,76 \text{ cm}^2$
 $= 4,7x \text{ cm}^2 + 34,31 \text{ cm}^2$

$A_2 = (3,5 \text{ cm} + 1,2 \text{ cm}) \cdot (x \text{ cm} + 7,3 \text{ cm})$
 $= 4,7 \text{ cm} \cdot (x \text{ cm} + 7,3 \text{ cm})$
 $= 4,7x \text{ cm}^2 + 34,31 \text{ cm}^2$

3 $A_1 = (a \text{ cm} \cdot 2,9 \text{ cm}) + (1,8 \text{ cm} \cdot 2,9 \text{ cm}) + (a \text{ cm} \cdot b \text{ cm}) + (1,8 \text{ cm} \cdot b \text{ cm})$
 $= 2,9a \text{ cm}^2 + 5,22 \text{ cm}^2 + ab \text{ cm}^2 + 1,8b \text{ cm}^2$

$A_2 = (a \text{ cm} + 1,8 \text{ cm}) \cdot (2,9 \text{ cm} + b \text{ cm})$
 $= 2,9a \text{ cm}^2 + ab \text{ cm}^2 + 5,22 \text{ cm}^2 + 1,8b \text{ cm}^2$

K5

- 4 a) $x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$
 b) $z^2 - 10z + 2z - 20 = z^2 - 8z - 20$
 c) $3v + v^2 - 9 - 3v = v^2 - 9$
 d) $y^2 - 3y - 5y + 15 = y^2 - 8y + 15$
 e) $-3c - c^2 + 9 + 3c = -c^2 + 9$
 f) $-4r + 12 - 3r^2 + 9r = -3r^2 + 5r + 12$
 g) $2ab + 5a + 6b + 15$
 h) $\frac{3}{4}uv + \frac{5}{14}u^2 - \frac{3}{10}v^2 - \frac{1}{7}uv = \frac{5}{14}u^2 - \frac{3}{10}v^2 + \frac{17}{28}uv$
 i) $0,1a^3 - 0,6a^2 + 0,6a^2 - 3,6a = 0,1a^3 - 3,6a$

K5

- 5 Man kann teils auch andere Vorfaktoren ausklammern.
 a) $x \cdot \left(\frac{1}{2}a + 3 - 7y\right)$ b) $ab \cdot (ac - b + 3,2c)$ c) $m \cdot (6n + 4k + 8)$
 d) $s^2 \cdot (2,5f - 1,5t + 12)$ e) $7r \cdot (-5s + 3 - 7s^2)$ f) $0,3g \cdot (4h + 1 - 5k)$
 g) $d \cdot \left(\frac{2}{3}d - \frac{4}{3}c + 1\right)$ h) $kl^2 \cdot (0,8k - 1,6 + m)$ i) $xy \cdot (1,9x^2 - 4,6xy + xy^2)$

K2

- 6 a) $K = [x \cdot (x + 2,5) \cdot y] m^3 \cdot 250 \text{ €} / m^3 = (250x^2y + 625xy) \text{ €}$
 b) $K = (250 \cdot 11^2 \cdot 6,5 + 625 \cdot 11 \cdot 6,5) \text{ €}$
 $= 196\,625,00 \text{ €} + 44\,687,50 \text{ €}$
 $= 241\,312,50 \text{ €}$
 c) $483\,600 \text{ €} = (250 \cdot 13^2 \cdot y + 625 \cdot 13 \cdot y) \text{ €}$
 $= (50\,375 \cdot y) \text{ €}$
 $\Leftrightarrow y = 483\,600 : 50\,375 = 9,6$
 Das Haus ist 13 m breit, 15,5 m lang und 9,6 m hoch.

K3

- 7 a) $9a + 11b + 8c$
 b) $9a + 11b + 8c = 9 \cdot (b + 4 \text{ cm}) + 11b + 8 \cdot (b + 2 \text{ cm})$
 $= 9b + 36 \text{ cm} + 11b + 8b + 16 \text{ cm}$
 $= 28b + 52 \text{ cm}$
 c) $b = 8$: $28 \cdot 8 \text{ cm} + 52 \text{ cm} = 276 \text{ cm}$
 Der Draht muss mindestens 276 cm lang sein, damit jede Kante abgedeckt ist. Für Verschnitt oder Lötstellen muss der Draht evtl. etwas länger sein.

K1

- 8 a) 1. Binomische Formel: $\underbrace{(a+b) \cdot (a+b)}_{(a+b)^2} = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 2. Binomische Formel: $\underbrace{(a-b) \cdot (a-b)}_{(a-b)^2} = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 3. Binomische Formel: $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$
 b) Die erste und zweite Binomische Formel unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen von $2ab$.
 c) Der mittlere Teil der dritten Binomischen Formel entfällt, da $-ab + ab = 0$.

K5

- 9 a) $x^2 + 2xy + y^2$ b) $v^2 - 2vw + w^2$ c) $9 + 6z + z^2$ d) $49 - 14m + m^2$
 e) $4u^2 + 4uv + v^2$ f) $a^2 - 10ab + 25b^2$ g) $16x^2 - 40xy + 25y^2$ h) $p^2 - 6p + 9$
 i) $a^2 + a + 0,25$ j) $0,49 - 1,4b + b^2$ k) $s^2 + s + \frac{1}{4}$ l) $\frac{64}{81} - 1\frac{7}{9}t + t^2$
 m) $x^2 + 5\frac{1}{2}x + 7\frac{9}{16}$ n) $x^4 + 10x^2 + 25$ o) $a^8 - 30a^4 + 225$ p) $9a^4 + 12a^2b^3 + 4b^6$

KAPITEL 2

K5

10 a) $x^2 - 4$
d) $36 - x^2$
g) $x^2 - y^2$
j) $9 - b^2$

b) $x^2 - 9$
e) $y^2 - \frac{4}{25}$
h) $x^2 - 9$
k) $a^2 - 0,25$

c) $y^2 - 16$
f) $\frac{16}{81} - x^2$
i) $y^2 - 4$
l) $x^4 - \frac{49}{4}$

K5

11 a) $(x + 11)^2$
d) $(1 + x)^2$
g) $(3x + 5y)^2$
j) $(0,8a + 4)^2$

b) $(a - 13)^2$
e) $\left(\frac{1}{2}t - s\right)^2$
h) $(0,5s - 1)^2$
k) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}\right)^2$

c) $(5 + y) \cdot (5 - y)$
f) $(2a - 9)^2$
i) $(6k + 12m) \cdot (6k - 12m)$
l) $\left(0,7r + \frac{11}{13}\right) \cdot \left(0,7r - \frac{11}{13}\right)$

VERSTÄNDNIS

K6

- Eine Funktion mit der Gleichung $y = 2x$ ist linear, ihr Graph ist eine Gerade. Eine Funktion mit der Gleichung $y = x^2$ ist eine quadratische Funktion, ihr Graph ist die Normalparabel. Der Unterschied bei den Funktionstermen ist: Im einen Fall handelt es sich um das Doppelte von x , im anderen Fall um das Quadrat von x .

K6

- Der Scheitelpunkt der Normalparabel ist der Punkt auf der Parabel mit dem kleinsten Funktionswert. Bei der üblichen Lage des Koordinatensystems (y -Achse zeigt nach „oben“) bedeutet dies, dass der Scheitelpunkt „am tiefsten“ liegt.

K1

- Lukas hat Recht: Eine Stelle x_0 ist dann Nullstelle einer Funktion $f(x)$, wenn $f(x_0) = 0$ gilt. Der Scheitelpunkt der Normalparabel liegt in $(0|0)$ und erfüllt damit die Bedingungen für eine Nullstelle.

Hinweis: Bei der Schreibweise von Funktionstermen quadratischer Funktionen sind generell verschiedene Notationen ($f(x)$; $f: y = \dots$; $p: y = \dots$) gebräuchlich und gleichbedeutend. Im Folgenden gilt dies für alle Unterkapitel.

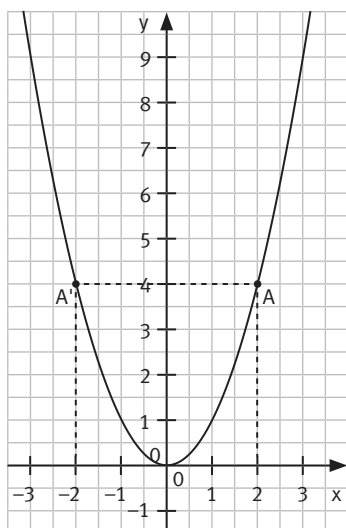
K1

1 a)

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Die Funktionswerte der Normalparabel mit $y = x^2$ sind für $\pm a \in \mathbb{R}$ dieselben, da $(-a)^2 = a^2$.

b)



- c) Spiegelt man den Graphen von $f(x) = x^2$ mit $x > 0$ an $x = 0$, so erhält man den Graphen von $f(x)$ für $x < 0$. Begründung: $f(x) = f(-x)$, denn $f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$. Die Symmetrieachse und ein (beliebiger) Punkt und sein Spiegelpunkt sind in der Grafik bei b) eingezeichnet.

K5

2

- a) A(-2,8|7,84) B(-1,4|1,96) C(-0,3|0,09) D(0,85|0,7225) E(1,2|1,44) F(2,3|5,29)
 b) A(10|100) B(0,1|0,01) C(8|64) D($\frac{2}{3}|\frac{4}{9}$) E(1,3|1,69) F(0,5|0,25) oder
 A(-10|100) B(-0,1|0,01) C(-8|64) D($-\frac{2}{3}|\frac{4}{9}$) E(-1,3|1,69) F(-0,5|0,25)

K5

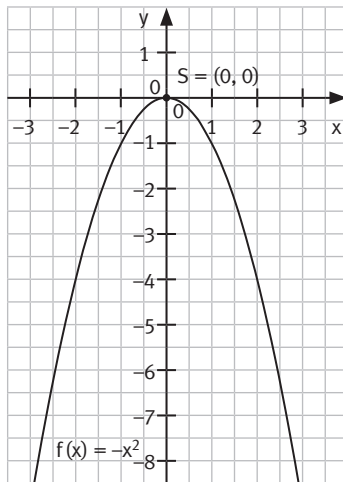
3

- a) Ja, denn $(-12,5)^2 = 156,25$ b) Nein, denn $(-3,8)^2 = 14,44$
 c) Nein, denn $(-0,2)^2 = 0,04$ d) Ja, denn $0,8^2 = 0,64$
 e) Ja, denn $5,1^2 = 26,01$ f) Ja, denn $16,4^2 = 268,96$

K1

4

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9



- a) Es handelt sich um eine Funktion, da jedem Argument genau ein Funktionswert zugeordnet ist.
- b) Der Graph der Funktion $f(x) = -x^2$ ist symmetrisch zur y-Achse. Der Scheitelpunkt liegt im Ursprung des Koordinatensystems; er ist zugleich eine doppelte Nullstelle. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}^-$. Der Graph ist für $x < 0$ monoton steigend und für $x > 0$ monoton fallend.

VERSTÄNDNIS

K6

- Vorteile: höhere Anschaulichkeit, leichteres Überprüfen des Ergebnisses
Nachteile: ungenaue Ergebnisse bei ungünstigen Werten, meist zeitaufwändiger

K1

- Mirko hat nicht Recht. Eine quadratische Gleichung hat entweder zwei, eine oder keine Lösung. Ist der Radikand positiv, hat die Gleichung zwei Lösungen. Bei einem negativen Radikand gibt es keine Lösungen und genau eine Lösung tritt auf, falls der Radikand null ist.

K5

- 1 a) $x = \pm 12$ b) $x = \pm 7$ c) $x = \pm 0,9$ d) $x = \pm 25$ e) $x = \pm 0,1$
 f) $x = \pm 4$ g) $x = \pm \frac{2}{3}$ h) $x = \pm \sqrt{2}$ i) $x = \pm 0,2$

K6

- 2 a) $\frac{1}{4}x^2 = 4$ $| \cdot 4$
 $x^2 = 16$
 $x = 4$ f
 $\mathbb{L} = \{4\}$

Der Fehler ist beim Lösen der quadratischen Gleichung passiert: Die Gleichung $x^2 = 16$ hat die Lösungen -4 und $+4$: $\mathbb{L} = \{-4; 4\}$.

- b) $3 - x^2 = 6$ $| + 3$
 $x^2 = 9$ f
 $x_1 = -3; x_2 = 3$
 $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$

Die erste Umformung ist bereits falsch, da nicht auf beiden Seiten 3 addiert wurde.

Stattdessen soll 3 auf beiden Seiten subtrahiert werden. Die Rechnung sieht dann wie folgt aus:

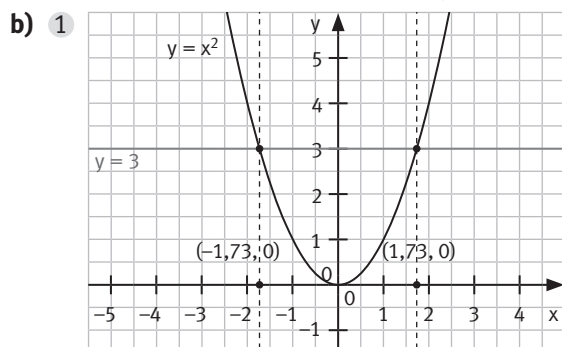
$$\begin{aligned} 3 - x^2 &= 6 && | - 3 \\ -x^2 &= 3 && | \cdot (-1) \\ x^2 &= -3 \end{aligned}$$

Die Gleichung besitzt keine Lösung, da der Radikand negativ ist: $\mathbb{L} = \{ \}$.

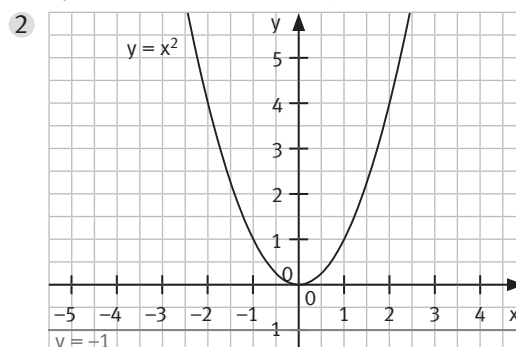
K4

- 3 a) $x^2 = 16$ $\mathbb{L} = \{-4; 4\}$ b) $y^2 = 27$ $\mathbb{L} = \{-\sqrt{27}; \sqrt{27}\}$ c) $x^2 = 4$ $\mathbb{L} = \{-2; 2\}$
 d) $t^2 = \frac{7}{22}$ $\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{\frac{7}{22}}; \sqrt{\frac{7}{22}}\right\}$ e) $x^2 = 0$ $\mathbb{L} = \{0\}$ f) $a^2 = -\frac{3}{2,25}$ $\mathbb{L} = \emptyset$
 g) $t^2 = \frac{8}{3}$ $\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{\frac{8}{3}}; \sqrt{\frac{8}{3}}\right\}$ h) $x^2 = 2$ $\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ i) $z = 0$ oder $z^2 = -8$ $\mathbb{L} = \{0\}$
 j) $x^2 = 1$ $\mathbb{L} = \{-1; 1\}$ k) $x^2 - x + 17 = x^2 - x - 25 \Leftrightarrow 17 = -25$ $\mathbb{L} = \emptyset$

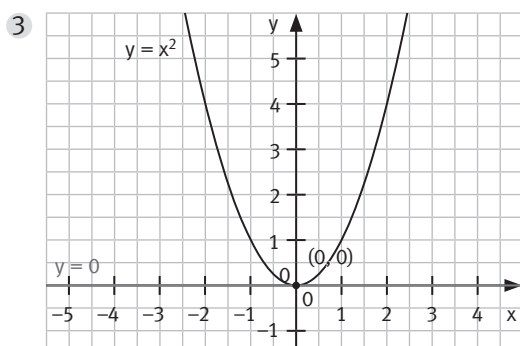
- K4** 4 a) Peter hat die Gleichung zuerst in die Form $x^2 = 4$ gebracht. Dann hat er die beiden Graphen $y = x^2$ und $y = 4$ in ein gemeinsames Koordinatensystem gezeichnet. Durch die beiden Schnittpunkte hat er zwei Parallelen zur y-Achse gezeichnet. Die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Parallelen mit der x-Achse sind die beiden Lösungen $\mathbb{L} = \{-2; +2\}$ der quadratischen Gleichung.



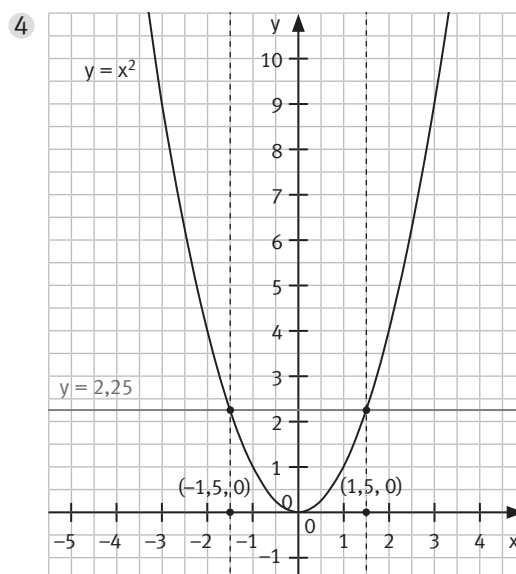
$$\mathbb{L} = \{-1,73; 1,73\}$$



$$\mathbb{L} = \emptyset$$



$$\mathbb{L} = \{0; 0\}$$

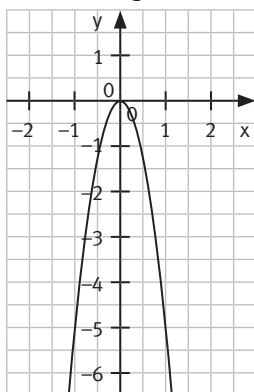


$$\mathbb{L} = \{-1,5; 1,5\}$$

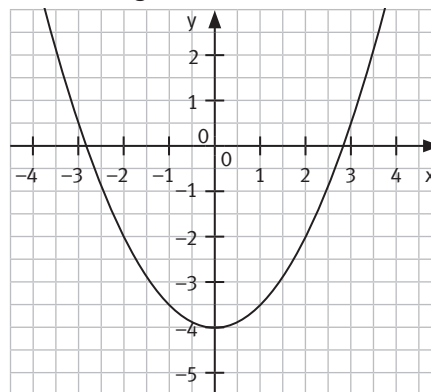
- K5** 5 a) $x^2 = 2,5$ $\mathbb{L} = \{-1,6; +1,6\}$
 b) $-x^2 = -3 \Leftrightarrow x^2 = 3$ $\mathbb{L} = \{-1,7; +1,7\}$
 c) $x^2 = -1$ $\mathbb{L} = \emptyset$

- K1** 6 a) Die Funktionsgleichung $y = x^2 + 6$ beschreibt eine nach oben geöffnete und um 6 Einheiten auf der y-Achse nach oben verschobene Normalparabel. Da der Scheitelpunkt (0|6) der tiefste Punkt der Parabel ist, kann diese keinen Schnittpunkt mit der Gerade $y = 4$ haben.
 b) Die Parabel mit der Funktionsgleichung $y = 25x^2$ ist um den Faktor $a = 25$ gestreckt und verläuft durch den Ursprung. Da sie symmetrisch zur y-Achse und nach oben geöffnet ist, nimmt sie den Wert $y = 4$ bei zwei verschiedenen x-Werten an.
 c) Die Funktionsgleichung $y = 16x^2$ beschreibt eine gestreckte Parabel, die ihren Scheitelpunkt im Ursprung hat. Sie hat deshalb genau einen Schnittpunkt mit der x-Achse.
 d) Die Gleichung $(x - 2)^2 = 0$ kann auch geschrieben werden als $(x - 2) \cdot (x - 2) = 0$. Da ein Produkt genau dann 0 ist, wenn einer der Faktoren 0 ist, gilt: $x_1 = x_2 = 2$. Also gibt es genau eine Lösung.

