

10



mathe.delta



Hamburg

mathe.delta – Hamburg

Herausgegeben von Sabine Castelli und Michael Kleine

mathe.delta 10

Bearbeitet von Jörg Aldag, Sabine Castelli, Michael Kleine, Annett Schyschka und Tobias Sildatke

Zu diesem Lehrwerk sind erhältlich:

- Digitales Lehrermaterial **click & teach** Einzellizenz, WEB-Bestell-Nr. 612102

Weitere Lizenzformen (Einzellizenz flex, Kollegiumslizenz) und Materialien unter www.ccbuchner.de.

Dieser Titel ist auch als digitale Ausgabe **click & study** unter www.ccbuchner.de erhältlich.

1. Auflage, 1. Druck 2026

Alle Drucke dieser Auflage sind, weil untereinander unverändert, nebeneinander benutzbar.

Dieses Lehrwerk folgt den aktuellen Regelungen für Rechtschreibung und Zeichensetzung. Ausnahmen bilden Texte, bei denen künstlerische, philologische oder lizenzrechtliche Gründe einer Änderung entgegenstehen. Teile des Lehrwerks wurden mithilfe gängiger Large Language Models erstellt oder bearbeitet. Sämtliche Inhalte wurden anschließend redaktionell geprüft, überarbeitet und verantwortet. Weitere Informationen finden Sie auf www.ccbuchner.de/ki-leitlinie

Die Mediacodes enthalten ausschließlich optionale Unterrichtsmaterialien.

An keiner Stelle im Schülerbuch dürfen Eintragungen vorgenommen werden.

Auf verschiedenen Seiten dieses Buches finden sich Verweise (Links) auf Internetadressen. Haftungshinweis: Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle wird die Haftung für die Inhalte externer Seiten ausgeschlossen.

© 2026 C.C. Buchner Verlag, Bamberg

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags. Hinweis zu §§ 60 a, 60 b UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und/oder in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Fotomechanische, digitale oder andere Wiedergabeverfahren sowie jede öffentliche Vorführung, Sendung oder sonstige gewerbliche Nutzung oder deren Duldung sowie Vervielfältigung (z.B. Kopie, Download oder Streaming), Verleih und Vermietung nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Verlags.

Nutzungsvorbehalt: Die Nutzung für Text und Data Mining (§ 44 b UrhG) ist vorbehalten, insbesondere für die (Weiter-) Entwicklung und das Training jeglicher KI-Systeme. Dies betrifft nicht Text und Data Mining für Zwecke der wissenschaftlichen Forschung (§ 60 d UrhG).

produktsicherheit@ccbuchner.de

Redaktion: Mark Georger, Georg Vollmer

Layout und Satz: tiff.any GmbH & Co. KG, Berlin

Illustrationen: Jacqueline Urban, Berlin

Umschlag: tiff.any GmbH & Co. KG, Berlin

Druck und Bindung: Firmengruppe Appl, aprinta Druck, Wemding

www.ccbuchner.de

ISBN 978-3-661-61210-2

Mathematische Zeichen und Abkürzungen	6
---	---

1 Trigonometrie



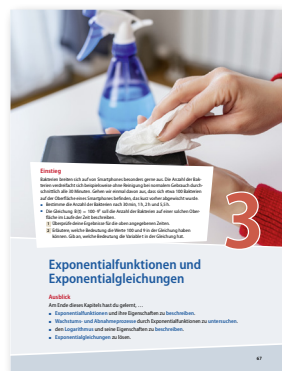
Startklar	8
Entdecken	10
1.1 Ähnlichkeit von Dreiecken	12
1.2 Besondere Verhältnisse im rechtwinkligen Dreieck	16
1.3 Sinus, Kosinus und Tangens im Alltag	22
1.4 Sinus und Kosinus in beliebigen Dreiecken	26
Auf unterschiedlichen Wegen	32
Kreuz und quer	33
Am Ziel	36
Auf einen Blick	38

2 Trigonometrische Funktionen



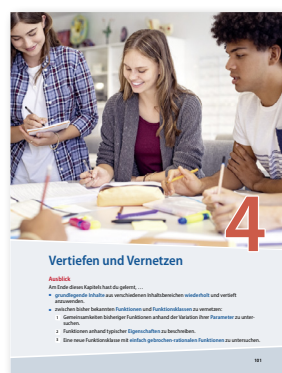
Startklar	40
Entdecken	42
2.1 Sinus am Einheitskreis	44
2.2 Das Bogenmaß	46
2.3 Die Sinusfunktion	50
2.4 Einfluss der Parameter auf die Sinusfunktion	52
2.5 Die Kosinusfunktion	56
2.6 Periodische Vorgänge im Alltag	58
Auf unterschiedlichen Wegen	60
Kreuz und quer	61
Am Ziel	64
Auf einen Blick	66

3 Exponentialfunktionen und Exponentialgleichungen



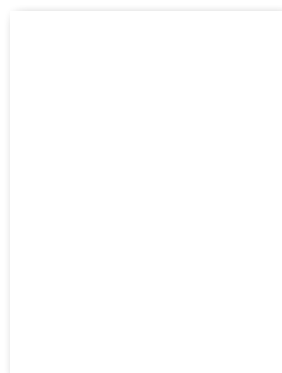
Startklar	68
Entdecken	70
3.1 Wachstumsvorgänge	72
3.2 Exponentialfunktionen	74
3.3 Einfluss der Parameter auf die Exponentialfunktion	78
3.4 Exponentialfunktionen im Alltag	82
3.5 Logarithmus	86
3.6 Anwendungen des Logarithmus	90
Auf unterschiedlichen Wegen	94
Kreuz und quer	95
Am Ziel	98
Auf einen Blick	100

4 Üben und Vertiefen



4.1 Daten und Zufall	102
4.2 Zahlbereiche und Größen.	106
4.3 Zusammenhänge in der Geometrie	110
4.4 Terme und Gleichungen.	114

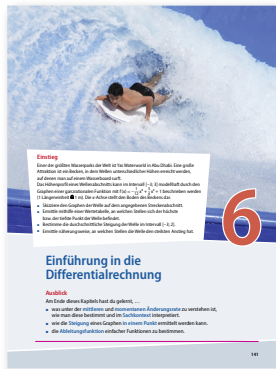
5 Funktionsklassen



Startklar	120
Entdecken	122
5.1 Biquadratische Gleichungen	124
5.2 Funktionen und die Variation ihrer Parameter	126
5.3 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten	128
5.4 Ganzrationale Funktion	132
5.5 Nullstellen	136
5.6 Symmetrie	140
5.7 Gebrochen-rationale Funktionen	142
5.8 Umkehrfunktion	146
5.9 Modellieren mit Funktionen	148

Auf unterschiedlichen Wegen	150
Kreuz und quer	151
Am Ziel.	154
Auf einen Blick	156

6 Einführung in die Differentialrechnung



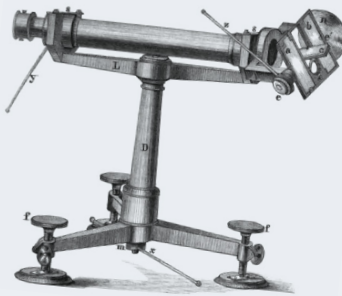
Startklar.	158
Entdecken	160
6.1 Die mittlere Änderungsrate	162
6.2 Die momentane Änderungsrate.	166
6.3 Die Ableitungsfunktion	172
6.4 Ableitungsregel I: Potenzregel.	178
6.5 Ableitungsregel II: Faktor- und Summenregel	180
Auf unterschiedlichen Wegen	184
Kreuz und quer	185
Am Ziel.	188
Auf einen Blick	190

7 Fortsetzung der Differentialrechnung

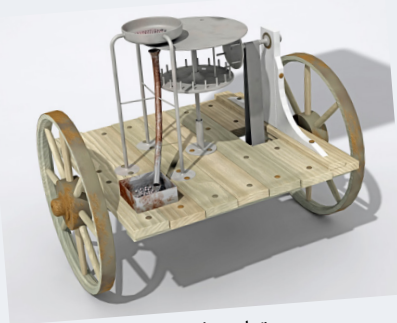


Startklar.	192
Entdecken	194
7.1 Monotonie und Monotoniesatz	196
7.2 Die erste Ableitung und ihre Bedeutung	200
7.3 Die zweite Ableitung und ihre Bedeutung	204
7.4 Besondere Punkte an Funktionen untersuchen	212
7.5 Die Differentialrechnung in Anwendungssituationen	216
Auf unterschiedlichen Wegen	220
Kreuz und quer	221
Am Ziel.	224
Auf einen Blick	226

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	$P, A, \dots$	Punkte
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	$P(x y)$	Punkt P mit den Koordinaten x und y
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen	$g, h, \dots$	Geraden, Halbgeraden (Strahlen)
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	PQ	Gerade durch die Punkte P und Q
D	Definitionsmenge	$\overline{PQ}$	Strecke mit den Endpunkten P und Q
L	Lösungsmenge	$ PQ $	Länge der Strecke $\overline{PQ}$
$\{\}$	Leere Menge	$\overrightarrow{AB}$	Halbgerade (Strahl) mit Startpunkt A, die durch B verläuft
$\{a; b; c\}$	Menge mit den Elementen a, b und c	A	Flächeninhalt
$\mathbb{Q} \setminus \{a; b\}$	Menge $\mathbb{Q}$ ohne die Elemente a und b	U	Umfangslänge
$a \in \mathbb{Q}$	a ist Element von $\mathbb{Q}$	O	Oberflächeninhalt eines Körpers
$=$	gleich	V	Volumen eines Körpers
$\approx$	ungefähr gleich	π	Kreiszahl Pi
$>$	größer als	$\perp$	orthogonal (senkrecht) zu
$\geq$	größer oder gleich	$\parallel$	parallel zu
$<$	kleiner als	$\sphericalangle$	Rechter Winkel
$\leq$	kleiner oder gleich	w_α	Winkelhalbierende
$\cong$	entspricht	r_U	Umkreisradius
a^n	Potenz: „a hoch n“	r_I	Inkreisradius
$\sqrt{a}$	Quadratwurzel aus a	$H(W)$	absolute Häufigkeit, mit der das Ergebnis vorkommt
$\sqrt[n]{a}$	n-te Wurzel aus a	$h(W)$	relative Häufigkeit, mit der das Ergebnis vorkommt
$\frac{a}{b}$	Bruch mit Zähler a und Nenner b	$\tilde{x}$	Median
$\%$	Prozent	x_{mod}	Modus
P	Prozentwert	$\bar{x}$	arithmetisches Mittel
$p\%$	Prozentsatz	Ω	Ergebnismenge eines Zufallsexperiments
$ a $	Betrag der Zahl a	E	Ereignis
$y, f(x)$	Funktionsterm	$\bar{E}$	Gegenereignis des Ereignisses E
x_0	Nullstelle einer Funktion	$P(E)$	Wahrscheinlichkeit für Ereignis E
m	Steigung einer Funktion	$P_B(A)$	bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter Bedingung B
b	y-Achsenabschnitt einer Funktion		



Heliotrop



H odometer



Einstieg

- Das aus dem Griechischen stammende Wort „Trigonometrie“ bedeutet Dreiecksmessung. Gauß, Regiomontanus und Vieta sind bekannte Mathematiker, die sich mit der Trigonometrie befassten. Die Abbildungen zeigen Bilder dieser Mathematiker, die von ihnen erfundenen Messgeräte sowie zwei der von ihnen verfassten Bücher. Ordne die Messgeräte und Bücher dem entsprechenden Mathematiker zu. Recherchiere dazu im Internet. Stelle deine Ergebnisse in der Klasse vor.

1

Trigonometrie

Ausblick

Am Ende dieses Kapitels hast du gelernt, ...

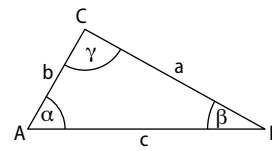
- **Winkel** und **Seitenlängen** in **rechtwinkligen** Dreiecken mithilfe von Sinus, Kosinus und Tangens zu berechnen.
- **Winkel** und **Seitenlängen** in **beliebigen** Dreiecken zu berechnen.
- Sinus, Kosinus und Tangens in **Anwendungsaufgaben** sinnvoll einzusetzen.
- den **Flächeninhalt beliebiger Dreiecke** mithilfe des **Sinus** zu berechnen.

Vorwissen

Zusammenhänge im Dreieck

In einem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180° (**Innenwinkelsummensatz im Dreieck**).

Die Summe zweier Seitenlängen eines Dreiecks ist stets größer als die Länge der dritten Seite (**Dreiecksungleichung**).



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$a + b > c$$

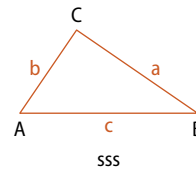
$$b + c > a$$

$$a + c > b$$

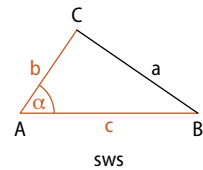
Kongruenz und Ähnlichkeit von Dreiecken

Dreiecke sind **zueinander kongruent**, wenn sie ...

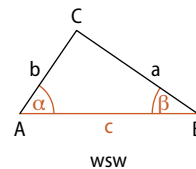
- in der Länge ihrer drei Seiten übereinstimmen (**sss**).
- in der Länge zweier Seiten und der Größe des eingeschlossenen Winkels übereinstimmen (**sws**).
- in der Länge einer Seite und der Größe der beiden anliegenden Winkel übereinstimmen (**wsw**).
- in der Länge zweier Seiten übereinstimmen und der Größe des Winkels, der der längeren Seite gegenüberliegt (**SsW**).



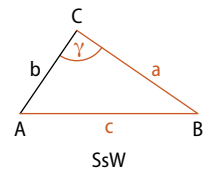
sss



sws

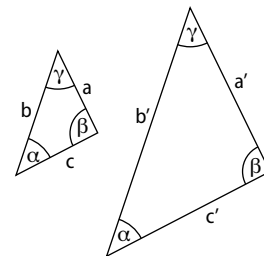


wsW



SsW

Dreiecke sind **zueinander ähnlich**, wenn sie durch maßstäbliches Vergrößern oder Verkleinern auseinander hervorgehen. Ähnliche Dreiecke stimmen in der Größe der entsprechenden Winkel sowie im Verhältnis (d. h. dem Quotienten) der entsprechenden Seitenlängen überein.



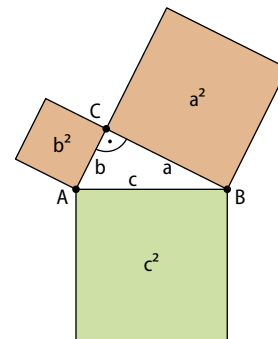
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Hypotenuse den gleichen Flächeninhalt wie die beiden Quadrate über den Katheten zusammen.

Im Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$ gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Für die Konstruktion von Dreiecken benötigt man daher drei Angaben, darunter mindestens eine Seitenlänge.


 Das kann
ich!

 Das kann ich
fast!

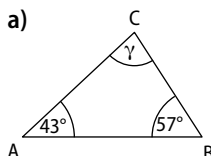
 Das kann ich
noch nicht!

Teste dich! Schau dir dazu zunächst die bereits bekannten Inhalte auf der linken Seite an. Bearbeite die Aufgaben und bewerte deine Lösungen. Die Ergebnisse findest du im Anhang.

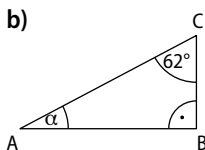
Vorwissentest

1 Berechne die fehlenden Winkel.

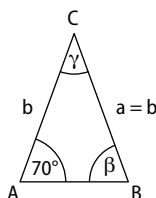
a)



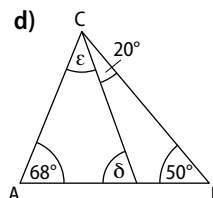
b)



c)



d)



2 Begründe, warum aus den angegebenen drei Seiten kein Dreieck entsteht.

 a) $a = 3,8 \text{ cm}$; $b = 7,2 \text{ cm}$; $c = 2,9 \text{ cm}$

 b) $a = 4,2 \text{ cm}$; $b = 5,3 \text{ cm}$; $c = 9,5 \text{ cm}$

3 Entscheide, ob aus den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruiert werden kann. Begründe durch die Angabe des Kongruenzsatzes und konstruiere das Dreieck.

 a) $b = 5 \text{ cm}$; $\alpha = 94^\circ$; $\beta = 86^\circ$

 b) $a = 4 \text{ cm}$; $b = 5 \text{ cm}$; $c = 6 \text{ cm}$

 c) $a = 4,5 \text{ cm}$; $b = 6 \text{ cm}$; $\gamma = 80^\circ$

 d) $b = 6,2 \text{ cm}$; $\alpha = 57^\circ$; $\beta = 73^\circ$

 e) $a = 5,8 \text{ cm}$; $b = 4,6 \text{ cm}$; $\alpha = 72^\circ$

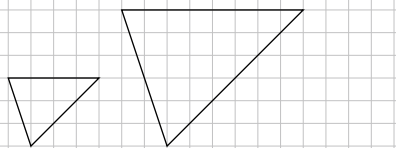
 f) $c = 6 \text{ cm}$; $b = 4 \text{ cm}$; $\beta = 50^\circ$

4 Überprüfe, ob die Dreiecke ähnlich zueinander sind.

a)

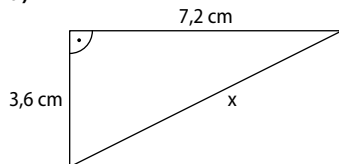


b)

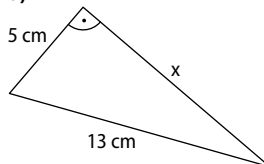


5 Berechne jeweils die Länge der Strecke x .

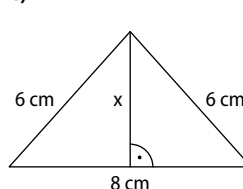
a)



b)



c)



Ich kann ...	Aufgabe	Bewertung
Winkelgrößen im Dreieck berechnen.	1	
die Kongruenzsätze anwenden.	2, 3	
ähnliche Dreiecke erkennen.	4	
den Satz des Pythagoras anwenden.	5	

Landvermessung

Daniel Kehlmann:

Die Vermessung der Welt

„So fand er (Gauß) sich unversehens durch die verregnete Landschaft stolpern. Der Himmel war niedrig und dunkel, die Erde lehmig. Er kletterte über eine Hecke und stand keuchend, verschwitzt und bestreut mit Kiefernadeln vor zwei Mädchen. Gefragt, was er hier tue, erklärte er nervös die Technik der Triangulation: Wenn man eine Seite und zwei Winkel eines Dreiecks kenne, könne man die anderen Seiten und den unbekannten Winkel bestimmen. Man wähle also ein Dreieck irgendwo hier draußen auf Gottes Erde, messe die Seite, zu der man am leichtesten Zugang habe, und bestimme mit diesem Gerät die Winkel zum dritten Punkt. Er hob den Theodolit und drehte ihn, so und so, und sehen Sie, so, mit ungeschickten Fingern hin und her, als wäre es das erste Mal. Dann füge man die Serie solcher Dreiecke aneinander. Ein preußischer Forscher tue genau das in diesem Moment unter den Fabelwesen der Neuen Welt.

Aber eine Landschaft, erwiderte die größere der beiden, sei doch keine Fläche?

Er starrte sie an. Die Pause hatte gefehlt. Als hätte sie nicht nachdenken müssen. Allerdings nicht, sagte er lächelnd.

Ein Dreieck, sagte sie, habe nur auf einer Fläche hundertachtzig Grad Winkelsumme, auf einer Kugel aber nicht. Damit stehe und falle doch alles.

Er musterte sie, als sähe er sie erst jetzt. Mit hochgezogenen Brauen erwiderte sie seinen Blick. Ja, sagte er.

So. Um das auszugleichen, müsse man die Dreiecke gewissermaßen nach der Messung zu unendlich kleinen Größen schrumpfen lassen. Grundsätzlich eine einfache Differentialoperation. Allerdings in dieser Form ...

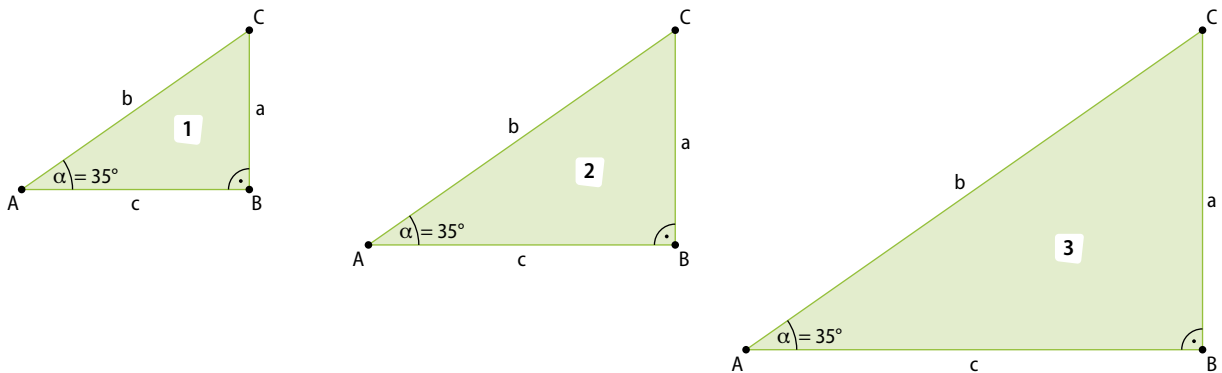
Er setzte sich auf den Boden und holte seinen Block hervor. In dieser Form, murmelte er, während er zu notieren begann, habe das noch keiner durchgeführt. Als er aufsaß, war er allein.

Ein paar Wochen noch zog er mit den geodätischen Gerätschaften durchs Gelände, rammte Pfähle in den Boden, vermaß ihre Entfernung.“

Copyright © 2005 Rowohlt Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg

- Beschreibe die Landvermessung mit eigenen Worten.
- Recherchiere, was für ein Instrument ein Theodolit ist. Erstelle dazu einen Steckbrief.
- Von einem Dreieck sind folgende Größen bekannt: $c = 8,4 \text{ km}$, $\alpha = 52^\circ$ und $\beta = 41^\circ$. Bestimme die fehlenden Seiten des Dreiecks ABC.
- Informiere dich über die Innenwinkelsumme eines Dreiecks auf einer Kugel, und stelle deine Ergebnisse in der Klasse vor.





Du siehst verschiedene rechtwinklige Dreiecke abgebildet, die alle den gleichen Winkel $\alpha = 35^\circ$ haben.

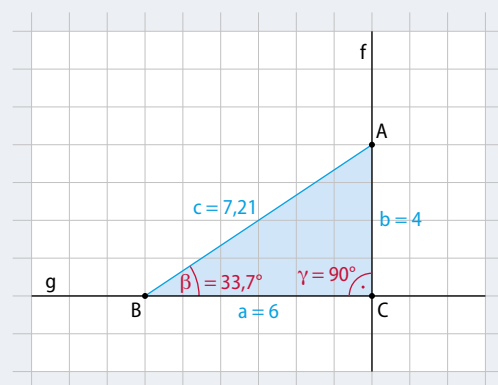
- Begründe, dass alle Dreiecke zueinander ähnlich sind.
- Übertrage die unten abgebildete Tabelle in dein Heft und trage für jedes Dreieck die angegebenen Streckenverhältnisse ein.
- Zeichne verschiedene rechtwinklige Dreiecke mit $\alpha = 50^\circ$ in dein Heft und untersuche ebenso die angegebenen Streckenverhältnisse.
- Beschreibe Zusammenhänge zwischen den Streckenverhältnissen für einen Winkel α . Erkläre die Zusammenhänge.

		$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$\frac{a}{c}$
$\alpha = 35^\circ$	Dreieck 1			
	Dreieck 2			
	Dreieck 3			
$\alpha = 50^\circ$	Dreieck 1			
	...			

Medien & Werkzeuge

Digital vermessen

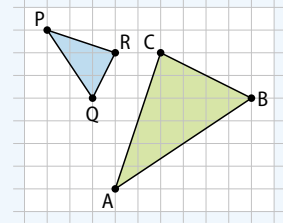
- Konstruiere mit einem dynamischen Geometrie-programm ein rechtwinkliges Dreieck, das auch beim Verschieben in C rechtwinklig bleibt.
- Untersuche mithilfe eines solchen Dreiecks die Verhältnisse von je zwei Seitenlängen zueinander bei Verschiebung des Dreiecks in C. Du kannst auch die Rechenfunktion des Programms nutzen.
- Untersuche die Seitenverhältnisse auch für verschiedene Winkel β .
- Fasse deine Beobachtungen stichwortartig zusammen.



Entdecken

Leah will mit einer dynamischen Geometriesoftware die Ähnlichkeitsabbildung finden, die das grüne Dreieck in das blaue Dreieck überführt.

- Erläutere die Schritte, die Leah ausführen muss, damit aus dem grünen Dreieck das blaue entsteht. Probiere mit einer dynamischen Geometriesoftware aus, wenn möglich.
- Beschreibe die gemeinsamen Eigenschaften der Dreiecke.



Verstehen

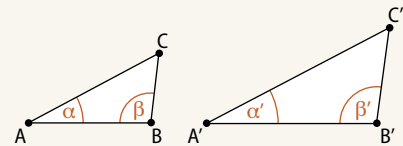
Du weißt, dass ähnliche Figuren die gleiche Form besitzen und in der Größe entsprechender Winkel sowie im Verhältnis einander entsprechender Seitenlängen übereinstimmen. Für ähnliche Dreiecke hast du dazu mit den Ähnlichkeitssätzen genaue Zusammenhänge untersucht.

Merke

Ähnlichkeitssatz www

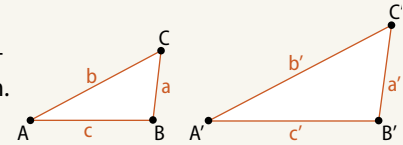
Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den Maßen zweier Winkel übereinstimmen.

Beispiel: $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$

**Ähnlichkeitssatz sss**

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den Verhältnissen der Längen ihrer drei Seiten übereinstimmen.

Beispiel: $a : b : c = a' : b' : c'$



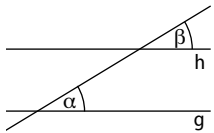
Zur Unterscheidung bezeichnet man Kongruenzsätze im Allgemeinen mit Großbuchstaben, Ähnlichkeitssätze mit Kleinbuchstaben.

Beispiele

Geometrische Grundbegriffe:

$\overline{AB}$: Strecke mit Anfangspunkt A und Endpunkt B.

Stufenwinkel:



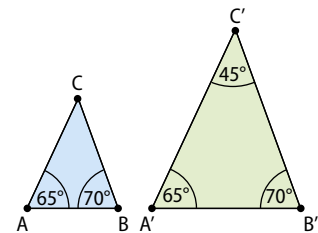
wenn $g \parallel h$, dann $\alpha = \beta$

Bei der **zentrischen Streckung** werden Figuren vergrößert oder verkleinert, wobei die Seitenverhältnisse unverändert bleiben.

- I. Zeichne ein Dreieck ABC mit $\alpha = 65^\circ$ und $\beta = 70^\circ$ sowie ein Dreieck A'B'C' mit $\alpha' = 65^\circ$ und $\gamma' = 45^\circ$. Sind die beiden Dreiecke ähnlich? Begründe.

Lösung:

Wegen $\beta' = 180^\circ - 65^\circ - 45^\circ = 70^\circ$ stimmen die Dreiecke in den Maßen zweier Winkel überein. Sie sind also ähnlich nach dem Ähnlichkeitssatz www.



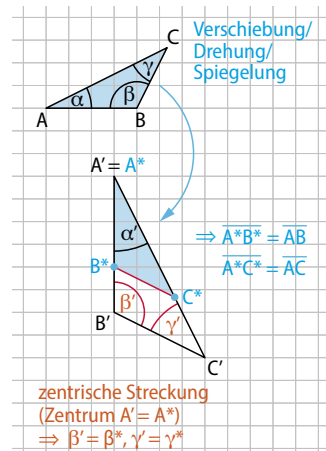
- II. Begründe, dass du bei ähnlichen Dreiecken stets eine Ähnlichkeitsabbildung finden kannst.

