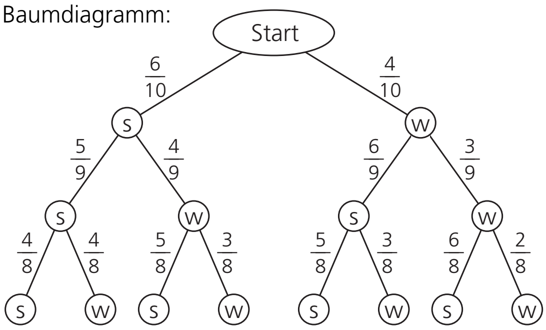
115

1. **a)** Baumdiagramm:



Wahrscheinlichkeiten:

$P(E_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6} = 16\,\frac{2}{3}\% \approx 16{,}67\%$;

$P(E_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{3}{10} = 30\%$

b) $p_b = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{210} + \frac{1}{210} = \frac{1}{105} \approx 0{,}0095 =$
$= 0{,}95\%$

c) $p_{\text{weiß}} = \frac{4}{10} = 0{,}4$; $p_{\text{schwarz}} = \frac{6}{10} = 0{,}6$;

$P(E_3) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^5 \approx 20{,}07\%$;

$P(E_4) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$
$= \binom{10}{7} \cdot 0{,}6^7 \cdot 0{,}4^3 + \binom{10}{8} \cdot 0{,}6^8 \cdot 0{,}4^2 + \binom{10}{9} \cdot 0{,}6^9 \cdot 0{,}4^1 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}6^{10} \cdot 0{,}4^0 \approx$
$\approx 0{,}214991 + 0{,}120932 + 0{,}040311 + 0{,}006047 = 0{,}382281 \approx 38{,}23\%$

oder:

$P(E_4) = P(X \geqq 7) = 1 - P(X \leqq 6) = 1 - F(10; 0{,}6; 6) \approx 1 - 0{,}61772 = 0{,}38228 \approx 38{,}23\%$

d) $P(X = 0) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$;

$P(X = 1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot 3 = \frac{3}{10}$;

$P(X = 2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot 3 = \frac{1}{2}$;

$P(X = 3) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$:

k	0	1	2	3
P(X = k)	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{30} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{5} = 1{,}8$;

$Var(X) = (0 - 1{,}8)^2 \cdot \frac{1}{30} + (1 - 1{,}8)^2 \cdot \frac{3}{10} + (2 - 1{,}8)^2 \cdot \frac{1}{2} + (3 - 1{,}8)^2 \cdot \frac{1}{6} =$
$= \frac{27}{250} + \frac{24}{125} + \frac{1}{50} + \frac{6}{25} = \frac{14}{25} = 0{,}56$;

$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{14}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{14} \approx 0{,}748$

2. (1) $0{,}25 + a + 0{,}05 + b + 0{,}10 = 1$;
(1′) $a + b = 0{,}60$;
(2) $-10 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot a + 10 \cdot 0{,}05 + 50 \cdot b + 100 \cdot 0{,}10 = 18$;
$-2{,}5 + 0{,}5 + 50b + 10 = 18$;
$50b = 10$;
$b = \frac{1}{5} = 0{,}20$
eingesetzt in (1′):
$a = 0{,}60 - 0{,}20 = 0{,}40$

3. $E(D) = E(M)$:
Die Notendurchschnitte waren in diesen beiden Schulaufgaben gleich.
$\sigma_D < \sigma_M$:
In der Mathematikschulaufgabe gab es mehr sehr gute und mehr sehr schlechte Noten als in der Deutschschulaufgabe; die Mathematiknoten „streuten" also mehr.
Beispiel:
Deutsch:

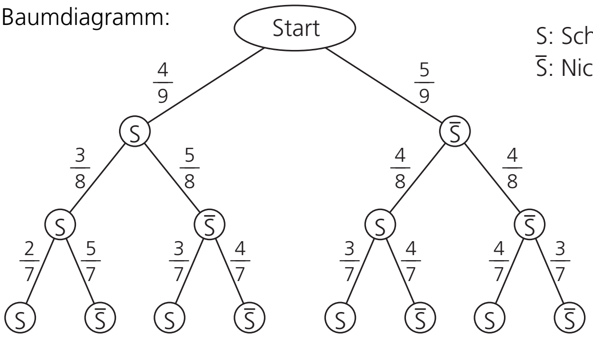
1	2	3	4	5	6
0	6	10	7	2	0

Durchschnittsnote: $E(D) = 3{,}20$
Standardabweichung:
$\sigma_D^2 = (2 - 3{,}20)^2 \cdot \frac{6}{25} + (3 - 3{,}20)^2 \cdot \frac{10}{25} + (4 - 3{,}20)^2 \cdot \frac{7}{25} + (5 - 3{,}20)^2 \cdot \frac{2}{25} = 0{,}8$;
$\sigma_D \approx 0{,}89$
Mathematik:

1	2	3	4	5	6
3	7	2	9	3	1

Durchschnittsnote: $E(M) = 3{,}20$; also ist $E(D) = E(M)$.
Standardabweichung:
$\sigma_M^2 = (1 - 3{,}20)^2 \cdot \frac{3}{25} + (2 - 3{,}20)^2 \cdot \frac{7}{25} + (3 - 3{,}20)^2 \cdot \frac{2}{25} + (4 - 3{,}20)^2 \cdot \frac{9}{25} +$
$+ (5 - 3{,}20)^2 \cdot \frac{3}{25} + (6 - 3{,}20)^2 \cdot \frac{1}{25} = 1{,}92$; $\sigma_M \approx 1{,}39$; also ist $\sigma_D < \sigma_M$.

4. a) Urnenmodell:
Aus einer Urne, in der sich (nur) vier schwarze und fünf weiße Kugeln befinden, werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Baumdiagramm:



S: Schmuggler
$\overline{S}$: Nichtschmuggler

b) (1) $P(\text{„kein Schmuggler"}) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5}{42} \approx 11{,}9\%$

(2) $P(\text{„genau ein Schmuggler"}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{21} \approx 47{,}6\%$

(3) $P(\text{„höchstens ein Schmuggler"}) = \frac{5}{42} + \frac{10}{21} = \frac{25}{42} \approx 59{,}5\%$

(4) $P(\text{„mindestens ein Schmuggler"}) = 1 - P(\text{„kein Schmuggler"}) = \frac{37}{42} \approx 88{,}1\%$

5. $P(A = 1) = \frac{1}{2}$;
$P(A = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;
$P(A = 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$;

A	1	2	3
P(A)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\mu = E(A) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1{,}75$;

$Var(A) = \left(1 - \frac{7}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(2 - \frac{7}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(3 - \frac{7}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{32} + \frac{1}{64} + \frac{25}{64} = \frac{11}{16}$;

$\sigma = \sqrt{\frac{11}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{11} \approx 0{,}83$

6. a) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$;

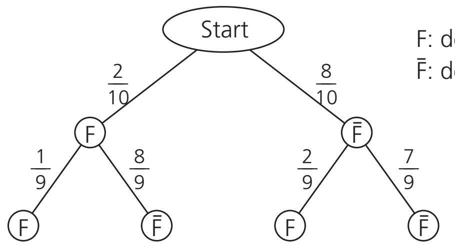
$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot [n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$

b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} = \frac{n! \cdot (k+1) + n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} =$

$= \frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)! \cdot (k+1)!}$;

$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n+1-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)! \cdot (k+1)!} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

7.



F: der Apfel ist faul
F̄: der Apfel ist nicht faul

$P(X = 0) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45} \approx 0{,}62$;

$P(X = 1) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{45} \approx 0{,}36$;

$P(X = 2) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45} \approx 0{,}02$:

x	0	1	2
P(X = x)	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

116

8. a)

	2005	2006	2007
Anzahl der Befürworter des Rauchverbots	1 340 – 280 = = 1 060	1 340 – 160 = = 1 180	0,670 · 2 000 = = 1 340
Prozentsatz	$\frac{1\,060}{2\,000}$ = 53,0%	$\frac{1\,180}{2\,000}$ = 59,0%	67,0%

b) (1) Die Person ist Raucher, befürwortet aber das Rauchverbot in Restaurants.