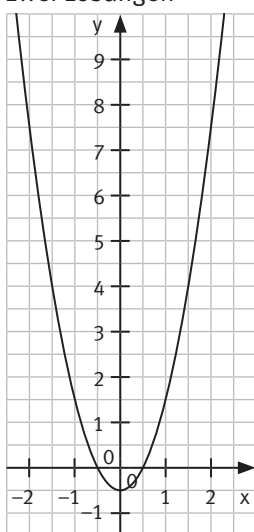
K5 7 a) eine Lösung



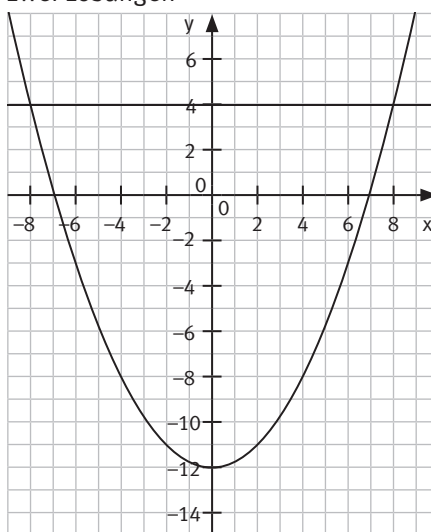
b) zwei Lösungen



c) zwei Lösungen



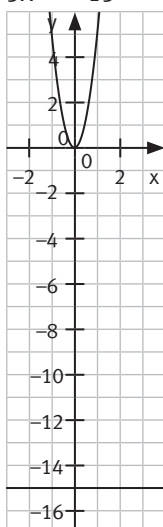
d) zwei Lösungen



e) keine Lösung

Bei dieser Aufgabe bietet es sich für die Zeichnung an, die Gleichungen zunächst umzuformen:

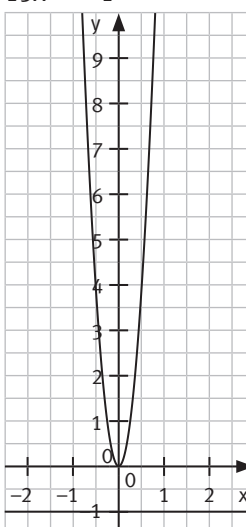
$$5x^2 = -15$$



f) keine Lösung

Bei dieser Aufgabe bietet es sich für die Zeichnung an, die Gleichungen zunächst umzuformen:

$$15x^2 = -1$$



K3 8 Es sind weitere Gleichungen möglich.

a) $x^2 = 9$ b) $x^2 = 0,5$ c) $x^2 = 18$ d) $x^2 = 0$ e) $x^2 = -10$ f) $x^2 = 0,25$

KAPITEL 2

- K5** 9 a) $54x^2 = 54 \Leftrightarrow x^2 = 1$ $\mathbb{L} = \{-1; 1\}$
 b) $15x^2 = 35 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{3}$ $\mathbb{L} = \left\{-\frac{\sqrt{21}}{3}; \frac{\sqrt{21}}{3}\right\}$
 c) $8x^2 - 28x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2x - 7) = 0$ $\mathbb{L} = \{0; 3,5\}$
 d) $36x^2 = 1292 \Leftrightarrow x^2 = 36$ $\mathbb{L} = \{-6; 6\}$
 e) $5x^2 = -4,8$ $\mathbb{L} = \emptyset$
 f) $x^2 = 2$ $\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

- K3** 10 a) $x^2 + 33 = 154$ $\mathbb{D} = \mathbb{N}$ $\mathbb{L} = \{11\}$
 b) $x^2 - 88 = 696$ $\mathbb{D} = \mathbb{Z}$ $\mathbb{L} = \{-28; 28\}$
 c) $3x \cdot 5x = 375$ $\mathbb{D} = \mathbb{N}$ $\mathbb{L} = \{5\}$
 d) $5x \cdot \frac{x}{2} = 250$ $\mathbb{D} = \mathbb{N}$ $\mathbb{L} = \{10\}$

- K3** 11 a) $d^2 = (8,5 \text{ cm})^2 + (8,5 \text{ cm})^2$ $\mathbb{L} = \{11\}$
 $d \approx 12,0 \text{ cm}$ $b) (98 \text{ cm})^2 = 2a^2$
 $a \approx 69,3 \text{ cm}$

- K3** 12 a) $1,5625 \text{ ha} = 15\,625 \text{ m}^2 = a^2$ $\mathbb{L} = \{-28; 28\}$
 $a = 125 \text{ m}$ $b) 6272 \text{ m}^2 = 2b \cdot b$
 $b = 56 \text{ m}; a = 112 \text{ m}$

- K3** 13 Eine Fliese hat die Fläche $(25,92 \text{ m}^2 : 288) = 0,09 \text{ m}^2 = 900 \text{ cm}^2$. Wegen der quadratischen Form ergibt sich eine Seitenlänge von 30 cm.

K1 14 a)

	1 $x^2 = a$	2 $\frac{1}{2}x^2 - a = 0$	3 $2x^2 = -a$	4 $\frac{1}{2}x^2 - 4a = 0$	5 $7x^2 - 7a = 0$	6 $ax^2 - a = 0$
zwei Lösungen	$a > 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a > 0$	$a \neq 0$
eine Lösung	$a = 0$	$a = 0$	$a = 0$	$a = 0$	$a = 0$	–
keine Lösung	$a < 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a < 0$	–

- b) 1 Es gilt: $x = \pm \sqrt{a}$
 Für positives a ist die Wurzel von a definiert und es gibt zwei Lösungen. Falls a jedoch negativ ist, ist der Ausdruck $x = \sqrt{a}$ nicht lösbar, da die Wurzel nicht für negative Zahlen definiert ist. Für $a = 0$ ergibt sich genau eine Lösung $x = 0$.
 2 Dieser Fall lässt sich auf den Fall 1 zurückführen.
 3 Umformen ergibt: $x^2 = -0,5a$. Wenn a positiv ist, darf die Wurzel nicht gezogen werden und es existieren keine Lösungen. Wenn a negativ ist, ist der Ausdruck $-0,5a$ wieder positiv und es ergeben sich die Lösungen $x_{1/2} = \pm \sqrt{0,5a}$. Für $a = 0$ ergibt sich: $x^2 = 0$ und damit eine Lösung $x = 0$.
 4 Dieser Fall lässt sich auf den Fall 1 zurückführen.
 5 Dieser Fall lässt sich auf den Fall 1 zurückführen.
 6 Für $a \neq 0$ ergibt sich: $x^2 = 1$. Es gibt also genau zwei Lösungen: $x_{1/2} = \pm 1$. Falls $a = 0$ ist, ergibt sich die Gleichung $0 = 0$; es gibt also unendlich viele Lösungen.

GESCHICHTE

- K6**
- 1 $\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{3}x = 24$ $\mathbb{L} = \{-12; 12\}$
 - 2 $|x \cdot y| = 35$
 $|x^2 - y^2| = 24$
 $\mathbb{L} = \{(-7; -5); (5; 7)\}$
 - Eine Funktion $f(x)$ ordnet jedem Element x aus dem Definitionsbereich genau ein Element y aus dem Wertebereich zu.

VERSTÄNDNIS

K1

- Die Formvariable a gibt unter anderem an, ob die Parabel gestaucht oder gestreckt ist. Daher wird sie auch Streckfaktor genannt.

K6

- Der Graph von $y = 0x^2$ ist eine Gerade, die auf der x -Achse liegt.

K4

- 1 a) $f: y = 1,2x^2$ Die Parabel ist gestreckt und nach oben geöffnet.

x	±3	±2	±1	0
y	10,8	4,8	1,2	0

- b) $f: y = -2x^2$ Die Parabel ist gestreckt und nach unten geöffnet.

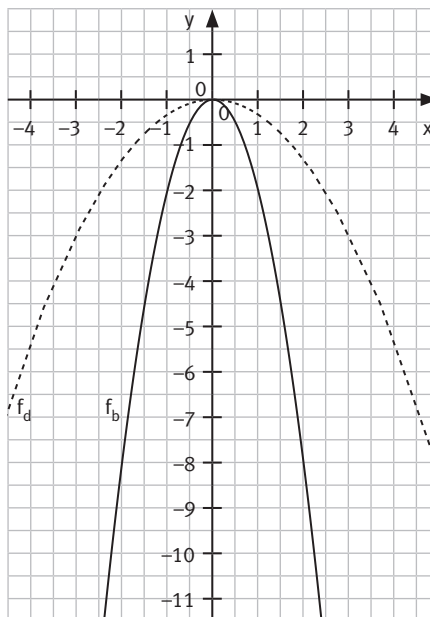
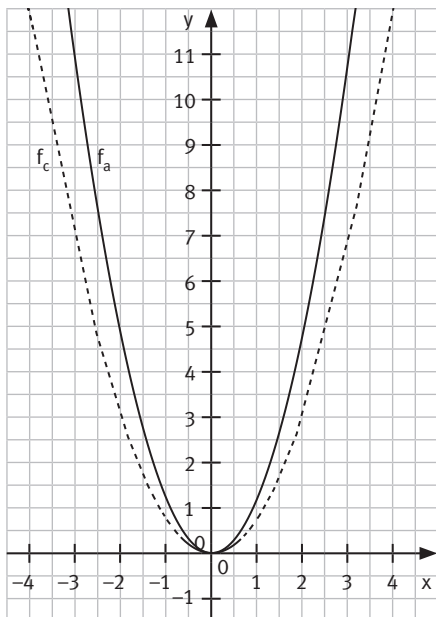
x	±2	±1,5	±1	±0,5	0
y	-8	-4,5	-2	-0,5	0

- c) $f: y = 0,75x^2$ Die Parabel ist gestaucht und nach oben geöffnet.

x	±3	±2	±1	0
y	6,75	3	0,75	0

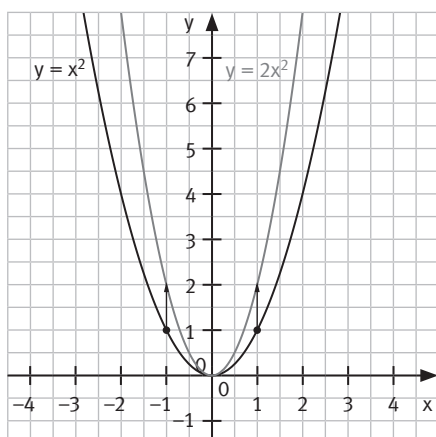
- d) $f: y = -\frac{1}{3}x^2$ Die Parabel ist gestaucht und nach unten geöffnet.

x	±4	±3,5	±3	±2,5	±2	±1,5	±1	±0,5	0
y	-5,33	-4,08	-3,00	-2,08	-1,33	-0,75	-0,33	-0,08	0,00

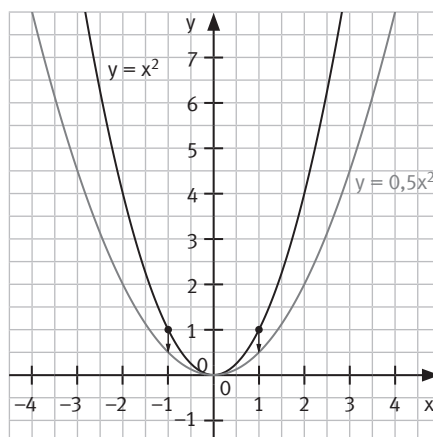


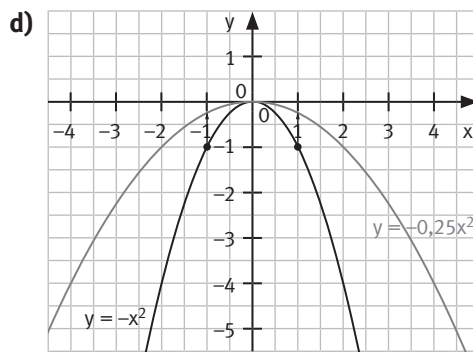
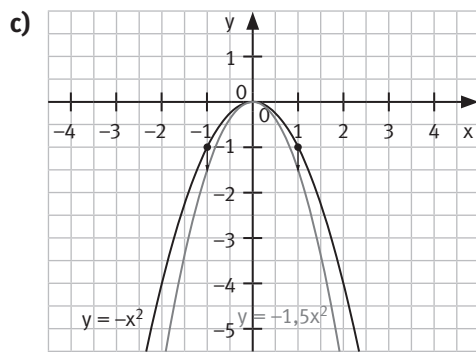
K4

- 2 a)



- b)





- K5** 3 $y = ax^2 \Leftrightarrow a = y : x^2$
 a) $a = -3$ b) $a = -1,5$ c) $a = -2,75$ d) $a = 1$ e) $a = 0,8$

- K1** 4 A $-f_3$ B $-f_5$ C $-f_4$ D $-f_1$ E $-f_2$

- K6** 5 a) Die Parabel der Funktion $f: y = 0,5x^2$ ist gestaucht und nach oben geöffnet, sie hat ihren Scheitelpunkt im Ursprung.
 Einsetzen des x -Wertes von $P(-1,5 | 1,25)$ in die Funktionsgleichung ergibt:
 $y = 0,5 \cdot (-1,5)^2 = 1,125$
 Für $x = -1,5$ erhält man den Parabelpunkt $Q(-1,5 | 1,125)$.
 Der Vergleich der y -Werte von P und Q ergibt:
 $y_P = 1,25 > 1,125 = y_Q$
 Damit liegt P oberhalb von Q und oberhalb der nach oben geöffneten Parabel.
 b) Der x -Wert von P wird in die Funktionsgleichung eingesetzt und der erhaltene Wert mit dem y -Wert von P verglichen.
 1 $y = -\frac{3}{8} (4,4)^2 = -7,26 \quad \square \quad 7,26 = y_P \quad \Rightarrow P$ liegt oberhalb des Graphen.
 2 $y = -2,5 \cdot (-4,8)^2 = -57,6 \quad \square \quad -57,8 = y_P \quad \Rightarrow P$ liegt unterhalb des Graphen.
 3 $y = 0,2 \cdot (-1,5)^2 = 0,45 \quad \square \quad y_P \quad \Rightarrow P$ liegt auf dem Graphen.
 4 $y = 3,2 \cdot (0,5)^2 = 0,8 \quad \square \quad -0,8 = y_P \quad \Rightarrow P$ liegt unterhalb des Graphen.

- K5** 6 a) $y_A = 12 \quad x_B = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx \pm 1,15$ b) $x_A = \pm 3,5 \quad y_B = -1,6$

- K2** 7 a) $y = 2x^2$ b) $y = -0,5x^2$ c) $y = x$ d) $y = -3x^2$

- K1** 8 a) Die Aussage ist falsch, da $f(-x) = f(x)$. Das Quadrat einer Zahl und ihrer Gegenzahl ist jeweils gleich groß.
 b) Die Aussage ist falsch, da für $a > 0$ die Parabel nach oben geöffnet ist und alle Funktionswerte positiv sind.
 c) Die Aussage ist wahr.
 d) Die Aussage ist falsch. Die Parabel wird an der x -Achse gespiegelt.
 e) Die Aussage ist wahr.
 f) Die Aussage ist falsch, da die Parabel durch den Punkt $P(-1 | -0,75)$ läuft:
 $f(-1) = -0,75 \cdot (-1)^2 = -0,75$.
 g) Die Aussage ist wahr.

- K6** 9 a) Für $y = -x^2$ wird die Normalparabel an der y -Achse gespiegelt.
 b) Für $y = 1,5x^2$ wird jeder Funktionswert mit 1,5 multipliziert. Die Parabel ist nach oben geöffnet und gestreckt.

- c) Für $y = -3x^2$ wird jeder Funktionswert mit -3 multipliziert. Die Parabel ist nach unten geöffnet und gestreckt.
- d) Für $y = 0,25x^2$ wird jeder Funktionswert mit $0,25$ multipliziert. Die Parabel ist nach oben geöffnet und gestaucht.

K1

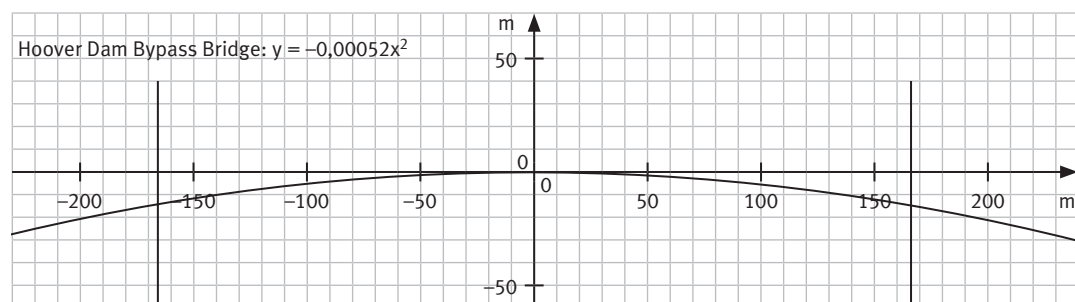
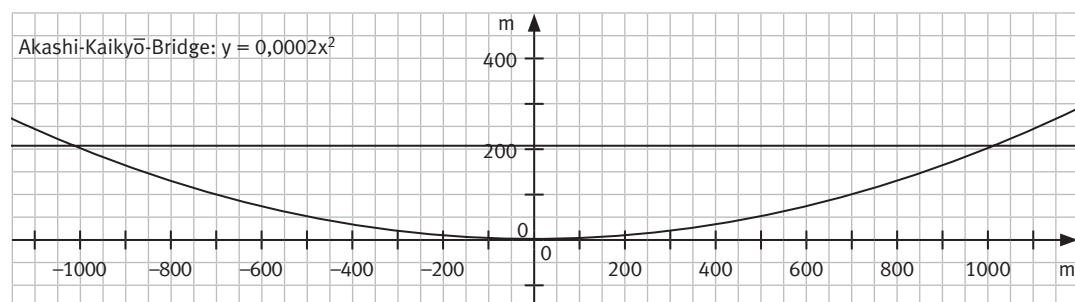
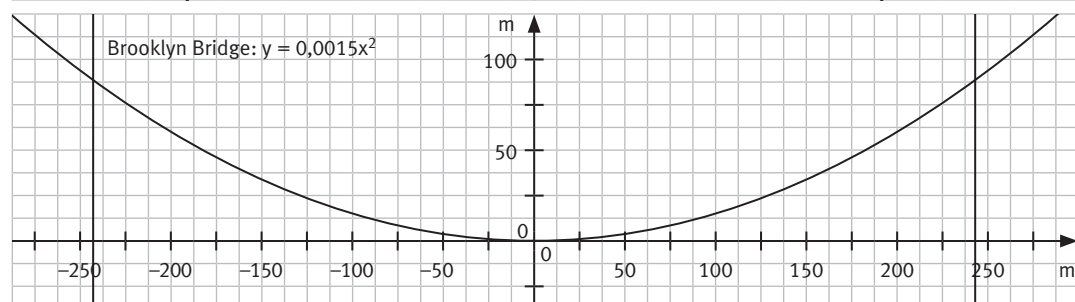
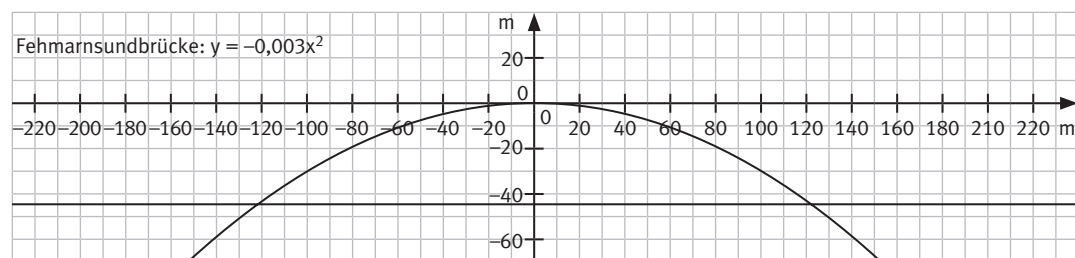
- 10 a) Der Funktionswert ist kleiner, da er ein negatives Vorzeichen hat.
 b) Der Funktionswert ist größer, da er mit $1,5$ multipliziert wird.
 c) Der Funktionswert ist kleiner, da er mit -3 multipliziert wird.
 d) Der Funktionswert ist kleiner, da er mit $0,25$ multipliziert wird.

K3

- 11 a) $y = -0,005x^2$
 $-80 = -0,005x^2 \quad | : (-0,005)$
 $16\,000 = x^2$
 $x_1 \approx -126,5 \quad x_2 \approx 126,5$

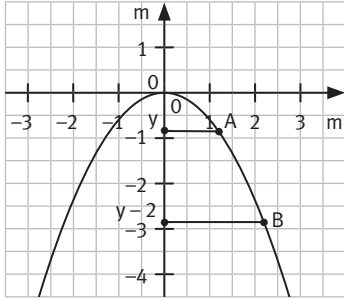
Die Spannweite ist der Abstand zwischen den beiden Lösungen. Der Bogen hat eine Spannweite von etwa $2 \cdot 126,5 \text{ m} = 253 \text{ m}$.

b)



	Funktionsvorschrift	Höhe	Spannweite
Fehmarnsundbrücke	$y = -0,003x^2$	45 m	245 m
Brooklyn Bridge	$y = 0,0015x^2$	89 m	486 m
Akashi-Kaikyō-Bridge	$y = 0,0002x^2$	208 m	2040 m
Hoover Dam Bypass Bridge	$y = -0,000052x^2$	14 m	332 m

K2 12 a)



Wenn man das Koordinatensystem so wählt, dass sich der Scheitelpunkt im Ursprung befindet, liegt der Punkt A(1,2|y) auf der Parabel. Somit liegt auch B(2,2|y-2) auf der Parabel und beide Punkte in die Funktionsgleichung $y = ax^2$ eingesetzt ergibt:

$$I \quad y = a \cdot 1,2^2$$

$$II \quad y - 2 = a \cdot 2,2^2$$

$$a \approx -0,59$$

Die Funktionsgleichung des parabelförmigen Eingangs lautet also $y = -0,59x^2$.

b) Für $x = 2,2$ ist $y = -2,86$.