Lösung:

Wegen $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ folgt: $\gamma = \gamma'$.

- 1 Da $\alpha = \alpha'$, kann das Dreieck $\triangle ABC$ **so verschoben, gedreht und gespiegelt** werden, dass das Dreieck $\triangle A^*B^*C^*$ entsteht und gilt: $A' = A^*$, B^* liegt auf der Strecke $\overline{A'B'}$ und C^* liegt auf der Strecke $\overline{A'C'}$.

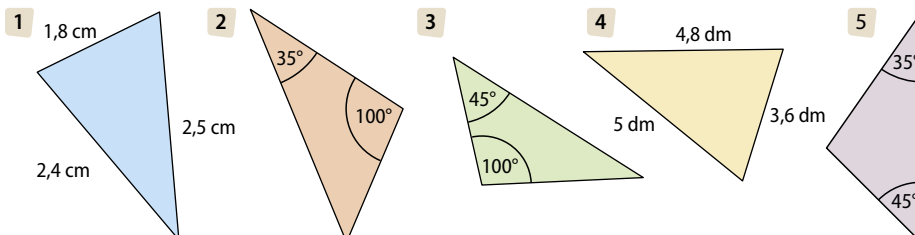
- 2 Es gilt: $\alpha^* = \alpha = \alpha'$, $\beta^* = \beta = \beta'$ und $\gamma^* = \gamma = \gamma'$. Da β^* und β' sowie γ^* und γ' jeweils Stufenwinkel zueinander sind, ist $\overline{B^*C^*} \parallel \overline{B'C'}$. $\triangle A^*B^*C^*$ kann also durch eine **zentrische Streckung** (Zentrum $A' = A^*$) in $\triangle A'B'C'$ überführt werden.



Nachgefragt

- Begründe, dass in Dreiecken lediglich zwei Winkel übereinstimmen müssen, damit die betrachteten Dreiecke zueinander ähnlich sind.

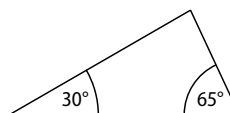
1 Begründe, welche der abgebildeten Dreiecke zueinander ähnlich sind.



Aufgaben

2 In einem Dreieck ABC sind zwei der Innenwinkel 30° und 65° groß. Gegeben sind weiterhin zwei Innenwinkel eines weiteren Dreiecks. Prüfe auf Ähnlichkeit, ohne die Dreiecke zu zeichnen.

- a) $65^\circ; 85^\circ$ b) $85^\circ; 45^\circ$ c) $30^\circ; 95^\circ$ d) $85^\circ; 30^\circ$



Weiterdenken

Es gibt weitere Zusammenhänge bei ähnlichen Dreiecken:

Ähnlichkeitssatz sws

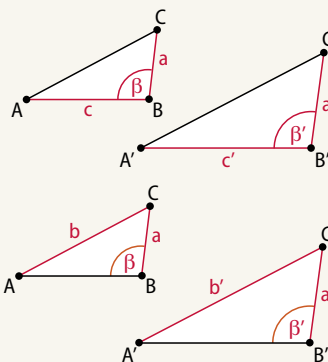
Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in den Verhältnissen der Längen zweier Seiten und im Maß des von ihnen eingeschlossenen Winkels übereinstimmen.

Beispiel: $a : c = a' : c'$ und $\beta = \beta'$

Ähnlichkeitssatz Ssw

Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in den Verhältnissen der Längen zweier Seiten und im Maß des Gegenwinkels der größeren Seite übereinstimmen.

Beispiel: $a : b = a' : b'$ und $\beta = \beta'$



3 Überprüfe die Dreiecke ABC und A'B'C' auf Ähnlichkeit.

- | | |
|---|---|
| a) $\alpha = 57^\circ; b = 8 \text{ cm}; c = 12 \text{ cm}$ | $\alpha' = 57^\circ; b' = 16 \text{ cm}; c' = 24 \text{ cm}$ |
| b) $\alpha = 70^\circ; \beta = 50^\circ; c = 35 \text{ mm}$ | $\beta' = 50^\circ; \gamma' = 80^\circ; b' = 6,7 \text{ cm}$ |
| c) $b = 6,4 \text{ cm}; c = 2,5 \text{ cm}; \beta = 34^\circ$ | $b' = 24,32 \text{ cm}; c' = 9,5 \text{ cm}; \beta' = 34^\circ$ |

4 Die Dreiecke ABC und A'B'C' sind ähnlich. Berechne fehlende Seitenlängen.

- | | |
|---|------------------------|
| a) $a = 5 \text{ cm}; b = 4,4 \text{ cm}; c = 5,6 \text{ cm}$ | $a' = 12,5 \text{ cm}$ |
| b) $a = 25 \text{ mm}; b = 45 \text{ mm}; c = 55 \text{ mm}$ | $c' = 11 \text{ mm}$ |
| c) $b = 45 \text{ m}; a' = 38 \text{ mm}; b' = 5 \text{ cm}$ | $c' = 0,65 \text{ dm}$ |

5 **Nachgefragt:** Begründe, dass gleichseitige Dreiecke immer zueinander ähnlich sind.

Alles klar?

6

Mathematik und Sprache: Fachsprache im Alltag

Pascal war im Mathematikunterricht zwei Wochen nicht da und hat den Einstieg in das Thema „Ähnlichkeit“ verpasst. Nun hat er viele Fragen. Beantworte ihm diese ausführlich.

Was ist eigentlich der Unterschied zwischen kongruent und ähnlich?

Sind gleichseitige Dreiecke immer automatisch ähnlich zueinander?

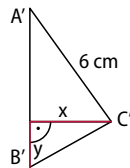
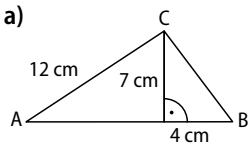
Was bedeutet eigentlich „... wenn sie in den Verhältnissen der Längen zweier Seiten übereinstimmen?“

Gibt es auch einen Ähnlichkeitssatz wsw?

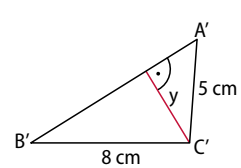
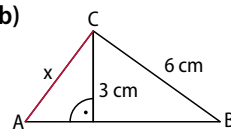
Was bedeutet der Ähnlichkeitssatz sss und warum gibt es den nicht als Kongruenzsatz SSS?

- 7 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Berechne die Längen der Strecken x und y für die Dreiecke.

a)

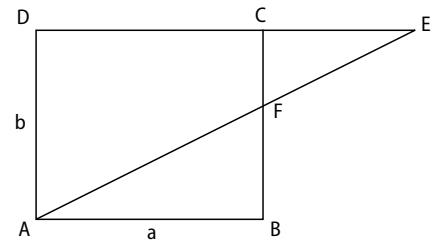


b)



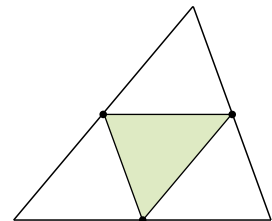
Mehr Anwendungsaufgaben zur Ähnlichkeit findest du hier:

- 8 Das Rechteck ABCD in der nebenstehenden Zeichnung ist $|\overline{AB}| = 6$ cm lang und 5 cm breit. Das Dreieck ABF nimmt 30% der Rechtecksfläche ein. Berechne, welchen Flächeninhalt das Dreieck AED besitzt.



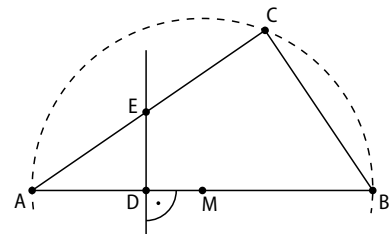
- 9 Verbindet man in einem Dreieck die Mittelpunkte der Dreiecksseiten, so erhält man das sogenannte **Mittendreieck**.

- a) Begründe: Das Mittendreieck und das Ausgangsdreieck sind ähnlich.
b) Triff eine begründete Aussage über den Flächeninhalt des Mittendreiecks.



- 10 Begründe, dass die Dreiecke ABC und ADE zueinander ähnlich sind.

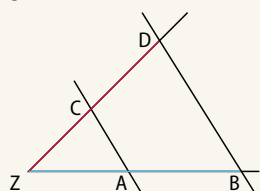
- 11 Zeichne ein Dreieck ABC mit Seitenverhältnissen $a : b : c = 3 : 4 : 6$ und Umfang $u = 10,4$ cm. Beschreibe dein Vorgehen.



Weiterdenken

Werden zwei sich in Z schneidende Geraden von zwei Parallelen geschnitten, ...

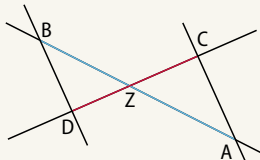
- so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Geraden zueinander wie die gleich liegenden Abschnitte auf der anderen (1. Strahlensatz).



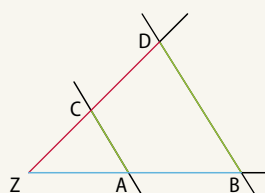
$$\frac{|ZA|}{|ZB|} = \frac{|ZC|}{|ZD|}$$

oder

$$\frac{|ZA|}{|AB|} = \frac{|ZC|}{|CD|}$$



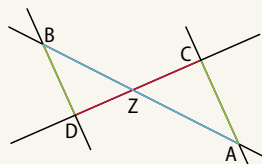
- so verhalten sich die parallelen Abschnitte zueinander wie die zugehörigen Abschnitte auf ein und derselben Geraden (2. Strahlensatz). Dabei liegen die zugehörigen Abschnitte immer auf derselben Geraden und beginnen in Z.



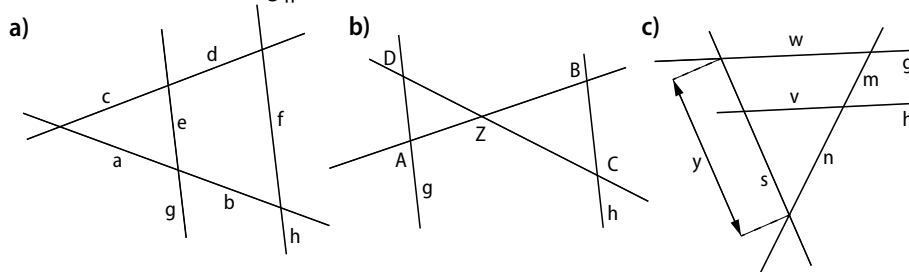
$$\frac{|ZA|}{|ZB|} = \frac{|AC|}{|BD|}$$

oder

$$\frac{|ZC|}{|ZD|} = \frac{|AC|}{|BD|}$$



- 12 Gib mithilfe der Strahlensätze möglichst viele Verhältnisse zwischen den Streckenabschnitten an ($g \parallel h$).



- 13 a) Bei Strahlensatzfiguren müssen Bruch- bzw. Verhältnissgleichungen gelöst werden. Bestimme die Lösungen folgender Gleichungen. Was fällt dir auf?

1 $\frac{x}{12} = \frac{20}{30}$

2 $\frac{20}{x} = \frac{30}{12}$

3 $\frac{12}{30} = \frac{x}{20}$

4 $\frac{30}{20} = \frac{12}{x}$

- b) Löse die Gleichung.

1 $\frac{5}{9} = \frac{x}{27}$

2 $\frac{6}{y} = \frac{45}{135}$

3 $\frac{12,5}{36} = \frac{17,5}{x}$

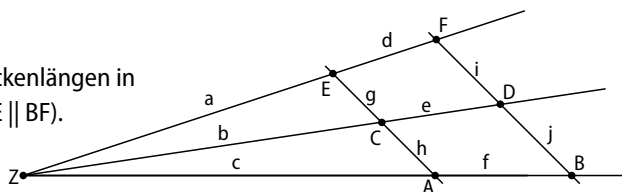
4 $\frac{z}{17,5} = \frac{22,2}{8,4}$

5 $\frac{0,5}{x} = \frac{2,25}{6,3}$

6 $\frac{17,5}{3} = \frac{210}{x}$

Lösungen zu 13 b):
1, 4; 15; 18; 36; 46,25;
50,4

- 14 Berechne die restlichen Streckenlängen in der nachstehenden Figur ($AE \parallel BF$).



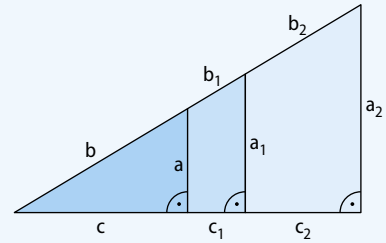
a) $a = 4 \text{ cm}; b = 5 \text{ cm}; c = 7,5 \text{ cm}; d = 2,5 \text{ cm}; g = 2 \text{ cm}; j = 5 \text{ cm}$

b) $a = 3,2 \text{ cm}; c = 4 \text{ cm}; e = 6,5 \text{ cm}; f = 8 \text{ cm}; h = 1,8 \text{ cm}; i = 3 \text{ cm}$

Lösungen zu 14:
1; 3,08; 3,125; 3,25; 3,25;
4,6875; 5,4; 6,4

Entdecken

- Beschreibe die Zusammenhänge bei den Seitenverhältnissen der rechtwinkligen Dreiecke.
- Betrachte dabei vor allem die Verhältnisse, in denen die Hypotenuse beteiligt ist.

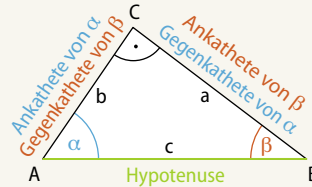


Verstehen

In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Seitenverhältnisse eindeutig durch einen der beiden spitzen Winkel festgelegt.

Merke

Diejenige Kathete, die am entsprechenden spitzen Winkel anliegt, heißt **Ankathete**, diejenige, die diesem Winkel gegenüberliegt **Gegenkathete**.



- 1 Das Verhältnis der Längen von **Gegenkathete zu Hypotenuse** eines spitzen Winkels α nennt man **Sinus** des Winkels α (man schreibt: $\sin(\alpha)$):

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Länge der Gegenkathete des Winkels } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

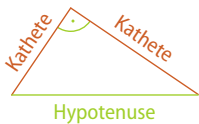
Beispiel: $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$; $\sin(\beta) = \frac{b}{c}$

- 2 Das Verhältnis der Längen von **Ankathete zu Hypotenuse** eines spitzen Winkels α nennt man **Kosinus** des Winkels α (man schreibt: $\cos(\alpha)$):

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Länge der Ankathete des Winkels } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

Beispiel: $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$; $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$

Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck:



Man spricht:
„Sinus von α “ oder
„Sinus α “

„Kosinus von α “ oder
„Kosinus α “

Beispiele

- I. Gib das Verhältnis der Seitenlängen an.

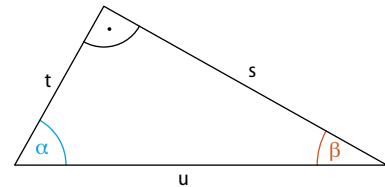
a) $\sin(\alpha)$
 $\sin(\beta)$

b) $\cos(\alpha)$
 $\cos(\beta)$

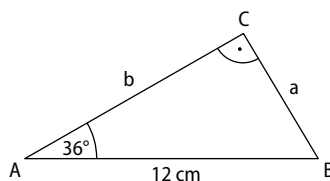
Lösung:

a) $\sin(\alpha) = \frac{s}{u}$
 $\sin(\beta) = \frac{t}{u}$

b) $\cos(\alpha) = \frac{t}{u}$
 $\cos(\beta) = \frac{s}{u}$



- II. Berechne für das rechtwinklige Dreieck ABC die fehlenden Seitenlängen a und b.



Lösung: 1 $\frac{a}{12 \text{ cm}} = \sin(36^\circ)$ | $\cdot 12 \text{ cm}$
 $a = \sin(36^\circ) \cdot 12 \text{ cm}$

$a \approx 7,1 \text{ cm}$

2 $\frac{b}{12 \text{ cm}} = \cos(36^\circ)$ | $\cdot 12 \text{ cm}$

$b = \cos(36^\circ) \cdot 12 \text{ cm}$

$b \approx 9,7 \text{ cm}$

Taschenrechner:

Sinus:

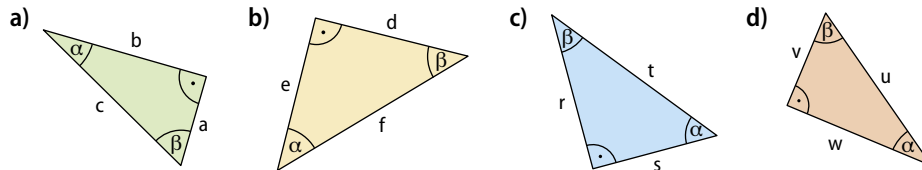
Kosinus:

Einstellung: DEG bzw. Grad

Nachgefragt

- Beschreibe, wie sich der Wert des Sinus eines Winkels verändert, wenn man beim rechtwinkligen Dreieck die Längen aller Seiten verdoppelt, verdreifacht, ...
- Erkläre, warum eine Seite eines rechtwinkligen Dreiecks gleichzeitig Ankathete und Gegenkathete sein kann.

1 Gib als Verhältnis der Seitenlängen an: $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$, $\cos(\alpha)$ und $\cos(\beta)$.

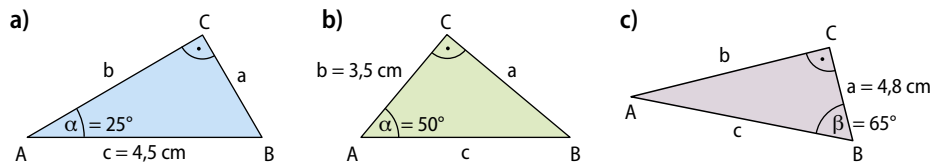


Aufgaben

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin(\alpha)$										
$\cos(\alpha)$										

- Übertrage die Tabelle und berechne die Werte mit dem Taschenrechner.
- Beschreibe Zusammenhänge zwischen den Werten von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$.

3 Berechne die fehlenden Seitenlängen.



4 Bisher hast du Werte von $\sin(\alpha)$ bzw. $\cos(\alpha)$ berechnet und durch Umformung die Seitenlängen bestimmt. Du kannst bei gegebenen Seitenlängen aber auch die Winkel bestimmen.

Beispiel:

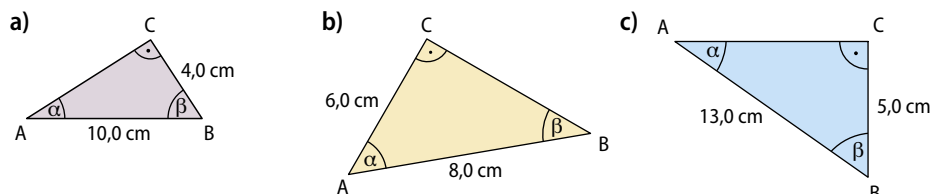
Die Gegenkathete zum Winkel α sei 3 cm lang, die Hypotenuse 4 cm.
Berechne den Winkel α .

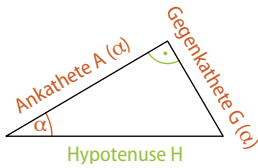
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{3 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 0,75 \quad | \sin^{-1}$$

$$\alpha = \sin^{-1}(0,75) \approx 48,6^\circ$$

$\sin^{-1}$ und $\cos^{-1}$ sind jeweils die **Umkehrung** von $\sin$ und $\cos$. Mit ihr erhält man direkt den Winkel α , wenn nur $\sin(\alpha)$ bzw. $\cos(\alpha)$ bekannt sind.
Vergleiche: $\sqrt{\quad}$ ist die Umkehrung des Quadrierens.

Berechne die fehlenden Winkel.





Gib verschiedene Lösungsmöglichkeiten an.

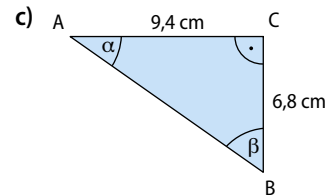
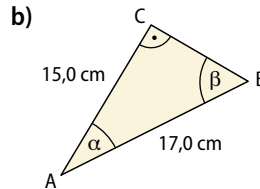
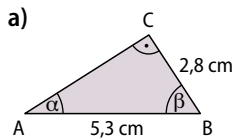
5 Übertrage die Tabelle in dein Heft und berechne die fehlenden Werte.

	a)	b)	c)	d)	e)
H	6,0 cm	72 mm			11,0 cm
G(α)		50 mm	5,6 cm	8,0 dm	8,0 cm
A(α)	4,0 cm		3,4 cm	45 cm	
α	48,2°	44°		60,6°	
β			31,3°		90°
γ	90°	90°		90°	43,3°
$\sin(\alpha)$					
$\cos(\alpha)$					

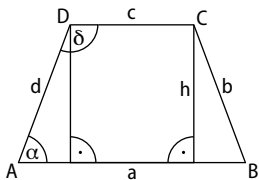
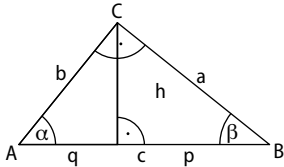
Alles klar?

Tipp: Seitenlängen von rechtwinkligen Dreiecken kann man manchmal auch mit dem Satz des Pythagoras berechnen.

6 Berechne die fehlenden Winkel.



7 **Nachgefragt:** Begründe: Der 1 Sinuswert 2 Kosinuswert eines Winkels am rechtwinkligen Dreieck ist nie größer als 1.



8 Berechne die fehlenden Angaben für das abgebildete Dreieck ABC.

- a) $p = 4,9$ cm; $\beta = 70^\circ$ b) $h = 4,2$ cm; $\alpha = 35^\circ$
 c) $a = 12,5$ cm; $p = 4,4$ cm d) $h = 9,1$ cm; $q = 6,0$ cm

9 Berechne die fehlenden Größen für das abgebildete Trapez ABCD mit $b = d$.

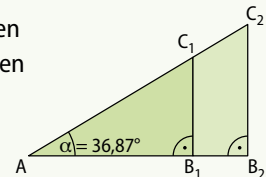
- a) $a = 37,2$ cm; $c = 15,8$ cm; $\alpha = 62^\circ$ b) $a = 24$ cm; $b = 9$ cm; $\alpha = 64,8^\circ$
 c) $b = 61$ cm; $c = 37$ cm; $h = 17$ cm d) $d = 4,5$ cm; $a = 8$ cm; $\alpha = 63^\circ$

10 **Argumentieren und Begründen**

- a) Begründe, dass alle rechtwinkligen Dreiecke, die denselben Winkel α haben, in dem Winkel übereinandergelegt werden können. In der Abbildung siehst du ein Beispiel dafür.
 b) Beweise mithilfe der Abbildung die Zusammenhänge von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für rechtwinklige Dreiecke.

Idee:

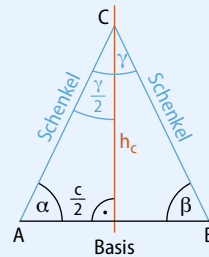
- Probiere für verschiedene rechtwinklige Dreiecke, die alle denselben Winkel α haben, das Aufeinanderlegen aus.
- Untersuche die gegenseitige Lage der Seiten. Wende bekannte Zusammenhänge an.
- Begründe, weshalb du dieselbe Überlegung für alle rechtwinkligen Dreiecke machen kannst, die gleiche Innenwinkel haben.



11

Die Berechnung von **Streckenlängen** und **Winkeln in gleichschenkligen Dreiecken** kann man auf die Berechnung in rechtwinkligen Dreiecken zurückführen. Dazu zerlegt man das gleichschenklige Dreieck durch die Symmetrieachse in zwei kongruente, rechtwinklige Dreiecke.

Du kennst bereits den **Basiswinkelsatz** für gleichschenklige Dreiecke: Die Basiswinkel in einem gleichschenkligen Dreieck sind gleich groß.



Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis c.
Berechne jeweils die fehlenden Seitenlängen, Winkel und die Höhe h_c .

- a) $a = 6 \text{ cm}$; $\gamma = 120^\circ$ b) $c = 4,5 \text{ cm}$; $\gamma = 42^\circ$ c) $b = 1,8 \text{ cm}$; $c = 2,9 \text{ cm}$

12

Im gleichschenkligen Dreieck ABC gilt $a = b$; $c = 6,4 \text{ cm}$ und $\alpha = 64^\circ$.

- Konstruiere das Dreieck ABC.
- Berechne die Schenkellängen und die Höhe h_c des Dreiecks.
- Bestimme auf zwei verschiedene Arten den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. Beschreibe dein Vorgehen.

13

Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC.

Stelle eine Formel zur Berechnung der Länge der Basis auf, wenn ...

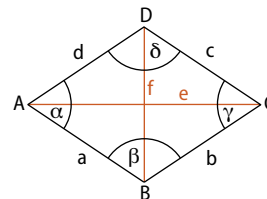
- c die Basis ist und a , b und γ bekannt sind.
- a die Basis ist und b , c und α bekannt sind.
- b die Basis ist und a , c und β bekannt sind.

14

Von einer Raute sind die folgenden Teilstücke bekannt.

Berechne jeweils den Flächeninhalt und den Umfang.

- $a = 7,5 \text{ cm}$; $\alpha = 120^\circ$ b) $e = 8 \text{ cm}$; $\beta = 100^\circ$
- $e = 12 \text{ cm}$; $\gamma = 40^\circ$ d) $f = 9 \text{ cm}$; $\alpha = 110^\circ$

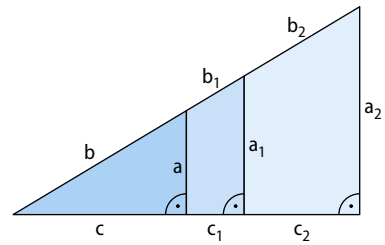


15

Quadrat	Rechteck	gleichseitiges Dreieck
$a = 4 \text{ cm}$	$a = 56 \text{ mm}$ $b = 4,3 \text{ cm}$	$a = 5,2 \text{ cm}$
allgemein: $d = \sqrt{2} \cdot a$	allgemein: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$	allgemein: $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$

- Bestimme die Länge der rot markierten Strecke.
- Leite die Formeln zur Berechnung der „roten“ Strecken her.

- 16 Bisher haben wir vor allem die Streckenverhältnisse betrachtet, bei denen die Hypotenuse beteiligt ist. Beschreibe den Zusammenhang zwischen den Katheten der rechtwinkligen Dreiecke, die ähnlich zueinander sind.

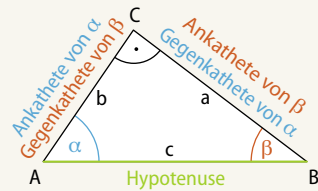


Weiterdenken

Das Verhältnis der Länge der Gegenkathete zur Ankathete eines spitzen Winkels α in einem rechtwinkligen Dreieck nennt man den **Tangens** des Winkels α (und schreibt: $\tan(\alpha)$):

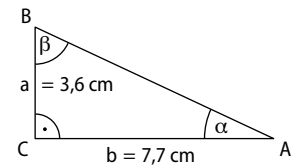
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Länge der Gegenkathete des Winkels } \alpha}{\text{Länge der Ankathete des Winkels } \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\tan(\beta) = \frac{\text{Länge der Gegenkathete des Winkels } \beta}{\text{Länge der Ankathete des Winkels } \beta} = \frac{b}{a}$$



- 17 Erkläre die Lösungswege von Victor für die folgenden Aufgaben.

- Berechne den Tangens der Winkel α und β im gegebenen rechtwinkligen Dreieck ABC.
- Bestimme dann die Größe von α und β mit dem Taschenrechner.



Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } \tan(\alpha) &= \frac{a}{b} = \frac{3,6 \text{ cm}}{7,7 \text{ cm}} = \frac{36}{77} \\ \tan(\beta) &= \frac{b}{a} = \frac{7,7 \text{ cm}}{3,6 \text{ cm}} = \frac{77}{36} \end{aligned}$$

b) Den Winkel erhältst du mit der Umkehrung $\tan^{-1}$.

$$\tan^{-1}\left(\frac{36}{77}\right) \approx 25 \Rightarrow \alpha = 25^\circ$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{77}{36}\right) \approx 65 \Rightarrow \beta = 65^\circ$$

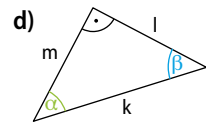
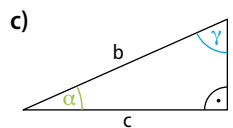
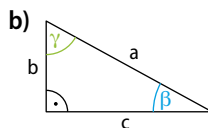
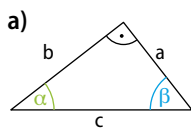
Taschenrechner:

Tangens: $\tan$

Einstellung: DEG bzw. Grad

Umkehrung: $\tan^{-1}$

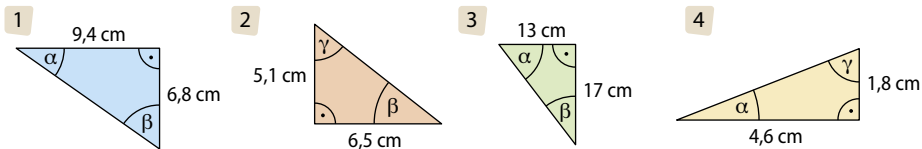
- 18 Gib zu jedem markierten Winkel den Tangens als Verhältnis der Seitenlängen an.



- 19 Berechne $\tan(\alpha)$ und $\tan(\beta)$ für das Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$. Runde geeignet.

- $a = 8,3 \text{ cm}$; $b = 6,7 \text{ cm}$
- $a = 73 \text{ mm}$; $b = 113 \text{ mm}$
- $a = 12,4 \text{ m}$; $b = 19,8 \text{ m}$

- 20 a) Berechne die Größen der spitzen Winkel mit deinem Taschenrechner.



- b) Beschreibe, wie sich $\tan(\alpha)$ verändert, wenn sich α verdoppelt bzw. verdreifacht. Betrachte dabei verschiedene Größenordnungen für α zwischen 0° und 90° .

- 21 Übertrage die Tabelle in dein Heft und berechne die fehlenden Werte.

	a	b	c	α	β	γ
a)	1,9 cm	18,1 cm			90°	
b)			10,2 cm	90°		38°
c)	12,3 cm				90°	63°

Lösungen zu 21:

6° ; 27° ; 52° ; 84° ; 13,1;
16,6; 18,0; 21,7; 24,1

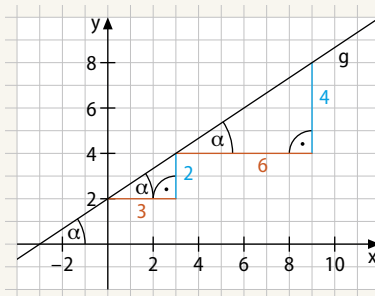
Weiterdenken

Bei allen zu einer Geraden (oder Strecke) gehören den Steigungsdreiecken ist das Verhältnis m der **Gegenkathete** zur **Ankathete** stets gleich groß.

$$m = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Du kennst dieses Verhältnis bereits als „Steigung m “ einer linearen Funktion. Die Steigung hängt nur vom Steigungswinkel α ab.

Es gilt: $\tan(\alpha) = m$

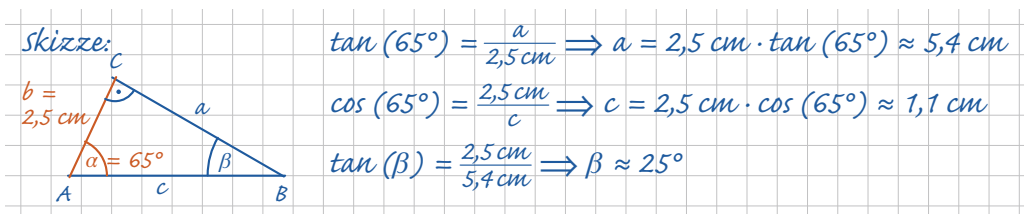


- 22 Begründe den Zusammenhang $\tan(\alpha) = m$ mit eigenen Worten. Veranschauliche an einem Beispiel.

- 23 Bestimme jeweils den Steigungswinkel α der Geraden.

a) $y = 2x - 1$ b) $y = -\frac{2}{3}x + 1$ c) $y = 4,5x - 1$ d) $y = -\frac{1}{2}x$

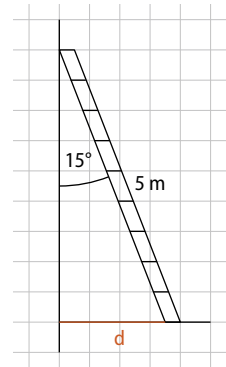
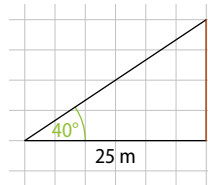
- 24 Von einem Dreieck mit $\gamma = 90^\circ$ sind die Seitenlänge $b = 2,5$ cm und der Winkel $\alpha = 65^\circ$ gegeben. Malik berechnet die fehlenden Seitenlängen und den fehlenden Winkel.



- a) Zeige, wie man am Ergebnis erkennen kann, dass die Rechnung fehlerhaft ist.
b) Gib eine Möglichkeit an, wie Malik den Winkel β einfacher bestimmen kann.

Aufgaben

- 1 Skizzen helfen weiter ... hier passt aber noch nicht alles zusammen. Ordne die passende Skizze der Aufgabe zu. Wenn es keine passende Zuordnung gibt, ergänze die fehlende Aufgabe bzw. Skizze.



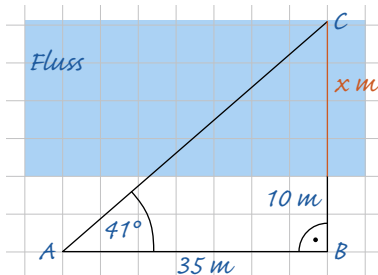
Ein Tannenbaum wirft einen 25 m langen Schatten. Die Sonnenstrahlen treffen unter einem Winkel von 31° auf die Erde.

Die Zugbrücke einer Burg ist 8 m lang und hat zwischen der Mauer und der Kette einen Winkel von 40° .

- 2 Gegeben ist die folgende Aufgabe mit verschiedenen Lösungen:

Zur Messung der Breite eines Flusses zieht man eine Standlinie von A nach B so, dass bei B durch Peilung des Punktes C auf der anderen Flussseite ein rechter Winkel entsteht. Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ beträgt 35 m, der Punkt B ist 10 m vom Fluss entfernt und $\alpha = 41^\circ$. Bestimme die Breite des Flusses ...

- 1 durch eine maßstäbliche Zeichnung. 2 rechnerisch.



Der Fluss ist etwa 2 cm breit. Das entspricht 20 m in der Wirklichkeit.

$$\tan(41^\circ) = \frac{x + 10}{35}$$

$$0,869 \approx \frac{x + 10}{35}$$

$$0,869 \cdot 35 \approx x + 10$$

$$30,415 \approx x + 10$$

$$x \approx 20,4$$

Der Fluss ist ungefähr 20,4 m breit.

- a) Erkläre einer Partnerin oder einem Partner das Vorgehen bei den beiden verschiedenen Lösungen mit eigenen Worten.
b) Erstellt für jede Lösung einen Plan mit den verschiedenen Lösungsschritten.

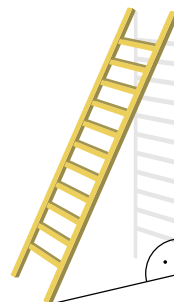
- 3 Ein Baum wirft einen 19,5 m langen Schatten. Die Sonnenstrahlen treffen unter einem Winkel von 52° auf den Boden.
- Fertige eine passende Skizze an.
 - Bestimme die Höhe des Baumes.
 - Der Baum ist eine ausgewachsene Linde. Recherchiere, ob dein Ergebnis realistisch ist.



- 4 Eine Treppe wird so gebaut, dass die Stufen 22 cm hoch und 31 cm tief sind. Bestimme, wie groß der Neigungswinkel α des Treppengeländers ist. Skizziere die beschriebene Situation zunächst, um dir einen Überblick zu verschaffen.

Aufgaben

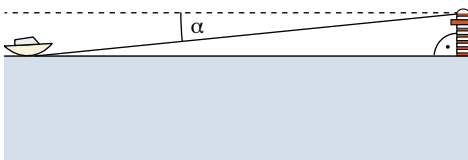
- 5 Eine elfsprossige Leiter (Sprossenabstand 30 cm) lehnt an einer Wand. Die Enden der Leiter sind 45 cm von den jeweils äußeren Sprossen entfernt.
- Bestimme die Leiterlänge.
 - Berechne den Winkel, den die Leiter mit der Wand einschließt, wenn sie unten 1,5 m von der Wand entfernt steht.
 - Berechne, in welcher Höhe die Leiter an der Wand lehnt.



- 6 In den Alpen haben viele Pässe Straßen starke Steigungen. Angegeben ist im Folgenden jeweils die maximale Steigung. Berechne den Steigungswinkel eines Straßenabschnitts mit der angegebenen Steigung und zeichne ein zugehöriges Steigungsdreieck.
- 8 % (Fernpass)
 - 12 % (Achenpass)

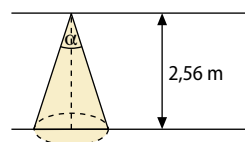


- 7 Von einem 65 m hohen Leuchtturm erblickt man ein Motorboot unter einem Tiefenwinkel von $\alpha = 4^\circ$. Erkläre, welche Aufgabe du nun lösen kannst und löse sie.



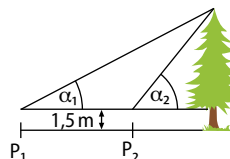
- 8 Die steilste Straße der Welt hat einen Steigungswinkel von $19,3^\circ$. Es ist die Baldwin Street und sie liegt in Dunedin in Neuseeland. Berechne die Steigung in Prozent.

- 9 Herr Graf installiert in seiner Decke eine LED-Lampe, die einen Abstrahlwinkel mit dem Maß $\alpha = 36^\circ$ ($\alpha = 12^\circ$) hat. Bestimme, wie groß der Durchmesser der beleuchteten Bodenfläche ist.

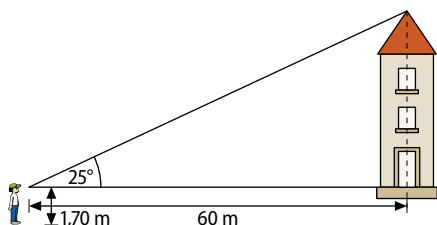


Bei 12 % Steigung gewinnt die Straße auf 100 m waagrechter Entfernung 12 m an Höhe.

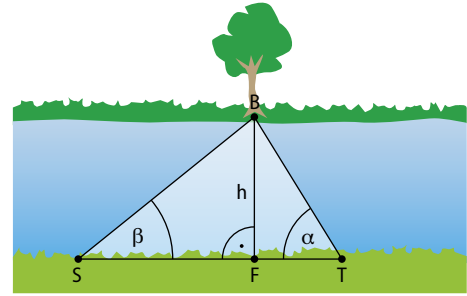
- 10 Zur Bestimmung der Höhe eines Baums misst der Förster im Abstand von 10 m mit dem sogenannten Försterdreieck zwei Winkel α_1 und α_2 . Das Messgerät befindet sich dabei stets 1,5 m über dem Boden. Berechne die Höhe des Baums, wenn $|P_1P_2| = 10$ m, $\alpha_1 = 41,6^\circ$ und $\alpha_2 = 64,5^\circ$.



- 11 Bestimme die Höhe des Gebäudes. Beschreibe dein Vorgehen.



- 12 Um die Breite eines Bachs zu bestimmen, messen Lucas und Alicia am Ufer eine Standlinie $\overline{ST}$ der Länge 29 m aus. Von jedem der beiden Endpunkte der Standlinie aus peilen sie einen Baum B am anderen Bachufer an und messen die Winkel $\alpha \approx 52^\circ$ und $\beta \approx 41^\circ$. Berechne die Bachbreite h.

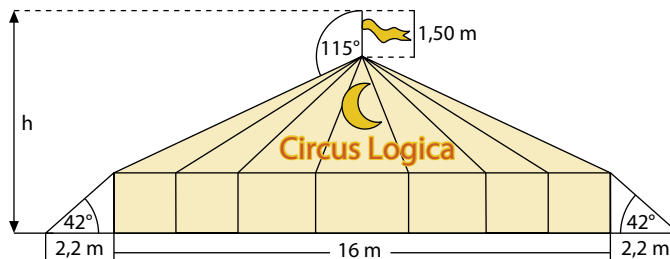


- 13 a) Gib an, welchen Höhenunterschied ein Auto auf einer 1230 m langen Straße mit durchschnittlichem Gefälle von 9% überwindet. Bestimme den Neigungswinkel.
 b) Zwei Orte sind durch eine geradlinige Straße verbunden. Auf einer Karte mit dem Maßstab 1:25 000 sind sie 4,0 cm voneinander entfernt. Ihre Höhendifferenz beträgt 26 m. Berechne das Gefälle der Straße und die Straßenlänge.
- 14 Ein Treppenabsatz der Höhe $h = 0,8$ m soll rollstuhlgerecht ausgebaut werden. Berechne die Länge l der schiefen Ebene, wenn der Steigungswert maximal 6% betragen darf.
 a) Bestimme den Neigungswinkel α der Rampe.
 b) Formuliere ein ähnliches Problem. Beschreibe und löse es mathematisch.
- 15 Überprüfe die Aussagen. Vergleiche die Ergebnisse mit einer Partnerin oder einem Partner.

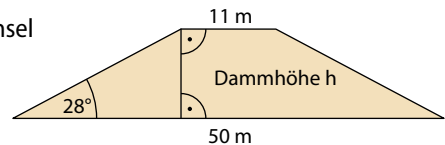
- 1 Der Steigungswinkel beträgt 45° .
- 2 Auf 100 m Fahrstrecke überwindet man einen Höhenunterschied von 50 m.
- 3 Der Steigungswinkel ist kleiner als 30° .
- 4 Auf 100 m waagrechter Entfernung überwindet man einen Höhenunterschied von 50 m.
- 5 Der Steigungswinkel beträgt 50° .



- 16 Berechne die Höhe h des Zirkuszeltes. Erläutere, ob das Ergebnis realistisch ist.

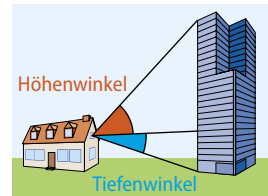


- 17 Der Hindenburgdamm verbindet die Nordseeinsel Sylt mit dem Festland. Der Querschnitt durch den Damm ist ein gleichschenkeliges Trapez.
 a) Berechne die Dammhöhe h. Prüfe, ob dein Ergebnis realistisch ist.
 b) Überprüfe das Ergebnis durch eine maßstäbliche Zeichnung.



- 18 Ein Verkehrsflugzeug startet und überfliegt nach kurzer Zeit einen 20 km entfernten Fluss. Berechne seine Flughöhe, wenn der durchschnittliche Steigungswinkel 6° beträgt.

- 19 Etwa 70 m von Lauras und Amiras Tanzschule entfernt wurde ein neues Hochhaus errichtet. Um seine Höhe zu ermitteln, messen sie den Höhenwinkel $\alpha \approx 55^\circ$ und den Tiefenwinkel $\beta \approx 10^\circ$. Sie berechnen, dass das Hochhaus etwa 110 m hoch ist. Überprüfe ihr Ergebnis.



20 **Mathematik und Sprache: Fachbegriffe nutzen**

Erstellt in Zweiergruppen einen kurzen Dialog zwischen zwei Personen, in dem ihr die Begriffe *Sinus*, *Kosinus* und *Tangens* in einem realistischen Alltagskontext verwendet. Tipp: Eine Person stellt eine Frage oder beschreibt eine Alltagssituation und die andere Person erklärt mithilfe der Fachbegriffe, wie man das Problem lösen kann. Beispielhafte Situationen (ihr könnt euch auch eigene Situationen ausdenken):

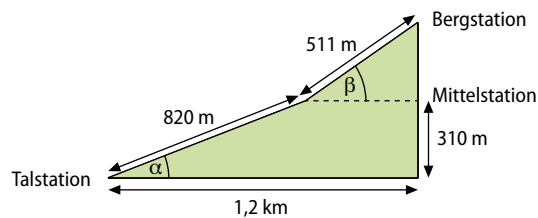
Baustelle: Wie kann man mit Sinus, Kosinus und Tangens die Höhe eines Krans oder eines Gebäudes berechnen?

Sport: Wie kann ein Skispringer den richtigen Absprungwinkel bestimmen?

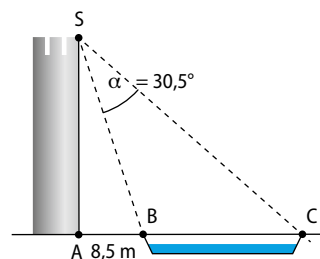
Navigation: Wie kann ein Segler den kürzesten Kurs bestimmen?

Fotografie: Wie beeinflussen Winkel die Perspektive?

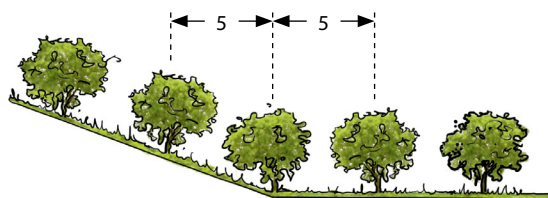
- 21 Eine Seilbahn hat zwei unterschiedlich steile Abschnitte.
- Berechne die Steigungswinkel α und β .
 - Bestimme den gesamten Höhenunterschied von der Tal- zur Bergstation.



- 22 Ein 26 m hoher Aussichtsturm ist 8,5 m von einem Kanal entfernt. Von der Plattform aus erscheinen die Kanalufer unter einem Winkel von $\alpha = 30,5^\circ$.
- Bestimme die Breite $|\overline{BC}|$ des Kanals. Erläutere dein Vorgehen bei der Berechnung.
 - Über eine Uferlänge von 10 m schwankt die Kanalbreite. Beschreibe eine Möglichkeit, dies in der Berechnung zu berücksichtigen.



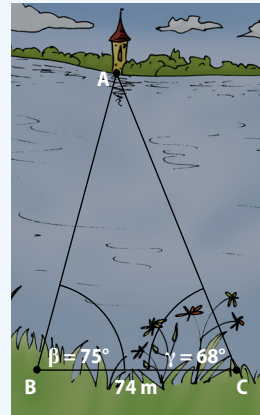
- 23 Auf einem horizontalen Stück der Erdoberfläche seien Bäume jeweils in einem Abstand von 5 m gepflanzt. Bestimme, in welcher Entfernung man die Bäume am Abhang pflanzen muss, wenn der Abhang um 20° gegenüber der Horizontalen geneigt ist und die Bäume den gleichen Abstand von 5 m haben sollen.



Entdecken

Das Bild zeigt ein altes Problem in der Landvermessung von unzugänglichen Stellen (hier Flussbreite $\overline{AB}$): In einem zugänglichen Bereich wird eine Strecke abgesteckt und deren Länge vermessen (hier Strecke $\overline{BC}$). Anschließend peilt man von den Endpunkten der Strecke den nicht zugänglichen Punkt an und bestimmt die entstandenen Winkel (in der Zeichnung β und γ).

- Begründe, weshalb man die gesuchte Länge nicht direkt mittels Sinus, Kosinus oder Tangens bestimmen kann.
- Übertrage das Dreieck ABC im Maßstab 1:1000 in dein Heft und zeichne die Höhe h_c und den Höhenfußpunkt H des Dreiecks ein.
- Beschreibe ein Vorgehen, wie du mithilfe der Teildreiecke AHC und BCH die Länge der Strecke $\overline{AB}$ bestimmen kannst.



Verstehen

Auch in beliebigen Dreiecken gelten Zusammenhänge zwischen Winkeln und Seitenlängen.

Merke

Zerlegt man ein beliebiges Dreieck entlang einer Höhe in zwei Teildreiecke, erkennt man:

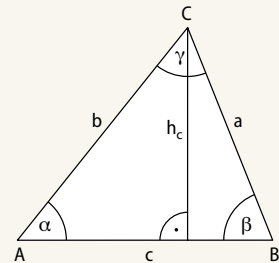
$$1 \quad \sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \sin(\alpha)$$

$$2 \quad \sin(\beta) = \frac{h_c}{a} \Rightarrow h_c = a \cdot \sin(\beta)$$

Gleichsetzen der Terme liefert:

$$a \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\alpha) \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

$$\text{Das ergibt den Sinussatz:} \quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

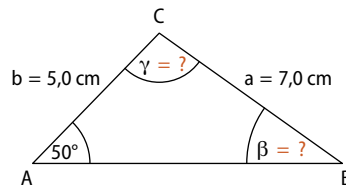


Beispiel

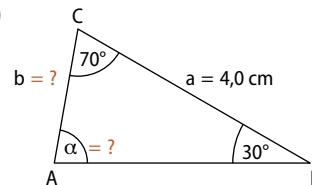
Der Sinussatz ist nur dann anwendbar, wenn das Dreieck aus den gegebenen Stücken eindeutig anhand der Kongruenzsätze konstruierbar ist.

Berechne die gesuchten Angaben im Dreieck ABC.

a)



b)



Lösungsmöglichkeit:

a) Dreieck ABC konstruierbar nach SsW.

$$1 \quad \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{a} \Rightarrow \frac{\sin(\beta)}{5,0 \text{ cm}} = \frac{\sin(50^\circ)}{7,0 \text{ cm}}$$

$$\sin(\beta) = 5,0 \text{ cm} \cdot \frac{\sin(50^\circ)}{7 \text{ cm}}$$

$$\beta \approx 33,2^\circ$$

$$2 \quad \gamma = 180^\circ - 50^\circ - 33,2^\circ = 96,8^\circ$$

b) Dreieck ABC konstruierbar nach wsw.

$$1 \quad \alpha = 180^\circ - 70^\circ - 30^\circ = 80^\circ$$

$$2 \quad \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \Rightarrow \frac{b}{\sin(30^\circ)} = \frac{4,0 \text{ cm}}{\sin(80^\circ)}$$

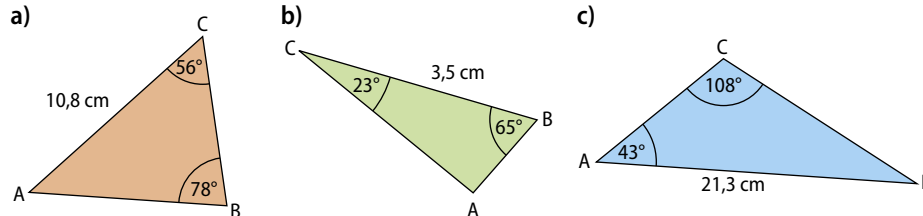
$$b = \sin(30^\circ) \cdot \frac{4,0 \text{ cm}}{\sin(80^\circ)} \approx 2,0 \text{ cm}$$

Nachgefragt

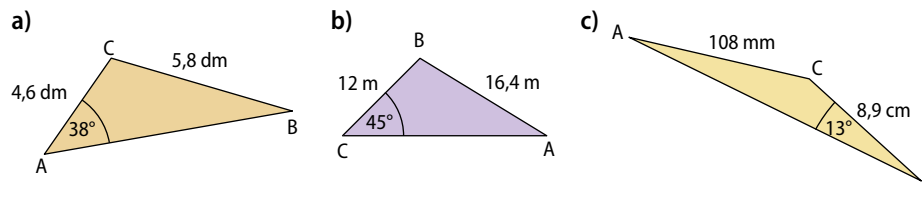
- Überprüfe: „Wenn man von einem Dreieck alle Seitenlängen kennt, kann man mithilfe des Sinussatzes die Maße der Innenwinkel bestimmen.“

Aufgaben

- 1 Berechne die fehlenden Seitenlängen des Dreiecks. Beschreibe dein Vorgehen.



- 2 Berechne die fehlenden Winkel des Dreiecks.



- 3 Zeige anhand der Höhe h_b , dass in einem beliebigen Dreieck ABC gilt: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$.

- 4 Konstruiere das Dreieck ABC und berechne anschließend die fehlenden Seitenlängen und die fehlenden Innenwinkel.

- a) $b = 6,2 \text{ cm}$; $c = 5,5 \text{ cm}$; $\beta = 42,4^\circ$ b) $a = 35,7 \text{ cm}$; $\alpha = 44,6^\circ$; $\gamma = 105,8^\circ$
 c) $a = 22 \text{ cm}$; $c = 18 \text{ cm}$; $\alpha = 73,5^\circ$ d) $a = 6 \text{ cm}$; $\alpha = 80^\circ$; $\beta = \gamma$

Alles klar?

- 5 Berechne für ein Dreieck ABC die fehlenden Tabellenwerte.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a	12 cm		45,3 mm	5,1 m		385 mm
b		3,6 dm		3,6 m	4,2 cm	
c	5,8 cm					721 mm
α	82,1°		76°	50,5°		
β		47°			125°	
γ	28,6°	68,2°	12°		18,7°	26,5°

- 6 Nachgefragt: Begründe, dass der Sinussatz auch für rechtwinklige Dreiecke gilt.

- 7 Marc hat eine Angabe in einem Dreieck falsch berechnet:

$a = 5,8 \text{ cm}$; $b = 6,9 \text{ cm}$; $c = 6,2 \text{ cm}$; $\alpha = 50,5^\circ$; $\beta = 66,5^\circ$; $\gamma = 63,0^\circ$

- a) Korrigiere einen Wert so, dass die Angaben ein konstruierbares Dreieck ergeben.
 b) Konstruiere das Dreieck mit den korrigierten Werten aus a).

- 8 Im Dreieck ABC ist $a = 6,0 \text{ cm}$, $c = 8,0 \text{ cm}$ und $\alpha = 39^\circ$.
 a) Begründe, warum das Dreieck nicht eindeutig konstruierbar ist.
 b) Bestimme die fehlenden Seitenlängen und Innenwinkel.

Weiterdenken

Jedes Dreieck kann man entlang einer Höhe in **zwei rechtwinklige Teildreiecke** zerlegen.
 Im nebenstehenden Dreieck gilt insbesondere:

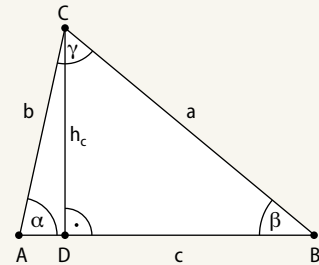
$$A_D = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

Im Dreieck ADC gilt: $\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \sin(\alpha)$

Eingesetzt ergibt sich: $A_D = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin(\alpha)$

Allgemein gilt für den **Flächeninhalt eines Dreiecks ABC**:

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$$



- 9 Erkläre einer Partnerin oder einem Partner, warum $h_c = b \cdot \sin(\alpha)$ in einem beliebigen Dreieck gilt und wie sich daraus die Formel für den Flächeninhalt ergibt.

Lösungen zu 10:

4,6; 5,0; 9,0; 9,9; 13,1;

15,5; 16,0; 18,7; 27,3;

27,8; 37,5; 75,1; 112,2;

112,7; 132,5; 662,7

Die Einheiten sind nicht angegeben.

