Kann ich das?

73

1. a) $\int_0^4 dx = \int_0^4 1\,dx = [x]_0^4 = 4 - 0 = 4$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_{-\pi}^{\pi} = -\cos\pi + \cos(-\pi) = -(-1) + (-1) = 0$

Hinweis: Dieses Ergebnis folgt auch aus der Punktsymmetrie zum Ursprung des Graphen der Funktion f: $x \mapsto \sin x$; $D_f = [-\pi; \pi]$.

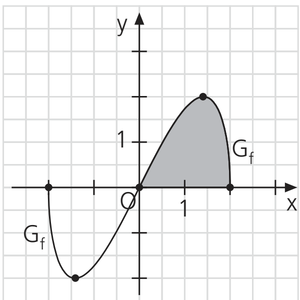
c) $\int_1^e \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^e = (e\ln e - e) - (1\ln 1 - 1) = (e - e) - (0 - 1) = 0 + 1 = 1$

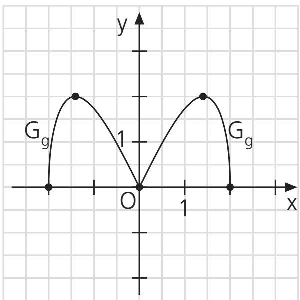
d) $\int_{-4}^{4} e^x\,dx = [e^x]_{-4}^{4} = e^4 - e^{-4} \approx 54{,}6$

2. $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$; $D_f = [-2; 2]$;
$g(x) = \sqrt{4x^2 - x^4} = \sqrt{x^2(4 - x^2)} = |x| \cdot \sqrt{4 - x^2}$; $D_g = [-2; 2]$

a) Im Bereich [0; 2] gilt überall $f(x) = g(x)$; im Bereich [–2; 0[gilt überall $f(x) = -g(x)$.

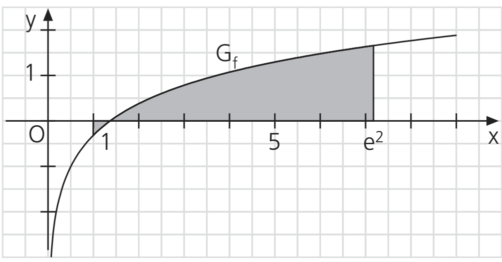
Weitere Beispiele für	
Übereinstimmungen	Unterschiede
Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$ Definitionsbereich: $D_f = D_g$	Symmetrie: $f(-x) = -f(x)$: Symmetrie von G_f zum Ursprung $g(-x) = g(x)$: Symmetrie von G_g zur y-Achse
Nullstellen der 1. Ableitung: $x_4 = -\sqrt{2}$; $x_5 = \sqrt{2}$	Wertemenge: $W_f = [-2; 2]$; $W_g = [0; 2]$
Graphverlauf im I. Quadranten: Die Graphbögen dort sind identisch.	Differenzierbarkeit: f ist überall in]–2; 2[differenzierbar; g ist an der Stelle x = 0 nicht differenzierbar.





b) (1) $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = -\frac{8}{3}$;   (2) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0$;   (3) $\int_{0}^{2} g(x)\,dx = \frac{8}{3}$;   (4) $\int_{-2}^{2} g(x)\,dx = \frac{16}{3}$

3.



$$\int_1^{e^2} f(x)\,dx = \int_1^{e^2}\left[\ln x - \frac{2}{e^2-1}\right]dx = \left[x \cdot \ln x - x - \frac{2}{e^2-1} \cdot x\right]_1^{e^2} =$$

$$= \left[e^2 \cdot \ln(e^2) - e^2 - \frac{2}{e^2-1} \cdot e^2\right] - \left[1 \cdot \ln 1 - 1 - \frac{2}{e^2-1} \cdot 1\right] =$$

$$= 2e^2 - e^2 - \frac{2e^2}{e^2-1} - 0 + 1 + \frac{2}{e^2-1} =$$

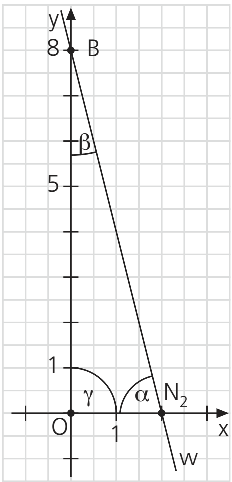
$$= e^2 + 1 - \frac{2(e^2-1)}{e^2-1} = e^2 + 1 - 2 = e^2 - 1 \approx 6{,}39;$$

dies ist die *Differenz* der Inhalte der beiden getönten Flächenstücke.