Der Keller sollte mindestens 2,86 m hoch sein.

K3 13 Bogenbrücke im Kromlauer Park:

$y = -6,5$ und $x = 7,8$ in $y = ax^2$ eingesetzt liefert $a \approx -0,11$

$$y = -0,11x^2$$

Müngstener Brücke:

$y = -69$ und $x = 39,5$ in $y = ax^2$ eingesetzt liefert: $a \approx -0,044$

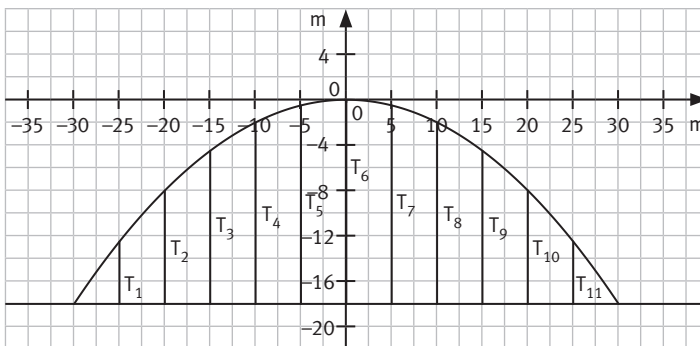
$$y = -0,044x^2$$

K3 14 a) Wenn man den Scheitelpunkt der Parabel in den Ursprung des Koordinatensystems legt, ergibt sich folgende Gleichung:

$$-18 = a \cdot 30^2 \Leftrightarrow a = -0,02$$

$$y = -0,02x^2$$

b) Auf 60 m sind gleichmäßig 11 Träger verteilt, d. h. der Abstand der einzelnen Träger ist 5 m (60 m : 12 Abschnitte = 5 m pro Abschnitt).



Der mittlere Träger, T_6 , ist genau 18 m lang ($x = 0$).

Die beiden Träger daneben, T_5 und T_7 , stehen jeweils 5 m neben T_6 : $x = 5$ in die Funktionsgleichung eingesetzt ergibt: $y = -0,5$. T_5 und T_7 sind also 17,5 m lang.

T_4 und T_8 : $x = 10$ ergibt $y = -2$. T_4 und T_8 sind damit 16 m lang.

T_3 und T_9 sind 13,5 m lang; T_2 und T_{10} sind 10 m lang; T_1 und T_{11} sind 5,5 m lang.

K3

- 15 a) Der Scheitelpunkt des Parabelbogens soll in S(0|36) liegen.

Mit $y = 0$ und $x = 35$ folgt für $y = ax^2 + 36$: $a \approx -0,029$. Für die Funktionsgleichung gilt also:

$$y = -0,029x^2 + 36$$

- b) Für die Spannweite auf Höhe der 6. Etage gilt mit $y = 19$:

$$19 = -0,029x^2 + 36$$

$$x \approx \pm 24,2$$

Für die Gesamtfläche in der 6. Etage gilt somit: $A_6 = 48,4 \text{ m} \cdot 140 \text{ m} = 6776 \text{ m}^2$

Die tatsächlich zu vermietende Fläche ist aber kleiner, man kann beispielsweise von einer Raumhöhe von 3 m ausgehen und deshalb die Fläche in 22 m Höhe bestimmen (vgl. Zeichnung):

Für die Spannweite in 22 m Höhe gilt mit $y = 22$:

$$22 = -0,029x^2 + 36$$

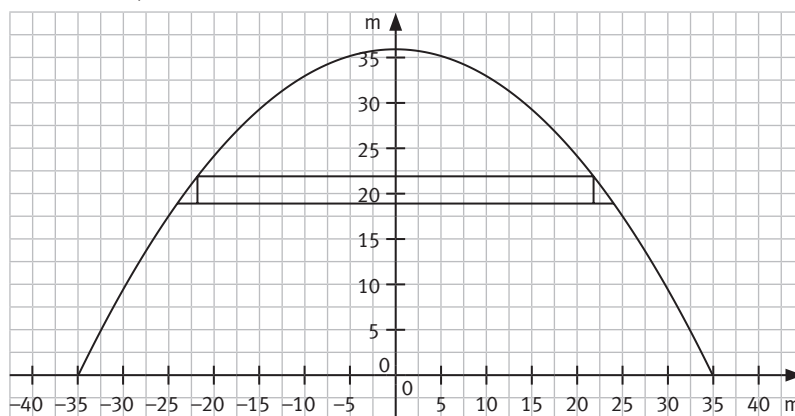
$$x \approx \pm 22,0$$

Für die gesamte zu vermietende Fläche in der 6. Etage gilt somit näherungsweise:

$$A_{6 \text{ zu vermieten}} = 44,0 \text{ m} \cdot 140 \text{ m} = 6160 \text{ m}^2$$

Kalkuliert man noch Zwischenwände und Flure mit 15 % ein:

$$6160 \text{ m}^2 \cdot 0,85 = 5236 \text{ m}^2$$



K6

VERKEHR

- Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:

Der Reaktionsweg ist die Länge der Strecke, die nach einem Impuls zurückgelegt wird, bevor gebremst wird. Beeinflusst wird der Reaktionsweg z. B. durch Ablenkung, Stress, Müdigkeit, ... des Fahrers. Der Bremsweg ist die Länge der Strecke, die ein Auto nach Betätigen der Bremse bis zum Stillstand zurücklegt.

Geschwindigkeit in km/h	30	50	60	80	100
Reaktionsweg in m	9,00	15,00	18,00	24,00	30,00
Bremsweg in m	6,75	18,75	27,00	48,00	75,00
Anhalteweg in m	15,75	33,75	45,00	72,00	105,00

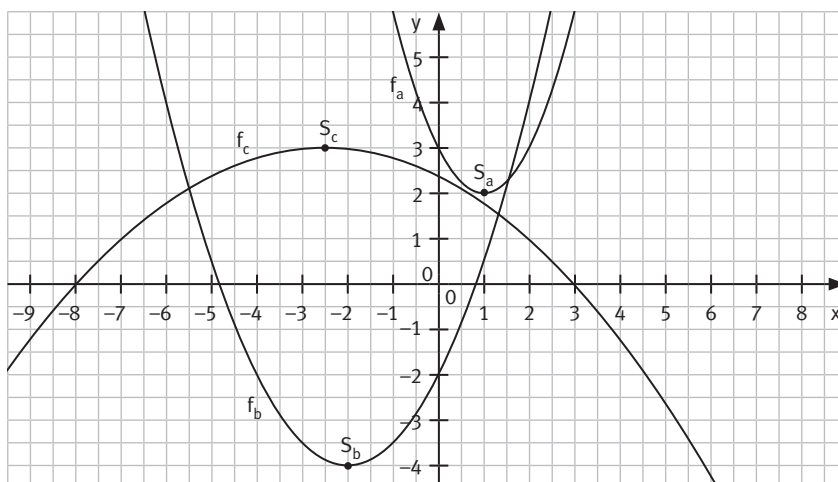
- Die Schüler machen sich anhand der praktischen Übung die unterschiedlichen Längen von Reaktionsweg, Bremsweg und Anhalteweg bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewusst.

VERSTÄNDNIS

- K1** ■ Die verschobene Parabel hat für $c > 0$ keine Nullstellen, für $c = 0$ eine Nullstelle und für $c < 0$ zwei Nullstellen.
- K1** ■ Die verschobene Parabel kann, ebenso wie eine Normalparabel, die y-Achse nur in einem Punkt schneiden, da jedem Argument x nur ein Funktionswert y zugeordnet werden kann. Somit gibt es auch für $x = 0$ nur einen y -Wert.

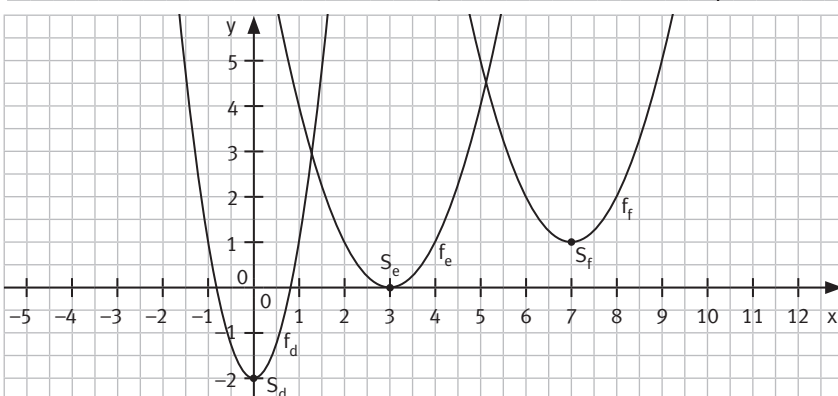
- K5** 1 a) Die Parabel ist entlang der y-Achse um 4 Einheiten nach oben verschoben.
 b) Die Parabel ist entlang der y-Achse um 1 Einheit nach oben verschoben.
 c) Die Parabel ist entlang der y-Achse um 1,5 Einheiten nach unten verschoben.
 d) Die Parabel ist entlang der x-Achse um 2,5 Einheiten nach links verschoben.
 e) Die Parabel ist entlang der x-Achse um 0,5 Einheiten nach rechts verschoben.
 f) Die Parabel ist entlang der x-Achse um 2 Einheiten nach rechts verschoben.
 g) Die Parabel ist entlang der x-Achse um 2 Einheiten nach links und entlang der y-Achse um 0,5 Einheiten nach unten verschoben.
 h) Die Parabel ist entlang der x-Achse um 1,5 Einheiten nach rechts und entlang der y-Achse um 3 Einheiten nach oben verschoben.
 i) Die Parabel ist entlang der x-Achse um 1 Einheit nach rechts und entlang der y-Achse um 4 Einheiten nach unten verschoben.
- K5** 2 a) Die Parabel ist gestaucht und nach oben geöffnet. Der Scheitelpunkt S wurde entlang der x-Achse um 3 Einheiten nach rechts und entlang der y-Achse um 2 Einheiten nach oben verschoben.
 b) Die Parabel ist gestreckt und nach unten geöffnet. Der Scheitelpunkt S wurde entlang der x-Achse um 0,5 Einheiten nach links verschoben.
 c) Die Parabel ist nach unten geöffnet. Sie wurde entlang der x-Achse um 2,5 Einheiten nach rechts und entlang der y-Achse um 4 Einheiten nach oben verschoben.
 d) Die Parabel ist gestreckt und nach oben geöffnet. Der Scheitelpunkt S wurde entlang der x-Achse um 1 Einheit nach links und entlang der y-Achse um 3,5 Einheiten nach unten verschoben.
 e) Die Parabel ist gestaucht und nach unten geöffnet. Der Scheitelpunkt S wurde entlang der y-Achse um 5 Einheiten nach oben verschoben.
 f) Die Parabel ist nach oben geöffnet. Sie wurde entlang der x-Achse um 5,5 Einheiten nach links und entlang der y-Achse um 1 Einheit nach unten verschoben.
- K1** 3 a) Die Aussage ist wahr.
 b) Die Aussage ist wahr.
 c) Die Aussage ist falsch, da die Konstante y_S der y-Wert des Scheitelpunkts ist.
 d) Die Aussage ist falsch, da bei positivem y_S der Scheitelpunkt nach oben, bei negativem y_S der Scheitelpunkt nach unten verschoben ist.
 e) Die Aussage ist falsch, da bei einer Normalparabel $|a| = 1$ sein muss und y_S beliebig sein darf.
 f) Die Aussage ist falsch, da sich der Scheitelpunkt für $x_S > 0$ nach links verschiebt.
 g) Die Aussage ist wahr.
 h) Die Aussage ist wahr.
 i) Die Aussage ist falsch, da x_S die Verschiebung entlang der x-Achse angibt.

K4 4 a) bis c)



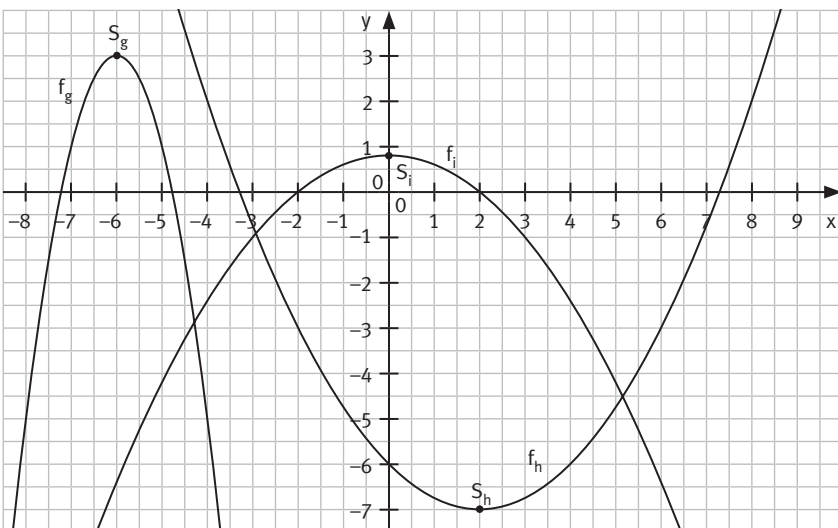
$S_a(1|2)$
 $S_b(-2|-4)$
 $S_c(-2,5|3)$

d) bis f)



$S_d(0|-2)$
 $S_e(3|0)$
 $S_f(7|1)$

g) bis i)



$S_g(-6|3)$
 $S_h(2|-7)$ mit f_h :
 $y = 0,25(x-2)^2 - 7$
 $S_i(0|0,8)$ mit f_i :
 $y = -0,2x^2 + 0,8$

K4 5 1 - f_7 2 - f_2 3 - f_3 4 - f_4
 5 - f_8 6 - f_1 7 - f_6 8 - f_5

K4 6 $S_1(0|1)$ $f_1: y = x^2 + 1$ $W = \{y|y \geq 1\}$ Symmetrieachse: $x = 0$
 $S_2(-1|0)$ $f_2: y = (x+1)^2$ $W = \{y|y \geq 0\}$ Symmetrieachse: $x = -1$
 $S_3(0|4)$ $f_3: y = -x^2 + 4$ $W = \{y|y \leq 4\}$ Symmetrieachse: $x = 0$
 $S_4(2|1,5)$ $f_4: y = (x-2)^2 + 1,5$ $W = \{y|y \geq 1,5\}$ Symmetrieachse: $x = 2$
 $S_5(3|1)$ $f_5: y = -(x-3)^2 + 1$ $W = \{y|y \leq 1\}$ Symmetrieachse: $x = 3$

KAPITEL 2

- K5** 7 a) $y = 0,5 \cdot (x-1)^2 + 2$ b) $y = -(x+3)^2 + 7$ c) $y = -3 \cdot (x-0,5)^2 - 3,5$
 d) $y = 0,25x^2 + 2$ e) $y = 7 \cdot (x+4,5)^2 - 2$ f) $y = -\frac{2}{3} \cdot (x-8,2)^2$

- K2** 8 Punkt P und Scheitelpunkt S in $y = 1(x - x_S)^2 + y_S$ einsetzen ergibt:
 a) $5 = 1(-1+3)^2 + 1 \Leftrightarrow 5 = 5$ (wahr) $\Rightarrow$ P liegt auf der Normalparabel
 b) $5 = 1(-1-1)^2 - 2 \Leftrightarrow 5 = 2$ (falsch) $\Rightarrow$ P liegt nicht auf der Normalparabel
 c) $5 = 1(-1-0)^2 + 4 \Leftrightarrow 5 = 5$ (wahr) $\Rightarrow$ P liegt auf der Normalparabel

- K5** 9 Der Graph der Funktion f ist symmetrisch zur y-Achse, damit ist $x_S = 0$, $y_S = y - 0,25x^2$
 a) S(0|2) b) S(0|3,75) c) S(0|-4) d) S(0|0) e) S(0|-2,0625)

- K1** 10 Die Funktionsgleichung der an der x-Achse gespiegelten und verschobenen Normalparabel mit Scheitel S(6|-3) lautet:
 f: $y = -(x-6)^2 - 3$
 Für $y = -7$ gilt: $-(x-6)^2 - 3 = -7 \Leftrightarrow (x-6)^2 = 4 \Leftrightarrow x-6 = \pm 2 \Leftrightarrow x_1 = 4; x_2 = 8$
 Die x-Koordinaten von P_1 und P_2 sind $x_1 = 4$ und $x_2 = 8$.

- K5** 11 a) $7 = a(-2+1)^2 + 3 \Leftrightarrow a = 4$ b) $-20 = -2(-1-2)^2 - c \Leftrightarrow c = 2$
 c) $\frac{7}{4} = \frac{1}{3}(-2,5+5)^2 + c \Leftrightarrow c = \frac{21-25}{12} = -\frac{1}{3}$ d) $34,5 = 9a - 1,5 \Leftrightarrow a = 4$

- K5** 12 Punkt ... liegt auf dem Graphen der Funktionsgleichung ...
 A - 1 B - 2 und 5 C - 2 und 4 D - 3 E - 2 F - 5 G - 4

- K6** 13 a) Durch Einsetzen von x_P in die Funktionsgleichung von f erhält man einen y-Wert y_Q . Anschließend vergleicht man y_P mit y_Q . Hierbei stellt man folgende drei Fälle fest:
 $y_Q = y_P$, d. h.: P liegt auf dem Graphen von f;
 $y_Q < y_P$, d. h.: P liegt oberhalb des Graphen von f;
 $y_Q > y_P$, d. h.: P liegt unterhalb des Graphen von f.
 b) $p(-3) = 29 > 20 = y_P$, d. h.: P liegt unterhalb des Graphen von f.

- K1** 14 a) Nein, beide Nullstellen reichen nicht aus, um den Funktionsterm der nicht-gestauchten und nicht-gestreckten Parabel anzugeben: Auch wenn die Form der Parabel und die Nullstellen bekannt sind, weiß man noch nicht, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist. Der Funktionswert mit den Nullstellen x_1 und x_2 ist entweder $f_1: y = (x-x_1) \cdot (x-x_2)$ oder $f_2: y = -(x-x_1) \cdot (x-x_2)$.
 b) $f_1: y = (x+4) \cdot x \Leftrightarrow y = x^2 + 4x + 4 - 4 \Leftrightarrow y = (x+2)^2 - 4$ $S_1(-2|-4)$
 $f_2: y = -(x+4) \cdot x \Leftrightarrow y = -(x^2 + 4x + 4 - 4) \Leftrightarrow y = -(x+2)^2 + 4$ $S_2(-2|4)$

- K6** 15 a) Valentin hat Recht. Ein Produkt hat genau dann den Wert Null, wenn einer seiner Faktoren den Wert Null hat; damit kann er im vorliegenden Fall die Nullstellen direkt ablesen:
 Nullstellen der Funktion f: $(x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ oder $x = 3$
 b) 1 $x_1 = -2; x_2 = 2$ 2 $x = 1$ 3 $x = -5$
 c) Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.: $y = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}^+$ oder $y = -x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}^-$

VERSTÄNDNIS

K1

- Mit quadratischer Ergänzung ergibt sich:

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}p^2 + q = \left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 - \frac{1}{4}p^2 + q$$

$$f: y = x^2 + px + q \Leftrightarrow y = \left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 - \frac{1}{4}p^2 + q \text{ mit } S\left(-\frac{1}{2}p \mid q - \frac{1}{4}p^2\right)$$

K1

- $f: y = (x - m)(x + m) \Leftrightarrow f: y = x^2 - m^2 \text{ mit } S(0 \mid -m^2)$

K5

- 1 a) $y = 0,5x^2 - 3x + 5,5$ b) $y = x^2 + 4x + 2,5$ c) $y = -2x^2 - 4x + 2$
 d) $y = 1,5x^2 - 6x + 4$ e) $y = -0,75x^2 - 7,5x - 18,75$ f) $y = -3x^2 + 1$

K5

- 2 a) $y = x^2 - 4x + 7$ b) $y = x^2 + 4x + 8$ c) $y = x^2 + 6x + 3$ d) $y = x^2 + 3x + 6,25$

K5

- 3 Die Koeffizienten a, b und c in $S\left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right)$ einsetzen:

a) $S\left(-\frac{4}{2 \cdot 2} \mid 1 - \frac{4^2}{4 \cdot 2}\right) \Leftrightarrow S(-1 \mid -1); y = 2(x + 1)^2 - 1$

b) $S(0 \mid -2) \Rightarrow y = 1(x - 0)^2 - 2$

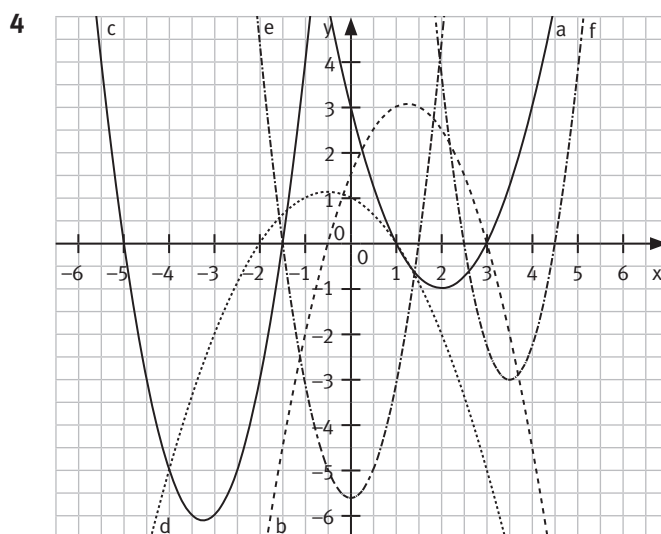
c) $S(3 \mid 4,5) \Rightarrow y = -0,5(x - 3)^2 + 4,5$

d) $S\left(-1,5 \mid -\frac{1}{12}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{3}(x + 1,5)^2 - \frac{1}{12}$

e) $S(1 \mid -3,5) \Rightarrow y = -1,5(x - 1)^2 - 3,5$

f) $S(-1 \mid 4) \Rightarrow y = -1(x + 1)^2 + 4$

K5

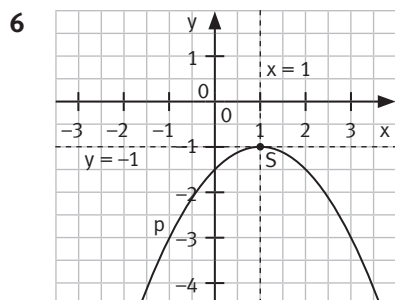


- a) $y = x^2 - 4x + 3$
 b) $y = -x^2 + 2,5x + 1,5$
 c) $y = 2x^2 + 13x + 15$
 d) $y = -0,5x^2 - 0,5x + 1$
 e) $y = 2,5x^2 - 5,625$
 f) $y = 3x^2 - 21x + 33,75$

K6

- 5 $f: y = 0,5 \cdot (x - 3) \cdot (x + 3) + 2 \Leftrightarrow y = 0,5 \cdot (x^2 - 9) + 2 \Leftrightarrow y = 0,5x^2 - 2,5$
 Sid hat nicht Recht: Der Scheitelpunkt der Parabel f liegt bei $S(0 \mid -2,5)$.

