1 Trigonometrie – mit Dreiecken rechnen

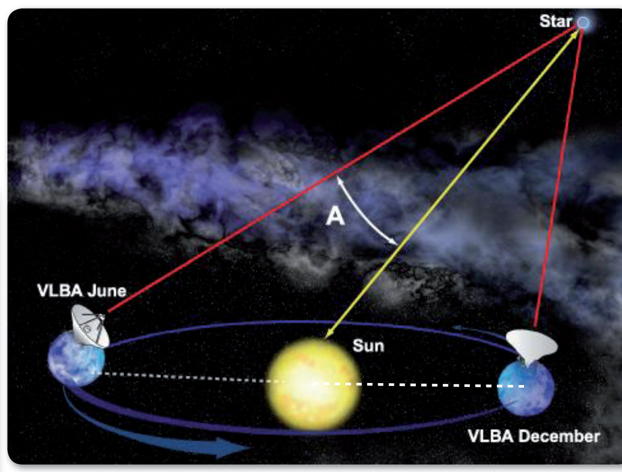
Einstieg

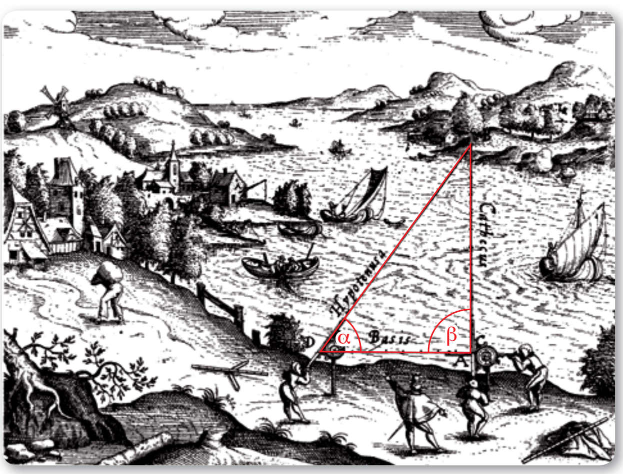
Die Landvermesser auf der Darstellung aus dem 16. Jahrhundert bestimmen die Breite eines Flusses. Dazu haben sie die Winkel $\alpha = 60°$ und $\beta = 90°$ ausgemessen. Die beiden Messpunkte sind 25 m voneinander entfernt.

- Ermittle die Breite des Flusses durch eine maßstäbliche Zeichnung.

Astronomen bestimmen die Entfernung gewisser Sterne nach dem gleichen Prinzip.

- Überlege, welche Stücke bekannt sein bzw. gemessen werden müssen, damit die Methode übertragbar ist.
- Recherchiere, warum sie keine maßstäblichen Zeichnungen anfertigen können.





Ausblick

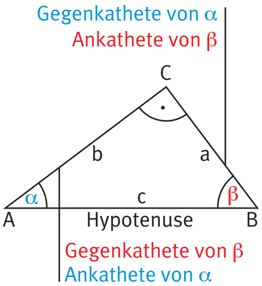
Am Ende dieses Kapitels hast du gelernt, ...

- Winkel und Seiten in rechtwinkligen Dreiecken mithilfe von Sinus, Kosinus und Tangens zu berechnen.
- Zusammenhänge zwischen Sinus, Kosinus und Tangens zu beschreiben und zu nutzen.
- Sachaufgaben mithilfe von Winkelmaßen zu lösen.
- Winkel und Seiten in beliebigen Dreiecken mithilfe von Sinus, Kosinus und Tangens zu berechnen.
- den Flächeninhalt von Dreiecken mithilfe von Winkelmaßen berechnen.

Die Begriffe „Steigung“ und „Gefälle“ sind dir schon häufig begegnet: Bei der Tour de France überwinden die Radrennfahrer Steigungen bis zu 18 %, ein Geländewagen hat eine Steigfähigkeit von etwa 25°, schwarz gekennzeichnete Skipisten weisen ein Gefälle von bis zu 30° auf und ein Adler verliert bei Windsstille im Gleitflug auf 100 m etwa 6 m an Höhe.

- Erkläre die Begriffe Steigung und Gefälle.
- Ermittle bei jedem der Einführungsbeispiele mithilfe eines Steigungsdreiecks den Steigungswinkel auf Grad genau bzw. die Steigung auf Prozent genau.
- Erkläre das abgebildete Verkehrsschild und bestimme den maximalen Steigungswinkel dieses Straßenabschnitts auf Grad gerundet.

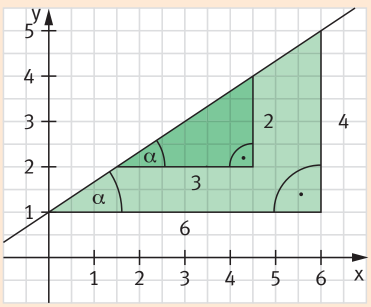
Das rechtwinklige Dreieck ($\gamma = 90°$):



Merkwissen

Steigungsdreiecke an einer Geraden sind alle zueinander ähnlich. Deshalb ist das **Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete** des Steigungswinkels α stets gleich:

Steigung $m = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \ldots$



In einem rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man das Verhältnis der Längen von **Gegenkathete zu Ankathete** eines spitzen Winkels als **Tangens**, kurz **tan**:

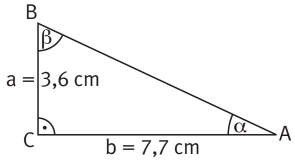
$$\text{Tangens des Winkels} = \frac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Ankathete des Winkels}}$$

Man schreibt im rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90°$): $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ und liest „Tangens von Alpha“.

Beispiele

Taschenrechner:
Tangens: tan

I Berechne den Tangens der Winkel α und β im gegebenen rechtwinkligen Dreieck ABC. Bestimme dann die Größe von α und β mit dem Taschenrechner.

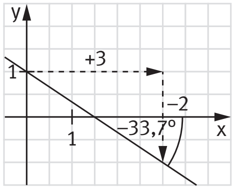


Lösung:

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{3{,}6\text{ cm}}{7{,}7\text{ cm}} = \frac{36}{77} \approx 0{,}47 \implies \alpha \approx 25°$$

$$\tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{7{,}7\text{ cm}}{3{,}6\text{ cm}} = \frac{77}{36} \approx 2{,}14 \implies \beta \approx 65°$$

Den Winkel kannst du mit der Taschenrechnerfunktion $\tan^{-1}$ berechnen.



II Berechne die Größe des spitzen Winkels, den die Gerade g mit $g(x) = -\frac{2}{3}x + 1$ mit der x-Achse bildet.

Lösung:

$\tan \alpha = -\frac{2}{3}$.
Tastenfolge: z. B. Shift tan (– 2 : 3) = Anzeige: –33,69006753
Ergebnis: $\alpha \approx -33{,}7°$ bzw. $\alpha' = 180 - \alpha \approx 146{,}3°$
Bei fallenden Geraden ist der betragsmäßig kleinere Winkel mit der positiven x-Achse negativ.

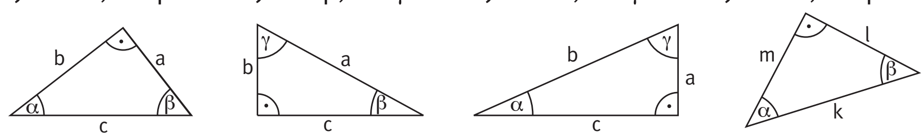
VERSTÄNDNIS

- Welcher Steigungswinkel gehört zu einer Steigung von 100 %?
- Begründe, dass der Tangenswert eines Winkels größer als 1 werden kann.
- Welchen Wert hat $\tan\alpha \cdot \tan\beta$, wenn α und β die beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sind? Begründe.

AUFGABEN

1 Gib jeweils als Verhältnis der Seitenlängen an.

a) $\tan\alpha$, $\tan\beta$ **b)** $\tan\beta$, $\tan\gamma$ **c)** $\tan\alpha$, $\tan\gamma$ **d)** $\tan\alpha$, $\tan\beta$



2 Berechne $\tan\alpha$ und $\tan\beta$ für das rechtwinklige Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$. Runde auf zwei Stellen nach dem Komma.

a) $a = 8{,}3$ cm; $b = 6{,}7$ cm **b)** $a = 73$ mm; $b = 113$ mm
c) $a = 12{,}4$ m; $b = 19{,}8$ m **d)** $a = 1{,}2$ dm; $b = 98$ cm

Lösungen zu 2:
0,12; 0,63; 0,65; 0,81; 1,24; 1,55; 1,60; 8,17

3 Berechne jeweils den Tangens des Winkels α auf Hundertstel gerundet.

a) $\alpha = 60°$ **b)** $\alpha = 72°$ **c)** $\alpha = 15°$ **d)** $\alpha = 23°$ **e)** $\alpha = 81°$ **f)** $\alpha = 8°$

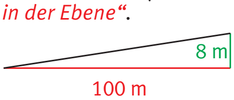
4 Berechne jeweils die Größe des spitzen Winkels α auf Zehntel Grad gerundet.

a) $\tan\alpha = 1{,}20$ **b)** $\tan\alpha = 0{,}45$ **c)** $\tan\alpha = 2{,}75$
d) $\tan\alpha = 0{,}06$ **e)** $\tan\alpha = 30{,}00$

5 Ermittle jeweils die Größe des Steigungswinkels sowohl zeichnerisch, als auch mithilfe deines Taschenrechners.

a) St.-Gotthard-Passstraße 10 % **b)** Zugspitz-Zahnradbahn 25 %
c) Autobahn 3 % **d)** Jaufenpass 12 %

8 % = $\frac{8}{100}$ bedeutet 8 Höhenmeter auf 100 m „in der Ebene“.



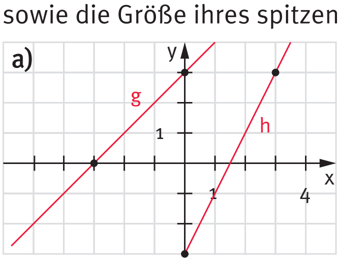
6 Übertrage die Tabelle in dein Heft und berechne die fehlenden Werte.

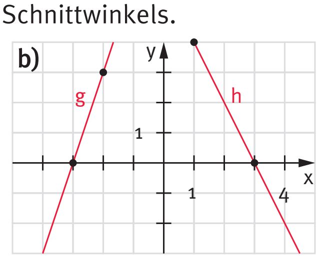
	a	b	c	α	β	γ
a)		5,2 cm		30°	60°	
b)	1,9 cm	18,1 cm			90°	
c)			10,2 cm	90°		38°
d)	12,3 cm				90°	63°

Beachte den Satz des Pythagoras.

Lösungen zu 6:
6°; 27°; 52°; 84°; 90°; 3,0; 6,0; 13,1; 16,6; 18,0; 21,7; 24,1; 27,1

7 Die Abbildungen zeigen jeweils die Geraden g und h; gib je eine Gleichung für jede dieser beiden Geraden an und ermittle dann die Koordinaten ihres Schnittpunkts sowie die Größe ihres spitzen Schnittwinkels.





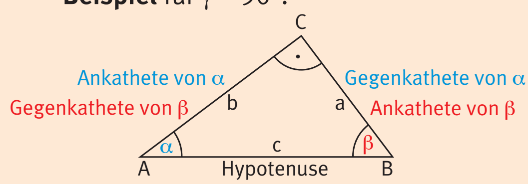
In Rio de Janeiro steht die 50 m hohe Wasserrutsche *Kilimandscharo*. 2009 wurden dort Höchstgeschwindigkeiten gemessen. Die Herren erreichten eine Höchstgeschwindigkeit von 91 km/h. Bei den Damen wurde eine Geschwindigkeit von 85 km/h gemessen – der Weltrekord.

- Schätze aus dem Bild die Höhe des geradlinigen Teils der Rutsche ab.
- Nimm an, die Durchschnittsgeschwindigkeit bei den Herren betrug im geradlinigen Teil 50 km/h. Ermittle daraus die Fahrtdauer in diesem Abschnitt.

Merkwissen

In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man das **Verhältnis der Längen von Gegenkathete zu Hypotenuse** eines spitzen Winkels den **Sinus** des Winkels, kurz **sin**:

Beispiel für $\gamma = 90°$:



sin α sprich: „Sinus von α“ oder „Sinus α“

$$\text{Sinus des Winkels} = \frac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \sin\alpha = \frac{a}{c};\ \sin\beta = \frac{b}{c}$$

Das **Verhältnis der Längen von Ankathete zu Hypotenuse** eines spitzen Winkels nennt man **Kosinus** des Winkels, kurz **cos**:

cos α sprich: „Kosinus von α“ oder „Kosinus α“

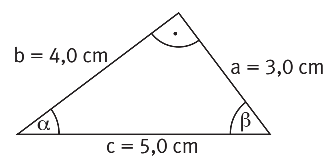
$$\text{Kosinus des Winkels} = \frac{\text{Ankathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c};\ \cos\beta = \frac{a}{c}$$

Beispiele

Sinus: sin

Kosinus: cos

I Gib als Verhältnis der Seitenlängen an. Berechne anschließend die Größe der Winkel mithilfe des Taschenrechners.



a) $\sin\alpha$ **b)** $\sin\beta$
c) $\cos\alpha$ **d)** $\cos\beta$

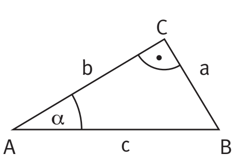
Lösung:

Den Winkel kannst du mit den Taschenrechnerfunktionen $\sin^{-1}$ bzw. $\cos^{-1}$ berechnen.

a) $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3{,}0\text{ cm}}{5{,}0\text{ cm}} = 0{,}6 \Longrightarrow \alpha \approx 37°$ **b)** $\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{4{,}0\text{ cm}}{5{,}0\text{ cm}} = 0{,}8 \Longrightarrow \beta \approx 53°$

c) $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{4{,}0\text{ cm}}{5{,}0\text{ cm}} = 0{,}8 \Longrightarrow \alpha \approx 37°$ **d)** $\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{3{,}0\text{ cm}}{5{,}0\text{ cm}} = 0{,}6 \Longrightarrow \beta \approx 53°$

II Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge 5 cm der Hypotenuse c und die Größe 60° des Winkels α bekannt. Ermittle die Längen der beiden Katheten.