4. **a)** Drei Nullstellen von f sind gegeben: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 4$; daher ist
$f(x) = a \cdot (x-0) \cdot (x-2) \cdot (x-4)$, d. h. $b = 0$; $c = 2$; $d = 4$.
$P \in G_f$, d. h. $f(1) = 3$: $3 = a \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-3)$; $3 = 3a$; $a = 1$:
$f(x) = 1 \cdot x \cdot (x-2) \cdot (x-4) = x(x^2 - 4x - 2x + 8) = x^3 - 6x^2 + 8x$

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$; $f''(x) = 6x - 12$; $D_{f'} = \mathbb{R} = D_{f''}$
$f''(x) = 0$: $6x - 12 = 0$; $x = 2$
Da $x = 2$ eine einfache Nullstelle von f'' ist, wechselt das Vorzeichen von $f''(x)$ an der Stelle $x = 2$; also ist $N_2\,(2 \mid 0)$ tatsächlich ein Wendepunkt von G_f.
Wendetangente w: $y = mx + t$;
mit $m = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 8 = -4$ und mit $N_2\,(2 \mid 0) \in w$ ergibt sich
$0 = -4 \cdot 2 + t$; $t = 8$; w: $y = -4x + 8$.

c) Skizze:



$\tan\alpha = \frac{8}{2} = 4$; $\alpha \approx 76{,}0°$;
$\tan\beta = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; $\beta \approx 14{,}0°$; $\gamma = 90°$

d) $F(4) = \int_0^4 (t^3 - 6t^2 + 8t)\,dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - 2t^3 + 4t^2\right]_0^4 = \frac{1}{4} \cdot 4^4 - 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 - 0 = 0$:

Das von G_f und der x-Achse berandete Flächenstück im I. Quadranten hat den gleichen Flächeninhalt A wie das von G_f und der x-Achse berandete Flächenstück im IV. Quadranten.

Da das Flächenstück im IV. Quadranten unterhalb der x-Achse liegt, wird sein Inhalt beim Integral negativ gewichtet. Somit ergibt die „Flächenbilanz" A – A = 0.

Summe der Flächeninhalte:

$$2A = 2 \cdot \int_0^2 f(x)\,dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 = 2 \cdot \left(\frac{16}{4} - 16 + 16\right) - 2 \cdot 0 = 8$$

e) Graph II ist (bei geeigneter Einheitenwahl) G_F. Begründung:
Graph I steigt nach der Nullstelle x = 4 nicht an, obwohl laut Flächenbilanz $F(x) > 0$ für jeden Wert von $x > 4$ gelten muss.
Graph III weist fünf lokale Extrempunkte auf; die Funktion $F' = f$ besitzt aber nur drei Nullstellen.

f) Jede Integralfunktion besitzt die untere Integrationsgrenze als Nullstelle, da
$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ ist.
Beispiel für eine Stammfunktion von f, die keine Integralfunktion von f ist:
$F^*(x) = F(x) + 3 = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 3$; $\quad D_{F^*} = \mathbb{R}$;
$F^{*\prime}(x) = F'(x) + 0 = f(x)$; $\quad D_{F^{*\prime}} = \mathbb{R} = D_f$
Wegen $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 = \frac{1}{4}x^2(x^2 - 8x + 16) = \frac{1}{4}x^2(x-4)^2$ gilt $F(x) \geqq 0$ für jeden Wert von $x \in \mathbb{R}$. Also gilt überall $F^*(x) \geqq 3$; F besitzt somit keine Nullstelle, kann also keine Integralfunktion von f sein.

