



ARBEITSHEFT

Mathematik mit CAS

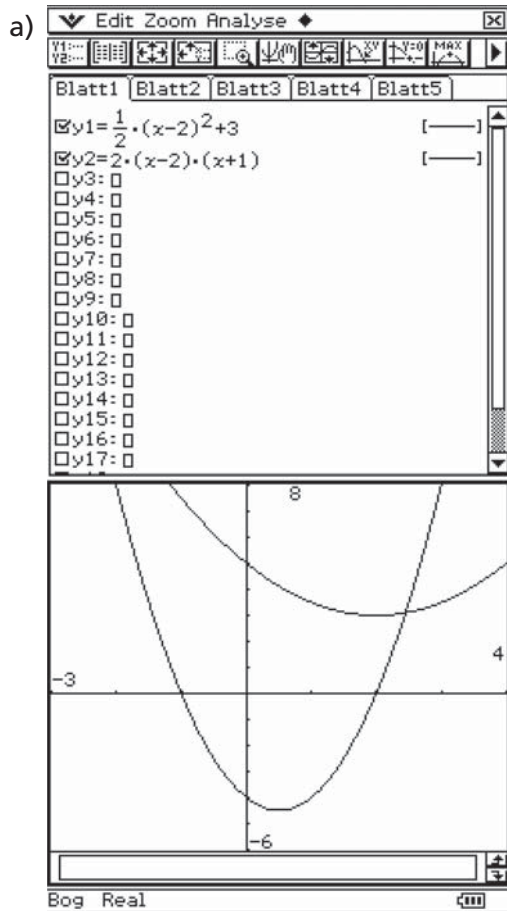
Lösungen für
CASIO-Geräte

C.C.BUCHNER

Inhaltsverzeichnis

Einführung in die Arbeit mit einem CAS	3
Kreis und Kugel	5
Kreis und Kugel – Kann ich das?	8
Sinus- und Kosinusfunktion	9
Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion	12
Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion – Kann ich das?	16
Lineares und exponentielles Wachstum – die allgemeine Exponentialfunktion	17
Logarithmus- und Exponentialgleichungen	22
Lineares und exponentielles Wachstum; Logarithmen – Kann ich das?	28
Zusammengesetzte Zufallsexperimente	30
Potenzfunktionen	33
Lösungsmethoden für algebraische Gleichungen	36
Ganzrationale Funktionen und ihre Nullstellen	38
Weitere Eigenschaften ganzrationaler Funktionen	44
Potenzfunktionen, Gleichungen und ganzrationale Funktionen – Kann ich das?	46
Überblick über bekannte Funktionen	49
Verhalten von Funktionen im Unendlichen	54
Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf den Graphen	57
Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf den Graphen – Kann ich das?	61

Arbeitsauftrag

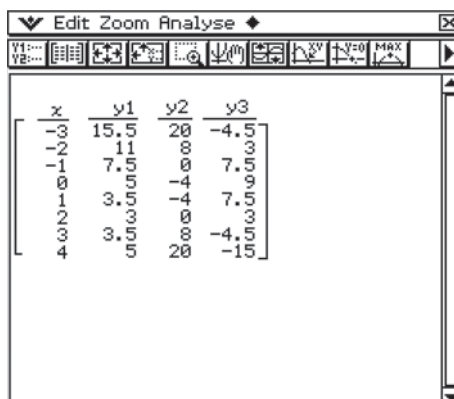


b) Anwendung des Befehls simplify

simplify $(0,5 \cdot (x-2)^2 + 3 - 2(x-2)(x+1))$

Ergebnis: $-\frac{3x^2}{2} + 9$

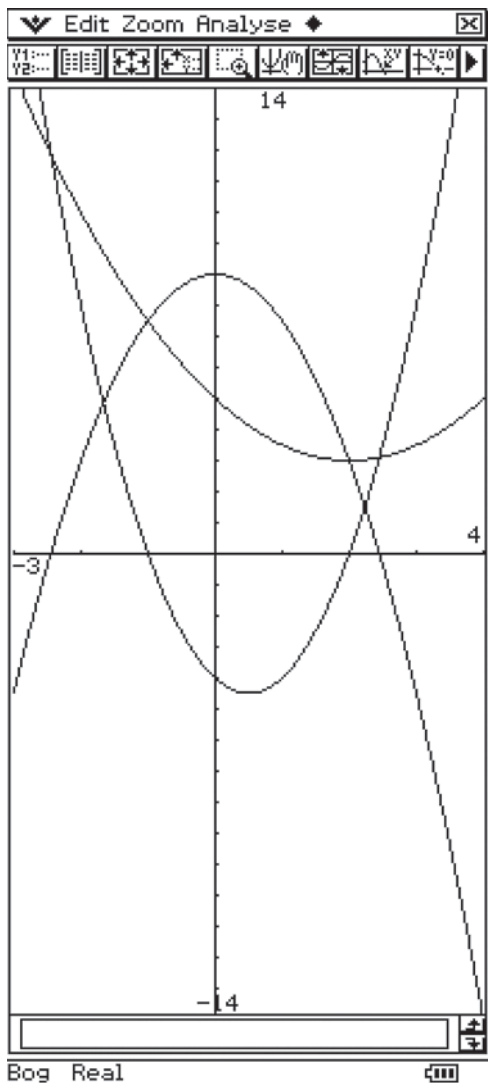
Anmerkung: Im 1. Druck der 1. Auflage des Arbeitshefts steht ein falscher Term. Dieser ging von $g(x) = 2(x-2)(x+3)$ aus. Hier könnte man im Unterricht fragen, von welcher Funktion bei dem falschen Term ausgegangen wurde.



- c) Für die Nullstellenform wird der Befehl rfactor angewendet, für die Normalform der Befehl expand. Die Scheitelform ergibt sich durch Nachdenken, z. B. der x-Wert des Scheitelpunkts liegt genau in der Mitte zwischen den Nullstellen.

	Scheitelform	Nullstellenform	Normalform
f(x)	$\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$	Da die Funktion keine Nullstellen besitzt, gibt es keine Nullstellenform.	$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$
g(x)	$2(x-0,5)^2 - 4,5$	$2(x-2)(x+1)$	$2x^2 - 2x - 4$
h(x)	$-\frac{3}{2}(x-0)^2 + 9$	$-\frac{3}{2}(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})$	$-\frac{3}{2}x^2 + 9$

- d) Die Nullstellen von h sind die x-Werte der Schnittpunkte von f und g.



- e) $S_1(\sqrt{6} | -2\sqrt{6} + 8)$; $S_2(-\sqrt{6} | 2\sqrt{6} + 8)$

Arbeitsaufträge

1. Das Bogenmaß

$$\text{Zusammenhang: } \frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

x: Winkel im Bogenmaß, α : Winkel im Gradmaß

Der aufgelöste Term kann bei einigen Geräten mit dem Befehl, z. B. *define*, für weitere Funktionsauswertungen eingetragen werden.

Winkel im Gradmaß α	10°	45°	$22,5^\circ$	105°	300°	$186,61^\circ$
Winkel im Bogenmaß x	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	3,257

2. Kreisteile

$$A_{\text{Dreieck}} = A_{\text{Sektor}}$$

$$\frac{1}{2} a^2 = \frac{\varphi}{360^\circ} \pi a^2; \text{ das Lösen der Gleichung mit dem für viele CAS gültigen Befehl } \text{solve} \text{ ergibt } \varphi \approx 57,3^\circ.$$

Aufgaben

1. Mondbahn

Unter der Annahme, dass die Bewegung annähernd kreisförmig ist und deshalb mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt, kann folgender Ansatz gewählt werden:

$$\frac{x}{T_{\text{Mond}}} = \frac{f(x)}{2\pi a} \text{ mit } a = 384\,400 \text{ km (große Halbachse), } T \text{ Zeit des Mondumlaufs.}$$

Es wird im CAS der Term $f(x) = 2\pi \cdot 384\,400 \cdot \frac{x}{27,3}$ mit x in Tagen, f(x) in km definiert.

Dieser Term wird nun mehrfach ausgewertet:

$$1 \text{ min: } f\left(\frac{1}{24 \cdot 60}\right) \approx 61,4$$

$$1 \text{ h: } f\left(\frac{1}{24}\right) \approx 3\,686,3$$

$$1 \text{ d: } f(1) \approx 88\,470,9$$

$$1 \text{ Monat: } f(30) \approx 2\,654\,128$$

2. Wankelmotor

a) Berechnung der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks: $h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$

Der Inkreismittelpunkt ist identisch mit dem Schwerpunkt, der die Höhe im Verhältnis 1 : 2 teilt:

$$r = \frac{1}{3} h = \frac{a}{6} \sqrt{3}.$$

b) Querschnittsfläche des Rotationskolbens:

$$A = 3 \cdot A_{\text{Sektor}} - 2 \cdot A_{\text{Dreieck}} - A_{\text{Kreis}} = 3 \cdot \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h - \pi \cdot r^2 = \frac{5}{12} \pi \cdot a^2 - \frac{a^2}{6} \sqrt{3}$$

c) Verhältnis der Fläche der inneren Welle zur Querschnittsfläche:

$$\frac{\pi \cdot r^2}{A} \approx 26\%$$

3. Schraubenmutter

a) Das Sechseck lässt sich in gleichseitige Dreiecke der Höhe $\frac{s}{2}$ und der Grundlinie $\frac{e}{2}$ zerlegen.

$$\frac{s}{2} = \frac{e}{2} \sqrt{3}; \quad e = \frac{2s}{3} \sqrt{3}$$

b) $A = A_{\text{Sechseck}} - A_{\text{Gewindeloch}} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{s}{2} - \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} s^2 - \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$

c) Definition der Massenfunktion im CAS und der anschließenden mehrfachen Auswertung ergibt:

```

Datei Edit Einf. Aktion
[Icons]
Schraubenmutter

Berechnung der Massen der Schraubenmutter
Definition der Berechnungsfunktion unter Verwendung des
Ergebnisses aus b)

define m(s,d,md) = (sqrt(3)/2*s^2-pi*(d/2)^2)*md*0.007850
done
m(10,4.77,4)
2.158199072
m(13,6.57,5)
4.413923907
m(19,9.85,9)
16.70405344
m(30,16.93,14)
60.91847045
[Cursor]
Alge Dezimal Real Bog

```

4. Rotationskörper

a) $V = 2 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 + \pi \cdot \left(\frac{1}{4} r\right)^2 \cdot 4r = \frac{35}{12} \pi \cdot r^3$

b) Hinweis: Die Masse m ergibt sich aus Dichte ρ und Volumen V : $m = \rho \cdot V$;

$$\rho = 7,85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 7,85 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}.$$

$$m = 5 \text{ kg}; \quad V = \frac{m}{\rho}$$

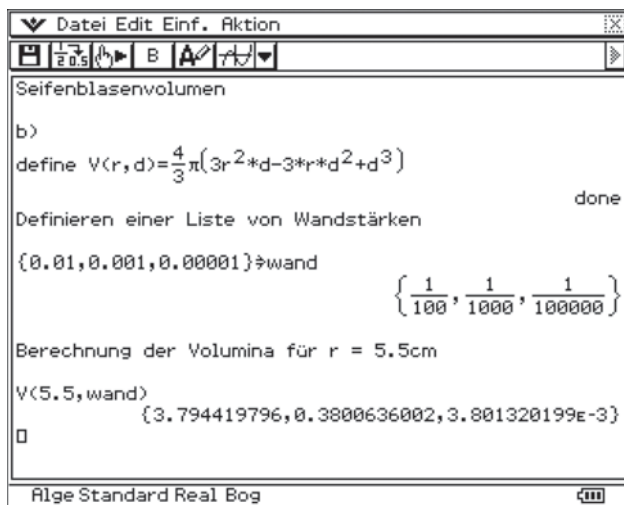
Mit der Beziehung aus Teilaufgabe a) ergibt sich:

$$r = \sqrt[3]{\frac{12 m}{35 \pi \rho}} \approx 0,41 \text{ dm} = 4,1 \text{ cm}$$

5. Hohlkugel, Seifenblasenvolumen

a) $V(r, d) = \frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi (r - d)^3; \quad V(r, d) = \frac{4}{3} \pi (3r^2 d - 3rd^2 + d^3)$

b) Für immer kleinere Wandstärken nimmt das Hohlkugelvolumen ab.



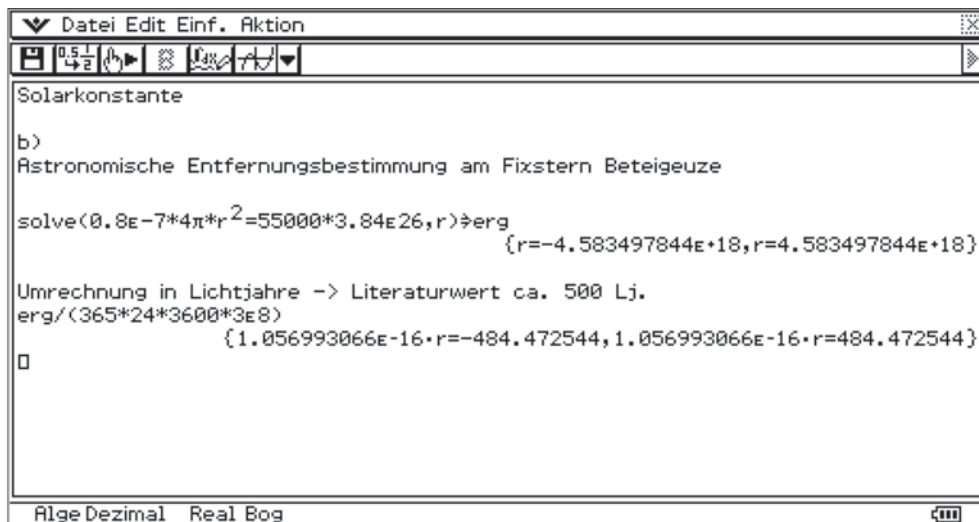
c) Für sehr dünne Wandstärken d , d. h. wenn d sehr klein ist, gilt das Folgende:

- Für d^2 , d^3 ergeben sich noch kleinere Werte als für d , z. B.
 $d = 0,01$; $d^2 = 0,0001$ und $d^3 = 0,000001$.
- Es gilt: $-3rd^2 \ll 3r^2d$ und $d^3 \ll 3r^2d$.
 Damit sind die Terme $-3rd^2$ und d^3 vernachlässigbar.

6. Solarkonstante

a) $L = S \cdot 4\pi r^2 = 1\,367 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 4\pi \cdot (1,496 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 = 3,84 \cdot 10^{26} \text{ W}$

b) $L_B = 55\,000 \cdot L$ und $L_B = S_B \cdot 4\pi \cdot r^2$ (r ist der Abstand der Erde von der Beteigeuze.)
 Es ergibt sich $r \approx 484 \text{ Lj}$.



7. Bestimmung der Kreiszahl π

Verschiedene Approximationsverfahren findet man in allen eingeführten Schulbüchern. In delta 10, Seite 12 und 13, finden sich iterative Verfahren und auf den folgenden Seiten 14 und 15 wird in die Approximation mithilfe von Monte-Carlo-Methoden eingeführt.

Beide Verfahrenstypen eignen sich gut für den Einsatz eines CAS-Rechners.

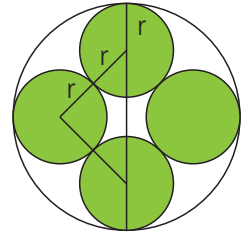
1. Mandala

Man berechnet den Radius r mit dem folgenden Ansatz:

$$(2R - 2r)^2 = 2 \cdot (2r)^2$$

$$r = (\sqrt{2} - 1) \cdot R \text{ (nur positives Ergebnis sinnvoll)}$$

Der Flächenanteil ergibt $\frac{4\pi \cdot ((\sqrt{2} - 1)R)^2}{\pi R^2} \approx 0,686$, also ca. 69%.

**2. Herzfigur**

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot (2a)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2a}{2\sqrt{3}} = \pi \frac{a^2}{4} + \frac{\pi}{3} 4a^2 - \sqrt{3}a^2$$

$$U = 2\pi \frac{a}{2} + 2 \cdot \frac{1}{6} \pi \cdot 2a = \frac{5}{3} \pi \cdot a$$

3. Heißluftballon

Für das Ballonvolumen ergibt sich $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \frac{5}{4}r + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{13}{12} \pi \cdot r^3$ in Abhängigkeit von r .

Das gegebene Volumen von $V = 13\,000 \text{ m}^3$ ergibt $r = 16,5 \text{ m}$ und damit eine gesamte Höhe von $h_{\text{ges}} = r + h = 16,5 \text{ m} + 20,6 \text{ m} = 37,1 \text{ m}$.

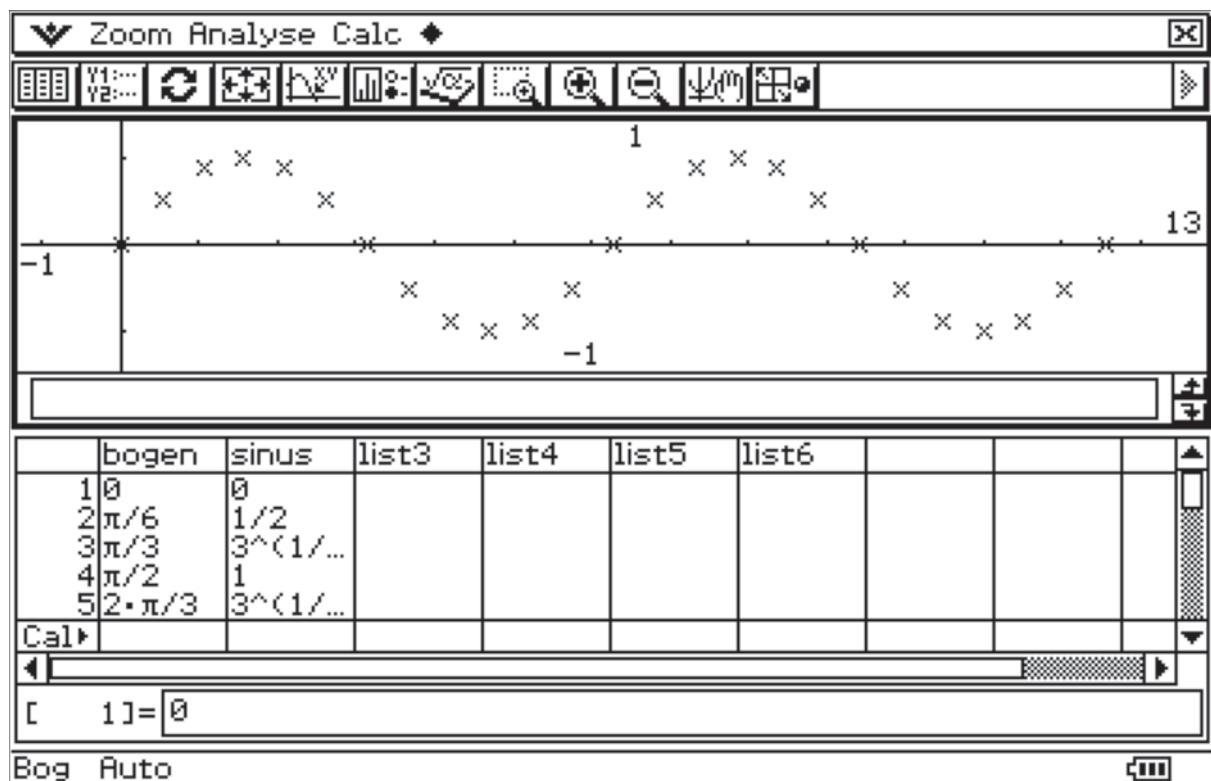
Arbeitsauftrag

Der Einheitskreis und die Sinusfunktion

Arbeitsauftrag - Sinus- und Kosinusfunktion

Erstelle eine Winkelliste
`seq(x,x,0,720,30)→winkel`
 $\{0, 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 330, 360, 390, 420, 450\}$
`define b(x)=2π* $\frac{x}{360}$`
 done
 Bogenmaß
`b(winkel)→bogen`
 $\left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi, \frac{13\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}\right\}$
`sin(bogen)→sinus`
 $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$
 □

Alge Standard Real Bog



Aufgaben

1. Die Kosinusfunktion

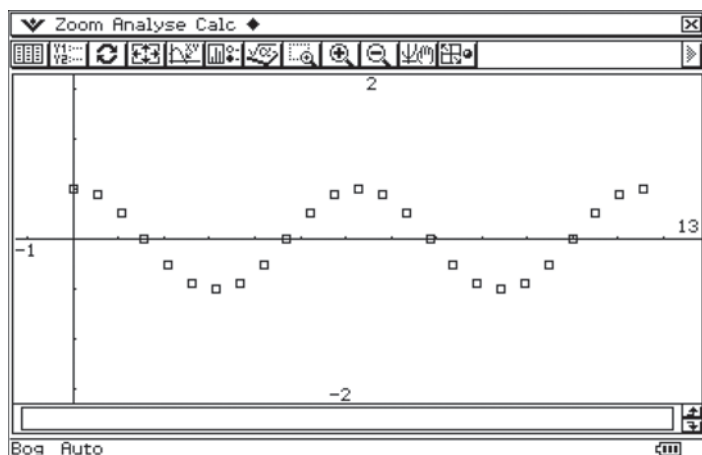
a)

```

Datei Edit Einf. Aktion
Kosinusfunktion

Erstellen einer Winkelliste
seq(x, x, 0, 720, 30)→alpha
{0,30,60,90,120,150,180,210,240,270,300,330,360,390,420,450,→
define bogen(winkel)= $\frac{2\pi}{360}$ *winkel
done
bogen(alpha)→bogmass
{0, $\frac{\pi}{6}$ , $\frac{\pi}{3}$ , $\frac{\pi}{2}$ , $\frac{2\pi}{3}$ , $\frac{5\pi}{6}$ , $\pi$ , $\frac{7\pi}{6}$ , $\frac{4\pi}{3}$ , $\frac{3\pi}{2}$ , $\frac{5\pi}{3}$ , $\frac{11\pi}{6}$ , $2\pi$ , $\frac{13\pi}{6}$ , $\frac{7\pi}{3}$ ,→
cos(bogmass)→kosinus
{1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\frac{1}{2}$ ,0,- $\frac{1}{2}$ , $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,-1,- $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,- $\frac{1}{2}$ ,0, $\frac{1}{2}$ , $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\frac{1}{2}$ ,0,- $\frac{1}{2}$ ,→
□
Eintragen der Liste "bogmass" und "kosinus" in die Tabelle/Dars
Alge Standard Real Bog

```



b) Amplitude $A = 1$ ist identisch; „Aussehen“ gleich, aber um $\frac{\pi}{2}$ nach links in Richtung der x-Achse verschoben.