Lösung:

$\frac{b}{c} = \cos\alpha \quad | \cdot c \qquad b = c \cdot \cos\alpha = 5\text{ cm} \cdot \cos 60° = 5\text{ cm} \cdot 0{,}5 = 2{,}5\text{ cm}$

$\frac{a}{c} = \sin\alpha \quad | \cdot c \qquad a = c \cdot \sin\alpha = 5\text{ cm} \cdot \sin 60° \approx 4{,}33\text{ cm}$

Andere Möglichkeit der Berechnung von a:

Nach dem Satz von Pythagoras ist $a^2 + b^2 = c^2$ $\quad | - b^2$

$a^2 = c^2 - b^2 = (5\text{ cm})^2 - (2{,}5\text{ cm})^2 = 25\text{ cm}^2 - 6{,}25\text{ cm}^2 = 18{,}75\text{ cm}^2$ $\quad |\sqrt{\ }$

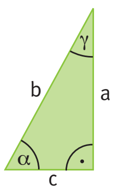
$a = \sqrt{18{,}75\text{ cm}^2} \approx 4{,}33\text{ cm}$

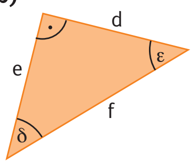
Verständnis

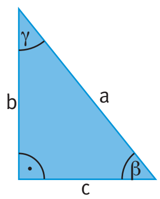
- Wie ändert sich der Wert des Sinus (Kosinus) eines Winkels, wenn sich bei ähnlichen Dreiecken die Länge aller Seiten verdoppelt, verdreifacht, …?
- Begründe: Der Sinuswert eines Winkels kann nie größer als 1 werden.

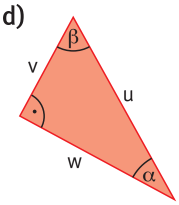
Aufgaben

1 Gib Sinus und Kosinus der spitzen Winkel jeweils als Verhältnis der Seitenlängen an.

a)


b)


c)


d)


2 Berechne jeweils die Größe des spitzen Winkels auf Zehntel Grad gerundet.

a) $\sin\alpha = 0{,}20$ **b)** $\cos\alpha = 0{,}45$ **c)** $\sin\alpha = 0{,}45$
d) $\cos\alpha = 0{,}06$ **e)** $\sin\alpha = 0{,}71$ **f)** $\cos\alpha = 0{,}99$

3 Berechne jeweils die Werte des Sinus und des Kosinus des Winkels auf Hundertstel gerundet.

a) $\alpha = 60°$ **b)** $\alpha = 72°$ **c)** $\alpha = 15°$ **d)** $\alpha = 23°$ **e)** $\alpha = 81°$ **f)** $\alpha = 8°$

4 Das Dreieck ABC hat einen rechten Winkel γ.

a) Berechne jeweils $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ sowie die Winkel α und β. Runde auf zwei Dezimalen.

① $a = 5{,}5$ cm; $b = 4{,}8$ cm; $c = 7{,}3$ cm ② $a = 33$ m; $b = 56$ m; $c = 65$ m

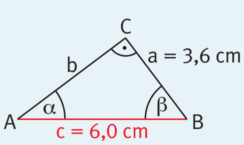
b) Begründe nur unter Nutzung der gegebenen Seitenlängen, dass die Dreiecke rechtwinklig bei γ sind.

5 Berechne die gesuchte Seitenlänge im rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ und $c = 4{,}5$ cm.

a) $\alpha = 25°$; $a = \square$ **b)** $\beta = 55°$; $a = \square$ **c)** $\alpha = 31°$; $b = \square$ **d)** $\beta = 84°$; $b = \square$

6 a) Bei einem rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ sind die Hypotenuse $c = 6{,}0$ cm und die Kathete $a = 3{,}6$ cm gegeben. Timo berechnet die fehlenden Winkelgrößen und Seitenlängen.

Skizze:



$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3{,}6\text{ cm}}{6{,}0\text{ cm}} \Longrightarrow \alpha \approx 37°$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} \Longrightarrow b = c \cdot \cos\alpha \quad b = 6{,}0\text{ cm} \cdot \cos 37° \approx 4{,}8\text{ cm}$

$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{4{,}8\text{ cm}}{6{,}0\text{ cm}} \Longrightarrow \beta \approx 53°$

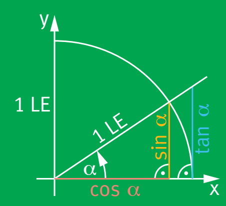
① Beschreibe sein Vorgehen.
② Beschreibe, wie Timo den Winkel β geschickter bestimmen kann.

b) Erstelle eine Skizze. Berechne die fehlenden Größen im bei C rechtwinkligen Dreieck ABC.

① $a = 2{,}8$ cm; $c = 5{,}3$ cm ② $b = 15{,}0$ cm; $c = 17{,}0$ cm ③ $b = 4{,}0$ cm; $\beta = 45°$

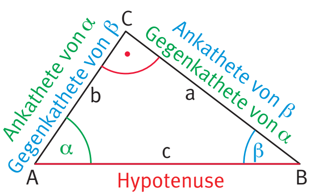
Lösungen zu 6 b):
28°; 32°; 45°; 58°; 62°; 4,0; 4,5; 5,7; 8,0

Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis



Der Kreis mit Radiuslänge 1 LE und dem Ursprung als Mittelpunkt heißt Einheitskreis.

- Erkläre die Tafelzeichnung und begründe, dass für alle spitzen Winkel α gilt:
  1. $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha) = 1$
  2. $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ und $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$
  3. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- Überlege dir, wie sich die Streckenlängen in der obigen Zeichnung verändern, wenn man den Winkel α immer kleiner macht?
- Gib in deinen Taschenrechner ein: sin 0° (cos 0°, tan 0°, sin 90°, cos 90° und tan 90°). Erkläre die Anzeige des Taschenrechners.



Statt $(\sin\alpha)^2$ schreibt man auch kurz $\sin^2\alpha$. Für cos und tan gilt Entsprechendes.

Merkwissen

Für die Grenzfälle 0° und 90° setzt man fest:
$\sin 0° = \cos 90° = 0$; $\sin 90° = \cos 0° = 1$; $\tan 0° = 0$
Im rechtwinkligen Normdreieck, welches als Spezialfall am Einheitskreis zu finden ist, kann man leicht folgende Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens spitzer Winkel herleiten:

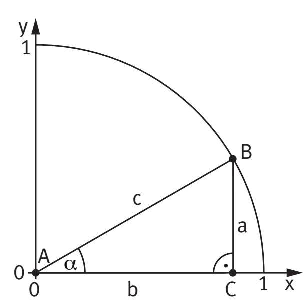
1. $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ und $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ (Begründung: $\beta = 90° - \alpha$)
2. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (Begründung: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ und $\tan\alpha = \frac{a}{b}$)
3. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (Begründung: Satz des Pythagoras im Einheitskreis)

Beispiele

I Zeige den Zusammenhang $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ auf zwei verschiedene Arten.

Lösung:

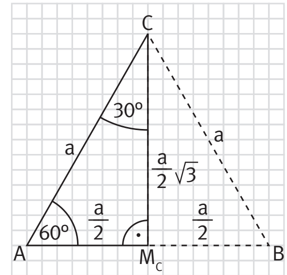
1. Im Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ gilt $\tan\alpha = \frac{a}{b}$.
   Erweitere den Bruch mit $\frac{1}{c}$, dann folgt:
   $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a \cdot \frac{1}{c}}{b \cdot \frac{1}{c}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



2. In den Dreiecken am Einheitskreis sei der Mittelpunktswinkel α.
   Mit der Hypotenusenlänge $c = 1$ folgt:
   $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{1} = a$
   $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{b}{1} = b$
   Somit: $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

II Ermittle für Winkel der Größe 30° und 60° die exakten Werte des Sinus, Kosinus und Tangens.

Lösung:
Man zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC. Die eingezeichnete Höhe h_c ist zugleich Mittelsenkrechte auf AB und Winkelhalbierende des Winkels γ. Also hat das Teildreieck AM_cC die Winkelweiten 60°, 90° und 30° und es gilt:



$\sin 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} = \cos 60°$ $\qquad$ $\cos 30° = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60°$

$\tan 30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ (Hinweis: Es wurde mit $\sqrt{3}$ erweitert.)

$\tan 60° = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$

Verständnis

- Begründe an der Zeichnung am Einheitskreis, dass tan 90° nicht definiert ist.
- Ermittle den Wert für sin 45°.
- Leite eine Beziehung für $\tan(90° - \alpha)$ her.

Aufgaben

oHiMi 1 – 3

1 Ersetze in deinem Heft den Platzhalter so, dass eine wahre Aussage entsteht.

a) $\sin 45° = \cos \square$ **b)** $\cos 20° = \sin \square$ **c)** $\sin 75° = \cos \square$
d) $\cos 80° = \sin \square$ **e)** $\sin 20° \;\square\; \sin 70°$ **f)** $\cos 40° \;\square\; \cos 60°$
g) $\tan 70° \;\square\; \tan 60°$ **h)** $\cos 65° \;\square\; \sin 35°$ **i)** $\tan 60° \;\square\; 1$
j) $\tan 45° = \square$ **k)** $\cos 85° - \sin 5° = \square$ **l)** $\cos 0° + \cos 90° = \square$

2 Zeige die Richtigkeit der Angaben aus der Tabelle. Zeichne dazu ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Ergänze die fehlenden Angaben.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$		$\frac{1}{2}\sqrt{2}$		
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{\square}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\square}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\square}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\square}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\square}$
$\cos\alpha$			$\frac{1}{2}\sqrt{2}$		
$\tan\alpha$			1		

3 a) Von einem spitzen Winkel α ist bekannt, dass $\sin\alpha = 0{,}6$ ist. Gesa berechnet $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$, ohne vorher α zu ermitteln. Beschreibe ihr Vorgehen.

1
$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$
$$0{,}36 + (\cos\alpha)^2 = 1$$
$$(\cos\alpha)^2 = 0{,}64$$
$$\cos\alpha = 0{,}8$$

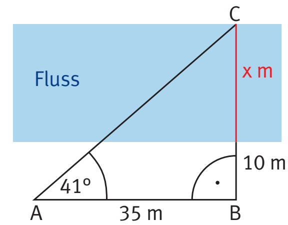
2
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$
$$\tan\alpha = 0{,}75$$

b) Übertrage die Tabelle in dein Heft und ergänze dort die fehlenden Werte, ohne die Größe des Winkels α zu ermitteln. Runde auf zwei Dezimalen.

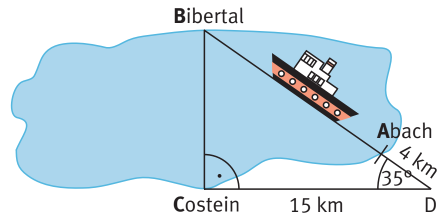
	1	2	3	4	5	6	7
$\sin\alpha$	0,25	$\square$	$\square$	0,11	$\square$	0,50	$\square$
$\cos\alpha$	$\square$	0,50	$\square$	$\square$	0,72	$\square$	0,81
$\tan\alpha$	$\square$	$\square$	1,00	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$

Aufgaben

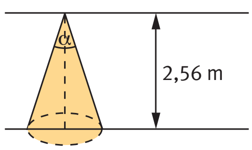
1 Zur Messung der Breite eines Flusses zieht man eine Standlinie von A nach B, sodass bei B durch Peilung ein rechter Winkel entsteht. Berechne die Flussbreite für die angegebenen Maße.



2 Ein Schiff fährt auf einem See von Abach über Bibertal nach Costein und auf dem gleichen Weg wieder zurück. Berechne die insgesamt zurückgelegte Strecke.



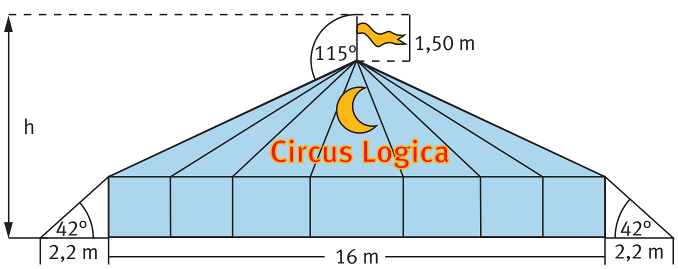
3 Herr Graf installiert in seiner Decke einen LED-Spot, der einen Abstrahlwinkel α von 36° (12°) hat. Wie groß ist der Durchmesser der beleuchteten Bodenfläche?



Lösungen zu 4:
8,7 %; 15,8 %; 100 %; 173,2 %

4 Berechne die Steigung in Prozent, wenn der Steigungswinkel eines Berghangs die Größe 5° (9°, 45°, 60°) hat. Zeichne jeweils ein zugehöriges Steigungsdreieck.

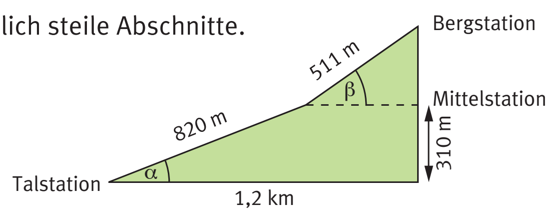
5 Berechne die Höhe h des Zirkuszeltes.



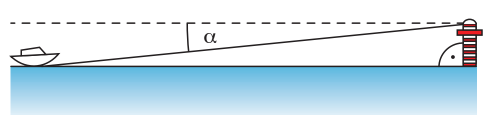
6 Eine Seilbahn hat zwei unterschiedlich steile Abschnitte.

a) Berechne die Steigungswinkel α und β.

b) Bestimme den gesamten Höhenunterschied von der Tal- zur Bergstation.



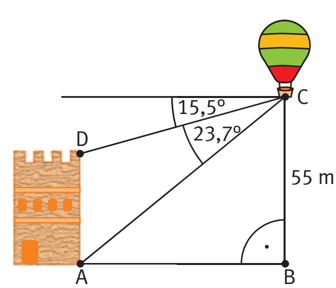
7 Von einem 65 m hohen Leuchtturm erblickt man ein Motorboot unter einem Tiefenwinkel von $\alpha = 4°$. Berechne die Entfernung des Motorboots vom Leuchtturm.



8 Ein Ballon steht 55 m über der Erde. Vom Ballon aus werden die Spitze D eines Turmes sowie sein Fußpunkt A anvisiert (Winkel gegenüber der Waagrechten).

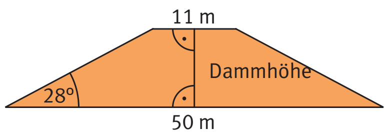
a) Berechne die Entfernung des Ballons von der Turmspitze.

b) Bestimme die Turmhöhe.



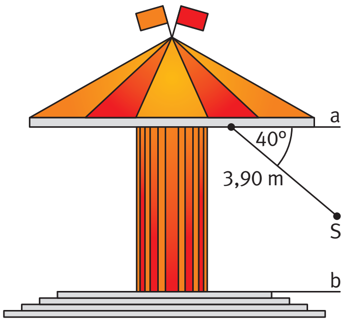
9 Ein Verkehrsflugzeug startet und überfliegt nach 20 km zurückgelegter Strecke einen Fluss. Berechne seine Flughöhe über dem Fluss, wenn der durchschnittliche Steigungswinkel 6° beträgt.

