

3

Wahrscheinlichkeitsrechnung

EINSTIEG

In Kopenhagen wohnen ungefähr 520 000 Menschen, die insgesamt 560 000 Fahrräder besitzen. Damit gilt Kopenhagen als eine Hochburg von Fahrradfahrern. Etwa 50 % der Bevölkerung fahren täglich mit dem Fahrrad zur Arbeit. Zusammen sollen alle Kopenhagener im Jahr fast 1,2 Millionen Kilometer mit dem Rad fahren, aber nur 660 000 Kilometer mit der Metro.

- Recherchiere, wie weit es von der Erde bis zum Mond ist, und gib an, wie oft die Kopenhagener Bevölkerung diese Strecke jährlich mit dem Fahrrad zurücklegt.
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass von drei zufällig ausgewählten, arbeitenden Kopenhagenern alle täglich mit dem Fahrrad zur Arbeit fahren.
- Schätze, wie viele Kopenhagener man mindestens befragen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % mindestens einen zu finden, der nicht täglich mit dem Fahrrad zur Arbeit fährt.

AUSBlick

Am Ende dieses Kapitels hast du gelernt, ...

- Mehrstufige Zufallsexperimente zu erfassen.
- Wahrscheinlichkeiten binomialverteilter Zufallsgrößen zu berechnen.

KAPITEL 3

**Schnelles Drehen einer Münze**

Schnippe eine 1-€-Münze auf deinem Tisch so an, dass sie sich schnell dreht. Notiere, welche Seite oben liegt, wenn die Münze auf dem Tisch liegen bleibt. (Wenn die Münze vom Tisch fällt oder sich nicht schnell gedreht hat, zählt der Versuch nicht!)

- Führe jeweils eine große Anzahl an Versuchen mit verschiedenen 1-€-Münzen (z. B. Frankreich 1999, Italien 2002, ...) durch. Für welche der Münzen siehst du die Laplace-Annahme als gerechtfertigt an? Begründe.

MERKWISSEN

Du weißt bereits, dass bei einem **Laplace-Experiment** alle n möglichen Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ haben.

Bestimmen der **Laplace-Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E**:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} \quad |E|: \text{Anzahl der Ergebnisse, die das Ereignis E enthält} \\ |\Omega|: \text{Anzahl aller Ergebnisse des Ergebnisraums } \Omega$$

Führt man ein Zufallsexperiment sehr häufig durch, nähert sich die relative Häufigkeit $h(E)$ eines Ergebnisses E dessen Wahrscheinlichkeit $P(E)$ immer weiter an (**Gesetz der großen Zahlen**).

Mehrstufige Zufallsexperimente können in einem **Baumdiagramm** veranschaulicht werden. Für die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse gilt:

1. Pfadregel:

Jedem **Ergebnis** entspricht genau **ein Pfad im Baumdiagramm**. Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses wird berechnet, indem alle Wahrscheinlichkeiten **entlang des Pfads** miteinander **multipliziert** werden.

2. Pfadregel:

Gehören zu einem **Ereignis** mehrere Ergebnisse, müssen die **Pfadwahrscheinlichkeiten** der einzelnen Ergebnisse **addiert** werden, um die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses zu berechnen.

Man sagt auch:

günstige Ergebnisse „
“mögliche Ergebnisse“

Ein Zufallsexperiment, das mehrmals nacheinander durchgeführt wird, heißt mehrstufig.

BEISPIELE

- I** Beim Mensch-ärgere-dich-nicht wird mit einem Laplace-Würfel geworfen.
- Ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Wurf keine Sechs gewürfelt wird.
 - Zu Beginn des Spiels hat man maximal drei Versuche, um eine Sechs zu würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man starten darf?

Lösung:

- a)** E: „Mit dem Laplace-Würfel wird keine Sechs gewürfelt.“

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}; E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

1. Möglichkeit:

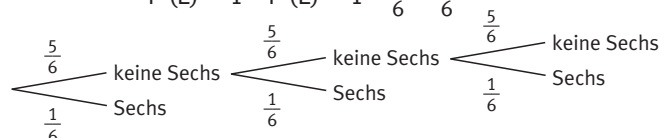
$$P(E) = P(\text{„1, 2, 3, 4 oder 5“}) \\ = \frac{5}{6}$$

2. Möglichkeit:

$$P(\bar{E}) = P(6) = \frac{1}{6} \\ P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

- b)** P („Man darf starten.“)

$$= 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{91}{216}$$



VERSTÄNDNIS

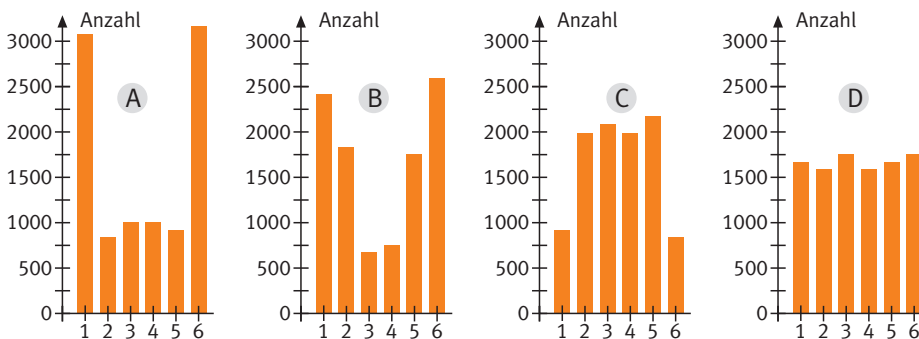
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E ist $P(E) = p$ mit $0 \leq p \leq 1$. Welchen Wert hat die Wahrscheinlichkeit $P(\bar{E})$ des zugehörigen Gegenereignisses $\bar{E}$?
- Angenommen, eine Laplace-Münze wird zweimal (dreimal, viermal, n -mal mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) nacheinander geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man dabei zweimal (dreimal, viermal, n -mal) Zahl als Ergebnis? Erläutere.

- Aus einer Urne mit drei gelben und vier blauen Kugeln werden nacheinander
 - zwei Kugeln mit Zurücklegen
 - zwei Kugeln ohne Zurücklegen
 gezogen. Zeichne jeweils ein Baumdiagramm und berechne die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen zweier gleicher Kugeln.
- Aus einer Urne werden nacheinander (ohne Zurücklegen) vier Kugeln gezogen. Aus den gezogenen Kugeln soll das Wort AFFE gebildet werden. Ermittle die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis, wenn ...
 - die Kugeln in der richtigen Reihenfolge gezogen werden müssen.
 - die Reihenfolge nach dem Ziehen verändert werden darf.
- Bei Bluttransfusionen ist es wichtig, dass die passende Blutgruppe verwendet wird. Die Tabelle zeigt, welche Spender- zu welchen Empfängerblutgruppen passen. In Deutschland haben von 100 Personen durchschnittlich 43 Personen die Blutgruppe A, 11 Personen B, 5 Personen AB und der Rest 0.