2. Gleichungen

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a) $\sin x = 0$ | $L = \{-2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi\}$ |
| b) $\cos x = 1$ | $L = \{-2\pi; 0; 2\pi\}$ |
| c) $\sin x = -1$ | $L = \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right\}$ |
| d) $\cos x = 0,5$ | $L = \left\{-\frac{5\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$ |
| e) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $L = \left\{-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$ |

3. Symmetrie

a) Die Darstellung der Funktionsgraphen lässt auf folgende Symmetrien schließen:

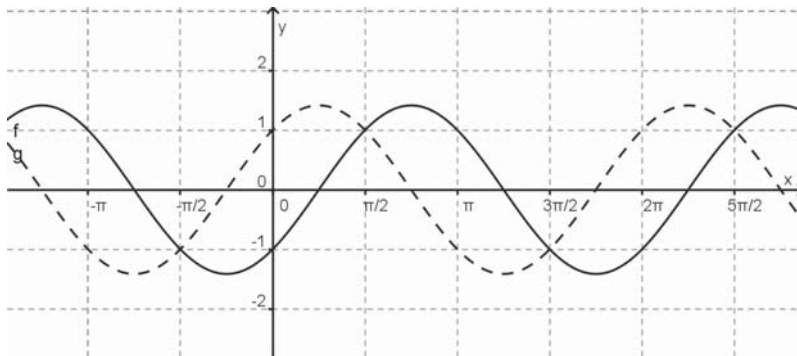
- Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung
- Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse

b) i) $\sin(-x) = -\sin(x)$

ii) $\cos(-x) = \cos(x)$

4. Zusammengesetzte Funktionen I

a) Graphen



Die Periodizität und die Wertemengen beider Funktionen sind identisch:
 $p = 2\pi$; $W = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

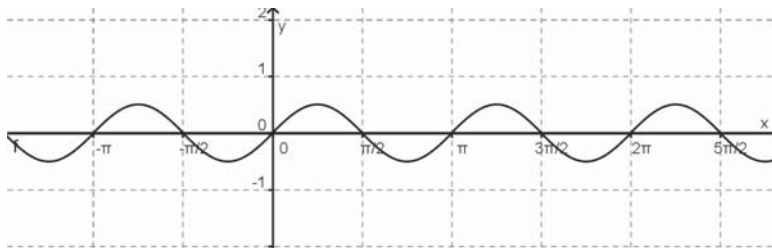
b) Schnittstellen der Graphen

$$f(x) = g(x); \quad \sin x - \cos x = \sin x + \cos x$$

$$\cos x = 0; \quad x_1 = \frac{\pi}{2} \approx 1,57; \quad x_2 = \frac{3}{2}\pi \approx 4,71$$

5. Zusammengesetzte Funktionen II

a) Graph



- Periode: $p = \pi$
- punktsymmetrisch zum Ursprung:
 $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -\sin(x) \cdot \cos(x) = -f(x)$

b) Nullstellen: $x = k \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

c) $g(x) = [f(x)]^2, x \in \mathbb{R}$

- Periode: $p = \frac{\pi}{2}$
- achsensymmetrisch zur y-Achse:
 $g(-x) = \sin^2(-x) \cdot \cos^2(-x) = (-\sin(x))^2 \cdot \cos^2(x) = g(x)$
- Nullstellen: $x = k \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

Arbeitsauftrag

Die allgemeine Sinusfunktion

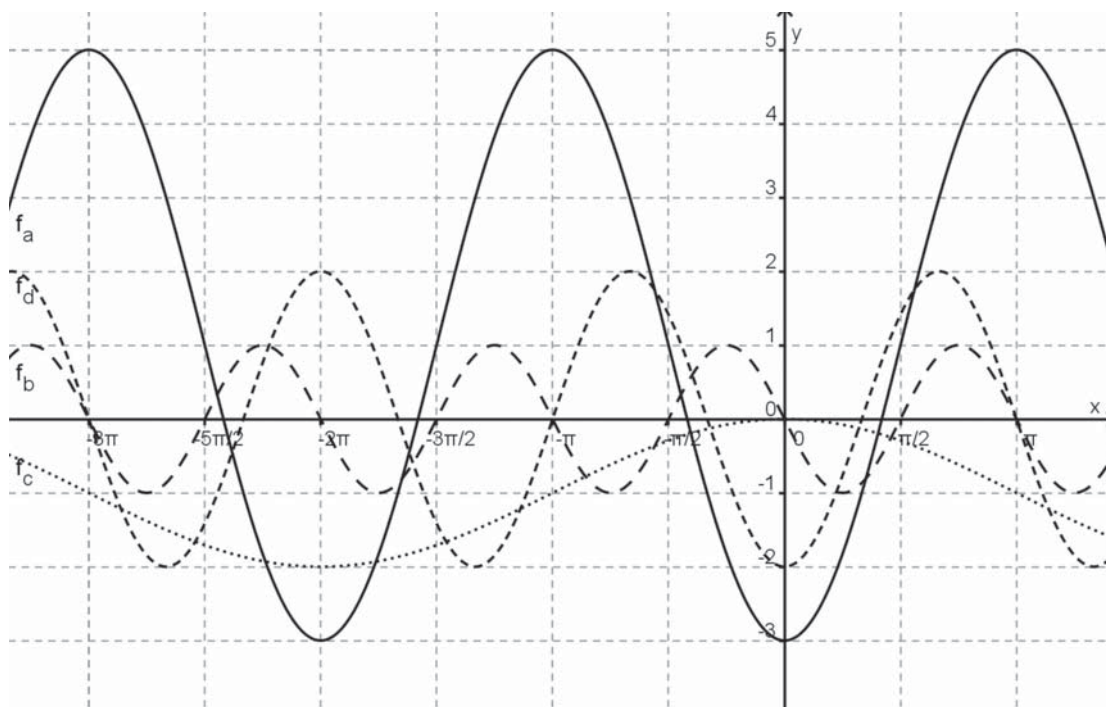
Mit dem Funktionsplotter lässt sich der Einfluss der verschiedenen Parameter auf den Graphen erkennen. Man beobachtet:

- a) eine Streckung bzw. Stauchung in y-Richtung bzw. eine Spiegelung an der x-Achse.
- b) eine Streckung bzw. Stauchung in x-Richtung bzw. eine Spiegelung an der y-Achse.
- c) eine Verschiebung in x-Richtung.
- d) eine Verschiebung in y-Richtung.

Aufgaben

1. Trigonometrische Funktionen

Graphen



a) $f(x) = 4 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

$p = 2\pi$; $A = 4$; um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts und um 1 nach oben verschoben

b) $f(x) = \sin(2x + \pi)$

$p = \pi$; $A = 1$; um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben

c) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

$p = 4\pi$; $A = 1$; um π nach links und um 1 nach unten verschoben

d) $f(x) = -2 \cdot \cos\left(\frac{3}{2}x\right)$

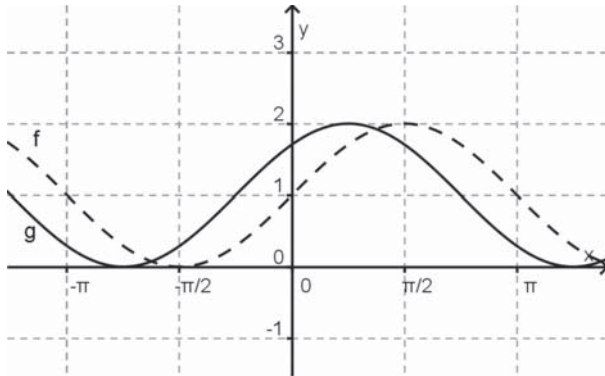
$p = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\pi$; $A = 2$;

keine Verschiebung, aber Streckung mit Faktor 2 und Spiegelung an der x-Achse

2. Funktionsplotter

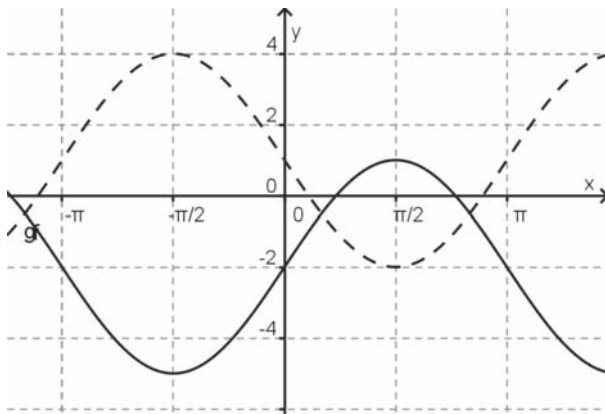
a) $f(x) = \sin(x) + 1$

$g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$



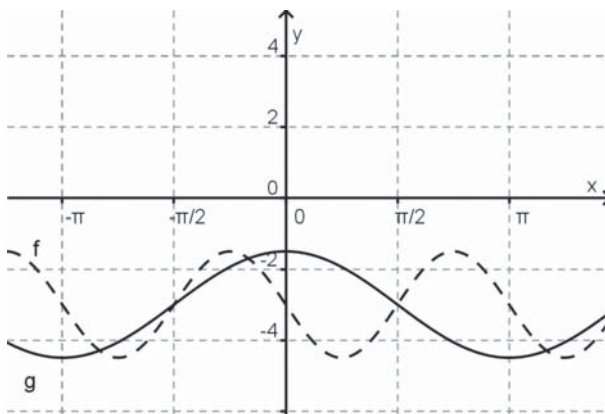
b) $f(x) = 3 \sin(x - \pi) + 1$

$g(x) = 3 \sin\left(x - \frac{4\pi}{3}\right) - 2$



c) $f(x) = 1,5 \sin(2x + \pi) - 3$

$g(x) = 1,5 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 3$

**3. Trigonometrische Gleichungen**

a) $\cos x = \frac{1}{2} \sqrt{2}, x \in [-2\pi; 2\pi]$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; L = \left\{-\frac{7}{4}\pi; -\frac{1}{4}\pi; \frac{\pi}{4}; \frac{7}{4}\pi\right\}$$

b) $\cos 3x = \frac{1}{2} \sqrt{2}, x \in [-2\pi; 2\pi]$

Periode in a) $p_a = 2\pi$, hier $p_b = \frac{2}{3}\pi$

In a) gibt es 2 volle Perioden im Definitionsbereich mit 4 Lösungen.

In b) sind es 6 volle Perioden im Definitionsbereich, also 12 Lösungen.

4. Ebbe und Flut

a) $h(t) = 4 - 1,5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12,5} t\right)$

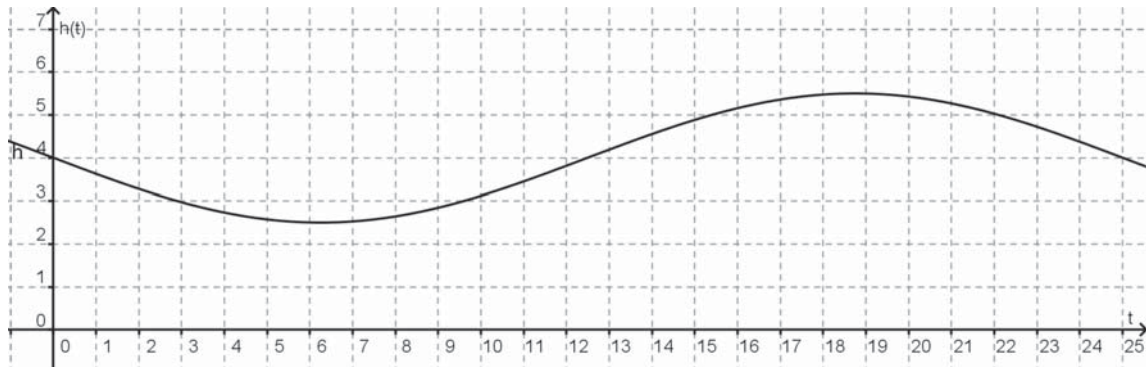
$h(t) = 3,5; t \approx 11,15 + 25k; t \approx 1,35 + 25k; k \in \mathbb{Z};$

Erster Zeitpunkt mit dem Wasserstand von 3,5 m nach Mitternacht ist um 1,35 h ≈ 1.21 h.

b) Es ergibt sich ein Minimum bei $t = 6,25$ h, also 6.15 h.

c) $A = 1,5$, d. h. der Unterschied zwischen Ebbe und Flut ist $2 \cdot A = 3$.

d) Graph



e) $h(t) = 5$

Ein erstes Zeitfenster ergibt sich daraus zwischen $t_1 \approx 15,40$ h und $t_2 \approx 22,10$ h, also zwischen 15.24 h und 22.06 h.

5. Funktionsgraphen

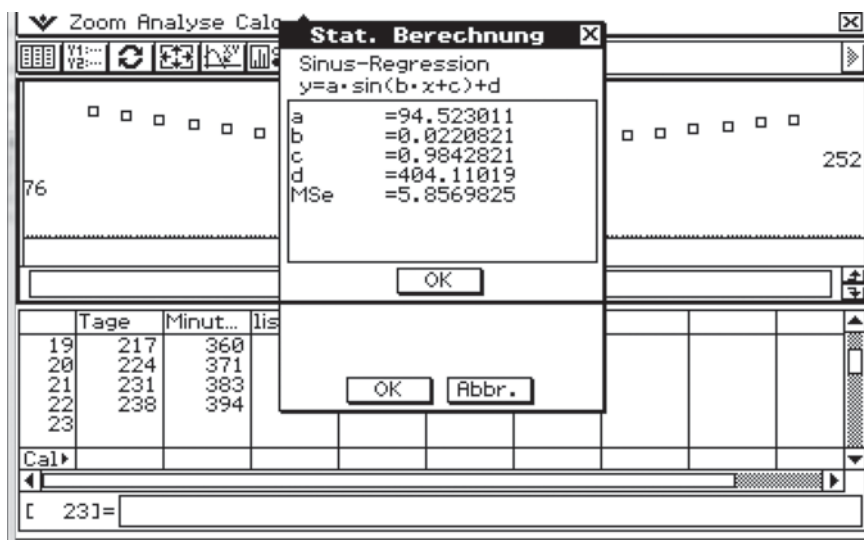
a) $f(x) = 4 \cdot \cos(2x)$

b) $f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1$

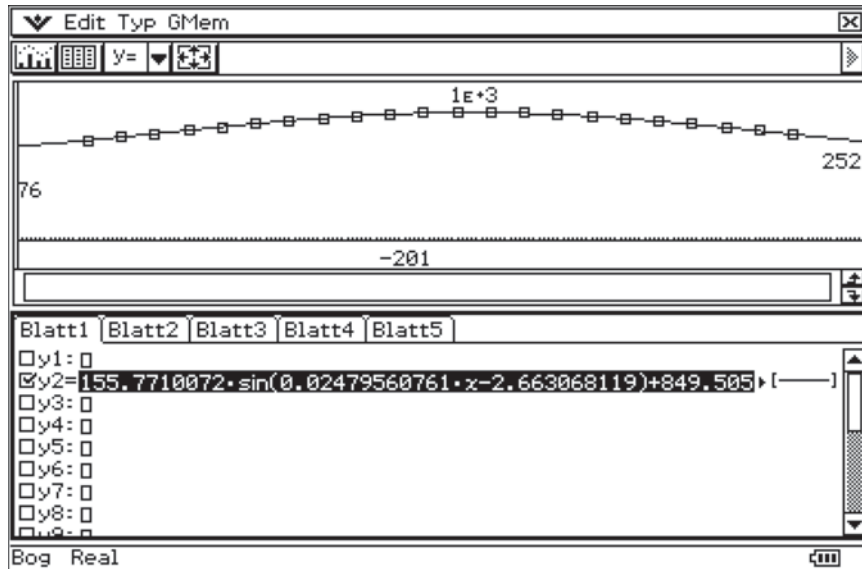
6. Sonnenaufgang und Sonnenuntergang

a) Die trigonometrische Regression ergibt mit der x-Koordinate (Tag im Jahr) und der y-Koordinate (Minuten am Tag): $y(x) = 94,5 \cdot \sin(0,022 \cdot x + 0,984) + 404$.

mögliche CAS Ausgabe:



- b) Der 30. 9. ist der 272. Tag im Jahr: $y(272) \approx 7,76$, also ist der Sonnenaufgang dieses Tages ungefähr um 7 h 45 min.
- c) kürzester Tag (Vergleich mit dem 21. 12.)



Als Ergebnis erhält man den 297. Tag im Jahr, d. h. einen Tag Ende Oktober.

Aufgrund dieser großen Abweichung vom 21. 12. (kürzester Tag) ist klar, dass die Annahme, dass der Sonnenauf- und Untergang einer allgemeinen Sinusfunktion genügen, falsch ist.

1. Wasserspiegel

a) Amplitude $A = 1$

$$\text{Periode } p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$$

b) maximaler Wasserstand: 3 m; minimaler Wasserstand: 1 m

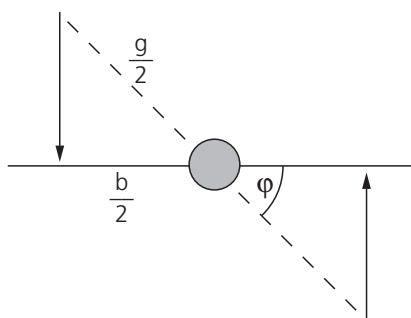
c) $x_{\max} \in \{3, 15\}$

$$\text{d) } y(x) = 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} x\right) + 12$$

$$\text{e) } y(x) = 1,5; x_1 = 7 + 12k; x_2 = 11 + 12k; k \in \mathbb{Z};$$

2. Weihnachtsbaum

Draufsicht auf den Aufbau



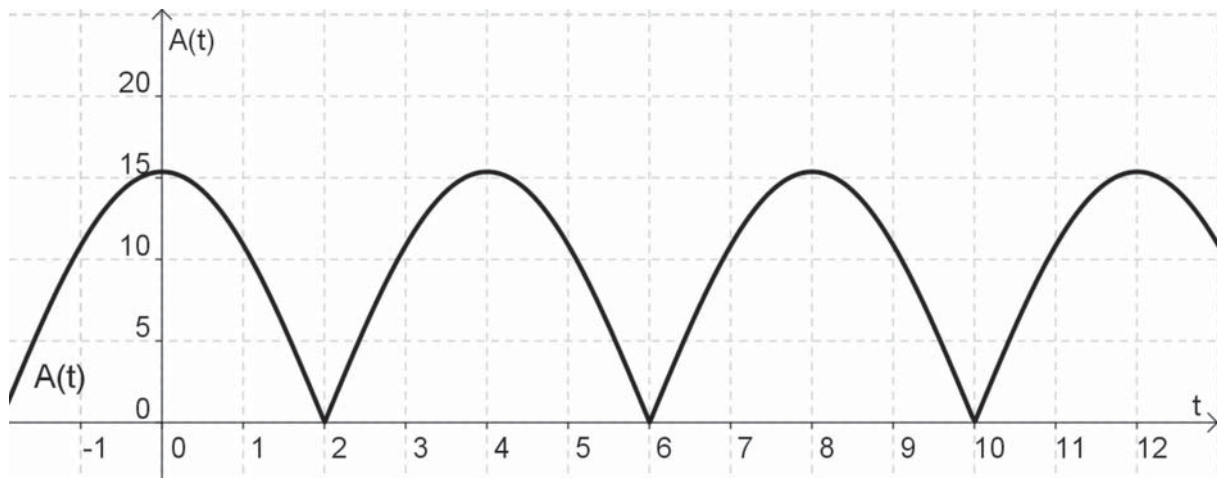
$$\frac{b}{2} = \frac{g}{2} \cdot \cos \varphi$$

$$b(t) = g \cdot \cos \varphi = g \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$A(t) = \frac{1}{2} b(t) \cdot h = \frac{1}{2} g \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot h$$

In der Aufgabe wird die Querschnittsfläche beschrieben, so dass man noch die Betragsfunktion berücksichtigen muss.

$$A(t) = \left| \frac{1}{2} \cdot 4,8 \cdot 6,4 \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right) \right|$$



3. Landeanflug

a) • Amplitude: $A = \frac{10\,000 - 448}{2} = 4\,776$

• Man erkennt eine horizontal gespiegelte Kosinusfunktion, d. h. $a = -A = -4\,776$ ohne Verschiebung in Richtung der x-Achse, d. h. $c = 0$.

• Periode: $p = \frac{2\pi}{b} = 100$; $b = \frac{\pi}{50}$

• Verschiebung in Richtung der y-Achse:

$$\text{Für } x = 0 \text{ gilt } -4\,776 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{50} x\right) + d = -4\,776 + d = 448; d = 5\,224$$

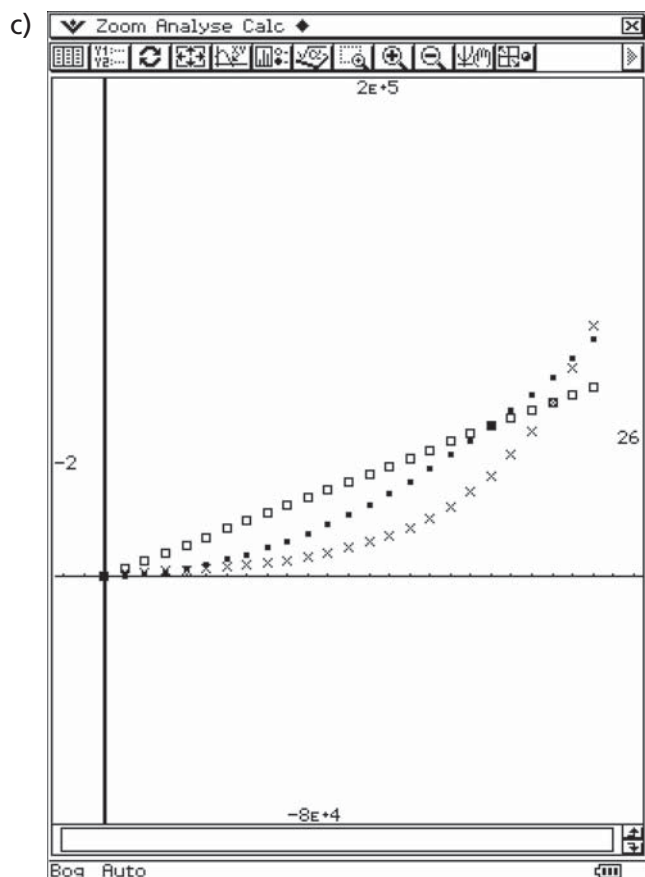
$$\text{Mit diesen Ergebnissen folgt: } f(x) = -4\,776 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{50} x\right) + 5\,224$$

b) $f(10) \approx 1\,360,13 \approx 1\,360$: Das Flugzeug befindet sich in etwa 1 360 m Höhe.