10 Der Hindenburgdamm verbindet die Nordseeinsel Sylt mit dem Festland. Der Querschnitt durch den Damm ist ein gleichschenkliges Trapez. Berechne die Dammhöhe und überprüfe das Ergebnis durch eine maßstabsgenaue Zeichnung.



11 Der Skilift in Ernstthal am Rennsteig überwindet einen Höhenunterschied von 113,6 m und hat eine durchschnittliche Steigung von 22,4 %.
Berechne die Länge der Strecke, die man mit dem Lift zurücklegt.

12 Bei dem abgebildeten Kettenkarussell schließen bei maximaler Geschwindigkeit die Ketten mit der Horizontalen a einen Winkel von 40° ein. Die Kette und der Sitz S sind zusammen 3,90 m lang. Im Stillstand befindet sich der Sitz 60 cm über dem Karussellboden b.
Berechne, in welcher Höhe über dem Karussellboden b sich der Sitz S bei maximaler Geschwindigkeit befindet.



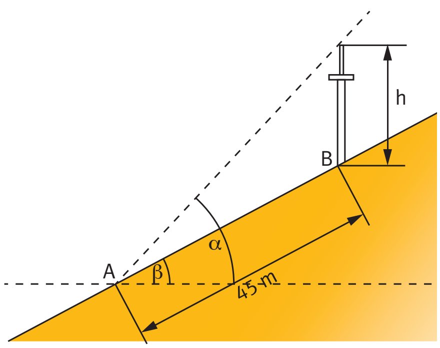
13

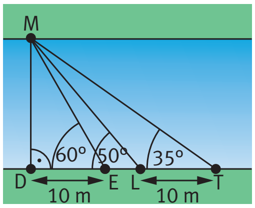
Die Pilatusbahn in der Schweiz ist die steilste Zahnradbahn der Welt. Auf einer 1200 m langen Steigungsstrecke bewältigt sie einen Höhenunterschied von 518,5 m.

a) Bestimme den Steigungswinkel in diesem Streckenabschnitt. Runde auf eine Dezimale. Gib die Steigung auch in Prozent an.

b) Die Oberweißbacher Bergbahn im Thüringer Wald überwindet als Standseilbahn auf einer 1,4 km langen Strecke einen Höhenunterschied von 669 m. Vergleiche mit der Pilatusbahn.

14 Ein Turm der Höhe $h = 25$ m steht auf einem Hang, der unter einem Winkel von $\beta = 28°$ gegen die Horizontale geneigt ist. Die Schattenlänge $\overline{AB}$ des Turmes beträgt beim momentanen Sonnenstand 45 m. Berechne den Höhenwinkel α, unter dem die Sonne scheint.

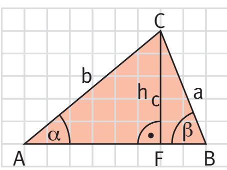




Die Schülerinnen und Schüler der Klasse 9c haben in einem Projekt die Breite der Nidda bestimmt. Dabei haben sie jeweils vom gegenüberliegenden Ufer aus einen Mast (M) anvisiert und die in der Skizze bezeichnen Winkel und Strecken vermessen. Daniel (D) und Elif (E): „Wir haben eine Breite von 17,30 m ermittelt.“ Leonie (L) und Tarik (T): „Ihr hattet es gut! Ihr konntet euch direkt gegenüber vom Mast aufstellen und so rechnen. Wir haben deshalb eine maßstäbliche Zeichnung gemacht und kamen auf 18 m. Das liegt bestimmt an der Zeichenungenauigkeit. Es wäre gut, wenn wir auch rechnen könnten.“

- Beschreibe, jeweils wie die Arbeitsgruppen vorgegangen sind.
- Wieso ist Daniels Position vorteilhaft?
- Prüfe Daniels Ergebnis durch eine eigene Rechnung.
- Kannst du auch Leonie und Tarik helfen?
- Beurteile die Genauigkeit der Methoden.

Merkwissen



Sind von einem Dreieck die Länge einer Seite und die Größen zweier Innenwinkel gegeben, so ist es nach den Kongruenzsätzen SWS bzw. SWW eindeutig bestimmt. Es lassen sich daraus die Größe des dritten Innenwinkels und die Längen der beiden anderen Seiten berechnen:
Für spitzwinklige Dreiecke gilt:

ΔAFC: $\frac{h_c}{b} = \sin\alpha \quad | \cdot b$ $\qquad h_c = b \cdot \sin\alpha$ (1)

ΔCFB: $\frac{h_c}{a} = \sin\beta \quad | \cdot a$ $\qquad h_c = a \cdot \sin\beta$ (2)

Aus (2) und (1) folgt:
$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha \quad | : (b \cdot \sin\beta)$
und somit $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

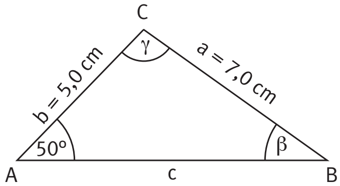
Entsprechende Gleichungen gelten auch für die anderen Seiten und Winkel des Dreiecks.
Sinussatz: In jedem Dreieck verhalten sich die Längen zweier Seiten wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel.

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c} \qquad \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}$

Der Sinussatz gilt auch für stumpfwinklige Dreiecke.
Für den Sinus eines stumpfen Winkels α definiert man dabei:
$\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$

Beispiele

I Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkelmaße im Dreieck ABC.



Lösung:

(1) $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}$

$\Longrightarrow \sin\beta = b \cdot \frac{\sin\alpha}{a} = 5{,}0\text{ cm} \cdot \frac{\sin 50°}{7\text{ cm}} = 0{,}547$

$\Longrightarrow \beta \approx 33{,}2°$

(2) $\gamma \approx 180° - 50° - 33{,}2° = 96{,}8°$

(3) $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \Longrightarrow c = \sin\gamma \cdot \frac{a}{\sin\alpha}$

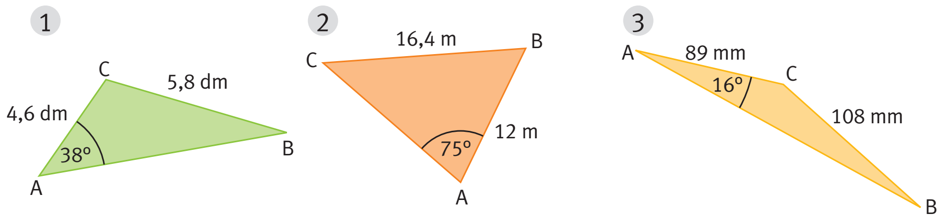
$c = \sin 96{,}8° \cdot \frac{7{,}0\text{ cm}}{\sin 50°} \approx 9{,}1\text{ cm}$

Verständnis

- Wie lautet der Sinussatz für ein rechtwinkliges Dreieck?
- Begründe mit dem Sinussatz, dass in jedem Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüber liegt.

Aufgaben

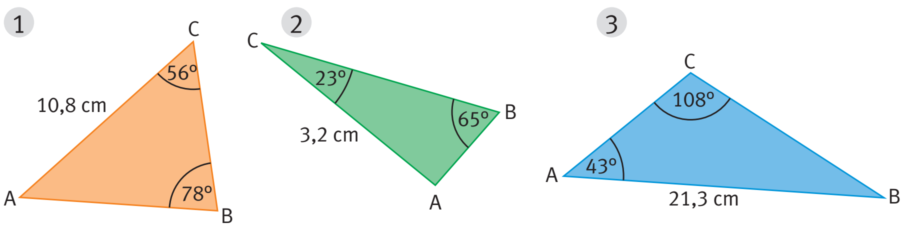
1 Berechne die fehlenden Winkel des Dreiecks.



b) Welcher Kongruenzsatz sichert, dass die Winkelgrößen anhand der Angaben eindeutig zu berechnen sind?

2 **a)** Berechne die fehlenden Seitenlängen des Dreiecks. Beschreibe dein Vorgehen.

Lösungen zu 2:
1,4 cm; 11 cm; 9,2 cm;
3,5 cm; 15 cm; 7,9 cm



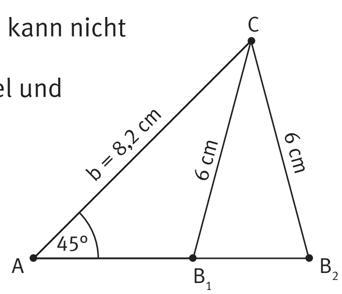
b) Begründe, dass in Teilaufgabe a) die Dreiecke durch die Angaben eindeutig bestimmt sind.

3 Von einem Dreieck sind die folgenden Maße bekannt. Fertige eine Planfigur an und überlege dir, ob das Dreieck dadurch eindeutig bestimmt ist. Berechne die übrigen Seitenlängen und Winkel. Runde sinnvoll.

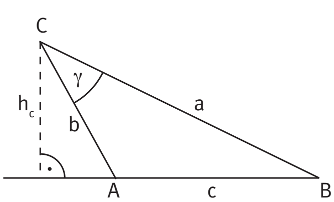
a) $a = 2{,}6$ cm; $b = 5{,}2$ cm; $\beta = 60°$ **b)** $a = 4{,}0$ cm; $\alpha = 53°$; $\beta = 30°$
c) $c = 6{,}0$ m; $\alpha = 45°$; $\beta = 70°$ **d)** $a = 8$ m; $b = 17$ m; $\beta = 90°$

Lösungen zu 3:
25,7; 61,9; 65; 28,1; 94,3; 97; 2,5; 4,7; 5,0; 6,0; 6,2; 15
Die Einheiten sind nicht angegeben.

4 Ein Dreieck ABC mit $\alpha = 45°$, $b = 8{,}2$ cm und $a = 6$ cm kann nicht eindeutig konstruiert werden.
Berechne mithilfe von $\sin\beta = \sin(180° - \beta)$ die Winkel und Seitenlängen der beiden möglichen Dreiecke.



5 Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Stücken:
$b = 5{,}0$ cm; $c = 6{,}5$ cm; $\gamma = 35°$
Berechne die Höhe h_c.



6 Von einem Dreieck ABC sind folgende Stücke gegeben:
$\overline{AC} = b = 77$ cm; $\alpha = 35°$; $\gamma = 95°$

a) Berechne die Länge der Seite c.

b) Konstruiere das Dreieck in einem geeigneten Maßstab und gib diesen an.

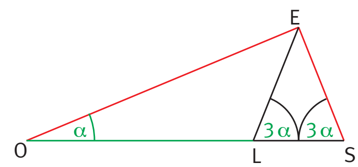
7 Wiederhole die 4 Kongruenzsätze. In welchen Fällen kannst du mithilfe des Sinussatzes die Maße des Dreiecks auch rechnerisch bestimmen. Beschreibe dazu jeweils einen Lösungsweg.

8 Berechne die Längen der Strecken $\overline{EO}$ und $\overline{SE}$, wenn $\overline{OL} = 8$ cm und

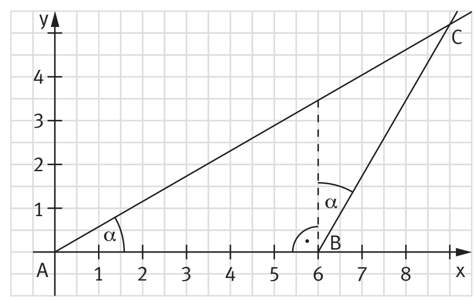
a) $\alpha = 10°$ ist. **b)** $\alpha = 15°$ ist.

c) $\alpha = 25°$ ist.

Wie groß kann α höchstens sein?



9 Gegeben sind von einem Dreieck ABC die Punkte A (0|0), B (6|0) sowie $\alpha = 30°$. Ferner gilt: $\beta = 90° + \alpha$. Berechne die Koordinaten von C.



10 Gegeben ist das Dreieck ABC mit $a = 4{,}5$ cm, $b = 6{,}4$ cm und $\alpha = 35°$.

a) Konstruiere das Dreieck ABC (Planfigur – Zeichnung – Beschreibung).

b) Begründe, dass die Konstruktion zwei Lösungen hat.

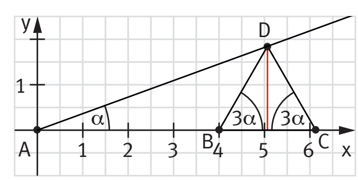
c) Berechne die Größe der Winkel β_1 und β_2 für beide Lösungen.

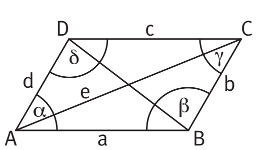
d) Berechne für beide Lösungen jeweils die dritte Seitenlänge c_1 bzw. c_2.

11 Gegeben sind von der nebenstehenden Abbildung die Punkte A (0|0), B (4|0) sowie $\alpha = 20°$. Die rote Strecke ist das Lot von D auf die x-Achse.

a) Berechne $\overline{AD}$.

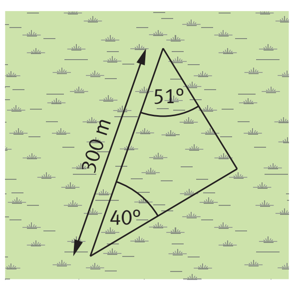
b) Berechne die Koordinaten der Punkte C und D. Runde auf eine Dezimale.





12 Bestimme im Parallelogramm ABCD die Länge der Seite b, wenn $a = 6{,}8$ cm, $e = 9{,}6$ cm und $\beta = 120°$.

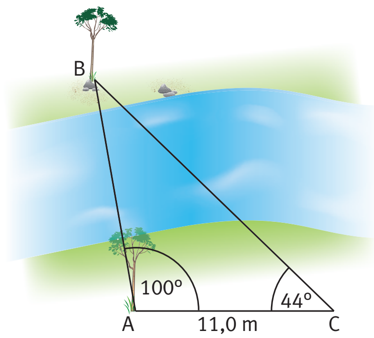
13 Bei einem Wiederaufforstungsprogramm soll am Rennsteig ein dreieckiges Waldstück umzäunt werden, um es vor Wildbiss zu schützen. Bestimme anhand der Skizze die Länge des Zauns.



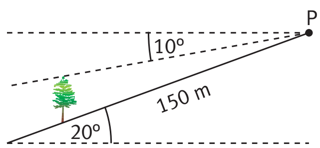
14 In einem Kletterwald kann man an einem Seil einen Bach überqueren. Das Seil ist an den Bäumen A und B befestigt. Baum A ist 2,0 m, Baum B ist 1,5 m vom Bach entfernt. Ein Beobachter bei C mit den Winkel 45° zwischen den Bäumen.

a) Berechne die Breite des Flusses an dieser Stelle.

b) Zeichne das Dreieck in einem geeigneten Maßstab und gib diesen an.



