L

6

1. a) $f(x) = 3x^2 - 7x$;
$f'(x) = 6x - 7$;
$f(4) = 3 \cdot 4^2 - 7 \cdot 4 = 20$;
$f'(4) = 6 \cdot 4 - 7 = 17$

b) $f(x) = 0{,}5x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 1$;
$f'(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8x$;
$f(-1) = 0{,}5 \cdot (-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + 1 = 0{,}5 - 2 - 4 + 1 = -4{,}5$;
$f'(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) = -2 + 6 + 8 = 12$

c) $f(x) = (2 - x)^3$;
$f'(x) = 3 \cdot (2 - x)^2 \cdot (-1) = -3(2 - x)^2$;
$f(2) = (2 - 2)^3 = 0$;
$f'(2) = -3 \cdot 0^2 = 0$

d) $x > 0$: $f(x) = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$;
$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
$f(9) = 2 \cdot 3 = 6$;
$f'(9) = \frac{1}{3}$

e) $x > -\frac{1}{2}$: $f(x) = \sqrt{(2x + 1)^3} = (2x + 1)^{\frac{3}{2}}$;
$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot (2x + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 = 3\sqrt{2x + 1}$;
$f(1{,}5) = \sqrt{(3 + 1)^3} = \sqrt{64} = 8$;
$f'(1{,}5) = 3 \cdot \sqrt{3 + 1} = 3 \cdot 2 = 6$

f) $f(x) = e^{3x}$;
$f'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$;
$f(\ln 2) = e^{3 \ln 2} = e^{\ln 8} = 8$;
$f'(\ln 2) = 3 \cdot e^{3 \ln 2} = 3 \cdot 8 = 24$

g) $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$;
$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot 0 - 2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$;
$f(0) = \frac{2}{0 + 1} = 2$;
$f'(0) = -\frac{4 \cdot 0}{(0 + 1)^2} = 0$

h) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$;
$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot e^x - e^x \cdot (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^x(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^x \cdot 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2}$;
$f(\ln 3) = \frac{e^{\ln 3}}{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}} = \frac{3}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{10}{3}} = \frac{9}{10}$;
$f'(\ln 3) = \frac{2}{(e^{\ln 3} + e^{-\ln 3})^2} = \frac{2}{\left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{2 \cdot 9}{100} = \frac{9}{50}$

i) $-2 < x < 2$: $f(x) = \ln \frac{2 + x}{2 - x} = \ln (2 + x) - \ln (2 - x)$;
$f'(x) = \frac{1}{2 + x} \cdot 1 - \frac{1}{2 - x} \cdot (-1) = \frac{1}{2 + x} + \frac{1}{2 - x} = \frac{2 - x + 2 + x}{(2 + x)(2 - x)} = \frac{4}{4 - x^2}$;
$f(0) = \ln \frac{2}{2} = \ln 1 = 0$;
$f'(0) = \frac{4}{4 - 0} = 1$

j) $x \neq 0$: $f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x^2} = 2 + \frac{2}{x^2}$;
$f'(x) = 0 + 2 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{4}{x^3}$;
$f(0{,}5) = 2 + \frac{2}{0{,}5^2} = 2 + 8 = 10$;
$f'(0{,}5) = -\frac{4}{0{,}5^3} = -32$

k) $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$;

$f'(x) = \frac{(e^x + 1) \cdot e^x - (e^x - 2) \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(e^x + 1 - e^x + 2)}{(e^x + 1)^2} = \frac{3e^x}{(e^x + 1)^2}$;

$f(\ln 4) = \frac{e^{\ln 4} - 2}{e^{\ln 4} + 1} = \frac{4 - 2}{4 + 1} = \frac{2}{5}$;

$f'(\ln 4) = \frac{3 \cdot e^{\ln 4}}{(e^{\ln 4} + 1)^2} = \frac{3 \cdot 4}{(4 + 1)^2} = \frac{12}{25}$

l) $x > 0$: $f(x) = [\ln (4x)]^2$;

$f'(x) = 2 \cdot [\ln (4x)] \cdot \frac{1}{4x} \cdot 4 = \frac{2}{x} \cdot \ln (4x)$;