- Gib für jede Blutgruppe die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Spender eine passende Blutgruppe hat.
- Gib für jede Blutgruppe die Wahrscheinlichkeit an, dass das Blut für einen Empfänger, dessen Blutgruppe noch nicht bekannt ist, geeignet ist.

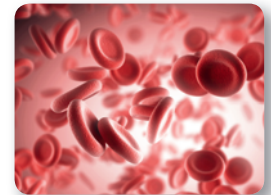
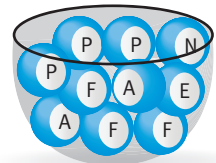
		Empfänger			
		0	A	B	AB
Spender	0	✓	✓	✓	✓
	A		✓		✓
	B			✓	✓
	AB				✓

- Die Klasse 8a hat mit verschiedenen „Würfeln“ je 10 000-mal gewürfelt und ihre Ergebnisse in Säulendiagrammen veranschaulicht.

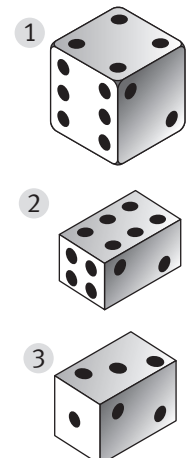


- Welches Diagramm gehört zu welchem Würfel? Begründe deine Antwort.
- Paulina würfelt gleichzeitig mit den Würfeln 2 und 3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit würfelt sie einen Pasch?

AUFGABEN



Die Summe gegenüberliegender Augenzahlen beträgt stets 7.



KAPITEL 3



Tim kauft vier Überraschungseier. Laut Hersteller befindet sich in jedem fünften Ei die Figur eines Comichelden.

- Gib jeweils einen Term an, mit dem man die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse berechnen kann:
 E_1 : „Tim findet keine Comicfigur.“
 E_2 : „Tim findet genau eine Comicfigur.“
 E_3 : „Tim findet frühestens im letzten Ei eine Comicfigur.“
- Finde heraus, wie viele Überraschungseier Tim mindestens kaufen müsste, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine Comicfigur zu erhalten.
- Begründe, dass dieses Zufallsexperiment mit dem Ziehen mit Zurücklegen vergleichbar ist.

MERKWISSEN

Ist ein Zufallsexperiment mit dem **Ziehen mit Zurücklegen** einer Kugel aus einer Urne vergleichbar, dann bleibt die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis bei jeder Durchführung des Experiments gleich.

Sei $P(T)$ die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis T („Treffer“), so ist die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis $\bar{T}$ („kein Treffer“ bzw. „Niete“): $P(\bar{T}) = 1 - P(T)$.

Es gilt:

$$P(\text{„Treffer im 1. Versuch“}) = P(T)$$

$$P(\text{„erster Treffer im 2. Versuch“}) = P(\bar{T}T) = P(\bar{T}) \cdot P(T) = [1 - P(T)] \cdot P(T)$$

$$P(\text{„erster Treffer im 3. Versuch“}) = P(\bar{T}\bar{T}T) = P(\bar{T}) \cdot P(\bar{T}) \cdot P(T) = [1 - P(T)]^2 \cdot P(T)$$

...

$$P(\text{„erster Treffer im } n\text{-ten Versuch“}) = P(\bar{T})^{n-1} \cdot P(T) = [1 - P(T)]^{n-1} \cdot P(T)$$

Ist ein Zufallsexperiment mit dem **Ziehen ohne Zurücklegen** einer Kugel vergleichbar, dann ändert sich die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis in jedem Durchgang.

BEISPIELE

Bei Ereignis E_3 bedeutet „frühestens im vierten Versuch ein Treffer“, dass es in den ersten drei Versuchen keinen Treffer gibt.

Gehe alle Möglichkeiten durch.

I Ein Laplace-Würfel wird mehrmals geworfen.

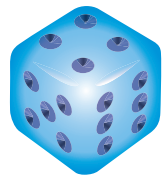
a) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_1 : „Im zweiten Wurf erscheint die erste Sechs.“

E_2 : „Bei den ersten drei Würfeln fällt genau eine Sechs.“

E_3 : „Die erste Sechs erscheint frühestens im vierten Versuch.“

b) Berechne, wie oft der Würfel mindestens geworfen werden muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine Sechs gewürfelt wird.



Lösung:

Sei T : „Es wird eine Sechs gewürfelt.“ $\Rightarrow P(T) = \frac{1}{6}$; $P(\bar{T}) = 1 - P(T) = \frac{5}{6}$

$$a) P(E_1) = P(\bar{T}T) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} \approx 13,9 \%$$

$$P(E_2) = P(\bar{T}\bar{T}T) + P(\bar{T}T\bar{T}) + P(T\bar{T}\bar{T}) = 3 \cdot P(\bar{T}\bar{T}T) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72} \approx 34,7 \%$$

$$P(E_3) = P(\text{„keine Sechs bei den ersten drei Würfeln“}) = P(\bar{T}\bar{T}\bar{T}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \approx 57,9 \%$$

- b) Gesucht ist die **Mindestanzahl** n der Würfe.
 Betrachte das Gegenereignis für n Würfe:
 $P(\text{„mindestens eine Sechs“}) = 1 - P(\text{„keine Sechs“})$
 Übersetzung **mindestens** 90 %:

$$P(\text{„mindestens eine Sechs“}) \geq 0,9$$

$$1 - P(\text{„keine Sechs“}) \geq 0,9$$

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,9 \quad | + \left(\frac{5}{6}\right)^n | - 0,9$$

$$1 - 0,9 \geq \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$0,1 \geq \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\text{Probieren liefert: } \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 0,1345 \quad \left(\frac{5}{6}\right)^{12} \approx 0,1122 \quad \left(\frac{5}{6}\right)^{13} \approx 0,0935$$

Es gilt: Je größer n ist, desto kleiner ist $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Da $0,1 > 0,0935$, muss man den Würfel mindestens **13-mal** werfen.

Eine solche Aufgabe bezeichnet man als „mindestens-mindestens-mindestens-Aufgabe“.

- II Marlon, Tessa, Jona und Ines setzen sich in zufälliger Reihenfolge auf eine Parkbank.

- Gib ein passendes Urnenmodell an.
- Berechne die Anzahl der unterschiedlichen Reihenfolgen.
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass Tessa neben Jona sitzt und gleichzeitig Ines neben Marlon.