15 An einem Hang, der gegen die Horizontale einen Neigungswinkel von 20° aufweist, steht eine Tanne. Von einem Punkt P, der 150 m vom Fuß des Baums entfernt ist, wird die Baumspitze anvisiert (vergleiche die Abbildung). Berechne die Höhe der Tanne.



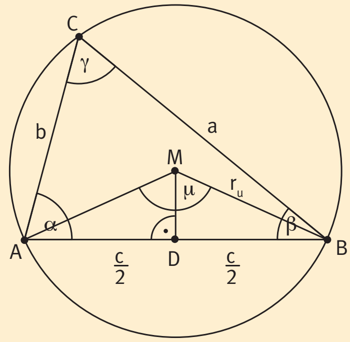
16

Mithilfe des Sinussatzes lässt sich eine Beziehung zwischen einer Seite eines beliebigen Dreiecks, ihrem Gegenwinkel und dem Umkreisradius r_u finden.

Man kann beweisen, dass γ halb so groß ist wie der eingezeichnete Mittelpunktswinkel bei M.

$\sin\gamma = \frac{c}{2 \cdot r_u}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2 \cdot r_u$



a) Veranschauliche den Beweis der Beziehung zwischen γ und μ mit einem dynamischen Geometrieprogramm.

b) Zeige die gefolgerten Zusammenhänge.

c) Berechne die Maße der nicht gegebenen Stücke des Dreiecks ABC.

① $b = 5{,}7$ m; $c = 8{,}2$ m; $r_u = 4{,}5$ m ② $a = 4{,}2$ m; $c = 3{,}8$ m; $r_u = 2{,}9$ m

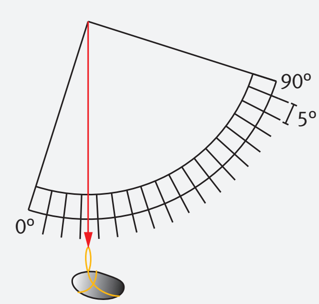
③ $\alpha = 78°$; $\gamma = 54°$; $r_u = 5{,}2$ m

Projekt

Sucht in der Nähe eurer Schule Türme, Bäume oder Hausdächer, deren Höhe ihr bestimmen wollt. Plant eure Messung. Überlegt, welche Strecken und Winkel Ihr messen könnt. Klärt, ob es dazu geeignete Instrumente an eurer Schule gibt. Ihr könnt aus einem Winkelmesser und einem Lot auch ganz einfach selbst einen Pendelquadranten bauen.

Führt ein Messprotokoll.

Wertet dann im Klassenzimmer eure Messungen aus und vergleicht euer Ergebnis mit anderen Gruppen oder Quellen.



Mit der Idee der Herleitung des Sinussatzes lassen sich auch Zusammenhänge zwischen den Kosinuswerten der Winkelmaße und den Seitenlängen in einem beliebigen Dreieck ABC finden.

- Begründe, dass der Sinussatz nicht anwendbar ist, wenn ein Dreieck nach den Kongruenzsätzen SSS und SWS festgelegt ist.
- Erläutere die folgende Herleitung.

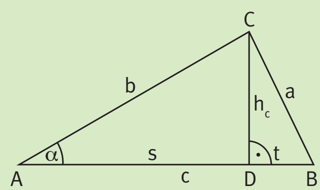
$\cos\alpha = \frac{s}{b} \Longrightarrow s = b \cdot \cos\alpha \Longrightarrow t = c - b \cdot \cos\alpha$

$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Longrightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha$

Nach Pythagoras gilt im ΔCDB: $a^2 = h_c^{\,2} + t^2$

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \cdot \sin\alpha)^2 + (c - b \cdot \cos\alpha)^2 \\ &= b^2 \cdot (\sin\alpha)^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha + b^2 \cdot (\cos\alpha)^2 \\ &= b^2 \cdot ((\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2) + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

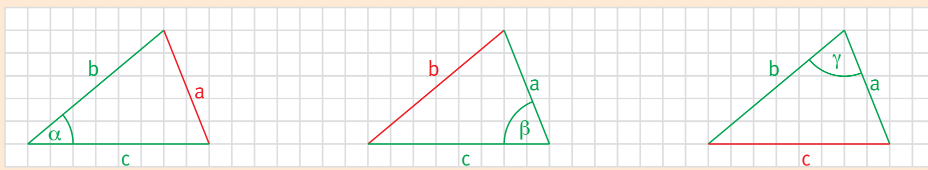
$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}$



$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

Merkwissen

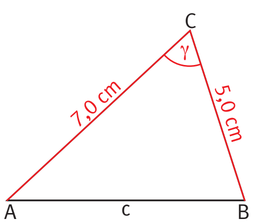
Egal ob, das Dreieck spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig ist, es gilt der **Kosinussatz**:



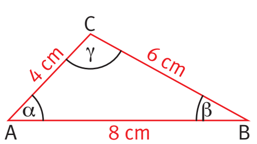
$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}$ $\quad$ $\mathbf{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos\beta}$ $\quad$ $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}$

Beachte:
$\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$
für $90° < \alpha < 180°$

Beispiele



Beachte: $c > 0$.



Man kann mit jedem Teil des Kosinussatzes beginnen.

I Gegeben ist das Dreieck ABC mit $a = 5{,}0$ cm, $b = 7{,}0$ cm und $\gamma = 65°$. Bestimme c.

Lösung:

ΔABC ist konstruierbar nach SWS. Nach dem Kosinussatz gilt:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

$c^2 = (5{,}0\text{ cm})^2 + (7{,}0\text{ cm})^2 - 2 \cdot 5{,}0\text{ cm} \cdot 7{,}0\text{ cm} \cdot \cos 65° \approx 44{,}42\text{ cm}^2$

$\Longrightarrow c = \sqrt{44{,}42\text{ cm}^2} \approx 6{,}7\text{ cm}$

II Bestimme im Dreieck ABC mit $a = 6$ cm, $b = 4$ cm und $c = 8$ cm alle Winkelgrößen.

Lösung:

ΔABC ist konstruierbar nach SSS.

1 Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$ $\Longrightarrow \cos\gamma = -\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$

$\cos\gamma = -\frac{(8\text{ cm})^2 - (6\text{ cm})^2 - (4\text{ cm})^2}{2 \cdot 6\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}}$ $\Longrightarrow \gamma \approx 104{,}5°$

2 Sinussatz: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$ $\Longrightarrow \sin\alpha = a \cdot \frac{\sin\gamma}{c}$

$\sin\alpha = 6\text{ cm} \cdot \frac{\sin 104{,}5°}{8\text{ cm}}$ $\Longrightarrow \alpha \approx 46{,}6°$

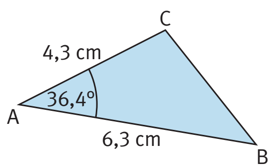
3 Winkelsumme: $\beta = 180° - 104{,}5° - 46{,}6° = 28{,}9°$

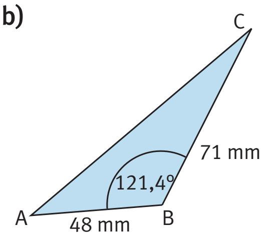
Verständnis

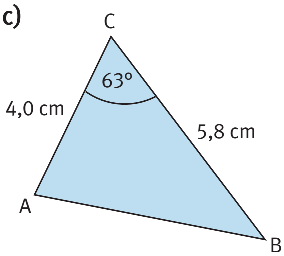
- „Der Satz des Pythagoras ist ein Spezialfall des Kosinussatzes.“ Was meinst du dazu? Begründe.
- Für welche Art von Dreiecken gilt $c < a^2 + b^2$, für welche $c^2 > a^2 + b^2$? Begründe mit dem Kosinussatz.

Aufgaben

1 Berechne die fehlende Seitenlänge des Dreiecks ABC. Beschreibe dein Vorgehen.

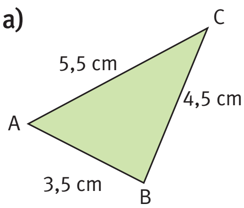
a)


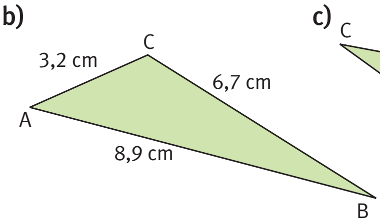
b)


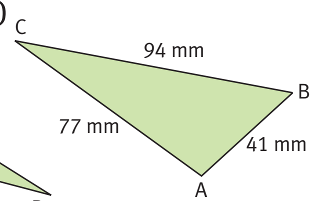
c)


2 Berechne die fehlenden Winkel des Dreiecks ABC.

Tipp:
Prüfe, ob das Dreieck spitzwinklig oder stumpfwinklig ist.

a)


b)


c)


3 Berechne die fehlenden Werte für ein Dreieck ABC. Runde auf eine Dezimale.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a	□	18,1 cm	87,3 km	812 m	□	3,3 cm
b	7,4 cm	□	123,5 km	706 m	2,3 dm	□
c	5,6 cm	34,5 cm	□	582 m	□	□
α	30,1°	□	□	□	□	36,9°
β	□	31,2°	□	□	19,1°	53,1°
γ	□	□	17,1°	□	151,0°	□

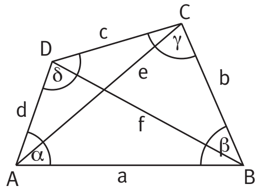
Lösungen zu 3:
9,9; 4,4; 32,7; 77,5; 3,8; 102,2; 47,7; 21,2; 5,5; 90,0; 47,6; 58,1; 44,4; 26,2; 122,6; 1,2; 3,4; 130,2

4 Berechne die Längen der Diagonalen im Viereck ABCD.

a) $a = 5{,}5$ cm; $b = 5{,}1$ cm; $d = 3{,}9$ cm; $\alpha = 78{,}5°$; $\beta = 55{,}8°$

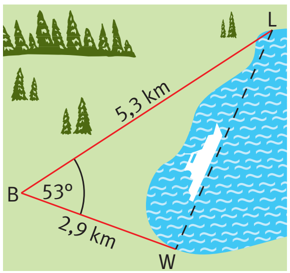
b) $a = 15{,}5$ cm; $b = 20{,}4$ cm; $c = 14{,}0$ cm; $\beta = 74{,}8°$; $\gamma = 30{,}1°$

c) $a = 8{,}6$ cm; $a = b = c = d$; $\alpha = 54°$



Die Diagonalen müssen nicht zwingend im Inneren des Vierecks liegen.

5 Ein Motorboot fährt vom Punkt W bis zum Punkt L mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von 26 $\frac{km}{h}$. Wie lange dauert die Fahrt?



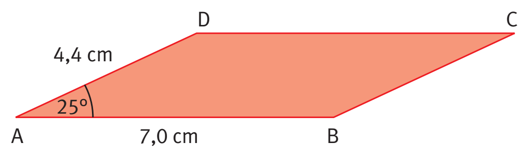
1 Seemeile ist 1,852 km.

6 Die MS ROBINSON verlässt um 13.45 Uhr den Hafen P und fährt mit einer Geschwindigkeit von 24 Knoten (1 Knoten = 1 Seemeile pro Stunde) auf NW-Kurs. Die MS CRUSOE verlässt P eine halbe Stunde später und fährt mit 20 Knoten nach SSO.

a) Finde heraus, wie viele Seemeilen und wie viele Kilometer die beiden Schiffe um 15.45 Uhr voneinander entfernt sind.

b) Um 15.45 Uhr wird die CRUSOE von der Brücke der ROBINSON aus angepeilt. Ermittle, wie groß der spitze Winkel zwischen der Peilrichtung und der Nord-Südrichtung ist.

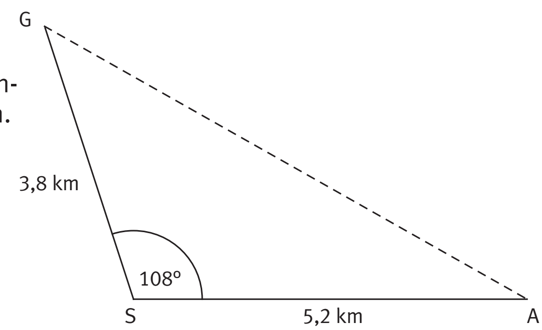
7 Berechne die Längen der Diagonalen eines Parallelogramms ABCD mit den abgebildeten Maßen.



8 Die direkte Verbindungsstraße von einer Autobahnabfahrt (A) zu einem Gewerbegebiet (G) soll das Stadtzentrum (S) vom Lkw-Verkehr entlasten.

a) Berechne die Länge der Verbindungsstraße $\overline{AG}$.

b) Konstruiere das Dreieck SAG in einem geeigneten Maßstab und gib diesen an.



9 Paul hat folgende Aufgabe mithilfe des Kosinussatzes bearbeitet. Sein Ergebnis stimmt nicht. Finde den Fehler und korrigiere ihn.

Gegeben: Dreieck ABC mit $a = 5$ cm; $b = 6{,}5$ cm; $c = 2{,}8$ cm

Gesucht: β

Lösung: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$

$6{,}5^2 = 5^2 + 2{,}8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2{,}8 \cdot \cos\beta$

$42{,}25 = 25 + 7{,}84 - 28 \cdot \cos\beta$

$\cos\beta \approx 0{,}336$

$\beta \approx 70{,}4°$

10 Ein dreieckiges Blumenbeet wird von Rändern der Längen 4,80 m, 3,80 m und 2,80 m begrenzt. Berechne die Größe der Winkel, die das Beet einschließt.

In einem konvexen Viereck verlaufen die Diagonalen im Innern des Vierecks.

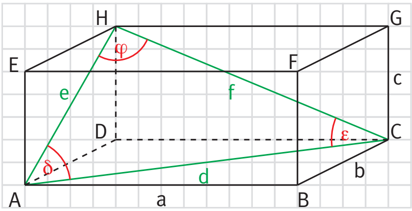
11 Berechne die nicht angegebenen Seitenlängen, Winkelmaße sowie die Längen der Diagonalen im konvexen Viereck ABCD.

a) $a = 5{,}0$ cm; $b = 4{,}5$ cm; $c = 1{,}8$ cm; $d = 3{,}8$ cm; $\alpha = 80°$

b) $a = 15$ cm; $b = 20$ cm; $c = 13$ cm; $d = 10$ cm; $\beta = 72°$

c) $a = 8{,}6$ cm; $b = 7{,}4$ cm; $c = 9{,}8$ cm; $d = 8{,}8$ cm; $e = 7{,}7$ cm

12 Berechne die Winkel δ, ε und φ, welche die Flächendiagonalen $\overline{AC}$, $\overline{CH}$ und $\overline{HA}$ des abgebildeten Quaders miteinander bilden. Seine Kantenlängen sind a, b und c. Benutze, wenn möglich Symmetrien und erkläre dein Vorgehen.