- 10 Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. Bestimme fehlende Größen.

a) $a = 2,5 \text{ cm}$; $b = 6,9 \text{ cm}$; $\gamma = 32^\circ$

b) $a = 55 \text{ mm}$; $c = 29 \text{ mm}$; $\beta = 123,8^\circ$

c) $a = 6,3 \text{ cm}$; $c = 4,5 \text{ cm}$; $\alpha = 40^\circ$

d) $a = 5 \text{ cm}$; $b = 6,9 \text{ cm}$; $\beta = 40^\circ$

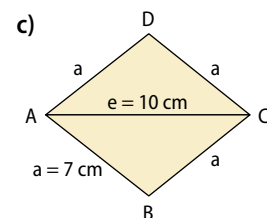
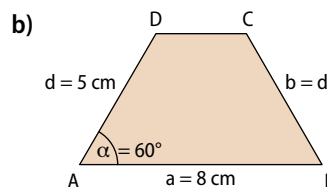
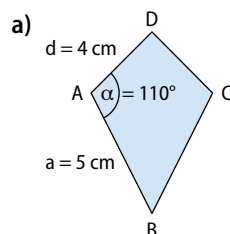
- 11 In einem allgemeinen Dreieck sind die Seite $c = 6,0 \text{ cm}$, der Winkel $\beta = 48,6^\circ$ und der Flächeninhalt $A = 12 \text{ cm}^2$ gegeben. Berechne die Seiten a und b .

- 12 Den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks mit gegebener Basis- und Schenkellänge kann ich auch mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnen.



Beurteile Elins Behauptung. Begründe.

- 13 Berechne den Flächeninhalt der Figuren. Gib bei b) und c) mehrere Möglichkeiten an.



14

Mathematik und Sprache: Mathematik erklären

a) Hier ist die Herleitung des Kosinussatz gegeben. Kommentiere und erkläre jeden einzelnen Schritt ganz ausführlich.

$$1) c = q + p$$

$$2) a^2 = h_c^2 + (c - q)^2$$

$$3) a^2 = h_c^2 + c^2 - 2cq + q^2$$

$$4) a^2 = h_c^2 + q^2 + c^2 - 2cq$$

$$5) b^2 = h_c^2 + q^2$$

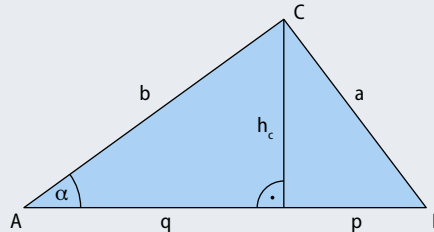
$$6) a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$$

$$7) \cos(\alpha) = \frac{q}{b}$$

$$8) q = \cos(\alpha) \cdot b$$

$$9) a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot \cos(\alpha) \cdot b$$

$$10) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$



b) Zeige ebenso die folgenden Zusammenhänge:

$$1) b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$2) c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Idee:

- Übertrage das Vorgehen aus der Herleitung des Kosinussatzes in a).
- Nenne Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu dieser Herleitung.

c) Begründe, dass man die Zusammenhänge aus b) auch direkt aus dem Kosinussatz ermitteln könnte.

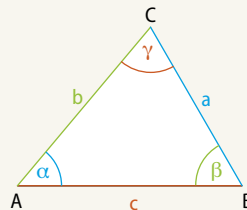
Weiterdenken

Wenn bei einem Dreieck ABC zwei Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, dann lässt sich die dritte Seitenlänge mithilfe des **Kosinussatzes** berechnen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

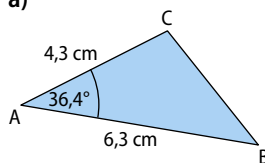


Für den Fall, dass drei Seitenlängen und kein Innenwinkel gegeben sind, kann man einen Winkel durch Umstellen der Gleichungen und Anwendung von $\cos^{-1}$ berechnen.

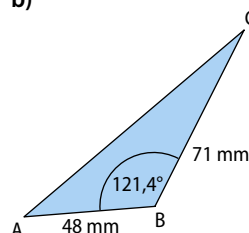
15

Berechne die fehlende Seitenlänge des Dreiecks ABC. Beschreibe dein Vorgehen.

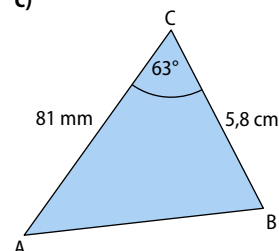
a)



b)



c)



16 Beurteile die Aussage: „Der Satz des Pythagoras ist ein Spezialfall des Kosinussatzes.“

17 Konstruiere das Dreieck ABC und berechne fehlende Seitenlängen und Winkel.

a) $a = 6,2 \text{ cm}$; $b = 5,5 \text{ cm}$; $c = 4,8 \text{ cm}$

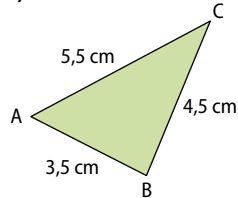
b) $b = 3,5 \text{ cm}$; $\alpha = 44,6^\circ$; $c = 4,5 \text{ cm}$

c) $b = 8 \text{ cm}$; $c = 7 \text{ cm}$; $\alpha = 36,4^\circ$

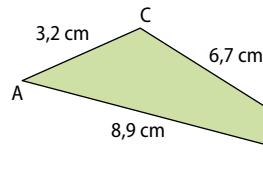
d) $a = 4,2 \text{ cm}$; $c = 5,8 \text{ cm}$; $b = 2a$

18 Berechne die fehlenden Winkel des Dreiecks ABC.

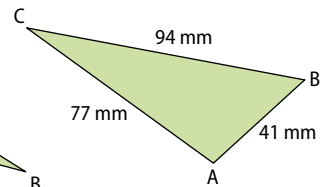
a)



b)



c)



19 Berechne die fehlenden Werte für ein Dreieck ABC. Runde auf eine Dezimale.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a		18,1 cm	87,3 km	812 m		3,3 cm
b	7,4 cm		123,5 km	706 m	2,3 dm	
c	5,6 cm	34,5 cm		582 m		
α	$30,1^\circ$					$36,9^\circ$
β		$31,2^\circ$			$19,1^\circ$	$53,1^\circ$
γ			$17,1^\circ$		$151,0^\circ$	

20 a) Berechne die Längen der Diagonalen im Parallelogramm ABCD.

1 $a = 7,0 \text{ cm}$; $b = 4,4 \text{ cm}$; $\alpha = 25^\circ$

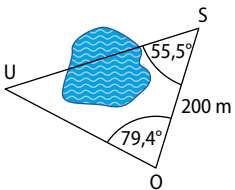
2 $a = 12,3 \text{ cm}$; $d = 4,8 \text{ cm}$; $\delta = 71^\circ$

b) Berechne die Längen der Diagonalen des Vierecks ABCD.

$a = 5,5 \text{ cm}$; $b = 5,1 \text{ cm}$; $d = 3,9 \text{ cm}$; $\alpha = 78,5^\circ$; $\beta = 55,8^\circ$

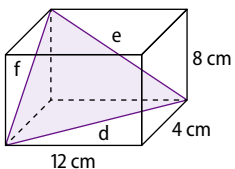
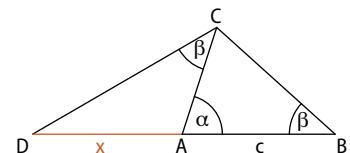
21 Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $a = 8 \text{ cm}$, $b = 5,5 \text{ cm}$ und $c = 6,2 \text{ cm}$.

Entscheide und begründe, ob das gegebene Dreieck den Winkel $\beta = 89,1^\circ$ hat.



22 Um die Entfernung eines unzugänglichen Punktes U vom Standort S zu bestimmen, werden die angegebenen Größen bestimmt. Berechne die gesuchte Entfernung.

23 Berechne in der abgebildeten Figur die Länge der Strecke x für $c = 6,0 \text{ cm}$, $\alpha = 72^\circ$ und $\beta = 42^\circ$.



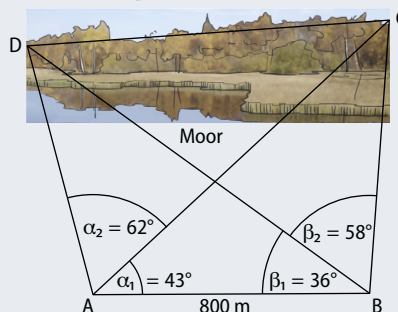
24 a) Gegeben ist ein Quader mit den Abmessungen $a = 12 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ und $c = 8 \text{ cm}$. Berechne die Winkel zwischen den Flächendiagonalen d, e und f.

b) Überlege dir eigene Quadermaße und lass deinen Nachbarn oder deine Nachbarin die Winkel bestimmen.

25

Mathematik und Sprache: Eine Anleitung zur Problemlösung verfassen

Um die Länge einer unzugänglichen Strecke $\overline{CD}$ zu bestimmen, peilt man von A und B jeweils die Punkte C und D an und misst die Länge der Strecke $\overline{AB}$ sowie die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ und β_2 . Erläutere den Ansatz zur Lösung der Problemstellung mithilfe einer Skizze und berechne dann die Länge der Strecke $\overline{CD}$. Fasse anschließend dein Verfahren in einer Kurzanleitung zusammen.

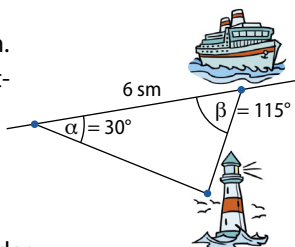


Ermittelt, welche Kurzanleitung mathematisch-inhaltlich und sprachlich-ausdrücklich am besten formuliert ist.

26

Ein Schiff peilt auf seinem Kurs zweimal einen Leuchtturm an.

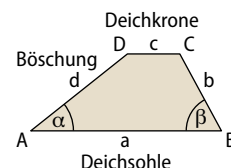
- Berechne, wie weit das Schiff jeweils vom Leuchtturm entfernt ist.
- Bestimme die kürzeste Entfernung des Schiffes zum Leuchtturm auf seiner Fahrt.



sm: Seemeile
(1 sm = 1,852 km)

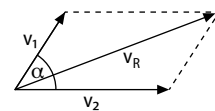
27

Ein Deichquerschnitt hat die Form eines Trapezes. Die Breite der Deichsohle $a = 48,4$ m, die Böschungswinkel $\alpha = 18^\circ$ und $\beta = 22^\circ$ und die Länge der einen Böschung $d = 25,9$ m sind gegeben. Berechne die Breite der Deichkrone.



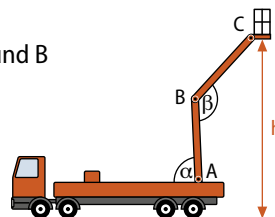
28

Ein Schiff wird mit der Geschwindigkeit $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nach Norden gesteuert. Eine Strömung mit der Geschwindigkeit $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in Richtung NO drängt das Schiff vom Steuerkurs ab. Bestimme die resultierende Geschwindigkeit v_R des Schiffes.



29

Die Höhe h einer Arbeitsbühne kann durch zwei Gelenke A und B variiert werden. Dabei gilt $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = 4,00$ m, $\alpha \leq 87,5^\circ$ sowie $\beta \leq 135^\circ$. A ist dabei 2,60 m über dem Boden. Bestimme für $\alpha = 85^\circ$ und $\beta = 115^\circ$ die Höhe h des Punktes C.



Medien & Werkzeuge

Umkreis eines Dreiecks

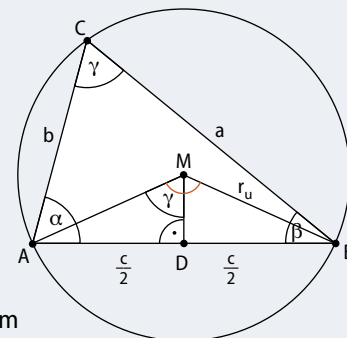
Mithilfe des Sinussatzes lässt sich eine Beziehung zwischen einer Seite eines beliebigen Dreiecks, ihrem Gegenwinkel und dem Umkreisradius r_u finden.

- Überprüfe mit einem dynamischen Geometrieprogramm, dass γ halb so groß ist wie der eingezeichnete Mittelpunktsinkel bei M.
- Zeige folgende Zusammenhänge:

$$1 \quad \sin(\gamma) = \frac{c}{2 \cdot r_u} \quad 2 \quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2 \cdot r_u$$

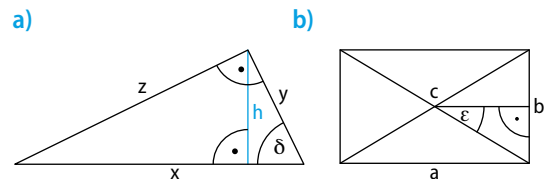
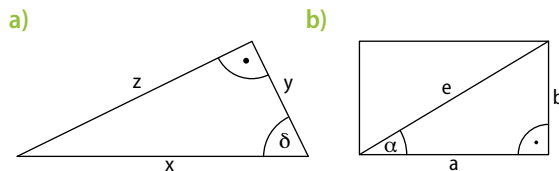
- Berechne die Maße der nicht gegebenen Stücke des Dreiecks ABC.

- $b = 5,7$ m; $c = 8,2$ m; $r_u = 4,5$ m
- $a = 4,2$ m; $c = 3,8$ m; $r_u = 2,9$ m
- $\alpha = 78^\circ$; $\gamma = 54^\circ$; $r_u = 5,2$ m
- $\alpha = 45,02^\circ$; $\beta = 76,82^\circ$; $c = 5,84$ cm

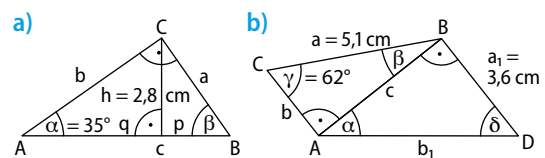
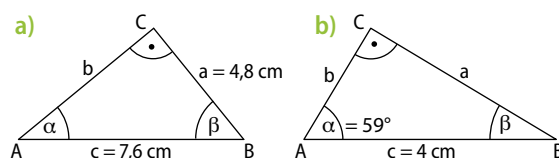


Die folgenden Aufgaben behandeln alle Themen, die du in diesem Kapitel kennengelernt hast. Auf dieser Seite sind die Aufgaben in zwei Spalten unterteilt. Die **grünen** Aufgaben auf der linken Seite sind etwas einfacher als die **blauen** auf der rechten Seite. Entscheide bei jeder Aufgabe selbst, welche Seite du dir zutraust!

- 1 Gib trigonometrische Beziehungen zwischen dem gegebenen Winkel und den betreffenden Seitenlängen an.



- 2 Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkel im rechtwinkligen Dreieck.



- 3 Unter der Mittagshöhe der Sonne versteht man den größten Einstrahlwinkel der Sonnenstrahlen an einem Tag. Die Mittagshöhe auf der Nordhalbkugel erreicht ihren größten Wert am 21.6. mit $90^\circ + 23,5^\circ - \varphi$ und den kleinsten Wert am 21.12. mit $90^\circ - 23,5^\circ - \varphi$. Der Winkel φ ist die geographische Breite des Ortes.

Berechne die größte und die kleinste Schattenlänge, die ein 1,80 m großer Mann mittags in Hamburg ($\varphi = 53,5^\circ$ N) wirft.

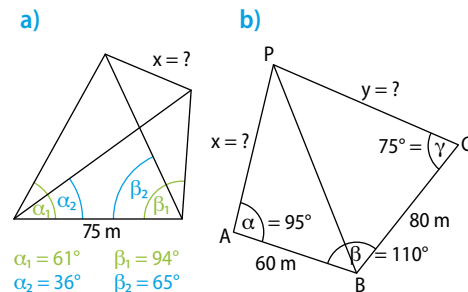
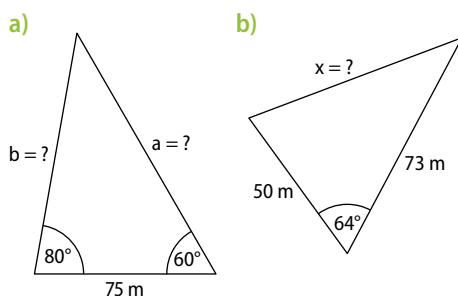
Ermittle, ob ein 1,80 m großer Mann in Hamburg ($\varphi = 53,5^\circ$ N) einen Schatten werfen kann, der halb so lang (doppelt so lang) ist wie er.

- 4 Beim Aufschütten von Getreide entsteht ein Schüttkegel. Der Böschungswinkel eines Schüttkegels ist der Winkel zwischen der schrägen Oberfläche des aufgeschütteten Getreides und der waagrechten Bodenfläche. Er beträgt bei Getreide 30° .

Der Durchmesser des Schüttkegels aus Getreide beträgt 10 m. Berechne die Höhe des Schüttkegels.

Berechne die Fläche, die eine Plane mindestens haben muss, um einen 3 m hohen Schüttkegel aus Getreide abzudecken.

- 5 Von einer oder zwei zugänglichen Strecken bekannter Länge aus kann man die Entfernung eines unzugänglichen Punktes oder die Länge einer unzugänglichen Strecke bestimmen. Berechne die gesuchten Längen.



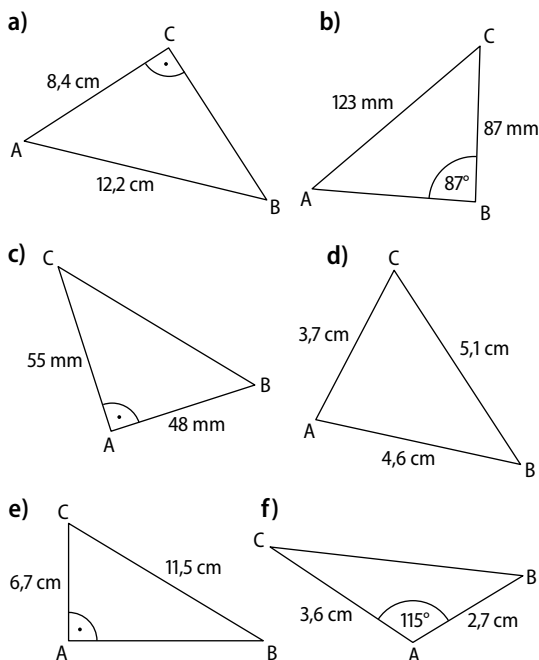
1



Die Verkehrsschilder geben die Steigungen einer Straße in Prozent an.

- Berechne die Steigungswinkel für die Straßensteigungen 25 % und 50 %. Beschreibe, was dir auffällt.
- Berechne die Straßensteigung in Prozent für den Steigungswinkel 50° (45°), um die Angabe im rechten Verkehrsschild zu ergänzen.
- Eine andere Straße lässt sich mit einer Geraden-gleichung mit der Steigung $m = 0,2$ ($m = 0,4$; $m = \frac{1}{3}$) modellieren. Gib jeweils die Steigung in Prozent an und berechne den Steigungswinkel.

2 Berechne die fehlenden Winkel im Dreieck.



3 Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln a und b und der Basis c .

- Berechne die fehlenden Größen des gleichschenkligen Dreiecks mit $c = 7,8$ cm und $\alpha = 35^\circ$. Fertige zunächst eine Skizze an. Zeichne dort auch die Höhe h_c ein.

- Das gleichschenklige Dreieck hat den Winkel $\gamma = 116^\circ$ und einen Flächeninhalt von 40 cm^2 . Berechne die Länge der Basis c .

4 Berechne die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

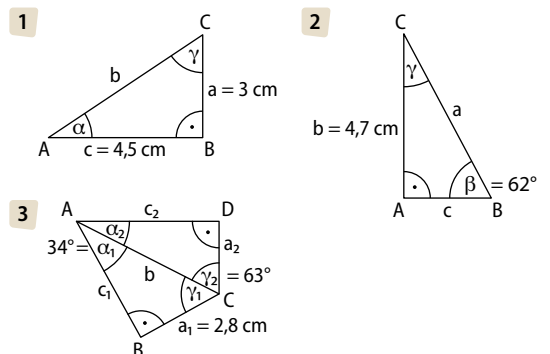
	a	b	c	α	β	γ	A
a)	9,2 cm		8,4 cm	90°			
b)		8,3 cm		30°	112°		
c)	6,4 km	5,2 km				$58,2^\circ$	
d)	3 cm		5 cm		90°		
e)	10,7 cm	14,6 cm	9,8 cm				
f)	69 mm		3,4 cm	52°			

5 Der Schatten eines Einfamilienhauses (mit Flachdach) ist 4,90 m lang, während die Sonne unter einem Winkel von 53° über das Haus zur Erde strahlt.

- Berechne die Höhe des Hauses.
- Bestimme den Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen auf die Erde treffen, wenn der Schatten des Hauses 3,75 m lang ist.
- Berechne die Länge des Schattens des Hauses im Winter, wenn die Sonnenstrahlen unter einem Winkel von 14° auf die Erde treffen.

6 a) Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkel im rechtwinkligen Dreieck.

- Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke auf verschiedene Wege.

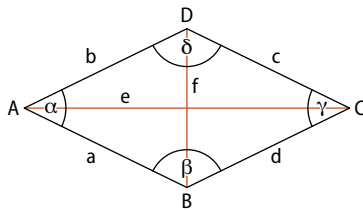


7 Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

- $a = 4$ cm; $b = 5$ cm; $\gamma = 69^\circ$
- $c = 7,2$ cm; $\alpha = 54^\circ$; $\beta = 46^\circ$
- $A(2|-1)$; $B(5|3)$; $C(-2|4)$

Nenne verschiedene Lösungswege.

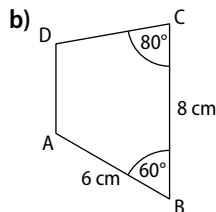
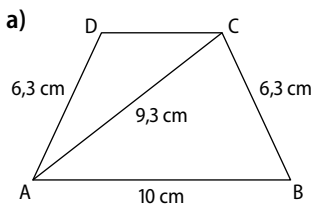
- 8 Von einer Raute sind die angegebenen Teilstücke bekannt. Berechne jeweils den Flächeninhalt und den Umfang der Raute.



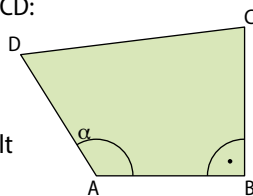
- a) $e = 5,5 \text{ cm}$; $\beta = 80^\circ$
 b) $a = 12,3 \text{ m}$; $\beta = 56^\circ$
 c) $f = 2,5 \text{ dm}$; $\beta = 72^\circ$
 d) $a = 8,1 \text{ dm}$; $\alpha = 112^\circ$

- 9 Im Drachenviereck ABCD mit der Symmetrieachse AC gilt: $|\overline{BD}| = f = 4,6 \text{ cm}$, $\alpha = 68^\circ$ und $\gamma = 44^\circ$. Berechne die fehlenden Seitenlängen und die Länge $|\overline{AC}| = e$ der Diagonalen.

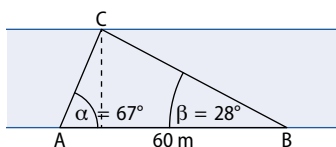
- 10 Berechne jeweils die Längen der fehlenden Seiten sowie den Flächeninhalt des Trapezes.



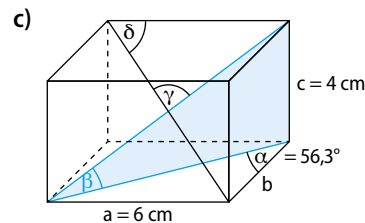
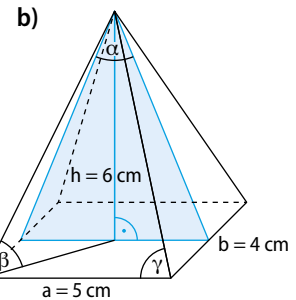
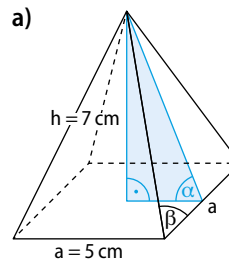
- 11 Gegeben ist ein Viereck ABCD:
 $|\overline{CD}| = 8,0 \text{ cm}$;
 $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = 5,3 \text{ cm}$;
 $\alpha = 122^\circ$; $\beta = 90^\circ$
 Berechne den Flächeninhalt des Vierecks.



- 12 Um die Breite eines Flusses zu bestimmen, steckt man am Ufer eine Strecke $\overline{AB}$ ab und misst die Länge dieser Strecke sowie die Winkel α und β . Berechne die Breite des Flusses.

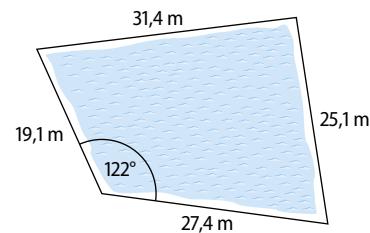


- 13 Berechne die Größen der gekennzeichneten Winkel und Seiten.



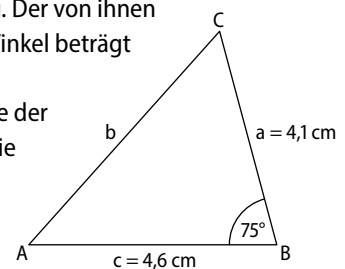
- 14 Um den Flächeninhalt eines Fischweihers zu bestimmen, wurde seine Uferlinie mithilfe eines Vierecks angenähert.

- a) Konstruiere den Fischweierer in einem geeigneten Maßstab. Zerlege dazu das Viereck geschickt in zwei konstruierbare Dreiecke.
 b) Bestimme den Flächeninhalt des Fischweihers möglichst genau.



- 15 In einem Dreieck ist eine Seite 4,6 cm und eine andere 4,1 cm lang. Der von ihnen eingeschlossene Winkel beträgt 75° .

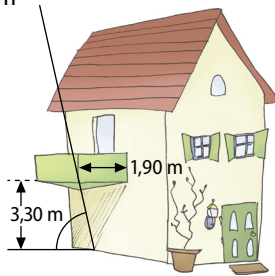
Berechne die Länge der dritten Seite und die Größe der beiden anderen Innenwinkel.



- 16** Bestimme, unter welchem Winkel α die Sonne über dem Horizont steht, wenn der Schatten des Balkons (Überstand 1,90 m) ...

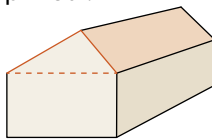
- genau auf den Fuß der Wand trifft.
- bis in halbe Höhe der Wand reicht.
- auf dem Boden halb so lang ist, wie der Balkon übersteht.

Entnimm benötigte Maße der Abbildung.

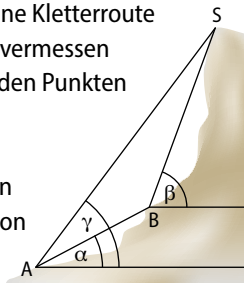


- 17** Für das ungleichseitige Satteldach eines Einfamilienhauses gilt: Dachbreite: 7 m, Dachneigungen: $\alpha = 30^\circ$ und $\beta = 50^\circ$.

- Berechne die Höhe des Daches.
- Berechne die Kosten für das Dach, wenn das Haus 10 m lang ist und 1 m² des Daches 90 € kostet.



- 18** An einer Kletterwand soll eine Kletterroute von der Basis B zur Spitze S vermessen werden. Dazu wurde S von den Punkten A und B unter den Winkeln $\gamma = 53,1^\circ$ und $\beta = 69,7^\circ$ gegenüber der Waagrechten angepeilt. Die Entfernung von A nach B wurde mit 240 m bestimmt.

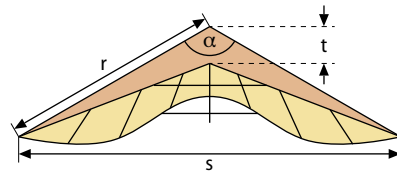


Für den Winkel α gilt: $\alpha = 27,9^\circ$.

Die Ebene ABS steht senkrecht zur Erdoberfläche.

- Zeichne die Situation im Maßstab 1:5000 in dein Heft.
- Bestimme die Entfernung des Gipfelpunkts S zu den beiden Peilstellen A und B. Berechne die Höhe der Wand, wenn der Punkt B auf 856 m Meereshöhe liegt.
- Ermittle die Anzahl der Löcher, die man in der Kletterroute bohren muss, wenn man aus Sicherheitsgründen alle fünf Höhenmeter einen Haken setzen möchte.

- 19** Die Skizze zeigt die Maße eines symmetrischen Flugdrachens. Es gilt: $t = 1,12$ m, $s = 10,50$ m und $\alpha = 120^\circ$.



