167

1. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\-12\\18\end{pmatrix} = -6 \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix} \neq \vec{o}$:

A, B und C legen eine Ebene E fest; Normalenvektor ist z. B. $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$.

E: $\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$; $\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}0\\-2\\-4\end{pmatrix}\right] = 0$;   E: $2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 8 = 0$

a) $d_O = \left|\frac{-8}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-3)^2}}\right| = \frac{8}{\sqrt{17}} \approx 1{,}94$;

$G = A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}-12\\-12\\18\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-12)^2 + (-12)^2 + 18^2} = \frac{1}{2}\sqrt{612} =$
$= 3\sqrt{17}$ (FE);

$V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot d_O = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{17} \cdot \frac{8}{\sqrt{17}} = 8$ (VE)

b) g: $\vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$; $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda = 0$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, also $O\,(0 \mid 0 \mid 0) \in g$;

$\vec{u} \circ \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = 0$: $g \parallel E$

1. Art:
Allgemeiner Geradenpunkt: $\vec{S} = \begin{pmatrix}\lambda\\-\lambda\\0\end{pmatrix}$;

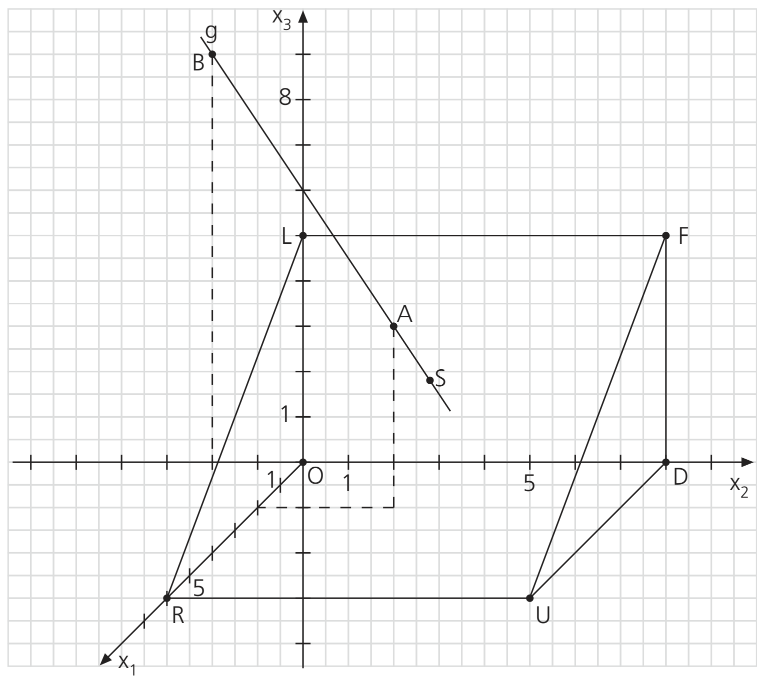
$d_S = \left|\frac{2 \cdot \lambda + 2 \cdot (-\lambda) - 3 \cdot 0 - 8}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-3)^2}}\right| = \left|\frac{-8}{\sqrt{17}}\right| = \frac{8}{\sqrt{17}}$;

$V^* = V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{17} \cdot \frac{8}{\sqrt{17}} = 8 = V$

2. Art:
Da $O \in g$ und $g \parallel E$ ist, hat *jeder* Punkt $S \in g$ den gleichen Abstand von E wie O; die Pyramide SABC hat also stets dieselbe Grundfläche und die gleiche Höhe wie OABC, also stets das Volumen 8 VE.

2. **a)** A liegt etwas oberhalb der „schiefen Ebene“ des Prismas.

b)



c) $\overrightarrow{RU} \times \overrightarrow{UF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 48 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{n}_{E_{RUF}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$;

E_{RUF}: $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0$; $\quad 5x_1 + 6x_3 - 30 = 0$;

g: $\vec{X} = \vec{A} + \sigma \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\quad \sigma \in \mathbb{R}$

Koordinaten von S:

$5 \cdot (2 - 2\sigma) + 6 \cdot (4 + 5\sigma) - 30 = 0;$

$10 - 10\sigma + 24 + 30\sigma - 30 = 0;$

$20\sigma = -4;$

$\sigma_S = -\frac{1}{5};$

$\vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\quad$ S (2,4 | 4 | 3)

S liegt innerhalb des Rechtecks RUFL.