K3

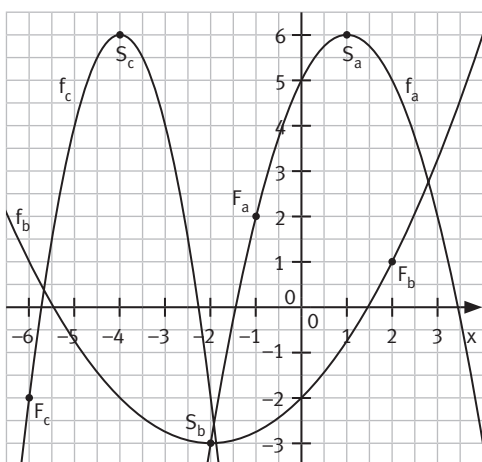


Es handelt sich um eine nach unten geöffnete und gestauchte Parabel mit $S(1 \mid -1)$.

K1 7 A - 2 $y = x^2 - x - 0,25$ B - 1 $y = x^2 - 2x + 2$ C - 3 $y = x^2 + 3x - 1,75$

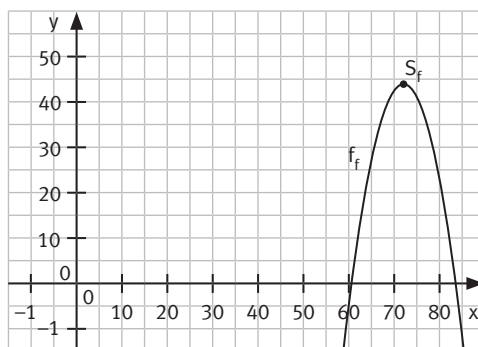
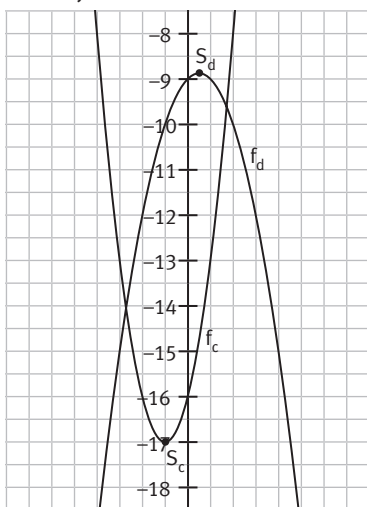
K5 8 $f_1: S(-2|0); y = 1(x+2)^2 + 0; f_1 = x^2 + 4x + 4$
 $f_2: S(1|3); y = 2(x-1)^2 + 3; f_2 = 2x^2 - 4x + 5$
 $f_3: \text{lineare Funktion}; f_3 = 2x + 1$
 $f_4: S(0|-1,5); y = -2(x-0)^2 - 1,5; f_4 = -2x^2 - 1,5$
 $f_5: S(-1|0); y = -0,5(x+1)^2 + 0; f_5 = -0,5x^2 - x - 0,5$
 $f_6: S(0|-4); y = 1(x-0)^2 - 4; f_6 = x^2 - 4$
 $f_7: S(2|0); y = 1(x-2)^2 + 0; f_7 = x^2 - 4x + 4$
 $f_8: S(-1,5|4); y = -1(x+1,5)^2 + 4; f_8 = -x^2 - 3x + 1,75$

- K5** 9 a) bis c) Einsetzen der Koordinaten von F in die Scheitelpunktsform mit Scheitelpunkt S liefert die Formvariable a und damit die Funktionsgleichungen.



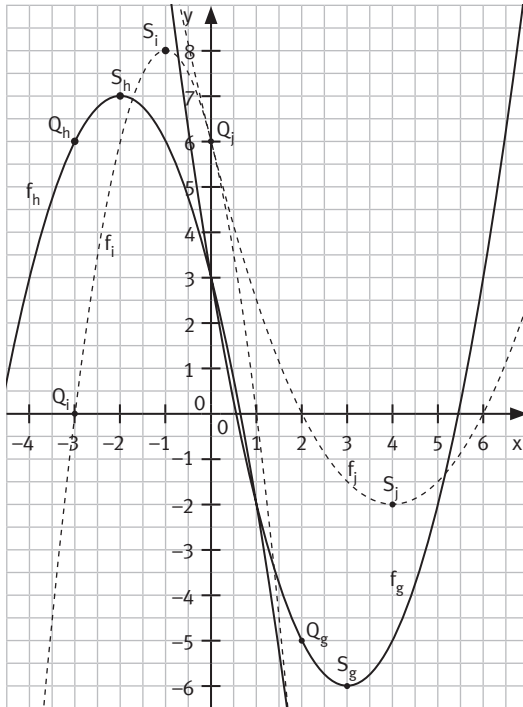
a) $2 = a(-1 - 1)^2 + 6 \Leftrightarrow a = -1 \Rightarrow f: y = -(x - 1)^2 + 6 \Leftrightarrow f: y = -x^2 + 2x + 5$
b) $1 = a(2 + 2)^2 - 3 \Leftrightarrow a = 0,25 \Rightarrow f: y = 0,25(x + 2)^2 - 3 \Leftrightarrow f: y = 0,25x^2 + x - 2$
c) $-2 = a(-6 + 4)^2 + 6 \Leftrightarrow a = -2 \Rightarrow f: y = -2(x + 4)^2 + 6 \Leftrightarrow f: y = -2x^2 - 16x - 26$

- d) bis f) Aus der allgemeinen Formel für die Koordinaten des Scheitelpunkts $S\left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right)$ folgen die jeweils noch fehlenden Formvariablen.



d) $0,25 = -\frac{1}{2a} \Leftrightarrow a = -2 \quad -8\frac{7}{8} = c - \frac{1}{4 \cdot (-2)} \Leftrightarrow c = -9 \quad \Rightarrow f: y = -2x^2 + x - 9$
e) $-0,5 = \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow a = b \quad -17 = -16 - \frac{a^2}{4a} \Leftrightarrow a = b = 4 \quad \Rightarrow f: y = 4x^2 + 4x - 16$
f) $72 = \frac{-b}{2 \cdot (-\frac{1}{3})} \Leftrightarrow b = 48 \quad 44 = c - \frac{48^2}{4 \cdot (-\frac{1}{3})} \Leftrightarrow c = -1684 \quad \Rightarrow f: y = -\frac{1}{3}x^2 + 48x - 1684$

g) bis j) Einsetzen der Koordinaten von Q in die Funktionsgleichung p liefert die fehlenden Formvariablen.



g) $-5 = 4a - 12 + 3 \Leftrightarrow a = 1$

$\Rightarrow f: y = x^2 - 6x + 3$

$\Leftrightarrow f: (y - 3)^2 - 6$

$S(3|-6)$

h) $6 = -9 + 12 + c \Leftrightarrow c = 3$

$\Rightarrow f: y = -x^2 - 4x + 3$

$\Leftrightarrow f: y = -(x + 2)^2 + 7$

$S(-2|7)$

i) $0 = -18 - 3b + 6 \Leftrightarrow b = -4$

$\Rightarrow f: y = -2x^2 - 4x + 6$

$\Leftrightarrow f: y = -2(x + 1)^2 + 8$

$S(-1|8)$

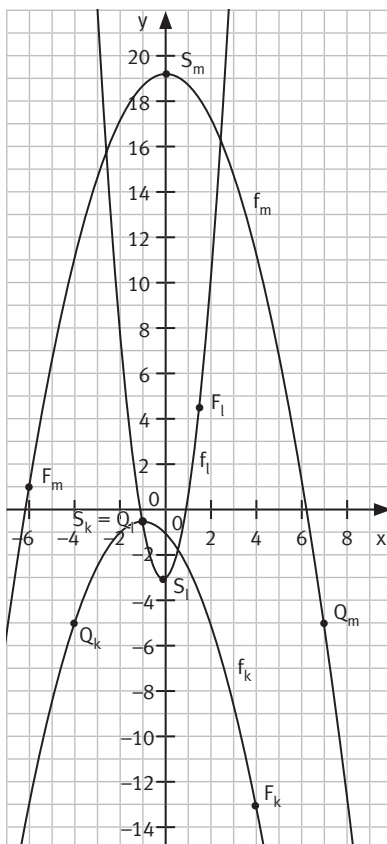
j) $6 = c$

$\Rightarrow f: y = 0,5x^2 - 4x + 6$

$\Leftrightarrow f: y = 0,5(x - 4)^2 - 2$

$S(4|-2)$

k) bis m) Einsetzen der Koordinaten von F und Q und der gegebenen Formvariable liefert die noch fehlenden Formvariablen.



k) I $-13 = 16a + 4b - 1$

II $-5 = 16a - 4b - 1$

$\Rightarrow a = -0,5; b = -1$

$\Rightarrow f: y = -0,5x^2 - x - 1$

$\Leftrightarrow f: y = -0,5(x + 1)^2 - 0,5$

$S(-1|-0,5)$

l) I $4,5 = 2,25a + 0,75 + c$

II $-0,5 = a - 0,5 + c$

$\Rightarrow a = 3; c = -3$

$\Rightarrow f: y = 3x^2 + 0,5x - 3$

$\Leftrightarrow f: y = 3\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - 3\frac{1}{48}$

$S\left(-\frac{1}{12}|-3\frac{1}{48}\right)$

m) I $1 = -18 - 6b + c$

II $-5 = -24,5 + 7b + c$

$\Rightarrow b = \frac{1}{26}; c = 19\frac{3}{13}$

$\Rightarrow f: y = -0,5x^2 + \frac{1}{26}x + 19\frac{3}{13}$

$\Leftrightarrow f: y \approx -0,5\left(x - \frac{1}{26}\right)^2 + 19,23$

$S\left(\frac{1}{26}|19,23\right)$

- K6** 10 Es gibt folgende Möglichkeiten und Beispiele bei gegebenem Punkt $P(-3|21)$.

a) Parabelgleichungen zu Punkt P	b) Beispiele
Man weiß, dass P der Scheitel einer nach oben (oder einer nach unten) geöffneten Normalparabel ist; z. B.: Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Normalparabel.	$f: y = (x + 3)^2 + 21$
Zusätzlich zu P wird der Scheitelpunkt angegeben; z. B.: $S(3 15)$	$21 = a(-3 - 3)^2 + 15 \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow f: y = \frac{1}{6}(x - 3)^2 + 15$ $\Leftrightarrow f: y = \frac{1}{6}x^2 - x + 16,5$
Zusätzlich zu P werden die Symmetrieachse s und der maximale (oder der minimale) Funktionswert angegeben; z. B.: $s: x = 3; f_{\min} = 15$	Die Lösung entspricht der Lösung bei gegebenem Scheitelpunkt, da aus $s: x = 3$ und $f_{\min} = 15$ der Scheitelpunkt $S(3 15)$ folgt.
Zusätzlich zu P werden die Symmetrieachse s und der Öffnungsfaktor a angegeben; z. B.: $s: x = 3; a = 1$	$21 = (-3 - 3)^2 + y_S \Leftrightarrow y_S = -15; S(3 -15)$ $\Rightarrow f: y = (x - 3)^2 - 15$ $\Leftrightarrow f: y = x^2 - 6x - 6$
Zusätzlich zu P ist ein Punkt Q angegeben plus eine der drei Formvariablen; z. B.: $Q(3 15); a = 2$	I $15 = 18 + 3b + c$ II $21 = 18 - 3b + c$ $\Rightarrow c = 0; b = -1 \Rightarrow p: y = 2x^2 - x$ $\Leftrightarrow f: y = 2(x - 0,25)^2 - 0,125; S(0,25 -0,125)$
Zusätzlich zu P werden zwei der drei Formvariablen angegeben; z. B.: $a = 2; b = 1$	$21 = 18 - 3 + c \Rightarrow c = 6$ $\Rightarrow f: y = 2x^2 + x + 6$ $\Leftrightarrow f: y = 2(x + 0,25)^2 + 5,875; S(0,25 5,875)$

- K5** 11 a) Einsetzen der Koordinaten von P und Q in die Funktionsgleichung f liefert:

I $-4 = c$

II $-4 = 64a - 32 - 4 \Leftrightarrow a = 0,5 \Rightarrow f: y = 0,5x^2 + 4x - 4$

- b) Einsetzen der Koordinaten von R in f ergibt: $-1 = c = a \Rightarrow f: y = -x^2 + 4x - 1$

- K1** 12 Einsetzen der Koordinaten von S_1 in die Funktionsgleichung f mit $a = b$ liefert:

$4 = 0,5^2a - 0,5a + 5 \Leftrightarrow -1 = -0,25a \Leftrightarrow a = b = 4$

$\Rightarrow f: y = 4x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow f: y = 4(x + 0,5)^2 + 4$ mit Scheitelpunkt $S_1(-0,5|4)$

Einsetzen der Koordinaten von $S_2(0,5|-4)$ in die Funktionsgleichung f mit $a = b$ liefert:

$-4 = 0,5^2a + 0,5a + 5 \Leftrightarrow -9 = 0,75a \Leftrightarrow a = b = -12$

$\Rightarrow f': y = -12x^2 - 12x + 5 \Leftrightarrow f': y = -12(x + 0,5)^2 + 8$ mit Scheitelpunkt $S'(-0,5|8) \neq S_2(0,5|-4)$

Das Vorgehen liefert eine Funktionsgleichung mit Scheitelpunkt $S'(-0,5|8) \neq S_2(0,5|-4)$; hierbei liegt S_2 zwar auf der Parabel, ist jedoch nicht Scheitelpunkt der Parabel. Hieraus folgt: S_2 kann nicht Scheitelpunkt der Parabel f sein, wenn $a = b$ gelten soll.

- K5** 13 Einsetzen der Koordinaten von P in $y = ax^2 + ax + a \Leftrightarrow y = a(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow a = \frac{y}{x^2 + x + 1}$ liefert:

a) $a = \frac{-6}{4-2+1} = \frac{-6}{3} = -2 \Rightarrow f: y = -2x^2 - 2x - 2$

b) $a = \frac{2,5}{12,25-3,5+1} = \frac{2,5}{9,75} = \frac{10}{39} \Rightarrow f: y = \frac{10}{39}x^2 + \frac{10}{39}x + \frac{10}{39}$

c) $a = \frac{7}{4+2+1} = \frac{7}{7} = 1 \Rightarrow f: y = x^2 + x + 2$

- K2** 14 a) $y = (x + 2)(x - 5) = x^2 - 5x + 2x - 10 = x^2 - 3x - 10$

b) $y = (x - 6)(x - 18) = x^2 - 18x - 6x + 108 = x^2 - 24x + 108$

c) $y = (x + 7)(x - 4) = x^2 - 4x + 7x - 28 = x^2 - 3x - 28$

d) $y = (x - 3,5)(x + 2,5) = x^2 + 2,5x - 3,5x - 8,75 = x^2 - x - 8,75$

e) $y = (x + 1,2)(x + 3,6) = x^2 + 3,6x + 1,2x + 4,32 = x^2 + 4,8x + 4,32$

f) $y = (x - 8)(x - 0) = x^2 - 8x$

VERSTÄNDNIS

K6

- Eine quadratische Funktion ohne Nullstellen ist entweder eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt oberhalb oder eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt unterhalb der x-Achse. Hat die quadratische Funktion eine Nullstelle, liegt ihr Scheitelpunkt genau auf der x-Achse. Bei zwei Nullstellen ist entweder eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt unterhalb oder eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt oberhalb der x-Achse möglich.

K6

- Eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt $S(x_s | y_s)$ hat den Wertebereich $W = \mathbb{R}$ mit $y \geq y_s$. Bei einer nach oben geöffneten Parabel ist der Scheitelpunkt $S(x_s | y_s)$ der tiefste Punkt. Somit gibt es für keinen x-Wert einen y-Wert mit $y < y_s$.

Eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt $S(x_s | y_s)$ hat den Wertebereich $W = \mathbb{R}$ mit $y \leq y_s$. Bei einer nach unten geöffneten Parabel ist der Scheitelpunkt der höchste Punkt. Es gibt also keinen y-Wert mit $y > y_s$.

Zum Zusammenhang zwischen Scheitelpunkt und Nullstellen siehe vorherige Frage.

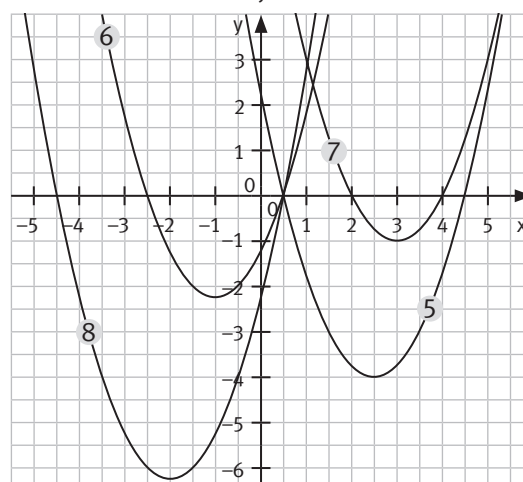
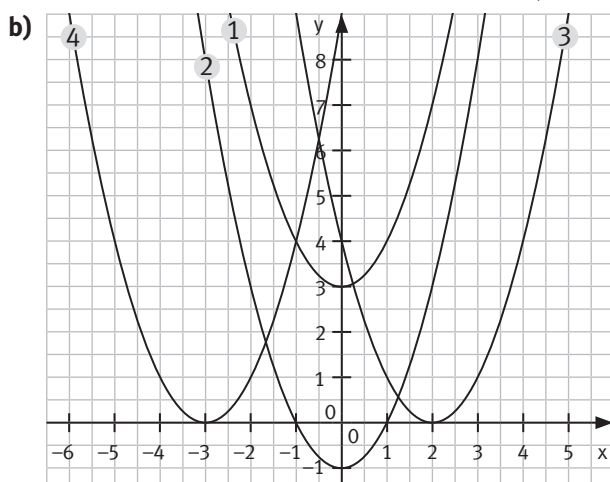
K6

1

Eigenschaft	Beschreibung		
	a)	b)	c)
Scheitelpunkt	Tiefpunkt $S(0 -4)$	Tiefpunkt $S(-1 -2)$	Hochpunkt $S(-1,5 4)$
Definitionsbereich	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertebereich	$W = \mathbb{R}$ mit $y \geq -4$	$W = \mathbb{R}$ mit $y \geq -2$	$W = \mathbb{R}$ mit $y \leq 4$
Monotonie	fallend für: $x \leq 0$ steigend für: $x \geq 0$	fallend für: $x \leq -1$ steigend für: $x \geq -1$	steigend für $x \leq -1,5$ fallend für $x \geq -1,5$
Nullstellen	$N_1(-2 0); N_2(2 0)$	$N_1(-2,4 0); N_2(0,4 0)$	$N_1(-3,5 0); N_2(0,5 0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse	$P(0 -4)$	$P(0 -1)$	$P(0 1,75)$
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-Achse	achsensymmetrisch zu $x = -1$	achsensymmetrisch zu $x = -1,5$

K6

- 2 a) Es lassen sich sofort der Definitions- und Wertebereich bestimmen. Außerdem kann man Aussagen über die Monotonie treffen und bestimmen, zu welcher Achse die Parabel symmetrisch ist.