- Berechne die Länge r der vorderen Kante der Tragfläche.
- Der vordere Teil des Flugdrachens wird mit rotem Stoff bespannt. Bestimme, wie viel Quadratmeter Stoff dafür notwendig sind.
- Die Restfläche des Flugdrachens soll mit gelbem Stoff bespannt werden. Ihr Inhalt ergibt sich aus der roten Fläche mit einem 16 %-igen Materialzuschlag. Berechne die Gesamtfläche des vollständig bespannten Gleiters.

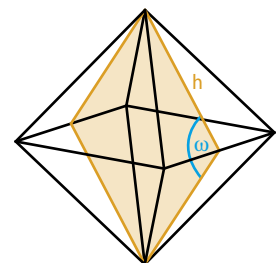
- 20** Zwei Schlepper ziehen ein großes Frachtschiff mit einer Zugkraft von jeweils 500 kN und unter einem Winkel von 30° in den Hafen. Bestimme die Kraft, mit der das Frachtschiff „nach vorne“ gezogen wird. Fertige zunächst eine Skizze an.



((Vorschlag))

- 21** Betrachte den in der Abbildung gezeigten regulären Oktaeder.

- Erläutere, welche geometrische Figur von der gelben Schnittfläche gebildet wird.



- Berechne den Neigungswinkel ω des regulären Oktaeders.

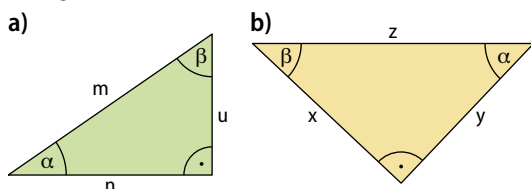
Tipp: Erstelle eine Skizze und beschrifte sie passend.

Aufgaben zur Einzelarbeit

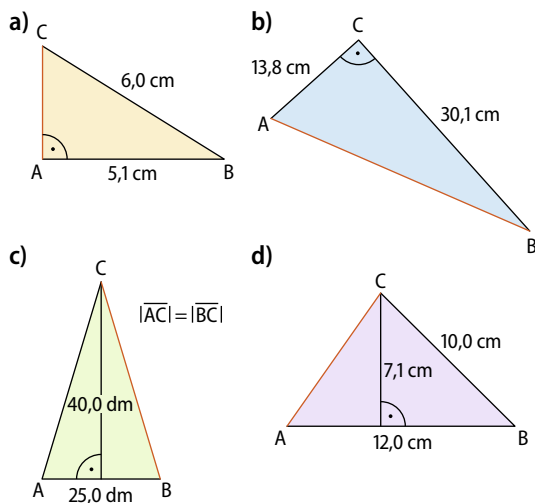
Das kann
ich!Das kann ich
fast!Das kann ich
noch nicht!

- 1 **Teste dich!** Bearbeite dazu die folgenden Aufgaben und bewerte die Lösungen mit einem Smiley.
- 2 Hinweise zum Nacharbeiten findest du auf der folgenden Seite, die Lösungen findest du im Anhang.

- 1 Stelle für das rechtwinklige Dreieck die Zusammenhänge für Sinus, Kosinus und Tangens bezüglich der Winkel α und β auf.



- 2 Berechne im Dreieck die Innenwinkel sowie die Länge der rot markierten Strecke.



- 3 Berechne die fehlenden Seitenlängen für folgende rechtwinklige Dreiecke ABC. Runde auf eine Stelle nach dem Komma.

- a) $\beta = 90^\circ$; $\gamma = 48^\circ$; $b = 8,8$ cm
- b) $\alpha = 17^\circ$; $\beta = 73^\circ$; $a = 124,8$ m
- c) $\alpha = 57^\circ$; $\gamma = 90^\circ$; $a = 1,3$ km

- 4 Konstruiere das rechtwinklige Dreieck ABC. Überprüfe die Konstruktion durch eine Rechnung.

- a) $a = 3,4$ cm; $b = 4,8$ cm; $\beta = 55^\circ$
- b) $a = 6,9$ cm; $\beta = 42^\circ$; $\gamma = 48^\circ$
- c) $c = 5,5$ cm; $a = 8,8$ cm; $\beta = 90^\circ$

- 5 Eine Leiter soll zur Reparatur der Dachrinne (6,50 m hoch) an die Hauswand angestellt werden. Der Anstellwinkel darf höchstens 70° betragen. Berechne, wie lang die Leiter mindestens sein muss, damit sie bis zur Dachrinne reicht.

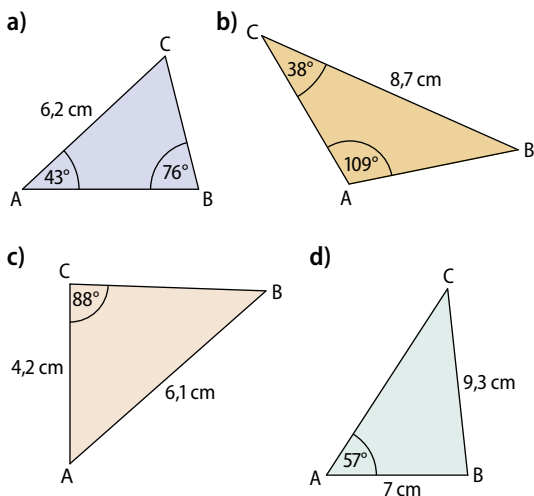
- 6 Ein gleichschenkliges Dreieck ABC hat folgende Maße: $a = c = 6,5$ cm und $b = 7,8$ cm.

- a) Bestimme alle drei Winkel und die Höhe des Dreiecks auf die Basis.
- b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks auf zwei verschiedene Arten.

- 7 Berechne den Steigungswinkel der zugehörigen Geraden und gib die Steigung in Prozent an.

- a) $y = 0,5x + 1$
- b) $2y + 4x = 8$

- 8 Berechne die fehlenden Werte der Größen a , b , c , α , β und γ des Dreiecks ABC.



- 9 Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkel für das Dreieck ABC.

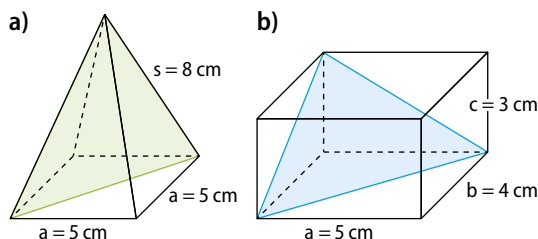
- a) $c = 8,5$ dm; $\beta = 32^\circ$; $\gamma = 87^\circ$
- b) $a = 5,2$ cm; $\beta = 63,1^\circ$; $\gamma = 95,6^\circ$
- c) $a = 7,3$ cm; $b = 4,7$ cm; $\alpha = 65^\circ$

- 10 a) Konstruiere das Dreieck ABC mit $b = 6,2 \text{ cm}$, $\alpha = 35^\circ$ und $c = 8,4 \text{ cm}$.
 b) Berechne die Länge der Seite a und überprüfe zeichnerisch.

- 11 Bestimme jeweils die fehlenden Werte in der Tabelle für ein Dreieck ABC. Runde auf eine Dezimale.

	a)	b)	c)
a		6,4 m	4,6 cm
b	6,7 cm	5,8 m	7,0 cm
c	5,9 cm	10,5 m	
α	63,5°		
β			
γ			123,0°

- 12 Berechne die Innenwinkel des markierten Dreiecks.



- 13 Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

- a) $a = 2,5 \text{ cm}$ $b = 6,9 \text{ cm}$ $\gamma = 32^\circ$
 b) $a = 55 \text{ mm}$ $c = 29 \text{ mm}$ $\beta = 123,8^\circ$

- 14 Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD mit $a = 7 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ und $\alpha = 50^\circ$.

Aufgaben für Lernpartner

- 1 Bearbeite diese Aufgaben zuerst alleine.
- 2 Suche dir einen Partner und erkläre ihm deine Lösungen. Höre aufmerksam und gewissenhaft zu, wenn dein Partner dir seine Lösungen erklärt.
- 3 Korrigiere gegebenenfalls deine Antworten und benutze dazu eine andere Farbe.

Sind folgende Behauptungen **richtig** oder **falsch**? Begründe.

- A Der Sinus eines Winkels bezeichnet das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse.
 B Für einen Winkel alpha gilt: Sinus geteilt durch Kosinus ergibt Tangens.
 C Sinus, Kosinus und Tangens eines Winkels sind immer kleiner als 1.
 D Der Sinussatz gilt nicht für rechtwinklige Dreiecke.
 E Der Kosinussatz ist ein Sonderfall des Satzes von Pythagoras.
 F Zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks ABC benötigt man nur drei der Werte für a, b, c, α , β oder γ .

Ich kann ...	Aufgabe	Hilfe	Bewertung
Winkel und Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck mithilfe von Sinus, Kosinus und Tangens berechnen.	1, 2, 3, 4, A, B, C	S. 16, 20	😊 😐 😞
Problemstellungen zu rechtwinkligen Dreiecken mit Sinus, Kosinus und Tangens lösen.	5	S. 16, 20, 22	😊 😐 😞
Berechnungen an besonderen Dreiecken durchführen.	6	S. 19	😊 😐 😞
den Steigungswinkel einer Geraden bestimmen.	7	S. 21	😊 😐 😞
den Sinus - und Kosinussatz für beliebige Dreiecke anwenden.	8, 9, 10, 11, 12, D, E	S. 26, 29	😊 😐 😞
den Flächeninhalt beliebiger Dreiecke mit Sinus berechnen.	13, 14, F	S. 28	😊 😐 😞

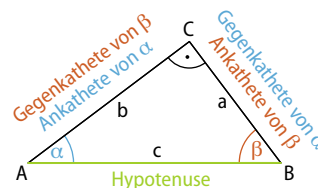
Seiten 16, 20

Sinus, Kosinus, Tangens

Im rechtwinkligen Dreieck sind die Seitenverhältnisse eindeutig durch die Größe der beiden spitzen Winkel des Dreiecks festgelegt. Bezogen auf die spitzen Winkel des rechtwinkligen Dreiecks bezeichnet man diejenige **Kathete**, die dem **betrachteten Winkel gegenüber** liegt, als **Gegenkathete**, und diejenige, die an dem Winkel **anliegt**, als **Ankathete**.

In einem rechtwinkligen Dreieck gilt:

- **Sinus** = $\frac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}$
- **Kosinus** = $\frac{\text{Ankathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}$
- **Tangens** = $\frac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Ankathete des Winkels}}$



Im oben abgebildeten Dreieck gilt:

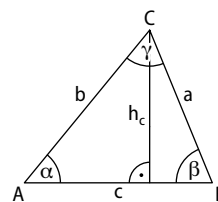
- $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}; \sin(\beta) = \frac{b}{c}$
- $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}; \cos(\beta) = \frac{a}{c}$
- $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}; \tan(\beta) = \frac{b}{a}$

Seite 26

Sinussatz

In einem Dreieck ABC gilt:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$



Seite 29

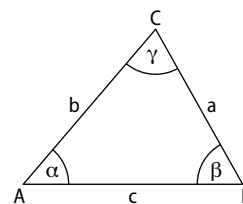
Kosinussatz

In einem Dreieck ABC gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

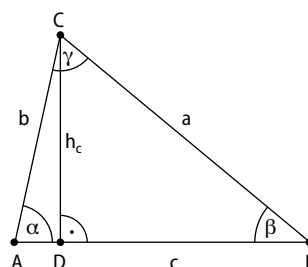


Seite 28

Flächeninhalte bestimmen

Für den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC gilt:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta) \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) \end{aligned}$$





Einstieg

Der abgebildete Monitor zeigt einige Kurven aus der medizinischen Überwachung eines Menschen. Grün ist die Kurve eines Elektrokardiogramms (EKG), das den Herzschlag abbildet. Zusätzlich sieht man den Blutdruck (rot), die Sauerstoffsättigung (hellblau) und die Atmung (weiß).

- Beschreibe die Kurve des EKG.
- Stelle eine Vermutung auf, wie das EKG weitergeht, und begründe deine Vermutung.
- Zeichne die Kurve der Sauerstoffsättigung in ein geeignetes Koordinatensystem. Gib an, wie groß ein Abschnitt ist, bis er sich wiederholt.

Trigonometrische Funktionen

Ausblick

Am Ende dieses Kapitels hast du gelernt, ...

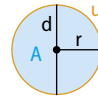
- Winkelmaße im **Gradmaß** und im **Bogenmaß** zu messen.
- **Sinus und Kosinus am Einheitskreis** zu definieren.
- welche **Eigenschaften** die **Sinusfunktion** als grundlegende trigonometrische Funktion hat.
- welchen **Einfluss** verschiedene **Parameter** auf den Graphen der Sinusfunktion haben.
- **periodische** Vorgänge mithilfe von trigonometrischen Funktionen zu **modellieren**.

Vorwissen

Berechnungen am Kreis

Umfang: $U = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$

Flächeninhalt: $A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$



Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck

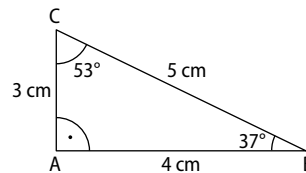
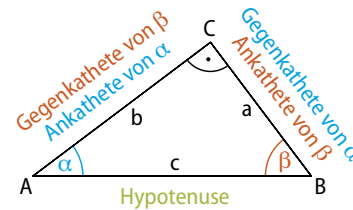
In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Seitenverhältnisse durch die Größe der beiden spitzen Winkel festgelegt. Bezogen auf die spitzen Winkel bezeichnet man diejenige Kathete, die dem betrachteten Winkel gegenüber liegt, als Gegenkathete, und diejenige, die an dem Winkel anliegt, als Ankathete.

- Sinus des Winkels = $\frac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}$

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}; \sin(\beta) = \frac{b}{c}$$

- Kosinus des Winkels = $\frac{\text{Ankathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}; \cos(\beta) = \frac{a}{c}$$



$$\sin(37^\circ) = \frac{3 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = \cos(53^\circ)$$

$$\cos(37^\circ) = \frac{4 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = \sin(53^\circ)$$

Eigenschaften einer quadratischen Funktion und ihres Graphen

Form der Parabel

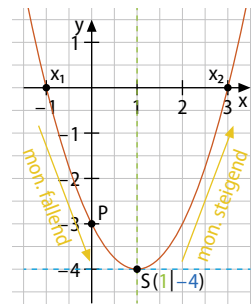
- $f(x) = ax^2$
- nach oben geöffnet für $a > 0$;
nach unten geöffnet für $a < 0$
- gestreckt für $|a| > 1$;
gestaucht für $0 < |a| < 1$

Verschieben der Normalparabel

- $f(x) = x^2 + e$ ($e, x \in \mathbb{R}$) entsteht durch **Verschiebung der Normalparabel entlang der y-Achse**. Sie hat den Scheitelpunkt $S(0|e)$. Die Parabel ist symmetrisch zur y-Achse (Symmetrieachse).
- $f(x) = (x - d)^2$ ($d, x \in \mathbb{R}$) entsteht durch **Verschiebung der Normalparabel entlang der x-Achse**. Sie hat den Scheitelpunkt $S(d|0)$. Die Parabel ist symmetrisch zu $x = d$ (Symmetrieachse).

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

- An **Nullstellen** schneidet der Graph die x-Achse. Es gilt: $f(x) = 0$.
- Für den Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse gilt: $x = 0$.



D	$D = \mathbb{R}$
W	$W = \mathbb{R}$ mit $y \geq -4$
Scheitelpunkt	$S(1 -4)$
Schnittpunkte	Nullstellen: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$ Schnittpunkt mit y-Achse: $P(0 -3)$

Hier ist $a = 1$, d.h. es ist eine nach oben geöffnete Normalparabel. Sie ist um **vier** Einheiten nach unten und um **eine** Einheit nach rechts verschoben.

$$f(x) = (x - 1)^2 - 4$$


 Das kann
ich!

 Das kann ich
fast!

 Das kann ich
noch nicht!

Teste dich! Schau dir dazu zunächst die bereits bekannten Inhalte auf der linken Seite an. Bearbeite die Aufgaben und bewerte deine Lösungen. Die Ergebnisse findest du im Anhang.

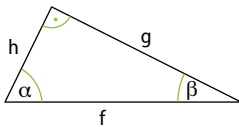
Vorwissentest

- 1 Berechne die fehlenden Größen des Kreises.

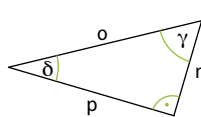
	a)	b)	c)	d)	e)
Radius r	1 cm				
Durchmesser d		4,8 mm			9,6 cm
Umfang U			100 m		
Flächeninhalt A				25 ha	

- 2 Gib jeweils den Sinus, Kosinus und Tangens des Winkels als Verhältnis der Seitenlängen an.

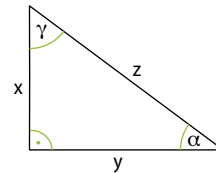
a)



b)



c)



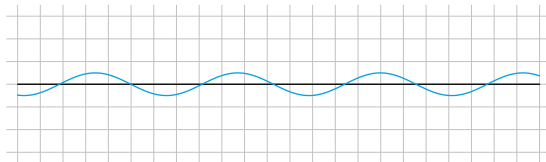
- 3 Vervollständige die Tabelle in deinem Heft.

	Beschreibung	Funktionsgleichung	Graph
a)	Die Normalparabel ist um 1 Einheit nach links und um 3 Einheiten nach unten verschoben und mit dem Faktor 2 gestreckt.		
b)		$f(x) = -(x - 4)^2 - 2$	
c)			

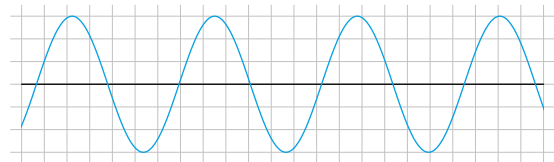
Ich kann ...	Aufgabe	Bewertung
Größen eines Kreises bestimmen.	1	
Sinus, Kosinus und Tangens berechnen.	2	
Eigenschaften quadratischer Funktionen anwenden.	3	

Laute(r) Töne

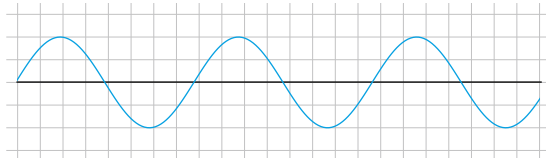
Mithilfe eines Oszilloskops können akustische Signale visualisiert werden. So können Töne graphisch dargestellt werden. Unten siehst du die Kurven von einem leisen, einem lauten, einem tiefen und einem hohen Ton.



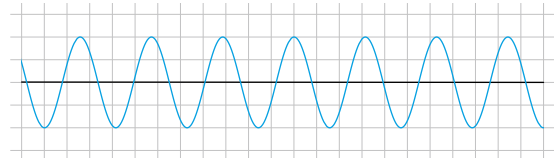
leiser Ton



lauter Ton



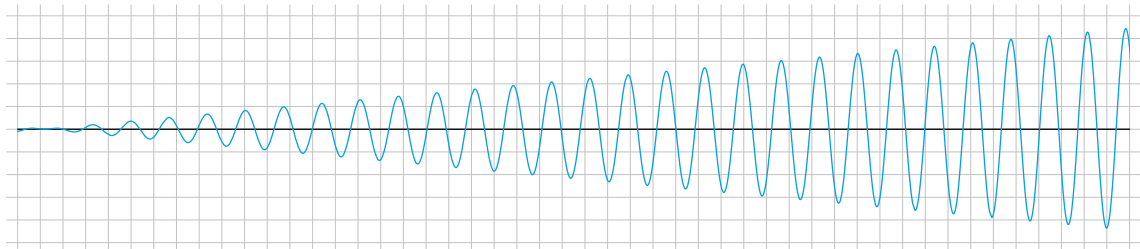
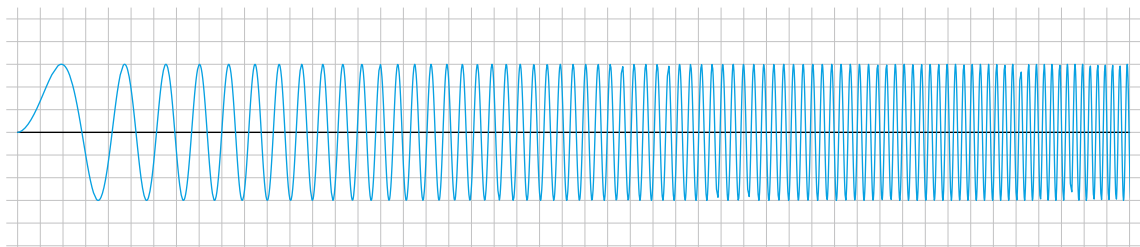
tiefer Ton



hoher Ton

- Beschreibe Unterschiede und Gemeinsamkeiten der Graphen der Töne.
- Skizziere in ein Koordinatensystem den Graphen ...
 - 1 eines leisen Tons, der hoch ist.
 - 2 eines lauten Tons, der tief ist.

Die Darstellungen zeigen die Graphen zweier Töne, die nicht gleichmäßig schwingen.

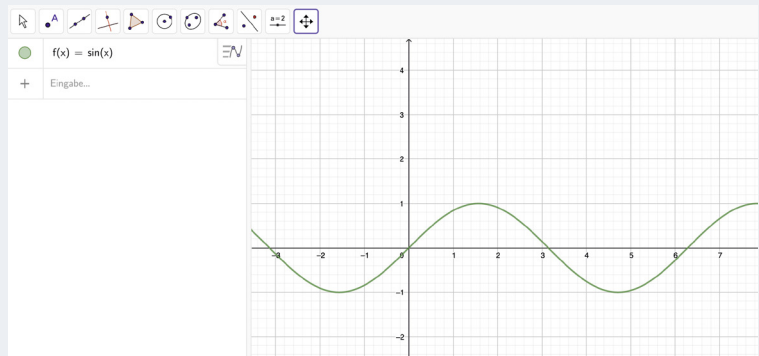


- Beschreibe die Kurven im Sachkontext und erläutere dabei auch die Tonhöhe und die Lautstärke des Tons.

Schwingende Graphen

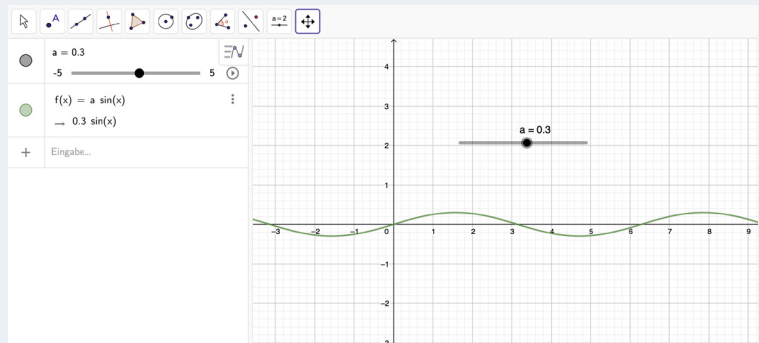
Die Graphen von Tönen lassen sich mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware darstellen. Nutze die Erkenntnisse der Vorseite.

- Einen Graphen wie bei den Tönen kannst du auch mit einer dynamischen Geometriesoftware erzeugen. Gib dazu $f(x) = \sin(x)$ ein und betrachte den Graphen, der angezeigt wird.



1. Veränderung des ersten Parameters

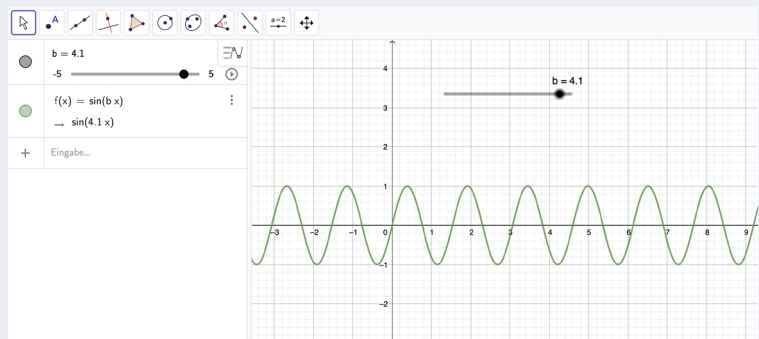
Füge einen Schieberegler a mit der Schrittweite 0,01 ein und ändere die Funktionsgleichung zu $f(x) = a \cdot \sin(x)$.



- Bewege den Schieberegler im positiven Bereich, um die Graphen von leisen und lauten Tönen darzustellen. Gib an, bei welchen Werten für a der Graph eines leisen bzw. lauten Tons dargestellt wird.

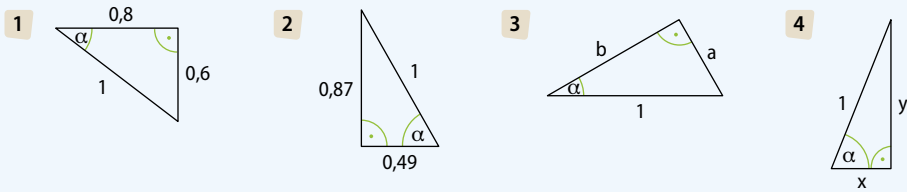
2. Veränderung des zweiten Parameters

Füge einen Schieberegler b mit der Schrittweite 0,01 ein und ändere die Funktionsgleichung zu $f(x) = \sin(b \cdot x)$.



- Bewege den Schieberegler im positiven Bereich, um die Graphen von hohen und tiefen Tönen darzustellen. Gib an, bei welchen Werten für b der Graph eines hohen bzw. tiefen Tones dargestellt wird.
- Stelle mit der dynamischen Geometriesoftware und zwei Schiebereglern ...
 - 1 laute Töne, die tief sind, dar.
 - 2 leise Töne, die hoch sind, dar.

Entdecken



- Gib jeweils den Sinus des Winkels α als Verhältnis der Seitenlängen an. Beschreibe, was dir bei den Verhältnissen auffällt.

Verstehen

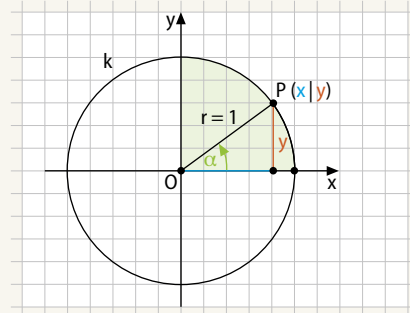
Der Sinus für beliebige Winkel lässt sich am Einheitskreis definieren.

Merke

Der Einheitskreis ist ein Kreis mit dem Radius $r = 1$.

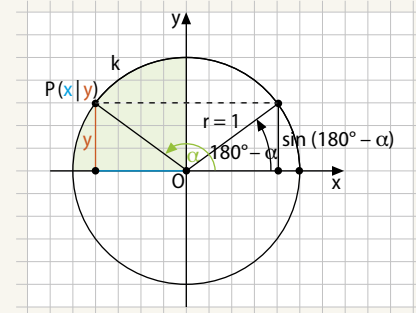
Befindet sich ein Punkt $P(x|y)$ auf dem Einheitskreis k um den Ursprung O mit $r = 1$ LE und ist α der positive Drehwinkel zwischen der positiven x -Achse und der Strecke $\overline{OP}$, so gilt:

I. Quadrant: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$



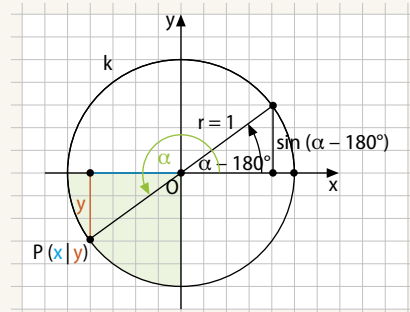
Gradmaß: $y = \sin(\alpha)$

II. Quadrant: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$



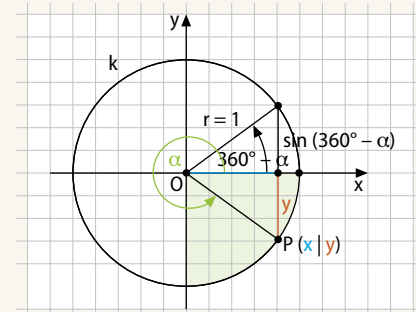
Gradmaß: $y = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$

III. Quadrant: $180^\circ < \alpha < 270^\circ$



Gradmaß: $y = \sin(\alpha - 180^\circ) = -\sin(\alpha)$

IV. Quadrant: $270^\circ < \alpha < 360^\circ$



Gradmaß: $y = \sin(360^\circ - \alpha) = -\sin(\alpha)$

Beispiel

α	30°	45°	60°
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Berechne durch Zurückführung auf einen Winkel im I. Quadranten den exakten Wert von $\sin(120^\circ)$.