Arbeitsauftrag

a) Individuelle Lösung

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8
(I)	2 500	5 000	7 500	10 000	12 500	15 000	17 500	20 000
(II)	1 200	1 440	1 728	2 073,60	2 488,32	2 985,98	3 583,18	4 299,82
(III)	250	750	1 500	2 500	3 750	5 250	7 000	9 000
Monat	9	10	11	12	13	14	15	16
(I)	22 500	25 000	27 500	30 000	32 500	35 000	37 500	40 000
(II)	5 159,78	6 191,74	7 430,08	8 916,10	10 699,30	12 839,18	15 407,02	18 488,43
(III)	11 250	13 750	16 500	19 500	22 750	26 250	30 000	34 000
Monat	17	18	19	20	21	22	23	24
(I)	42 500	45 000	47 500	50 000	52 500	55 000	57 500	60 000
(II)	22 186,11	26 623,33	31 948	38 337,60	46 005,12	55 206,14	66 247,37	79 496,85
(III)	38 250	42 750	47 500	52 500	57 750	63 250	69 000	75 000



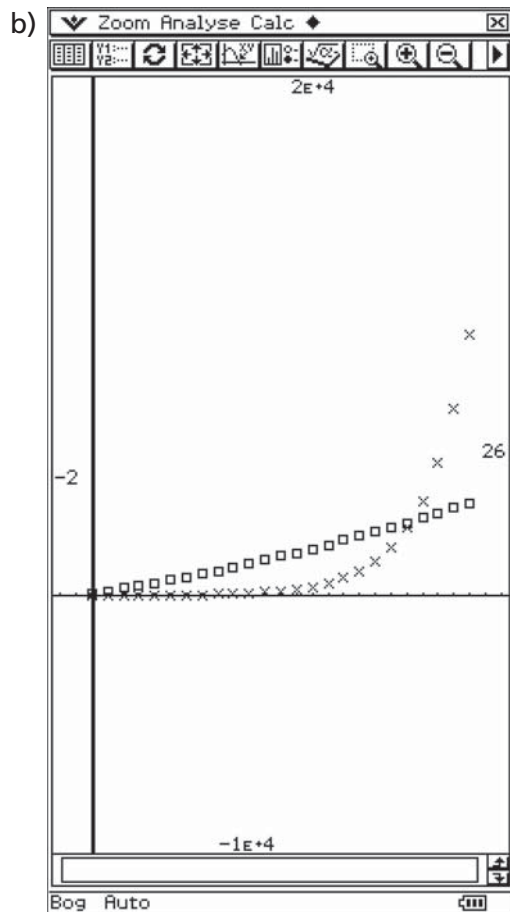
- d) (I) $f(x) = 2\,500 \cdot x$
 (II) $f(x) = 1\,000 \cdot 1,2^x$
 (III) $f(x) = 125 \cdot x^2 + 125 \cdot x$

- e) (I) 41 Monate
 (II) 26 Monate
 (III) 28 Monate

Aufgaben**1. Angebotsmodelle**

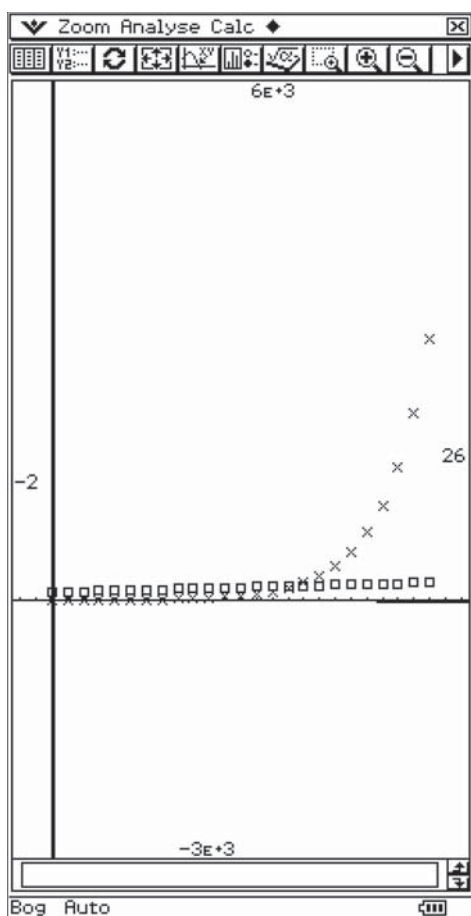
a)

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8
(I)	205	315	430	550	675	805	940	1080
(II)	2,40	4,36	7,10	10,95	16,32	23,85	34,39	49,15
Monat	9	10	11	12	13	14	15	16
(I)	1 225	1 375	1 530	1 690	1 855	2 025	2 200	2 380
(II)	69,81	98,74	139,23	195,93	275,30	386,42	541,99	759,78
Monat	17	18	19	20	21	22	23	24
(I)	2 565	2 755	2 950	3 150	3 355	3 565	3 780	4 000
(II)	1 064,70	1 491,58	2 089,21	2 925,89	4 097,24	5 737,14	8 033,00	11 247,20



c)

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8
(I)	105	110	115	120	125	130	135	140
(II)	1,4	1,96	2,74	3,84	5,38	7,53	10,54	14,76
Monat	9	10	11	12	13	14	15	16
(I)	145	150	155	160	165	170	175	180
(II)	20,66	28,93	40,50	56,69	79,37	111,12	155,57	217,80
Monat	17	18	19	20	21	22	23	24
(I)	185	190	195	200	205	210	215	220
(II)	304,91	426,88	597,63	836,68	1 171,36	1 639,90	2 295,86	3 214,20

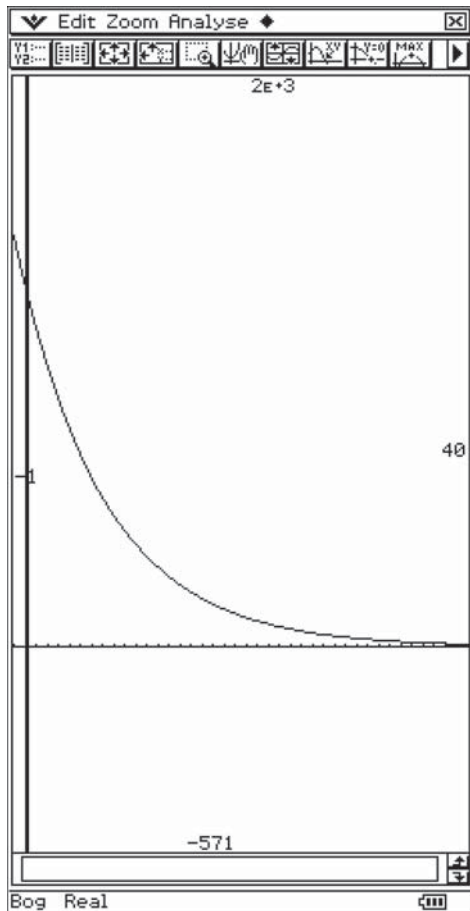


(I) $f(x) = 5x + 100$ lineare Funktion

(II) $f(x) = 1,4^x$ Exponentialfunktion

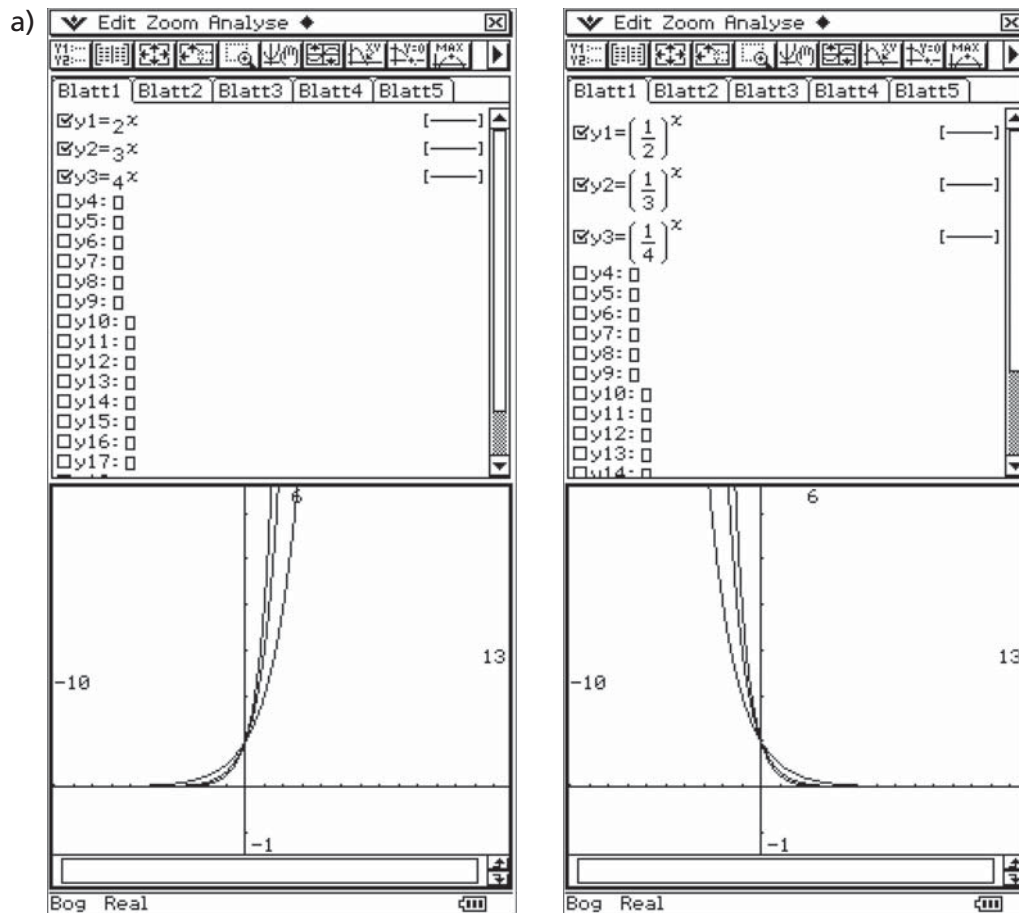
2. Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe

a) $p(h) = 1\,013 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{5,5}}$



- b) Zugspitze: 697,4 hPa
 Großglockner: 627,8 hPa
 Matterhorn: 576,1 hPa
 Mount Everest: 332,1 hPa

3. Allgemeine Exponentialfunktion



- b) Der Graph jeder Exponentialfunktion hat als Schnittpunkt mit der y-Achse: T (0 | 1).
- c) Der Graph jeder Exponentialfunktion hat keinen Schnittpunkt mit der x-Achse, kommt ihr aber beliebig nahe. Die x-Achse ist horizontale Asymptote des Graphen.
- d) Wertemenge jeder Exponentialfunktion: $W = \mathbb{R}^+$
- e) Für $a > 1$ werden für größere x-Werte die Funktionswerte immer größer, d. h. die Funktion ist streng monoton steigend.
Für $0 < a < 1$ werden für größere x-Werte die Funktionswerte immer kleiner, d. h. die Funktion ist streng monoton fallend.
- f) Man erhält den Graphen $g_a(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, indem man den Graphen $f_a(x) = a^x$ an der y-Achse spiegelt.
Es gilt allgemein: $\left(\frac{1}{a}\right)^x = (a^{-1})^x = a^{-x}$.

4. Veränderungen des Funktionsterms der Exponentialfunktion

- a) Der Graph der Funktion $y = 2^x$ ist um 3 nach oben verschoben.
- b) Der Graph der Funktion $y = 2^x$ ist um 3 nach links verschoben.
- c) Der Graph der Funktion $y = 2^x$ ist um den Faktor 8 in y-Richtung gestreckt bzw. um 3 nach links verschoben (siehe b)): $2^{x+3} = 2^3 \cdot 2^x = 8 \cdot 2^x$.
- d) Der Graph der Funktion $y = 2^x$ ist um 1 nach rechts verschoben.
- e) Der Graph der Funktion $y = 2^x$ ist um den Faktor $\frac{1}{3}$ in x-Richtung gestreckt.

Arbeitsauftrag

Wurzel	Logarithmus
Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $x^n = a$; $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}$.	Gesucht ist die Lösung der Gleichung $b^x = p$; $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $p \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$.
Die positive Lösung dieser Gleichung nennt man „n-te Wurzel“ und schreibt $x = \sqrt[n]{x}$.	Die Lösung dieser Gleichung nennt man „Logarithmus von p zur Basis b“ und schreibt $x = \log_b p$.
Beispiel 1: $x^5 = 10$; $G = \mathbb{R}$ $x = \sqrt[5]{10} \approx 1,58$	Beispiel 1: $5^x = 10$; $G = \mathbb{R}$ $x = \log_5 10 \approx 1,43$
Beispiel 2: $x^6 = 1$; $G = \mathbb{R}$ $x = \pm \sqrt[6]{1} = \pm 1$	Beispiel 2: $6^x = 1$; $G = \mathbb{R}$ $x = \log_6 1 = 0$
Beispiel 3: $x^4 = 25$; $G = \mathbb{R}$ $x = \pm \sqrt[4]{25} = \pm \sqrt{5}$	Beispiel 3: $4^x = 512$; $G = \mathbb{R}$ $x = \log_4 512 = 4,5$
Steht die Variable x als Basis, so hilft die Wurzel.	Steht die Variable x als Exponent, so hilft der Logarithmus.

Exponentialgleichung	Lösung	Auf Tausendstel gerundete Lösung
$10^x = 730$	$x = \log_{10} 730$	$x \approx 2,863$
$20^x = 5$	$x = \log_{20} 5$	$x \approx 1,861$
$a^x = a$; $a \in \mathbb{R}^+$	$x = \log_a a$	$x = 1$ (exakte Lösung)
$\frac{1}{3} \cdot 5^{x-1} = 15$; $5^{x-1} = 45$; $5^x \cdot 5^{-1} = 45$; $5^x = 225$	$x = \log_5 225$	$x \approx 3,365$

Aufgaben**1. Spezielle Logarithmen**

a) $\log_b b = 1$

b) $\log_b 1 = 0$

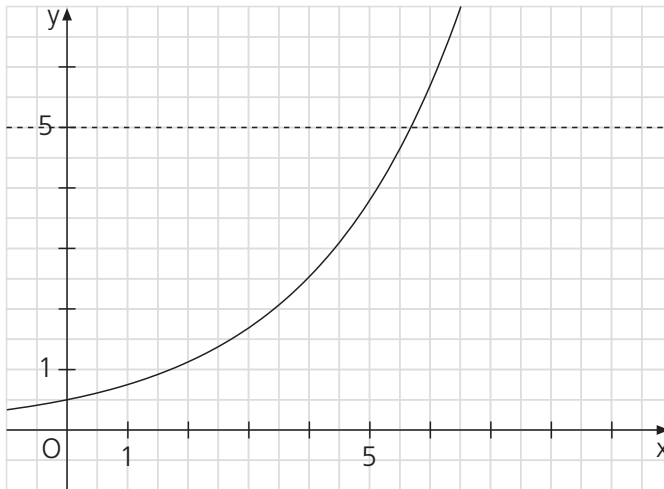
c) $\log_b b^x = x$

d) $b^{(\log_b(x))} = x$

e) $\log_b \frac{1}{b} = -1$

f) $\log_{\frac{1}{b}} b = -1$

2. Graphische Lösung



Graphische Lösung aus Diagramm: x-Koordinate des Schnittpunkts $x \approx 5,65$

CAS-Lösung: solve $\left(\frac{1}{2} \cdot (1,5)^x = 5\right)$; $x \approx 5,67887\dots$

3. Rechengesetze mit Logarithmen

Durch geeignete Beispielrechnungen und durch Verwendung des CAS erkennt man schnell die vier richtigen Rechengesetze.

(zum Beispiel: solve($\log_x(5 \cdot 10) = \log_x 5 + \log_x 10$) liefert Allgemeingültigkeit)

$$\log_b pq = \log_b p + \log_b q$$

$$\log_b p - \log_b q = \log_b p : q$$

$$\log_b p^s = s \cdot \log_b p$$

$$\log_b p = \left(\frac{\log_a p}{\log_a b} \right)$$

4. Natürlicher Logarithmus ln

Der CAS kennt und verwendet häufig den sogenannten natürlichen Logarithmus ln, den Sie genauer in der 11. Klasse kennen lernen werden.

a) solve(ln)[$x = 1$]; $x = 2,718281828\dots$

b) Hier wird das Rechengesetz $\log_b p = \left(\frac{\log_a p}{\log_a b} \right)$ verwendet. Einige CAS geben in den Ergebnisse alle Logarithmen mithilfe des ln an, da nach obiger Formel jeder Logarithmus durch eine andere Basis ersetzt werden kann. $x = \frac{\ln 5}{\ln 3}$ bedeutet dann $x = \log_3 5$.

5. Halbwertszeit

a) $c = c_0 \cdot 0,8^x$; $0,5 \cdot c_0 = c_0 \cdot 0,8^x$; $0,5 = 0,8^x$; $x = \log_{0,8} 0,5 \approx 3,106$

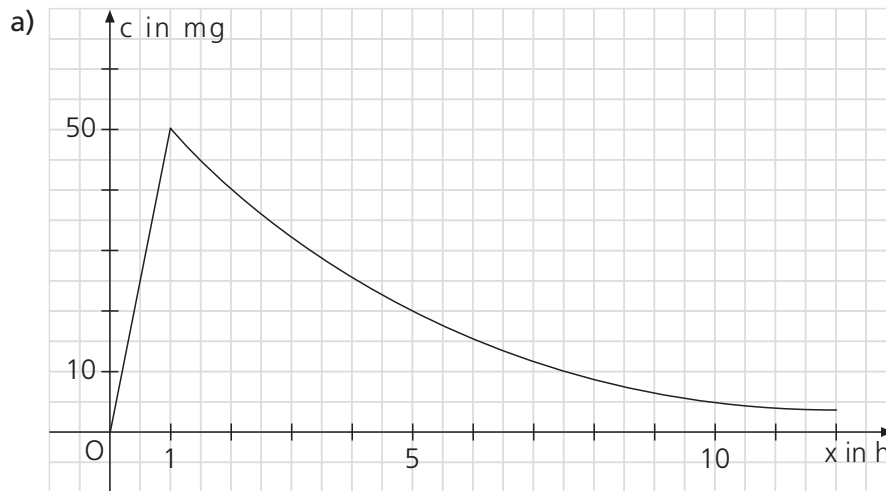
b) $N = N_0 \cdot b^x$; $(10^{24} - 10^{19}) = 10^{24} \cdot b^x$; $b = 0,99999$

$0,5 \cdot N_0 = N_0 \cdot (0,99999)^x$; $0,5 = (0,99999)^x$; $x = \log_{0,99999} 0,5 = 69\,314,37148 \approx 69\,300$

c) $500 = 750 \cdot b^{0,5}$; $b = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

$375 = 750 \cdot \left(\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)^x$; $x = \log_{\frac{1}{3}\sqrt{6}} 0,5 \approx 3,419$

6. Abbau von Koffein im Blut



b) Es sind zwei Zeitpunkte zu berechnen.

Die Gerade wird durch die Funktion $f: f(x) = 50 \cdot x$; $D_f = [0; 1]$ beschrieben,
 der Graph des exponentiellen Abfalls durch die Funktion $g: g(x) = 50 \cdot (0,5)^{\frac{x-1}{3}}$; $D_g = [1; \infty[$.

1. Zeitpunkt: $\text{solve}(f(x) = 1,0)$; $x = 0,02$

2. Zeitpunkt: $\text{solve}(g(x) = 1,0)$; $x = 6 \cdot \log_2 5 + 4 \approx 17,931$

7. pH-Wert

a) $\text{pH} = -\log_{10} c = 7$; $\log_{10} c = -7$; $c = 10^{-7}$

b) $\text{pH} = -\log_{10} 1,6 \cdot 10^{-3}$; $\text{pH} \approx 2,80$

c) $\text{pH}_{\text{alt}} = -\log_{10} c$

$\text{pH}_{\text{neu}} = -\log_{10} 0,5 \cdot c$; $\text{pH} = -\log_{10} 0,5 - \log_{10} c = \log_{10} 2 + \text{pH}_{\text{alt}}$

Der pH-Wert ändert sich um den Summanden $\log_{10} 2 \approx 0,301$.

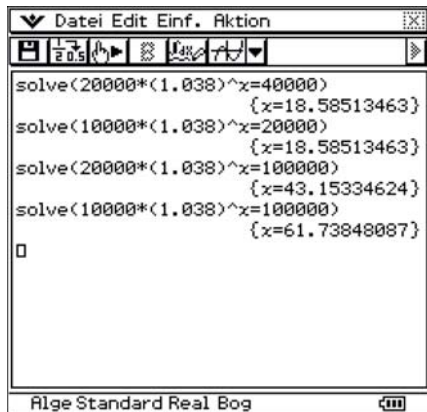
8. Tuberkulosebakterien

$5N_0 = N_0 \cdot b^{48}$; $5 = b^{48}$; $b = \sqrt[48]{5}$

$2 \cdot N_0 = N_0 \cdot (\sqrt[48]{5})^x$; $2 = (\sqrt[48]{5})^x$; $x = \log_{\sqrt[48]{5}} 2 \approx 20,672$

9. Sparwillen

- a) Herr Meier: $20\,000 \cdot 1,038^x = 40\,000$; $x = 18,6$
 Frau Huber: $10\,000 \cdot 1,038^x = 20\,000$; $x = 18,6$
 Das Geld hat sich bei beiden nach etwa 18,6 Jahren verdoppelt.
- b) Herr Meier: $20\,000 \cdot 1,038^x = 100\,000$; $x = 43,2$
 Frau Huber: $10\,000 \cdot 1,038^x = 100\,000$; $x = 61,7$
 Herr Meier muss etwa 43,2 Jahre warten, Frau Huber etwa 61,7 Jahre bis ihr Kapital 100 000 € beträgt.



- c) Herr Meier: $20\,000 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{25} = 100\,000$; $x = 6,649$
 Der Zinssatz müsste etwa 6,7% betragen.
- d) **Anlagesumme 30 000 €:**
 Verdopplung: 18,6 Jahre
 Sparziel 100 000 €: 32,3 Jahre
 Zinssatz: 5,0%
- Anlagesumme 15 000 €:**
 Verdopplung: 18,6 Jahre
 Sparziel 100 000 €: 50,9 Jahre
 Zinssatz: 7,9%

10. Hungersnot

Geburten: $\frac{250\,000}{1\,000} \cdot 63 = 157\,500$
 Sterbefälle: $\frac{2\,500\,000}{100} \cdot 3 = 75\,000$
 Jährlicher Bevölkerungszuwachs: $157\,500 - 75\,000 = 82\,500$
 Dies entspricht einer Zuwachsrate von 3,3%
 Wachstumsfunktion: $B(x) = 2\,500\,000 \cdot 1,033^x$
 $2\,500\,000 \cdot 1,033^x = 4\,000\,000$; $x = 14,5$
 Nach etwa 14,5 Jahren brechen Hungersnöte aus.