Lösung:

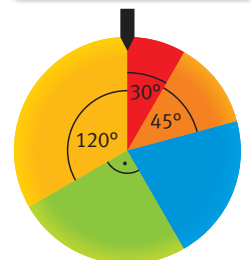
- In einer Urne befinden sich 4 verschiedenfarbige Kugeln. Es werden nacheinander alle vier Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
- Anzahl der Möglichkeiten: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- Auf dem ersten Platz kann jeder sitzen: 4 Möglichkeiten.
 Auf dem zweiten Platz sitzt der Nachbar der ersten Person: 1 Möglichkeit.
 Auf dem dritten Platz kann jeder der Übrigen sitzen: 2 Möglichkeiten.
 Für den vierten Platz ist nur noch eine Person übrig: 1 Möglichkeit.
 Anzahl der Möglichkeiten: $4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8$. Die Wahrscheinlichkeit, die gewünschte Reihenfolge zu treffen, ist somit $P(\text{„Sitzordnung“}) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

VERSTÄNDNIS

- Beschreibe den Unterschied zwischen „Die Wahrscheinlichkeit beträgt mehr als 60 %“ und „Die Wahrscheinlichkeit beträgt mindestens 60 %“.
- Wahr oder falsch? Die Ereignisse „erster Treffer im 8. Versuch“ und „kein Treffer vor dem 7. Versuch“ sind gleich. Begründe.

- Gib ein passendes Urnenmodell an. Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten.
 - Ein Multiple-Choice-Test besteht aus acht Fragen. Bei jeder sind fünf Antwortmöglichkeiten vorgegeben, von denen jeweils nur eine richtig ist.
 - Die 10 Teilnehmer eines 100-m-Laufs kämpfen um die ersten drei Plätze.
 - Alle vier Mitglieder der Familie Tietz haben an unterschiedlichen Wochentagen Geburtstag.
 - Das abgebildete Glücksrad wird dreimal gedreht.

AUFGABEN





Eine Slackline ist ein gespanntes Gurtband, auf dem man laufen und Kunststücke machen kann, ähnlich wie beim Seiltanzen.

- 2 In einer 10. Klasse sind 12 Mädchen und 16 Buben. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei den ersten beiden auf der Klassenliste ...
 - a) nicht um zwei Buben handelt.
 - b) um ein Mädchen und einen Buben handelt.
- 3 Clara trainiert, sich auf ihrer Slackline umzudrehen. Dies gelingt ihr mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 %.
 - a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ihr das Umdrehen bei fünf Versuchen ...
 - 1 fünfmal gelingt.
 - 2 nie gelingt.
 - 3 genau einmal gelingt.
 - 4 mindestens einmal gelingt.
 - 5 spätestens beim dritten Versuch gelingt.
 - 6 beim dritten Versuch zum ersten Mal gelingt.
 - 7 frühestens beim fünften Versuch gelingt.
 - 8 genau dreimal gelingt.
 - b) Berechne, wie oft Clara das Umdrehen auf der Slackline mindestens probieren muss, damit es ihr mit mindestens 98%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal gelingt.
- 4 Zur Fußball-WM 2018 wurden Sammelbildchen in Päckchen mit je 5 Stück verkauft. Etwa 10 % der Aufkleber waren glänzende Sondermotive.
 - a) Begründe, dass man das Kaufen von Sammelbildchen mit dem Ziehen mit Zurücklegen vergleichen kann. Gib an, wie viele Kugeln die Urne enthält.
 - b) Mateo hat sich 6 Päckchen mit Bildern gekauft. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der er ein (mehr als ein) Sondermotiv erhält.
 - c) Berechne, wie viele Päckchen man mindestens kaufen musste, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % mindestens ein Sonderbildchen zu bekommen.
- 5 Zu einzelnen Pressemeldungen wurden Schlagzeilen entworfen, die jedoch allesamt falsche Schlüsse beinhalten. Beschreibe die Fehler.

Motorräder beliebter als Autos

Von den 2800 Mitgliedern eines Motorradclubs gaben fast 80 % an, dass sie ihr Motorrad dem Auto vorziehen.

Zu Hause lebt man am gefährlichsten

Ein Großteil der Deutschen stirbt in den eigenen vier Wänden.

- 6 Vor dem Winter lassen sich viele Menschen gegen Grippe impfen. Von einem Arzt werden 201 Patienten angeschrieben, denen die Impfung besonders empfohlen wird (z. B. Senioren). Davon lassen sich im Laufe der Zeit 125 Patienten impfen. Am Ende des Winters stellt der Arzt fest, dass trotz der Impfung 47 von ihnen erkrankt sind. Von den nicht geimpften Patienten sind 21 nicht erkrankt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ...
 - a) ein Patient aus der angeschriebenen Gruppe am Grippevirus erkrankt ist.
 - b) eine geimpfte Person erkrankt ist.
 - c) eine erkrankte Person geimpft war.

- 7 Bei einer Studie soll der Anteil der Autofahrer bestimmt werden, die am Steuer gelegentlich ohne Freisprechanlage telefonieren. Um möglichst ehrliche Antworten zu erhalten, bekommen die Befragten folgende Anweisung:

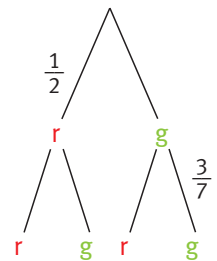


Würfeln Sie einmal, bevor Sie antworten.
Zeigt der Würfel 1 oder 2, antworten Sie mit „Ja“, unabhängig davon, ob Sie tatsächlich am Steuer telefonieren.
Bei Augenzahl 3 oder 4 antworten Sie in jedem Fall mit „Nein“.
Nur falls Sie 5 oder 6 würfeln, antworten Sie bitte ehrlich auf die Frage „Telefonieren Sie am Steuer gelegentlich ohne Freisprechanlage?“.

Insgesamt antworten etwa 53 % der Befragten mit „Ja“.
Zeichne ein Baumdiagramm und ermittle damit den tatsächlichen Anteil der Autofahrer, die am Steuer telefonieren.

- 8 Bei einer Befragung gaben 36 % aller 14- bis 18-Jährigen an, ein Musikinstrument zu spielen. 56 % dieser Jugendlichen haben eigenen Angaben zufolge Eltern, die selbst musizieren. Im Gegensatz dazu haben nur 12 % der Jugendlichen, die kein Instrument spielen, musizierende Eltern.

Zeichne zu den im Zeitungsartikel genannten Daten ein beschriftetes Baumdiagramm.