Lösung:

Da $90^\circ < 120^\circ < 180^\circ$ ist, gilt: $\sin(120^\circ) = \sin(180^\circ - 120^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Nachgefragt

- Leonie behauptet: „Für alle Winkelmaße über 360° wiederholen sich die Werte des Sinus.“ Nimm Stellung zu Leonies Behauptung.

- 1 Bestimme zeichnerisch den Sinuswert des Winkels mithilfe eines Einheitskreises (Maßstab: 10 : 1).

a) 20° b) 165° c) 240° d) 330°

- 2 Erkläre mithilfe des Einheitskreises folgende Aussagen:

Drehungen über 360°

Gradmaß: $y = \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin(\alpha)$

Negative Winkel

Gradmaß: $y = \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

- 3 Berechne den exakten Sinuswert des Winkels durch Zurückführung auf einen spitzen Winkel am Einheitskreis.

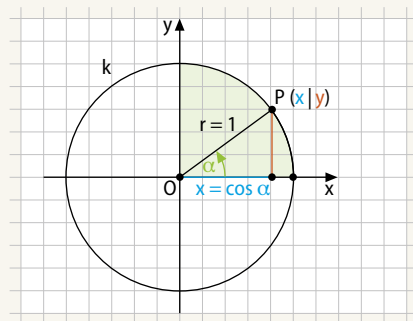
a) $\sin(390^\circ)$ b) $\sin(-450^\circ)$ c) $\sin(720^\circ)$ d) $\sin(-45^\circ)$

Aufgaben

Weiterdenken

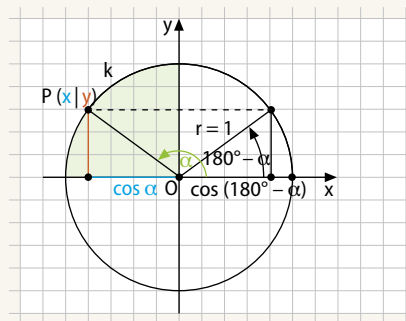
Befindet sich ein Punkt $P(x|y)$ auf dem Einheitskreis k um den Ursprung O mit $r = 1$ LE und ist α der positive Drehwinkel zwischen der positiven x -Achse und der Strecke $\overline{OP}$, so gilt:

I. Quadrant: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$



Gradmaß: $x = \cos(\alpha)$

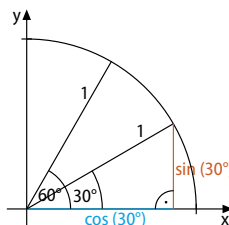
II. Quadrant: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$



Gradmaß: $x = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$

- 4 Bildet zwei Gruppen. Eine Gruppe schreibt die Zusammenhänge zwischen den Kosinuswerten im III. Quadranten und denen im I. Quadranten auf, die andere zwischen IV. und I. Quadranten. Stellt euch die Ergebnisse gegenseitig vor.

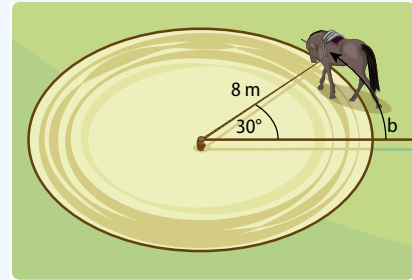
- 5 Zwischen Sinus und Kosinus bestehen folgende Zusammenhänge:
 $\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)$ und $\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$.
 Begründe die Zusammenhänge zwischen Sinus und Kosinus am Beispiel $\alpha = 30^\circ$.



Entdecken

Zur Pferdeausbildung oder im Reitunterricht wird ein Pferd beim Longieren an einer 8 m langen Leine (der „Longe“) auf einer Bahn in Kreisform geführt.

- Untersuche den Zusammenhang zwischen dem Mittelpunktswinkel α , den die Leine überstreicht, und der Bogenlänge b , also der Strecke, die das Pferd zurücklegt. Übertrage dazu die Tabelle und vervollständige sie.



α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
b	0 m							

- Für den Umfang eines Kreises gilt $U = 2\pi r$. Vergleiche für jedes Wertepaar $(\alpha | b)$ aus der Tabelle den Anteil des Winkels vom Vollwinkel $\frac{\alpha}{360^\circ}$ mit dem Anteil der Bogenlänge vom Gesamtumfang $\frac{b}{2\pi r}$.
- Beschreibe, was du feststellst, und leite daraus eine allgemeine Formel zur Berechnung der Bogenlänge b her.

Verstehen

Jedem Mittelpunktswinkel α eines Kreises mit dem Radius r lässt sich eindeutig eine Bogenlänge b zuordnen.

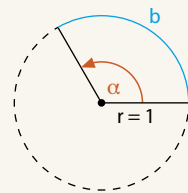
Merke

An einem Einheitskreis ($r = 1$ LE) kann man jedem **Mittelpunktswinkel** α eindeutig die Länge des zugehörigen **Kreisbogens** b zuordnen.

Statt den Winkel α in Grad zu messen, kann man die Maßzahl der zugehörigen **Bogenlänge** b am Einheitskreis verwenden. Man bezeichnet dieses Winkelmaß als **Bogenmaß** mit der Einheit „rad“ (von „Radiant“).

Es gilt:

$$\frac{b}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ} \quad \text{und damit} \quad b = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}$$



Wichtige Winkelmaße

in Grad	in rad
360	2π
180	π
90	$\frac{\pi}{2}$
45	$\frac{\pi}{4}$

Wenn feststeht, dass ein Winkel im Bogenmaß gemessen wird, lässt man die Einheit „rad“ weg.

Am Taschenrechner:
DEG („degree“):
Gradmaß
RAD („radian“):
Bogenmaß

Beispiele

- I. Berechne das zum Winkel $\alpha = 120^\circ$ zugehörige Bogenmaß.

Lösung:

$$b = 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2}{3}\pi \approx 2,09$$

- II. Berechne die Größe des Winkels α im Gradmaß, wenn seine Größe im Bogenmaß 1 rad ist.

Lösung:

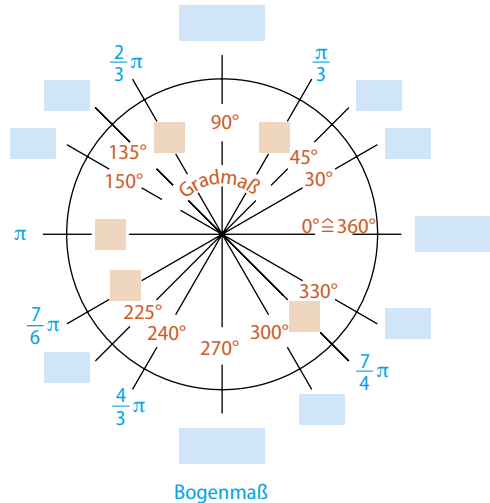
$$1 = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ} \quad | \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$$

Nachgefragt

- Erkläre die Bezeichnung „Bogenmaß“ für die Größe eines Winkels.
- Begründe, dass die Bogenmaße zu Vielfachen von 180° ganzzahlige Vielfache von π sind.

- 1 Übertrage den Einheitskreis (1 LE $\cong$ 5 cm) in dein Heft und ergänze jeweils die fehlenden Angaben. Schreibe die Angaben im Bogenmaß als Anteile von π .



Aufgaben

- 2 Bestimme die fehlenden Werte. Runde auf zwei Dezimalstellen.

Winkel im ...	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Gradmaß	24,5°	356,3°			715,0°	
Bogenmaß			0,5	4,36		45,23

- 3 Mithilfe einer Taste auf deinem Taschenrechner lässt sich das Gradmaß direkt in das Bogenmaß umrechnen.

- Beschreibe das Vorgehen mit dem Taschenrechner.
- Überprüfe deine Ergebnisse aus Aufgabe 2.

- 4 Eine Seemeile entspricht der Bogenlänge auf dem Äquator, die zum Mittelpunktswinkel von $\frac{1}{60}$ Grad gehört. Berechne die Länge einer Seemeile mithilfe der Formel für das Bogenmaß für alle Radien (Erdradius: 6378 km).

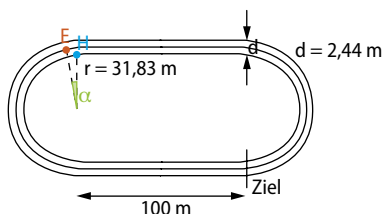
Alles klar?

Bogenmaß für alle Radien r :
 $b = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360^\circ}$

- 5 **Nachgefragt:** Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

- „Ein Winkel von 400° ist größer als ein Winkel von 350° .“
- „Ein Winkel von π rad ist größer als ein Winkel von $2,5\pi$ rad.“
- „Ein Winkel von 10 rad ist größer als ein Winkel von 10° .“

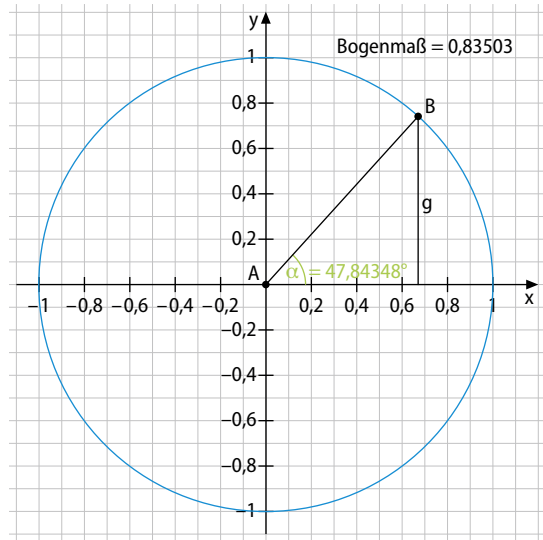
- 6 Hamza und Elias laufen im Stadion 200 m um die Wette (siehe Abbildung). Berechne den Winkel α und die Bogenlänge b , um die der Startpunkt von Elias gegenüber dem Startpunkt von Hamza verschoben werden muss, damit beide Laufstrecken 200 m lang sind.



Nutze fünf Nachkommastellen, damit das Bogenmaß hinreichend exakt ist.

- 7 Mit einer dynamischen Geometriesoftware lässt sich zu jedem Winkel α das Bogenmaß bestimmen. In der abgebildeten Konstruktion wird durch das Bewegen des Punktes B auf dem Einheitskreis der Winkel α verändert und das Bogenmaß wird direkt berechnet.

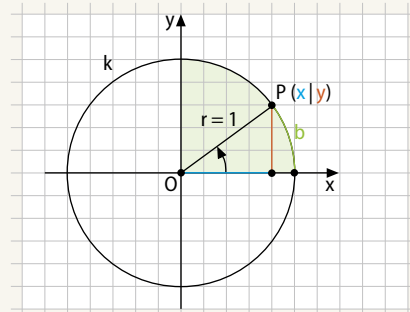
- Erstelle die Konstruktion mit einer dynamischen Geometriesoftware und bestimme einige Bogenmaße für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.
- Bewege den Punkt B über 90° hinaus. Erkläre, warum die Konstruktion hier an ihre Grenzen stößt.



Weiterdenken

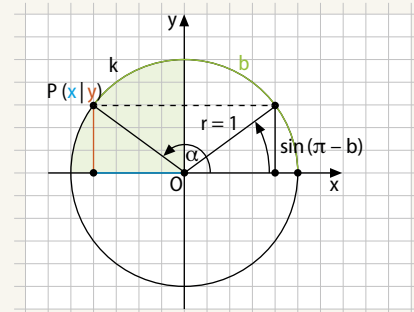
Sinus und Kosinus lassen sich auch für das Bogenmaß am Einheitskreis definieren: Befindet sich ein Punkt $P(x|y)$ auf dem Einheitskreis k um den Ursprung O mit $r = 1$ LE und ist α der positive Drehwinkel zwischen der positiven x -Achse und der Strecke $\overline{OP}$, so gilt:

I. Quadrant: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$



Bogenmaß: $y = \sin(b)$

II. Quadrant: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$



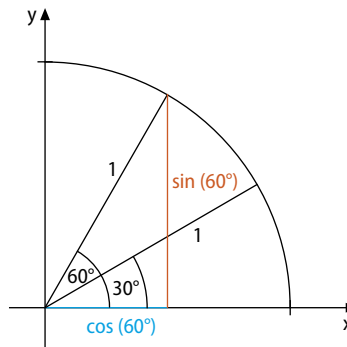
Bogenmaß: $y = \sin(\pi - b) = \sin(b)$

- 8 Erstelle für den III. und IV. Quadranten jeweils einen Einheitskreis und gib jeweils die Gleichung für das Bogenmaß an.

- 9 Vervollständige in der Tabelle das Bogenmaß b , $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für spezielle Winkel α .

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	225°	270°	315°	360°
b	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$								
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1								
$\cos(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	1								

- 10** a) Zwischen Sinus und Kosinus bestehen folgende Zusammenhänge:
 $\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)$ und $\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$.
 Begründe die Zusammenhänge zwischen Sinus und Kosinus am Beispiel $\alpha = 60^\circ$.
 b) Gib die Zusammenhänge auch im Bogenmaß an.



- 11** Berechne den exakten Wert durch Zurückführung auf einen spitzen Winkel.

- a) $\sin(150^\circ)$ b) $\sin(300^\circ)$ c) $\sin(225^\circ)$ d) $\sin(135^\circ)$
 e) $\sin(390^\circ)$ f) $\sin(-450^\circ)$ g) $\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)$ h) $\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$

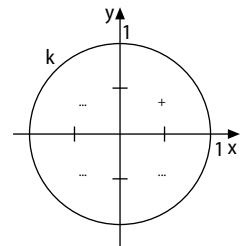
- 12** Bestimme zeichnerisch den Sinuswert des jeweiligen Winkels mithilfe eines Einheitskreises (Maßstab: 10 : 1).

- a) 40° b) 195° c) 210° d) 340°
 e) $\frac{7}{6}\pi$ f) $\frac{7}{10}\pi$ g) $\frac{17}{10}\pi$ h) $\frac{2}{5}\pi$

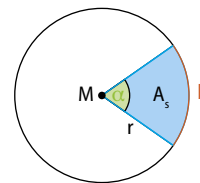
- 13** Bestimme zeichnerisch mithilfe des Einheitskreises (Maßstab: 10 : 1) die gesuchten Winkel im Gradmaß und im Bogenmaß.

- a) $\cos(\gamma) = 0,53$ b) $\cos(\gamma) = -0,95$ c) $\cos(x) = 1,15$
 d) $\sin(\alpha) = 0,97$ e) $\sin(\beta) = -0,20$ f) $\sin(x) = -0,45$

- 14** a) Ergänze in deinem Heft bei den Quadranten die Vorzeichen der Sinuswerte und begründe die Vorzeichen.
 b) Alya behauptet: „Einem gegebenen Wert für $\sin(\alpha)$ kann genau ein Winkel α zugeordnet werden.“ Überprüfe.

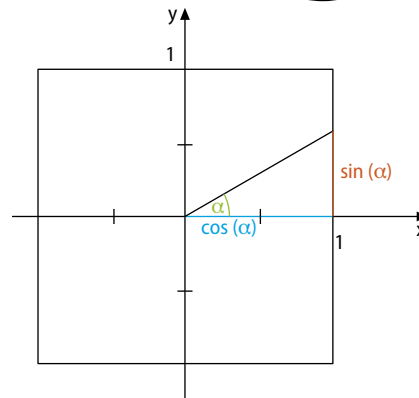


- 15** Weise nach, dass man den Flächeninhalt A_s eines Kreissektors mit Radius r und Mittelpunktswinkel b (im Bogenmaß) mit der Formel $A_s = \frac{1}{2} r \cdot b$ berechnen kann. Beachte dabei die Formel von S. 46.



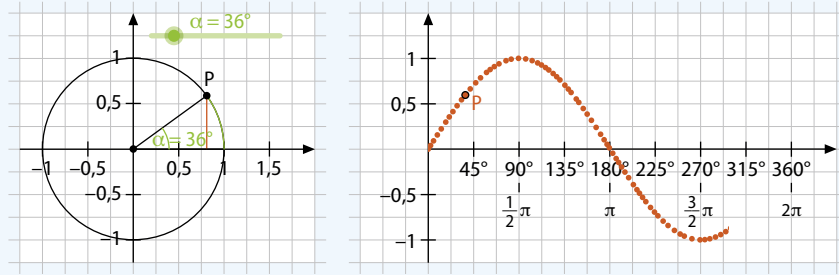
- 16** Nimm an, Sinus und Kosinus wären nicht am Einheitskreis definiert, sondern am rechts dargestellten „Einheitsquadrat“.

- a) Bestimme den Sinus- und Kosinuswert für die folgenden Winkel:
 $15^\circ; 45^\circ; 70^\circ; 90^\circ; 140^\circ; 250^\circ$
 b) Bestimme alle Winkel zwischen 0° und 360° , für die gilt:
 $\sin(\alpha) = 1; \cos(\alpha) = 1;$
 $\sin(\alpha) = 0,7; \cos(\alpha) = 0,7$



Entdecken

Nimm als Koordinaten des Punktes P die Größe des Winkels α und die Länge der roten Strecke im Dreieck.



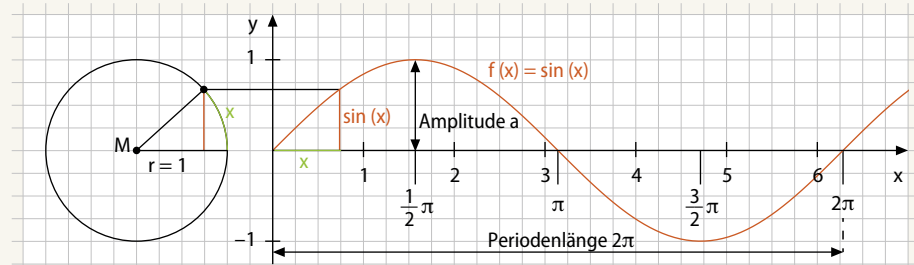
- Erstelle die abgebildete Konstruktion mit einer dynamischen Geometriesoftware.
- Lass dir die Spur des roten Punktes P anzeigen und beschreibe sie.
- Erkläre, wie die Spur **1** nach **360°** **2** vor **0°** weitergeht.

Verstehen

Im Einheitskreis lässt sich jedem Winkelmaß eindeutig ein Sinuswert zuordnen.

Merke

Die Funktion $f(x) = \sin(x)$, die jedem Winkelmaß x im Einheitskreis genau einen Sinuswert zuordnet, heißt **Sinusfunktion**, ihren Graphen nennt man **Sinuskurve**.



	Bogenmaß	Gradmaß
Definitionsbereich D	$D = \mathbb{R}$	
Wertebereich W	$W = [-1; 1]$	
Periodenlänge	2π	360°
Symmetrie	punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung	
	$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
Nullstellen	ganzzahlige Vielfache von π bzw. von 180°	
	$x_k = k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z})$	$x_k = k \cdot 180^\circ \ (k \in \mathbb{Z})$

Beispiel

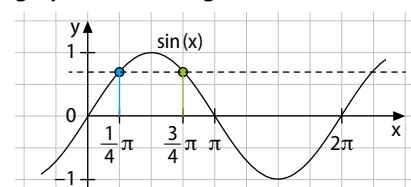
Ermittle alle Lösungen der Gleichung $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ rechnerisch und graphisch.

rechnerische Lösung:

Berechne x für $0 \leq x \leq 2\pi$:

$$x_1 = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}\pi \text{ und } x_2 = \pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

graphische Lösung:

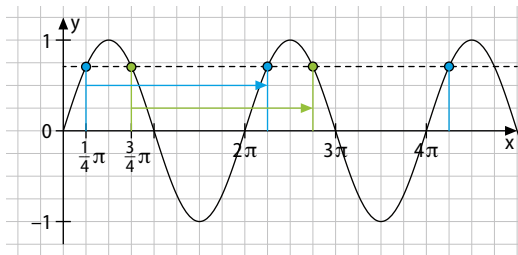


x_2 findest du aufgrund der Eigenschaften des Graphen.

Addiere ganzzahlige Vielfache der Periodenlänge:

$$x_{1,k} = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

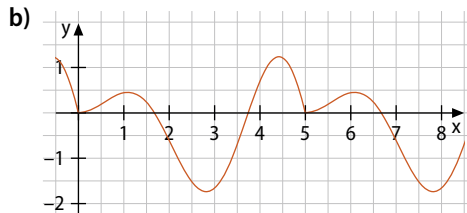
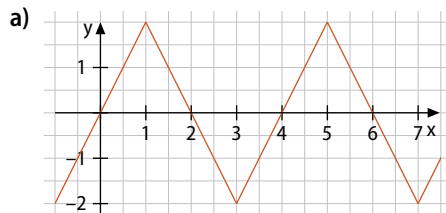
$$x_{2,k} = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$



Nachgefragt

- Erkläre den Zusammenhang zwischen den Hochpunkten der Sinusfunktion und der Lage eines Punktes P auf der Einheitskreislinie.
- Beschreibe die Arten von Symmetrie, die du in der Sinusfunktion erkennen kannst.
- Erkläre, weshalb man die Bogenlänge b bei der Sinusfunktion als Argument x verwendet.

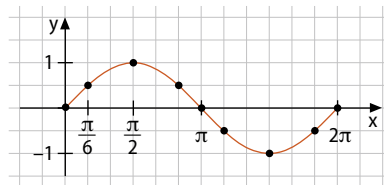
1 Gib jeweils die Periodenlänge der Funktion an.



Aufgaben

2 Der Graph der Sinusfunktion wurde mithilfe von neun ausgewählten Punkten erstellt.

- Gib die Koordinaten der Punkte an.
- Erkläre, dass es geschickt ist, die Achsen wie in der Abbildung zu skalieren.
- Skizziere den Graphen der Sinusfunktion anhand der Punkte für $-2\pi \leq x \leq 4\pi$. Beschreibe dein Vorgehen.
- Begründe, weshalb diese neun Punkte ausgewählt wurden, um den Graphen der Sinusfunktion eindeutig skizzieren zu können.



3 Ermittle graphisch die Lösungsmenge der Gleichung.

- $\sin(x) = 0,5$ für $-\pi \leq x \leq 2\pi$
- $\sin(x) < 0,5$ für $0 \leq x \leq 2\pi$
- $\sin(x) = -1$ für $-2\pi \leq x < 2\pi$
- $\sin(x) \geq 0,5$ für $2\pi \leq x < 4\pi$

4 Bestimme alle Lösungen der Gleichung.

- $\sin(x) = \frac{1}{2}$ für $0 \leq x \leq 2\pi$
- $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ für $-\pi \leq x \leq \pi$
- $\sin(x) = 0,65$ für $0 \leq x \leq 4\pi$
- $\sin(x) = -0,79$ für $x \in \mathbb{R}$

5 Gegeben ist die Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$.

- Begründe anhand des Graphen von f die Symmetrie $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Beschreibe die Lage der Nullstellen von f: $f(x) = 0$ für $x = k \cdot \pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
- Beschreibe die folgende Eigenschaft von f: $f(x + k \cdot 2\pi) = f(x)$; $k \in \mathbb{Z}$.

Entdecken

- Zeichne die Funktionen mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware wie im Entdecken auf S. 43. Nutze jeweils einen Schieberegler für den entsprechenden Parameter. Beschreibe den Einfluss des jeweiligen Parameters auf den Graphen der Funktion.

1 $f(x) = a \cdot \sin(x)$

2 $f(x) = \sin(b \cdot x)$

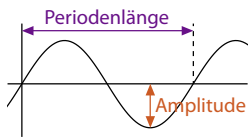
Verstehen

Die Sinusfunktion lässt sich durch die Parameter a und b variieren:

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x) \text{ mit } x \in \mathbb{R} \text{ und } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Merke

Der Parameter $|a|$ heißt **Amplitude** und ist der Abstand des höchsten oder niedrigsten Punktes von der Mittellinie.



Der Parameter b ergibt sich direkt aus der Periodenlänge p :

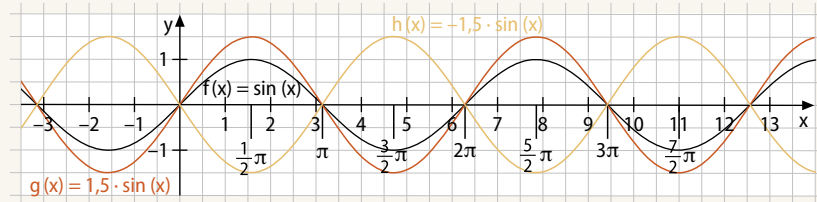
$$|b| = \frac{2\pi}{p} \text{ mit } b < 0 \text{ bei Spiegelung an x-Achse}$$

Der Parameter a in $f(x) = a \cdot \sin(x)$ beschreibt die Amplitude und verändert die Wertemenge ($y \in [-|a|; |a|]$) gegenüber der Wertemenge von $\sin(x)$ ($y \in [-1; 1]$). Den Abstand zwischen dem höchsten y -Wert und der Mittellage nennt man Amplitude.

$|a| < 1$ staucht $\sin(x)$ in y -Richtung.

$|a| > 1$ streckt

$a < 0$ spiegelt $|a| \cdot \sin(x)$ an der x -Achse.

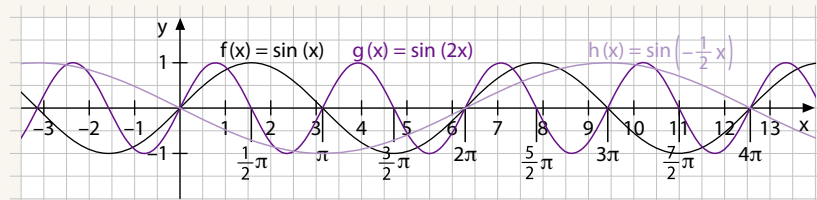


Der Parameter b in $f(x) = \sin(b \cdot x)$ verändert die Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{|b|}$ gegenüber der von $\sin(x)$ (Periodenlänge 2π).

$|b| < 1$ verlängert

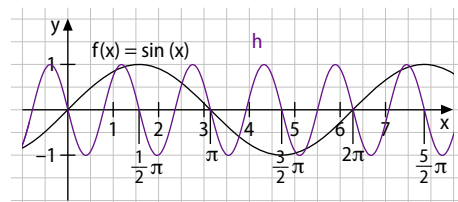
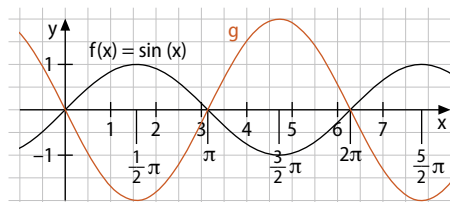
$|b| > 1$ verkürzt

$b < 0$ spiegelt $\sin(|b| \cdot x)$ an der x -Achse.



Beispiel

Gib eine Funktionsgleichung zu den Graphen von g und h an. Begründe, wie du auf die Funktionsgleichung kommst.