KAPITEL 2

c)

	Beschreibung		
Eigenschaft	1	2	3
Scheitelpunkt	Tiefpunkt S (0 3)	Tiefpunkt S (0 -1)	Tiefpunkt S (2 0)
Definitionsbereich	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertebereich	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$ mit $y \geq 3$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$ mit $y \geq -1$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$
Monotonie	fallend für $x \leq 0$ steigend für $x \geq 0$	fallend für $x \leq 0$ steigend für $x \geq 0$	fallend für $x \leq 2$ steigend für $x \geq 2$
Nullstellen	keine	$N_1 (-1 0); N_2 (1 0)$	$N (2 0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse	P (0 3)	P (0 -1)	P (0 4)
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-Achse	achsensymmetrisch zur y-Achse	achsensymmetrisch zu $x = 2$

	Beschreibung		
Eigenschaft	4	5	6
Scheitelpunkt	Tiefpunkt S (-3 0)	Tiefpunkt S (2,5 -4)	Tiefpunkt S (-1 -2,25)
Definitionsbereich	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertebereich	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$ mit $y \geq -4$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$ mit $y \geq -2,25$
Monotonie	fallend für $x \leq -3$ steigend für $x \geq -3$	fallend für $x \leq 2,5$ steigend für $x \geq 2,5$	fallend für $x \leq -1$ steigend für $x \geq -1$
Nullstellen	$N (-3 0)$	$N_1 (0,5 0); N_2 (4,5 0)$	$N_1 (-2,5 0); N_2 (0,5 0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse	P (0 9)	P (0 2,25)	P (0 -1,25)
Symmetrie	achsensymmetrisch zu $x = -3$	achsensymmetrisch zu $x = 2,5$	achsensymmetrisch zu $x = -1$

	Beschreibung	
Eigenschaft	7	8
Scheitelpunkt	Tiefpunkt S (3 -1)	Tiefpunkt S (-2 -6,25)
Definitionsbereich	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertebereich	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$ mit $y \geq -1$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$ mit $y \geq -6,25$
Monotonie	fallend für $x \leq 3$ steigend für $x \geq 3$	fallend für $x \leq -2$ steigend für $x \geq -2$
Nullstellen	$N_1 (2 0); N_2 (4 0)$	$N_1 (-4,5 0); N_2 (0,5 0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse	P (0 8)	P (0 -2,25)
Symmetrie	achsensymmetrisch zu $x = 3$	achsensymmetrisch zu $x = -2$

Anhand der Zeichnung kann man die Nullstellen und den Schnittpunkt mit der y-Achse bestimmen.

K6 3

Scheitelpunkt	$\mathbb{W}$: mit $y \in \mathbb{R}$	Symmetrieachse	monoton fallend	monoton steigend	Nullstellen
S (0 -9)	$y \geq -9$	$x = 0$	$x \leq 0$	$x \geq 0$	$x_1 = -3; x_2 = 3$
S (5 -1)	$y \geq -1$	$x = 5$	$x \leq 5$	$x \geq 5$	$x_1 = 4; x_2 = 6$
S (1 1)	$y \geq 1$	$x = 1$	$x \leq 1$	$x \geq 1$	keine
S (2 -16)	$y \geq -16$	$x = 2$	$x \leq 2$	$x \geq 2$	$x_1 = -2; x_2 = 6$
S (-4 -4)	$y \geq -4$	$x = -4$	$x \leq -4$	$x \geq -4$	$x_1 = -6; x_2 = -2$
S (3 0)	$y \geq 0$	$x = 3$	$x \leq 3$	$x \geq 3$	$x = 3$
S (1,5 -2,25)	$y \geq -2,25$	$x = 1,5$	$x \leq 1,5$	$x \geq 1,5$	$x_1 = 0; x_2 = 3$

Bei verschobenen Normalparabeln besteht die Wertemenge immer aus allen $y \in \mathbb{R}$, die größer als der y-Wert des Scheitelpunktes sind.

Die Symmetrieachse ist genau der x-Wert des Scheitelpunktes. Links von diesem x-Wert ist die Funktion monoton fallend, rechts davon monoton steigend.

Die Nullstellen ergeben sich, wenn man vom x-Wert des Scheitelpunktes die Wurzel des Betrags des y-Wertes subtrahiert bzw. addiert.

VERSTÄNDNIS

K1

- Die Diskriminante gibt Auskunft über die Anzahl der Nullstellen. So können mögliche Fehler beim Berechnen der Nullstellen vermieden werden.

K6

- Wenn ich weiß, ob der Scheitelpunkt ober- oder unterhalb der x-Achse liegt und ich die Öffnungsrichtung kenne, dann kann ich aus diesen beiden Informationen die Anzahl der Nullstellen bestimmen.

K5

- 1 a) $3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 6) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{L} = \{0; -2\}$
 b) $-x^2 + 1,5x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 1,5) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{L} = \{0; 1,5\}$
 c) $\frac{1}{4}x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(\frac{1}{4}x - 2) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{L} = \{0; 8\}$
 d) $-0,5x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(-0,5x - 1) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{L} = \{0; -2\}$
 e) $2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 4) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{L} = \{0; 2\}$
 f) $-5x^2 + 7,5x = 0 \Leftrightarrow x(-5x + 7,5) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{L} = \{0; 1,5\}$

Feststellung: Die erste Nullstelle lautet immer $x_1 = 0$ und die zweite Nullstelle $x_2 = \frac{-b}{a}$.

K5

- 2
- | | | | |
|---------------|-----------------------------------|--|---------------------------------|
| 1 D = 64 | $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen | $x_{1/2} = \frac{20 \pm 8}{4}$ | $\mathbb{L} = \{3; 7\}$ |
| 2 D = -576 | $D < 0 \Rightarrow$ keine Lösung | | $\mathbb{L} = \emptyset$ |
| 3 D = 1296 | $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen | $x_{1/2} = \frac{-6 \pm 36}{6}$ | $\mathbb{L} = \{-7; 5\}$ |
| 4 D = 4 | $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen | $x_{1/2} = \frac{5 \pm 2}{-2}$ | $\mathbb{L} = \{-3,5; -1,5\}$ |
| 5 D = 121 | $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen | $x_{1/2} = \frac{5 \pm 11}{-2}$ | $\mathbb{L} = \{-8; 3\}$ |
| 6 D = 306,25 | $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen | $x_{1/2} = \frac{3,5 \pm 17,5}{14}$ | $\mathbb{L} = \{-1; 1,5\}$ |
| 7 D = 0,04 | $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen | $x_{1/2} = \frac{3 \pm 0,2}{2}$ | $\mathbb{L} = \{1,4; 1,6\}$ |
| 8 D = 313 600 | $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen | $x_{1/2} = \frac{-300 \pm 560}{200}$ | $\mathbb{L} = \{-4,3; 1,3\}$ |
| 9 D = 1250 | $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen | $x_{1/2} \approx \frac{25 \pm 35,36}{5}$ | $\mathbb{L} = \{-2,07; 12,07\}$ |

K5

- 3
- | | | |
|--------------------------------|---|----------------------------------|
| a) $x^2 - 2,4x + 1,43 = 0$ | $x_{1/2} = \frac{2,4 \pm \sqrt{5,76 - 5,72}}{2} = 1,2 \pm 0,1$ | $\mathbb{L} = \{1,1; 1,3\}$ |
| b) $1,5x^2 + 0,75x - 1,26 = 0$ | $x_{1/2} = \frac{-0,75 \pm \sqrt{0,5625 + 7,56}}{3} = -0,25 \pm 0,95$ | $\mathbb{L} = \{-1,2; 0,7\}$ |
| c) $x^2 - 7x - 2,75 = 0$ | $x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 11}}{2} \approx \frac{7 \pm 7,75}{2}$ | $\mathbb{L} = \{-0,375; 7,375\}$ |
| d) $2x^2 - 0,4x - 0,48 = 0$ | $x_{1/2} = \frac{0,4 \pm \sqrt{0,16 + 3,84}}{4} = 0,1 \pm 0,5$ | $\mathbb{L} = \{-0,4; 0,6\}$ |
| e) $x^2 - 4x + 4 = 0$ | $x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$ | $\mathbb{L} = \{2\}$ |
| f) $-3x^2 + 9x + 15 = 0$ | $x_{1/2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 180}}{-6} \approx \frac{-9 \pm 16,16}{-6}$ | $\mathbb{L} = \{-1,19; 4,19\}$ |

K5

- 4 Die quadratische Gleichung wird in die Normalform gebracht und anschließend in die pq-Formel eingesetzt.
- | | |
|--|---------------------------------|
| a) $x^2 + 2x - 4 = 0$ | $\mathbb{L} = \{-3,24; 1,24\}$ |
| b) $x^2 - 2x - 2 = 0$ | $\mathbb{L} = \{-0,73; 2,73\}$ |
| c) $x^2 + 0,25x - 2 = 0$ | $\mathbb{L} = \{-1,54; 1,29\}$ |
| d) $x^2 - 0,75x - 9 = 0$ | $\mathbb{L} = \{-2,65; 3,4\}$ |
| e) $x^2 + 10x + 7,5 = 0$ | $\mathbb{L} = \{-9,18; -0,82\}$ |
| f) $x^2 + \frac{5}{27}x - \frac{10}{27} = 0$ | $\mathbb{L} = \{-0,71; 0,52\}$ |

KAPITEL 2

- K5** 5 Die quadratische Gleichung wird in die Normalform gebracht, anschließend werden durch quadratisches Ergänzen die Lösungen ermittelt.

a) $x^2 + 6x + 3 = 0$
 $(x + 3)^2 = 6$
 $x + 3 = \pm\sqrt{6}$
 $x_1 \approx -5,45; x_2 \approx -0,55 \quad \mathbb{L} = \{-5,45; -0,55\}$

b) $2x^2 - 8x + 8 + x^2 = x^2 + 3x$
 $x^2 - 5,5x + 4 = 0$
 $(x - 2,75)^2 = 3,5625$
 $x - 2,75 = \pm\sqrt{3,5625}$
 $x_1 \approx 0,86; x_2 \approx 4,64 \quad \mathbb{L} = \{0,86; 4,64\}$

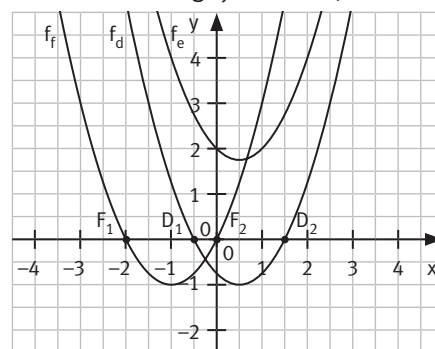
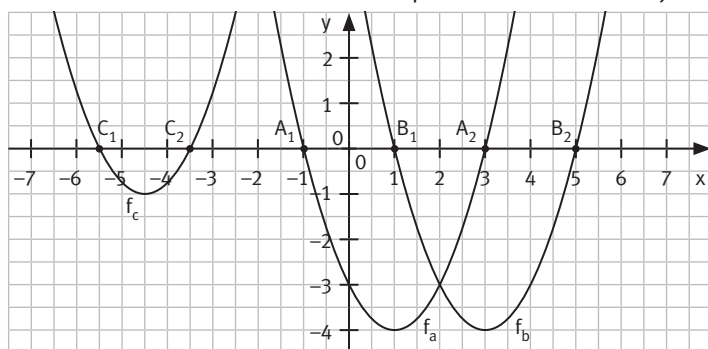
c) $x^2 - 3x - 13 = 0$
 $(x - 1,5)^2 = 15,25$
 $x - 1,5 = \pm\sqrt{15,25}$
 $x_1 \approx -2,41; x_2 \approx 5,41 \quad \mathbb{L} = \{-2,41; 5,41\}$

d) $4x^2 - 9 - x^2 + 4x = 4x^2 - 16x + 16$
 $x^2 - 20x + 25 = 0$
 $(x - 10)^2 = 75$
 $x - 10 = \pm\sqrt{75}$
 $x_1 \approx 1,34; x_2 \approx 18,66 \quad \mathbb{L} = \{1,34; 18,66\}$

e) $x^2 + 10x + 21 = x^2 - 2x - 3$
 $x = -2 \quad \mathbb{L} = \{-2\}$

f) $x^2 + x - 6 = x^2 - x - 6$
 $x = 0 \quad \mathbb{L} = \{0\}$

- K4** 6 Die quadratischen Gleichungen werden in die Normalform $x^2 + px + q = 0$ gebracht und die Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion ermittelt. (Alternative: Man bringt die Gleichung in die Form $x^2 = mx + t$ und ermittelt die Schnittpunkte der Parabel $f: y = x^2$ mit der Geraden $g: y = mx + t$.)



a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ $f: y = x^2 - 2x - 3$ Nullstellen $x_1 = -1; x_2 = 3$ $\mathbb{L} = \{-1; 3\}$
b) $x^2 - 6x + 5 = 0$ $f: y = x^2 - 6x + 5$ Nullstellen $x_1 = 1; x_2 = 5$ $\mathbb{L} = \{1; 5\}$
c) $x^2 + 9x + 19,25 = 0$ $f: y = x^2 + 9x + 19,25$ Nullstellen $x_1 = -5,5; x_2 = -3,5$ $\mathbb{L} = \{-5,5; -3,5\}$
d) $x^2 - x - 0,75 = 0$ $f: y = x^2 - x - 0,75$ Nullstellen $x_1 = -0,5; x_2 = 1,5$ $\mathbb{L} = \{-0,5; 1,5\}$
e) $x^2 - x + 2 = 0$ $f: y = x^2 - x + 2$ keine Nullstellen $\mathbb{L} = \emptyset$
f) $x^2 + 2x = 0$ $f: y = x^2 + 2x$ Nullstellen $x_1 = -2; x_2 = 0$ $\mathbb{L} = \{-2; 0\}$

- K4** 7 a) $x^2 = 3x - 2; \mathbb{L} = \{1; 2\}$ b) $x^2 = -0,5x + 1,5; \mathbb{L} = \{-1,5; 1\}$ c) $-x^2 = -x - 2; \mathbb{L} = \{-1; 2\}$

- K5** 8

	Gleichung (umgeformt)	keine Lösung	eine Lösung	zwei Lösungen
a)	$(x - 2)^2 = 4 - a$ $x - 2 = \pm\sqrt{4 - a}$	$a > 4$	$a = 4$	$a < 4$
b)	$(x + 0,5a)^2 = 0,25a^2 - 12$ $x + 0,5a = \pm 0,5\sqrt{a^2 - 48}$	$-\sqrt{48} < a < \sqrt{48}$	$a = \sqrt{48}$	$a < -\sqrt{48} \vee a > \sqrt{48}$
c)	$(x - a)^2 = 0$ $x - a = 0$	–	jedes $a \in \mathbb{R}$	–
d)	$(x + a)^2 = 0$ $x + a = 0$	–	jedes $a \in \mathbb{R}$	–
e)	$(x + 3,5)^2 = 12,25 - a$ $x + 3,5 = \pm\sqrt{12,25 - a}$	$a > 12,25$	$a = 12,25$	$a < 12,25$
f)	$(x - 0,5a)^2 = 0,25a^2 - 3$ $x - 0,5a = \pm 0,5\sqrt{a^2 - 12}$	$-\sqrt{12} < a < \sqrt{12}$	$a = \sqrt{12}$	$a < -\sqrt{12} \vee a > \sqrt{12}$

- K2** 9 a) $x^2 + 8x - a = 0$ $D = 16 + a > 0 \Leftrightarrow a > -16$
Setzt man also beispielsweise $a = 0$, so hat die Gleichung zwei Lösungen.
- b) $x^2 + 8x - a = 0$
Mit dem Satz von Vieta gilt: $x_1 + x_2 = -8 \Leftrightarrow -2 + x_2 = -8 \Leftrightarrow x_2 = -6$
 $-a = x_1 \cdot x_2 = 12 \Leftrightarrow a = -12$
- c) nicht möglich, denn $y = x^2 + 8x = x(x + 8)$ ist eine Normalparabel mit den Nullstellen $x_1 = -8$ und $x_2 = 0$, also liegt der Scheitelpunkt bei $S(-4 | -16)$. Beim Schneiden mit $y = a$ ist deshalb mindestens eine Lösung negativ.
- d) Da der Scheitelpunkt der Parabel $y = x^2 + 8x$ bei $S(-4 | -16)$ liegt (vgl. c), muss für a gelten: $-16 < a < 0$. Setzt man also beispielsweise $a = -1$, so hat die Gleichung zwei negative Lösungen.
- e) $D = 16 + a = 0 \Leftrightarrow a = -16$
- f) Für $a > 0$ liegt eine positive und eine negative Lösung vor.

- K3** 10 a) $x \in \mathbb{N}$
 $x^2 - 3x = 130$
 $(x - 1,5)^2 = 132,25$
 $x - 1,5 = \pm 11,5$
 $x_1 = -10 \notin \mathbb{N}; x_2 = 13$
 $\mathbb{L} = \{13\}$
Die Zahl ist 13.
- b) $x \in \mathbb{R}$
 $x - \frac{1}{x} = 2,1$
 $x^2 - 2,1x = 1$
 $(x - 1,05)^2 = 2,1025$
 $x - 1,05 = \pm 1,45$
 $x_1 = -0,4; x_2 = 2,5$
 $\mathbb{L} = \{-0,4; 2,5\}$
Die Zahl ist $-0,4$ oder $2,5$.
- c) $x \in \mathbb{R}$
 $5 \cdot (x - 3) = x \cdot (x + 13)$
 $x^2 + 8x = -15$
 $(x + 4)^2 = 1$
 $x + 4 = \pm 1$
 $x_1 = -5; x_2 = -3$
 $\mathbb{L} = \{-5; -3\}$
Die Zahl ist -5 oder -3 .

- K3** 11 Breite = x ; Länge = $x + 11$
Flächeninhalt: $A = \text{Breite} \cdot \text{Länge} \Leftrightarrow 476 \text{ m}^2 = x(x + 11 \text{ m}) \Leftrightarrow x^2 + 11x - 476 = 0$
 $x_1 = -28$ (nicht sinnvoll) und $x_2 = 17 \text{ m}$
Umfang: $u = 2 \cdot \text{Breite} + 2 \cdot \text{Länge} \Leftrightarrow u = 2(x + x + 11) \Leftrightarrow u = 4x + 22 \Rightarrow$ für $x = 17 \text{ m}$ gilt: $u = 90 \text{ m}$

- K3** 12 a) Es gibt zwei Möglichkeiten für das neue Rechteck (mit dem gleichen Endergebnis). Entweder wird die kurze Seite um $x \text{ cm}$ verkürzt und die lange Seite um $x \text{ cm}$ verlängert oder es wird die lange Seite um $x \text{ cm}$ verkürzt und die kurze Seite um $x \text{ cm}$ verlängert.

1. Fall: $\mathbb{D}_1 = \{x | 0 < x < 4\}$

$(4 - x) \cdot (7 + x) = 21,25$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 6,75 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 27}}{2} = \frac{-3 \pm 6}{2}$

$x_1 = -4,5 \notin \mathbb{D}_1; x_2 = 1,5 \in \mathbb{D}_1$

$\mathbb{L}_1 = \{1,5\}$

Die Seiten werden um $1,5 \text{ cm}$ verkürzt bzw. verlängert; die Seitenlängen des neuen Rechtecks betragen $2,5 \text{ cm}$ und $8,5 \text{ cm}$.

- b) Aus dem Quadrat mit 12 cm soll ein Rechteck mit 165 cm^2 Flächeninhalt entstehen.

$\mathbb{D} = \{x | 0 < x < 12\}$

$(12 - x) \cdot (12 + 2x) = 165$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 21 = 0$

$x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{-24}}{4}$

$\mathbb{L} = \emptyset$

Ein Rechteck mit 165 cm^2 Flächeninhalt kann nicht entstehen. Ein Rechteck mit 160 cm^2 Flächeninhalt kann entstehen, und zwar auf zwei unterschiedliche Arten: Bei Verkürzung um 2 cm und Verlängerung um 4 cm hat das neue Rechteck Seitenlängen von 10 cm und 16 cm ; bei Verkürzung um 4 cm und Verlängerung um 8 cm hat das neue Rechteck Seitenlängen von 8 cm und 20 cm .

2. Fall: $\mathbb{D}_2 = \{x | 0 < x < 7\}$

$(7 - x) \cdot (4 + x) = 21,25$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 6,75 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 27}}{2} = \frac{3 \pm 6}{2}$

$x_1 = -1,5 \notin \mathbb{D}_2; x_2 = 4,5 \in \mathbb{D}_2$

$\mathbb{L}_2 = \{4,5\}$

Die Seiten werden um $4,5 \text{ cm}$ verkürzt bzw. verlängert; die Seitenlängen des neuen Rechtecks betragen $2,5 \text{ cm}$ und $8,5 \text{ cm}$.