$$\sin \varphi = \left| \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-2)^2 + (-5)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0^2 + 6^2}} \right| = \frac{20}{\sqrt{54} \cdot \sqrt{61}}; \quad \varphi \approx 20{,}4°$$

d) Lotebene zu h durch A:

E: $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = 0$; $\quad 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 1 = 0$

Schnittpunkt P mit der Geraden h:

$2 \cdot (2\lambda) + 5 \cdot (5\lambda) - 5 \cdot (-5\lambda) + 1 = 0;$

$4\lambda + 25\lambda + 25\lambda + 1 = 0$

$\lambda_P = -\frac{1}{54};$

$\vec{P} = -\frac{1}{54} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{27} \\ -\frac{5}{54} \\ \frac{5}{54} \end{pmatrix}$; $\quad P\left(-\frac{1}{27} \,\middle|\, -\frac{5}{54} \,\middle|\, \frac{5}{54}\right)$

Abstand der Geraden voneinander:

$$|\overrightarrow{AP}| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{1}{27} \\ -\frac{5}{54} \\ \frac{5}{54} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2\frac{1}{27} \\ -3\frac{5}{54} \\ -3\frac{49}{54} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(-2\frac{1}{27}\right)^2 + \left(-3\frac{5}{54}\right)^2 + \left(-3\frac{49}{54}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{110^2 + 167^2 + 211^2}{54^2}} = \sqrt{\frac{1\,565}{54}} \approx 5{,}4:$$

h hat von g etwa den Abstand 5,4 LE = 5,4 cm.

e) Volumen:

$V_P = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{RU}| \cdot |\overrightarrow{UD}| \cdot |\overrightarrow{DF}| = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 = 120$

Oberflächeninhalt:

$A_P = 2 \cdot G_P + M_P;$

$G_P = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{RO}| \cdot |\overrightarrow{OL}| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15;$

$M_P = (|\overrightarrow{RO}| + |\overrightarrow{OL}| + |\overrightarrow{LR}|) \cdot |\overrightarrow{OD}| = (6 + 5 + \sqrt{61}) \cdot 8 = 88 + 8\sqrt{61};$

$A_P = 2 \cdot 15 + 88 + 8\sqrt{61} = 118 + 8\sqrt{61} \approx 180{,}5:$

Das Prisma hat ein Volumen von 120 cm^3 und einen Oberflächeninhalt von etwa 180,5 cm^2.

3. **a)** Schnittwinkel:

$$\cos\varphi = \left|\frac{\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}}\right| = \left|\frac{2+2-4}{9}\right| = 0;\quad \varphi = 90°$$

Richtungsvektor der Schnittgeraden:

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-6\\-3\end{pmatrix} = -3\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix};\quad \vec{u} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

Lage von $P\,(0\,|\,1\,|\,-2) \in s$:

E_1: $2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3 = 0$; E_2: $x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6 = 0$;

$2\cdot 0 - 1 - 2\cdot(-2) - 3 = 0$: $P \in E_1$; $0 - 2\cdot 1 + 2\cdot(-2) + 6 = 0$: $P \in E_2$

Schnittgerade:

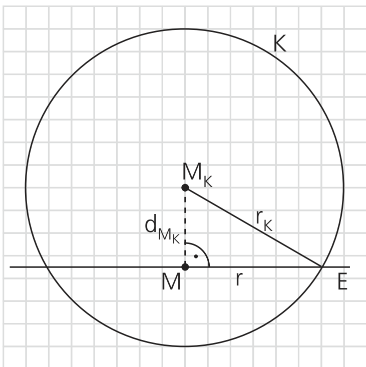
$$s\colon \vec{X} = \vec{P} + \lambda\vec{u};\quad s\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R}$$

b) 1. Schritt:
Den Schnittpunkt S von g und E_1 ermitteln; dieser Punkt S wird bei der Projektion auf sich selbst abgebildet.
2. Schritt:
Einen Punkt $Q \in g$ (mit $Q \neq S$) wählen und eine Gleichung der Geraden
$h\colon \vec{X} = \vec{Q} + \lambda\cdot\vec{u}$; $\lambda \in \mathbb{R}$, aufstellen.
3. Schritt:
Den Schnittpunkt R von h und E_1 ermitteln; dieser Punkt R entsteht durch Projektion von Q auf E_1.
4. Schritt:
Für die Bildgerade gilt $g^* = SR$, d. h. $g^*\colon \vec{X} = \vec{S} + \sigma(\vec{R} - \vec{S})$; $\sigma \in \mathbb{R}$.