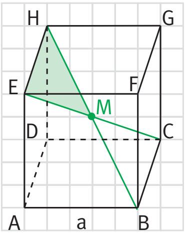


a) a = 10 cm, b = 10 cm, c = 10 cm

b) a = 10 cm, b = 10 cm, c = 5 cm

c) a = 10 cm, b = 8 cm, c = 6 cm

d) a = 10 cm, b = 12 cm, c = 6 cm



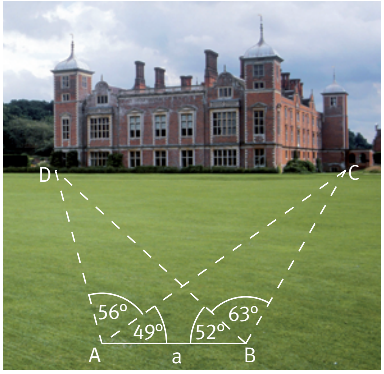
13 Die beiden Raumdiagonalen $\overline{HB}$ und $\overline{EC}$ des Würfels ABCDEFGH schneiden einander im Punkt M. Ermittle die Größen der Innenwinkel des Dreiecks HEM.

14 In einen Kreis mit Radius 6 cm sind die Sehnen $\overline{AB}$ mit Länge 3,5 cm und $\overline{BC}$ mit Länge 7,0 cm eingezeichnet.

a) Ermittle die Länge der Strecke $\overline{AC}$ durch Konstruktion. Was fällt dir auf? Beschreibe, wie du vorgegangen bist.

b) Berechne die Länge der Strecke $\overline{AC}$ und vergleiche dein Ergebnis mit der zeichnerischen Lösung.

15 Beim sogenannten **Vorwärtseinschneiden aus zwei Punkten** visiert man von bekannten Punkten (hier A und B) aus unbekannte Punkte (hier C und D) an.
Zur Bestimmung der Länge der unzugänglichen Strecke $\overline{CD}$ werden von den Punkten A und B aus die Winkel α_1, α_2, β_1 und β_2 gemessen. Außerdem muss die Länge a der „Standlinie" $\overline{AB}$ bekannt sein oder gemessen werden.



a) Berechne die Länge der Strecke $\overline{CD}$ in der Abbildung rechts, wenn a = 20,0 m beträgt.

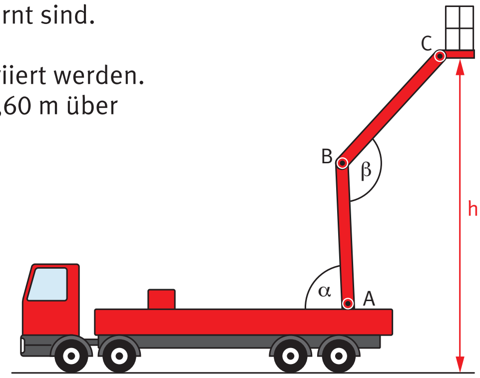
b) Plant eine Vermessung auf eurem Schulgelände nach dieser Methode.

16 Paul und Klara gehen gleichzeitig vom selben Punkt los. Der Winkel zwischen den Richtungen, welche die beiden einschlagen, beträgt 43°. Paul geht mit einer Geschwindigkeit von $1\,\frac{m}{s}$, Klaras Geschwindigkeit beträgt $1{,}8\,\frac{m}{s}$.

a) Fertige eine Skizze des Sachverhalts an.

b) Berechne, wie weit die beiden nach 2 Minuten voneinander entfernt sind.

17 Die Höhe h einer Arbeitsbühne kann durch zwei Gelenke A und B variiert werden. Dabei gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = 4{,}00$ m, $\alpha \leqq 87{,}5°$ sowie $\beta \leqq 135°$. A ist dabei 2,60 m über dem Boden.
Bestimme für $\alpha = 85°$ und $\beta = 115°$ die Höhe h des Punktes C.



Im Internet kann man Sonnensegel bestellen, die man im Garten als Schattenspender aufspannen kann.
Ein Händler bietet dabei ein Segel in Form eines gleichseitigen Dreiecks mit einer Seitenlänge von 4,5 m an.

- Skizziere das Dreieck und zerlege es in zwei rechtwinklige Dreiecke.
- Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks auf zwei verschiedene Arten, indem du …
  1. den Sinussatz verwendest.
  2. den Satz von Pythagoras nutzt.

Merkwissen

Jedes Dreieck kann man entlang einer Höhe in **zwei rechtwinklige Teildreiecke** zerlegen.

Im nebenstehenden Dreieck gilt insbesondere:

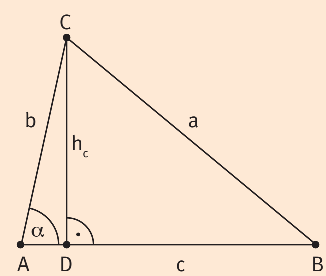
$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

Im Dreieck ADC gilt: $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Longrightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha$

Eingesetzt ergibt sich: $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin\alpha$

Allgemein gilt für den **Flächeninhalt eines Dreiecks ABC**:

$A = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$



Beispiele

I Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seitenlängen $a = 42$ mm, $b = 26$ mm und den Winkeln $\alpha = 77°$ und $\beta = 37°$.

Lösung:
Bestimmen des Winkels γ (hier mit Innenwinkelsatz):
$\gamma = 180° - 77° - 37° = 66°$

$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$

$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 42\text{ mm} \cdot 26\text{ mm} \cdot \sin 66° \approx 499\text{ mm}^2$

II Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seitenlängen $a = 12{,}3$ cm, $b = 8{,}4$ cm und $c = 6{,}5$ cm.

Lösung:
Bestimmen eines Winkels (hier mithilfe des Kosinussatzes):

$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos\beta \quad \Longrightarrow \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$\cos\beta = \frac{(12{,}3\text{ cm})^2 + (6{,}5\text{ cm})^2 - (8{,}4\text{ cm})^2}{2 \cdot 12{,}3\text{ cm} \cdot 6{,}5\text{ cm}} \approx 0{,}77 \quad \Longrightarrow \beta \approx 39{,}6°$

$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin\beta$

$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 12{,}3\text{ cm} \cdot 6{,}5\text{ cm} \cdot \sin 39{,}6° \approx 25{,}5\text{ cm}^2$

Verständnis

- Beschreibe die Flächeninhaltsformeln für Dreiecke mit eigenen Worten.
- Erkläre, wie man aus der Flächeninhaltsformel im Merkwissen den Spezialfall für rechtwinklige Dreiecke erhält.

Aufgaben

1 Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. Bestimme gegebenenfalls fehlende Größen. Runde auf eine Nachkommastelle.

a) $a = 2{,}5$ cm; $b = 6{,}9$ cm; $\gamma = 32°$ **b)** $a = 55$ mm; $c = 29$ mm; $\beta = 123{,}8°$

c) $a = 6{,}3$ cm; $c = 4{,}5$ cm; $\alpha = 40°$ **d)** $a = 5$ cm; $b = 6{,}9$ cm; $\beta = 40°$

Lösungen zu 1: 4,6; 5,0; 9,0; 9,9; 13,1; 15,5; 16,0; 18,7; 27,3; 27,8; 37,5; 75,1; 112,2; 112,7; 132,5; 662,7 Die Einheiten sind nicht angegeben.

2 Berechne den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks ABC.

a) $b = c$; $a = 5{,}2$ cm; $\alpha = 62°$ **b)** $a = b = 3{,}4$ cm; $\alpha = 44°$

3 In einem Dreieck sind zwei Seiten 5,6 m und 2,9 m lang. Der von den beiden Seiten eingeschlossene Winkel hat eine Größe von 100°.

a) Berechne den Flächeninhalt und den Umfang des Dreiecks.

b) Konstruiere dieses Dreieck.

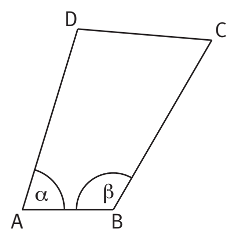
Gib den Maßstab an.

4 Bei einem gleichschenkligen Dreieck beträgt die Schenkellänge 6 cm und die Länge der Basis 5 cm.

a) Berechne den Flächeninhalt, indem du den Satz des Pythagoras nutzt. Zerlege hierzu das Dreieck geeignet in Teildreiecke.

b) Überprüfe das Ergebnis aus a), indem du die Formel aus dem Merkwissen anwendest. Berechne zuvor fehlende Größen.

5 Von der abgebildeten Waldfläche ABCD soll die Teilfläche ABC neu aufgeforstet werden.
Berechne die neu aufgeforstete Fläche in Hektar

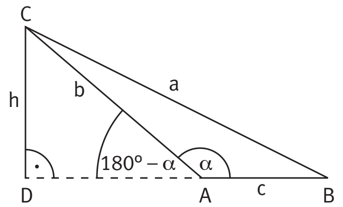


$\overline{AB} = 350$ m
$\overline{AC} = 980$ m
$\overline{AD} = 710$ m
$\overline{CD} = 520$ m
$\alpha = 73°$
$\beta = 120°$

6 **a)** Zeige, wie im Merkwissen, die Gültigkeit der Flächeninhaltsformeln.

① $A = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin\beta$ ② $A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$

b) Zeige, dass die Flächeninhaltsformel auch für stumpfwinklige Dreiecke gilt.
Verwende die abgebildete Skizze.



7 Berechne den Flächeninhalt eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Umkreisradius $r = 8$ cm für $n = 4$ ($n = 8$; $n = 10$).

Zu 1.1 und 1.2

1 Berechne jeweils die Werte des Sinus, Kosinus und Tangens des Winkels α.

a) $\alpha = 60°$ b) $\alpha = 72°$ c) $\alpha = 15°$
d) $\alpha = 8°$ e) $\alpha = 23{,}5°$ f) $\alpha = 81°$

Zeichne jeweils ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) und trage die Gerade g ein. Ermittle den Schnittunkt und den Schnittwinkel mit der x –Achse.

a) g: $y = 2x - 4$ b) g: $y = \sqrt{3}x$
c) g: $y = -2x + 6$ d) g: $y = x - 5$

2 Gib jeweils die Größe des spitzen Winkels α auf Zehntel Grad gerundet an.

a) $\sin \alpha = 0{,}20$ b) $\cos \alpha = 0{,}45$
c) $\tan \alpha = 1$ d) $\cos \alpha = 0{,}99$

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit der Basis $\overline{AB}$.Berechne alle fehlenden Seiten und Winkel

a) $c = 80$ cm; $\gamma = 84°$
b) $b = 80$ cm; $\gamma = 84°$
c) $a = 5{,}0$ cm; $\alpha = 47°$
d) $a + b = 12$ cm; $\alpha + \beta = 120°$

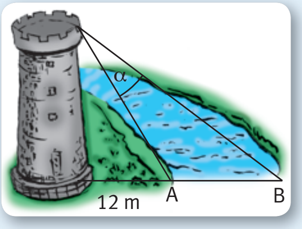
3 Zeichne die Steigungsdreiecke zu den gegebenen Steigungen und bestimme den Steigunswinkel mit Hilfe des Tangens.

Steigung	10 %	50 %	100 %	200 %
Winkel				

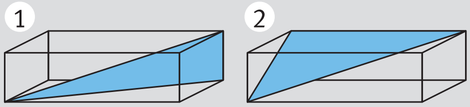
Ein Rechteck mit ganzzahligen Seitenlängen in der Einheit cm hat einen Flächeninhalt von 60 cm². Berechne die Winkel, zwischen seinen Diagonalen.

Tipp: Fertige eine Skizze an und finde mögliche Längen und Breiten heraus.

4 Ein 45 m hoher Aussichtsturm ist 12 m vom Flussufer entfernt; von der Turmplattform aus erscheint die Strecke $\overline{AB}$ unter einem Winkel α der Größe 42°. Finde heraus, wie breit der Fluss ist.



Der abgebildete Quader soll 8 cm lang, 5 cm breit und 4 cm hoch sein. Berechne für jedes der getönten Dreiecke alle Seitenlängen und Winkelmaße.



Zu 1.3

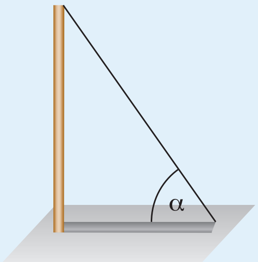
5 Berechne die folgenden Produkte mit deinem Taschenrechner

1 $\tan 35° \cdot \tan 55°$ 2 $\tan 40° \cdot \tan 50°$ 3 $\tan 20° \cdot \tan 70°$

a) Formuliere eine Vermutung für eine Regel.
b) Überprüfe deine Vermutung an weiteren Beispielen.

a) Formuliere eine Vermutung für eine Regel.
b) Begründe deine Vermutung für rechtwinklige Dreiecke.

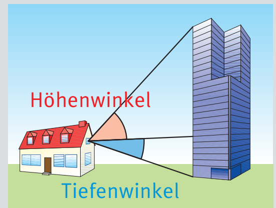
6 **Zu 1.4**



Daniela möchte am 5. Mai 12 Uhr die Sonnenhöhe an ihrem Wohnort bestimmen. Dazu stellt sie einen Stab der Länge 3,0 m senkrecht auf den waagerechten Boden und misst eine Schattenlänge von 2,1 m.

a) Berechne die Sonnenhöhe α auf Grad gerundet.

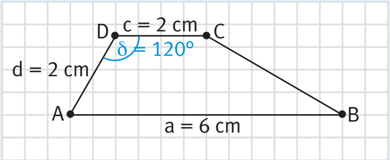
b) Berechne wie lang die Schatten von Emil, Lara, Tarik und Antonia zur gleichen Zeit an Danielas Wohnort sind. Emil ist 1,83 m groß, Lara 1,64 m, Tarik 1,67 m und Antonia 1,44 m.



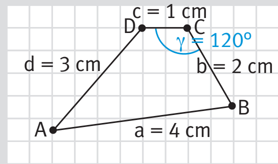
Etwa 70 m von Lauras und Sophies Tanzschule wurde ein neues Hochhaus gebaut. Um seine Höhe zu ermitteln, messen sie den Höhenwinkel $\alpha \approx 55°$ und Den Tiefenwinkel $\beta \approx 10°$.
Sie berechnen, dass das Hochhaus etwa 110 m hoch ist. Beurteile dieses Ergebnis.

7 **Zu 1.5 und 1.6**

In einem Normtrapez ABCD ist a = 6 cm, c = d = 2 cm und $\delta = 120°$.
Bestimme zeichnerisch und rechnerisch die Größe der Winkel α, β und γ sowie die Seitenlänge b.