$f(e^2) = [\ln (4e^2)]^2 = [\ln 4 + \ln (e^2)]^2 = (\ln 4 + 2)^2 = (2 + \ln 4)^2 \approx 11{,}47$;

$f'(e^2) = \frac{2}{e^2} \cdot \ln (4e^2) = \frac{2(2 + \ln 4)}{e^2} \approx 0{,}92$

m) $f(x) = 2 \sin (4x)$;

$f'(x) = 2 \cdot \cos (4x) \cdot 4 = 8 \cos (4x)$;

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{4\pi}{6} = 2 \sin \frac{2\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$;

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8 \cos \frac{4\pi}{6} = 8 \cos \frac{2\pi}{3} = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$

n) $x \neq k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$: $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$;

$f'(x) = \frac{\sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(\sin x)^2} = \frac{-[(\sin x)^2 + (\cos x)^2]}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{(\sin x)^2}$;

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$;

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2} = -\frac{1}{1} = -1$

o) $f(x) = e^{\cos x}$;

$f'(x) = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -e^{\cos x} \cdot \sin x$;

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = e^{\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)} = e^0 = 1$;

$f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -e^{\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)} \cdot \sin \left(\frac{3}{2}\pi\right) = -e^0 \cdot (-1) = 1$

p) $x > 0$: $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln x$;

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} (-\ln x + 1) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$;

$f(e) = \frac{1}{e} \cdot \ln e = \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$;

$f'(e) = \frac{1}{e^2}(1 - \ln e) = \frac{1}{e^2} \cdot (1 - 1) = 0$

2. a) $F(x) = (1 - x)^2$;

$F'(x) = 2 \cdot (1 - x) \cdot (-1) = -2(1 - x) = 2x - 2 = f(x)$;

$D_{F'} = \mathbb{R} = D_f$

b) $F(x) = \ln (e^2x) = \ln (e^2) + \ln x = 2 + \ln x$;

$F'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = f(x)$; $D_{F'} = \mathbb{R}^+ = D_f$

c) $F(x) = (x - 1)e^x$;

$F'(x) = 1 \cdot e^x + (x - 1) \cdot e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x = f(x)$; $D_{F'} = \mathbb{R} = D_f$

d) $F(x) = \frac{4(1 + \ln x)}{x}$;

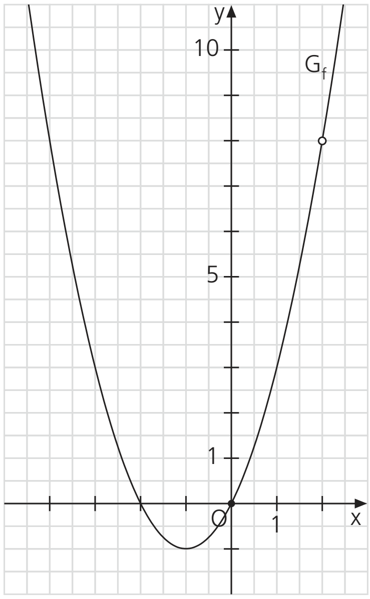
$F'(x) = \frac{x \cdot \left(0 + \frac{4}{x}\right) - 4 \cdot (1 + \ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{4 - 4 - 4 \ln x}{x^2} = \frac{-4 \ln x}{x^2} = \frac{4}{x^2} \ln (x^{-1}) = \frac{4}{x^2} \ln \frac{1}{x}$;

$D_{F'} = \mathbb{R}^+ = D_f$

3. a) $D_f = D_{f\,max} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$;

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x(x+2)}{1} = 8$:

f hat an der Stelle x = 2 eine stetig hebbare Definitionslücke.



b) Für jeden Wert von $x \in D_f$ gilt $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{(-x)^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = f(x)$;

also ist G_f symmetrisch zur y-Achse.