11. Seerosen

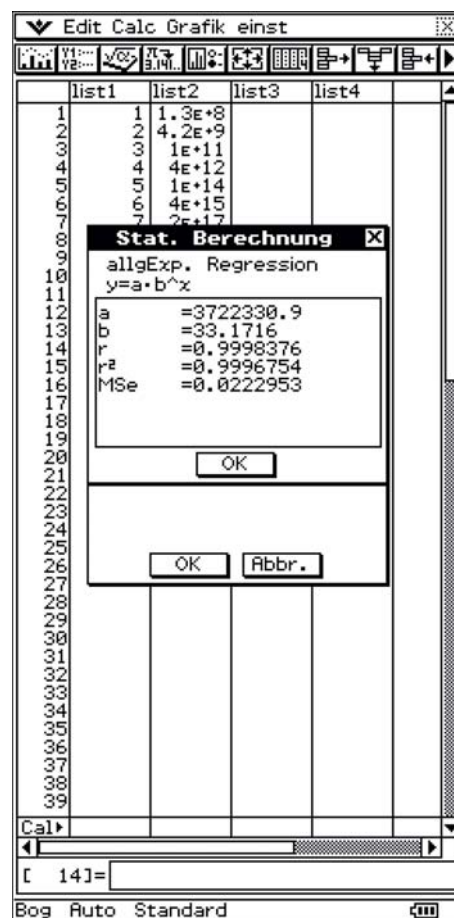
- a) Alpha: $0,01 \cdot 1,02^t = 900$; $t = 576$ Tage
 Beta: $0,01 \cdot 1,03^t = 900$; $t = 386$ Tage
- b) Alpha: $0,01 \cdot 1,02^t = 450$; $t = 541$ Tage
 Beta: $0,01 \cdot 1,03^t = 450$; $t = 362$ Tage
- c) $0,01 \cdot (1,02^t + 1,03^t) = 900$; $t = 385$ Tage
 $0,01 \cdot (1,02^t + 1,03^t) = 450$; $t = 361$ Tage

12. Einwohnerzahlen

- a) $50\,000 \cdot 1,04^t = 60\,000 \cdot 1,03^t$; $t = 19$ Jahre
 b) $50\,000 \cdot 1,03^t = 60\,000 \cdot 1,04^t$; $t = -19$ Jahre
 Das Ereignis liegt in der Vergangenheit.

13. Erdbeben

- a) x = Stärke auf der Richterskala; y = freigesetzte Energie
Die Richterskala ist wegen des starken Wachstums der Energie logarithmisch.
- b) individuelle Lösung
- c) Stromverbrauch in Deutschland im Jahr 2009:
 $512 \cdot 10^9 \text{ kWh} = 1,8432 \cdot 10^{18} \text{ J}$
 $3\,722\,330,963 \cdot (33,171600883)^x = 1,8432 \cdot 10^{18}$; $x = 7,7$
- d) $3\,722\,330,963 \cdot (33,171600883)^x = 3,9 \cdot 10^{24}$; $x = 11,8$



14.Exponentialfunktion und Logarithmus

a) $y = a \cdot b^x$

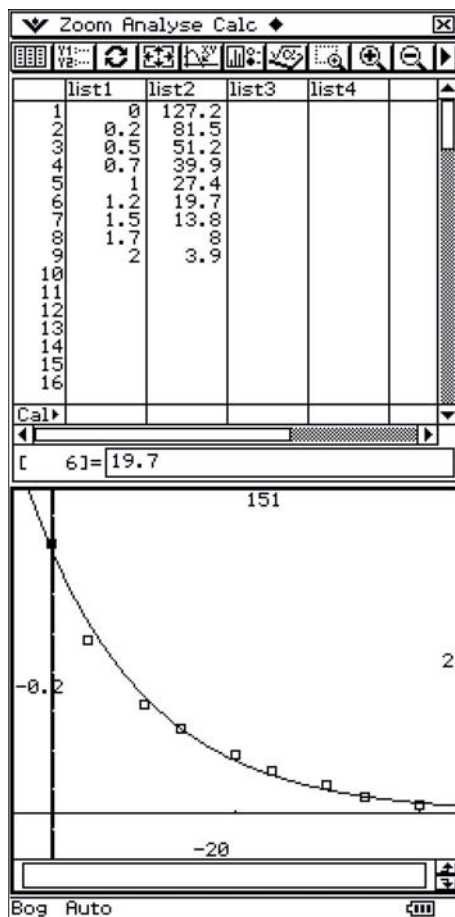
$\lg y = \lg (a \cdot b^x)$

$\lg y = \lg a + \lg b^x$

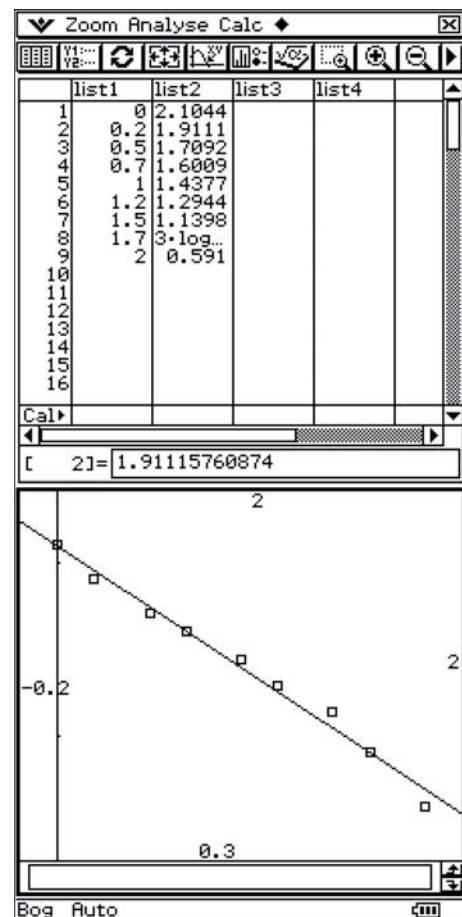
$\lg y = \lg a + x \cdot \lg b$

b) Funktionstyp: Exponentialfunktion $y = a \cdot b^x$

c) Funktionstyp: Lineare Funktion



Formel durch exponentielle Regression:
 $y \approx 125 \cdot (0,199)^x$



Formel durch lineare Regression bei
 logarithmischer Auftragung:
 $y \approx -0,701 \cdot x + 2,10$

d) $\lg b = -0,71$; $b = 0,199$

$\lg a = 2,096$; $a = 124,738$

Im Rahmen von Messungenauigkeiten ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit Teilaufgabe a).

1. Lineares und exponentielles Wachstum

- a) $f(x) = a \cdot b^x$; $f(1) = 5$: $a \cdot b^1 = 5$; $a = \frac{5}{b}$
 $f(2) = 8$: $a \cdot b^2 = 8$; $\left(\frac{5}{b}\right) \cdot b^2 = 8$; $5b = 8$; $b = 1,6$; $a = 3,125$
 $f(x) = 3,125 \cdot 1,6^x$
- b) $f(x) = mx + t$; $f(1) = 5$: $m \cdot 1 + t = 5$; $t = 5 - m$
 $f(2) = 8$: $m \cdot 2 + t = 8$; $2m + (5 - m) = 8$; $m = 3$; $t = 2$
 $f(x) = 3x + 2$

2. Flummi-Sprünge

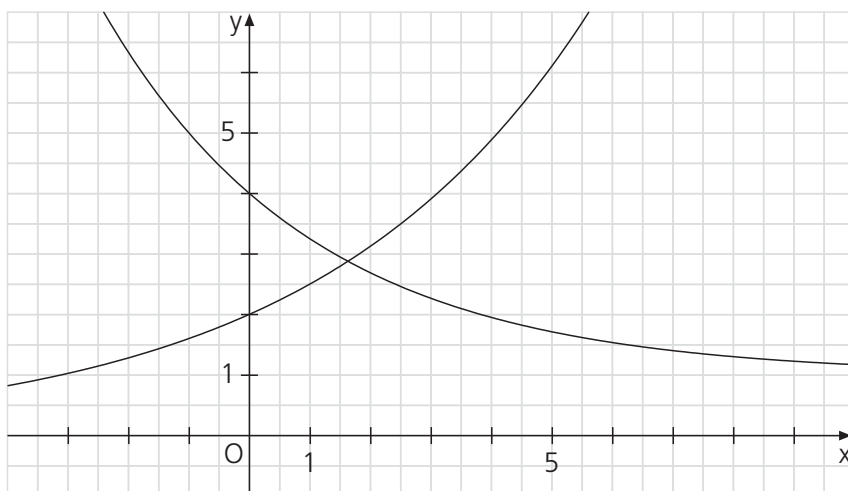
- a) $h(x) = 2,0 \text{ m} \cdot 0,8^x$
- b) $h(x) < 1,0 \text{ m}$: $2,0 \text{ m} \cdot 0,8^x > 1,0 \text{ m}$; $0,8^x < 0,5 \xrightarrow{\text{CAS}} x > 3,106...$
 Ab dem vierten Aufprall erreicht der Flummi nicht mehr 1,0 Meter.

3. Logarithmusgleichung

Der Logarithmus ist nur definiert, wenn das Argument positiv ist.
 Daher muss gelten: $x - 3 > 0$ und $x + 3 > 0$; $x > 3$ und $x > -3$.
 Insgesamt ist also für $x > 3$ die Gleichung definiert: $G =]3; +\infty[$.
 $\log_3(x - 3) + \log_3(x + 3) = \log_3(x - 3)(x + 3) = \log_3(x^2 - 9) = 1$; $x^2 - 9 = 8^1$; $x^2 = 17$
 Da $x = -\sqrt{17}$ nicht in der Grundmenge G liegt, ist die Lösung $x = \sqrt{17}$.
Hinweis: Mit dem CAS kann die Gleichung per solve-Befehl direkt gelöst werden.

4. Alter einer Mumie

$0,5 \cdot N_0 = N_0 \cdot b^{5730}$; $b = (0,5)^{\frac{1}{5730}}$
 Wenn 42,8% der Atome zerfallen sind, sind noch 57,2% der Atome vorhanden.
 $0,572 \cdot N_0 = N_0 \cdot \left((0,5)^{\frac{1}{5730}}\right)^x \xrightarrow{\text{CAS}} x \approx 4\,617,88$
 Die Mumie ist ca. 4 600 Jahre alt.

5. Graphische Lösung einer Exponentialgleichung

x-Koordinate des Schnittpunktes ist Lösung der Gleichung: $x \approx 1,65$.

6. Fehlersuche

$$\log_b pq = \log_b p + \log_b q$$

$$\log_b p - \log_b q = \log_b p : q$$

$$\log_b p^s = s \cdot \log_b p$$

$$\log_b p = \left(\frac{\log_a p}{\log_a b} \right)$$

$3 \cdot \log_7 (7x^2) = \log_{10} (8) - \log_{10} x$	
$\log_7 (7x^2)^2 = \log_{10} \left(\frac{8}{x} \right)$	linke Seite: Rechengesetz (3) rechte Seite: Rechengesetz (2)
$\log_7 (343x^6) = \frac{\log_7 \left(\frac{8}{x} \right)}{\log_7 10}$	rechte Seite: Rechengesetz (4)
$343x^6 = \frac{8}{10}$	Fehler: Hier kann der Logarithmus nicht einfach wegge- lassen werden. Das würde nur funktionieren, wenn auf der rechten Seite $\log_7 \frac{8}{10}$ stehen würde.
$3 \cdot 430x^7 = 8$ $x = \sqrt[7]{\frac{4}{1 \cdot 715}}$	Folgefehler; richtige Auflösungen

7. Beweis oder Gegenbeispiel

a) CAS-Eingabe: $\log_{b^4} a - \frac{1}{4} \cdot \log_b a$ liefert stets 0 für alle a, b.
 Die Behauptung ist wahr.

b) Funktionsterm einer Exponentialfunktion: $f(x) = a \cdot b^x$
 $\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{a \cdot b^{x+1}}{a \cdot b^x} = \frac{1 \cdot b^x \cdot b^1}{a \cdot b^x} = b^1 = b = \text{const.}$
 Die Behauptung ist wahr.

8. Ungleichungen

Jeweils Lösungen ermitteln durch solve-Befehl:

- a) $\text{solve}(3^x < 60); x < \log_3 (60); I = [-\infty; \log_3 60[$
- b) $\text{solve}(2^x \geq 80); x \geq \log_2 (80); I = [\log_2 80; +\infty[$
- c) $\text{solve}(5^x \leq 0,02); x \leq \log_5 (0,02); I =]-\infty; \log_5 0,02]$
- d) $\text{solve}(3,2^x > \frac{1}{3}); x > \log_{3,2} (\frac{1}{3}); I =]\log_{3,2} \frac{1}{3}; +\infty[$

Arbeitsauftrag

- a) Bei den relativen Häufigkeiten ergeben sich individuelle Ergebnisse, die jedoch nahe an den Wahrscheinlichkeitswerten liegen sollten.

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten:

A tritt ein bei den Zahlen 2; 3; 5; 7 und 11.

B tritt ein bei den Zahlen 1; 3; 5; 7; 9 und 11.

C tritt ein bei den Zahlen 10; 11 und 12.

D tritt ein bei der Zahl 3.

Da ein Laplace-Experiment vorliegt, ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten eines Ereignisses aus

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigsten Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}.$$

Ereignis	A	B	C	D
Wahrscheinlichkeit	$\frac{5}{12} \approx 41,7\%$	$\frac{6}{12} = 50\%$	$\frac{3}{12} = 25\%$	$\frac{1}{12} \approx 8,3\%$

- b) Wie bei a) ergeben sich bei den relativen Häufigkeiten individuelle Ergebnisse, die nahe an den Wahrscheinlichkeitswerten liegen sollten.

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten:

Es ist also 1 bis 6 eingetreten.

Unter dieser Voraussetzung tritt A nur bei den Zahlen 2, 3 und 5 ein.

Unter dieser Voraussetzung tritt B nur bei den Zahlen 1, 3 und 5 ein.

Unter dieser Voraussetzung tritt C nicht mehr ein.

Unter dieser Voraussetzung tritt D weiter nur bei der Zahl 3 ein.

Die Anzahl der möglichen Ergebnisse ist nun 6, da 7 bis 12 als mögliche Ergebnisse wegfallen.

Ereignis	A	B	C	D
Wahrscheinlichkeit, wenn 1 bis 6 eingetreten ist	$\frac{3}{6} = 50\%$	$\frac{3}{6} = 50\%$	$\frac{0}{6} = 0\%$	$\frac{1}{6} \approx 16,7\%$

Die Wahrscheinlichkeiten bei A und D steigen, also freuen sich diese Spieler über diese Information.

Bei B ändert sich die Wahrscheinlichkeit nicht, also ist diese Information für Bernd unerheblich.

Chantal ärgert sich über Eriks Information, denn sie kann nun nicht mehr gewinnen.

- c) Die Quotienten ergeben genau die Werte der bedingten Wahrscheinlichkeit.

$\frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{12}}{\frac{1}{2}} = 50\%$	$\frac{P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{12}}{\frac{1}{2}} = 50\%$
$\frac{P(C \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{0}{12}}{\frac{1}{2}} = 0\%$	$\frac{P(D \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} \approx 16,7\%$

Unter der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_E(A)$ versteht man die Wahrscheinlichkeit von A, wenn das Ereignis E bereits eingetroffen ist.

Man berechnet sie mit: $P_E(A) = \frac{P(E \cap A)}{P(E)}.$

Aufgaben

1. Spiel mit zwei sechsseitigen Würfeln anstelle eines Dodekaeders

Augenanzahl	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$P(A) = P(2; 3; 5; 7; 11) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{15}{36} \approx 41,7\%$$

$$P(B) = P(1; 3; 5; 7; 9; 11) = \frac{0}{36} + \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{18}{36} = 50\%$$

$$P(C) = P(10; 11; 12) = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} \approx 16,7\%$$

$$P(D) = P(3) = \frac{2}{36} \approx 5,6\%$$

Die relativen Häufigkeiten sollten um den Wert der Wahrscheinlichkeiten liegen.

Ereignis	A	B	C	D
Wahrscheinlichkeit	$\frac{15}{36} \approx 41,7\%$	$\frac{18}{36} = 50\%$	$\frac{6}{36} \approx 16,7\%$	$\frac{2}{36} \approx 5,6\%$
Wahrscheinlichkeit, wenn der rote Würfel eine Sechs zeigt	$\frac{2}{6} \approx 33,3\%$	$\frac{3}{6} = 50\%$	$\frac{3}{6} = 50\%$	$\frac{0}{6} = 0\%$

b) E = „Roter Würfel zeigt eine 1“

Wenn der rote Würfel eine 6 zeigt, dann sind nur noch die Zahlen von 7 bis 12 möglich, wobei jede dieser Zahlen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ hat.

A tritt ein, wenn der schwarze Würfel eine 1 oder eine 5 zeigt.

B tritt ein, wenn der schwarze Würfel eine 1, 3 oder 5 zeigt.

C tritt ein, wenn der schwarze Würfel eine 4, 5 oder 6 zeigt.

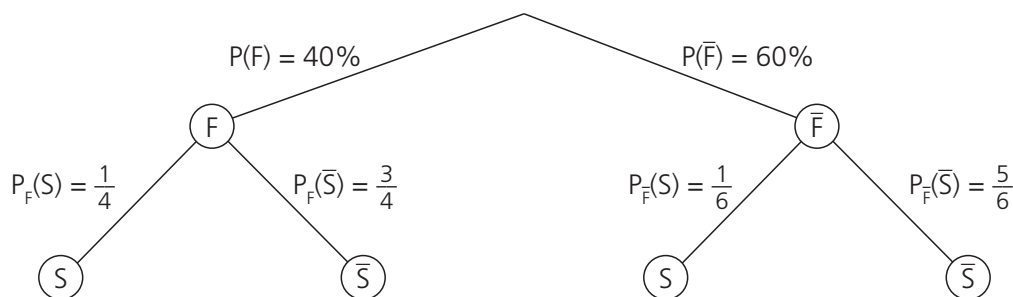
D, also dass die Augensumme 3 ist, kann nicht mehr eintreten.

2. Umfrage in einer Schulklasse

a)

	F	$\bar{F}$	
S	10%	10%	20%
$\bar{S}$	30%	50%	80%
	40%	60%	100%

b)

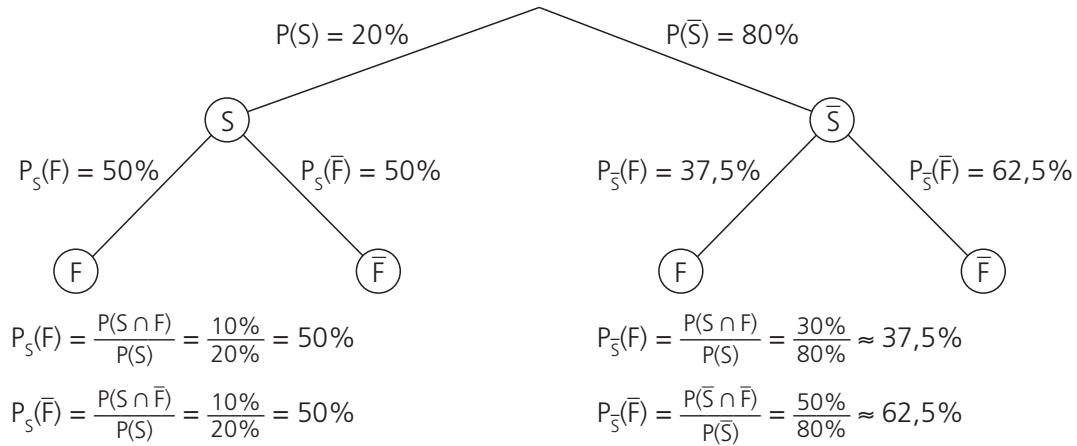


$$P_F(S) = \frac{P(F \cap S)}{P(F)} = \frac{10\%}{40\%} = 25\%$$

$$P_F(\bar{S}) = \frac{P(F \cap \bar{S})}{P(F)} = \frac{30\%}{40\%} = 75\%$$

$$P_{\bar{F}}(S) = \frac{P(\bar{F} \cap S)}{P(\bar{F})} = \frac{10\%}{60\%} \approx 16,7\%$$

$$P_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{P(\bar{F} \cap \bar{S})}{P(\bar{F})} = \frac{50\%}{60\%} \approx 83,3\%$$



Die bedingten Wahrscheinlichkeiten stehen auf dem zweiten Ast.

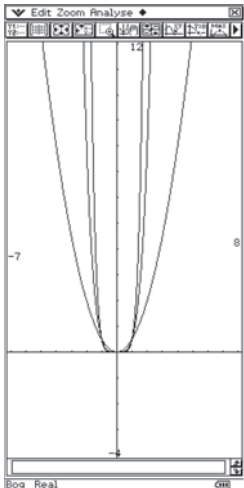
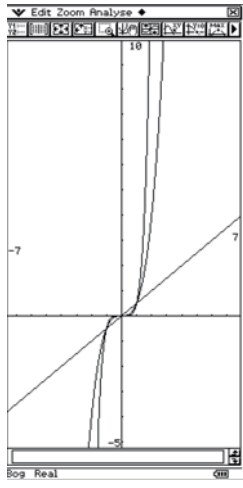
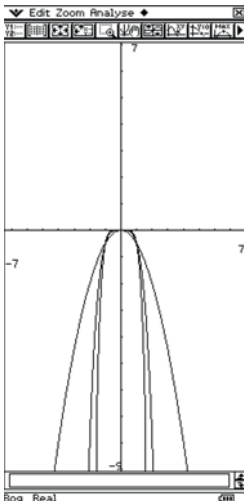
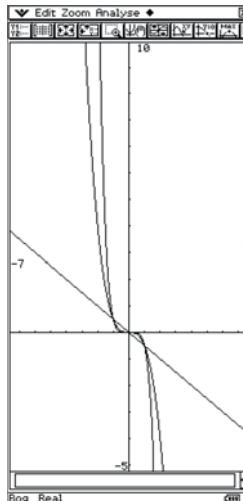
3. Drei-mindestens-Aufgabe

$$P(\text{mindestens eine 12}) = 1 - P(\text{keine 12}) = 1 - \left(\frac{11}{12}\right)^n \geq 0,95$$

Solve-Befehl: $n \geq 34,429\dots$

Man muss mindestens 35-mal werfen.

Arbeitsauftrag

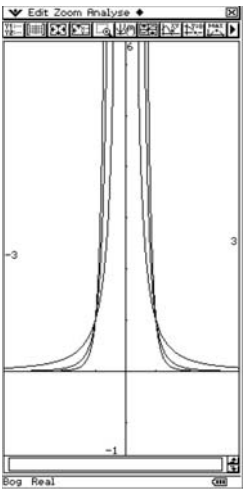
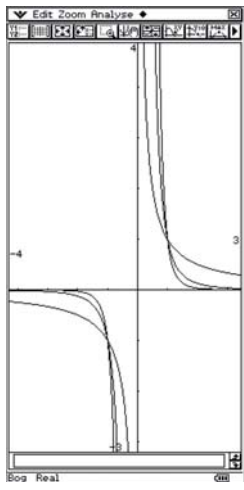
	n gerade	n ungerade		
a = 0,5				
	Wertemenge	$W = [0; \infty[$	Wertemenge	$W = \mathbb{R}$
	Nullstelle	$x = 0$	Nullstelle	$x = 0$
	Symmetrie	zur y-Achse	Symmetrie	zum Ursprung
	Gemeinsame Punkte der Graphen	$(0 0)$; $(1 1)$; $(-1 1)$	Gemeinsame Punkte der Graphen	$(-1 -1)$; $(0 0)$; $(1 1)$
	G_f verläuft durch die Quadranten	I und II	G_f verläuft durch die Quadranten	I und III
	Steigungsverhalten	fallend in $]-\infty; 0]$ steigend in $[0; \infty[$	Steigungsverhalten	steigend in ganz $\mathbb{R}$
a = -0,5				
	Wertemenge	$W = [0; \infty[$	Wertemenge	$W = \mathbb{R}$
	Nullstelle	$x = 0$	Nullstelle	$x = 0$
	Symmetrie	zur y-Achse	Symmetrie	zum Ursprung
	Gemeinsame Punkte der Graphen	$(0 0)$; $(-1 -1)$; $(1 -1)$	Gemeinsame Punkte der Graphen	$(-1 1)$; $(0 0)$; $(1 -1)$
	G_f verläuft durch die Quadranten	III und IV	G_f verläuft durch die Quadranten	II und IV
	Steigungsverhalten	steigend in $]-\infty; 0]$ fallend in $[0; \infty[$	Steigungsverhalten	fallend in ganz $\mathbb{R}$

Aufgaben

1. Einfluss des Vorfaktors a

Je größer $|a|$, desto steiler ist der Funktionsgraph. Für negative Werte von a wird der Funktionsgraph im Vergleich zum Funktionsgraph für positive Werte von a an der x-Achse gespiegelt.