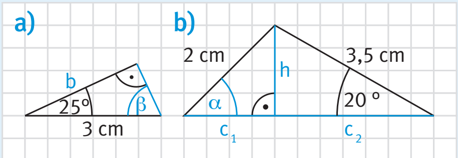


In einem Normviereck ABCD ist a = 4 cm, b = 2 cm, c = 1 cm, d = 3 cm und $\gamma = 120°$.
Ermittle zeichnerisch und rechnerisch die Größe der Winkel α, β und γ.

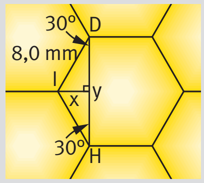


8 **Zu 1.7**

Ermittle jeweils den Flächeninhalt des Dreiecks.



Eine Bienenwabe besteht aus regelmäßigen Sechsecken. Ein Imker hat die Seitenlänge einer großen Zelle zu 8,0 mm gemessen, vergaß aber die Höhe zu messen. Bestimme den Flächeninhalt einer Wabe.



1.9 Vermischte Aufgaben

1 Geländefahrzeuge werden miteinander verglichen.

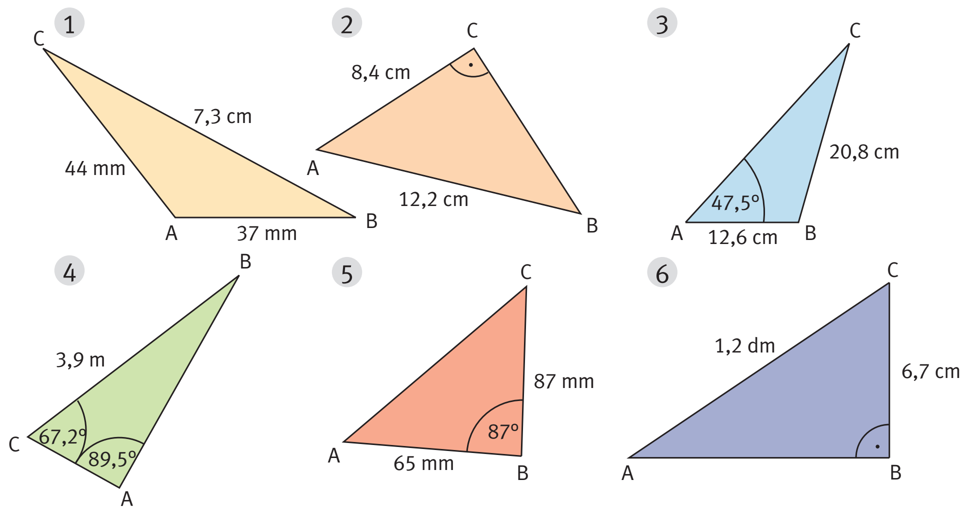
a) Bestimme den Steigungswinkel, den Fahrzeuge mit folgender Steigfähigkeit überwinden können.

① 54 % ② 60 % ③ 90 %

b) Berechne die Steigung in Prozent für die folgenden Steigungswinkel.

① 30° ② 35° ③ 58°

2



a) Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkelgrößen.

b) Begründe jeweils, dass das Dreieck eindeutig bestimmt ist.

3 Bestimme die Größe des Winkels α im rechtwinkligen Dreieck ABC. Zeichne dazu ein passendes rechtwinkliges Dreieck.

a) $\sin \alpha = 0{,}6$ **b)** $\cos \alpha = 0{,}8$ **c)** $\tan \alpha = 3{,}0$ **d)** $\sin \alpha = 0{,}5$

4 Gegeben ist ein Dreieck ABC mit der Seitenlänge $c = 6$ cm und den Winkelgrößen $\alpha = 40°$ und $\beta = 70°$.

a) Konstruiere das Dreieck mit einer dynamischen Geometrie-Software und wähle hierzu A (0|0) und B (6|0).

b) Berechne die fehlenden Winkel- und Seitengrößen sowie den Flächeninhalt.

c) Ermittle den Flächeninhalt mit einer dynamischen Geometrie-Software und vergleiche mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe b).

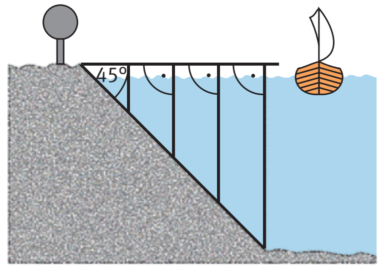
5 Berechne die fehlenden Winkel- und Seitengrößen sowie den Flächeninhalt A für ein Dreieck ABC.

	a	b	c	α	β	γ	A
a)	69 cm		3,4 dm	52°			
b)	1022 mm	1457 mm	998 mm				
c)	3,0 cm		5,0 cm		90°		
d)		8,3 cm		30°	112°		
e)	6,40 km	5,20 km				58,2°	

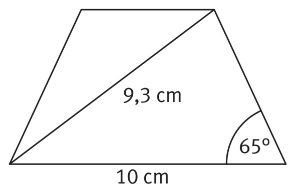
6 An eine Uferböschung, die geradlinig abfällt, wird ein Bootssteg gebaut. Zur Befestigung werden im Abstand von 1,3 m vier Pfähle in den Boden gerammt.

a) Bestimme mithilfe des Tangens die Länge der Pfähle, wenn sie jeweils 1 m tief im Boden stecken.

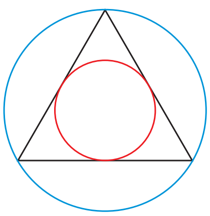
b) Findest du auch eine Berechnungsmöglichkeit, ohne den Tangens zu nutzen?



7 Die Skizze gibt die bekannten Maße an einem gleichschenkligen Trapez an. Berechne die Länge der fehlenden Seiten. Beachte: Es gibt zwei Lösungen.

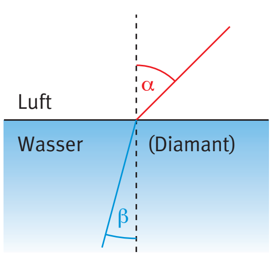


8 Ein gleichseitiges Dreieck hat die Seitenlänge a = 5 cm. Berechne den Radius des Umkreises und des Inkreises.



9 Ein gleichseitiges Dreieck hat eine Höhe von 8 cm. Bestimme die Seitenlängen.

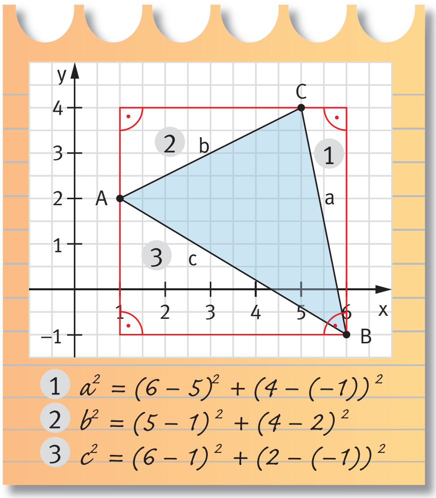
10 Licht wird beim Übergang von Luft in Wasser (in Diamant) „zum Lot hin" gebrochen. Das Brechungsgesetz besagt, dass der Quotient aus dem Sinuswert des Einfallswinkels α und dem Sinuswert des Brechungswinkels β einen konstanten Wert besitzt:
$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ ($n_{\text{Luft-Wasser}} \approx 1{,}3$; $n_{\text{Luft-Diamant}} \approx 2{,}5$).
Berechne jeweils den Brechungswinkel, wenn der Einfallswinkel 40° beträgt.

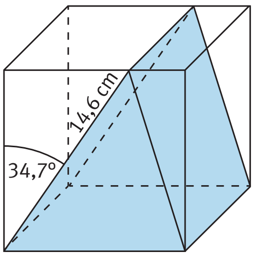


11 Gegeben ist das Dreieck ABC mit A (1|2), B (6|–1) und C (5|4). Gesucht sind die Seitenlängen a, b, c. Luisa macht folgenden Ansatz:

a) Beschreibe den Ansatz von Luisa. Berechne die gesuchten Seitenlängen.

b) Bestimme die Innenwinkel des Dreiecks ABC. Nutze die roten Hilfsdreiecke. Beschreibe dein Vorgehen.

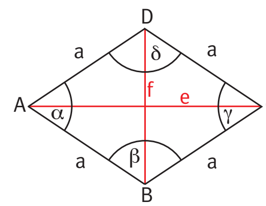


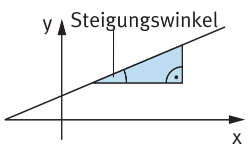


12 Ein Würfel wird in drei Teilkörper zerlegt (siehe Skizze). Berechne das Volumen des blau gefärbten Teilkörpers.

13 Von einer Raute sind die folgenden Teilstücke bekannt. Berechne jeweils den Flächeninhalt und den Umfang.

a) $a = 7{,}5$ cm; $\alpha = 120°$ **b)** $e = 8$ cm; $\beta = 100°$
c) $a = 5{,}3$ m; $\beta = 45°$ **d)** $f = 37$ mm; $\alpha = 23°$
e) $f = 1{,}2$ dm; $\beta = 86°$ **f)** $a = 2{,}8$ dm; $\alpha = 95°$
g) $a = 12{,}4$ cm; $\beta = 160°$ **h)** $e = 120$ m; $\alpha = 10°$





14 Berechne die Steigungswinkel der zugehörigen Geraden im Koordinatensystem. Zeichne die Gerade und überprüfe durch Messung.

a) $y = 2{,}5x + 3{,}6$ **b)** $5y = x + 5$ **c)** $y = \frac{3}{4}x - 1{,}2$

15 Gegeben ist jeweils das gleichschenklige Dreieck ABC mit den angegebenen Koordinaten. Berechne die Winkel α, β und γ. Runde auf eine Dezimale.

a) A (1|1); B (5|1); C (3|8) **b)** A (–3|–1); B (3|–1); C (0|5)
c) A (4|1); B (7,5|3); C (6|4,5) **d)** A (1|–3); B (9|1); C (3|3)

Lösungen zu 16:
4,5; 6,4; 8,1

16 Berechne die Höhen des Dreiecks ABC mit $a = 8{,}3$ cm, $b = 6{,}6$ cm und $\alpha = 43°$.

17 In einem Park wird ein dreieckiges Rasenstück neu eingesät. Zwei Seiten sind 5 m bzw. 12 m lang, der von ihnen eingeschlossene Winkel hat die Größe 50°. Bestimme die Menge Grassamen, die man benötigt, wenn pro Quadratmeter 40 g gesät werden sollen. Reicht ein Beutel mit 1 kg Grassamen?

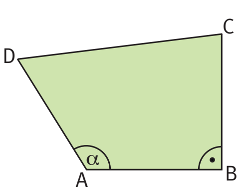
18 Ein Schlauchboot fährt mit 1 m/s von einem Ufer der Lahn zum anderen. Die Lahn ist an dieser Stelle 32 m breit und hat eine Fließgeschwindigkeit von 3 m/s. Das Boot wird abgetrieben. Bestimme den Winkel zum Ufer, unter dem das Boot eintrifft.

Hinweis: Probiere bei b) aus.

19 Der Schatten einer Kletterwand ist 17 m lang, während die Sonne unter einem Winkel von 53° über sie zur Erde strahlt.

a) Berechne die Höhe der Kletterwand.

b) Bestimme den Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen auf die Erde treffen, wenn der Schatten der Kletterwand 20 m lang ist.



20 Gegeben ist ein Viereck ABCD mit den folgenden Stücken:
$\overline{CD} = 8{,}0$ cm; $\overline{AB} = \overline{BC} = 5{,}3$ cm; $\alpha = 122°$
Berechne den Flächeninhalt des Vierecks.

21 Berechne für ein Dreieck mit der Seite $b = 8{,}9$ cm und den Winkeln $\beta = 112°$ und $\gamma = 37°$ die fehlenden Größen.

Lösungen zu 21: 4,9; 5,8; 31

22 Für ein Dreieck ABC sind folgende Angaben vorhanden. Berechne die Koordinaten der jeweils fehlenden Punkte. Konstruiere die Dreiecke mit einer DGS und vergleiche mit deinen Rechenergebnissen.

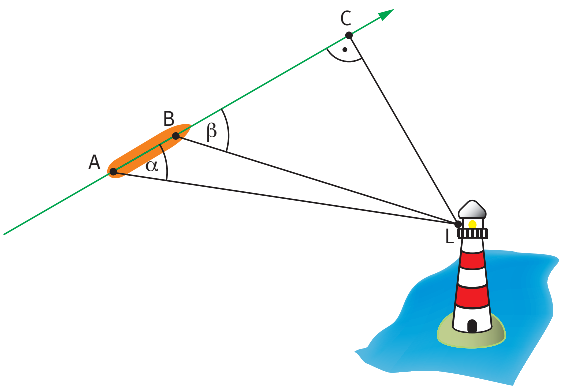
a) A (1 | 0); B (9 | 0); $\alpha = 32°$; $\beta = 62°$ **b)** A (0 | 0); C (4 | 4); $\alpha = 32°$; $\beta = 85°$

23 Die Grundfläche einer 12 m hohen, geraden Pyramide ist ein Rechteck mit den Seitenlängen 10 m und 14 m.

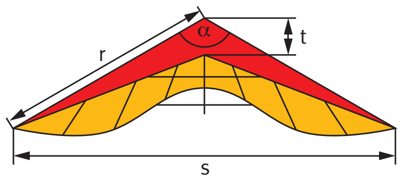
a) Zeichne ein Schrägbild der Pyramide im Maßstab 1 : 200.

b) Berechne die Größe der Neigungswinkel der Seitenkanten (Seitenflächen) gegen die Grundfläche.

24 An Bord eines Schiffes wird der Leuchtturm L von verschiedenen Punkten A und B, die 25 m auseinander liegen, angepeilt. Dabei ergeben sich die Peilungswinkel $\alpha = 38{,}5°$ und $\beta = 47{,}4°$. Berechne die Entfernungen $\overline{AL}$ und $\overline{BL}$ sowie den Abstand $\overline{CL}$ des Leuchtturms von der Route des Schiffs.



25 Die Skizze zeigt die Maße eines symmetrischen Flugdrachens.
Es gilt: $t = 1{,}12$ m, $s = 10{,}50$ m und $\alpha = 120°$.



a) Berechne die Länge r der vorderen Kante der Tragfläche.

b) Der vordere Teil des Flugdrachens wird mit rotem Stoff bespannt. Bestimme, wie viel Quadratmeter Stoff dafür notwendig sind.

c) Die Restfläche des Flugdrachens soll mit gelbem Stoff bespannt werden. Ihr Inhalt ergibt sich aus der roten Fläche mit einem 16 %-igen Materialzuschlag. Berechne die Gesamtfläche des Gleiters.