Nullstellen: f(x) = 0;

$\frac{x^2 - 4}{x^2} = 0$; $x^2 - 4 = 0$; $x^2 = 4$; $x_1 = 2$; $x_2 = -2$:

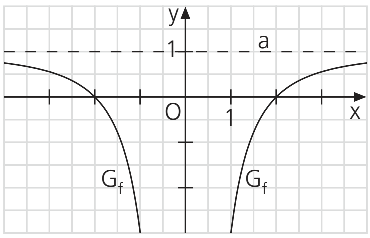
f besitzt die beiden einfachen Nullstellen 2 und −2.

Pol: $x^2 = 0$; x = 0 (Pol 2.Ordnung)

Verhalten für betragsgroße Werte von x:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) = 1$:

Die Gerade a: y = 1 ist waagrechte Asymptote von G_f.



c) $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$; $D_f = \mathbb{R}$; $W_f =]0; 1[$;

$f'(x) = \frac{(1 + e^x)e^x - e^x(0 + e^x)}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x(1 + e^x - e^x)}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0$ für jeden Wert von $x \in D_f$:

f ist überall in D_f streng monoton zunehmend; also ist f umkehrbar.

$y = \frac{e^x}{1 + e^x}$; Vertauschen von x und y:

$x = \frac{e^y}{1 + e^y}$;

$x + x \cdot e^y = e^y$;

$e^y - xe^y = x$;

$e^y(1 - x) = x$; $x \neq 1$:

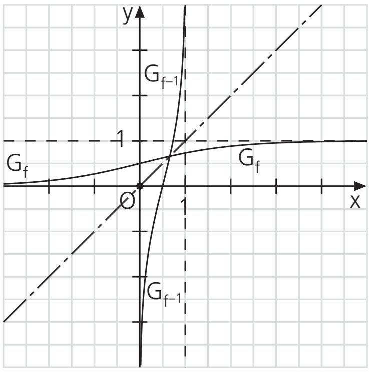
$e^y = \frac{x}{1 - x}$; $0 < x < 1$:

$y = \ln \frac{x}{1 - x}$;

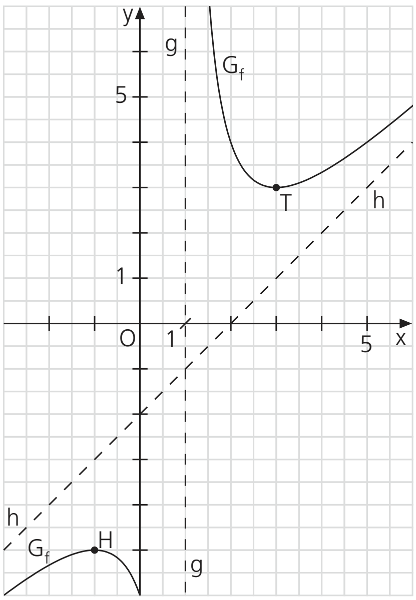
$\frac{x}{1 - x} > 0$ für $0 < x < 1$;

f^{-1}: $f^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1 - x}$; $D_{f^{-1}} = W_f =]0; 1[$.

Die Skizze zeigt G_f und $G_{f^{-1}}$ zusammen mit ihren Asymptoten:



d) Beispiel für eine mögliche Lösung:

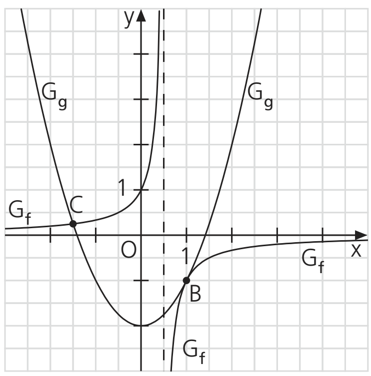


e) $f'(x) = \frac{(1-2x)\cdot 0 - 1\cdot(-2)}{(1-2x)^2} = \frac{2}{(1-2x)^2}$;
$g'(x) = 2x$;

1.Art:
In welchen Punkten mit gleicher Abszisse besitzen G_f und G_g die gleiche Steigung?
$f'(x) = g'(x)$: $\frac{2}{(1-2x)^2} = 2x$;
$x(1-2x)^2 = 1$; $x(1-4x+4x^2) - 1 = 0$;
$4x^3 - 4x^2 + x - 1 = 0$;
$4x^2(x-1) + x - 1 = 0$;
$(x-1)(4x^2+1) = 0$; $4x^2 + 1 \neq 0$:
$x_1 = 1$; $f(1) = \frac{1}{1-2} = -1$; $g(1) = 1 - 2 = -1 = f(1)$:
G_f und G_g berühren einander im Punkt B $(1 \mid -1)$; ihre gemeinsame Tangente hat die Steigung 2.