Aus dem Quadrat mit 12 cm soll ein Rechteck mit 160 cm^2 Flächeninhalt entstehen.

$\mathbb{D} = \{x | 0 < x < 12\}$

$(12 - x) \cdot (12 + 2x) = 160$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 16 = 0$

$x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{4} \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 4$

$\mathbb{L} = \{2; 4\}$

GESCHICHTE

K5/6

- Lösungsmöglichkeit zum Leben von Francois Viète:
 - geboren 1540 in Fontenay-le-Comte
 - Besuch einer Klosterschule
 - Studium der Rechtswissenschaften mit 18 Jahren
 - Arbeit als Advokat und Rechtsanwalt
 - Beschäftigung mit Mathematik und Lösen einer weltweit gestellten Aufgabe
 - gestorben am 13. Dezember 1603 in Paris
- Lösungsmöglichkeit für die weiteren mathematische Erkenntnisse:
 - Lösung des apollonischen Problems (gesucht: alle Kreise, die drei gegebene Kreise berühren) mit Zirkel und Lineal
 - Einführung des Rechnens mit Buchstaben, Symbolen und mathematischen Operationen wie $+$, $-$, $=$ und Bruchstrich
 - Produktdarstellung der Kreiszahl π
- | | | | |
|------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| 1 $x_1 = 2; x_2 = 5$ | 2 $x_1 = -3; x_2 = 6$ | 3 $x_1 = -3; x_2 = 9$ | 4 $x_1 = -15; x_2 = 8$ |
| 5 $x_1 = -3; x_2 = 15$ | 6 $x_1 = -9; x_2 = 5$ | 7 $x_1 = -5; x_2 = 7$ | 8 $x_1 = -7; x_2 = -1$ |
- | | | | |
|---------------------------|---------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| 1 $x_1 + x_2 = -p = 3$ | $\Leftrightarrow p = -3$ | $x_1 \cdot x_2 = q = -10$ | $y = x^2 - 3x - 10$ |
| 2 $x_1 + x_2 = -p = 24$ | $\Leftrightarrow p = -24$ | $x_1 \cdot x_2 = q = 108$ | $y = x^2 - 24x + 108$ |
| 3 $x_1 + x_2 = -p = -3$ | $\Leftrightarrow p = 3$ | $x_1 \cdot x_2 = q = -28$ | $y = x^2 + 3x - 28$ |
| 4 $x_1 + x_2 = -p = 1$ | $\Leftrightarrow p = -1$ | $x_1 \cdot x_2 = q = -8,75$ | $y = x^2 - x - 8,75$ |
| 5 $x_1 + x_2 = -p = -4,8$ | $\Leftrightarrow p = 4,8$ | $x_1 \cdot x_2 = q = 4,32$ | $y = x^2 + 4,8x + 4,32$ |
| 6 $x_1 + x_2 = -p = 8$ | $\Leftrightarrow p = -8$ | $x_1 \cdot x_2 = q = 0$ | $y = x^2 - 8x$ |

VERSTÄNDNIS

K6

- Es ist sinnvoll, den Ursprung des Koordinatensystems in den Scheitelpunkt der Parabel zu legen, damit sie mit der einfachen Funktionsgleichung $y = ax^2$ beschrieben werden kann.

K3

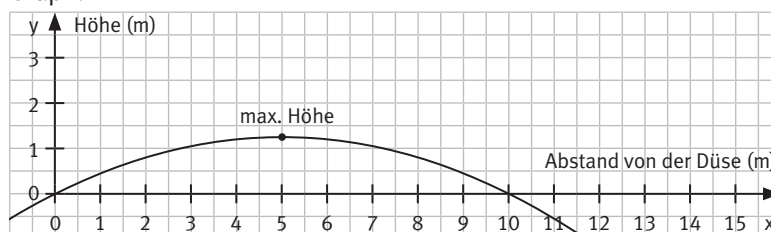
- 1 a) Je stärker die Parabel gestaucht ist, desto kleiner ist der Faktor a (bei $a > 0$). Somit ist der Faktor a für das Schalkenmehrener Maar am kleinsten, da dieses Maar im Vergleich zur Tiefe am breitesten ist.
- b) Der Scheitelpunkt bzw. der Tiefpunkt der Parabel sei $S(0|0)$. Die maximale Tiefe des Sees beträgt 38 m, das heißt die Oberfläche des Sees befindet sich in der Höhe von $y = 38$. Somit ergibt sich:
- $$38 = 0,0016x^2$$
- $$x \approx 154,1$$
- Der Durchmesser des Sees beträgt also $2 \cdot 154,1 \text{ m} = 308,2 \text{ m}$.
- c) $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (154,1 \text{ m})^2 \approx 74\,603 \text{ m}^2 \approx 7,46 \text{ ha}$

K3

- 2 a) x : wie weit der Wasserstrahl spritzt y : welche Höhe der Wasserstrahl erreicht
Wertetabelle zu $y = -0,05x^2 + 0,5x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	0	0,45	0,8	1,05	1,2	1,25	1,2	1,05	0,8	0,45	0	-0,55

Graph:



- b) $S\left(-\frac{0,5}{2(-0,05)} \mid 0 - \frac{0,5^2}{4(-0,05)}\right) \Leftrightarrow S(5 \mid 1,25)$; Die maximale Höhe beträgt 1,25 m.
- c) Wenn die Düsen um 360° drehbar sind, wird die Fläche bei einem Düsenabstand von 10 m vollständig bewässert. Der Abstand kann je nach Anordnung auch größer gewählt werden. (Mehrere Lösungen möglich.)

K3

- 3 a) Der Schwerpunkt der Springer befindet sich etwa 1 m über dem Boden.
- b) Der Scheitelpunkt sei $S(0|36)$. Mithilfe der Scheitelpunktskoordinaten lassen sich p und q berechnen:
- $$x_s = 0 = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow p = 0$$
- $$y_s = 36 = q - \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow q = 36$$
- Da die Parabel nach unten geöffnet ist, gilt $a = -1$.
- $$y = -x^2 + 36$$
- c) 3 m hohes Sprungbrett: $S(0|4)$
 $y = -x^2 + 4$. Die horizontale Entfernung vom Absprungpunkt ergibt sich aus den Nullstellen.
 Für $y = 0$ gilt: $0 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$
 Die horizontale Entfernung zum Absprungpunkt ist somit 2 m.
- 10 m hoher Sprungturm: $S(0|11)$
 $y = -x^2 + 11$
 $x_{1/2} = \sqrt{11} \approx 3,3$
 Die horizontale Entfernung zum Absprungpunkt beträgt somit ungefähr 3,3 m.

KAPITEL 2

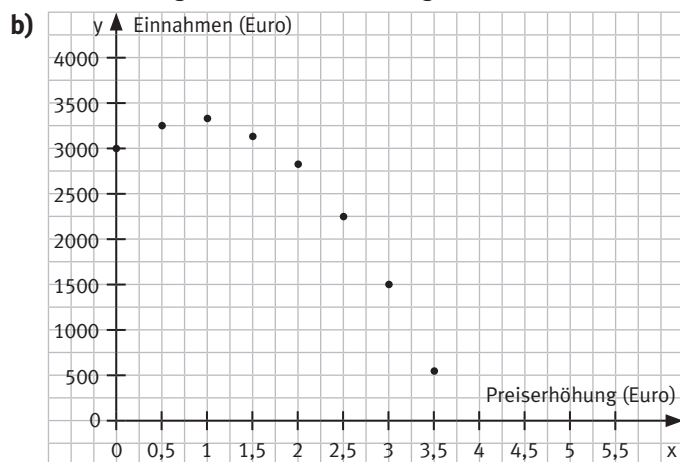
- K2** 4 $A = \frac{(a+c)}{2} h \Leftrightarrow 221 = \frac{(21+h)}{2} h \Leftrightarrow 0 = 0,5h^2 + 10,5h - 221$
Mithilfe der pq-Formel erhält man $h_1 = -34$ (nicht sinnvoll); $h_2 = 13 \text{ cm} = c$

- K2** 5 $V = l \cdot b \cdot h \Leftrightarrow 52,5 \text{ m}^3 = l \cdot b \cdot 2,5 \text{ m} \Leftrightarrow 21 \text{ m}^2 = l \cdot b$
 $A_0 = 2(l \cdot b) + 2(h \cdot l) + 2(h \cdot b) \Leftrightarrow 92 \text{ m}^2 = 2(21 \text{ m}^2) + 2(2,5 \text{ m} \cdot l) + 2(2,5 \text{ m} \cdot b)$
 $\Leftrightarrow l = 10 \text{ m} - b$
 $21 \text{ m}^2 = (10 \text{ m} - b)b \Leftrightarrow 0 = -b^2 + 10 \text{ m} \cdot b - 21 \text{ m}^2$
Mithilfe der pq-Formel erhält man als Breite 3 m und als Länge 7 m.

K3 6 a)

x: Preiserhöhung (€)	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50
Eintrittspreis (€)	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50
Anzahl der Gäste	1500	1300	1100	900	700	500	300	100
y: Einnahmen (€)	3000	3250	3300	3150	2800	2250	1500	550

Feststellung: Die Einnahmen steigen zunächst an, fallen danach aber stark ab.



- c)** Die Einnahmen sind bei einem Eintrittspreis von 3,00 Euro am größten.

K3 7

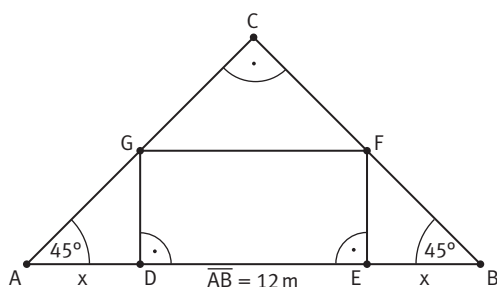
x: Preissenkung (€)	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
Verkaufspreis pro Flasche (€)	6,00	5,90	5,80	5,70	5,60	5,50	5,40	5,30	5,20	5,10	5,00
Anzahl verkaufter Flaschen (Stück)	1000	1020	1040	1060	1080	1100	1120	1140	1160	1180	1200
y: Einnahmen (€)	6000	6018	6032	6042	6048	6050	6048	6042	6032	6018	6000

Antwort: Die Einnahmen sind bei einem Verkaufspreis von 5,50 Euro am größten (6050 €).

- K3** 8 $A = l \cdot b$ und $u = 2(l + b)$

- a)** $78 = 2(l + b) \Leftrightarrow l = 39 - b$
 $A = (39 - b) \cdot b \Leftrightarrow A = -b^2 + 39b$
 $S\left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right) \Leftrightarrow S\left(-\frac{39}{2 \cdot (-1)} \mid 0 - \frac{39^2}{4 \cdot (-1)}\right) \Leftrightarrow S(19,5 \mid 380,25)$
 Die Seiten des Freilaufs sollten $l = b = 19,5 \text{ m}$ sein, damit der Flächeninhalt ($380,25 \text{ m}^2$) maximal ist.
- b)** $78 = 2b + l \Leftrightarrow l = 78 - 2b$
 $A = (78 - 2b) \cdot b \Leftrightarrow A = -2b^2 + 78b$
 $S\left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right) \Leftrightarrow S\left(-\frac{78}{2 \cdot (-2)} \mid 0 - \frac{78^2}{4 \cdot (-2)}\right) \Leftrightarrow S(19,5 \mid 760,5)$
 Die Seiten des Freilaufs sollten $b = 19,5 \text{ m}$ und $l = 39 \text{ m}$ sein, damit der Flächeninhalt ($760,5 \text{ m}^2$) maximal ist.
- c)** Herr Özil sollte Variante b wählen, da er mit dem 78 m langen Zaun ein Freigehege mit einem doppelt so großen Flächeninhalt bekommt.

K2 9



- a) Das Dreieck ADG hat zwei 45° - und einen 90° -Winkel und ist somit gleichschenkelig: $\overline{AD} = \overline{GD} = x$. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist also:
 $A(x) = (12 - 2x) \cdot x = -2x^2 + 12x$

- b) $x = 0$ in A eingesetzt ergibt: $A = 12 \cdot 0 = 0$
 $x = 6$ in A eingesetzt ergibt: $A = 0 \cdot 6 = 0$
 Wenn $x = 0$ gilt, wäre die Breite des Rechtecks genauso lang wie die Strecke $\overline{AB}$ und die Höhe des Rechtecks somit 0. Für $x = 6$ wäre die Breite des Rechtecks 0.

- c) Der Graph der Flächeninhaltsfunktion ist eine nach unten geöffnete Parabel. Die x-Koordinate des Scheitelpunkts liegt in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen: $x_s = \frac{0+6}{2} = 3$.
 $x = 3$ in die Funktionsgleichung eingesetzt liefert: $y_s = 18$, also $S(3|18)$.
 Für $x = 3$ ergibt sich also der größtmögliche Flächeninhalt des Kunstwerkes, nämlich 18 m^2 .

d)

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$12 - 2x$	10	9	8	7	6	5	4	3	2

Für $x = 4$ ist das Kunstwerk 4 m breit und 4 m hoch, also quadratisch.

- e) $A_{\text{Quadrat}} = 4 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} = 16 \text{ m}^2$
 $A_{\text{max. Rechteck}} = 18 \text{ m}^2$
 Unterschied: 2 m^2

Im Vergleich zu den 18 m^2 machen die 2 m^2 einen Anteil von $\frac{2}{18} = \frac{1}{9} \approx 11\%$ aus.

K3 10 $A = x \cdot y$

$$y = mx + t \Leftrightarrow y = -\frac{100}{80}x + 100$$

$$A = x \left(-\frac{100}{80}x + 100 \right) \Leftrightarrow A = -\frac{5}{4}x^2 + 100x$$

$$S\left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right) \Leftrightarrow S\left(-\frac{100}{2 \cdot (-1,25)} \mid 0 - \frac{100^2}{4 \cdot (-1,25)}\right) \Leftrightarrow S(40 \mid 2000)$$

Die Rechtecke besitzen eine Abmessung von $40 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$. Der maximale Flächeninhalt beträgt 2000 cm^2 .

- K1** 1 a) falsch: $2x - (3x + 4) = -x + 4$
richtig: $2x - (3x + 4) = -x - 4$
c) falsch: $b + (2y + 4z) = 2by + 4bz$
richtig: $b + (2y + 4z) = b + 2y + 4z$
e) falsch: $6y - 3yz = 3y \cdot (2 - yz)$
richtig: $6y - 3yz = 3y \cdot (2 - z)$
- b) falsch: $3 \cdot (4a + 7) = 12a + 7$
richtig: $3 \cdot (4a + 7) = 12a + 21$
d) falsch: $(8g - 14r) : 2 = 8g - 7r$
richtig: $(8g - 14r) : 2 = 4g - 7r$
f) falsch: $10x \cdot (xz + 2yz) = 10xz + 20xz$
richtig: $10x \cdot (xz + 2yz) = 10x^2z + 20xyz$

- K5** 2 a) $18a + 12b + 28b - 49a - 13b = 27b - 31a$
b) $\frac{1}{2}ab + \frac{3}{2}ab - 21b - \frac{1}{3}ab - b = 1\frac{2}{3}ab - 22b$
c) $4x \cdot [18xy - 12x^2 - 0,5x^2y - 0,5x^2y] = 4x \cdot [18xy - 12,5x^2 - 0,5x^2y] = 72x^2y - 50x^3 - 2x^3y$
d) $2p + 0,7q^2 - 0,06q - [-0,48q - r^2 + 7,2r] - [-p^2 + 1,5p]$
 $= 2p + 0,7q^2 - 0,06q + 0,48q + r^2 - 7,2r + p^2 - 1,5p$
 $= p^2 + 0,7q^2 + r^2 + 0,5p + 0,42q - 7,2r$

- K5** 3 a) $12y - 3 + 8xy - 2x$
b) $x^2 - 8x + 16 - x^2 - 6x - 9 = -14x + 7$
c) $x^2 + x + \frac{1}{4} + x^2 - 5x + 6,25 = 2x^2 - 4x + 6,5$
d) $9x^2 - 42x + 49 + 16x^2 + 24x + 9 - 25x^2 + 60x - 36 = 42x + 22$

Hinweis: Für die Abkürzung des Oberflächeninhalts sind verschiedene Abkürzungen gängig und gleichbedeutend (O ; A_0).

- K3** 4 $O_{\text{Würfel}} = 6a^2$
 $O_{\text{Quader}} = 4 \cdot (a \cdot (a + x)) + 2 \cdot a \cdot a = 4 \cdot (a^2 + ax) + 2a^2 = 6a^2 + 4ax = O_{\text{Würfel}} + 4ax$
 $V_{\text{Würfel}} = a^3$
 $V_{\text{Quader}} = (a + x) \cdot a \cdot a = a^3 + a^2x = V_{\text{Würfel}} + a^2x$

- K5** 5 a) $4x \cdot (3y + 2)$ b) $7xy \cdot (2 - 3z)$ c) $14ab \cdot (3a - 2b)$
d) $25rst \cdot (3s - 2r)$ e) $12x \cdot (4 + 2y - x)$ f) $13 \cdot (3ef + 2f - e)$

- K2** 6 a) 1 $14^2 = (10 + 4)^2 = 100 + 80 + 16$
 $15^2 = (10 + 5)^2 = 100 + 100 + 25$
 $16^2 = (10 + 6)^2 = 100 + 120 + 36$
Gesetzmäßigkeiten: Der Wert setzt sich zusammen aus 100 plus einem Vielfachen von 20 plus dem Quadrat der Einerzahl.
2 $(10 + n)^2 = 100 + 20 \cdot n + n^2$
 $(10 - n)^2 = 100 - 20 \cdot n + n^2$
Beispiel: $7^2 = (10 - 3)^2 = 100 - 60 + 9 = 49$
b) Beispiel: $25^2 = (20 + 5)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 5 + 5^2 = 400 + 40 \cdot 5 + 25 = 625$
 $27^2 = (20 + 7)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 7 + 7^2 = 400 + 40 \cdot 7 + 49 = 729$
allgemein: $(20 + n)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot n + n^2 = 400 + 40 \cdot n + n^2$
Beispiel: $35^2 = (30 + 5)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 5 + 5^2 = 900 + 60 \cdot 5 + 25 = 1225$
allgemein: $(30 + n)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot n + n^2 = 900 + 60 \cdot n + n^2$
c) Mögliche Antwort:
Zur Berechnung des Quadrats einer beliebigen Zahl x ($x > 10$), zerlegt man x in die Summe aus dem Vielfachen von 10 ($= a$) und der Einerzahl ($= n$).
Beispiel: $117 = 110 + 7 = 11 \cdot 10 + 7$
Anschließend berechnet man das Quadrat mithilfe der binomischen Formel $(a + n)^2 = a^2 + 2an + n^2$ oder unter Zuhilfenahme der Verknüpfungstabelle:

$\cdot$	a	n
a	a^2	an
n	an	n^2

Beispiel: $117^2 = (110 + 7)^2$
 $= 12\,100 + 2 \cdot 110 \cdot 7 + 7^2$
 $= 12\,100 + 1540 + 49$
 $= 13\,689$

·	110	7
110	12 100	770
7	770	49

d) $18^2 = 100 + 160 + 64 = 324$

·	10	8
10	100	80
8	80	64

$24^2 = 400 + 160 + 16 = 576$

·	20	4
20	400	80
4	80	16

$26^2 = 400 + 240 + 36 = 676$

·	20	6
20	400	120
6	120	36

$35^2 = 900 + 300 + 25 = 1225$

·	30	5
30	900	150
5	150	25

$41^2 = 1600 + 80 + 1 = 1681$

·	40	1
40	1600	40
1	40	1

$44^2 = 1600 + 320 + 16 = 1936$

·	40	4
40	1600	160
4	160	16

$57^2 = 2500 + 700 + 49 = 3249$

·	50	7
50	2500	350
7	350	49

$61^2 = 3600 + 120 + 1 = 3721$

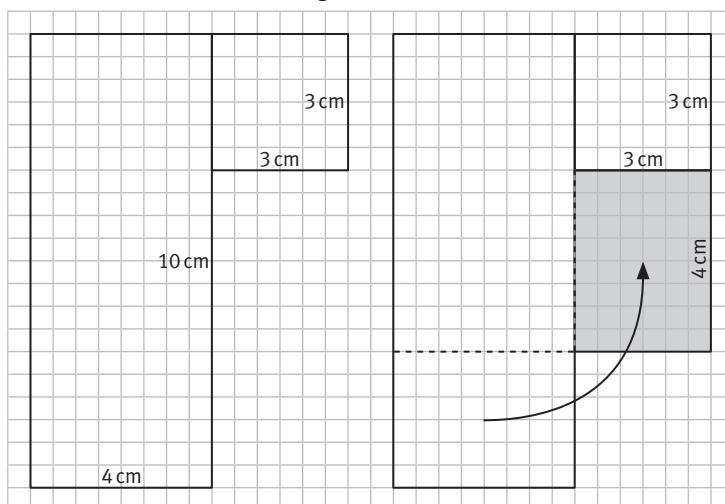
·	60	1
60	3600	60
1	60	1

$73^2 = 4900 + 420 + 9 = 5329$

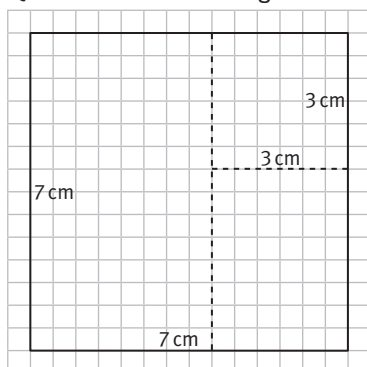
·	70	3
70	4900	210
3	210	9

K3

- 7 a) Rechteck mit $x = 10$ cm Länge und 4 cm Breite



- b) Quadrat mit Seitenlänge 7 cm



$$A_{\text{Gesamtfigur}} = A_{\text{Rechteck}} + A_{\text{Quadrat}}$$

$$= (10 \cdot 4) \text{ cm}^2 + (3 \cdot 3) \text{ cm}^2 = 49 \text{ cm}^2$$

Die Seitenlänge des gesuchten Quadrats muss 7 cm betragen:

$$A_{\text{neues-Quadrat}} = 7 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 49 \text{ cm}^2$$

- c) (Angaben in cm^2)

$$A_{\text{gesamt}} = x \cdot (x - 6) + 3 \cdot 3 = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

Das gesuchte neue Quadrat mit dem gleichen Flächeninhalt wie die Gesamtfigur aus Rechteck plus kleines Quadrat hat eine Seitenlänge von $x \text{ cm} - 3 \text{ cm}$.