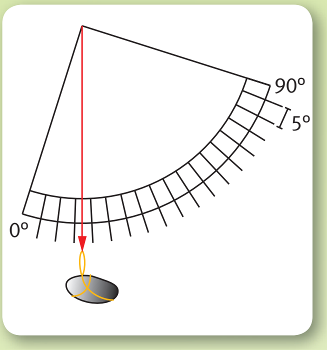
26 Zwei Schlepper ziehen ein großes Frachtschiff mit einer Zugkraft von jeweils 500 kN und unter einem Winkel von 30° in den Hafen. Mit welcher Kraft wird das Frachtschiff „nach vorne“ gezogen?
Fertige zunächst eine Skizze an.

Verwende ein Kräfteparallelogramm aus der Physik.

Höhenmessung

Zur Messung von Höhenwinkeln wurde viele Jahrhunderte hindurch der Quadrant verwendet, ein einfach zu bauendes Gerät, das recht genaue Werte lieferte.

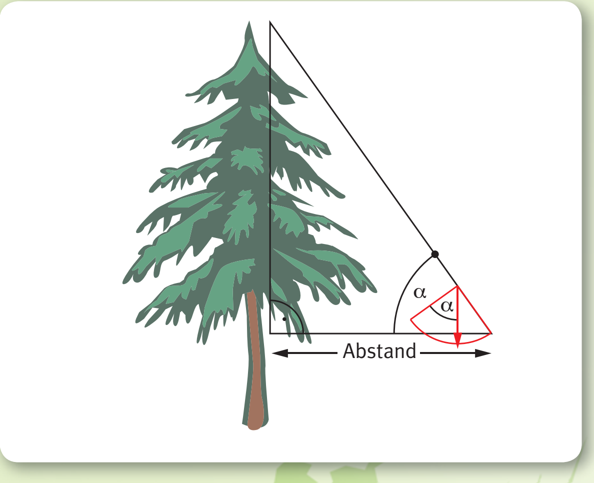
a) Betrachte die Abbildung. Baue aus Karton einen Quadranten (Radiuslänge 20 cm) mit Gradeinteilung und z. B. einem an einer Schnur befestigten Stein als Senklot.



Befestige an der oberen Kante zwei Ösen (z. B. Ringösen, gebogene Büroklammern), durch die hindurch das zu messende Objekt angepeilt wird.

b) Beschreibe, wie mithilfe des Quadranten die Höhe eines Objektes gemessen werden kann.

c) Oft ist es wichtig, die Höhe von Bäumen zu kennen, um etwa zu entscheiden, ob bei der Fällung des Baumes Gefahr für ein Wohngebäude ausgeht. Suche im Umkreis deiner Schule oder deines Wohnhauses nach hohen Bäumen und versuche, deren Höhe mithilfe des Quadranten zu bestimmen. Du kannst das Verfahren ebenso für Gebäude anwenden.

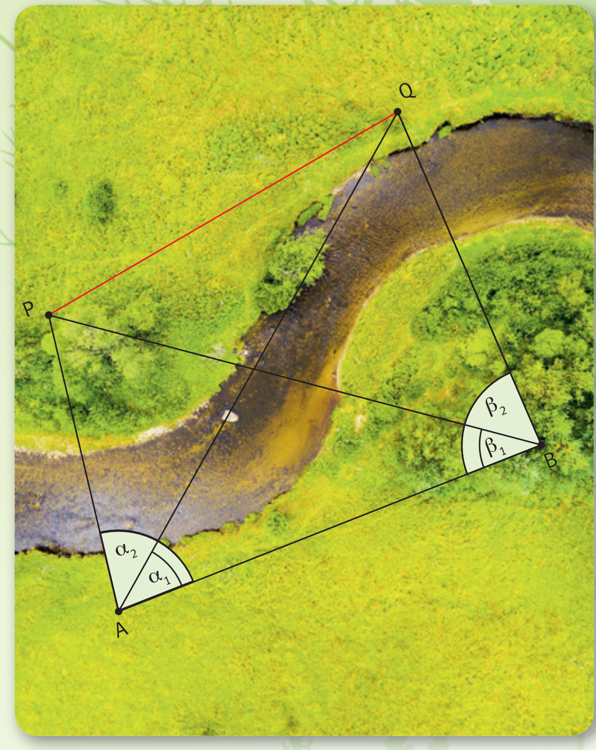


Abstände in der Ebene messen: Vorwärtseinschneiden

Möchte man die Entfernung zweier Punkte (hier: P und Q) in der Ebene bestimmen, wenn man diese Entfernung nicht direkt messen kann, kann die Methode des „Vorwärtseinschneidens“ angewendet werden. Ausgehend von den Endpunkten A und B einer Standlinie werden die Punkte angepeilt und jeweils der Winkel zur Standlinie gemessen. Mit den bekannten Winkeln und der Länge der Standlinie $\overline{AB}$ können dann die Längen der Strecken $\overline{AP}$ (Sinussatz im Dreieck ABP) und $\overline{BQ}$ Sinussatz im Dreieck ABQ) berechnet werden.

a) Probiere das Verfahren anhand einer bekannten Entfernung aus, zum Beispiel auf dem Sportplatz. Überprüfe deine Ergebnisse auf Genauigkeit.

b) Bestimme die Länge von $\overline{PQ}$ für folgende Maße:
$\overline{AB} = 60$ m
$\alpha_1 = 59{,}5°$ $\beta_1 = 29{,}7°$
$\alpha_2 = 104{,}0°$ $\beta_2 = 83{,}3°$



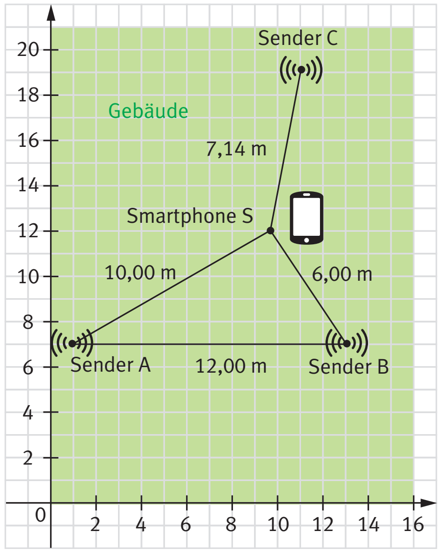
c) Suche dir selbst Punkte in der Ebene (z. B. am Ufer eines Sees oder Flusses) und bestimme deren Entfernung.

Standortbestimmung für Smartphones

Wenn du ein Smartphone besitzt, hast du bestimmt schon einmal entschieden, ob eine App deinen Standort verwenden darf. Hier gibt es viele Einsatzmöglichkeiten. In einem Supermarkt beispielsweise können auf dem eigenen Smartphone – abhängig vom Produktbereich, in dem man sich gerade befindet – Sonderangebote eingeblendet werden.
Wie funktioniert nun die Positionsbestimmung? Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass wir uns immer auf demselben Stockwerk bewegen.
Ein Smartphone misst die Signalstärke von sogenannten Beacons, das sind Sender, die in dem Raum angebracht sind, und ermittelt aus dieser Signalstärke den Abstand zum jeweiligen Sender. Das Handy hat also folgende Informationen:

- Position der Sender (fest im Raum installiert)
- Abstand zu den Sendern aufgrund der Signalstärke

Wie wird nun die Position des Smartphones ermittelt? Durch Anwendung des Kosinussatzes kann diese tatsächlich exakt berechnet werden!



a) Warum reichen zwei Sender zur Standortbestimmung nicht aus? Begründe anhand einer Skizze.

b) Im Beispiel besitzen drei Sender folgende Positionen:
A (1|7), B (13|7) und C (11|19). Das Smartphone S hat zu A den Abstand 10,00 m, zu B den Abstand 6,00 m und ist 7,14 m von C entfernt.
Übertrage die Zeichnung ins Heft und berechne mit dem Kosinussatz die Größe des Winkels α im Dreieck ABS.
Mithilfe des Sinus kannst du die Länge der Höhe von S auf $\overline{AB}$ berechnen und mit dem Kosinus die Länge der Strecke von A bis zum Fußpunkt dieser Höhe.
Für den Standpunkt des Smartphones S gibt es jetzt noch zwei Möglichkeiten. Gib für beide die Koordinaten an.
Zeige anhand des Abstands von C und S, dass die Zeichnung den richtigen Standort S zeigt. Wie groß wäre andernfalls der Abstand von C und S?

c) Fertige eine neue Zeichnung an und verschiebe den Sender B in den Punkt (13|5), wobei die Abstände von S zu A 10,00 m, zu B 6,00 m und zu C 18,41 m betragen sollen. Ermittle die Koordinaten des Standpunktes S näherungsweise mit dem Zirkel.
Die rechnerische Lösung ist hier aufwändiger. Schaffst du es trotzdem?

d) Der Lehrling des Elektromeisters soll drei Beacons A, B und C im Supermarkt installieren. Er macht es sich einfach und setzt den Sender C in die Mitte zwischen A und B (Koordinaten von A und B wie in b)). Was würdest du dem Lehrling raten? Begründe.

e) Auch in der Schule kann diese Technologie angewendet werden. Zum Beispiel könnten Unterrichtsmaterialien auf einem Smartphone angezeigt werden, wenn man sich in bestimmten Klassenräumen befindet. Überlege weitere Anwendungen, die für dich sinnvoll sein könnten.

Überprüfe deine Fähigkeiten und Kenntnisse. Bearbeite dazu die folgenden Aufgaben und bewerte anschließend deine Lösungen mit einem Smiley.

☺	😐	☹
Das kann ich!	Das kann ich fast!	Das kann ich noch nicht!

Hinweise zum Nacharbeiten findest du auf der folgenden Seite. Die Lösungen stehen im Anhang.

Aufgaben zur Einzelarbeit

1 Das Dreieck ABC hat einen rechten Winkel bei γ. Berechne $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$ für folgende Seitenlängen. Runde gegebenenfalls auf zwei Dezimalen.

a) a = 5,6 cm; b = 9,0 cm; c = 10,6 cm

b) a = 0,49 km; b = 1,68 km; c = 1,75 km

2 Berechne die fehlenden Seitenlängen für folgende rechtwinklige Dreiecke ABC. Runde auf eine Stelle nach dem Komma.

a) $\beta = 90°$; $\gamma = 48°$; b = 8,8 cm

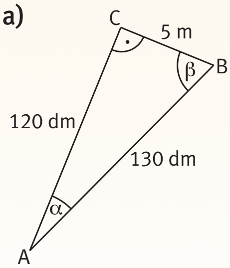
b) $\alpha = 17°$; $\beta = 73°$; a = 124,8 m

c) $\alpha = 57°$; $\gamma = 90°$; a = 1,3 km

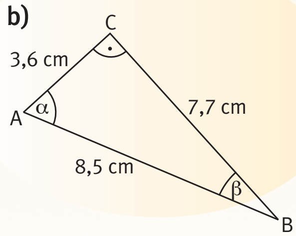
d) $\alpha = 90°$; $\beta = 42°$; a = 78,5 mm

3 Gib in den rechtwinkligen Dreiecken jeweils das Längenverhältnis für Sinus, Kosinus und Tangens der spitzen Winkel an.

a)



b)



4 Im Dreieck ABC ist $\gamma = 90°$. Berechne die Winkel α und β. Runde auf eine Dezimale.

a) $\tan\alpha = 0{,}21$ **b)** $\tan\alpha = 5$ **c)** $\sin\alpha = 0{,}25$

d) $\sin\alpha = 0{,}6$ **e)** $\cos\alpha = 0{,}32$ **f)** $\sin\beta = 0{,}46$

g) $\tan\beta = 2{,}5$ **h)** $\cos\beta = 0{,}7$ **i)** $\tan\beta = 1$

5 Bestimme im rechtwinkligen Dreieck ABC ($\gamma = 90°$) den gesuchten Winkel mithilfe …

1 der Innenwinkelsumme im Dreieck.

2 der Zusammenhänge von Sinus und Kosinus.

a) $\sin 17° = \cos\beta$ **b)** $\sin\alpha = \cos 36°$

c) $\sin 56° = \cos\beta$ **d)** $\sin 72° = \cos\beta$

e) $\sin\alpha = \cos 42°$ **f)** $\sin\alpha = \cos 58°$

6 Welche der Dreiecke ABC sind (im Rahmen der Messgenauigkeit) rechtwinklig? Gib den rechten Winkel an.

a) a = 1,7 m; c = 2,0 m; $\beta = 45°$

b) a = 5 cm; b = 4 cm; $\gamma = 37°$

7 Berechne den Steigungswinkel (d. h. Winkel des Anstiegs) der zugehörigen Gerade.

a) $y = 3{,}8x$ **b)** $y = -5{,}5x + 3$

8 Ein Dreieck ABC besitzt die Seitenlängen c = 6 cm, a = 4 cm und den Winkel $\alpha = 40°$.

a) Berechne den Winkel β. Wie viele Möglichkeiten findest du?

b) Berechne für beide Dreiecke den Flächeninhalt.

9 **a)** Konstruiere das Dreieck ABC mit b = 6,2 cm, $\alpha = 35°$ und c = 8,4 cm.

b) Berechne die Länge der Seite a und überprüfe zeichnerisch.

10 Ein gleichseitiges Dreieck hat eine Höhe von 8,9 cm. Berechne seinen Flächeninhalt.

11 Ein gleichschenkliges Dreieck ABC hat folgende Maße: a = c = 6,5 cm und b = 7,8 cm.

a) Bestimme alle drei Winkelgrößen und die Höhe des Dreiecks auf die Basis.

b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks auf zwei verschiedene Arten.

12 Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkelmaße für das Dreieck ABC.

a) c = 8,5 dm; $\beta = 32°$; $\gamma = 87°$

b) c = 67 cm; $\alpha = 103°$; $\gamma = 46°$

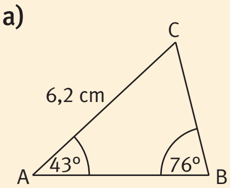
c) a = 5,2 cm; $\beta = 63{,}1°$; $\gamma = 95{,}6°$

d) a = 7,3 cm; b = 4,7 cm; $\alpha = 65°$

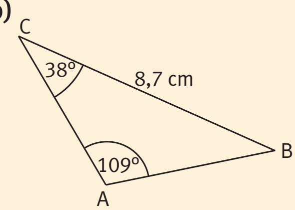
e) b = 7,8 cm; c = 5,5 cm; $\gamma = 33{,}2°$

13 Berechne die fehlenden Werte der Größen a, b, c, α, β und γ des Dreiecks ABC.

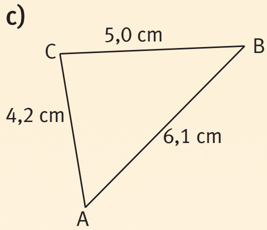
a)



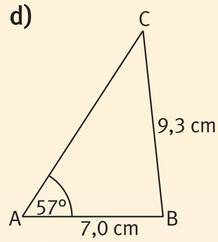
b)



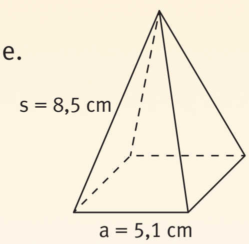
c)



d)



14 Berechne das Volumen der quadratischen Pyramide.



15 Vom Dreieck ABC sind die Seiten b = 6,3 cm und c = 9,4 cm sowie die Größe des Winkels $\alpha = 71°$ bekannt. Berechne die Länge von a mithilfe des Kosinussatzes.