2. Art:
$B \in G_f$, da $f(1) = \frac{1}{1-2} = -1$ ist, und
$B \in G_g$, da $g(1) = 1 - 2 = -1$ ist:
G_f und G_g haben den Punkt B $(1 \mid -1)$ miteinander gemeinsam.
$f'(1) = \frac{2}{(1-2)^2} = \frac{2}{1} = 2$;
$g'(1) = 2 \cdot 1 = 2 = f'(1)$;
somit berühren G_f und G_g einander im Punkt B.

3. Art:
Gemeinsame Punkte von G_f und G_g:
$\frac{1}{1-2x} = x^2 - 2$;
$(x^2-2)(1-2x) - 1 = 0$;
$x^2 - 2x^3 - 2 + 4x - 1 = 0$;
$-2x^3 + x^2 + 4x - 3 = 0$;
$2x^3 - x^2 - 4x + 3 = 0$;
$2x^3 - 4x^2 + 2x + 3x^2 - 6x + 3 = 0$;
$2x \cdot (x^2 - 2x + 1) + 3 \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0$;
$(x-1)^2(2x+3) = 0$:
2-fache Nullstelle $x_1 = 1$ und einfache Nullstelle $x_2 = -1{,}5$;
also berühren einander G_f und G_g im Punkt $B(1 \mid -1)$ (und schneiden einander im Punkt C mit der Abszisse $-1{,}5$):



f) Funktionsterm:
$f(x) = a(x + 4)(x - 2)^2;\ a \in \mathbb{R};$
$f(0) = 2:\ \ a \cdot 4 \cdot (-2)^2 = 2;$
$a = \frac{2}{16} = \frac{1}{8};$
$f\colon f(x) = \frac{1}{8}(x + 4)(x - 2)^2;\ D_f = \mathbb{R}$
Gemeinsame Punkte von g und G_f:
$\frac{1}{8}(x + 4)(x - 2)^2 = 2;$
$(x + 4)(x - 2)^2 = 16;$
$(x + 4)(x^2 - 4x + 4) = 16;$
$x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2 - 16x + 16 = 16;$
$x^3 - 12x = 0;$
$x(x^2 - 12) = 0;$
$x_1 = 0;$
$x^2 - 12 = 0;$
$x^2 = 12;$
$x_2 = 2\sqrt{3};$
$x_3 = -2\sqrt{3}:$
$P_1(0 \mid 2),\ P_2(2\sqrt{3} \mid 2)$ und $P_3(-2\sqrt{3} \mid 2)$

4. (2) $g(x) = -f(x + 2) + 2;$
(3) $g(x - 2) - 2 = -f(x)$

5. **a)** $f(x) = x^4 - 0{,}5x^2;$
$f'(x) = 4x^3 - x;\quad f''(x) = 12x^2 - 1;$
$f'(x) = 0:\ \ 4x^3 - x = 0;\quad x(4x^2 - 1) = 0;$
$x_1 = 0;\ f(0) = 0;$
$4x^2 - 1 = 0;$
$x^2 = \frac{1}{4};$
$x_2 = \frac{1}{2};\ x_3 = -\frac{1}{2};\ f\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{16};$
$f''(0) = -1 < 0$: Hochpunkt H $(0 \mid 0)$
$f''\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 3 - 1 = 2 > 0$: Tiefpunkte $T\left(\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{16}\right)$ und $T^*\left(-\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{16}\right)$

b) $f(x) = x + \frac{x + 1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x};$
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2};\quad f''(x) = \frac{2}{x^3};$
$f'(x) = 0:\ 1 - \frac{1}{x^2} = 0;\ x^2 = 1;$
$x_1 = 1;\ f(1) = 1 + 1 + 1 = 3;$
$x_2 = -1;\ f(-1) = -1 + 1 - 1 = -1;$
$f''(1) = \frac{2}{1} = 2 > 0$: Tiefpunkt T $(1 \mid 3)$
$f''(-1) = \frac{2}{-1} = -2 < 0$: Hochpunkt H $(-1 \mid -1)$