(2) $p_1 = 1 - 0{,}670 = 0{,}330 = 33{,}0\%$;

$p_2 \cdot 0{,}670 = 0{,}075$;

$p_2 = \frac{0{,}075}{0{,}670} \approx 11{,}2\%$;

$p_3 \cdot 0{,}670 = 0{,}595$;

$p_3 = \frac{0{,}595}{0{,}670} \approx 88{,}8\%$;

$p_1 \cdot p_4 = 0{,}265$;

$p_4 = \frac{0{,}265}{0{,}330} \approx 80{,}3\%$;

$p_5 = p_1 \cdot 0{,}197 = 0{,}330 \cdot 0{,}197 \approx 6{,}5\%$

(3)

	B	B̄	
R	7,5%	26,5%	34,0%
R̄	59,5%	6,5%	66,0%
	67,0%	33,0%	100%

P(B) = 67,0%;
P(R) = 34,0%;
$P(B) \cdot P(R) = 0{,}670 \cdot 0{,}340 \approx 22{,}8\%$;
$P(B \cap R) = 7{,}5\% \neq P(B) \cdot P(R)$;
also sind die Ereignisse B und R voneinander stochastisch abhängig.

(4) Da $P(R) = 0{,}340$ ist, ist $0{,}340 \cdot 2\,000 = 680$ die Anzahl der Raucher unter den befragten Personen.

(5) $0{,}075 \cdot 2\,000 = 150$;

$P_R(B) = \frac{150}{680} \approx 22{,}1\%$

oder:

$P_R(B) = \frac{P(R \cap B)}{P(R)} = \frac{7{,}5\%}{34{,}0\%} \approx 22{,}1\%$

c) (1) $P(X \leqq 10) = F(12;\, 0{,}67;\, 10) = 1 - P(X = 11) - P(X = 12) =$

$= 1 - \binom{12}{11} \cdot 0{,}67^{11} \cdot 0{,}33^{1} - \binom{12}{12} 0{,}67^{12} \cdot 0{,}33^{0} = 1 - 0{,}04836\ldots - 0{,}00818\ldots \approx$

$\approx 94{,}3\%$

(2) $1 - 0{,}33^n > 0{,}99$;

$-0{,}33^n > -0{,}01;\ | \cdot (-1)$

$0{,}33^n < 0{,}01$;

$n \cdot \ln 0{,}33 < \ln 0{,}01;\ | : \ln 0{,}33\ \ [\ln 0{,}33 < 0]$

$n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}33} = 4{,}1538\ldots$:

Es müssen mindestens fünf Personen ausgewählt werden.

d) H_0: $p \leqq 0{,}60$; $n = 100$

Annahmebereich: $A = \{0;\, 1;\, 2;\, \ldots;\, k\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{k + 1;\, \ldots;\, 99;\, 100\}$

$P(X > k) = 1 - P(X \leqq k) \leqq 0{,}05$;

$1 - F(100;\, 0{,}60;\, k) \leqq 0{,}05$;

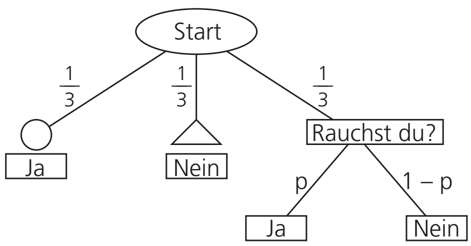
$F(100;\, 0{,}60;\, k) \geqq 0{,}95$;

$k \geqq 68$:

Maximaler Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{69;\, 70;\, 71;\, \ldots;\, 100\}$

Entscheidungsregel: Wenn unter den 100 befragten Personen mindestens 69 Befürworter des Rauchverbots in Restaurants sind, sollte man auf dem 5%-Signifikanzniveau die Hypothese H_0 ablehnen.

e) Baumdiagramm:



„Ja": $\frac{1}{3} + \frac{p}{3} \approx \frac{138}{357}$; $\frac{p}{3} \approx \frac{19}{357}$; $p \approx \frac{19}{119} \approx 16\%$