4. $M_K\,(-8\,|\,-3\,|\,0)$; $r_K = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}5$;

$$d_{M_K} = \left|\frac{-8 + 4\cdot(-3) + 0 + 2}{-\sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2}}\right| = \left|\frac{18}{\sqrt{18}}\right| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} < r_K:\quad \text{K schneidet E.}$$

Schnittkreis (Mittelpunkt M; Radiuslänge r):



$d_{M_K}^2 + r^2 = r_K^2$;

$(\sqrt{18})^2 + r^2 = (\sqrt{72})^2$;

$r^2 = 72 - 18 = 54$;

$r = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \approx 7{,}3$;

$A_{Kreis} = r^2\pi = 54\pi \approx 169{,}6$ (FE)

5. a) Geradengleichungen:

AB: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R}$

CD: $\vec{X} = \vec{C} + \mu \cdot \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad \mu \in \mathbb{R}$

Prüfen auf Parallelität:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}; \qquad \left.\begin{array}{l} -4 = -2k_1;\ k_1 = 2 \\ 3 = -k_2;\ k_2 = -3 \neq k_1 \\ (2 = 7k_3;\ k_3 = \frac{2}{7} \neq k_1) \end{array}\right\} AB \nparallel CD$$

Prüfen auf Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix};$$

(1) $2 - 4\lambda = 1 - 2\mu;$
(2) $1 + 3\lambda = 3 - \mu;$
(3) $2\lambda = -2 + 7\mu;$
(3') $\lambda = -1 + 3{,}5\mu;$

(3') in (1): $2 - 4 \cdot (-1 + 3{,}5\mu) = 1 - 2\mu;$
$2 + 4 - 14\mu = 1 - 2\mu;$
$\mu_1 = \frac{5}{12}$

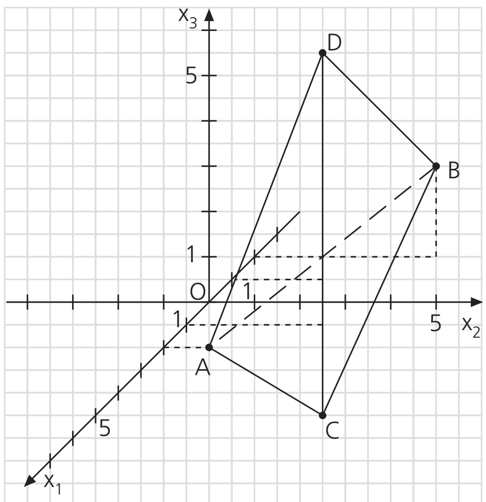
(3') in (2): $1 + 3 \cdot (-1 + 3{,}5\mu) = 3 - \mu;$
$1 - 3 + 10{,}5\mu = 3 - \mu;$
$\mu_2 = \frac{10}{23} \neq \mu_1$: $AB \cap CD = \{\}$

AB und CD sind nicht zueinander parallel und besitzen keinen gemeinsamen Punkt, sind also zueinander windschief.

b) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} = -5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$

E: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0; \quad$ E: $2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 = 0$

c) Schrägbild:



Lage des Punkts P (–6 | 7 | 4):

[AB]: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \lambda \in [0; 1]$

(1) $-6 = 2 - 4\lambda;\ \lambda_1 = 2$
(2) $7 = 1 + 3\lambda;\ \lambda_2 = 2$
(3) $4 = 2\lambda;\ \lambda_3 = 2$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$: $P \in AB$; $2 \notin [0; 1]$:
$P \notin [AB]$

Hinweis: B ist der Mittelpunkt der Strecke [AP].

6. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

F: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = 0$; F: $2x_1 - 2x_2 - x_3 + 6 = 0$

a) $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{n_F}$: E ǁ F

$A \in F$: $d_{A(E)} = \left|\frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 4 - 12}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}}\right| = \left|\frac{-18}{\sqrt{9}}\right| = 6$

b) Gerade PQ (auf ihr liegt der einfallende Strahl):

PQ: $\vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$; $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

Schnittpunkt R von PQ mit E („Reflexionspunkt"):

$2(1 - 7\lambda) - 2(2 - 7\lambda) - (0 - 7\lambda) = 12$;

$2 - 14\lambda - 4 + 14\lambda + 7\lambda = 12$; $7\lambda = 14$; $\lambda_R = 2$;

$\vec{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -12 \\ -14 \end{pmatrix}$; R (–13 | –12 | –14)

Lotgerade zu E durch P:

$\vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot \overrightarrow{n_E}$; $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\mu \in \mathbb{R}$