Lösung:

Der Graph ist gestreckt: $|a| = 2$.
 Der Graph ist an der x-Achse gespiegelt, also $a < 0$. $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Der Graph ist gestreckt: } |a| = 2. \\ \text{Der Graph ist an der x-Achse gespiegelt, also } a < 0. \end{array}} \right\} g(x) = -2 \cdot \sin(x)$

Die Periodenlänge wurde verändert: $p = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$.
 Der Graph wurde nicht an der x-Achse gespiegelt, also $b > 0$. $\left. \vphantom{\text{Die Periodenlänge wurde verändert: } p = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}.} \right\} h(x) = \sin(4x)$

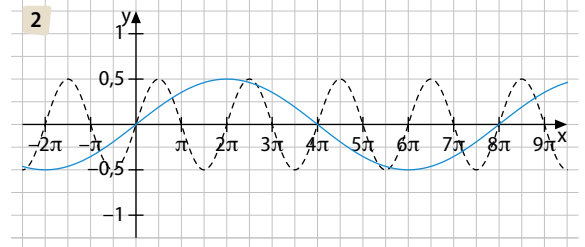
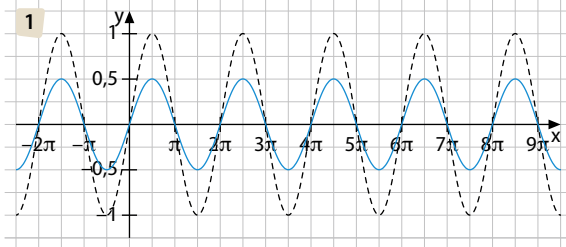
Nachgefragt

- Gib die Amplitude, die Periodenlänge und die Wertemenge der Sinusfunktion f mit $f(x) = -2 \cdot \sin(0,5 \cdot x)$ an. Erkläre, wie die Amplitude mit der Wertemenge zusammenhängt.

Aufgaben

- Beschreibe, wie der Graph von f aus dem der Funktion g mit $g(x) = \sin(x)$ hervorgeht.
 a) $f(x) = -3 \cdot \sin(x)$ b) $f(x) = 0,5 \cdot \sin(x)$ c) $f(x) = \sin(3x)$ d) $f(x) = 1,5 \cdot \sin(2x)$

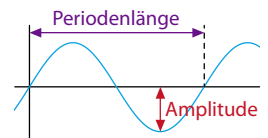
- Jonas zeichnet schrittweise den Graphen der Funktion $f(x) = 0,5 \sin\left(\frac{1}{4}x\right)$.



- Beschreibe und begründe sein Vorgehen.
- Gib einen anderen Ablauf an, um den Graphen der Funktion zu zeichnen.

- Zeichne den Graphen der Funktion f mindestens eine Periodenlänge lang. Gib dabei jeweils die Wertemenge W , die **Amplitude** und die **Periodenlänge** an.

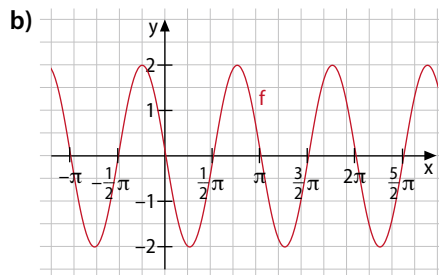
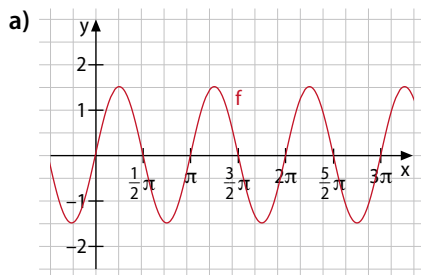
- $f(x) = -0,5 \sin(x)$ b) $f(x) = 2,5 \sin(x)$ c) $f(x) = -1,5 \sin(x)$ d) $f(x) = \sin(2x)$
 e) $f(x) = -\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ f) $f(x) = \sin(4x)$ g) $f(x) = -2 \sin(3x)$ h) $f(x) = 1,5 \sin\left(\frac{1}{4}x\right)$



- Verdreifache die Periodenlänge der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$. Beschreibe den Verlauf der veränderten Sinusfunktion. Nutze für deine Beschreibung die Begriffe Periodenlänge, Nullstellen, Symmetrie, Definitionsbereich und Wertebereich.

Alles klar?

- Gib eine Funktionsgleichung zum Graphen von f an.



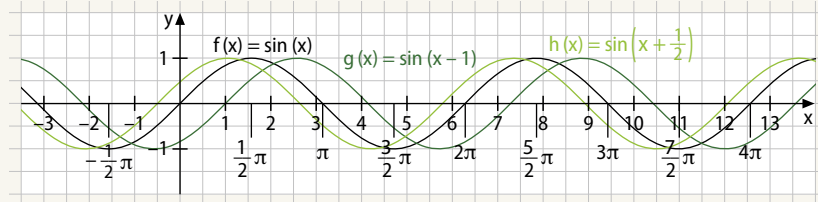
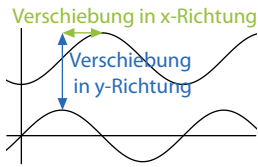
- 6 **Nachgefragt:** Begründe, dass $f(x) = -3 \cdot \sin(x)$ und $g(x) = 3 \cdot \sin(x)$ dieselbe Amplitude haben.

Weiterdenken

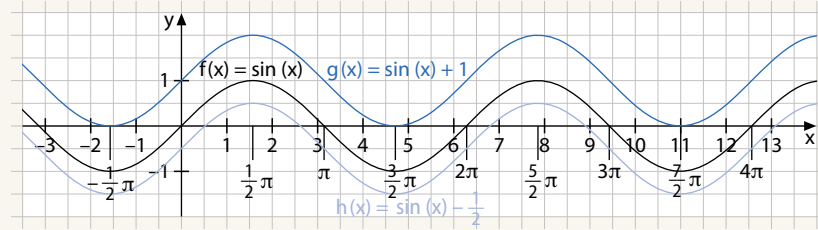
Die **allgemeine Sinusfunktion** lässt sich in der Form

$f(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x + c)] + d$ mit $x, c, d \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ schreiben.

- 1 Der **Parameter c** verschiebt die Funktion $\sin(x)$ entlang der x-Achse:
 $c > 0$ verschiebt in negative Richtung, $c < 0$ verschiebt in positive Richtung.



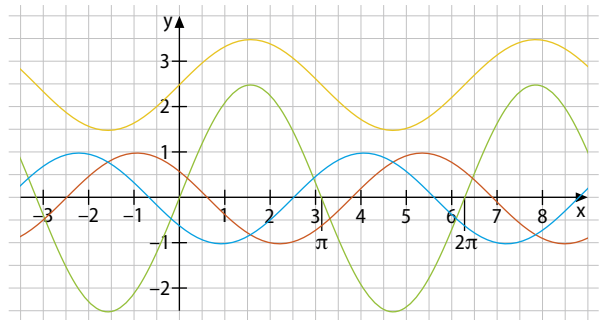
- 2 Der **Parameter d** verschiebt die Funktion $\sin(x)$ entlang der y-Achse:
 $d > 0$ verschiebt in positive Richtung, $d < 0$ verschiebt in negative Richtung.



- 7 Beschreibe, wie der Graph der Funktion f aus dem Graphen von $g(x) = \sin(x)$ hervorgeht.
 a) $f(x) = -3 \cdot \sin(x)$ b) $f(x) = 0,5 \cdot \sin(x + 2)$ c) $f(x) = \sin(4x) + 2,5$

- 8 Ordne jeder Funktionsgleichung den richtigen Graphen zu. Begründe deine Auswahl.

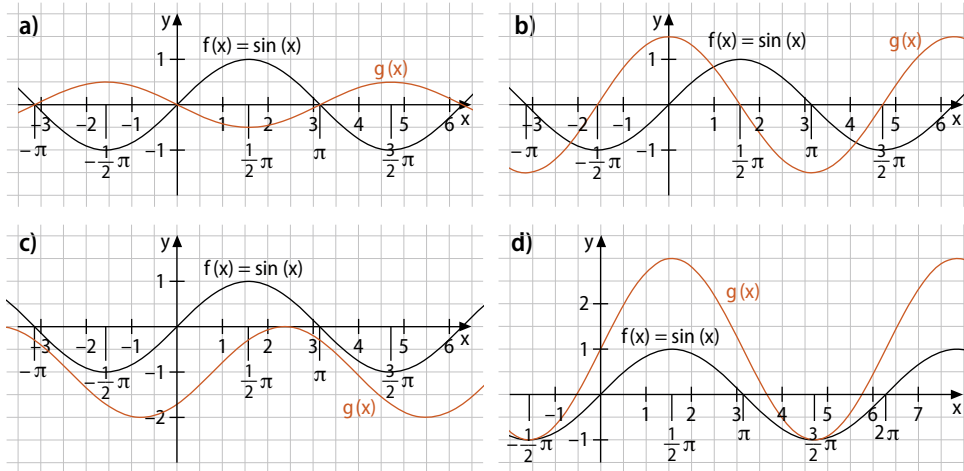
$$\begin{aligned} f(x) &= 2,5 \cdot \sin(x) \\ g(x) &= \sin(x + 2,5) \\ h(x) &= \sin(x) + 2,5 \\ i(x) &= \sin(x - 2,5) \end{aligned}$$



- 9 1 $f(x) = -\sin(0,5x)$ 2 $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$
 3 $f(x) = 1,5 \cdot \sin[2 \cdot (x - 0,5)] - 1$ 4 $f(x) = -2 \cdot \sin[1,5 \cdot (x - 2)] + 4$

- a) Zeichne den Graphen der Funktion f mindestens eine Periodenlänge lang.
 b) Gib jeweils den Wertebereich W , die Amplitude und die Periodenlänge an.

- 10 Gib mindestens zwei mögliche Funktionsgleichungen zu dem roten Graphen an. Begründe dein Vorgehen. Der Vergleich mit $f(x) = \sin(x)$ kann helfen.



11

A WANTED

$$W = [-2; 2]$$

 Periodenlänge: 2π

 eine Nullstelle bei $\frac{1}{2}\pi$

$$1 \quad f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{4}x\right) + 2$$

B WANTED

$$W = [0; 4]$$

 Periodenlänge: π

 Schnittpunkt: $P(0 | 2)$

$$2 \quad f(x) = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$$

C WANTED

$$W = [0; 4]$$

 Periodenlänge: 8π

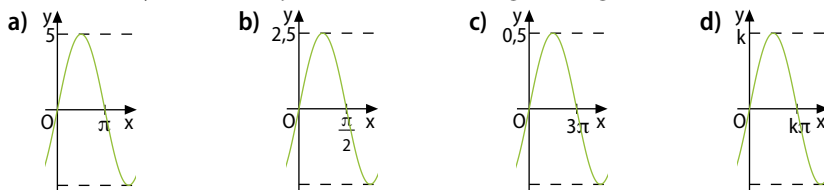
 eine Nullstelle bei 6π

$$3 \quad f(x) = 2 \cdot \sin(2x) + 2$$

- a) Ordne die Steckbriefe einer Funktionsgleichung zu. Begründe deine Auswahl.
 b) Erstelle selbst einen solchen Steckbrief. Lass die Funktionen von einem Partner oder einer Partnerin bestimmen.

12

Die Abbildungen zeigen gleiche Sinuskurven in unterschiedlich beschrifteten Koordinatensystemen. Gib jeweils eine Funktionsgleichung an.



13

Finde unter den Funktionstermen alle, deren Graphen in $\mathbb{R}$ identisch sind.

$$-0,75 \cdot \sin(x)$$

$$\frac{3}{4} \cdot \sin(x + \pi)$$

$$-1,5 \cdot \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) + 1$$

$$\frac{3 \cdot \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)}{2 + 1}$$

$$\frac{3 \cdot \sin(x - \pi)}{4}$$

$$\frac{-2 \cdot \sin(x - \pi) - 6}{3}$$

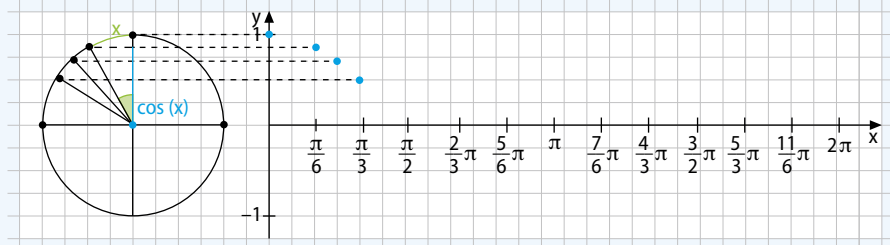
$$\frac{2}{3} \cdot \sin(x + \pi) - 2$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \left(3 \cdot \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) - 2\right)$$

$$-2 - \frac{2 \cdot \sin(x - \pi)}{3}$$

Entdecken

Zeichne Punkt für Punkt mithilfe des Einheitskreises im Maßstab 2 : 1 den Graphen der Funktion, die jedem Winkelmaß x im Einheitskreis den zugehörigen Kosinuswert zuordnet. Trage dafür auf der x -Achse den Winkel x im Bogenmaß und als y -Wert den zu x gehörigen Kosinuswert ab. Um die Kosinuswerte zu ermitteln, beginne im Einheitskreis bei 12 Uhr statt, wie beim Sinus, bei 3 Uhr.

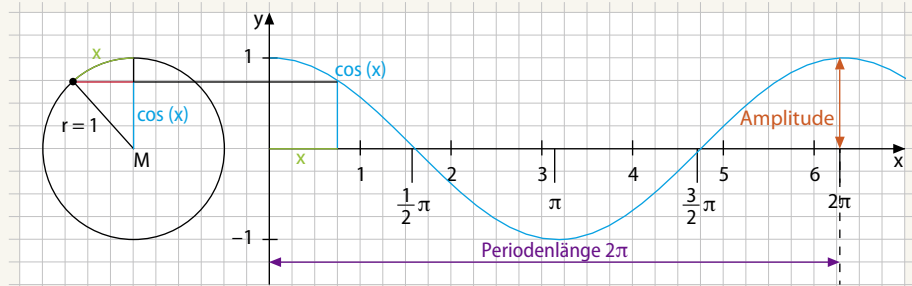


Verstehen

Jedem Winkelmaß im Einheitskreis lässt sich eindeutig ein Kosinuswert zuordnen.

Merke

Die Funktion $f(x) = \cos(x)$, die jedem Winkelmaß x im Einheitskreis genau einen Kosinuswert zuordnet, heißt Kosinusfunktion, ihren Graphen nennt man Kosinuskurve.

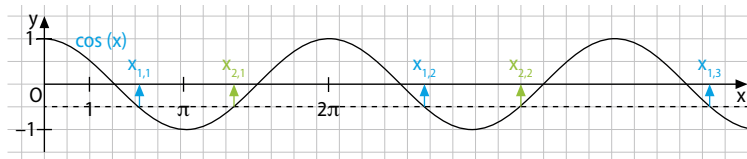


Den Graphen der Kosinusfunktion kann man als einen um $-\frac{\pi}{2}$ verschobenen Graphen der Sinusfunktion auffassen. Es gilt: $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$. Die Amplitude und die Periodenlänge lassen sich demnach ebenso wie bei der Sinusfunktion beeinflussen: $f(x) = a \cos(bx)$.

Beispiel

Berechne alle Lösungen der Gleichung $\cos(x) = -0,5$.

Lösung:



- 1 Berechne x für $0 \leq x \leq 2\pi$:

$$x_1 = \cos^{-1}(-0,5) = \frac{2}{3}\pi$$

$$x_2 = 2\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

- 2 Addiere ganzzahlige Vielfache der Periodenlänge:

$$x_{1,k} = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$x_{2,k} = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Nachgefragt

- Erkläre, warum man zum Zeichnen der Kosinuskurve ebenfalls den Einheitskreis benutzen kann, und beschreibe, was man dabei beachten muss.
- Beschreibe die Eigenschaften der Kosinusfunktion. Vergleiche mit der Sinusfunktion.

1

Beschreibung	Graph	Funktionsgleichung
		$f(x) = 3 \cdot \cos(1,5x)$
Die Kosinusfunktion ist um den Faktor 3 in x-Richtung gestaucht.		

Aufgaben

- Vervollständige die Tabelle in deinem Heft für $f(x) = a \cdot \cos(bx)$.
- Gib den Wertebereich, die Amplitude und die Periodenlänge der Funktionen an.

2

Bestimme alle Lösungen der Gleichung.

- $\cos(x) = 0,5$
- $\cos(x) = 0,423$
- $\cos(x) = -0,914$

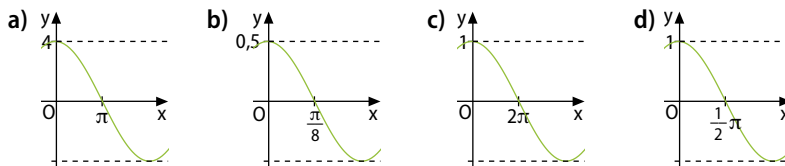
3

Entscheide, welche der folgenden Aussagen für die Kosinusfunktion zutreffend sind.

- $\cos(x) = \cos(-x)$
- $\cos(x) = -\cos(-x)$
- $\cos(x) = \cos(x - k \cdot 2\pi)$
- $\cos(2x) = 2 \cdot \cos(x)$

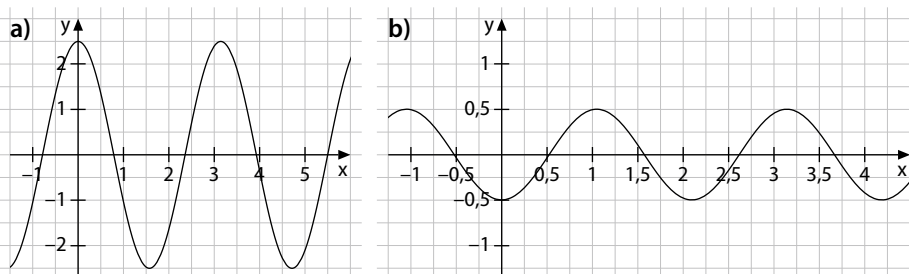
4

Die Abbildungen zeigen Ausschnitte von Kosinuskurven in unterschiedlich beschrifteten Koordinatensystemen. Gib jeweils eine Funktionsgleichung an.



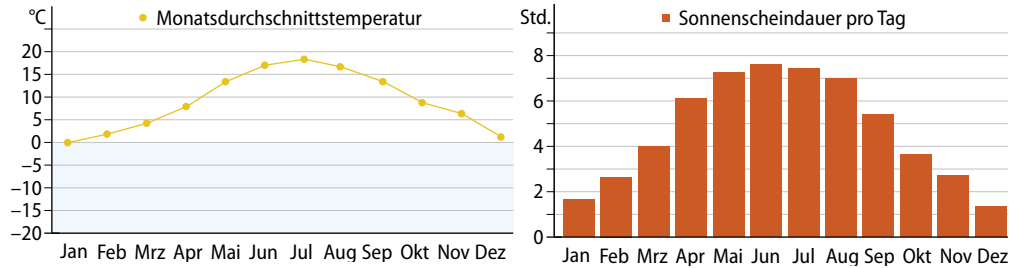
5

Gib die Gleichung einer Kosinusfunktion an, die zu dem Graphen passt. Erkläre dein Vorgehen.



Aufgaben

1



- a) Begründe, dass die dargestellten Vorgänge periodische Vorgänge sind.
 b) Gib jeweils eine Funktionsgleichung an, mit der sich der Vorgang modellieren lässt.

2

Datum	01.01.	15.01.	01.02.	15.02.	01.03.	15.03.	01.04.	15.04.
Aufgang	8:17	8:10	7:48	7:23	6:53	6:21	5:41	5:09
Untergang	16:03	16:22	16:52	17:19	17:45	18:10	18:40	19:05

Datum	01.05.	15.05.	01.06.	15.06.	01.07.	15.07.	01.08.	15.08.
Aufgang	4:35	4:11	3:50	3:43	3:48	4:01	4:26	4:49
Untergang	19:33	19:56	20:19	20:31	20:32	20:22	19:59	19:32

Datum	01.09.	15.09.	01.10.	15.10.	01.11.	15.11.	01.12.	15.12.
Aufgang	5:17	5:40	6:07	6:32	7:02	7:28	7:54	8:11
Untergang	18:55	18:22	17:44	17:12	16:37	16:13	15:56	15:52

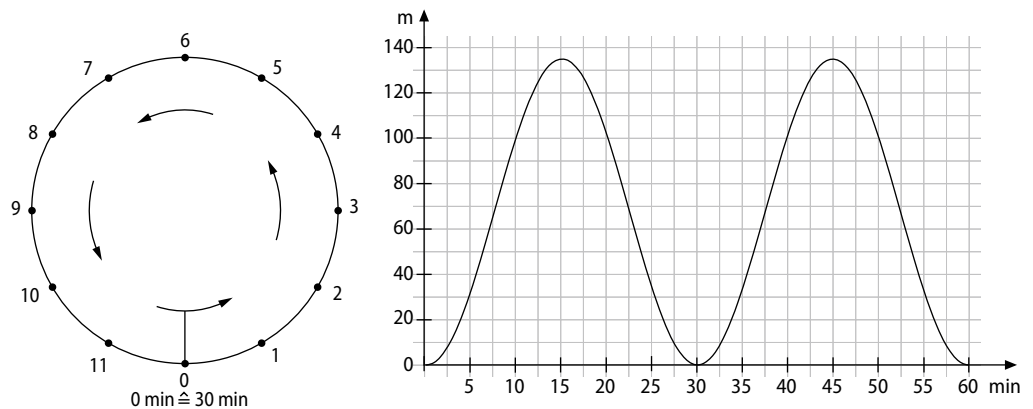
- a) Stelle die Sonnenaufgangszeiten (Sonnenuntergangszeiten, Tageslängen) graphisch dar. Beschreibe deren Verlauf.
 b) Modelliere mit einem Computerprogramm eine Funktionsgleichung für die Sonnenaufgangszeiten (Sonnenuntergangszeiten, Tageslängen).

Lege den Koordinatenursprung geschickt in die Mitte der Amplitude.



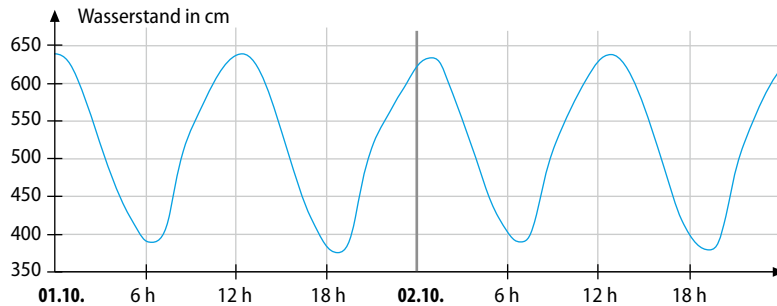
3

Das London Eye hat eine Höhe von 135 m und ist damit das größte Riesenrad Europas. Für eine Umdrehung braucht es etwa 30 min. Die Abbildung zeigt den „Höhengraph“ einer Gondel während eines Durchlaufs.

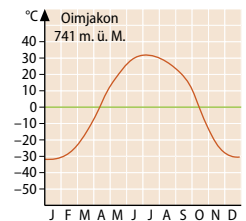


- a) Übertrage den „Höhengraph“ in dein Heft und markiere die 12 Punkte am Graphen.
 b) Begründe die Aussage: „Der Verlauf des Graphen gleicht einer Kosinusfunktion.“
 c) Gib die Funktionsgleichung einer passenden Kosinusfunktion an. Tipp: Lege dazu die Zeitachse in die Mitte der Amplitude. Erkläre dein Vorgehen.

- 4** Bedingt durch die Erdrotation und die Anziehungskraft von Erde und Mond bzw. Sonne entstehen periodische Wasserbewegungen der Ozeane, die sich vor allem an den Küsten bemerkbar machen. Man spricht von den Gezeiten Ebbe und Flut. Ein Gezeitenkalender zeigt die jeweiligen Stände von Hoch- und Niedrigwasser, die man – für die Schifffahrt wichtig – auch schon einige Zeit im Voraus berechnen kann. Die Grafik zeigt den Wasserstand an der Fischerbalje auf Borkum am 1. und 2. Oktober 2022.



- a) Bestimme die Periodenlänge des Graphen. Erkläre ihre Bedeutung.
 - b) Ermittle mit einem Computer eine Gleichung, die den Verlauf möglichst gut wieder-gibt. Wähle die Lage der Zeitachse geschickt. Berechne mindestens drei Werte und überprüfe am Graphen. Benenne Verbesserungsmöglichkeiten deines Modells.
- 5**
- a) Begründe, dass der Temperaturverlauf in Oimjakon ein periodischer Vorgang ist.
 - b) Gib mindestens eine Funktionsgleichung an, die den Vorgang modelliert.
 - c) Beurteilt in Teamarbeit, wie gut die Funktion aus b) den Verlauf modelliert.
- 6** Der Gezeitenverlauf der Nordsee in der Nähe des Ärmelkanals kann näherungsweise durch $h(t) = -\frac{7}{2} \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{29} \cdot t\right)$ beschrieben werden. Dabei gibt $h(t)$ die Höhe des Wasserstandes in Metern in Abhängigkeit von der Zeit t an, zwischen der die Gezeiten bei Hoch- und Niedrigwasser schwanken. Die Zeit wird in Stunden nach dem letzten Niedrigwasser gemessen.
- a) Zeichne den Graphen der Funktion mithilfe eines Computerprogramms.
 - b) Das letzte Niedrigwasser war um 6:00 Uhr. Bestimme die Zeitpunkte des nächsten Hoch- und Niedrigwassers.
 - c) Eine Kanalfähre hat ca. 7 m Tiefgang. Ermittle ausgehend von b) die Zeiträume, in denen sie den Kanal innerhalb der nächsten 24 Stunden nicht durchqueren sollte.
- 7** Bei modernen Heizsystemen kann man mithilfe von Thermostaten und Steuereinheiten die Temperatur regeln. Im Kinderzimmer eines Hauses wurde eine Temperatur von 21 °C vorgewählt. Sobald die Temperatur auf 20,5 °C gesunken ist, schaltet sich die Heizung ein, nach Erreichen der gewünschten 21 °C schaltet sich die Heizung ab, die Temperatur steigt aber wegen der dann warmen Heizkörper noch weiter auf 21,5 °C. Der Abkühlvorgang aufgrund von Wärmeverlusten von 21,5 °C auf 20,5 °C dauert zwei Stunden, der Erwärmungsvorgang bis zu einer Temperatur von 21,5 °C ebenfalls.
- a) Stelle die Situation mithilfe einer Skizze dar und erkläre sie.
 - b) Begründe, dass die dargestellte Situation ein periodischer Vorgang ist.
 - c) Finde eine Funktionsgleichung, mit der sich die Situation modellieren lässt.
 - d) Stellt euch in einer Gruppe Situationen mit einem ähnlichen Regelverhalten vor und skizziert deren Verlauf.



Die folgenden Aufgaben behandeln alle Themen, die du in diesem Kapitel kennengelernt hast. Auf dieser Seite sind die Aufgaben in zwei Spalten unterteilt. Die **grünen** Aufgaben auf der linken Seite sind etwas einfacher als die **blauen** auf der rechten Seite. Entscheide bei jeder Aufgabe selbst, welche Seite du dir zutraust!

- 1 Berechne die Größe des Winkels im Bogenmaß bzw. im Gradmaß.

	a)	b)	c)	d)
α	36°	252°		
x			2,7	5,4

	a)	b)	c)	d)
α	-54°		504°	
x		$\frac{9}{4}\pi$		$-\frac{7}{8}\pi$

- 2 Bestimme zeichnerisch den Sinuswert und den Kosinuswert des Winkels bzw. den Winkel α . Nutze einen Einheitskreis als Hilfestellung.