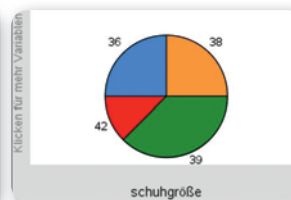
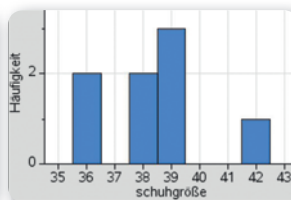
- 9 Das abgebildete Baumdiagramm gehört zu einem Urnenexperiment.
- Begründe, ob es sich bei dem Urnenexperiment um „Ziehen mit Zurücklegen“ oder „Ziehen ohne Zurücklegen“ handelt.
 - Übertrage das Baumdiagramm ins Heft, vervollständige die Beschriftung und ergänze eine dritte Ebene.
- 10 Lucy möchte von ihren Eltern gerne eine Taschengelderhöhung. Die Eltern sind dazu bereit, falls sie von drei Schachspielen, die sie abwechselnd gegen Vater und Mutter spielen muss, mindestens zwei aufeinanderfolgende Spiele gewinnt. Gegen wen sollte Lucy zuerst spielen, wenn sie sich gegen ihren Vater höhere Gewinnchancen ausrechnet als gegen ihre Mutter?



- 11 Tabellenkalkulationsprogramme bieten sich an, um statistische Daten oder Zufallsexperimente auszuwerten.

- Führe in deiner Klasse eine Umfrage zu einem selbstgewählten Thema durch (Alter, Körpergröße, Schuhgröße, PLZ, ...).
- Bestimme die statistischen Kenngrößen, die du kennst.
- Stelle die Daten in einem Kreisdiagramm dar.

	A	B	C	D
1	1.59	39	Titel	Statistik
2	1.67	42	R	1.57
3	1.42	36	Min	1.42
4	1.56	38	Max	1.67
5	1.61	39	Median	1.59



KAPITEL 3



Im ersten Fall sollen alle k Karten jeweils verschieden sein.

Ein Radiosender verlost unter den ersten 50 Anrufern in einer Sendung drei Freikarten für ein Musikfestival. Wir betrachten verschiedene Verlosungen:

1 Es werden eine 1-Tages-, eine 2-Tages- und eine 3-Tageskarte verlost.

2 Es werden drei 1-Tageskarten verlost.

- Bestimme, wie viele Möglichkeiten es für jede Verlosung gibt. Begründe Unterschiede in der Anzahl an Möglichkeiten.
- Beschreibe für beide Verlosungen ein passendes Urnenexperiment.
- Untersuche die Anzahl der Möglichkeiten für beide Verlosungen, wenn unter n Anrufern insgesamt k Karten verlost werden ($k < n$).

MERKWISSEN

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) werden k Kugeln entnommen ($k \in \mathbb{N}_0, k \leq n$). Wir unterscheiden folgende Fälle:

1 Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge

Urnenexperiment: Aus einer Urne mit n Kugeln wird k -mal nacheinander gezogen. Dabei wird nach jedem Zug die gezogene Kugel wieder in die Urne zurückgelegt. Die Reihenfolge der Ergebnisse wird registriert. Es gibt n^k Möglichkeiten.

2 Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge

Urnenexperiment: Aus einer Urne mit n Kugeln wird k -mal nacheinander gezogen. Dabei wird nach jedem Zug die gezogene Kugel zur Seite gelegt. Die Reihenfolge der Ergebnisse wird registriert.

Es gibt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten.

3 Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Urnenexperiment: Aus einer Urne mit n Kugeln werden k Kugeln gleichzeitig gezogen (bzw. k -mal nacheinander eine Kugel gezogen und zur Seite gelegt. Die Reihenfolge spielt dabei – wie bei den Lottoziehungen – keine Rolle).

Es gibt $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten.
 $\frac{n!}{(n-k)! k!} = \binom{n}{k}$ bezeichnet man kurz als **Binomialkoeffizient** („ n über k “).

n unterscheidbare Gegenstände kann man auf $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene Arten anordnen.

BEISPIELE

Jeder Schüler bekommt höchstens ein Buch.

- I Die Englischlehrerin hat drei Wörterbücher geschenkt bekommen. Sie verlost sie unter den 23 Schülern ihrer zehnten Klasse. Berechne, auf wie viele verschiedene Arten dies möglich ist, falls es sich um drei Wörterbücher handelt, ...

- von denen keines einem anderen gleicht.
- die alle identisch sind.

Lösung:

- a) $23 \cdot 22 \cdot 21 = 10\,626$

Fall 1: Für das erste Buch hat sie 23 Möglichkeiten, für das zweite noch 22 Möglichkeiten, für das dritte verbleiben noch 21.

$$b) \binom{23}{3} = \frac{23!}{(23-3)! 3!} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1771$$

Fall 3: Wenn für jeweils 3 gezogene Schüler die Auswahl der Bücher nicht mehr unterschieden werden kann, dann sind in a) sämtliche 3er-Anordnungen zu viel enthalten.

VERSTÄNDNIS

- Begründe die Gleichheit: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Wahr oder falsch? 5 Personen haben $\frac{10!}{5!}$ verschiedene Möglichkeiten, auf 10 Stühlen Platz zu nehmen. Begründe.

- Berechne ohne Hilfsmittel. Beschreibe die Bedeutung des Binomialkoeffizienten in einem Urnenexperiment.
 - $\binom{4}{2}; \binom{5}{3}$
 - $\binom{5}{2}; \binom{12}{4}$
 - $\binom{6}{1}; \binom{10}{8}$
 - $\binom{1000}{999}; \binom{49}{6}$
 - Zeige die Gleichheit.
 - $\binom{12}{10} = \binom{12}{2}$
 - $\binom{25}{10} = \binom{25}{15}$
 - $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- In einer Urne sind 15 Kugeln mit den Zahlen 1 bis 15. Erkläre die Bedeutung der folgenden Terme in einem passenden Urnenexperiment.
 - 15^6
 - $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$
 - $\binom{15}{7}$
 - $\frac{15!}{6! \cdot 9!}$
 - $\frac{15!}{9!}$
- Beschreibe ein passendes Urnenmodell.
 - Der Trainer einer Fußballmannschaft wählt für ein Fußballspiel von den 20 Feldspielern, die er zur Verfügung hat, 10 zufällig aus.
 - Aus den Ziffern 2, 3, 4, 5 und 6 soll eine dreistellige Zahl gebildet werden, die keine Ziffer mehr als einmal enthält.
 - Aus einer Klasse mit 12 Jungen und 15 Mädchen soll eine Gruppe mit zwei Buben und zwei Mädchen gebildet werden.
- Überprüfe die nebenstehende Tabelle mit deinem Taschenrechner.
Gib eine allgemeine Formel für die Berechnung an, die hinter der Taste **nCr** stattfindet.
- Begründe, dass man die Buchstaben des Worts HONOLULU auf $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!}$ verschiedene Arten anordnen kann. Dabei werden auch „Wörter“ betrachtet, die keinen Sinn ergeben (z. B. NOLLUHOU).
 - Ermittle, auf wie viele Arten man die Buchstaben folgender Wörter anordnen kann:
 - ANANAS
 - MISSISSIPPI
 - dein Vorname
- Computer arbeiten nur mit Nullen und Einsen. Alle ihre Zeichen, sogenannte Bytes, bestehen aus 8 Stellen, von denen jede mit Null oder Eins belegt werden kann. Berechne, wie viele verschiedene Zeichen es gibt.
- Bei einer Geburtstagsfeier sind 12 Personen anwesend. Finde heraus, wie oft die Gläser klingen, wenn jeder mit jedem einmal anstößt.
- Berechne die Anzahl der zehnstelligen Zahlen, die die Ziffer 1 einmal, die Ziffer 2 zweimal, die 3 dreimal und die 4 viermal enthalten.