16 Bestimme jeweils die fehlenden Werte in der Tabelle für ein Dreieck ABC. Runde auf eine Dezimale.

	a)	b)	c)
a	☐	6,4 m	4,6 cm
b	6,7 cm	5,8 m	7,0 cm
c	5,9 cm	10,5 m	☐
α	63,5°	☐	☐
β	☐	☐	☐
γ	☐	☐	123,0°

17 Bestimme den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 8,8 cm.

18 Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

a) a = 2,5 cm b = 6,9 cm $\gamma = 32°$
b) a = 55 mm c = 29 mm $\beta = 123{,}8°$
c) a = 5 cm b = 7 cm $\beta = 40°$

Aufgaben für Lernpartner

Arbeitsschritte

1. Bearbeite die folgenden Aufgaben alleine.
2. Suche dir einen Partner und erkläre ihm deine Lösungen. Höre aufmerksam und gewissenhaft zu, wenn dein Partner dir seine Lösungen erklärt.
3. Korrigiere gegebenenfalls deine Antworten und benutze dazu eine andere Farbe.

Sind folgende Behauptungen **richtig** oder **falsch**? Begründe schriftlich.

19 Der Sinus eines Winkels bezeichnet das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse.

20 Der Wert des Sinus eines Winkels geteilt durch den Wert des Kosinus dieses Winkels ergibt den zugehörigen Wert des Tangens dieses Winkels.

21 Sinus, Kosinus und Tangens eines Winkels sind immer kleiner als 1.

22 Zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks ABC benötigt man nur drei der Werte für a, b, c, α, β oder γ.

23 Der Sinussatz gilt nicht für rechtwinklige Dreiecke.

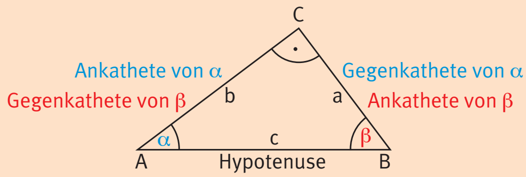
24 Der Kosinussatz ist ein Sonderfall des Satzes von Pythagoras.

25 Den Flächeninhalt eines Dreiecks kann man mithilfe zweier Seitenlängen und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels berechnen.

Aufgabe	Ich kann …	Hilfe
4, 7, 21	mit dem Tangens im rechtwinkligen Dreieck Winkel und Streckenlängen berechnen.	S. 8
1, 2, 3, 4, 5, 19, 21	mit Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck Winkel und Streckenlängen bestimmen.	S. 10
6, 10, 14, 20	Problemstellungen zu rechtwinkligen Dreiecken mit Sinus, Kosinus und Tangens lösen.	S. 12
8, 9, 10, 11, 12, 13, 23	den Sinussatz für beliebige Dreiecke anwenden.	S. 16
9, 11, 13, 15, 16, 24	den Kosinussatz für beliebige Dreiecke anwenden.	S. 20
8, 10, 11, 17, 18, 22, 25	Flächeninhalte beliebiger Dreiecke berechnen.	S. 24

S. 8

Beispiel für $\gamma = 90°$:



In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Seitenverhältnisse eindeutig durch die Größe der beiden spitzen Winkel des Dreiecks festgelegt.
Bezogen auf die spitzen Winkel des rechtwinkligen Dreiecks bezeichnet man diejenige **Kathete**, die dem **betrachteten Winkel gegenüber** liegt, als **Gegenkathete,** und diejenige, die an dem Winkel **anliegt**, als **Ankathete**.

S. 8
S. 10

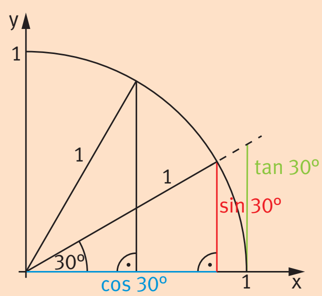
Im oben abgebildeten Dreieck:

- $\tan \alpha = \frac{a}{b}$; $\tan \beta = \frac{b}{a}$
- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $\sin \beta = \frac{b}{c}$
- $\cos \alpha = \frac{b}{c}$; $\cos \beta = \frac{a}{c}$

In einem rechtwinkligen Dreieck gilt:

- **Tangens** des Winkels $= \frac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Ankathete des Winkels}}$
- **Sinus** des Winkels $= \frac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}$
- **Kosinus** des Winkels $= \frac{\text{Ankathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}$

S. 12



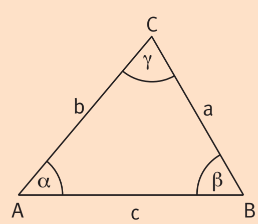
Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ gilt:

- $\sin \alpha = \cos (90° - \alpha)$
- $\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Festlegungen:

- $\sin 0° = \cos 90° = 0$
- $\sin 90° = \cos 0° = 1$
- $\tan 0° = 0$

S. 16
S. 20



In einem allgemeinen Dreieck ABC gelten der Sinus- und der Kosinussatz.

Sinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Für stumpfe Winkel α ($90° < \alpha < 180°$) gilt:
$\sin \alpha = \sin (180° - \alpha)$

Kosinussatz

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

Für stumpfe Winkel α ($90° < \alpha < 180°$) gilt:
$\cos \alpha = -\cos (180° - \alpha)$

S. 24

Beispiel:
ΔABC mit $a = 42$ mm, $b = 26$ mm und $\gamma = 66°$

$A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$

$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 42 \text{ mm} \cdot 26 \text{ mm} \cdot \sin 66°$

$A_{\text{Dreieck}} \approx 499 \text{ mm}^2$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich der Hälfte des Produkts aus den Längen zweier Seiten und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkel.
Für das Dreieck ABC gilt:

$A = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$

Figuren

1 Entscheide, welche Aussagen wahr und welche falsch sind.

a) Jedes Parallelogramm ist ein Rechteck.

b) Jedes Quadrat ist ein Drachenviereck.

c) Es gibt Trapeze, die Drachenvierecke sind.

d) Ein Rechteck ist niemals eine Raute.

2 Überprüfe, ob die Eigenschaftskarten zu dem Viereck gehören.

1 Gegenüberliegende Seiten sind parallel.

2 Hat mindestens zwei rechte Winkel.

3 Hat mindestens zwei Symmetrieachsen.

4 Hat vier gleich lange Seiten.

5 Hat mindestens zwei gleich große Winkel.

a) Trapez **b)** Quadrat

c) Raute **d)** Parallelogramm

3 Ein Viereck besitzt genau eine Symmetrieachse und hat einen Umfang von 20 cm.

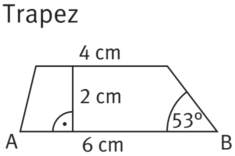
a) Begründe, dass es sich dabei nicht um ein Rechteck handeln kann.

b) Zeichne mindestens zwei verschiedene Vierecke, die diese Eigenschaft erfüllen.

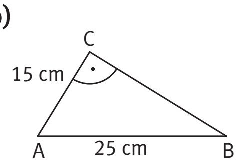
c) Entscheide, welche Vierecksarten überhaupt bei den Eigenschaften möglich sind.

4 Bestimme Flächeninhalt und Umfang der dargestellten Figuren. Zeichne die Figur, wenn nötig.

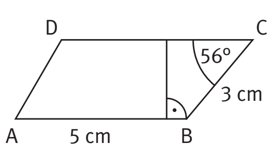
a) Trapez



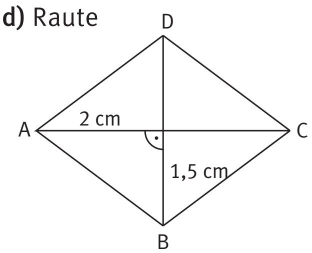
b)



c) Parallelogramm



d) Raute



Daten und Zufall

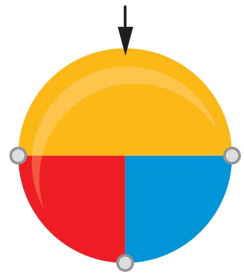
5 Gib für folgende Ereignisse das Gegenereignis an.

a) Beim Würfeln wird eine gerade Augenzahl geworfen.

b) Beim doppelten Münzwurf tritt mindestens einmal Wappen auf.

c) Beim Ziehen einer Karte aus einem Skatblatt zieht man entweder eine rote Karte oder das Pik Ass.

6 Ein Glücksrad besteht wie in der Abbildung aus einem roten, einem blauen und einem gelben Feld.



a) Gib für jede Farbe die Wahrscheinlichkeit beim einmaligen Drehen des Glücksrads an.

b) Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Wie viele verschiedene Farbkombinationen sind insgesamt möglich? Beachte die Reihenfolge.

c) Beim ersten Drehen wird Rot gedreht. Konrad sagt: „Dann ist es jetzt viel wahrscheinlicher als gerade eben, dass nun Gelb gedreht wird.“ Äußere dich zu dieser Aussage.

7 Während eines Fußballspiels wurde notiert, welche Strecke jeder einzelne Spieler in dieser Zeit gelaufen ist:
7,2 km; 8,0 km; 12,1 km; 9,4 km; 10,0 km; 8,7 km; 8,9 km; 10,2 km; 0,5 km; 9,9 km; 4,5 km; 4,5 km

a) Bestimme Median, Modalwert und arithmetisches Mittel der Laufwege.

b) Welche der bei a) berechneten Größen stellt einen geeigneten Mittelwert für die Laufwege dar? Begründe auch, dass die anderen nicht so gut geeignet sind.

8 Bei einem Talentwettbewerb erhalten die Teilnehmer bis zu 10 Punkte. Die Tabelle zeigt die Punkteverteilung für die 19 Teilnehmer:
9; 9; 7; 10; 6; 8; 5; 9; 2; 7; 8; 8; 10; 9; 4; 7; 6; 8; 10

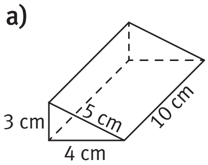
a) Zeichne einen Boxplot zum Sachverhalt.

b) Wie viele Punkte müsste ein weiterer Teilnehmer bekommen, damit sich der Boxplot nicht verändert?

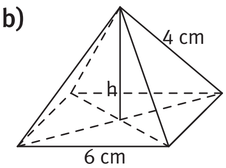
Prismen und Pyramiden

9 Skizziere zu den Schrägbildern jeweils die Ansicht von vorne und von oben und das zugehörige Netz.

a)



b)



10 Entscheide, ob es sich um ein Prisma, eine Pyramide, beides oder um keines von beiden handeln kann. Der Körper hat …

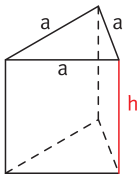
a) 6 Ecken und 5 Flächen.

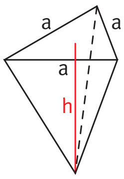
b) 8 Kanten.

c) eine gerade Anzahl an Flächen und eine ungerade Anzahl an Kanten.

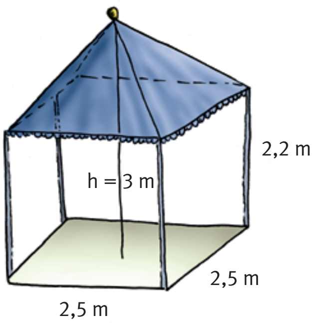
d) mehr als 5 Flächen, aber weniger als 12 Kanten.

11 Das dargestellte Prisma hat ein Volumen von 23,4 cm^3. Die gleich hohe Pyramide wird vollständig mit Wasser gefüllt, anschließend wird das Wasser in das Prisma geschüttet. Bis zu welcher Höhe ist das Prisma dann gefüllt?
Es gilt a = 3 cm.





12 Das Dach eines Pavillons muss neu bespannt werden. Dazu nutzt man eine Plastikplane.



a) Bestimme die Seitenhöhe des Dachs.

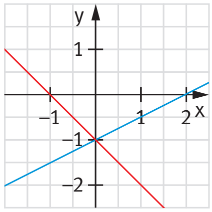
b) Berechne den Flächeninhalt des Dachs.

c) Für Nähte und Verschnitt muss noch einmal mit 12 % zusätzlicher Dachplane gerechnet werden. Wie viel Folie ist insgesamt nötig?

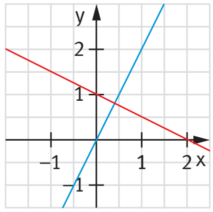
Lineare Gleichungssysteme

13 Gib zu den dargestellten Graphen ein Gleichungssystem und dessen Lösung an.

a)



b)



14 Löse folgende Gleichungssysteme grafisch.

a) I $y = x + 2$
II $x + y = 0$

b) I $x - y = 3$
II $2x + y = 0$

15 Gegeben sind vier Gleichungssysteme.

(1) I $2x + y = 10$
II $y = x - 2$

(2) I $3x - y = 3$
II $2x - y = 7$

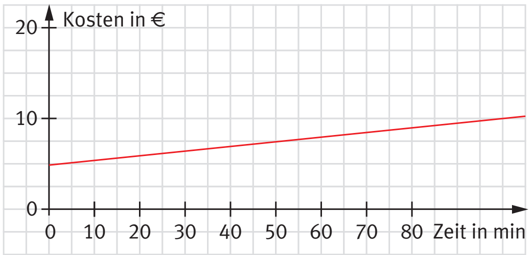
(3) I $x = 12 - y$
II $y + 3 = x$

(4) I $x - y = 3$
II $2x + y = 10$

a) Welches rechnerische Verfahren bietet sich zur Lösung des Gleichungssystems an? Begründe.

b) Löse das Gleichungssystem mit dem gewählten Verfahren aus a).

16 Das Diagramm zeigt die Kosten bei einen Handytarif.



a) Beschreibe den Tarif in Worten. Gib eine Funktionsgleichung an.

b) Übernimm den Graphen in dein Heft und zeichne einen weiteren Tarif ein, der günstiger ist, wenn man weniger als 50 min telefoniert, aber teurer ist bei mehr als 50 min.

c) Gib für deinen eingezeichneten Tarif eine zugehörige Gleichung an.

d) Gib ein Gleichungssystem an, mit dem man ausrechnen kann, ab wann sich welcher Tarif lohnt. Löse das Gleichungssystem.