- a) $\alpha = 40^\circ$ b) $\alpha = 115^\circ$
 c) $\alpha = 190^\circ$ d) $\alpha = 325^\circ$
 e) $\sin(\alpha) = 0,85$ f) $\cos(\alpha) = 0,29$

- a) $\alpha = -40^\circ$ b) $\alpha = 475^\circ$
 c) $\alpha = -524^\circ$ d) $x = 2,1\pi$
 e) $\sin(\alpha) = -0,79$ f) $\cos(\alpha) = -0,24$

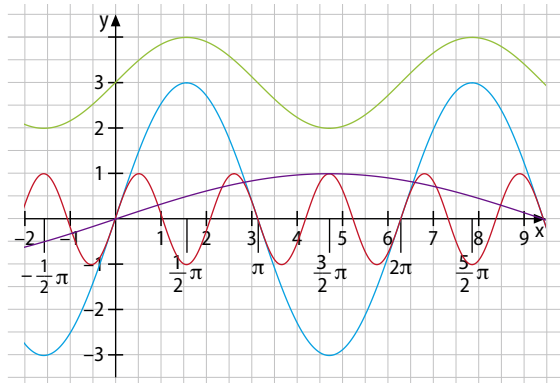
- 3 Zeichne mit einer dynamischen Geometriesoftware den Graphen der Funktion f mindestens eine Periodenlänge lang. Gib den Wertebereich, die Amplitude und die Periodenlänge an.

- a) $f(x) = 2 \cdot \sin(4x)$
 b) $f(x) = -3 \cdot \sin(0,5x)$
 c) $f(x) = \sin(x - 1) + 2$
 d) $f(x) = -2 \cdot \cos(1,5x)$

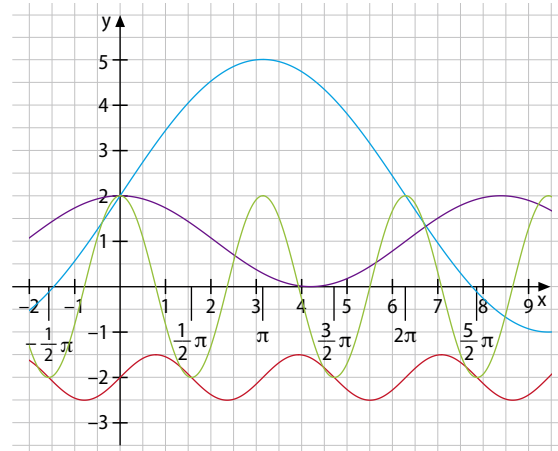
- a) $f(x) = 2 \cdot \sin[4 \cdot (x + 3)] - 1$
 b) $f(x) = -3 \cdot \sin[0,5 \cdot (x - 1)] + 2$
 c) $f(x) = 2,5 \cdot \sin(3x + 6) + 1,5$
 d) $f(x) = -2 \cdot \cos(1,5x - 6) - 2,4$

- 4 Ordne die Funktionsgleichungen den Funktionsgraphen zu. Begründe deine Zuordnung.

$f(x) = 3 \cdot \sin(x)$ $g(x) = \sin(3x)$
 $h(x) = \sin(x) + 3$ $i(x) = \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$



- Gib zu jedem Graphen eine zugehörige Funktionsgleichung an. Beschreibe dein Vorgehen.



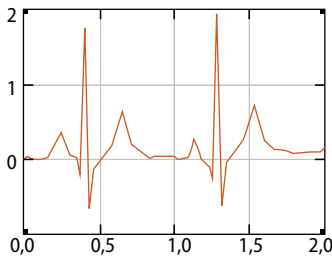
- 5 Bestimme alle Lösungen der Gleichung im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$.

- a) $\sin(x) = 0,5$ b) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 c) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

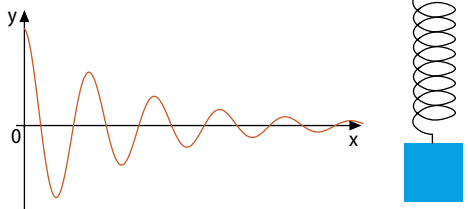
- a) $2 \cdot \sin(x) = 1$ b) $\sin(x) + \frac{1}{3} = 1$
 c) $2 \cdot \cos(x) - 1 = 0$ d) $\cos(x) + \frac{1}{2} = 0$

- 1 a)** Entscheide begründet, ob folgende Vorgänge periodisch sind. Beschreibe bei den periodischen Vorgängen die Periodenlänge.

1 EKG



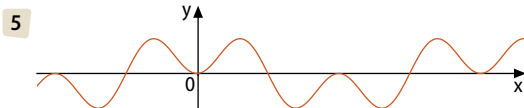
2 Gedämpfte Schwingung eines Federpendels



3 Mondphasen



4 Pendeluhr

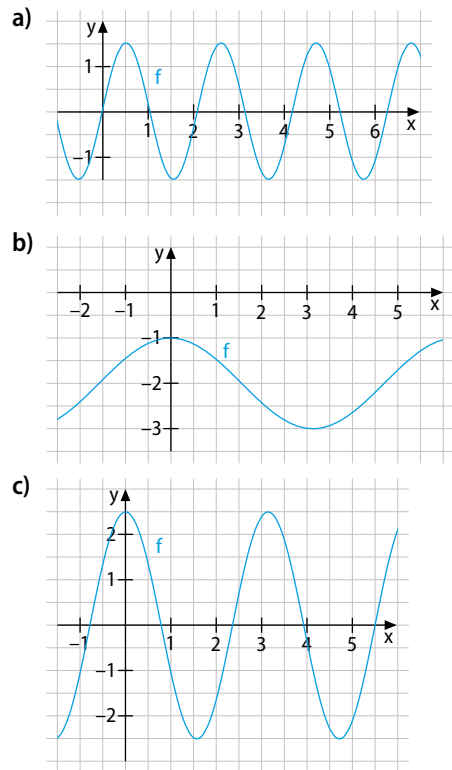


- b)** Nenne noch weitere Beispiele für periodische Vorgänge.

- 2** Bestimme zu jedem Funktionsterm die Amplitude, die Periodenlänge und die Wertemenge.

- a) $f(x) = 3 \cdot \sin(4x) - 1,5$
 b) $f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 0,5$
 c) $f(x) = \sin\left[2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$
 d) $f(x) = 2 \cdot \sin(1,5x + 6)$
 e) $f(x) = -0,5 \cdot \sin(3x - \pi) + 2$
 f) $f(x) = -4 \cdot \cos(0,5x)$

- 3** Gib eine Funktionsgleichung zum Graphen an.



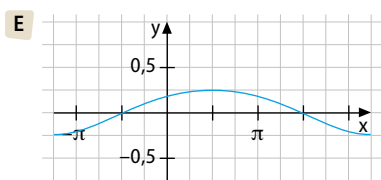
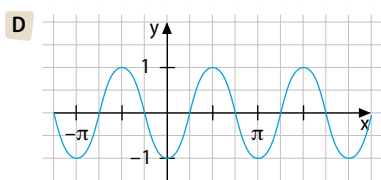
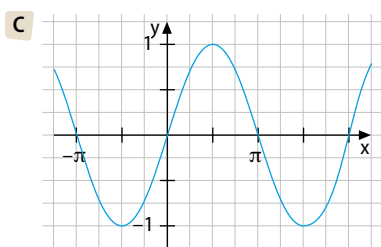
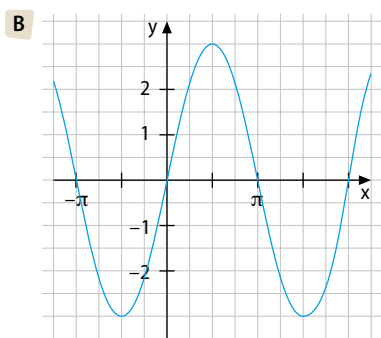
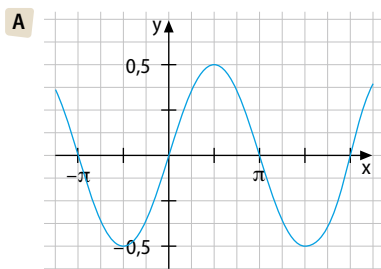
- 4** Bestimme alle Lösungen der Gleichung.

- a) $2 \cdot \sin(x) = 1$ für $0 \leq x \leq 2\pi$
 b) $(\sin(x))^2 = 1$ für $-2\pi \leq x \leq 2\pi$
 c) $\sin(x) = 1,3$ für $x \in \mathbb{R}$
 d) $\sin(2x) + 3 = 3,5$ für $0 \leq x \leq 2\pi$

- 5** Zeichne den Graphen einer Kosinusfunktion.

- a) Die Amplitude beträgt 2 und der Graph ist an der x-Achse gespiegelt.
 b) Eine Periode ist 6π lang und der Graph ist um 2 Einheiten nach oben verschoben.
 c) Es gilt: $a = -1$; $p = 2$; $d = -1$

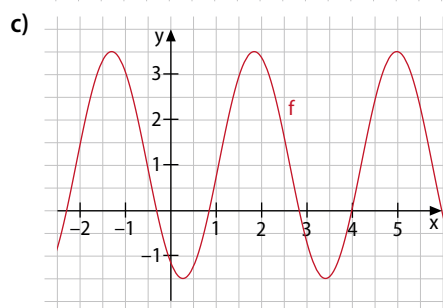
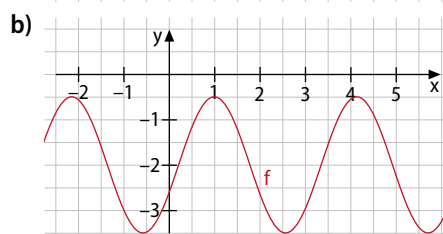
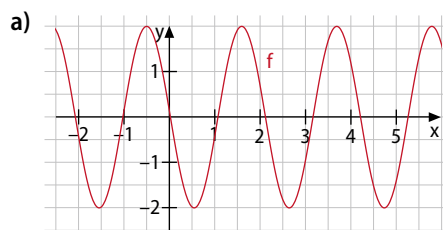
- 6 Ordne jedem Funktionsgraphen eine passende Funktionsgleichung zu. Begründe deine Zuordnung anhand der Eigenschaften der Funktionen.



- | | |
|---------------------------|--|
| 1 $y = 3 \cdot \sin(x)$ | 2 $y = -\sin(-x)$ |
| 3 $y = 0,5 \cdot \sin(x)$ | 4 $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ |
| 5 $y = \cos(2x + \pi)$ | 6 $y = \frac{1}{4} \cdot \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ |

- 7 a) Beschreibe, wie man schrittweise aus dem Graphen der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ den Graphen von $g(x) = 2,5 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ erhält ($D = \mathbb{R}$).
b) Zeichne den Graphen von $g(x)$ im Bereich $0 \leq x \leq 4\pi$.

- 8 Gib zu jedem Graphen mehrere mögliche Funktionsgleichungen an, aber jeweils mindestens eine Sinus- und eine Kosinusfunktion.



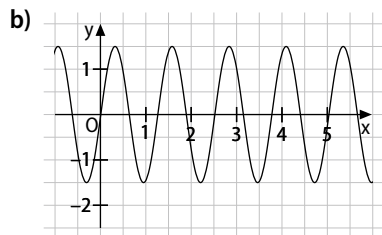
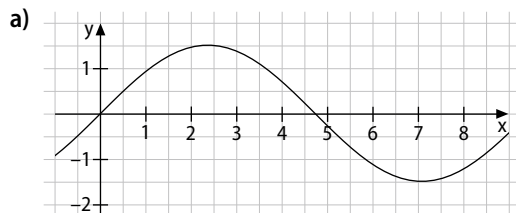
- 9 Gib eine passende Funktionsgleichung einer Sinus- oder Kosinusfunktion an.

- a) Amplitude 3, Periodenlänge π , 1. Nullstelle bei $x = 0$.
b) Amplitude 2, Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts und 2 nach unten.
c) Achsensymmetrisch zur y-Achse, Periodenlänge 4π , Verschiebung um 1 Einheit nach oben, Amplitude 0,5.
d) Wertebereich $[-5; 3]$, Periodenlänge 2π , Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links und um 1 Einheit nach oben. Bei $x = 0$ ist der Graph seinen höchsten Punkt.

- 10** Ein Riesenrad hat einen Durchmesser von 18 m und 16 Gondeln. Die Höhe einer Gondel lässt sich durch eine Sinusfunktion beschreiben.

- Gib eine passende Funktionsgleichung an, wenn man den Mittelpunkt des Rades als Koordinatenursprung wählt.
- Gib eine passende Funktionsgleichung an, wenn die Einstiegsplattform 3 m über dem Boden liegt.

- 11** Das Diagramm stellt eine Wasserwelle graphisch dar. Beschreibe die mögliche Bedeutung der x- und der y-Achse und ermittle aus dem Diagramm eine Funktionsgleichung.



- 12** Begründe, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) Am Einheitskreis gilt: $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$.

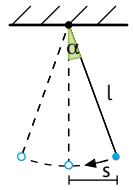
b) Die Funktion $f(x) = \cos(x)$ ist immer größer oder gleich 0.

c) Sinusfunktion und Kosinusfunktion sind phasenweise verschoben um $\frac{\pi}{2}$.

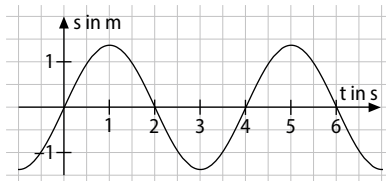
- 13** Zeige auf zwei verschiedene Arten, dass stets gilt: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

- Begründe anhand des Einheitskreises.
- Zeige die Gleichheit mit der Definition über Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck.

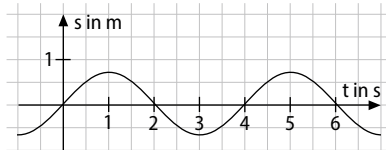
- 14** An einem Faden der Länge l hängt eine frei schwingende Metallkugel. Die Kugel wird um den Winkel α ausgelenkt und dann losgelassen. Der Graph zeigt die horizontale Auslenkung s in Abhängigkeit der Zeit t . Bestimme die Schwingungsdauer und die Amplitude der als reibungsfrei angenommenen Schwingung. Halte deine Beobachtungen fest.



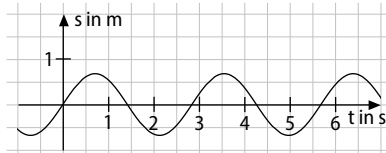
- a) $l = 4 \text{ m}$, $\alpha = 20^\circ$



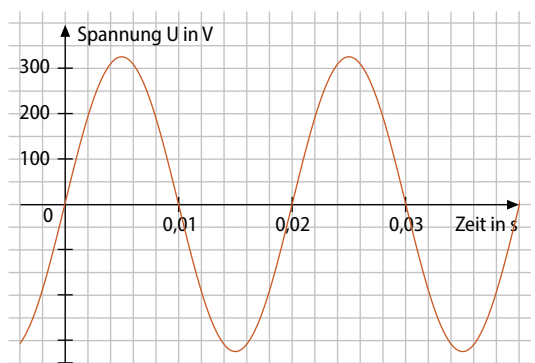
- b) $l = 4 \text{ m}$, $\alpha = 10^\circ$



- c) $l = 2 \text{ m}$, $\alpha = 20^\circ$



- 15** Die Spannung in einem Wechselstromkreis kann vereinfacht mit der Gleichung $U(t) = U_{\max} \cdot \sin(2\pi f \cdot t)$ beschrieben werden. Die Grafik zeigt die idealisierte Spannungskurve für die bei uns übliche Netzspannung mit einer Frequenz f von 50 Hz. Gib eine Gleichung für den Funktionsgraphen an.



Aufgaben zur Einzelarbeit

Das kann
ich!Das kann ich
fast!Das kann ich
noch nicht!

- 1 **Teste dich!** Bearbeite dazu die folgenden Aufgaben und bewerte die Lösungen mit einem Smiley.
- 2 Hinweise zum Nacharbeiten findest du auf der folgenden Seite, die Lösungen findest du im Anhang.

- 1
- | | | | |
|------|-------|-------|-------|
| 55° | -275° | -155° | -25° |
| 415° | 95° | -235° | 125° |
| 335° | 205° | 85° | -265° |

- a) Gib zu jedem Winkel das zugehörige Bogenmaß an.
- b) Finde alle zusammengehörigen Winkel, die den gleichen Sinuswert haben.

- 2 Löse folgende Aufgaben mithilfe eines Einheitskreises. Überprüfe die Lösungen mit dem Taschenrechner.

- | | |
|--|--|
| a) $y = \sin(200^\circ)$ | b) $y = \sin\left(\frac{2}{9}\pi\right)$ |
| c) $y = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ | d) $\sin(x) = 0,8$ |
| e) $\sin(x) = -0,6$ | f) $\cos(x) = 0,7$ |

- 3 Berechne alle Lösungen der Gleichung zwischen 0 und 2π . Runde auf zwei Dezimalstellen.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a) $\sin(x) = 0,892$ | b) $\sin(x) = 0,423$ |
| c) $\sin(x) = -0,087$ | d) $\sin(x) = -0,914$ |
| e) $\cos(x) = 0,672$ | f) $\cos(x) = -0,996$ |

- 4 Es gilt: $\sin(-x) = -\sin(x)$.

- a) Begründe diesen Zusammenhang am Einheitskreis.
- b) Erkläre, was das für die Symmetrieeigenschaften des Graphen von $f(x) = \sin(x)$ bedeutet.

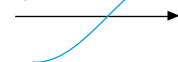
- 5 Zeichne den Graphen von $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $-2\pi \leq x \leq 4\pi$. Gib die Nullstellen der Funktion im angegebenen Intervall an.

- 6 Gib mindestens drei Bereiche an, in denen der Graph der Sinusfunktion (der Kosinusfunktion) jeweils wie der abgebildete Graphenausschnitt verläuft.

a)

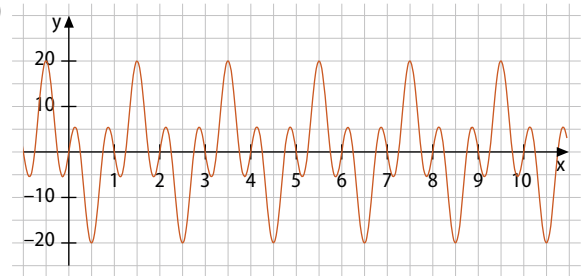


b)

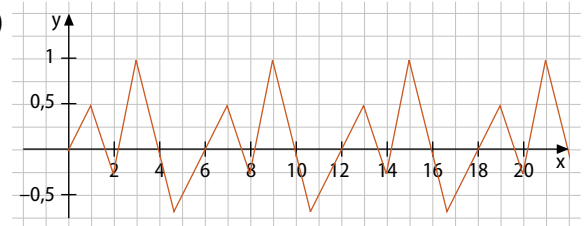


- 7 Ermittle die Periodenlänge der Funktion.

a)



b)

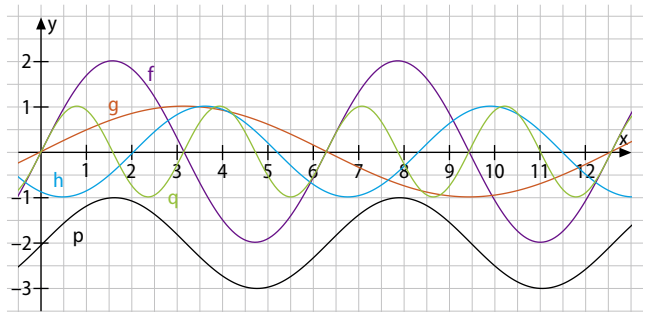


- 8 Vervollständige jeweils den Satz.

Bei einer Sinusfunktion mit der Gleichung ...

a) $f(x) = a \cdot \sin(x)$ beschreibt der Faktor a ...b) $f(x) = \sin(b \cdot x)$ beschreibt der Faktor b ...c) $f(x) = \sin(x + c)$ beschreibt der Wert c ...d) $f(x) = \sin(x) + d$ beschreibt der Wert d ...

- 9 Bestimme zu den abgebildeten Graphen eine zugehörige Funktionsgleichung. Gib auch den Wertebereich und die Periodenlänge an.

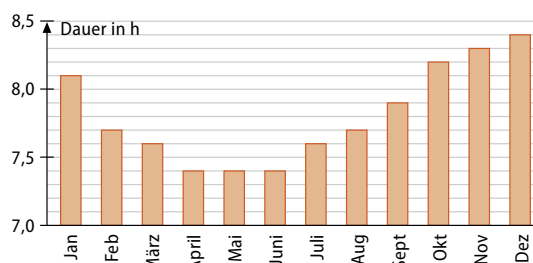


- 10** Beschreibe, wie der Graph der Funktion ...
- a) $f(x) = 2,5 \cdot \sin[0,5 \cdot (x - 2)] + 1$ aus dem Graphen der Sinusfunktion $g(x) = \sin(x)$ hervorgeht, und zeichne den Graphen von f .
- b) $f(x) = (-2) \cdot \cos(4x)$ aus dem Graphen der Kosinusfunktion $g(x) = \cos(x)$ hervorgeht, und zeichne den Graphen von f .

- 11** Das Riesenrad „Singapore Flyer“ hat eine Höhe von 165 m, einen Durchmesser von 150 m und benötigt für eine Umdrehung 30 min. Ermittle eine Funktionsgleichung für die Höhe einer Gondel in Abhängigkeit von der Zeit.



- 12** Das Säulendiagramm veranschaulicht die durchschnittliche tägliche Sonnenscheindauer auf der Insel Mauritius im Indischen Ozean.



- a) Beschreibe das Diagramm.
- b) Pia hat die Sonnenscheindauer durch den Term $f(t) = 0,5 \text{ h} \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{365 \text{ d}} \cdot (t - 258 \text{ d})\right] + 7,9 \text{ h}$ beschrieben. Die Variable t steht dabei für die Anzahl der seit Jahresbeginn vergangenen Tage. Beurteile die Güte des Terms.

Aufgaben für Lernpartner

- Bearbeite diese Aufgaben zuerst alleine.
- Suche dir einen Partner und erkläre ihm deine Lösungen. Höre aufmerksam und gewissenhaft zu, wenn dein Partner dir seine Lösungen erklärt.
- Korrigiere gegebenenfalls deine Antworten und benutze dazu eine andere Farbe.

Sind folgende Behauptungen **richtig** oder **falsch**? Begründe.

- A** Mit dem Bogenmaß kann man die Größe eines Winkels am Einheitskreis eindeutig angeben.
- B** Die Sinuswerte wiederholen sich am Einheitskreis jeweils nach π Einheiten.
- C** Die Kosinusfunktion erhält man, indem man die Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ entlang der x-Achse in eine beliebige Richtung verschiebt.
- D** Der Graph der Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
- E** Die Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$ hat gegenüber der Funktion $g(x) = \sin(x)$ die doppelte Periodenlänge.
- F** Die Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin(x) + 0,5$ hat den Wertebereich $W = [-0,5; 2,5]$.

Ich kann ...	Aufgabe	Hilfe	Bewertung
Winkel im Bogenmaß angeben.	1, A	S. 46, 48	😊 😐 😞
Sinus- und Kosinuswerte am Einheitskreis und mit dem Taschenrechner bestimmen.	2, 3, B	S. 44, 50	😊 😐 😞
Eigenschaften der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion beschreiben und erkennen.	4, 5, 6, 7, C, D, E, H	S. 50	😊 😐 😞
Die Sinus- und Kosinusfunktion in ihrer allgemeinen Form nutzen und aus der einfachen Sinus- bzw. Kosinusfunktion herleiten.	8, 9, 10, 11, F, G	S. 52, 54	😊 😐 😞
Vorgänge mit Sinus- und Kosinusfunktionen beschreiben.	12, 13	S. 58	😊 😐 😞

Seite 46

Bogenmaß und Gradmaß

An einem Einheitskreis mit Radius $r = 1$ LE kann man jedem Mittelpunktswinkel α eindeutig die Länge des zugehörigen Kreisbogens b zuordnen.

Winkelmaße können somit im Gradmaß oder im Bogenmaß (rad) angegeben werden:

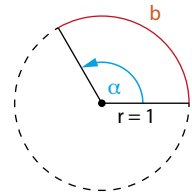
$$\frac{b}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ} \text{ und damit: } b = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}$$

Bogenmaß b zum

$$\text{Winkel } \alpha = 130^\circ \\ b = \frac{130^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{13}{18}\pi \approx 2,27$$

Winkel α zum

$$\text{Bogenmaß } b = 2: \\ \alpha = 2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \\ \alpha \approx 114,49^\circ$$



Seiten 44, 50

Sinus- und Kosinusfunktion

Im Einheitskreis lässt sich jedem Winkelmaß x eindeutig ein Sinuswert bzw. ein Kosinuswert zuordnen. Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ heißt **Sinusfunktion**.

Nullstellen: $k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Symmetrie: $\sin(-x) = -\sin(x)$

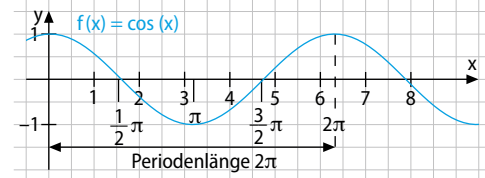
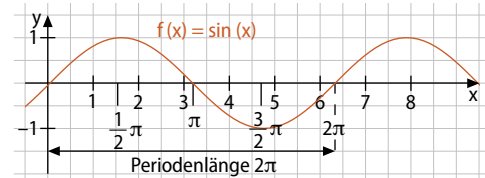
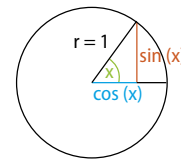
Die Funktion $f(x) = \cos(x)$ heißt **Kosinusfunktion**, ihr Graph ist gegenüber dem der Sinusfunktion verschoben:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Nullstellen: $(2k+1) \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Symmetrie: $\cos(-x) = \cos(x)$

Da sich die Funktionswerte in gleichen Abständen stets wiederholen, spricht man von **periodischen Funktionen**.



Seiten 52, 54

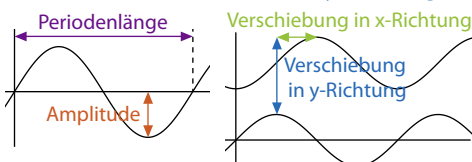
Die allgemeine Sinusfunktion und Kosinusfunktion

$$f(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x + c)] + d$$

$$f(x) = a \cdot \cos[b \cdot (x + c)] + d$$

Der Parameter ...

- **a** ergibt die **Amplitude**. Ein negatives Vorzeichen entspricht einer Spiegelung an der x-Achse.
- **b** hängt mit der Periodenlänge p zusammen: $p = \frac{2\pi}{|b|}$.
- **c** verschiebt die Funktion in **x-Richtung**.
- **d** verschiebt die Funktion in **y-Richtung**.



Erkläre, wie die Funktion f mit

$$f(x) = 3 \cdot \sin[0,5 \cdot (x - 2)] + 3$$

aus der Funktion g mit $g(x) = \sin(x)$ hervorgeht.

Die Amplitude der Funktion ist 3, d. h. sie wurde in y-Richtung gestreckt.

$b = 0,5$: Mit $p = \frac{2\pi}{0,5}$ erhält man eine Periodenlänge von $p = 4\pi$.

$c = -2$: Die Funktion wurde um 2 Einheiten in positive x-Richtung verschoben.

$d = 3$: Die Funktion wurde um 3 Einheiten in positive y-Richtung verschoben.

AdobeStock / Delphostock – S. 61; - / theyok – S. 65; Alamy Stock Photo / Juniors Bildarchiv GmbH – Cover; Fotolia / dipego – S. 35; geogebra.org / Created with GeoGebra – S. 43 (3); Getty Images Plus / iStockphoto, Diy13 – S. 61; - / iStockphoto, filmfoto – S. 22; - / iStockphoto, fizkes – S. 42; - / iStockphoto, lucadp – S. 39; - / Stockbyte – S. 58; Mauritius Images / Alamy Stock Photo, FLHC 76 – S. 7; - / Alamy Stock Photo, GL Archive – S. 7; - / Alamy Stock Photo, Historical image collection – S. 7; - / imageBROKER, Norbert Eisele-Hein – S. 23; Pixabay / federicomaderno – S. 10; - / Justinite – S. 10; Science Photo Library / PEÑAS, JOSE ANTONIO – S. 7; www.wikimedia.org / Waldir – S. 7.



61210

ccbuchner.de

ISBN 978-3-661-06002-6



9 783661 060026