2. Negative Exponenten

n gerade	n ungerade
	
steigend in $]-\infty; 0[$; fallend in $]0; \infty[$ keine Nullstelle Wertmenge $W = \mathbb{R}^+$ Symmetrie zur y-Achse gemeinsame Punkte: $(-1 \mid 1)$; $(1 \mid 1)$	fallend in ganz D_f keine Nullstelle Wertmenge $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ symmetrisch zum Ursprung gemeinsame Punkte: $(-1 \mid -1)$; $(1 \mid 1)$

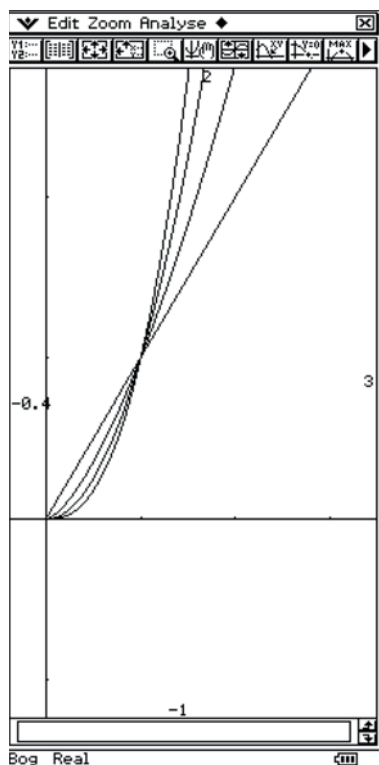
3. „Schiffe versenken mit Potenzfunktionen“

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	$\mathbb{R}$	punktsymm. zum Ursprung	2	I und III	384	steigend	-3	ja
B	$\mathbb{R}$	punktsymm. zum Ursprung	2	II und IV	-64	fallend	2	nein
C	$]-\infty; 0]$	achsensymm. zur y-Achse	1	III und IV	-3,2	steigend und fallend	-0,2	ja
D	$\mathbb{R}$	punktsymm. zum Ursprung	2	I und III	0,8	fallend	-0,1	ja
E	$]-\infty; 0]$	achsensymm. zur y-Achse	1	III und IV	-192	steigend und fallend	-3	ja
F	$[0; +\infty[$	achsensymm. zur y-Achse	3	I und II	8	steigend und fallend	0,5	nein
G	$\mathbb{R}$	punktsymm. zum Ursprung	2	II und IV	-3,2	fallend	0,1	nein
H	$[0; +\infty[$	achsensymm. zur y-Achse	3	I und II	1280	steigend und fallend	5	nein

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	II und IV	ja	3,2	$\mathbb{R}$	-0,4	fallend	2	punktsymm. zum Ursprung
B	I und III	ja	-64	$\mathbb{R}$	2	steigend	2	punktsymm. zum Ursprung
C	II und IV	nein	384	$\mathbb{R}$	-3	fallend	2	punktsymm. zum Ursprung
D	I und II	nein	1 024	$[0; +\infty[$	4	steigend und fallend	3	achsensymm. zur y-Achse
E	I und II	ja	0,4	$[0; +\infty[$	0,1	steigend und fallend	3	achsensymm. zur y-Achse
F	I und III	ja	-4	$\mathbb{R}$	0,5	steigend	2	punktsymm. zum Ursprung
G	III und VI	ja	-3,2	$]-\infty; 0]$	-0,2	steigend und fallend	1	achsensymm. zur y-Achse
H	III und VI	ja	-384	$]-\infty; 0]$	-6	steigend und fallend	1	achsensymm. zur y-Achse

4. Reelle Exponenten

Je größer r , desto steiler verläuft der Funktionsgraph.



Arbeitsauftrag

- a) Laura verwendet das sogenannte Bisektionsverfahren. Sie prüft, wann ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte stattfindet, hier zwischen 2 und 3. Dann berechnet sie den Durchschnitt dieser beiden Werte, hier also 2,5. Dann berechnet sie den Funktionswert von der Mitte des Intervalls, hier ergibt sich für 2,5 der Wert 2,125. Ist der Wert positiv, wird der Durchschnitt mit dem Wert gebildet, der das letzte Mal einen negativen Funktionswert lieferte, hier also 2. Ist der Wert negativ, wird analog mit dem Wert verglichen, der zuletzt einen positiven Funktionswert lieferte. Anschließend geht das Verfahren weiter. Gregor prüft für die einzelnen Dezimalstellen der Reihe nach, wann ein Vorzeichenwechsel stattfindet, indem er bei der gesuchten Dezimalstelle mit 0 startet und das Verfahren dann bis zum Vorzeichenwechsel mit Schrittweite 1 fortführt.

b)

▼ Datei Edit Graph Aktion			
	A	B	C
1	x	$x^3 - 2x^2 - 1 = 0$	
2	1	-2	
3	2	-1	
4	3	8	
5	2.5	2.125	
6	2.25	0.265625	
7	2.125	-0.435546875	
8	2.1875	-0.102783203	
9	2.21875	0.0768737793	
10	2.203125	-0.014080048	
11	2.2109375	0.0311141014	
12	2.2070313	8.4465146E-3	
13			
14			

- c) $\text{solve}(x^3 - 2x^2 - 1 = 0)$ liefert die Lösung $x = 2,20556943$. Also liefert die Zeile 12 die Lösung auf zwei Dezimalen genau.
- d) $\text{solve}(0.4x^3 - 2x + 1 = 0)$ liefert die Lösung $x = 0.5297299007$ im Intervall $[0; 1]$.

▼ Datei Edit Graph Aktion			
	A	B	C
1	x	$0.4x^3 - 2x + 1 = 0$	
2	0	1	
3	1	-0.6	
4	0.5	0.05	
5	0.75	-0.33125	
6	0.625	-0.15234375	
7	0.5625	-0.053808594	
8	0.53125	-2.526855E-3	
9	0.515625	0.0235855103	
10	0.5234375	0.0104909897	
11	0.52734375	3.9724112E-3	
12	0.529296875	7.2035491E-4	
13			

- e) Der Algorithmus würde nicht abbrechen, wenn es keine Lösung gibt wie etwa bei $x^2 + 1 = 0$. Eng beieinander liegende Nullstellen könnten nur als eine Nullstelle ausgegeben werden. Am Beispiel im Arbeitsauftrag ist erkennbar, dass das Verfahren nicht immer das schnellste sein muss. Gregors Verfahren gelangt in diesem Falle schneller zum Ergebnis.

Aufgaben

1. Lösungsformeln

- a) Ersetzt man in der Lösungsformel für quadratische Gleichungen die üblich bezeichneten Parameter mit $a = 1$, $b = p$ und $c = q$, so ergibt sich: $f(p, q) = -0,5p + 0,5(p^2 - 4q)^{0,5}$.
Möglich wäre auch die Lösung mit dem Minuszeichen: $f(p, q) = -0,5p - 0,5(p^2 - 4q)^{0,5}$.
- b) Wenn zwei Werte für $f(p, q)$ herauskommen würden, würde keine Funktion mehr vorliegen, weil bei einer Funktion jedem x nur ein y zugeordnet werden kann.
- c) *define* $f(p, q) = -0,5p + 0,5(p^2 - 4q)^{0,5}$
 $f(3, -3) = 0,5(\sqrt{21} - 3)$ $f(-7, 2) = 0,5(\sqrt{41} + 7)$
- d) Bedingung: Wenn unter der Wurzel (bei der Lösungsformel die sogenannte Diskriminante) etwas Negatives steht, dann ergibt sich keine Lösung, d. h. $p^2 - 4q < 0$, also zum Beispiel $x^2 + 2x + 2 = 0$, denn dann ist $4 - 8 = -4 < 0$.

2. Substitution

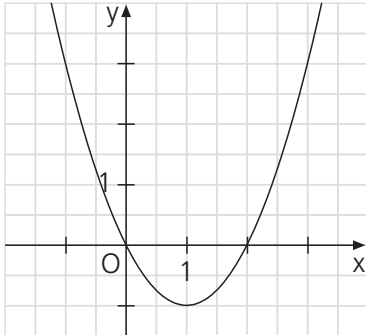
- a) $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$
 $(x^2)^2 - 2(x^2) - 1 = 0$
 Substitution: $x^2 := u$
 $u^2 - 2u - 1 = 0$
 $u_1 = 1 - \sqrt{2}$; $u_2 = 1 + \sqrt{2}$
 Resubstitution: $u = x^2$
 Lösung 1: $x^2 = 1 - \sqrt{2}$; $x = (1 - \sqrt{2})^{0,5}$
 Lösung 2: $x^2 = 1 + \sqrt{2}$; $x = (1 + \sqrt{2})^{0,5}$
- b) $x^6 - x^3 - 1 = 0$
 $(x^3)^2 - (x^3) - 1 = 0$
 Substitution: $x^3 := u$
 $u^2 - u - 1 = 0$
 $u_1 = 0,5(1 + \sqrt{5})$; $u_2 = 0,5(1 - \sqrt{5})$
 Resubstitution: $u = x^3$
 Lösung 1: $x^3 = 0,5(1 + \sqrt{5})$; $x = (0,5(1 + \sqrt{5}))^{\frac{1}{3}}$
 Lösung 2: $x^3 = 0,5(1 - \sqrt{5})$; $x = (0,5(1 - \sqrt{5}))^{\frac{1}{3}}$
- c) $x^9 - x^3 - 1 = 0$
 Substitution: $x^3 := u$
 $u^3 - u - 1 = 0$
 $u = 1,32$ (gerundet)
 Resubstitution: $u = x^3$
 $x^3 = 1,32$
 $x = 1,10$ (gerundet)

3. Polynomdivision

- a) $R = 12x - 2$. Zu dieser Lösung gelangt man z. B., indem beide Seiten mit $x^2 - 4$ multipliziert werden und dann auf R aufgelöst wird:
 $x^5 - x^3 - 2 = (x^3 + 3x + R) * (x^2 - 4)$
 $x^5 - x^3 - 2 = x^5 - 12x^2 + Rx^2 - 4x^3 - 12x - 4R$
 $R = 12x - 2$
- b) Der Befehl lautet in vielen CAS-Rechnern: *propFrac((x^5-x^3-2)/(x^2-4))*.
 Es ergibt sich $x^3 + 3x + (12x-2)/(x^2-4)$.

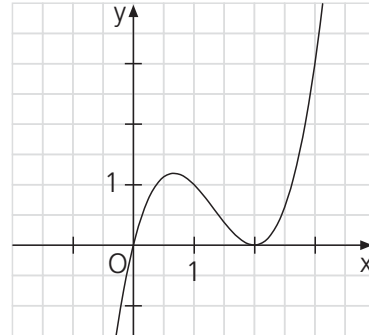
Arbeitsauftrag

a) und b)



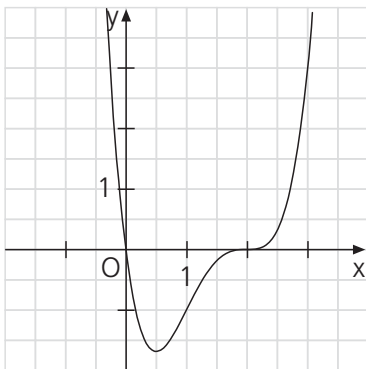
$$f_2(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$$

Am Graph ist erkennbar, dass die Funktion an der Stelle $x = 2$ das Vorzeichen wechselt. Beim Durchgang durch die Nullstelle ähnelt der Funktionsgraph dem Funktionsgraphen einer Geraden.



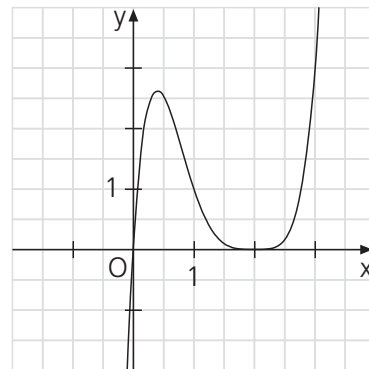
$$f_2(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x - 2)^2$$

Am Graph ist erkennbar, dass die Funktion an der Stelle $x = 2$ das Vorzeichen nicht wechselt. Beim Berühren der Nullstelle ähnelt der Funktionsgraph einer Parabel.



$$f_4(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x = x(x - 2)^3$$

Am Graph ist erkennbar, dass die Funktion an der Stelle $x = 2$ das Vorzeichen wechselt. Beim Durchgang durch die Nullstelle ähnelt der Funktionsgraph dem Funktionsgraphen einer Potenzfunktion dritten Grades.



$$f_5(x) = x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 32x^2 + 16x = x(x - 2)^4$$

Am Graph ist erkennbar, dass die Funktion an der Stelle $x = 2$ das Vorzeichen nicht wechselt. Beim Berühren der Nullstelle ähnelt der Funktionsgraph dem Funktionsgraphen einer Potenzfunktion vierten Grades.

Der Exponent des Linearfaktors in der vollständig faktorisierten Form bestimmt den Verlauf des Funktionsgraphen. Je größer der Exponent, desto flacher verläuft der Funktionsgraph in der Umgebung der Nullstelle.

Wenn in der vollständig faktorisierten Form einer ganzrationalen Funktion der Exponent

... eines Linearfaktors gerade ist, dann ändert sich das Vorzeichen von $f(x)$ an dieser Stelle nicht.
 ... eines Linearfaktors ungerade ist, dann ändert sich das Vorzeichen von $f(x)$ an dieser Stelle.
 Der Verlauf des Funktionsgraphen um die Nullstelle entspricht dem einer Potenzfunktion vom selben Exponentengrad wie der Exponent des Linearfaktors.

Funktion	Vollständig faktorisierte Form	Nullstellen mit Vielfachheit
$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x + 2; D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = 2(x - 1)^2(x + 1)$	$x_1 = 1$ (doppelt) $x_2 = -1$ (einfach)
$f(x) = -x^4 - 5x^3 + 14x^2; D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = -x^2(x + 7)(x - 2)$	$x_1 = 0$ (doppelt) $x_2 = -7$ (einfach) $x_3 = 2$ (einfach)
$f(x) = x^4 - 4,5x^3 + 6x^2 - 2,5x; D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = x(x - 1)^2(x - 2,5)$	$x_1 = 0$ (einfach) $x_2 = 1$ (doppelt) $x_3 = 2,5$ (einfach)
$f(x) = -4x^5 - 4x^3; D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = -4x^3(x^2 + 1)$	$x_1 = 0$ (dreifach)
$f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x - 1)^2; D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = (x - 1)^4$	$x_1 = 1$ (vierfach)

Aufgaben

1. Graphen ganzrationaler Funktionen dritten Grades

Linker Graph:

Nullstelle bei $x = -1$ einfach, d. h. Faktor $(x + 1)$ in vollständig faktorisierter Form

Nullstelle bei $x = 2$ doppelt, d. h. Faktor $(x - 2)^2$ in vollständig faktorisierter Form

$$f(x) = a(x + 1)(x - 2)^2$$

Punkt $(0 | 4)$ liegt auf dem Funktionsgraphen $f(0) = 4$: $a(0 + 1)(0 - 2)^2 = 4$

$$a = 1$$

$$f(x) = (x + 1)(x - 2)^2 = x^3 - 3x^2 + 4$$

Lösung: $a = 1$; $b = -3$; $c = 0$; $d = 4$

Mittlerer Graph:

Nullstelle bei $x = -2$ einfach, d. h. Faktor $(x + 2)$ in vollständig faktorisierter Form

Nullstelle bei $x = 1$ einfach, d. h. Faktor $(x - 1)$ in vollständig faktorisierter Form

Nullstelle bei $x = 3$ einfach, d. h. Faktor $(x - 3)$ in vollständig faktorisierter Form

$$f(x) = a(x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

Punkt $(0 | 6)$ liegt auf dem Funktionsgraphen $f(0) = 6$: $a(0 + 2)(0 - 1)(0 - 3) = 6$

$$a = 1$$

$$f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Lösung: $a = 1$; $b = -2$; $c = -5$; $d = 6$

Rechter Graph:

Vom Funktionsverlauf an der Nullstelle ist ersichtlich, dass es sich um eine dreifache Nullstelle handelt

$$f(x) = a(x - 1)^3$$

Punkt $(2 | -1)$ liegt auf dem Funktionsgraphen $f(2) = -1$: $a(2 - 1)^3 = -1$; $a = -1$

$$f(x) = -(x - 1)^3 = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$

Lösung: $a = -1$; $b = 3$; $c = -3$; $d = 1$

2. Intervallbestimmung

a) $f(x) = 2x^4 - 18x^3 + 44x^2 - 64$; $D_f = \mathbb{R}$

Ungleichung lösen mit dem CAS: solve-Befehl: solve($f(x) > 0$)

Ausgabe vieler CAS: $x < -1$, $x > 2$ and $x \neq 4$

Angabe als Intervall: $I =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[\setminus \{4\}$

Wiederholung:

$\cup$: vereinigt zwei Mengen

$\setminus$: schließt eine Menge aus

b) $f(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 3)$; $D_f = \mathbb{R}$

Anhand des Funktionsterm wird sofort ersichtlich, dass sich das Vorzeichen von $f(x)$ nur bei $x = 3$ ändert (einfache Nullstelle, also Vorzeichenwechsel). $I =]3; +\infty[$

c) $f(x) = x^3 + 100,99x^2 + 98,99x - 1$; $D_f = [-2; 20]$

Ungleichung lösen mit dem CAS: solve-Befehl: solve($f(x) > 0$)

Ausgabe vieler CAS: $-100 < x < -1$; $\frac{1}{100} < x$

Angabe als Intervall: $I =]-100; -1[\cup]\frac{1}{100}; +\infty[$

3. Lösung von mathematischen Gleichungen durch Nullstellenbestimmung

Max möchte die Lösung der mathematischen Gleichung $x^7 + x^5 = 3x - 7$ über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$ bestimmen.

a) $x^7 + x^5 = 3x - 7$; $x^7 + x^5 - 3x + 7 = 0$

Fasse die linke Seite der Gleichung als Funktion auf mit $D_f = G = \mathbb{R}$.

Die Nullstelle der Funktion $f: f(x) = x^7 + x^5 - 3x + 7$; $D_f = \mathbb{R}$ entspricht der Lösung der obigen Gleichung.

b) Bei jeder mathematischen Gleichung kann man wie bei a) durch Äquivalenzumformungen die rechte Seite der Gleichung auf 0 bringen. Die linke Seite dieser Gleichung wird dann als Funktion f definiert mit $D_f = G$. Die Nullstelle(n) dieser Funktion f ist bzw. sind die Lösung(en) der Gleichung.

4. Schnittpunktbestimmung

a) $f(x) = g(x)$; $x^3 - 2x^2 = 2x - 4$; $x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$

Faktoriert mit dem CAS: $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2) = 0$

x-Koordinaten der Schnittpunkte: $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = 2$

y-Koordinaten der Schnittpunkte: $g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 4$; $g(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} - 4$; $g(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$

Schnittpunkte: $S_1(\sqrt{2} \mid 2\sqrt{2} - 4)$; $S_2(-\sqrt{2} \mid -2\sqrt{2} - 4)$; $S_3(2 \mid 0)$

b) $f(x) = g(x)$; $x^5 - 2x = x^5$; $-2x = 0$; $x = 0$; D_f

Es gibt keinen Schnittpunkt.

c) $f(x) = g(x)$; $x^{28} + x^{26} = x^{30}$; $x^{30} - x^{28} - x^{26} = 0$; $x^{26}(x^2 - x - 1) = 0$

x-Koordinaten der Schnittpunkte: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$; $x_3 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$

y-Koordinaten der Schnittpunkte: $g(0) = 0$; $g\left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)^{30} = -416\,020\sqrt{5} + 930\,249$;

$g\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)^{30} = 416\,020\sqrt{5} + 930\,249$

Schnittpunkte:

$S_1(0 \mid 0)$; $S_2(-\sqrt{5}/2 + 1/2 \mid -416\,020\sqrt{5} + 930\,249)$; $S_3(\sqrt{5}/2 + 1/2 \mid 416\,020\sqrt{5} + 930\,249)$

5. Ganzrationale Funktionen mit Parameter a

a) Faktorisierte Form von $f_a(x) = 24(x + c)^3$; $c \in \mathbb{R}$

Ausmultiplizierte Form (mit CAS): $24x^3 + 72c \cdot x^2 + 72c^2 \cdot x + 24c^3$

Vergleich der Koeffizienten: $a = 72c$ (I); $2,5a = 72c^2$ (II); $15 + 2a = 24c^3$ (III)

Lösen: (I) in (II): $2,5 \cdot (72c) = 72c^2$; $180c = 72c^2$; $c = 0$; $c = 2,5$

Eingesetzt in (III) ergibt, dass nur $c = 2,5$ eine Lösung ist.

Für $c = 2,5$ ist (I) $a = 72 \cdot 2,5 = 180$.

$f_{180}(x) = 24x^3 + 180x^2 + 450x + 375 = 24(x + 2,5)^3$

Für $a = 180$ gibt es genau eine Nullstelle (Vielfachheit drei), und zwar bei $x = -2,5$.

b) Ja, die Funktion hat immer mind. eine Nullstelle.

Es gilt: $x \rightarrow \infty$: $f(x) \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$: $f(x) \rightarrow -\infty$

Um dieses Unendlichkeitsverhalten zu erreichen, muss der Funktionsgraph mind. einmal die x-Achse schneiden. Also gibt es für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle.

6. Gestalt von Funktionsgraphen dritten Grades

a) Ist der Funktionsgraph eine Gerade, so liegt eine lineare Funktion vor. Für alle Punkte $A(a_1 | a_2)$ auf G_f gilt, dass mit A auch $B(a_1 + 1 | a_2 + m)$ auf G_f liegt. Der Zuwachs bzw. die Abnahme ist also konstant.