74 **5.** **a)** Falsch; dies gilt nur dann, wenn f an der Stelle $x = x_0$ zweimal differenzierbar ist.
b) Falsch; möglich ist an der Stelle $x = x_0$ auch ein Extrempunkt von G_f.
Beispiel: $f(x) = x^4$; $\quad f'(x) = 4x^3$; $\quad f''(x) = 12x^2$; $\quad D_f = D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R}$; $\quad x_0 = 0$:
Es ist zwar $f''(0) = 0$; der Punkt O (0 | 0) ist aber ein Tiefpunkt von G_f
[Nullstelle und Vorzeichenwechsel (von – nach +) von $f'(x)$ an der Stelle 0].
c) Wahr.

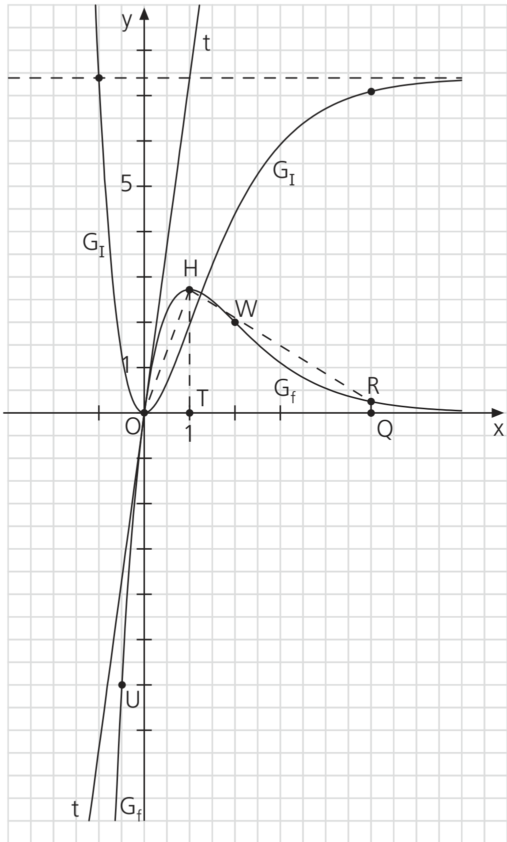
6. $f(x) = x \cdot e^{2-x}$; $D_f = \mathbb{R}$
(1)
a) Nullstelle:
$f(x) = 0$; $\quad x \cdot e^{2-x} = 0$; $\quad e^{2-x} \neq 0$; $\quad x_1 = 0$
Grenzwerte:
$\lim\limits_{x \to \infty} (x \cdot e^{2-x}) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(e^2 \cdot \frac{x}{e^x}\right) = 0$ (vgl. Merkhilfe); Asymptote: y = 0 (x-Achse)
$x \cdot e^{2-x} \to -\infty$ für $x \to -\infty$ $\left[\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^{2-x}) = -\infty\right]$

b) f': $f'(x) = 1 \cdot e^{2-x} + x \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = e^{2-x}(1-x)$; $D_{f'} = \mathbb{R}$
Extrempunkt: $f'(x) = 0$; $\quad e^{2-x} \cdot (1-x) = 0$; $e^{2-x} \neq 0$;
$1 - x = 0$; $\quad x_2 = 1$
An der Stelle $x_2 = 1$ wechselt das Vorzeichen von $f'(x)$ von + nach –, also liegt ein Hochpunkt von G_f vor:
$f(1) = 1 \cdot e^{2-1} = e \approx 2{,}72$; H (1 | e).
Tangentengleichung:
$m = f'(0) = e^{2-0} \cdot (1-0) = e^2 \approx 7{,}39$; $y_P = f(0) = 0$;
$P(0 \mid 0) \in t$; also t: $y = e^2 \cdot x$

c) $f''(x) = -1 \cdot e^{2-x} \cdot (1-x) + e^{2-x} \cdot (-1) = e^{2-x}(x - 1 - 1) = e^{2-x}(x-2)$;
$f''(x) = 0$: $\quad e^{2-x} \cdot (x-2) = 0$; $\quad e^{2-x} \neq 0$; $\quad x - 2 = 0$; $\quad x_3 = 2$; $\quad f(2) = 2$

x	$-\infty < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < \infty$
$f''(x)$	$f''(x) < 0$	$f''(x) = 0$	$f''(x) > 0$
Vorzeichenwechsel von $f''(x)$		von – nach +	
G_f	rechtsgekrümmt	W (2 | 2)	linksgekrümmt

d) $f(-0{,}5) = -\frac{1}{2} \cdot e^{2,5} \approx -6{,}09$; U $(-0{,}5 \mid -0{,}5e^{2,5}) \in G_f$;
$f(5) = 5e^{-3} \approx 0{,}25$; R $(5 \mid 5e^{-3}) \in G_f$