AUFGABEN



Kontrolliere die Ergebnisse, soweit dies möglich ist, mit deinem Taschenrechner.

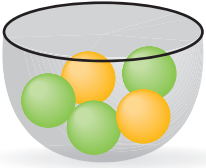


Der Befehl **nCr** ist häufig über die Shift-Taste anzusteuern.

Eingabe	Ausgabe
$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}$	20
6 nCr 3	20
$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$	210
10 nCr 4	210



KAPITEL 3



Schweizer Mathematiker
Jakob I. Bernoulli
(1655–1705)

Zugehöriges Urnenmodell:
 n -maliges Ziehen mit
Zurücklegen

Aus der abgebildeten Urne werden nacheinander vier Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Das Ziehen einer gelben Kugel wird als „Treffer“ interpretiert.

- Gib die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse „Treffer“ und „Niete“ an.
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, keinen (vier) Treffer zu erzielen.
- Berechne, auf wie viele Arten es möglich ist, einen Treffer und drei Nieten zu ziehen. Bestimme mithilfe dieser Anzahl die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Genau ein Treffer bei vier Versuchen“.
- Berechne P („zwei Treffer bei vier Versuchen“).

MERKWISSEN

Hat ein Zufallsexperiment genau zwei Ergebnisse (z. B. Treffer/Niete), liegt ein **Bernoulli-Experiment** vor. Die Trefferwahrscheinlichkeit wird mit p bezeichnet, die Wahrscheinlichkeit für eine Niete mit $q = 1 - p$.

Wiederholt man dasselbe Bernoulli-Experiment n -mal ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$), erhält man eine **Bernoulli-Kette der Länge n** . Es gilt:

- Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n hat jedes Ergebnis, das aus k Treffern ($k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$) und $n - k$ Nieten besteht, die gleiche Wahrscheinlichkeit $p^k \cdot q^{n-k} = p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$.
- Für k Treffer und $n - k$ Nieten gibt es $\binom{n}{k}$ Anordnungsmöglichkeiten.

Damit ergibt sich:

Für die **Wahrscheinlichkeit**, bei einer **Bernoulli-Kette der Länge n** mit der **Trefferwahrscheinlichkeit p genau k Treffer** zu erzielen, gilt:

$$P(\text{„genau } k \text{ Treffer“}) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

BEISPIELE

- I Entscheide, ob es sich um eine Bernoulli-Kette handelt. Begründe.
- a) Ein Kopiergerät macht mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % einwandfreie Kopien. Nelly macht 30 Kopien für ein Referat.
 - b) Ein Gewichtheber schafft es zu Beginn einer Trainingseinheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %, 100 kg zu stoßen. Er trainiert 20 Stöße.

Lösung:

- a) Hier handelt es sich um eine Bernoulli-Kette, denn das Kopiergerät fertigt in jedem der 30 Fälle mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0,99$ eine gute Kopie an.
- b) Da der Gewichtheber im Laufe des Trainings müde wird, sinkt die Trefferwahrscheinlichkeit von anfangs 0,6. Die Bedingungen des Experiments verändern sich also, es liegt keine Bernoulli-Kette vor.

- II Ein Laplace-Würfel wird viermal geworfen.

- a) Begründe, dass es sich hierbei um ein Bernoulli-Experiment handelt.
- b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für das Werfen von genau zwei Sechsern.

Lösung:

- a) Es liegt ein viermaliges Ziehen aus einer Urne mit 6 verschiedenen Kugeln mit Zurücklegen vor. Die Wahrscheinlichkeit ändert sich von Wurf zu Wurf nicht.
- b) $n = 4$, X : „Anzahl Treffer bei 4-mal Würfeln“, Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4-2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{25}{36} = \frac{25}{216} \approx 11,6 \%$$

III Nach Angaben einer Telefongesellschaft kommt man nur bei 90 % aller Auslandsgespräche bereits beim ersten Wählen durch. Sophie möchte zehn solcher Telefonate tätigen. Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit sie ...

- a) jedes Mal durchkommt. b) mindestens achtmal durchkommt.

Lösung:

X: „Anzahl ‚Durchkommen‘ bei 10 Anrufen“

$$a) P(X = 10) = \binom{10}{10} \cdot 0,9^{10} \cdot 0,1^0 = 0,9^{10} \approx 34,9 \%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 35 % kommt Sophie jedes Mal durch.

$$b) P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\ = \binom{10}{8} \cdot 0,9^8 \cdot 0,1^2 + \binom{10}{9} \cdot 0,9^9 \cdot 0,1^1 + \binom{10}{10} \cdot 0,9^{10} \cdot 0,1^0 \approx 93,0 \%$$

Die Wahrscheinlichkeit, mindestens achtmal durchzukommen, liegt bei 93 %.

Sprechweisen:

„mindestens“ $\rightarrow \geq$

„mehr als“ $\rightarrow >$

„höchstens“ $\rightarrow \leq$

„weniger als“ $\rightarrow <$

VERSTÄNDNIS

- Begründe die Berechnung der Wahrscheinlichkeit einer Bernoulli-Kette der Länge n für k Treffer ($k \leq n$).
- Wahr oder falsch? Bei einer Bernoulli-Kette der Länge 8 und Trefferwahrscheinlichkeit 0,9 ist die Wahrscheinlichkeit, genau 3 Treffer zu erzielen, $\binom{8}{3} \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^5$.