Lotfußpunkt G:

$2(1 + 2\mu) - 2(2 - 2\mu) - (0 - \mu) - 12 = 0$;

$2 + 4\mu - 4 + 4\mu + \mu - 12 = 0$;

$9\mu = 14$; $\mu_G = \frac{14}{9}$;

$\vec{G} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{14}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\frac{1}{9} \\ -1\frac{1}{9} \\ -1\frac{5}{9} \end{pmatrix}$

Spiegelpunkt P* von P an E:

$\overrightarrow{P^*} = \vec{P} + 2 \cdot \overrightarrow{PG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3\frac{1}{9} \\ -3\frac{1}{9} \\ -1\frac{5}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\frac{2}{9} \\ -4\frac{2}{9} \\ -3\frac{1}{9} \end{pmatrix}$

Gerade P*R (auf ihr liegt der reflektierte Strahl):

$\vec{X} = \overrightarrow{P^*} + \sigma \cdot \overrightarrow{P^*R} = \begin{pmatrix} 7\frac{2}{9} \\ -4\frac{2}{9} \\ -3\frac{1}{9} \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -20\frac{2}{9} \\ -7\frac{7}{9} \\ -10\frac{8}{9} \end{pmatrix}$; $\sigma \in \mathbb{R}$

Schnittpunkt S von P*R mit der Ebene F:

$2\left(7\frac{2}{9} - 20\frac{2}{9} \cdot \sigma\right) - 2 \cdot \left(-4\frac{2}{9} - 7\frac{7}{9} \cdot \sigma\right) - \left(-3\frac{1}{9} - 10\frac{8}{9} \cdot \sigma\right) + 6 = 0$;

$14\frac{4}{9} - 40\frac{4}{9} \cdot \sigma + 8\frac{4}{9} + 15\frac{5}{9} \cdot \sigma + 3\frac{1}{9} + 10\frac{8}{9} \cdot \sigma + 6 = 0$;

$-14\sigma = -32$; $\sigma_s = \frac{16}{7}$;

$S = \begin{pmatrix} 7\frac{2}{9} \\ -4\frac{2}{9} \\ -3\frac{1}{9} \end{pmatrix} + \frac{16}{7} \cdot \begin{pmatrix} -20\frac{2}{9} \\ -7\frac{7}{9} \\ -10\frac{8}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ -22 \\ -28 \end{pmatrix}$; S (–39 | –22 | –28)

Ergebnis: Der von der Lichtquelle P (1 | 2 | 0) ausgehende Strahl wird im Punkt R (–13 | –12 | –14) an der Ebene E reflektiert und trifft dann die Ebene F im Punkt S (–39 | –22 | –28).

7. Eckpunkte der Pyramide: O (0 | 0 | 0), A (4 | 0 | 0), B (0 | 2 | 0) und C (0 | 0 | 3)

a) Ebenengleichung:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\12\\8\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix};\ \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix};\quad E: \overrightarrow{n_E} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0;$$

$$\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right] = 0;\quad E: 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 12 = 0$$

Abstand:

$$d_O = \left|\frac{-12}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 4^2}}\right| = \frac{12}{\sqrt{61}} \approx 1{,}54$$

b) Pyramidenvolumen:

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\,\overline{OA} \cdot \overline{OB}\right) \cdot \overline{OC} = \frac{1}{6} \cdot 4\text{ LE} \cdot 2\text{ LE} \cdot 3\text{ LE} = 4\text{ VE}$$

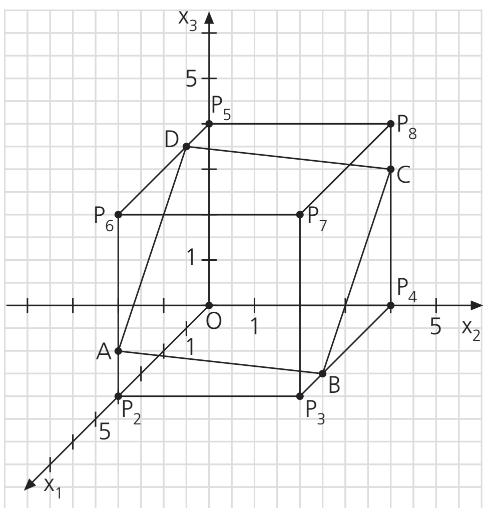
Zylindervolumen:

$$V_Z = r^2\pi h = 16\text{ FE} \cdot \pi \cdot 3\text{ LE} = 48\pi\text{ VE} \approx 150{,}80\text{ VE}$$

Bruchteil:

$$\frac{V_P}{V_Z} = \frac{4}{48\pi} = \frac{1}{12\pi} \approx 2{,}7\%$$

8. a)



Eckpunkte:
P_2 (4 | 0 | 0)
P_3 (4 | 4 |0)
P_5 (0 | 0 | 4)
P_7 (4 | 4 | 4)
P_8 (0 | 4 | 4)

b) $\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{AD} = \vec{A} + (-\overrightarrow{CB}) = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$; D (1 | 0 | 4):

D liegt auf der Würfelkante $[P_5P_6]$.