c) $f(x) = x \cdot e^{1-x};$
$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x}(1 - x);$
$f''(x) = e^{1-x} \cdot (-1) \cdot (1 - x) + e^{1-x} \cdot (-1) = -e^{1-x}(1 - x + 1) = -e^{1-x}(2 - x) = e^{1-x}(x - 2);$
$f'(x) = 0:\ e^{1-x}(1 - x) = 0;\ x_1 = 1\ (e^{1-x} > 0)$
$f(1) = 1 \cdot e^0 = 1 \cdot 1 = 1;$
$f''(1) = e^0(1 - 2) = -1 < 0:$
Hochpunkt H $(1 \mid 1)$

d) $f(x) = (4x - 2)e^{2x};$
$f'(x) = 4 \cdot e^{2x} + (4x - 2)e^{2x} \cdot 2 = 4e^{2x}(1 + 2x - 1) = 8xe^{2x};$
$f'(x) = 0:\ \ 8xe^{2x} = 0;\ x_1 = 0\ \ (8e^{2x} > 0)$
$f(0) = -2e^0 = -2;$
Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ an der Stelle $x = 0$ von $-$ nach $+$:
Tiefpunkt $T(0 \mid -2)$

e) $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$;

$f'(x) = \frac{(x^2 + 4) \cdot 8 - 8x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8x^2 + 32 - 16x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{32 - 8x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8(4 - x)^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8(2 + x)(2 - x)}{(x^2 + 4)^2}$;

$f'(x) = 0$: $8(2 + x)(2 - x) = 0$;

$x_1 = -2$; $f(-2) = \frac{-16}{8} = -2$;

$x_2 = 2$; $f(2) = \frac{16}{8} = 2$;

Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ an der Stelle $x = -2$ von – nach +: Tiefpunkt T (–2 I –2).
Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ an der Stelle $x = 2$ von + nach –: Hochpunkt H (2 I 2).

f) $f(x) = 0{,}5 \cdot (\ln x)^2$;

$f'(x) = 0{,}5 \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}$;

$f'(x) = 0$: $\frac{\ln x}{x} = 0$; $\ln x = 0$; $x_1 = 1$; $f(1) = 0$;

Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ an der Stelle $x = 1$ von – nach +: Tiefpunkt T (1 I 0)

g) $f(x) = 2 - 2 \cos(2x)$;

$f'(x) = -2 \cdot [-\sin(2x)] \cdot 2 = 4 \sin(2x)$;

$f''(x) = 4 \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 8 \cos(2x)$;

$f'(x) = 0$:

$4 \sin(2x) = 0$; $2x = k\pi$; $x = \frac{k\pi}{2} \in D_f$: $k \in \{0; 1; 2\}$

$k = 0$: $x_1 = 0 \in D_f$; $f(0) = 2 - 2 = 0$;

$f''(0) = 8 \cos 0 = 8 > 0$: Tiefpunkt T_1 (0 I 0)

$k = 1$: $x_2 = \frac{\pi}{2} \in D_f$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - 2 \cos \pi = 2 + 2 = 4$;

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8 \cos \pi = -8 < 0$: Hochpunkt H $\left(\frac{\pi}{2} \text{ I } 4\right)$

$k = 2$: $x_3 = \pi \in D_f$; $f(\pi) = 2 - 2 \cos(2\pi) = 2 - 2 = 0$;

$f''(\pi) = 8 \cos(2\pi) = 8 > 0$: Tiefpunkt T_2 (π I 0)

h) $f(x) = e^{x^2}$; $f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$;

$f'(x) = 0$:

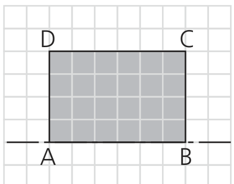
$2xe^{x^2} = 0$; $2x = 0$ ($e^{x^2} \geqq 1$); $x_1 = 0$; $f(0) = e^0 = 1$;

Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ an der Stelle $x = 0$ von – nach +:
Tiefpunkt T (0 I 1)

6.