AUFGABEN

- 1 Entscheide, ob es sich beim beschriebenen Zufallsexperiment um eine Bernoulli-Kette handelt. Gib in dem Fall die Parameter n und p an.
 - a) Aus einer Urne mit 13 weißen und 27 schwarzen Kugeln werden nacheinander 5 Kugeln gezogen (Treffer: „Ziehen einer weißen Kugel“):
 - 1 mit Zurücklegen. 2 ohne Zurücklegen.
 - b) Die Einnahme eines bestimmten Medikaments führt in 75 % aller Fälle zu einer Linderung der Symptome. Im letzten Jahr wurde es bundesweit 3086 Patienten verschrieben.
 - c) Pia versucht mit einem gezinkten Würfel, bei dem die Sechs durchschnittlich doppelt so häufig geworfen wird wie alle anderen Zahlen, beim Mensch-ärgere-dich-nicht-Spiel aus dem Haus zu kommen.
 - d) Aus Erfahrung weiß ein Gärtner, dass Tulpenzwiebeln mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % austreiben. Er setzt 1000 Stück gleichzeitig ein.
- 2 Ein Laplace-Würfel wird fünfmal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit für folgende Ergebnisse:

a) keine Sechs	b) genau eine Sechs
c) genau zwei Sechser	d) genau vier Sechser
e) höchstens zwei Sechser	f) mindestens eine Sechs
- 3 Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n sei p die Trefferwahrscheinlichkeit. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl k der Treffer. Bestimme die jeweils angegebene Wahrscheinlichkeit.

a) $n = 6; p = \frac{1}{3}; P(X = 4)$	b) $n = 5; p = 0,1; P(X = 2)$
c) $n = 4; p = 0,4; P(X < 3)$	d) $n = 4; p = 0,4; P(X \leq 2)$
e) $n = 6; p = 0,7; P(1 \leq X \leq 3)$	f) $n = 6; p = 0,7; P(X > 4)$

Tipp:
Betrachte bei c) – f) jeweils die einzelnen Fälle für genau k Treffer.

10 Beim Zoll stehen neun Personen an; vier von ihnen sind Schmuggler. Der Zollbeamte bittet drei der neun Personen zur Kontrolle.

- Modelliere die Situation mithilfe eines Urnenmodells.
- Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit unter diesen drei Personen ...
 - kein Schmuggler ist.
 - genau ein Schmuggler ist.
 - höchstens ein Schmuggler ist.
 - mindestens ein Schmuggler ist.

11 In einer Fabrik werden je neun Schokoküsse in einer Schachtel verpackt. Erfahrungsgemäß ist jeder fünfzigste angebrochen.

- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Schachtel alle Schokoküsse intakt sind.
- 20 Schachteln werden an 20 Kunden verkauft. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei der Kunden mindestens einen gebrochenen Schokokuss in ihrer Packung haben.



12 Im Wahlkurs Spanisch sind vier Schülerinnen und sechs Schüler. Aus ihnen werden zufällig 5 Personen ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt dabei die Anzahl der Mädchen.

- Simuliere die Situation durch ein Urnenmodell.
- Übertrage die Tabelle ins Heft und ergänze sie.

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	☐	☐	☐	☐	☐	☐

- Veranschauliche die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit einem Stabdiagramm.

13 Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Mädchens beträgt 48,6 %. In einer kleinen Klinik kamen an einem Tag fünf Kinder zur Welt. Übertrage die Tabelle ins Heft, ergänze und erläutere sie.

X : „Anzahl der an diesem Tag in dieser Klinik geborenen Mädchen“

$X = k$	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	☐	☐	☐	☐	☐	☐



14 Beim maschinellen Abfüllen von Marmelade wird der „Sollwert“ von 400 g nicht immer genau eingehalten. Der Hersteller garantiert aber, dass 95 % der Gläser mindestens 390 g Marmelade enthalten. Bei einer Stichprobe werden 20 aus der laufenden Produktion zufällig entnommene Geleegläser überprüft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ...

- enthalten alle 20 Gläser mindestens 390 g?
- enthält höchstens eines der 20 Gläser weniger als 390 g?
- enthält mindestens eines der 20 Gläser weniger als 390 g?



KAPITEL 3

Zu 3.1

1

Vor langer Zeit, als die feinen Damen noch Hüte trugen und alle Kinder gut erzogen waren, gingen einige feine Damen mit ihren Hüten spazieren. Plötzlich kam ein Windstoß und wehte alle Hüte davon. Ein paar wohlerzogenene Kinder sammelten die Hüte ein und brachten jeder Dame einen.

Ermittle mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit, dass jede der

1 drei ... 2 vier ... 3 fünf ...

Damen ihren eigenen Hut bekommt.

Finde eine Formel für die Wahrscheinlichkeit, dass bei n feinen Damen jede ihren eigenen Hut bekommt.

Zu 3.2

- 2 In einer Schokoladenfabrik werden Überraschungseier produziert. In jedem vierten Ei soll sich laut Hersteller ein Auto befinden. Thomas kauft sich fünf Überraschungseier. Zeichne ein Baumdiagramm. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter ...

- a) fünf Autos befinden.
b) genau ein Auto befindet.

- a) genau 3 Autos befinden.
b) mindestens ein Auto befindet.

- 3 Lucas trainiert Jonglieren. Ein neuer Trick gelingt ihm mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingt ihm dieser neue Trick ...

- a) bei jedem von sechs Versuchen?
b) bei keinem von sechs Versuchen?
c) bei genau einem von sechs Versuchen?

- a) frühestens beim sechsten Versuch?
b) spätestens beim sechsten Versuch?
c) bei sechs Versuchen genau 5 mal?

Zu 3.3

- 4 Leon hat die Nummer seines Zahlenschlosses vergessen. Wie viele Versuche braucht er höchstens, um sein Zahlenschloss zu öffnen, wenn dieses ...

4-stellig ist?

n -stellig ist?

- 5 15 Jungen und 13 Mädchen sind auf einer Klassenfahrt. Für den Küchendienst werden 5 Helfer ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, für die Auswahl von ...

- a) nur Jungen.
b) nur Mädchen.
c) genau einem Jungen.

- a) genau zwei Jungen.
b) mindestens einem Mädchen.
c) höchstens einem Mädchen.

- 6 Bei einem Modelwettbewerb werden Gruppenbilder aufgenommen. Wie viele unterschiedliche Fotos gibt es, wenn ...

- insgesamt 8 Mädchen teilnehmen und
a) alle 8 Mädchen auf dem Gruppenfoto sein sollen.
b) von den 8 Mädchen 3 für das Gruppenfoto ausgesucht werden.

- insgesamt n Mädchen teilnehmen und
a) alle n Mädchen auf dem Gruppenfoto sein sollen.
b) von n Mädchen nur k für das Gruppenfoto ausgesucht werden.

- 7 Ein Laplace-Glücksrad wird dreimal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weist der Zeiger ...

Zu 3.4



- a) dreimal auf eine ungerade Primzahl?
b) abwechselnd auf eine gerade und eine ungerade natürliche Zahl?

- a) beim dritten Drehen zum ersten Mal auf die Zahl 6?
b) frühestens beim dritten Drehen auf die Zahl 6?

- 8 Entscheide, ob es sich beim beschriebenen Zufallsexperiment um eine Bernoulli-Kette handelt.

- a) Eine Gärtnerei liefert Sonnenblumenkerne aus, die zu 95 % aufgehen. Ein Kleingärtner sät 50 Kerne aus.
b) Ein Glücksrad mit roten, grünen und schwarzen Feldern wird 20 mal gedreht.