KAPITEL 2

K1 8 $y = x^2 - 1$ $P_1(1|0)$

$0 = 1^2 - 1 = 0$ wahr

Der Punkt liegt auf der Parabel.

 $P_2(3|-2)$

$-2 = 3^2 - 1 = 8$ falsch

Der Punkt liegt nicht auf der Parabel.

 $P_3(-2|3)$

$3 = (-2)^2 - 1 = 3$ wahr

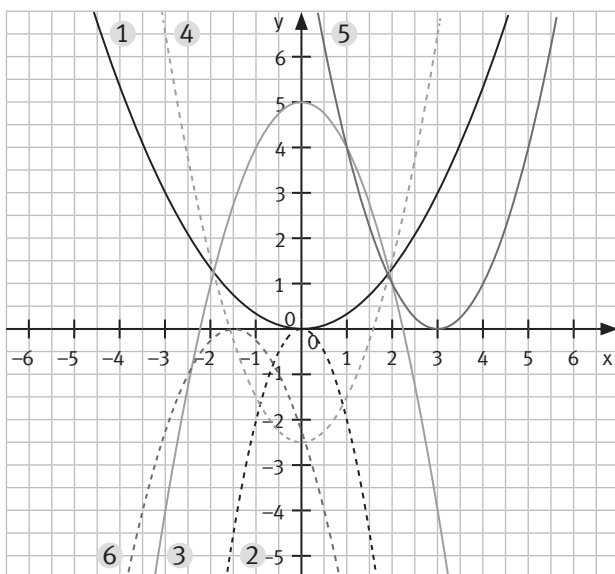
Der Punkt liegt auf der Parabel.

 $P_4\left(\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{4}\right)$

$-\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{4}$ falsch

Der Punkt liegt nicht auf der Parabel.

K4 9 a)



b) Der Graph ist gegenüber der Normalparabel

- 1 gestaucht.
- 2 gestreckt und an der x-Achse gespiegelt.
- 3 an der x-Achse gespiegelt und um 5 Einheiten nach oben verschoben.
- 4 um 2,5 Einheiten nach unten verschoben.
- 5 um 3 Einheiten nach rechts verschoben.
- 6 an der x-Achse gespiegelt und um 1,5 Einheiten nach links verschoben.

K4 10 a) Graph a: $y = (x + 1,5)^2 - 2,25 \Leftrightarrow y = x^2 + 3x$

Graph b: $y = (x - 0)^2 - 4 \Leftrightarrow y = x^2 - 4$

Graph c: $y = -(x - 0)^2 + 1 \Leftrightarrow y = x^2 + 1$

Graph d: $y = (x - 2)^2 + 2 \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 6$

	Scheitelpunkt	Wertemenge	Symmetrieachse	monoton fallend	monoton steigend
a)	$S(-1,5 -2,25)$	$y \geq -2,25$	$x = -1,5$	$x < -1,5$	$x > -1,5$
b)	$S(0 -4)$	$y \geq -4$	$x = 0$	$x < 0$	$x > 0$
c)	$S(0 1)$	$y \leq 1$	$x = 0$	$x > 0$	$x < 0$
d)	$S(2 2)$	$y \geq 2$	$x = 2$	$x < 2$	$x > 2$

c) x-Wert: Symmetrieachse, Monotonie
y-Wert: Wertemenge

K5 11 Folgende Gleichungen beschreiben jeweils dieselbe Funktion: 3 und 4; 5 und 8.

K5 12 a) A und B in $f: y = 0,2x^2 - bx + c$ eingesetzt liefert folgende Gleichungen:

$$\text{I } -1 = 5 - 5b + c \quad \Leftrightarrow 5b - 6 = c$$

$$\text{II } 4 = 20 - 10b + c \quad \Leftrightarrow 10b - 16 = c \quad \Rightarrow 10b - 16 = 5b - 6 \Leftrightarrow b = 2; c = 4$$

$$\Rightarrow f: y = 0,2x^2 - 2x + 4$$

b) $f: y = a(x - x_S)^2 + y_S = a(x + 3)^2 + 4$

$a = -1$, da der Graph von f eine an der x -Achse gespiegelte und verschobene Normalparabel ist.

$$\Rightarrow f: y = -1(x + 3)^2 + 4 = -1(x^2 + 6x + 9) + 4 = -x^2 - 6x - 5$$

c) Nach der Scheitelpunktsform gilt für die x -Koordinate des Scheitelpunkts S : $x = -\frac{b}{2a}$

Die Gleichung der Symmetrieachse des Graphen von f lautet: $x = 4 \Rightarrow x_S = 4 = -\frac{b}{2a}$

$$\Rightarrow b = -8a$$

$$\Rightarrow f: y = ax^2 - 8ax + c$$

Einsetzen von A und B in f liefert:

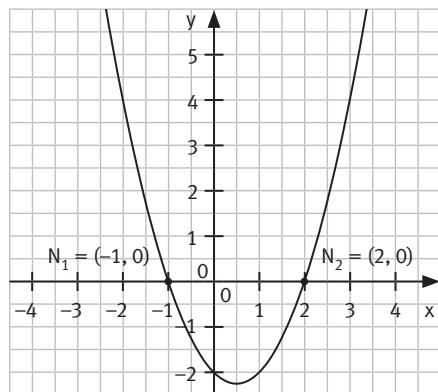
$$\text{I } -1 = 9a - 24a + c \quad \Leftrightarrow c = 15a - 1$$

$$\text{II } -7 = 4a - 16a + c \quad \Leftrightarrow c = 12a - 7 \quad \Rightarrow 15a - 1 = 12a - 7 \quad \Rightarrow a = -2; b = 16; c = -31$$

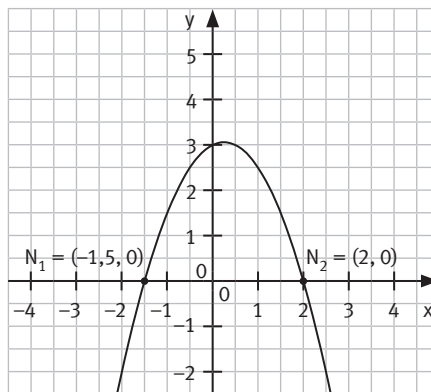
$$\Rightarrow f: y = -2x^2 + 16x - 31$$

- K5** 13 a) $D = -3$ $D < 0$ keine Lösung $\mathbb{L} = \emptyset$
 b) $D = -16$ $D < 0$ keine Lösung $\mathbb{L} = \emptyset$
 c) $D = 1,0625$ $D > 0$ zwei Lösungen $\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{17} \right\} = \{-0,39; 0,64\}$
 d) $D = -7$ $D < 0$ keine Lösung $\mathbb{L} = \emptyset$
 e) $D = -1\frac{8}{9}$ $D < 0$ keine Lösung $\mathbb{L} = \emptyset$
 f) $D = 0$ $D = 0$ eine Lösung $\mathbb{L} = \{7\}$

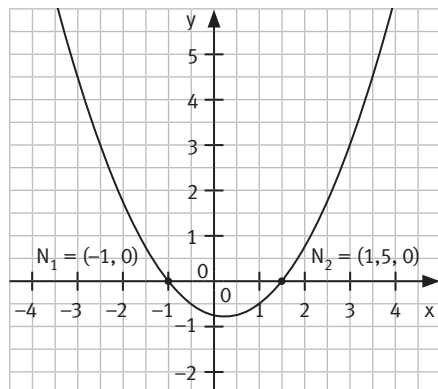
K4 14 a)



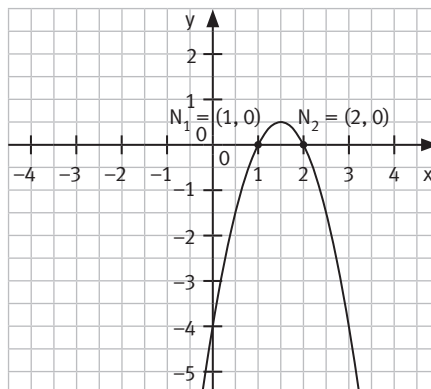
b)



c)



d)



K3

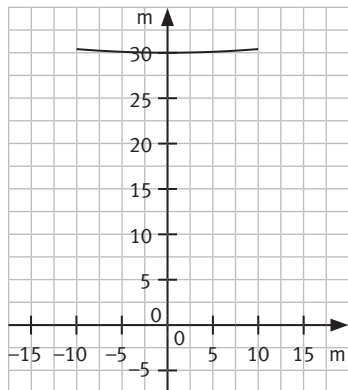
- 15 Die Höhe dieses Bogens beträgt 0,4 m bei einer Spannweite von 20 m. Es gilt für $y = ax^2$:

$$0,4 = a \cdot 10^2$$

$$a = 0,004$$

Verschiebt man die x-Achse des Koordinatensystems auf Meereshöhe, so gilt:

$$y = 0,004x^2 + 30$$



K2

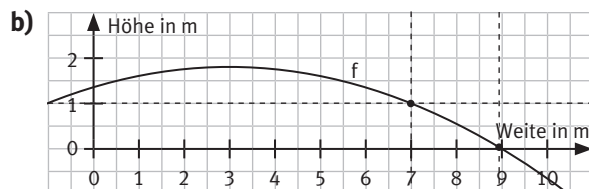
- 16 a) Die korrekte Durchführung des Weitsprungs kann in mehrere Phasen unterteilt werden. Während Anlauf und Absprung (1. und 2. Phase) nimmt der Springer eine aufrechte Position ein, sein Körperschwerpunkt in Höhe des Bauches befindet sich damit typischerweise mehr als 1 m über dem Boden. Nach dem Flug (3. Phase) hat der Springer bei der Landung (4. Phase) die Intention, die Beine so weit wie möglich nach Vorne zu bringen und in einer sitzenden Position den Boden zu erreichen, sein Körperschwerpunkt ist dabei sehr nahe am Boden.

Rechnerisch ergibt sich mit $y = -0,05x^2 + 0,3x + 1,35$:

Absprung bei $x_1 = 0$ und $y_1 = 1,35$

Landung bei $x_2 = 8,95$ und $y_2 = -0,05 \cdot (8,95)^2 + 0,3 \cdot 8,95 + 1,35 = 0,029875$

Beim Absprung war der Körperschwerpunkt 1,35 m über dem Boden, bei der Landung in 8,95 m Abstand zum Absprungspunkt war der Körperschwerpunkt rund 0,03 m = 3 cm über dem Boden.

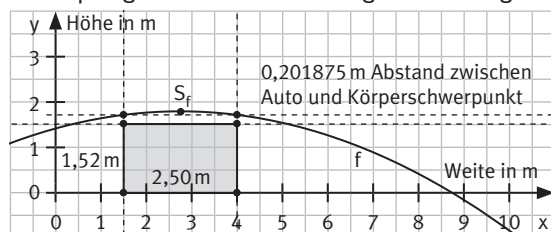


Bei einer horizontalen Entfernung von 7,00 m befand sich der Körperschwerpunkt 1,00 m über dem Boden.

- c) Es sind individuelle Lösungsansätze und Antworten möglich mit:
 $f: y = -0,05x^2 + 0,3x + 1,35 \Leftrightarrow y = -0,05 \cdot (x - 3)^2 + 1,8$ und $S_f(3 | 1,8)$

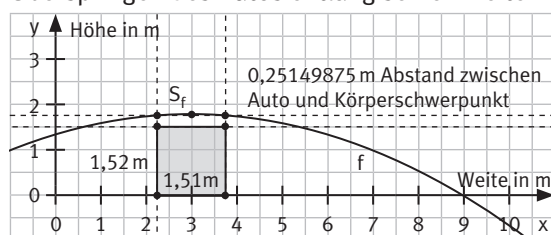
Modellierungsannahmen:

Überspringen des Autos entlang seiner Länge



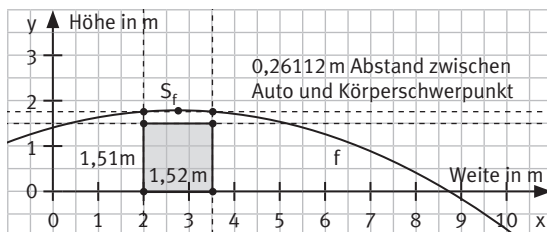
Positioniert man das Auto so, dass es der Länge nach mittig unter S_f steht, mit $1,75 < x < 4,25$ und $0 < y < 1,52$, dann beträgt der Abstand zwischen den oberen Auto-Eckpunkten und der Parabel rund 0,2 m.

Überspringen des Autos entlang seiner Breite



Positioniert man das Auto so, dass es der Breite nach mittig unter S_f steht, mit $2,245 < x < 3,755$ und $0 < y < 1,52$, dann beträgt der Abstand zwischen den oberen Auto-Eckpunkten und der Parabel rund 0,25 m.

Überspringen des gekippten Autos entlang seiner Höhe



Positioniert man das Auto so, dass es der Höhe nach mittig unter S_f steht, mit $2,24 < x < 3,76$ und $0 < y < 1,51$, dann beträgt der Abstand zwischen den oberen Auto-Eckpunkten und der Parabel rund 0,26 m.

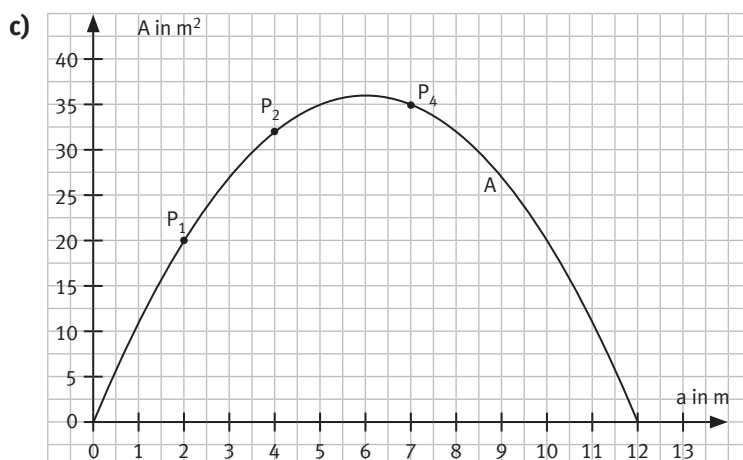
Wenn man sich vorstellt, dass anstelle von Mike Powell ein kleiner Ball der Flugbahn folgt, dann würde das Auto in jedem der drei Fälle vom Ball überflogen. Es gilt hier jedoch, nicht allein die Kurve des Körperschwerpunktes zu beachten, sondern auch darum, den gesamten Körper – inklusive der Beine – zu berücksichtigen. Daher ist es unrealistisch anzunehmen, dass eine Körperhaltung von Mike Powell möglich ist, bei der sein Körperschwerpunkt auch nur 26 cm über dem Auto liegt und er dabei nicht mit den Knien oder Füßen das Auto berührt. Kurz: Der Smart Fortwo wäre nicht übersprungen worden.

Hinweis: Ein Film von Mike Powells Sprung ist im Internet zu finden.

K3

- 17 a) ① $u = 24 \text{ m}$ Ja $A = 20 \text{ m}^2$
 ② $u = 24 \text{ m}$ Ja $A = 32 \text{ m}^2$
 ③ $u = 28 \text{ m}$ Nein
 ④ $u = 24 \text{ m}$ Ja $A = 35 \text{ m}^2$

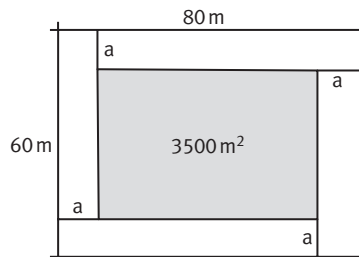
- b) I $24 = 2(a + b) \Leftrightarrow 12 - a = b$
 II $A = a \cdot b$
 b in II: $A(a) = -a^2 + 12a$



- d) ① $A = a \cdot b$
 ② $24 = 2(a + b)$
 $A(a) = a \cdot b = -a^2 + 12a$
 ③ $A(a) = -(a - 6)^2 + 36$
 $A_{\max} = 36 \text{ m}^2$ für $a = 6 \text{ m}$
 ④ $b = 6 \text{ m}$

Der maximale Flächeninhalt des Weideplatzes beträgt 36 m^2 für die Seitenlängen $a = b = 6 \text{ m}$.

K3 18



Die gesamte zur Verfügung stehende Fläche beträgt 4800 m². Die Breite des Randes ist a .

$$4800 = 3500 + 2 \cdot (80 - a) \cdot a + 2 \cdot (60 - a) \cdot a$$

$$1300 = -4a^2 + 280a$$

$$a^2 - 70a + 325 = 0$$

$$a_1 = 5; a_2 = 65 \text{ (entfällt, da keine sinnvolle Lösung)}$$

Der Rand ist 5 m breit.

K3 19 Ursprüngliche Seitenlänge: a ; ursprünglicher Flächeninhalt: $A = a^2$

$$\text{neue Seitenlänge: } a_{\text{neu}} = a + 4$$

$$\text{neuer Flächeninhalt: } A_{\text{neu}} = (a + 4)^2$$

$$\text{Bedingung: } A_{\text{neu}} = 9A$$

$$(a + 4)^2 = 9a^2$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$a_1 = -1 \notin \mathbb{R}^+; a_2 = 2 \in \mathbb{R}^+.$$

Die ursprüngliche Seitenlänge beträgt 2 cm, die neue Seitenlänge 6 cm.

K3 20 Sei x die Anzahl der Liter und y der Preis pro Liter in €, dann ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\text{I } x \cdot y = 50 \Leftrightarrow y = \frac{50}{x}$$

$$\text{II } (x - 1) \cdot (y + 0,05) = 50$$

$$(x - 1) \cdot \left(\frac{50}{x} + 0,05 \right) = 50$$

$$x^2 - x - 1000 = 0$$

$$x_1 = -31,13 \notin \mathbb{R}^+; x_2 \approx 32,13 \in \mathbb{R}^+$$

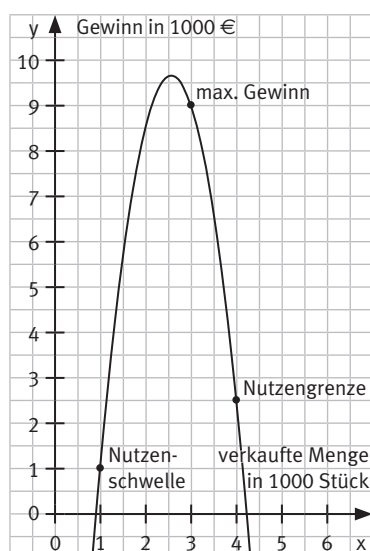
Ein Liter Benzin hat vor der Preiserhöhung $\frac{50}{32,13} \text{ €} \approx 1,556 \text{ €}$ gekostet.

Stunt Scooter

- K6** 1 **Informiere dich im Internet über das Produkt Stunt Scooter (Marken, Preise, technische Details), die Szene und die aktuellen Freestyle Events in Deutschland.**

Individuelle Lösungen möglich.