A	B	C
$G_{f_3'}$	$G_{f_2'}$	$G_{f_1'}$

7. a) Viereck ABCD:



$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 - 3 \\ 2 - (-2) \\ 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overline{AB} = \sqrt{0^2 + 4^2 + 0^2} = 4$;

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 - 3 \\ 2 - 2 \\ 7 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$;

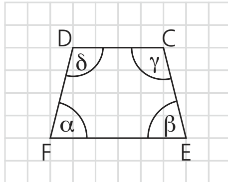
$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 6 - 6 \\ -2 - 2 \\ 7 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overline{CD} = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 0^2} = 4$;

$\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 3 - 6 \\ -2 - (-2) \\ 3 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overline{DA} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$:

ABCD besitzt zwei Paare von parallelen und gleich langen Gegenseiten, ist also ein Parallelogramm; ferner ist $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \cdot (-3) + 4 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) = 0$,
also [AB] $\perp$ [DA].

Somit ist das Viereck ABCD ein Rechteck; für seinen Flächeninhalt gilt
$A_{ABCD} = 4 \cdot 5 = 20$.

Viereck ECDF:



$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 2-6 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overline{EC} = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$;

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ -6-(-2) \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$;

$\overline{DF} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{41} = \overline{EC}$;

$\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 6-(-6) \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \cdot \overrightarrow{CD}$:

Da $\overrightarrow{FE} = -3 \cdot \overrightarrow{CD}$ ist, ist [FE] ll [CD]; da außerdem $\overline{DF} = \overline{EC}$ ist, ist das Viereck ECDF ein gleichschenkliges Trapez (mit den Parallelseiten [FE] und [CD] und den Schenkeln [EC] und [DF]).

$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{FE} \circ \overrightarrow{FD}}{\overline{FE} \cdot \overline{FD}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}}{12 \cdot \sqrt{41}} = \frac{48}{12\sqrt{41}} = \frac{4}{\sqrt{41}}$;

$\alpha \approx 51{,}3°$; $\beta = \alpha$; $\beta \approx 51{,}3°$;

$\gamma = 180° - \beta \approx 180° - 51{,}3° = 128{,}7°$; $\delta = \gamma$; $\delta \approx 128{,}7°$

b) $r = \overline{BC} = 5$; $h = \overline{AB} = 4$

Volumen:

$V_{\text{Zylinder}} = r^2\pi h = 25 \cdot \pi \cdot 4 = 100\pi \approx 314{,}2$

Oberflächeninhalt:

$A_{\text{Zylinder}} = 2r\pi h + 2r^2\pi = 2r\pi(h + r) = 2 \cdot 5 \cdot \pi \cdot (4 + 5) = 10\pi \cdot 9 = 90\pi \approx 282{,}7$

8. a) K_1: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 16x_3 = -15$;

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 16x_3 + 8^2 = 64 - 15$;

K_1: $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 8)^2 = 49$;

M_1 (0 l 0 l 8); $r_1 = 7$

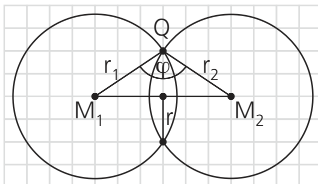
K_2: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 24x_2 - 16x_3 = -159$;

$x_1^2 + x_2^2 - 24x_2 + 12^2 + x_3^2 - 16x_3 + 8^2 = -159 + 144 + 64$;

K_2: $x_1^2 + (x_2 - 12)^2 + (x_3 - 8)^2 = 49$;

M_2 (0 l 12 l 8); $r_2 = 7$

b) $\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 12-0 \\ 8-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$;



$\overline{M_1M_2} = 12 < r_1 + r_2 = 7 + 7 = 14$:

Die Kugeln K_1 und K_2 schneiden einander, da $|r_2 - r_1| < \overline{M_1M_2} < r_1 + r_2$ ist; die Radiuslänge r ihres Schnittkreises ist $\left(\sqrt{7^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2} =\right) \sqrt{13}$.