Unter welcher Voraussetzung handelt es sich beim beschriebenen Zufallsexperiment um eine Bernoulli-Kette?

- a) Aus einer Urne mit 12 weißen und 10 schwarzen Kugeln werden nacheinander 10 Kugeln gezogen.
b) In einem Beutel befinden sich Lose und Nieten. Der Anteil der Nieten beträgt 51 %. Es werden nacheinander 15 Lose gezogen.

- 9 Beim Torwandschießen trifft Andrea erfahrungsgemäß mit 17 % Wahrscheinlichkeit. Sie hat acht Versuche. Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in %) trifft sie ...

- a) nie?
b) genau zweimal?

- a) mindestens zweimal?
b) höchstens zweimal?

- 10 Auf dem Weg zur Arbeit fährt Frau Schreiber über mehrere unabhängig voneinander geschaltete Ampeln. Jede Ampel zeigt in 6 von 10 Fällen grün. Sie erzählt ihrer Kollegin, dass sie mit einer Wahrscheinlichkeit von ...

36 % grüne Welle hat.

- a) Wie viele Ampeln hat sie passiert?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie fünf dieser Ampeln nacheinander bei „grün“ überfahren kann?

ca. 13 % grüne Welle hat.

- a) Wie viele Ampeln hat sie passiert?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei fünf dieser Ampeln mindestens vier „rot“ zeigen?

- 11 Im Jahr 2016 hatten 69,8 % aller Haushalte in Deutschland eine Geschirrspülmaschine. Bei einer Umfrage werden nacheinander 5 Passanten auf der Straße befragt, ob ihr Haushalt eine solche Maschine besitzt. X: „Anzahl befragten Personen, die eine Spülmaschine besitzen“



Übertrage die Tabelle ins Heft und ergänze sie.

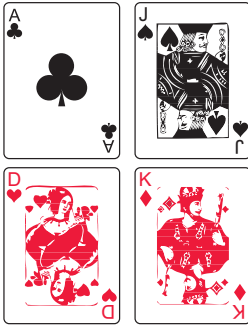
X = k	0	1	2	3	4	5
P(X = k)	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Veranschauliche die Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Stabdiagramm.

KAPITEL 3

AUFGABEN

Laura: Ein Skatspiel hat 32 Karten; die Hälfte davon sind rote Karten.



Bildkarten: Ass, Bube, Dame, König

- 1 Gregor zieht verdeckt eine Karte aus einem Skatspiel.
 - a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lucas sie sofort errät?
 - b) Wenn Lucas die Karte nicht errät, gibt ihm Gregor eine der folgenden sechs Zusatzinformationen:

1 Es ist eine rote Karte.

2 Es ist eine Bildkarte.

3 Es ist keine Dame.

4 Es ist kein König.

5 Es ist ein Bube.

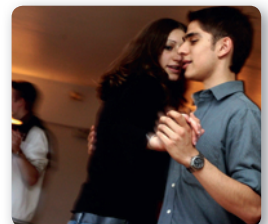
6 Es ist der Herzbube.

Ermittle jeweils die Wahrscheinlichkeit, damit die Karte zu erraten.

- 2 Jedem vierten Müsliriegel der neuen Sorte SUPERFIT liegt ein Gutschein für einen weiteren SUPERFIT-Müsliriegel bei. Gregor kauft fünf SUPERFIT-Müsliriegel und öffnet sie nacheinander.

- 1 Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.
 - a) Keiner der fünf Müsliriegel enthält einen Gutschein.
 - b) Jeder der fünf Müsliriegel enthält einen Gutschein.
 - c) Nur der fünfte Müsliriegel enthält einen Gutschein.
 - d) Genau einer der fünf Müsliriegel enthält einen Gutschein.
 - e) Mindestens einer der fünf Müsliriegel enthält einen Gutschein.
 - f) Einer der beiden ersten Müsliriegel und der dritte enthält je einen Gutschein, sonst aber kein weiterer.
- 2 Wie viele Müsliriegel müsste Gregor mindestens kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens einen Gutschein zu erhalten?
- 3 Etwa 5% der 2-€-Münzen, die in Deutschland im Umlauf sind, sind ausländische 2-€-Münzen. Sophie sammelt ausländische 2-€-Münzen.
 - a) Sie erhält im Supermarkt als Rückgeld drei 2-€-Münzen. Ermittle ...
 - 1 die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei 2-€-Münzen ausländische Münzen sind.
 - 2 die Wahrscheinlichkeit, dass zwei der drei 2-€-Münzen ausländische Münzen sind.
 - b) Wie viele 2-€-Münzen muss Sophie mindestens prüfen, bis sie mit mehr als 50% Wahrscheinlichkeit mindestens eine ausländische 2-€-Münze findet?

- 4 In einer Tanzschule melden sich 15 Jugendliche neu an, darunter auch Sophie und Gregor. Die 15 neu Angemeldeten werden zufällig auf drei Kurse aufgeteilt, sodass von ihnen fünf in den ersten Kurs, sechs in den zweiten Kurs und vier in den dritten Kurs kommen. Erstelle ein Baumdiagramm und verwende es, um herauszufinden, mit welcher Wahrscheinlichkeit Sophie und Gregor in den gleichen Kurs kommen.

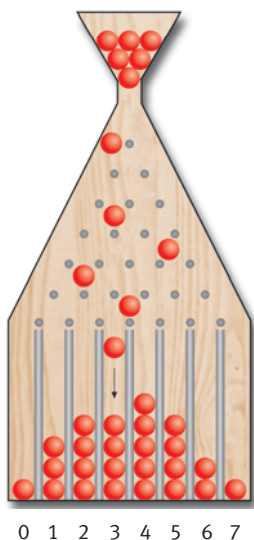


- 5 Untersuchungen haben gezeigt, dass in Großstädten etwa 5 % der Fahrgäste ohne gültigen Fahrausweis fahren, also „Schwarzfahrer“ sind. Finde zum Vergleich damit heraus, wie hoch der Anteil der Schwarzfahrer an allen Fahrgästen mindestens sein muss, damit unter 100 Fahrgästen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens ein Schwarzfahrer ist.