Ist der Funktionsgraph eine Parabel, so liegt eine quadratische Funktion vor. Als Erkennungskriterium kann dienen, dass Parabeln stets achsensymmetrisch zum Scheitelpunkt $S(s_1 | s_2)$ sind. Um sicher zu gehen, muss man rechnerisch nachweisen, dass sich der Funktionsterm durch einen quadratischen Funktionsterm darstellen lässt, da z. B. auch Potenzfunktionen vierten Grades dieses Symmetrieverhalten zeigen.

b) Funktionen dritten Grades sind immer punktsymmetrisch bezüglich eines sogenannten Wendepunktes W.

Sie haben immer mind. eine und maximal drei Nullstellen.

Funktionen mit nur einer Nullstelle haben den Verlauf wie Graph 1 oder Graph 2.

Graph 1, wenn der Koeffizient vor dem x^3 positiv ist und Graph 2, wenn dieser negativ ist.

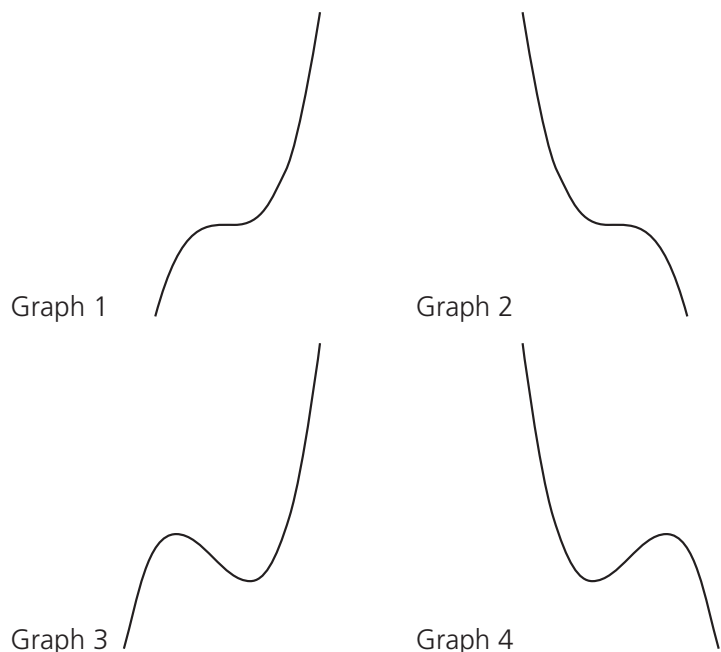
Ihr Wendepunkt wird auch als Sattelpunkt bezeichnet.

Funktionen mit zwei oder drei Nullstellen haben den Verlauf wie Graph 3 oder Graph 4.

Graph 3, wenn der Koeffizient vor dem x^3 positiv ist und Graph 4, wenn dieser negativ ist.

Sie besitzen einen Hoch- und einen Tiefpunkt.

Wichtig: Diese Kriterien sind nicht hinreichend!



7. Funktionsterm aus Funktionsgraph

Gründe, warum die Bestimmung des Funktionsterms nicht möglich sein könnte:

Man kann zwischen einfachen, dreifachen und fünffachen Nullstellen nicht gut genug unterscheiden.

Man kann zwischen doppelten, vierfachen und sechsfachen Nullstellen nicht gut genug unterscheiden.

Der Koeffizient vor dem größten Exponenten ist nur dadurch zu ermitteln, dass ein weiterer Punkt auf dem Funktionsgraphen vorgegeben ist (vgl. Sie dazu Aufgabe 1/ S. 31). Ohne diese Vorgabe kann der Funktionsterm nicht eindeutig ermittelt werden.

8. Funktionsgraph durch drei Punkte

a) Funktionsterm einer Funktion dritten Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Es sind vier Unbekannte zu bestimmen, also werden vier Gleichungen benötigt. Da nur drei Punkte vorgegeben sind, ist die Funktion damit nicht eindeutig zu bestimmen.

b) Ein Parameter wird 1 gesetzt, z. B. $a = 1$.

Dann folgt das folgende lineare Gleichungssystem, das mit dem CAS gelöst werden kann:

$$f(4) = 7: 64 + 16b + 4c + d = 7$$

$$f(-4) = -9: -64 + 16b - 4c + d = -9$$

$$f(1) = 1: 1 + b + c + d = 1$$

$$\text{CAS: } b = -1; c = -14; d = 15$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 15$$

Alternative:

Ein weiterer Punkt wird gewählt, z. B. $(0 | 0)$; $d = 0$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

$$f(4) = 7: 64a + 16b + 4c = 7 \text{ (I)}$$

$$f(-4) = -9: -64a + 16b - 4c = -9 \text{ (II)}$$

$$f(1) = 1: a + b + c = 1 \text{ (III)}$$

Lösen des linearen Gleichungssystems:

$$\text{(I) + (II): } 32b = 0; b = 0$$

$$\text{(I) - 64(III): } -60c = -57; c = \frac{19}{20}$$

$$\text{(III): } a + 0 - \frac{19}{20} = 1; a = \frac{1}{20}$$

$$f(x) = \frac{1}{20}x^3 + \frac{19}{20}x$$

c) *Hinweis:* Hier bietet es sich an, die dynamische Grafikfähigkeit des Taschencomputers zu nutzen, den Wert für a zu vermuten und diesen rechnerisch zu bestätigen.

$$\text{Funktionsterm: } f(x) = a(x - b)^2(x - c)$$

Bedingungen:

$$f(4) = 7: -a(b - 4)^2(c - 4) = 7$$

$$f(-4) = -9: -a(b + 4)^2(c + 4) = -9$$

$$f(1) = 1: -a(b - 1)^2(c - 1) = 1$$

Löse das Gleichungssystem mit dem CAS:

$$a = \frac{1}{4}; b = 2; c = -3$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x + 3) \cdot (x - 2)^2$$

9. Zahlenrätsel

a) Lukas gedachte Zahl sei $x \in \mathbb{N}$.

$$(x - 3)^3 = x^2 \cdot 19 - 27$$

Solve-Befehl: `solve((x - 3)^3 = x^2 \cdot 19 - 27)`

Lösung: $x = 0$; $x = 1$; $x = 27$

Die Lösung ist also nicht eindeutig.

b) Individuelle Lösungen; es muss sich die Lösung $x = 27$ ergeben.

10. Hohlkugel

Hinweis: In dieser Aufgabe geht es um die Brauchbarkeit von Lösungen in einem Modellierungsprozess.

Gegeben ist $V = 3,8 \text{ l} \triangleq 3,8 \text{ dm}^3 = 3\,800 \text{ cm}^3$; $r = 10 \text{ cm}$

$V = rh^2\pi - \frac{1}{3}h^3\pi$ mit den obigen Werten und dem solve-Befehl ergeben drei numerische Lösungen:

$$x_1 \approx -9,58; x_2 \approx 16,24; x_3 \approx 23,33$$

Negative Höhen machen praktisch keinen Sinn, weswegen diese Lösung wegfällt.

Die Glaskugel hat eine maximale Höhe von 20 cm (doppelter Radius), weswegen x_3 als Lösung auch keinen Sinn macht. Das Wasser steht also bis zur Höhe $h \approx 16,24 \text{ cm}$.

11. Achterbahn

Die Funktion hat bei $x = 0$; $x = 1$ und $x = 2$ doppelte Nullstellen (kann man dem Kontext entnehmen, da die Achterbahn dort flach verlaufen soll):

$$f(x) = a \cdot x^2 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x - 2)^2$$

Da der Punkt $(0,5 \mid 0,7)$ auf dem Funktionsgraph liegen soll, muss gelten: $f(0,5) = 0,7$.

$$a \cdot 0,5^2 \cdot (0,5 - 1)^2 \cdot (0,5 - 2)^2 = 0,7$$

$$a \cdot 0,5^2 \cdot (-1,5)^2 = 0,7; a = \frac{224}{45}$$

$$\text{Lösung: } f(x) = \frac{224}{45} x^2 (x - 1)^2 (x - 2)^2$$

Probe mit dem weiteren vorgegeben Punkt: $f(1,5) = 0,7$

$$f(1,5) = \frac{224}{45} \cdot (1,5)^2 \cdot (-0,5)^2 \cdot (-0,5)^2 = 0,7 \quad \text{erfüllt die Bedingung.}$$

Arbeitsauftrag

Nullstellen	$f(x) = -2x^2(x-1)(x+1)$ $x_1 = 0$ (doppelt) $x_2 = 1$ (einfach) $x_3 = -1$ (einfach)
Verhalten für $x \rightarrow \infty$	Der größte Exponent ist gerade und dessen Koeffizient ist negativ Für $x \rightarrow \infty$: $f(x) \rightarrow -\infty$
Verhalten für $x \rightarrow -\infty$	Der größte Exponent ist gerade und dessen Koeffizient ist negativ Für $x \rightarrow -\infty$: $f(x) \rightarrow -\infty$
Symmetrie	Wegen $f(-x) = f(x)$ ist der Funktionsgraph symmetrisch zur y-Achse.
Wertemenge	Plottet man die Funktion, so erkennt man, dass der maximale Wert, den die Funktion annimmt 0,5 ist. $W =]-\infty; 0,5]$

	Vorgehen mit dem CAS
Nullstellen	Faktorisieren mit dem CAS: <i>factor</i> in vielen CAS Die Vielfachheit der Nullstelle ergibt sich aus dem Exponenten des Linearfaktors in der vollständig faktorisierten Form.
Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$	Der Befehl in vielen CAS-Rechner ist: <i>lim</i>
Symmetrie	Symmetrie zur y-Achse: <i>solve(f(-x) = f(x))</i> muss für alle $x \in D_f$ erfüllt sein. Symmetrie zum Ursprung: <i>solve(-f(-x) = f(x))</i> muss für alle $x \in D_f$ erfüllt sein.
Wertemenge	Plotten des Funktionsgraphen oder Bestimmen des maximalen oder minimalen Funktionswerts durch CAS-Befehl

Aufgaben**1. Typische Eigenschaften ganzrationaler Funktionen**

Funktion	Nullstellen	$x \rightarrow \pm \infty$	Symmetrie	Wertemenge
$f(x) = -x^2 + x^3$	$x_1 = 0$ (doppelt) $x_2 = 1$ (einfach)	$x \rightarrow \infty$: $f(x) \rightarrow \infty$ $x \rightarrow -\infty$: $f(x) \rightarrow -\infty$	Keine zum Koordinatensystem	$W = \mathbb{R}$
$f(x) = -x^4 + x^2 - 1$	keine	$x \rightarrow \infty$: $f(x) \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow -\infty$: $f(x) \rightarrow -\infty$	$f(-x) = f(x)$ symmetrisch zur y-Achse	$W =]-\infty; -0,75]$
$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2(x+1)^2$	$x_1 = 1$ (doppelt) $x_2 = -1$ (doppelt)	$x \rightarrow \infty$: $f(x) \rightarrow \infty$ $x \rightarrow -\infty$: $f(x) \rightarrow \infty$	$f(-x) = f(x)$ symmetrisch zur y-Achse	$W = \mathbb{R}_0^+$
$f(x) = -x^3 - 8$	$x_1 = \sqrt[3]{-8}$ (einfach)	$x \rightarrow \infty$: $f(x) \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow -\infty$: $f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) = -f(-x)$ symmetrisch zum Ursprung	$W = \mathbb{R}$
$f(x) = x^3 - 2x^6$	$x_1 = 0$ (dreifach) $x_2 = 2^{-\frac{1}{3}}$ (einfach)	$x \rightarrow \infty$: $f(x) \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow -\infty$: $f(x) \rightarrow -\infty$	keine zum Koordinatensystem	$W =]-\infty; 0,125]$

2. Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Zeichnet man sich die Punkte in ein Koordinatensystem, so ist ersichtlich, dass sich zwischen zwei Punkten stets eine Nullstelle befindet (y-Werte wechseln das Vorzeichen). Da damit drei Nullstellen zwischen A und D liegen und es keine weiteren Nullstellen geben kann, bestimmt das Vorzeichen des y-Werts von A bzw. D das Unendlichkeitsverhalten.

$x \rightarrow \infty: f(x) \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow \infty$

Alternativ kann man mit dem CAS den Funktionsterm von f bestimmen.

Vier vorgegebene Punkte werden in $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ eingesetzt.

(I): $f(-1) = 1: -a + b - c + d = 1$

(II): $f(1) = -3: a + b + c + d = -3$

(III): $f(2) = 1: 8a + 4b + 2c + d = 1$

(IV): $f(3) = -7: 27a + 9b + 3c + d = -7$

Lösung mit CAS: $a = -2$; $b = 6$; $c = 0$; $d = -7$

Am Koeffizienten $a = -2$ ist das Unendlichkeitsverhalten abzulesen.

$x \rightarrow \infty: f(x) \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow \infty$

3. Richtig oder falsch?

a) So eine Funktion gibt es nicht.

Ist der Funktionsgraph symmetrisch zur y-Achse, so ist das Verhalten im Unendlichen für beide Fälle gleich. Damit kann die Wertemenge $W = \mathbb{R}$ nicht erfüllt werden.

b) So eine Funktion gibt es nicht.

Begründung analog wie bei a).

c) So eine Funktion gibt es nicht.

Hat sie eine dreifache Nullstelle, so wechselt f an dieser Stelle das Vorzeichen. Damit nimmt f auch negative Werte an, was im Widerspruch zu zur Wertemenge steht.

d) So eine Funktion gibt es, z. B. $f(x) = (x - 2)^2(x - 1)^2x^2(x + 1)^2(x + 2)^2$ erfüllt die genannten Bedingungen.

e) So eine Funktion gibt es, z. B. $f(x) = (x - 2)^2(x - 1)^2x(x + 1)^2(x + 2)^2$ erfüllt die genannten Bedingungen.

f) So eine Funktion gibt es nicht.

Wenn die Funktion eine Nullstelle besitzen soll, so muss die Null auch in der Wertemenge enthalten sein, was nicht der Fall ist.

g) So eine Funktion gibt es nicht.

Wenn $W = \mathbb{R}$ ist, so nimmt die Funktion den Wert 0 an, hat also eine Nullstelle. Widerspruch.

1. Falsch, alle Potenzfunktionen verlaufen durch den Punkt (0 | 0), also kann man z. B. keine Potenzfunktion durch den vorgegebenen Punkt P (0 | 1) finden.

2. Potenzfunktionsterm: $f(x) = a \cdot x^n$; $a \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$

$$f(2) = -3,2: a \cdot 2^n = -3,2$$

$$f(-3) = a \cdot (-3)^n = 24,3$$

$$\text{Lösen per CAS: } a = -0,1; n = 5$$

$$f(x) = -0,1x^5$$

Weitere Funktion: hier Gerade durch die Punkte

$$y = mx + t$$

$$g(2) = -3,2: -3,2 = 2m + t$$

$$g(-3) = 24,3: 24,3 = -3m + t$$

$$\text{Lösen per CAS: } m = -5,5; t = 7,8$$

$$g(x) = -5,5x + 7,8; D_g = \mathbb{R}$$

3. $D_{\text{MAX}} = \mathbb{R}$ (alle x-Werte dürfen eingesetzt werden)

Der Exponent der Potenzfunktion ist stets gerade und der Koeffizient ist 1, damit kann die Funktion nicht negativ werden und ist für $x = 0$ null. Folglich ist $W = \mathbb{R}_0^+$.

$$\text{Symmetrie: } f(-x) = (-x)^{200 \cdot n} = ((-x)^2)^{100n} = (x^2)^{100n} = x^{200n} = f(x)$$

G_f symmetrisch zur y-Achse

4. a) Verläuft der Funktionsgraph durch den zweiten Quadranten, so bedeutet dies, dass negative x-Werte positive y-Werte zu Folge haben. Entweder wird das negative Vorzeichen durch einen geraden Exponenten behoben oder durch einen negativen Koeffizienten.

Also gilt: $a > 0$ und n gerade oder $a < 0$ und n ungerade

- b) Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung und verläuft durch den Punkt P (1 | -1).

Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn der Exponent ungerade ist, also gilt n ungerade.

Da weiter bekannt ist, dass (1 | -1) auf dem Funktionsgraph liegt, folgt aus $f(1) = a \cdot 1^n = -1$, dass $a = -1$.

5. a) $(3x^4 + 4x^2 - 23x + 16) : (x - 2) = 3x^3 + 6x^2 + 16x + 9 + \frac{34}{x-2}$

Befehl: `propfrac` in vielen CAS-Rechnern.

- b) Nullstellenbestimmung von $3x^4 + 4x^2 - 23x + 16$:

$$\text{solve-Befehl: solve}(3x^4 + 4x^2 - 23x + 16 = 0)$$

Es ergeben sich zwei Lösungen. $x = 1$; $x = 1,127250307\dots$

Da nur nach einem Wert für a gefragt ist, reicht die Lösung $a = 1$.

6. Berechnung der Diskriminanten $D = b^2 - 4ac$

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = a^2 - 20$$

Untersuche, ob D positiv (2 Lösungen), null (1 Lösung) oder negativ (keine Lösung) ist:

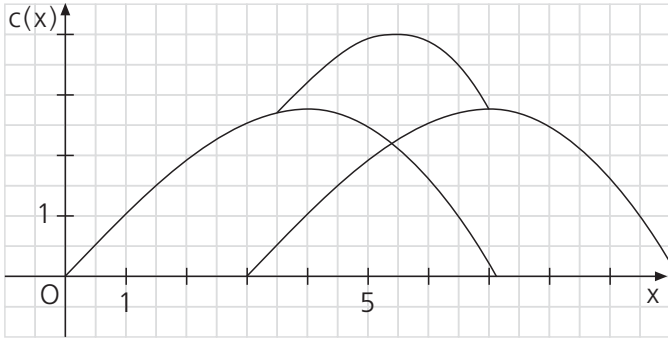
$$a > \sqrt{20}: \text{keine Lösung}$$

$$a = \sqrt{20}: 1 \text{ Lösung}$$

$$\sqrt{20} < a < -\sqrt{20}: 2 \text{ Lösungen}$$

$$a = -\sqrt{20}: 1 \text{ Lösung}$$

$$a > -\sqrt{20}: 2 \text{ Lösungen}$$

7. a) $f(x) = (x - 2)^2 \cdot (x + 5)^3 \cdot x$
 $x_1 = 2$ (doppelt); $x_2 = -5$ (dreifach)
- b) $f(x) = (2 - x)^3$
 $x_1 = 2$ (dreifach)
- c) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x = x(x + 2)(x - 1)^2$
 $x_1 = 0$ (einfach); $x_2 = -2$ (einfach); $x_3 = 1$ (doppelt)
8. a) Da die Nullstellen ganzzahlig sind, kann man diese direkt dem Graphen entnehmen. Auch ihre Vielfachheit ergibt sich aus dem Graphenverlauf.
 $x_1 = 0$ (dreifach); $x_2 = 1$ (einfach); $x_3 = 3$ (einfach)
 $f(x) = a \cdot x^3(x - 1) \cdot (x - 3)$
 Ein Punkt auf G_f ist vorgegeben: $f(2) = -8$
 $-8 = a \cdot 2^3 \cdot (2 - 1) \cdot (2 - 3)$; $a = -1$
 $f(x) = -x^3(x - 1)(x - 3)$
- b) In der ausfaktorisierten Form ergibt sich: $f(x) = -x^5 + 4x^4 - 3x^3$
 Der höchste Exponent ist daher gerade und der Koeffizient -1 ist negativ, also ist ergibt sich für $x \rightarrow \infty$: $f(x) \rightarrow -\infty$.
9. a) solve-Befehl in CAS: $\text{solve}(-0,02x^3 + x = 0)$
 $x_1 = 5\sqrt{2}$; $x_2 = 0$; $x_3 = -5\sqrt{2}$ (x_2 und x_3 kommen als Lösung nicht in Frage, da gesuchte Lösung positiv ist).
 $x_1 = 5\sqrt{2} \approx 7,07$
- b) solve-Befehl in CAS: $\text{solve}(-0,02x^3 + x = 0)$
 Lösungen: $x \approx -7,73$; $x \approx 1,58$; $x \approx 6,15$
 Das Medikament startet seine Wirkung ca. 1,58 Stunden nach seiner Einnahme und verliert seine Wirkung 6,15 Stunden nach der Einnahme.
- c) 
- d) Aus dem Graphen ist ersichtlich, dass die gesuchte Zeit über 7 Stunden liegt. Die Funktion c ist für dieses x nicht mehr existent, weswegen der Funktionsterm $c(x)$ bei der zu lösenden Gleichung nicht mehr auftritt.
 solve-Befehl: $\text{solve}(c(x - 3) = 1,5)$
 Lösung per CAS (nur Lösung für $x > 7$ angegeben): $x \approx 9,15$
 Die Wirkungsdauer endet nun nach 9,15 Stunden.
- e) Plottet man den Funktionsgraph von $c(x) + c(x - a)$ und variiert den Wert von a systematisch, so kann man erkennen, dass nach ca. 3,6 Stunden eine weitere Dosis eingenommen werden kann, ohne dass der Grenzwert von 4 Promille erreicht wird.

10. $f(x) = 2x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 2x^2 + 16x - 8 = 2(x + 2)^2(x - 1)^2$

Nullstellen: $x_1 = -2$ (doppelt); $x_2 = 1$ (dreifach)

Verhalten für betragsmäßig hohe x -Werte: $x \rightarrow \infty$: $f(x) \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$: $f(x) \rightarrow -\infty$

Ergibt sich aus CAS-Befehl oder dem Argument, dass höchster Exponent (5) ungerade und Koeffizient (2) positiv ist.

Symmetrie: keine Symmetrie zum Koordinatensystem, da $f(x) \neq f(-x)$ und $f(x) \neq -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Wertemenge: $W = \mathbb{R}$, ergibt sich unmittelbar aus dem Unendlichkeitsverhalten

11. $f(x) = 2x^6 - 0,5x^2 - 5x^6 = -3x^6 - 0,5x^2$

a) Für $x \rightarrow \infty$ geht $f(x) \rightarrow \infty$.

Falsch, für $x \rightarrow \infty$ geht $f(x) \rightarrow -\infty$.

b) Der Graph zeigt keine Symmetrie zum Koordinatensystem.

Falsch, $f(x) = f(-x)$, daher ist G_f symmetrisch zur y -Achse.

c) Die Funktion hat genau zwei Nullstellen.

Falsch, die Funktion hat nur die Nullstelle $x = 0$.

d) $f(0) = 0$

Richtig, siehe c).

e) Die Wertemenge lautet $W = \mathbb{R}^+$.

Falsch, da die Funktion eine Nullstelle besitzt, muss 0 zur Wertemenge gehören.

12. Lukas und Laura haben beide Recht.

Lukas: Bei einer ganzrationalen Funktion von ungeradem Grad gilt:

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, d. h. das Verhalten im Unendlichen ändert sich von $-\infty$ nach $+\infty$ oder von $+\infty$ nach $-\infty$. Folglich muss der Funktionsgraph die x -Achse mindestens einmal schneiden, also gibt es mindestens eine Nullstelle.