$Q \in K_1$?

L.S.$_1$: $2^2 + 6^2 + 5^2 - 16 \cdot 5 = 4 + 36 + 25 - 80 = -15$;

R.S.$_1$: -15; L.S.$_1$ = R.S.$_1$: $Q \in K_1$

$Q \in K_2$?

L.S.$_1$: $2^2 + 6^2 + 5^2 - 24 \cdot 6 - 16 \cdot 5 = 4 + 36 + 25 - 144 - 80 = -159$;

R.S.$_2$: -159; L.S.$_2$ = R.S.$_2$: $Q \in K_2$

Winkel:

$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{QM_1} \circ \overrightarrow{QM_2}}{\left|\overrightarrow{QM_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{QM_2}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-6 \\ 8-5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0-2 \\ 12-6 \\ 8-5 \end{pmatrix}}{7 \cdot 7} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}}{49} = \frac{4 - 36 + 9}{49} = -\frac{23}{49}$;

$\varphi \approx 118{,}0°$

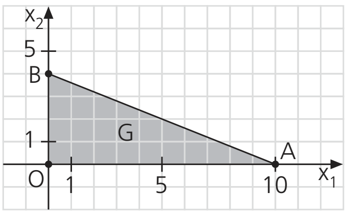
9. a) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$;

$\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$;

$\overrightarrow{w_1} = \frac{5}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{w_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)



1. Art:

$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{BO} \cdot \overline{OS} = \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 4 \cdot 6 = 40$

2. Art:

$V = \frac{1}{6} \left|\left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right) \circ \overrightarrow{OS}\right| = \frac{1}{6} \left|\left[\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot |0 + 0 + 240| = 40$

10. $P\,(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ ist ein beliebiger Punkt auf der Kugel:

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$;

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x_1 - 6 \\ x_2 - 3 \\ x_3 - 0 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2 + x_3^2}$;

$\left|\overrightarrow{OP}\right| = 2 \cdot \left|\overrightarrow{AP}\right|$; $\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 = 4 \cdot \left|\overrightarrow{AP}\right|^2$;

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 \cdot [(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2 + x_3^2]$;

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 \cdot (x_1^2 - 12x_1 + 36 + x_2^2 - 6x_2 + 9 + x_3^2)$;

$4x_1^2 - 48x_1 + 144 + 4x_2^2 - 24x_2 + 36 + 4x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$;

$3x_1^2 - 48x_1 + 3x_2^2 - 24x_2 + 3x_3^2 + 180 = 0$;

$x_1^2 - 16x_1 + x_2^2 - 8x_2 + x_3^2 + 60 = 0$;

$x_1^2 - 16x_1 + 8^2 + x_2^2 - 8x_2 + 4^2 + x_3^2 + 60 - 64 - 16 = 0$;

$(x_1 - 8)^2 + (x_2 - 4)^2 + x_3^2 = 20$: dies ist die Gleichung einer Kugel mit Mittelpunkt $M\,(8 \mid 4 \mid 0)$ und Radiuslänge $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}5$.

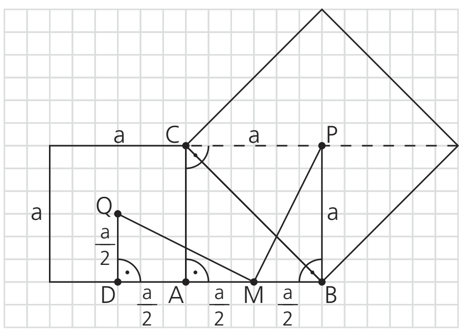
11. Δ QDM:

$\overline{MQ}^2 = \overline{QD}^2 + \overline{DM}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5}{4}a^2$;

$\overline{MQ} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$;

Δ MBP: $\overline{MP}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5}{4}a^2$;