(2) **a)** Dreiecksinhalt als Näherungswert für $\int_0^1 f(x)\,dx$:

Eckpunkte: H; O; T (1 | 0) $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot x_H \cdot y_H = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e = \frac{e}{2} \approx 1{,}36$

Trapezinhalt als Näherungswert für $\int_1^5 f(x)\,dx$:
Eckpunkte: H; T; Q (5 | 0); R
$A_{Trapez} = \frac{\overline{HT} + \overline{QR}}{2} \cdot \overline{TQ} = \frac{e + 5e^{-3}}{2} \cdot (5 - 1) = 2e + 10e^{-3} \approx 5{,}93$

b) $\mathrm{I}(x) = \int_0^x f(t)\,dt$; $\mathrm{I}'(x) = f(x)$

An der Nullstelle $x_1 = 0$ von f wechselt das Vorzeichen von $\mathrm{I}'(x) = f(x)$

von – nach +, also hat G_I für x = 0 einen Tiefpunkt; wegen $\mathrm{I}(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$ ist O (0 | 0) dieser Tiefpunkt von G_I.

$\mathrm{I}(5) = \int_0^5 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^5 f(t)\,dt \approx 1{,}36 + 5{,}93 = 7{,}29$

(3) **a)** Schnittpunktbestimmung: $ax = f(x)$; $ax = x \cdot e^{2-x}$; $|: x \quad (x \neq 0)$
$a = e^{2-x}$; $\ln a = 2 - x$; $x_s = 2 - \ln a$;
Da der Term $2 - \ln a$ nur für $a > 0$ definiert ist, gibt es diesen zweiten Schnittpunkt S ($\neq$ O) nur, falls $a > 0$ (mit $a \neq e^2$) ist.
Hinweis: Dieser zweite Schnittpunkt S von g_a mit G_f liegt im I. Quadranten für $0 < a < e^2$ und im III. Quadranten für $a > e^2$; für $a = e^2$ fällt er mit dem ersten Schnittpunkt O zusammen.

b) Abszissen der Schnittpunkte für a = 1: $x_1 = 0 = x_p$; $x_s = 2 - \ln 1 = 2 = x_w$
Flächeninhalt:

$$A = \int_0^2 [f(x) - x]\,dx = \int_0^2 (x \cdot e^{2-x} - x)\,dx = \left[(-x-1)e^{2-x} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^2 =$$

$$= \left[(-2-1) \cdot e^{2-2} - \frac{1}{2} \cdot 2^2\right] - (-1 \cdot e^{2-0} - 0) = -3 - 2 + e^2 = e^2 - 5 \approx 2{,}39$$

c) Ansatz: $\displaystyle\int_0^{2-\ln a_0} [f(x) - a_0 \cdot x]\,dx = \frac{1}{2}e^2$

Integralfrei:

$$[(-x-1)e^{2-x} - \frac{1}{2}a_0x^2]_0^{2-\ln a_0} = \frac{1}{2}e^2;$$

$$\left[(-2 + \ln a_0 - 1)e^{2-(2-\ln a_0)} - \frac{1}{2}a_0 \cdot (2 - \ln a_0)^2\right] - (-1 \cdot e^2 - 0) = \frac{1}{2}e^2;$$

$(\ln a_0 - 3) \cdot a_0 - \frac{1}{2}a_0(2 - \ln a_0)^2 + \frac{1}{2}e^2 = 0$; hieraus lässt sich a_0
z. B. mithilfe des Newton‘schen Näherungsverfahrens ermitteln.