Laura: Für alle Potenzfunktionen mit geraden Exponenten gilt: $f(x) = a \cdot x^n = a \cdot (-x)^n = f(-x)$.

Eine ganzrationale Funktion mit lauter geraden Exponenten ist eine Summe aus solchen Potenzfunktionen und einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = a_1(-x)^{n_1} + a_2(-x)^{n_2} + \dots + c = a_1(x)^{n_1} + a_2(x)^{n_2} + \dots + c = f(x)$$

Daraus folgt die Symmetrie zur y -Achse.

13. Wäre die Nullstelle bei $x = -2$ einfach, so könnte man den Funktionsterm folgendermaßen schreiben:

$$f(x) = (x - 2) \cdot g(x).$$

$g(x)$ wäre dann ein Polynom vom Grad 5, weswegen es eine weitere Nullstelle geben würde (siehe Aufgabe 12). Daher muss die Nullstelle doppelt sein.

$$f(x) = (x - 2)^2(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$$

Wegen des Verhaltens im Unendlich muss gelten: $a < 0$.

Da keine weiteren Nullstellen existieren, darf der Term 4. Grades keine Nullstelle besitzen.

Als zwei mögliche Funktionsterme kann man daher angeben:

$$f_1(x) = (x - 2)^2(-x^4 - 1)$$

$$f_1(x) = (x - 2)^2(-x^4 - 2)$$

Arbeitsauftrag

rationale Funktion: A: $\frac{2x}{x^2-1}$; E: $-\frac{x^3-12x+16}{8}$

nichtrationale Funktion: B: $2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; C: 2^{x-3} ; D: $(x-2)^{\frac{1}{2}}$; F: $\log_7 x$

ganzzahlige Funktion: E: $-\frac{x^3-12x+16}{8}$ gebrochenrationale Funktion: A: $\frac{2x}{x^2-1}$

trigonometrische Funktion: B: $2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ Wurzelfunktion: D: $(x-2)^{\frac{1}{2}}$

Exponentialfunktion: C: 2^{x-3} Logarithmusfunktion: F: $\log_7 x$

Aussage	Beispielfunktionen (A)–(F)
Die Funktion ist periodisch.	B
Der Funktionsgraph hat eine senkrechte Asymptote.	A; F
Die Funktion hat die Definitionsmenge $\mathbb{R}$.	B; C; E
Die Funktion hat höchstens eine Nullstelle.	A; C; D; F
Die Funktionswerte werden im gesamten Definitionsbereich mit zunehmenden Werten von x größer.	C; D; F
Der Funktionsgraph ist symmetrisch zum Koordinatensystem.	A; B
Die Funktion hat die Wertemenge $\mathbb{R}^+$.	C
Der Funktionsgraph der Funktion verläuft durch den ersten Quadranten.	A; B; C; D; F

Aufgaben

1. Gebrochenrationale Funktionen: grundlegende Eigenschaften

a) Der Funktionsgraph ist symmetrisch zur y-Achse.

Rechnerischer Nachweis über $f(-x) = f(x)$:

$$f(-x) = \frac{1 - (-x)^2}{(-x)^2 + 1} = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1} = f(x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{x^2} - 1 \right)}{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1$$

c) Aufgrund der Symmetrie zur y-Achse gilt $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$.

d) solve-Befehl: Mit solve ($f(x) < 1$) und solve ($f(x) > -1$) erhält man in beiden Fällen „ $\{x = x\}$ “, was die Allgemeingültigkeit ausdrückt.

e) Da $f(0) = 1$ und $f(x) \neq -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt mit b) und d): $W =]-1; 1]$.

2. Gebrochenrationale Funktionen: Anwendung beim Preisverfall eines Autos

a) $P(1) = \frac{1\,000 + 80\,000}{7} = \frac{81\,000}{7} \approx 11\,571$; der Wagen hat nach einem Jahr einen Wert von ca. 11 600 €.

b) Neuwagen, d. h. $x = 0$: $P(0) = \frac{80\,000}{5} = 16\,000$; Ein Neuwagen kostet 16 000 €.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1\,000x + 80\,000}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1\,000 + \frac{80\,000}{x})}{x(2 + \frac{5}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1\,000 + \frac{80\,000}{x}}{2 + \frac{5}{x}} = \frac{1\,000}{2} = 500$

Auf lange Sicht hin hat das Auto einen Wert von 500 €.

d) Wertetabelle (z. B. über entsprechende Funktion des CAS-Rechners erstellen):

x	0	1	2	3	4	5
P(x)	16 000	11 571	9 111	7 545	6 462	5 667

Zeitraum (Jahre)	0 bis 1	1 bis 2	2 bis 3	3 bis 4	4 bis 5
Prozentuale Wertminderung	$\frac{16\,000 - 11\,571}{16\,000} \approx 27,7\%$	$\frac{11\,571 - 9\,111}{11\,571} \approx 21,3\%$	$\frac{9\,111 - 7\,545}{9\,111} \approx 17,2\%$	$\frac{7\,545 - 6\,462}{7\,545} \approx 14,4\%$	$\frac{6\,462 - 5\,667}{6\,462} \approx 12,3\%$

Durchschnittlicher Wert

$$p = \frac{27,67\ldots\% + 21,26\ldots\% + 17,18\ldots\% + 14,36\ldots\% + 12,30\ldots\%}{5} \approx 18,6\%$$

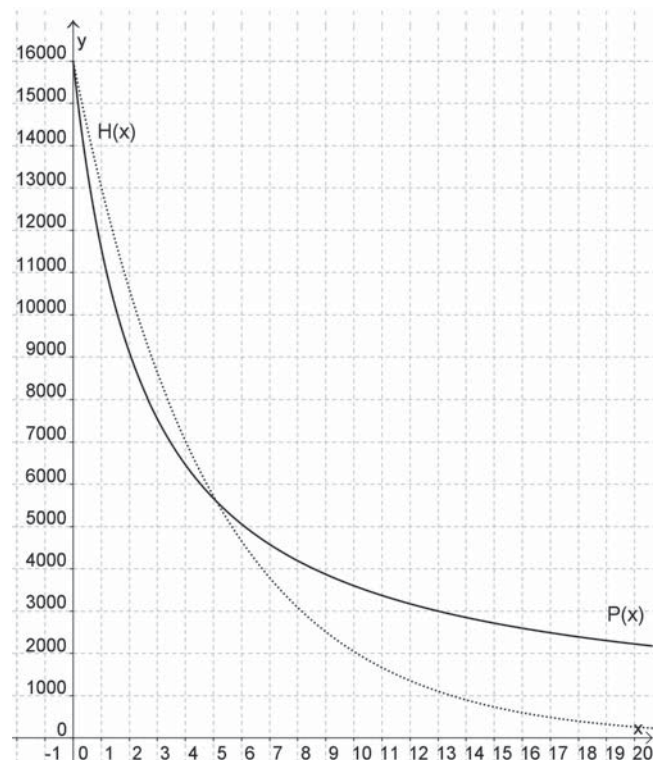
e) Geht man davon aus, dass die jährliche Wertminderung des Autos mit demselben Prozentsatz erfolgt, so liegt eine exponentielle Abnahme vor. Als prozentuale Abnahmerate dient p:

$$H(x) = 16\,000 \cdot (1 - 0,186)^x = 16\,000 \cdot 0,814^x$$

H(x) geht für große x gegen Null und nicht wie P(x) gegen 500.

x	0	1	2	3	4	5	6
P(x)	16000	11571	9111	7545	6462	5667	5059
H(x)	16000	13024	10602	8630	7025	5718	4654

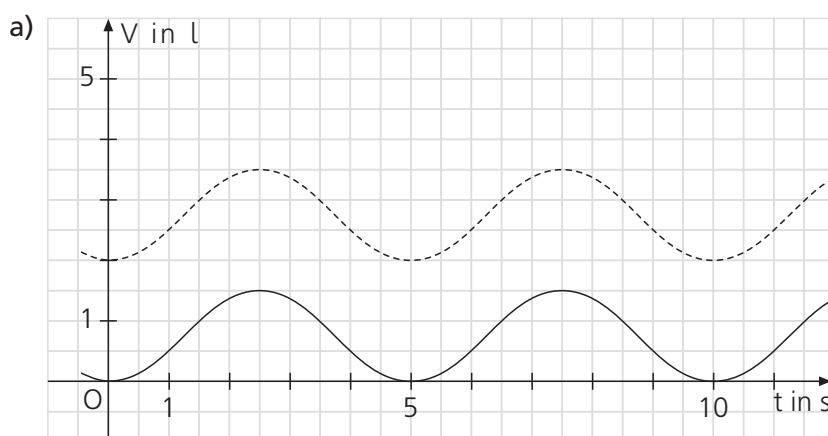
Der Funktionsgraph von H liegt zunächst stets über dem von P, doch bereits bei etwa $x = 5$ liegt er unterhalb von G_P . Zunächst fällt also P stärker als H dann fällt jedoch H stärker und nähert sich dem Wert von 0 an.



3. Trigonometrische Funktionen: grundlegende Eigenschaften

Funktionsterm	Amplitude	Periode	Nullstellen	Wertemenge
$f(x) = \frac{1}{2} \cos(5x) + 1,5$	$A = \frac{1}{2}$	$p = \frac{2\pi}{5}$	keine	$W = [1; 2]$
$f(x) = 2 \cdot \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$	$A = 2$	$p = \frac{2\pi}{3}$	$x_k = k \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ $k \in \mathbb{Z}$	$W = [-2; 2]$
$f(x) = \sin(x) + \cos(x)$	$A = \sqrt{2}$	$p = 2\pi$	$x_k = \pi \cdot k + \frac{3\pi}{4}$ $k \in \mathbb{Z}$	$W = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

4. Trigonometrische Funktionen: Anwendung bei der Atmung



b) $V(t) = 0,75 \cdot \sin\left[\left(\frac{2\pi}{5}x\right) - \frac{\pi}{2}\right] + 0,75$ (oberer Graph durch Ursprung)

c) $L(t) = V(t) + 2 = 0,75 \cdot \sin\left[\left(\frac{2\pi}{5}x\right) - \frac{\pi}{2}\right] + 2,75$ (Graph aus b) um 2 in y-Richtung verschoben)

d) Das maximale Luftvolumen dieses Patienten beläuft sich auf 3,5 Liter.

e) Die Periode $p = 5$ ändert sich.

Zweimal so schnell wie üblich bedeutet, dass $p = 2,5$: $V(t) = 0,75 \cdot \sin\left[\left(\frac{2\pi}{2,5}x\right) - \frac{\pi}{2}\right] + 0,75$ bzw.

$$V(t) = 0,75 \cdot \sin\left[\left(\frac{4\pi}{5}x\right) - \frac{\pi}{2}\right] + 0,75$$

Fünffmal so schnell wie üblich bedeutet, dass $p = 1$: $V(t) = 0,75 \cdot \sin\left[\left(\frac{2\pi}{1}x\right) - \frac{\pi}{2}\right] + 0,75$ bzw.

$$V(t) = 0,75 \cdot \sin\left[(2\pi \cdot x) - \frac{\pi}{2}\right] + 0,75$$

5. Exponentialfunktionen: grundlegende Eigenschaften

Ansatz: $f(x) = a \cdot b^x$

$f(1) = 1 \Leftrightarrow a \cdot b^1 = 1$

$f(3) = 4 \Leftrightarrow a \cdot b^3 = 4$

Lösung z. B. durch CAS: $a = 0,5$; $b = 2$

(die durch manche CAS angegebene

Lösung $a = -0,5$; $b = -2$ ist nicht verwendbar,

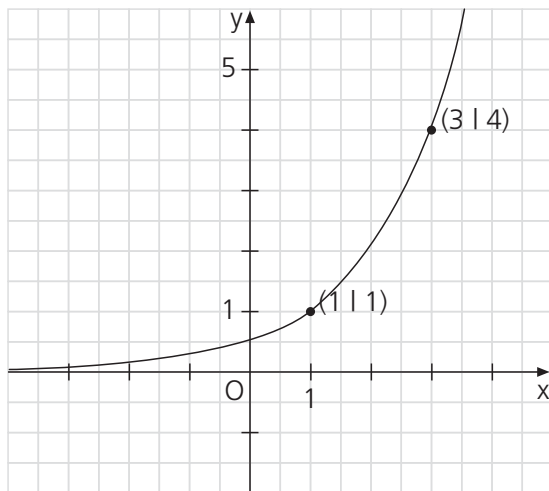
da die Basis einer Exponentialfunktion stets positiv definiert ist).

Ansatz: $f(x) = a \cdot b^x$

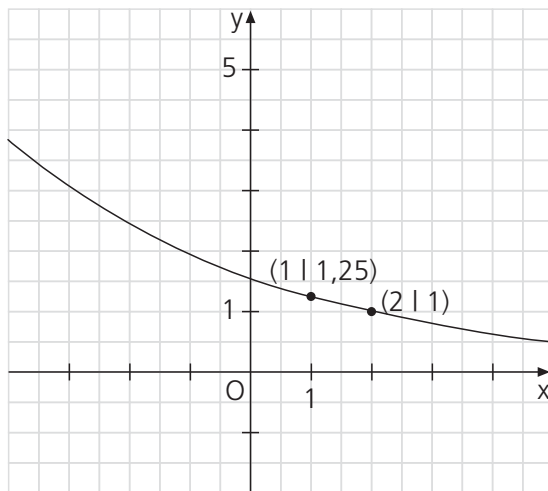
$f(1) = 1,25 \Leftrightarrow a \cdot b^1 = 1,25$

$f(2) = 1 \Leftrightarrow a \cdot b^2 = 1$

Lösung z. B. durch CAS: $a = \frac{25}{16}$; $b = \frac{4}{5}$



$$f(x) = 0,5 \cdot 2^x$$



$$f(x) = \frac{25}{16} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x$$

6. Exponentialfunktionen: Anwendung bei der Entwicklung der Internetseitenanzahl

Jahr	1	3	5	7	9
Gesamtzahl an Websites in Millionen	29,0	40,1	62,3	113,7	185,5

a) Der prozentuale Anstieg zwischen 2 Jahren beträgt...

von 2001 zu 2003: $\frac{40,1}{29,0} \approx 1,38$, also 38%

von 2003 zu 2005: $\frac{62,3}{40,1} \approx 1,55$, also 55%

von 2005 zu 2007: $\frac{113,7}{62,3} \approx 1,83$, also 83%

von 2007 zu 2009: $\frac{185,5}{113,7} \approx 1,63$, also 63%

Um den Wachstumsfaktor pro Jahr zu ermitteln, muss die Wurzel aus diesen Ergebnissen gezogen werden. Begründung:

$$(\text{Wert 2001}) \cdot a = (\text{Wert 2002})$$

$$(\text{Wert 2002}) \cdot a = (\text{Wert 2003})$$

$$(\text{Wert 2001}) \cdot a^2 = (\text{Wert 2003}) \Rightarrow a^2 = \frac{\text{Wert 2003}}{\text{Wert 2001}}$$

Damit ergeben sich folgende Wachstumsfaktoren:

$$\sqrt{1,38...} \approx 1,176; \sqrt{1,55...} \approx 1,246; \sqrt{1,82...} \approx 1,351; \sqrt{1,63...} \approx 1,277$$

Die Werte sind im Rahmen der Modellierung akzeptabel.

Es wird ein Durchschnittswert für a gebildet, der für die weitere Modellierung gelten soll: $a = 1,263$

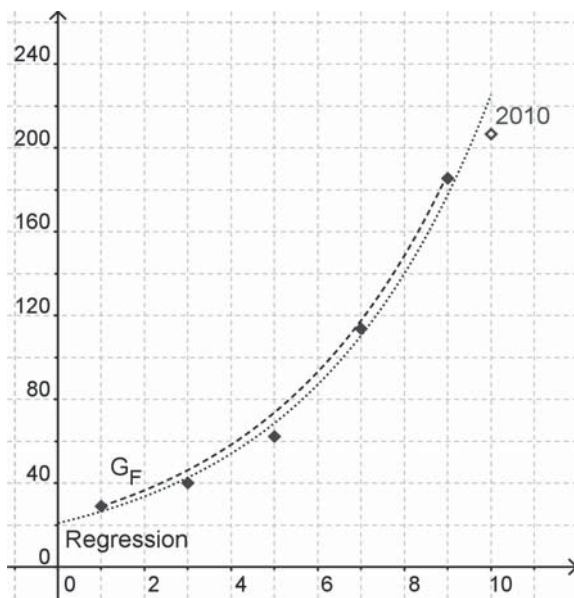
Hinweis: Hier bietet es sich an, die Regressionsfunktion des CAS zu nutzen, um eine bessere Modellierung zu ermöglichen.

b) $F(0) \cdot a = F(1) \Rightarrow F(0) = \frac{F(1)}{a} = \frac{29,0}{1,263} \approx 22,96$

$$F(t) = 22,96 \cdot 1,263^t$$

Die Regression mit einer e-Funktion ergibt $F(t) = 20,9267 \cdot e^{0,2377 - t}$, wobei $e^{0,2377} \approx 1,268$

Hinweis: Hier bietet sich die Verwendung der Tabellenkalkulation oder der Statistik-Anwendung des CAS an.



Jahr	Angegebene Werte	Modelliert mit $F(t)$	Abweichung in %
1	29	29,00	-0,01
3	40,1	46,26	15,36
5	62,3	73,79	18,44
7	113,7	117,71	3,52
9	185,5	187,76	1,22

- c) 2000 entspricht dem Wert 0, also entspricht 1995 dem Wert -5.

$$F(-5) = 22,96 \cdot 1,263^{-5} \approx 7,1$$

Das wären 7,1 Millionen Websites - unrealistisch. Die Modellierung verliert hier ihre Gültigkeit.

- d) $F(10) = 22,96 \cdot 1,263^{10} \approx 237,1$

Dass der Graph der modellierten Funktion überwiegend oberhalb der tatsächlichen Werte verläuft, lässt erkennen, dass die berechneten Werte bis 2009 eher zu hoch sind und damit auch die extrapolierten Werte. Die Zahl der Websites im Jahr 2010 lässt auch die Vermutung zu, dass sich das tatsächliche Wachstum abgeschwächt hat.

Arbeitsauftrag

- a) Bei ganzrationalen Funktion gehen die Funktionswerte für $x \rightarrow \pm \infty$ entweder gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$. Dies hängt sowohl vom Vorzeichen des Koeffizienten vor x-Potenz mit dem größten Exponenten („höchste x-Potenz“), als auch von der Gerad- bzw. Ungeradzahligkeit des Exponenten ab.

$x \rightarrow \infty$	Exponent gerade	Exponent ungerade
Koeffizient positiv	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$
Koeffizient negativ	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$

$x \rightarrow -\infty$	Exponent gerade	Exponent ungerade
Koeffizient positiv	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
Koeffizient negativ	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$

b)

x	100	1000	10000	100000
$f_1(x) \approx$	0,01010101	0,001001001	0,00010001	0,00001
$f_2(x) \approx$	0,99970003	0,999997	0,99999997	0,9999999997
$f_3(x) \approx$	9803,91177	998003,991	99980004	9999800004

Vermutung: $f_1(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$

$f_2(x) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \infty$

$f_3(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$

- c) Obige Vermutungen sind korrekt (CAS: lim-Befehl).

$f_1(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$; $f_1(x) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow -\infty$; $f_1(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow -\infty$

Gebrochenrationale Funktionen können folgendes Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$ zeigen:

Neben dem bekannten Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$ bei ganzrationalen Funktionen kann bei gebrochenrationalen Funktionen für $x \rightarrow \pm \infty$ die Funktion gegen eine reelle Zahl konvergieren.

- d) Das CAS gibt bei g_1 für $x \rightarrow \pm \infty$ keinen Grenzwert an, da die Funktion oszilliert, also periodisch alle Werte aus dem Intervall $[-1; 1]$ annimmt.

Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $g_2(x) \rightarrow \infty$, für $x \rightarrow -\infty$ gilt $g_2(x) \rightarrow 0$.

Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $g_3(x) \rightarrow \infty$.

Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $g_4(x) \rightarrow \infty$.

Eine Untersuchung der Grenzwerte bei g_3 und g_4 für $x \rightarrow -\infty$ ist aufgrund der Definitionsmenge nicht sinnvoll.

Aufgaben**1. x-Achse als Asymptote**

Zum Beispiel: $f_1(x) = \frac{1}{x}$; $f_2(x) = 2^x$ für $x \rightarrow -\infty$; $f_3(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \rightarrow \pm\infty$;

2. Kosinusfunktion: Verhalten im Unendlichen

	Verhalten für $x \rightarrow \infty$	Verhalten für $x \rightarrow -\infty$
a) $f(x) = \cos(x)$	kein eindeutiges Verhalten	kein eindeutiges Verhalten
b) $f(x) = x \cdot \cos(x)$	kein eindeutiges Verhalten	kein eindeutiges Verhalten
c) $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$	0	0
d) $f(x) = \cos(x) + 1$	kein eindeutiges Verhalten	kein eindeutiges Verhalten
e) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$	1	1

Zu a): Die Kosinusfunktion nimmt alle Werte im Intervall $[-1; 1]$ an. Im Unendlichen ist das Verhalten daher nicht eindeutig zu bestimmen.

Zu b): Die Funktion geht zwar gegen ∞ für $x \rightarrow +\infty$, das Vorzeichen wird aber durch das Vorzeichen des Kosinus bestimmt. Da dieser sowohl positive als auch negative Werte annehmen und null sein kann, ist das Verhalten nicht eindeutig zu bestimmen.

Zu c): $\frac{\cos(x)}{x} = \frac{1}{x} \cdot \cos(x)$. Für $x \rightarrow \pm\infty$ geht die Funktion $\frac{1}{x}$ gegen 0. Die Kosinusfunktion bestimmt für große x -Werte lediglich das Vorzeichen. Da aber $\pm 0 = 0$ ist, ist der Grenzwert 0.

Zu d): Hier gilt das Gleiche wie in Teilaufgabe a). Es handelt sich um eine verschobene Kosinusfunktion. Diese oszilliert zwischen 0 und 2. Das Verhalten im Unendlichen ist daher nicht eindeutig.

Zu e): Für $x \rightarrow \pm\infty$ geht das Argument des Kosinus gegen 0, also folgt $\cos(x) \rightarrow 1$.

3. Abstand von der Asymptote

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$ (lim-Befehl im CAS)

b) Vermutung: $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 5) = 0$. Mit dem CAS bestätigt sich diese Vermutung.

Bedeutung des Terms: Der Funktionsgraph wird durch Addition von -5 um 5 Einheiten in negative y -Richtung verschoben. Also ergibt sich als neue Asymptote nicht $y = 5$ sondern $y = 0$.