Wegen $\overrightarrow{AD} \circ \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix} = 3 + 0 - 3 = 0$ ist $\sphericalangle$ ADC = 90°; außerdem ist

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{18} = |\overrightarrow{DC}|$:
Das Parallelogramm ABCD besitzt einen rechten Innenwinkel und zwei gleich lange Nachbarseiten, ist also ein Quadrat.

c) g: $\vec{X} = \vec{P_4} + \lambda \cdot \overrightarrow{P_4P_6} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix}$; $\lambda \in \mathbb{R}$;

h: $\vec{X} = \vec{A} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$; $\mu \in \mathbb{R}$

Prüfen auf Parallelität:

$$\begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix};\qquad \left.\begin{array}{ll} 4 = -4k_1; & k_1 = -1 \\ -4 = 4k_2; & k_2 = -1 \\ 4 = 2k_3; & k_3 = 2 \neq k_1 \end{array}\right\} g \nparallel h$$

Prüfen auf Schnittpunkt:
(1) $0 + 4\lambda = 4 - 4\mu$;
(2) $4 - 4\lambda = 0 + 4\mu$;
(3) $0 + 4\lambda = 1 + 2\mu$;
(1') $\lambda = 1 - \mu$;
(1') in (2) $4 - 4 + 4\mu = 4\mu$;
$4\mu = 4\mu$ (wahr)
(1') in (3) $4 - 4\mu = 1 + 2\mu$;
$3 = 6\mu$;
$\mu_S = \frac{1}{2}$;

$$\vec{S} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}:$$

Die Geraden g und h schneiden einander im Punkt S (2 | 2 | 2).

$$\cos\varphi = \left|\frac{\begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{48} \cdot 6}\right| = \frac{24}{6\sqrt{48}} = \frac{1}{\sqrt{3}}:$$

g und h bilden miteinander Winkel etwa der Größen 54,7° bzw. 125,3°.

d) Ebenengleichung:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\6\\12\end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix};$$

E: $\overrightarrow{n_E} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$;

$$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}\right] = 0; \qquad E\colon 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 10 = 0$$

Durchstoßpunkt T:
$2 \cdot (4\lambda) + 1 \cdot (4 - 4\lambda) + 2 \cdot (4\lambda) - 10 = 0$;
$8\lambda + 4 - 4\lambda + 8\lambda - 10 = 0$; $\lambda_T = \frac{1}{2}$;

$$\vec{T} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}; \quad T\,(2 \mid 2 \mid 2) = S$$

$$\overrightarrow{M_{[P_4P_6]}} = \frac{1}{2}(\vec{P_4} + \vec{P_6}) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \vec{T}$$

Der Punkt T liegt „in der Mitte“ des Würfels: in ihm schneiden einander die vier Raumdiagonalen des Würfels, und er ist von allen acht Würfeleckpunkten gleich weit entfernt.

e) Lotebene zu g durch P_5:

$$F\colon \begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\right] = 0; \; 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 16 = 0$$

Schnittpunkt G von F und g:
$4 \cdot (0 + 4\lambda) - 4 \cdot (4 - 4\lambda) + 4 \cdot (0 + 4\lambda) - 16 = 0$;
$16\lambda - 16 + 16\lambda + 16\lambda - 16 = 0$; $48\lambda = 32$;
$\lambda_G = \frac{2}{3}$;

$$\vec{G} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\\frac{4}{3}\\\frac{8}{3}\end{pmatrix}; \quad G\left(\tfrac{8}{3} \mid \tfrac{4}{3} \mid \tfrac{8}{3}\right)$$

Spiegelpunkte?

$$\overrightarrow{M_{[P_3P_5]}} = \frac{1}{2}(\vec{P_3} + \vec{P_5}) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \neq \vec{G}:$$

P_3 und P_5 sind keine Spiegelpunkte voneinander bezüglich G.