$\overline{MP} = \frac{a}{2}\sqrt{5} = \overline{MQ}$

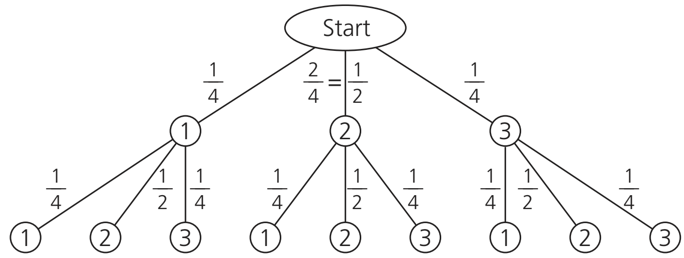


oder: Argumentation mithilfe des Kongruenzsatzes sws

Anmerkung: Die Strecken [MP] und [QM] sind nicht nur gleich lang, sondern auch zueinander senkrecht und deshalb Katheten eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks PQM mit der Hypotenusenlänge $\overline{PQ} = \frac{a}{2}\sqrt{10}$.

8

12. a)



Summenwert S: 2 3 4 3 4 5 4 5 6

k	2	3	4	5	6
P(S = k)	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$	$2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	$2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$	$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

b) $P(E_1) = P(S = 3) + P(S = 5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$;

$P(E_2) = \frac{1}{4} = 25\%$;

$P(E_3) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8} = 62{,}5\%$

Hinweis:

E_3: „Der Summenwert der beiden geworfenen Zahlen ist eine ungerade Zahl (3 oder 5) und/oder die beim ersten Wurf geworfene Zahl ist eine 1"

c) $P(E_1) = \frac{1}{2}$; $P(E_2) = \frac{1}{4}$; $P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$;

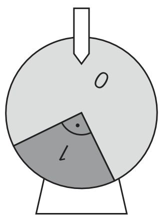
$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} = P(E_1)\cdot P(E_2)$:

Die Ereignisse E_1 und E_2 sind voneinander stochastisch unabhängig.

Hinweis:

$E_1 \cap E_2$: „Beim ersten Wurf wird eine 1 geworfen, und der Summenwert der beiden geworfenen Zahlen ist ungerade"

13. a)



b) $P(1) = 0{,}25$;

$P(\overline{1}) = P(0) = 0{,}75$;

$1 - 0{,}75^n > 0{,}95$;

$-0{,}75^n > -0{,}05$; $|\cdot(-1)$

$0{,}75^n < 0{,}05$; $|\ \ln(\ldots)$

$n \cdot \ln 0{,}75 < \ln 0{,}05$; $|:\ln 0{,}75$ $[\ln 0{,}75 < 0]$

$n > \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}75}$;

$n > 10{,}41\ldots$; $n \in \mathbb{N}$:

Man muss dieses Glücksrad mindestens elfmal drehen.

14. Anzahl der Plätze für die Männer: 3; Anzahl der Plätze für die Frauen: 6:
$F_1F_2F_3M_1M_2M_3F_4F_5F_6$
Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten:
$3! \cdot 6! = 4\,320$

15. a)

	F	$\overline{F}$	
m	0,12	0,28	0,40
w	0,18	0,42	0,60
	0,30	0,70	1,00

$\overline{F}$: Gast trinkt nicht nur Fruchtsaft
m: Gast ist männlich

Erläuterungen:
$P(w) = 100\% - 40\% = 60\%$;
$P(\overline{F}) = 100\% - 30\% = 70\%$;
$P(m \cap \overline{F}) = 70\% - 42\% = 28\%$;
$P(m \cap F) = 40\% - 28\% = 12\%$;
$P(w \cap F) = 30\% - 12\% = 18\% = 60\% - 42\%$

b) $P(E_1) = P(F) = 0{,}30$;
$P(E_2) = P(w) = 0{,}60$;
$P(E_1 \cap E_2) = P(F \cap w) = 0{,}18$;
$P(E_1) \cdot P(E_2) = 0{,}30 \cdot 0{,}60 = 0{,}18 = P(E_1 \cap E_2)$:
Die Ereignisse E_1 und E_2 sind voneinander stochastisch unabhängig.

c) $P(E_3) = (m \cap \overline{F}) = 0{,}28 = 28\%$
Gegenereignis des Ereignisses E_3 ist das Ereignis $\overline{E_3}$: „Ein zufällig ausgewählter Gast ist weiblich und/oder trinkt nur Fruchtsaft“.