Andere Erklärung: Die Funktion $f(x) - 5$ stellt den Abstand zwischen Funktionsgraph und Asymptote dar. Dieser wird aber für zunehmende x -Werte per definitionem beliebig klein, geht also gegen null.

c) solve-Befehl: solve $\left(f(x) - 5 < \frac{1}{10}\right)$; ab $x > \frac{\sqrt{64\,945}}{4} + \frac{255}{4} \approx 127,461$ ist der Unterschied zwischen Funktionswerten und Grenzwert stets kleiner als $\frac{1}{10}$.

solve $\left(f(x) - 5 < \frac{1}{100}\right)$; ab $x > \frac{5 \cdot \sqrt{250\,969}}{4} + \frac{2\,505}{4} \approx 1\,252,460$ ist der Unterschied zwischen Funktionswerten und Grenzwert stets kleiner als $\frac{1}{100}$.

solve $\left(f(x) - 5 < \frac{1}{1\,000}\right)$; ab $x > \frac{5 \cdot \sqrt{25\,009\,681}}{4} + \frac{25\,005}{4} \approx 12\,502,460$ ist der Unterschied zwischen Funktionswerten und Grenzwert stets kleiner als $\frac{1}{1\,000}$.

Das CAS liefert hier noch weitere Intervalle (links von der Polstelle $x = 2,5$ und für negative x -Werte). Das liegt daran, dass hier nicht der Betrag der Differenz betrachtet wurde, was für positive, große x Werte keine Rolle spielt. Auch bei Verwendung des Betrags ergeben sich weitere Intervalle, die für den betrachteten Grenzwert ebenfalls nicht relevant sind.

4. Schnittpunkt mit der Asymptote

- a) Nähert sich der Funktionsgraph in einem Grenzwertprozess gegen eine Asymptote, so kann man den Abstand zwischen Funktionsgraph und Asymptote beliebig klein werden lassen. Anschaulich: der Funktionsgraph nähert sich der Asymptote immer mehr an.
- b) Zwei senkrechte Asymptoten: $x = 0$; $x = -2$; (Nullstellen des Nennerpolynoms)
Waagerechte Asymptote: $y = 1$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$
- c) Falsch, wie am Beispiel b) zu sehen ist, schneidet der Funktionsgraph die Asymptote bei $x = -1$. Es ist eine häufig auftretende Fehlvorstellung, dass ein Funktionsgraph die Asymptote nicht schneiden darf.

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(-x)$

- a) Individuelle Lösungen; bei allen Beispielen sollte Sophies Behauptung korrekt sein.
- b) Sophie hat Recht. Ersetzt man $f(x)$ durch $f(-x)$ so stellt dies geometrisch eine Spiegelung des Funktionsgraphen an der y-Achse dar. Der Spiegelung entsprechend muss nun auch $x \rightarrow -\infty$ durch $x \rightarrow +\infty$ ersetzt werden. Durch diesen algebraischen Trick können alle Grenzwertbetrachtungen $x \rightarrow -\infty$ durch $x \rightarrow +\infty$ ersetzt werden.

Arbeitsauftrag

Individuelle Lösungen

$$f(x) + a; a \in \mathbb{R}$$

$$f(x + b); b \in \mathbb{R}$$

Der Graph wird um $|a|$ LE in positive ($a > 0$, „nach oben“) bzw. negative ($a < 0$, „nach unten“) y-Richtung verschoben.

Der Graph wird um $|b|$ LE in negative ($b > 0$, „nach links“) bzw. positive ($b < 0$, „nach rechts“) x-Richtung verschoben.

$$c \cdot f(x); c \in \mathbb{R}^+$$

$$f(d \cdot x); d \in \mathbb{R}^+$$

Der Graph wird in y-Richtung um den Faktor c gestreckt ($c > 1$) bzw. gestaucht ($0 < c < 1$).

Der Graph wird in x-Richtung um den Faktor $\frac{1}{d}$ gestreckt ($0 < d < 1$) bzw. gestaucht ($d > 1$).

Aufgaben

1. Negative Parameterwerte c und d

Negative Werte von c bewirken, dass der Funktionsgraph zusätzlich zum Strecken bzw. Stauchen an der x-Achse gespiegelt wird.

Negative Werte von d bewirken, dass der Funktionsgraph zusätzlich zum Strecken bzw. Stauchen an der y-Achse gespiegelt wird.

2. Einfluss von Parametern auf eine lineare Funktion

Hinweis: Hier ist der Einsatz eines dynamischen Graphenplotters sinnvoll.

- $g(x) = c \cdot f(x)$; c wird größer; G_g wird mit zunehmendem c steiler. Der Schnittpunkt $(1 | 0)$ mit der x-Achse liegt dabei auf allen Graphen, während sich der y-Achsenabschnitt in negative y-Richtung bewegt.
- $g(x) = f(dx)$; d wird größer; G_g wird mit zunehmendem d steiler. Im Unterschied zu a) liegt der y-Achsenabschnitt $(0 | 2)$ dabei auf allen Graphen, während sich der Schnittpunkt mit der x-Achse von rechts zum Ursprung hin bewegt.
- $g(x) = f(x - b)$; b wird kleiner; G_f und G_g haben dieselbe Steigung – liegen also parallel zueinander, G_g nähert sich von rechts der Geraden G_f .

3. Einfluss von Parametern auf eine Exponentialfunktion

Hinweis: Hier ist der Einsatz eines dynamischen Graphenplotters sinnvoll.

- $g(x) = c \cdot f(x)$; c wird größer; streckt den Graphen um c in y-Richtung.
- $g(x) = f(dx)$; d wird größer; der Graph schmiegt sich im II. Quadranten mit zunehmendem d zum Ursprung hin immer mehr an die x-Achse. Im I. Quadranten verläuft er immer steiler, je größer d ist. G_g wird in x-Richtung zur y-Achse hin gestaucht. Der Punkt $(2 | 0)$ liegt auf allen Funktionsgraphen.
- $g(x) = f(x - b)$; b wird kleiner; der Graph entfernt sich mit abnehmendem b immer mehr von der x-Achse. Die scheinbare Entfernung resultiert aus der abnehmenden Verschiebung von G_g in positive x-Richtung.

4. Parameterfestlegung durch Graphenpunkte

Hinweis: Die Definition eines Funktionsterms mit dem CAS und seine Verwendung in einer Gleichung kann hier an einem einfachen Beispiel geübt bzw. wiederholt werden.

- $f_a(x) = x^2 + a$; $D_{f_a} = \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}$
 $f(-2) = -5 \Leftrightarrow (-2)^2 + a = -5 \Leftrightarrow 4 + a = -5 \quad a = -9$

- b) $f_{a,b}(x) = ax^2 + b$; $D_{f_{a,b}} = \mathbb{R}$; $a, b \in \mathbb{R}$
 $f(-2) = -5 \Leftrightarrow a \cdot (-2)^2 + b = -5 \Leftrightarrow b = -5 - 4a$ oder $a = -\frac{1}{4}(b + 5)$
 Geeignete Parameterpaare wären also $(a \mid -5 - 4a)$ bzw. $(-\frac{1}{4}(b + 5) \mid b)$
 Zum Beispiel $(a \mid b) \in \{(1 \mid -9); (2 \mid -13); (0 \mid -5); \dots\}$

5. Streckung und Spiegelung durch die Parameter c und d

- a) $f(x) = -g(x)$ $c = -1$; $d = 1$
 b) $f(x) = g(-x)$ $c = 1$; $d = -1$
 c) $f(x) = -g(-x)$ $c = -1$; $d = -1$
 d) $f(x) = 2 \cdot g(x)$ $c = 2$; $d = 1$
 e) $f(x) = g\left(\frac{1}{24}x\right)$ $c = 1$; $d = \frac{1}{24}$

6. Reihenfolge der Graphenveränderung

Hinweis: In einer Gruppenarbeit können alle sechs Möglichkeiten durchgespielt werden.

- a) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- b) Beispiel: Reihenfolge wie abgebildet von links nach rechts.
 $f(x) = x^3$ wird mit dem Faktor $\frac{3}{2}$ in x-Richtung gestreckt, d. h. $g(x) = f\left(\frac{2}{3}x\right)$
 $g(x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 = \frac{8}{27}x^3$ wird um 3 LE in x-Richtung verschoben, d. h. $h(x) = g(x - 3)$
 $h(x) = \frac{8}{27}(x - 3)^3$ wird mit dem Faktor $\frac{2}{5}$ in y-Richtung gestaucht, d. h. $i(x) = \frac{2}{5} \cdot h(x)$
 Resultat: $i(x) = \frac{16}{135}(x - 3)^3$
- c) Vermutung: Die Reihenfolge der Karten und damit der Graphenveränderung ist entscheidend.
 Beispiel: Reihenfolge nach der Abbildung nun von rechts nach links
 $f(x) = x^3$ wird mit dem Faktor $\frac{2}{5}$ in y-Richtung gestaucht, d. h. $g(x) = \frac{2}{5} \cdot f(x)$
 $g(x) = \frac{2}{5}x^3$ wird um 3 LE in x-Richtung verschoben, d. h. $h(x) = g(x - 3)$
 $h(x) = \frac{2}{5}(x - 3)^3$ wird mit dem Faktor $\frac{3}{2}$ in x-Richtung gestreckt, d. h. $i(x) = h\left(\frac{2}{3}x\right)$
 Resultat: $i(x) = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}x - 3\right)^3$
 Mit dem CAS lässt sich durch Ausmultiplizieren (z. B. durch *expand*) oder durch Differenzbildung der Terme der Unterschied feststellen.
 Die Reihenfolge der Karten ist also für das Ergebnis entscheidend.
- d) Es gibt nun 24 Möglichkeiten. Nach wie vor ist die Reihenfolge der Karten entscheidend für das Ergebnis.
Hinweis: Hier bietet es sich an, die Aufgabe weiter zu öffnen und evtl. alle Möglichkeiten zu bestimmen. Eine dazu passende Fragestellung könnte sein: Gibt es Kartenanordnungen, die zu identischen Funktionstermen führen?

7. Parameter und Nullstellen

- a) Der Funktionsterm von f ist ein Polynom von ungeradem Grad. Also ändert sich das Unendlichkeitsverhalten von $-\infty$ nach $+\infty$ oder von $+\infty$ nach $-\infty$. Folglich muss der Funktionsgraph die x -Achse mindestens einmal schneiden. Es gibt also mindestens eine Nullstelle (ungerader Vielfachheit).
- b) Durch Ausklammern von x erhält man die erste einfache Nullstelle bei $x_1 = 0$.

Das CAS liefert mit `solve` als Nullstellen für den zweiten Faktor:

$$x_2 = -1,554190081; x_3 = 3,637908367$$

Das können zwei einfache oder zwei doppelte Nullstellen sein.

Da das CAS den zweiten Faktor nicht weiter in Linearfaktoren zerlegt, verschafft z. B. das Einsetzen von x -Werten nahe der Nullstellen Klarheit.

Die anschaulichste Begründung liefert der Graph, der die x -Achse dreimal schneidet. Hier sollte aber ausführlich mithilfe des Funktionsterms begründet werden.

- c) d bewirkt eine Verschiebung des Funktionsgraphen in y -Richtung.

Soll f also fünf Nullstellen besitzen, so ist es sinnvoll, die Hoch- und Tiefpunkte zu ermitteln.

Max/Min-Bestimmung mit dem CAS:

$$\text{HOP}_1 (1 \mid 11,5\bar{3}); \text{HOP}_2 (3 \mid 12,6); \text{TIP}_1 (-1 \mid -21,5\bar{3}); \text{TIP}_2 (2 \mid 9,0\bar{6})$$

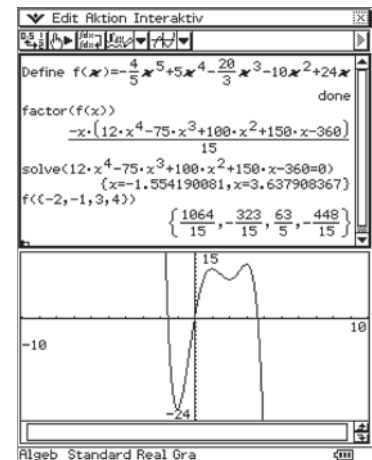
Fünf Nullstellen gibt es also, wenn sich der d -Wert zwischen den negativen y -Werten von HOP_1 und TIP_2 befindet, d. h.

$$d \in]-11,5\bar{3}; -9,0\bar{6}[$$

- d) Doppelte Nullstellen hat f genau dann, wenn der Graph um die negativen y -Werte seiner Extrempunkte verschoben wird:

$$d \in \{-12,6; -11,5\bar{3}; -9,0\bar{6}; 21,5\bar{3}\}$$

- e) $d \in I =]-9,0\bar{6}; 21,5\bar{3}[\cup]-12,6; -11,5\bar{3}[$



8. Optimale Basketballwürfe

- a) Zunächst wird die Funktion f mit zwei Variablen definiert:

$$\text{Define } f(a, x) = 2 + \tan(a) \cdot x - \frac{1}{20 \cdot (\cos a)^2} x^2$$

Nun werden für verschiedene Werte von a (Gradmodus im CAS einstellen!) die Nullstellen bestimmt.

Zum Beispiel: `solve(f(40, x) = 0)`

Durch systematisches Probieren findet man, dass sich für

$x \approx 40,28$ [°] die maximale Wurfweite von ca. 11,832 [m] ergibt.

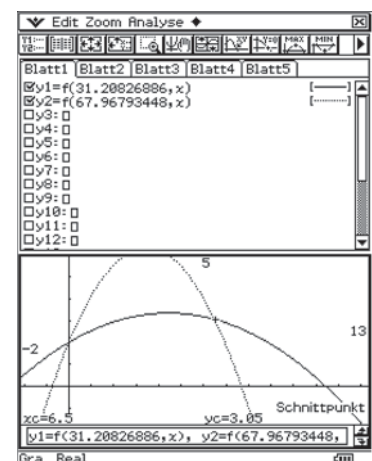
- b) `solve`-Befehl: (CAS in den Gradmodus einstellen!)

$$\text{solve}(f(a, 6,5) = 3,05, a)$$

Es ergeben sich (neben weiteren) zwei relevante Lösungen:

$$a_1 \approx 31,21^\circ; a_2 \approx 67,97^\circ$$

Die entsprechenden Funktionsgraphen sind in der Abbildung rechts dargestellt.



c) Individuelle Lösungen

Prinzipielles Vorgehen: Definiere die Funktion

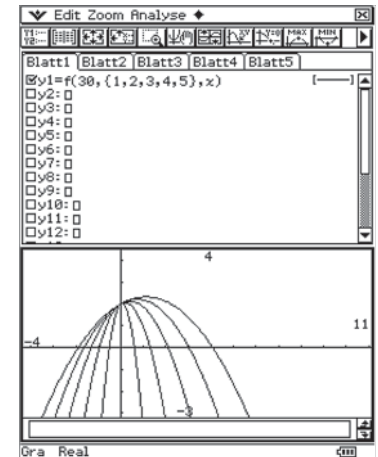
$$f(a, v, x) = 2,00 + \tan(a) \cdot x - \frac{9,81}{2 \cdot v^2 \cdot (\cos a)^2} \cdot x^2$$

Um zum Beispiel die Frage zu beantworten, mit welcher Geschwindigkeit der Ball abgeworfen werden muss, wenn ein 45° Winkel eingehalten wird, muss folgende Gleichung gelöst werden:
 $\text{solve}(f(45, v, 6,5 = 3,05, v)$

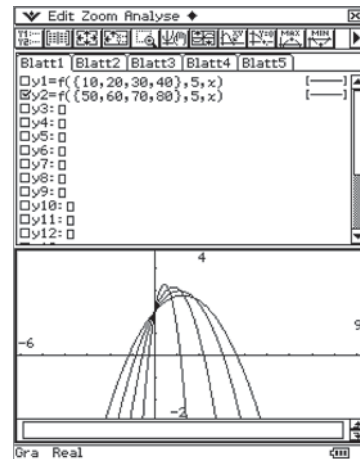
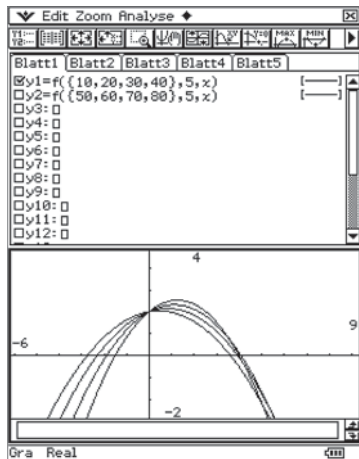
(relevante) Lösung: $v \approx 8,72 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

d) Für $\alpha = 30^\circ$ sind hier Funktionsgraphen für $v = 1, 2, 3, 4, 5$ gezeichnet:

Je größer v wird, desto weiter verschiebt sich der Scheitel nach rechts oben, da mit zunehmender Abwurfgeschwindigkeit auch die maximale Höhe zunimmt.



Wird nun die Geschwindigkeit $v = 5$ gesetzt, so ergeben sich prinzipiell unterschiedliche Funktionsgraphen:



Links werden die Funktionsgraphen mit zunehmendem a weiter und die Wurfweite nimmt zu.

Rechts werden die Funktionsgraphen mit zunehmenden a enger und die Wurfweite nimmt ab.

Die maximale Höhe nimmt mit zunehmendem Abwurfwinkel zu.

An den beiden Kurvenscharen lässt sich das in der hier dargestellten Form nicht erkennen, da die Graphen zu unterschiedlichen Winkelwerten nicht unterschieden werden können. Man kann jedoch die Reihenfolge, in der die einzelnen Scharkurven gezeichnet werden verfolgen oder man fügt für jeden Winkelwert eine eigene Funktion ein und ändert ihre Darstellung im Diagramm.

1. Wiederholung verschiedener Funktionstypen

a)	Funktionsterm	Funktionstyp	Aufgabe	Lösung
	$f(x) = 2 \cdot \sin(3x)$	Trigonometrische Funktion	Bestimmen Sie die Periode!	$p = \frac{2\pi}{3}$
	$f(x) = \frac{x}{x^4 - 1}$	gebrochenrationale Funktion	Geben Sie die Gleichungen der senkrechten Asymptoten an.	$x = -1$ $x = 1$
	$f(x) = x^4 - x^2$	Ganzrationale Funktion	Geben Sie die Nullstellen und deren Vielfachheit an!	$x_1 = 0$ (doppelt) $x_2 = 1$ (einfach) $x_3 = -1$ (einfach)
	$f(x) = 5 \cdot 3^x$	Exponentialfunktion	Bestimmen Sie, ab welchem x gilt: $f(x) > 100$.	$x > 2,73$ (gerundet)
	$f(x) = 2 \cdot (x - 1)^{0,5}$	Wurzelfunktion	Geben Sie den Definitionsbereich an.	$D_f = [-1; \infty[$

b) Individuelle Lösungen; hier werden Beispiellösungen angegeben

Trigonometrische Funktion: $f(x) = 10 \cdot \sin(b \cdot x) + d$

$$f(-1) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 10 \cdot \sin(-b) + d = 2$$

$$f(2) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 10 \cdot \sin(2b) + d = 8$$

Eine der möglichen Lösungen aus dem CAS wählen und damit z. B. den Funktionsterm

$f(x) = 10 \cdot \sin(11,70x) + 4,03$ (gerundete Lösung!) aufstellen.

Gebrochenrationale Funktion: $f(x) = \frac{x-a}{x-b}$

$$f(-1) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1-a}{-1-b} = 2$$

$$f(2) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2-a}{2-b} = 8$$

Lösen mit dem CAS: Mit $a = 6$; $b = 2,5$ erhält man den Funktionsterm $f(x) = \frac{x-6}{x-2,5}$

Ganzrationale Funktion: $f(x) = mx + t$ (Polynom ersten Grades)

$$f(-1) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -m + t = 2$$

$$f(2) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2m + t = 8$$

Lösen mit dem CAS; man erhält $f(x) = 2x + 4$

Exponentialfunktion: $f(x) = a \cdot b^x$

$$f(-1) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot b^{-1} = 2$$

$$f(2) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot b^2 = 8$$

Lösen mit dem CAS: Mit $a = 2 \sqrt[3]{4}$; $b = \sqrt[3]{4}$ erhält man den Funktionsterm $f(x) = 2 \sqrt[3]{4} \cdot (\sqrt[3]{4})^x$

Wurzelfunktion: $f(x) = a \cdot \sqrt{x-b}$

$$f(-1) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \sqrt{-1-b} = 2$$

$$f(2) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \sqrt{2-b} = 8$$

Lösen mit dem CAS: Mit $a = 2\sqrt{5}$; $b = -\frac{6}{5}$ erhält man den Funktionsterm $f(x) = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{x + \frac{6}{5}}$

2. Funktionsterme bestimmen

Individuelle Lösungen

a) z. B. $f(x) = \log_7 x$

b) z. B. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

c) z. B. $f(x) = 2 + \sin x$

d) z. B. $f(x) = (x + 1)^2 \cdot x \cdot (x - 1)^2$

Hinweis: Obige Funktion hat (mindestens) eine doppelte Nullstelle. Andernfalls wäre die Aufgabe unlösbar. Sonst hätte in der Aufgabe nach „genau einer doppelten Nullstelle“ gefragt werden müssen.

e) z. B. $f(x) = \frac{2}{x+1}$

3. Verhalten im Unendlichen

Individuelle Beispiele zur Überprüfung

a) Die Aussage ist richtig.

Begründung: Stellt man sich den Funktionsgraphen für große x vor, so bewirkt $f(x)$ nur eine Verschiebung in y -Richtung um seinen Grenzwert. Die Funktion g bewirkt weiterhin, dass sich kein Grenzwert aus $\mathbb{R}$ einstellen kann. Die Summenfunktion $f(x) + g(x)$ ist also stets divergent, wenn einer der Summanden divergent ist.

b) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$ ist konvergent gegen 0; $g(x) = x$ ist divergent gegen ∞ .

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{x} + x = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{x} = \frac{1+x^2}{x}. \text{ Die Funktion } f(x) + g(x) \text{ divergiert gegen } \infty.$$

c) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$ ist konvergent gegen 0; $g(x) = x$ ist divergent gegen ∞ .
 $f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x} \cdot x = 1$ ist also konvergent gegen 1.

d) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$ ist konvergent gegen 0; $g(x) = x^2$ ist divergent gegen ∞ .
 $f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x} \cdot x^2 = x$ ist also divergent gegen ∞ .

4. Verschieben, Spiegeln und Strecken eines Funktionsgraphen

$$f(x) = 0,5x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 2}{2x}.$$

Aufgabe	Neuer Funktionsterm
Verschieben Sie den Funktionsgraphen G_f so, dass eine Asymptotengleichung $x = 5$ lautet.	$g(x) = f(x - 5) = \frac{x^2 - 10x + 23}{2x - 10}$
Spiegeln Sie den Funktionsgraphen G_g am Ursprung.	$h(x) = -g(-x) = \frac{x^2 + 10x + 23}{2x + 10}$
Strecken Sie den Funktionsgraphen G_h so, dass der Schnittpunkt von G_h mit der y -Achse auf den Punkt $(0 5)$ zu liegen kommt.	$h(0) = 2,3 \Rightarrow \text{Streckungsfaktor: } \frac{5}{2,3} = \frac{50}{23}$ $k(x) = \frac{50}{23} \cdot h(x) = \frac{50}{23} \cdot \frac{x^2 + 10x + 23}{2x + 10}$