- K4** 2 **Zeichne den Graphen der Gewinnfunktion für $x \in [0; 5]$ und $\Delta x = 1$ und markiere die Nutzenschwelle, Nutzengrenze und den maximalen Gewinn.**



x	0	1	2	3	4	5
y	-13,5	1	8,5	9	2,5	-11
		Nutzen- schwelle		max. Gewinn	Nutzen- grenze	

- K6** 3 **Welche Bedeutung haben die Begriffe Nutzenschwelle und Nutzengrenze in diesem Beispiel? Erkläre mit eigenen Worten.**

Nutzenschwelle bedeutet, dass bei einer gewissen Anzahl an verkauften Stunt Shootern der gemachte Umsatz gleich den Gesamtkosten ist. Ab diesem Punkt tritt man in die Gewinnzone ein.

Nutzengrenze bedeutet, dass ab einer gewissen Anzahl verkaufter Stunt Shooter der Umsatz kleiner als die Gesamtkosten ist, dementsprechend wird die Gewinnzone verlassen.

- K2** 4 **Berechne in welchem Intervall für x der Gewinn positiv ausfällt.**

siehe Wertetabelle bei 2: Der Gewinn fällt bei dem Intervall $x \in [1; 4]$ positiv aus.

- K2** 5 **Wie groß ist der Verlust, wenn in einem Monat keine Stunt Shooter verkauft werden?**

Der Verlust liegt bei 13 500 € (siehe Wertetabelle für $x = 0$).

- K1** 6 **Wie viele Scooter sollte deine Schwester jeden Monat verkaufen? Begründe.**

Meine Schwester sollte jeden Monat 3000 Scooter verkaufen, da der Gewinn dann mit 9000 € am höchsten ausfällt.

- K2** 7 **Wie groß ist der Jahresgewinn, wenn sie im zweiten Geschäftsjahr monatlich durchschnittlich 1750 Scooter verkauft?**

$g(1,75) \sim 7,281 \Rightarrow$ Der monatliche Gewinn liegt bei 7281 €.

$7281 \text{ €} \cdot 12 \text{ Monate} = 87\,372 \text{ €} \Rightarrow$ Der Jahresgewinn liegt bei 87 372 €.

- K6** 8 **Diskutiere mit deinen Mitschülern warum der Gewinn ab einer gewissen Stückzahl wieder abnimmt. Was könnte hierzu führen?**

Individuelle Lösungen möglich.

KAPITEL 2

K2

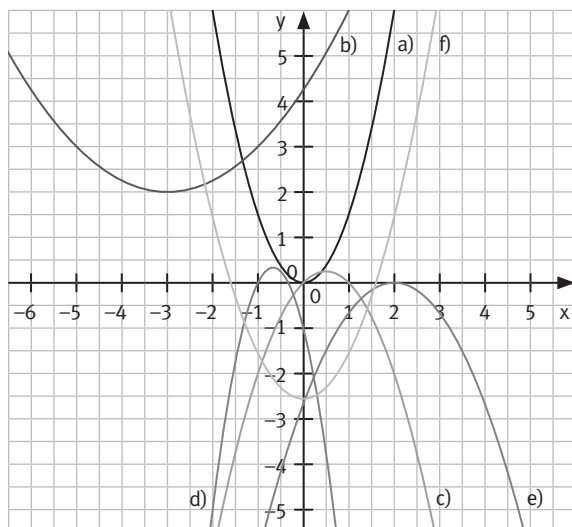
- 1 a) $4 \cdot (6x + 7y) = 24x + 28 \cdot y$
 b) $\frac{1}{3}xy \cdot (-6xy + 15y) = -2x^2y^2 + 5xy^2$
 c) $2,2a \cdot (4a - 3,1b) = 8,8a^2 - 6,82ab$
 d) $2pq^2 \cdot (3,5p - 1,75q) = 7p^2q^2 - 3,5pq^3$
 e) $3a \cdot (2b - 4a) = 6ab - 12a^2$

K5

2

x	y					
	a)	b)	c)	d)	e)	f)
-5	37,5	3	-30	-56	$-32\frac{2}{3}$	22,44
-4	24	2,25	-20	-33	-24	13,44
-3	13,5	2	-12	-16	$-16\frac{2}{3}$	6,44
-2	6	2,25	-6	-5	$-10\frac{2}{3}$	1,44
-1	1,5	3	-2	0	-6	-1,56
0	0	4,25	0	-1	$-2\frac{2}{3}$	-2,56
1	1,5	6	0	-8	$-\frac{2}{3}$	-1,56
2	6	8,25	-2	-21	0	1,44
3	13,5	11	-6	-40	$-\frac{2}{3}$	6,44
4	24	14,25	-12	-65	$-2\frac{2}{3}$	13,44
5	37,5	18	-20	-96	-6	22,44

- a) Die nach oben geöffnete Parabel ist gestreckt mit $S(0|0)$ und $D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$.
 b) Die nach oben geöffnete Parabel ist gestaucht mit $S(-3|2)$ und $D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}$ mit $y \geq 2$.
 c) Die nach unten geöffnete verschobene Normalparabel hat $S(0,5|0,25)$ und $D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}$ mit $y \leq 0,25$.
 d) Die nach unten geöffnete Parabel ist gestreckt mit $S(-\frac{2}{3}|\frac{1}{3})$ und $D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}$ mit $y \leq \frac{1}{3}$.
 e) Die nach unten geöffnete Parabel ist gestaucht mit $S(2|0)$ und $D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$.
 f) Die nach oben geöffnete verschobene Normalparabel hat $S(0|-2,56)$ und $D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}$ mit $y \geq -2,56$.



K2

- 3 a) $1,69 \neq -1,3^2 = -1,69 \Rightarrow$ Der Punkt liegt nicht auf der Parabel.
 b) $1 \neq 2 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) = -3 \Rightarrow$ Der Punkt liegt nicht auf der Parabel.
 c) $1 \neq -0,5 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 4 = -6,5 \Rightarrow$ Der Punkt liegt nicht auf der Parabel.
 d) $2,5 = 1,5 \cdot (3 - 2)^2 + 1 = 2,5 \Rightarrow$ Der Punkt liegt auf der Parabel.

K5

- 4 a) Es gilt: $f: y = ax^2 + bx + c$ bzw. $f: y = a(x - x_s)^2 + y_s$

$$N(5|0) \in f \quad P(0|1) \in f$$

$$s: x = 2 \Rightarrow f: y = a \cdot (x - 2)^2 + y_s$$

Einsetzen von $P(0|1)$ und $N(5|0)$ in $f: y = a \cdot (x - 2)^2 + y_s$ ergibt:

$$\text{I} \quad 1 = a \cdot (0 - 2)^2 + y_s \quad \Leftrightarrow y_s = 1 - 4a$$

$$\text{II} \quad 0 = a \cdot (5 - 2)^2 + y_s$$

$$\Rightarrow 0 = 9a + 1 - 4a$$

$$\Leftrightarrow -1 = 5a$$

$$\Leftrightarrow a = -0,2; y_s = 1,8$$

Die Funktionsgleichung von f lautet: $f: y = -0,2(x - 2)^2 + 1,8$

- b) Wenn nur die Symmetrieachse s und die beiden Nullstellen einer quadratischen Funktion bekannt sind, kann die Gleichung dieser Funktion nicht eindeutig bestimmt werden, da man die Streckung/Stauchung der Parabel nicht kennt.

K5

- 5 a) Es gilt: $f: y = ax^2 + bx + c$ bzw. $f: y = a(x - x_s)^2 + y_s$ mit $a = -1$ (da der Graph von f eine an der x -Achse gespiegelte Normalparabel ist), $x_s = -2$ (da $s: x = -2$ Symmetrieachse ist) und $P(2|-4) \in f$.

$$\Rightarrow f: y = -1(x + 2)^2 + y_s$$

$P(2|-4)$ in f einsetzen ergibt:

$$-4 = -1(2 + 2)^2 + y_s$$

$$\Leftrightarrow y_s = 12$$

$$\Rightarrow f: y = -1(x + 2)^2 + 12$$

Für die allgemeine Form gilt: $f: y = -x^2 - 4x + 8$

- b) Es gilt: $f: y = ax^2 + bx + c$ bzw. $f: y = a(x - x_s)^2 + y_s$ mit $a = 1$ (da f eine verschobene Normalparabel beschreibt) und $A(-5|3), B(2|10) \in f$.

$A(-5|3)$ und $B(2|10)$ in $f: y = (x - x_s)^2 + y_s$ einsetzen ergibt:

$$\text{I} \quad 3 = (-5 - x_s)^2 + y_s$$

$$\text{II} \quad 10 = (2 - x_s)^2 + y_s$$

$$\Rightarrow 3 - 10 = (-5 - x_s)^2 - (2 - x_s)^2$$

$$\Rightarrow -7 = 25 + 10x_s + x_s^2 - 4 + 4x_s - x_s^2$$

$$\Leftrightarrow -2 = x_s; y_s = -6$$

$$\Rightarrow f: y = (x + 2)^2 - 6$$

Für die allgemeine Form gilt: $f: y = x^2 + 4x - 2$

- c) $P(-4,5|-134)$ und $Q(8,5|-420)$ in $f: y = ax^2 + bx - 3,5$ einsetzen ergibt:

$$\text{I} \quad -134 = a(-4,5)^2 - 4,5b - 3,5 \Leftrightarrow b = 4,5a + 29$$

$$\text{II} \quad -420 = a(8,5)^2 + 8,5b - 3,5$$

$$\Rightarrow -420 = 72,25a + 8,5(4,5a + 29) - 3,5$$

$$\Leftrightarrow -663 = 110,5a \Leftrightarrow a = -6; b = 2$$

$$\Rightarrow f: y = -6x^2 + 2x - 3,5$$

- d) $P(5|0), Q(0|5) \in f: y = -2,5(x - x_s)^2 + y_s$

$P(5|0)$ und $Q(0|5)$ in $f: y = -2,5(x - x_s)^2 + y_s$ einsetzen ergibt:

$$\text{I} \quad 0 = -2,5(5 - x_s)^2 + y_s$$

$$\text{II} \quad 5 = -2,5(0 - x_s)^2 + y_s$$

$$\Leftrightarrow 5 = -2,5(0 - x_s)^2 + 2,5(5 - x_s)^2$$

$$\Leftrightarrow 5 - 62,5 = 25x_s$$

$$\Leftrightarrow -57,5 = -25x_s \Leftrightarrow 2,3 = x_s; y_s = 18,225$$

$$f: y = -2,5(x - 2,3)^2 + 18,225$$

Für die allgemeine Form gilt: $f: y = -2,5x^2 + 11,5x + 5$

KAPITEL 2

- K5** 6 Mögliches Vorgehen: Man liest die Koordinaten x_s und y_s des Scheitelpunkts S sowie eines weiteren Punktes P der Parabel ab und setzt die Koordinaten von P in die Scheitelpunktsform ein:

$$f: y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

- a) S(-2| -3) und P(0|0) $0 = a(0 + 2)^2 - 3$
 $a = 0,75$
 $\Rightarrow f: y = 0,75(x + 2)^2 - 3$
- b) S(0|2) und P(0,5|3) $3 = a(0,5 - 0)^2 + 2$
 $a = 4$
 $\Rightarrow f: y = 4x^2 + 2$
- c) S(2|1) und P(3|2) $2 = a(3 - 2)^2 + 1$
 $a = 1$
 $\Rightarrow f: y = (x - 2)^2 + 1$
- d) S(4|0) und P(5| -1) $-1 = a(5 - 4)^2 + 0$
 $a = -1$
 $\Rightarrow f: y = -(x - 4)^2$

- K5** 7 a) $y = 0,5x^2 - 0,5x - 1$ b) $y = 2x^2 - 14x + 26,5$ c) $y = -2,5x^2 + 2,5$ d) $y = -x^2 - 2x + 3$

- K5** 8 Allgemeine Koordinaten des Scheitelpunkts: $S\left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right)$

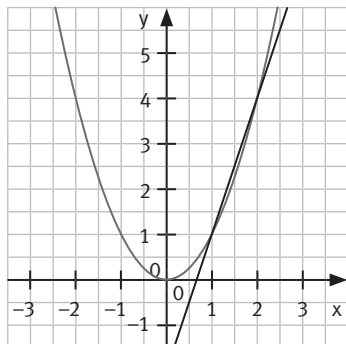
- a) $a = 1; b = -2; c = -3 \Rightarrow S(1 \mid -4) \Rightarrow y = (x - 1)^2 - 4$
- nach oben geöffnete und nach rechts/unten verschobene Normalparabel
 - Nullstellen: $x_1 = -1; x_2 = 3$
 - y-Achsenabschnitt: P(0| -3)
 - Scheitelpunkt (Tiefpunkt): S(1| -4)
 - $\mathbb{D} = \mathbb{R}; \mathbb{W} = \mathbb{R}$ mit $y \geq -4$
 - monoton fallend für $x \leq 1$ und steigend für $x \geq 1$
 - achsensymmetrisch zu $x = 1$
- b) $a = 1; b = 4; c = 3 \Rightarrow S(-2 \mid -1) \Rightarrow y = (x + 2)^2 - 1$
- nach oben geöffnete und nach links/unten verschobene Normalparabel
 - Nullstellen: $x_1 = -3; x_2 = -1$
 - y-Achsenabschnitt: P(0|3)
 - Scheitelpunkt (Tiefpunkt): S(-2| -1)
 - $\mathbb{D} = \mathbb{R}; \mathbb{W} = \mathbb{R}$ mit $y \geq -1$
 - monoton fallend für $x \leq -2$ und steigend für $x \geq -2$
 - achsensymmetrisch zu $x = -2$
- c) $a = 1; b = -4 \Rightarrow S(2 \mid -4) \Rightarrow y = (x - 2)^2 - 4$
- nach oben geöffnete und nach rechts/unten verschobene Normalparabel
 - Nullstellen: $x_1 = 0; x_2 = 4$
 - y-Achsenabschnitt: P(0|0)
 - Scheitelpunkt (Tiefpunkt): S(2| -4)
 - $\mathbb{D} = \mathbb{R}; \mathbb{W} = \mathbb{R}$ mit $y \geq -4$
 - monoton fallend für $x \leq 2$ und steigend für $x \geq 2$
 - achsensymmetrisch zu $x = 2$
- d) $a = 1; b = 6; c = 6,75 \Rightarrow S(-3 \mid -2,25) \Rightarrow y = (x + 3)^2 - 2,25$
- nach oben geöffnete und nach links/unten verschobene Normalparabel
 - Nullstellen: $x_1 = -4,5; x_2 = -1,5$
 - y-Achsenabschnitt: P(0|6,75)
 - Scheitelpunkt (Tiefpunkt): S(-3| -2,25)
 - $\mathbb{D} = \mathbb{R}; \mathbb{W} = \mathbb{R} - 2,25$
 - monoton fallend für $x \leq -3$ und steigend für $x \geq -3$
 - achsensymmetrisch zu $x = -3$

K2

- 9 a) $\mathbb{D} > 0 \Rightarrow 2$ Lösungen
 $x_1 = -12; x_2 = 23$ $\mathbb{L} = \{-12; 23\}$
 b) $\mathbb{D} > 0 \Rightarrow 2$ Lösungen
 $x_1 = -11; x_2 = 15$ $\mathbb{L} = \{-11; 15\}$
 c) $\mathbb{D} < 0 \Rightarrow$ keine Lösung
 d) $\mathbb{D} > 0 \Rightarrow 2$ Lösungen
 $x_1 = -0,6; x_2 = 1,2$ $\mathbb{L} = \{-0,6; 1,2\}$

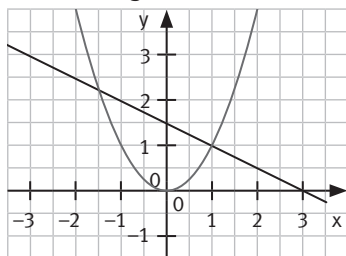
K5

- 10 a) $x^2 = 3x - 2$



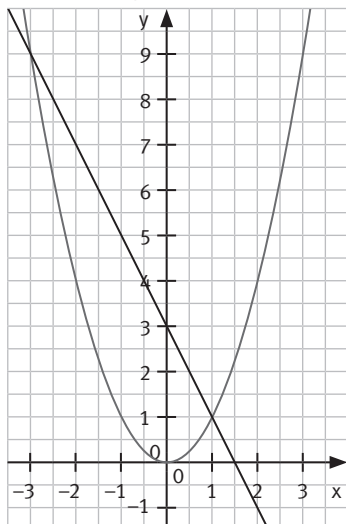
$$\mathbb{L} = \{1; 2\}$$

- c) Umformung zu: $x^2 = -0,5x + 1,5$



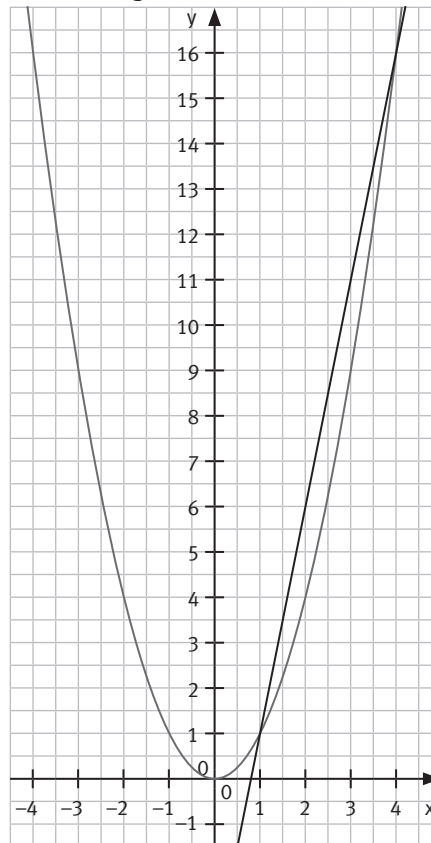
$$\mathbb{L} = \{-1,5; 1\}$$

- d) Umformung zu: $x^2 = -2x + 3$



$$\mathbb{L} = \{-3; 1\}$$

- b) Umformung zu: $x^2 = 5x - 4$



$$\mathbb{L} = \{1; 4\}$$

K5

- 11 a) $x^2 = -x + 2$ $\mathbb{L} = \{-2; 1\}$
 b) $-x^2 + 3,5 = -2x + 3,5$ $\mathbb{L} = \{0; 2\}$

- K3** 12 Lösungsmöglichkeit:
 alle Angaben in cm bzw. cm^2 ; $\mathbb{D} = \mathbb{Q}$ mit $x > 0$
 Flächeninhalt der Platte: $A = a^2$
 $A = 60^2 = 3600$
 Verschnitt: $0,125 \cdot 3600 = 450$
 Die Flächen sind $4 \cdot \frac{1}{2}x^2 = 2x^2$
 Bestimmung von x : $2x^2 = 450$
 $x^2 = 225$
 $x_1 = -15$; $x_2 = 15$ $-15 \notin \mathbb{D}$
 Es müssen gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke mit der Schenkellänge 15 cm abgeschnitten werden.

- K2** 13 $\mathbb{D} = \mathbb{N}$
 a) $x^2 + 2x = 323$
 $x_1 = -19$; $x_2 = 17$ $-19 \notin \mathbb{D}$
 Die gesuchte natürliche Zahl ist 17.
 b) $x^2 + \frac{1}{2}x = 742,5$
 $x_1 = -27,5$; $x_2 = 27$ $-27,5 \notin \mathbb{D}$
 Die gesuchte natürliche Zahl ist 27.
 c) $x^2 + \frac{1}{10}x = 101$
 $x_1 = -10,1$; $x_2 = 10$ $-10,1 \notin \mathbb{D}$
 Die gesuchte natürliche Zahl ist 10.
 d) $x^2 - x = x$
 $x_1 = 0$; $x_2 = 2$ $0; 2 \in \mathbb{D}$
 Die gesuchten natürlichen Zahlen können 0 oder 2 sein.

- K1/6** 14 Die Aussage ist richtig.
- K1/6** 15 Die Aussage ist richtig. Die x-Koordinate des Scheitels entspricht dem Mittelwert der beiden Nullstellen.
- K1/6** 16 Die Aussage ist nur für den speziellen Fall einer Normalparabel richtig, also wenn gilt: $a = 1$. Im allgemeinen ist die Aussage falsch, da sich aus dem Scheitelpunkt nicht ablesen lässt, ob es sich um eine nach oben (unten) geöffnete bzw. um eine gestreckte (gestauchte) Parabel handelt.
- K1/6** 17 Die Aussage ist richtig. Jede quadratische Gleichung kann man durch die Division mit a in die Normalform bringen.
- K1/6** 18 Die Aussage ist falsch. Alle quadratischen Gleichungen können graphisch gelöst werden. Die graphische Lösung kann jedoch ungenau sein.
- K1/6** 19 Die Aussage ist richtig. Ist die Diskriminante negativ, schneidet der Graph der quadratischen Funktion die x-Achse nicht. Es gibt keine Lösung.
- K1/6** 20 Die Aussage ist richtig. Der Parameter a wird deshalb auch Formvariable genannt.
- K1/6** 21 Die Aussage ist richtig. Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$ können mithilfe des Ausklammerns des Faktors x und der Anwendung des Satzes von Nullprodukt gelöst werden. Sie haben immer zwei Lösungen: $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$.