- 6 In einem Jugendclub sind 24 Mädchen und 26 Jungen, darunter Laura und Lucas. Durch Los wird ermittelt, welche zwei Jugendlichen zum nächsten Treffen je einen Kuchen mitbringen. Finde heraus, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Los
- sowohl Laura wie auch Lucas trifft.
 - weder Laura noch Lucas trifft.
 - zwar Laura, aber nicht Lucas trifft.
 - zwar Lucas, aber nicht Laura trifft.
 - irgendein Mädchen und irgendeinen Jungen trifft.
 - irgendwelche zwei Jungen trifft.
 - irgendwelche zwei Mädchen (darunter aber nicht Laura) trifft.
- 7 In einer Urne sind eine gelbe Kugel, zwei rote sowie drei schwarze Kugeln. Es wird zweimal
- mit Zurücklegen
 - ohne Zurücklegen
- je eine Kugel gezogen. Erstelle zu a) und zu b) je ein Baumdiagramm und ermittle dann aus ihm die Wahrscheinlichkeit, dass ...
- zwei schwarze Kugeln gezogen werden.
 - zwei gleichfarbige Kugeln gezogen werden.
 - zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen werden.
- 8 Auf einem Volksfest schießen Gregor, Laura, Lucas und Sophie jeweils genau einmal auf eine Rose. Gregor trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 85%, Laura mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%, Lucas mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% und Sophie mit einer Wahrscheinlichkeit von 75%. Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass keine Rose getroffen wird.
- 9 In einer Stadt gibt es 320 000 ausschließlich sechsstellige Telefonnummern. Ein Kleinkind drückt zufällig sechs Zifferntasten.
- Simuliere das Zufallsexperiment durch ein Urnenmodell.
 - Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind jemanden aus der Stadt „anruft“.
 - Ermittle, wie oft das Kleinkind sein Experiment wiederholen müsste, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einmal eine der vergebenen Nummern der Stadt zu wählen.
- 10 Aus Erfahrung wissen Airlines, dass Passagiere in 6 % der Fälle trotz eines gekauften Tickets den Flug nicht antreten. Aus diesem Grund überbuchen sie die Flüge. Zum Beispiel würden sie bei einem Flugzeug mit 296 Sitzen 300 Tickets verkaufen.
- Bestimme für das Beispiel die Wahrscheinlichkeit, dass alle Passagiere zum Abflug erscheinen.
 - Bestimme für das Beispiel die Wahrscheinlichkeit, dass mehr Passagiere erscheinen, als Plätze im Flugzeug zur Verfügung stehen.
- 11 Bei einer Umfrage stimmten 87 % der Befragten für ein Rauchverbot in Gaststätten. Aus der Probandengruppe werden sechs Personen zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befürworten fünf dieser sechs Personen das Rauchverbot?

Sechsstellig bedeutet hier, dass die erste Ziffer von Null verschieden ist.





- 12 Bei einem Galton-Brett wird eine Kugel, die oben in der Mitte durch eine Öffnung fällt, von jedem Stift mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links wie nach rechts abgelenkt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Nummer des Fachs, in dem die Kugel am Ende liegen bleibt.

- Informiere dich über Sir Francis Galton, den Erfinder dieses Bretts.
- Beschreibe ein passendes Urnenexperiment und gib an, ob es sich hierbei um eine Bernoulli-Kette handelt.
- Übertrage die Tabelle in dein Heft, ergänze sie und zeichne ein Histogramm.

$X = k$	0	1	2	3	4	5	7
$P(X = k)$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

- Begründe die Symmetrie des Diagramms mithilfe der Bernoulli-Formel.

- 13 Beim Einchecken an einem Flughafen kommen die Gepäckstücke unabhängig voneinander auf ein Transportband. Ein auf diesem Band zufällig ausgewähltes Gepäckstück hat mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,22 das Ziel München.

- Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
Von zehn zufällig ausgewählten Gepäckstücken auf diesem Band ...
 - haben höchstens drei das Ziel München.
 - hat nur das zehnte das Ziel München.
 - ist das zehnte Gepäckstück das zweite mit Ziel München.

- Erläutere in diesem Sachzusammenhang die folgenden Terme:

$$P(E_4) = 0,22^3 \cdot 0,78^7$$

$$P(E_5) = \binom{10}{5} \cdot 0,22^5 \cdot 0,78^5$$

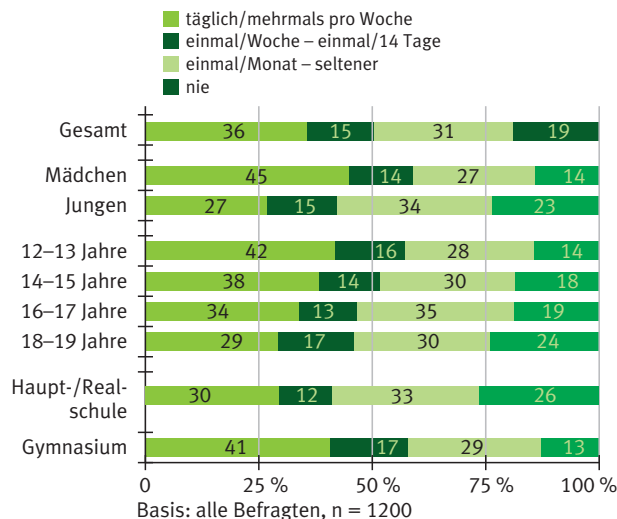
- 14 In der JIM-Studie 2015 wurde das Medienverhalten von Jugendlichen untersucht. Es wurde das nebenstehende Diagramm unter dem Titel „Bücher lesen“ veröffentlicht (nur gedruckte Bücher).

- Gib den Stichprobenumfang an.
- Beschreibe die Veränderung des Leseverhaltens von Jugendlichen zwischen 12 und 19 Jahren.
Versuche, Gründe für diese Veränderung zu finden.

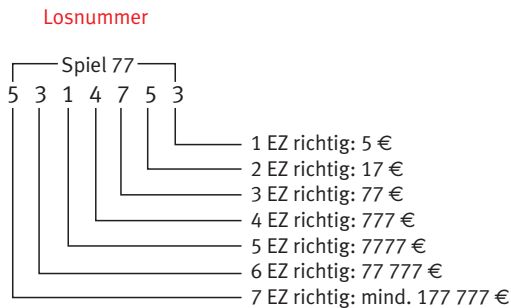
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von 200 beliebig ausgewählten deutschen Gymnasiasten ...

- höchstens 5
- mindestens 5
- 0

Personen nie Bücher lesen.



- 15** Beim „Spiel 77“ nimmt ein Spieler mit seiner gewählten 7-stelligen Zahl an einer Ziehung teil, die auf dem Lotto-Spielschein abgedruckt ist. Der Spieleinsatz beträgt 2,50 €. Je nachdem, wie viele Endziffern (EZ) mit der gezogenen Zahl übereinstimmen, erhält man einen unterschiedlich hohen Gewinn. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen Gewinne?



Die Zahlen reichen von 0 000 000 bis 9 999 999.

- 16** Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zehnjähriges Kind nicht schwimmen kann, ist 10 %. Eine Sportlehrkraft befragt die 20 zehnjährigen Schüler/Schülerinnen der Klasse 5A, ob sie schwimmen können. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ...

- können alle befragten Kinder dieser Klasse schwimmen?
- kann genau eines der befragten Kinder nicht schwimmen?
- kann mindestens eines der befragten Kinder nicht schwimmen?



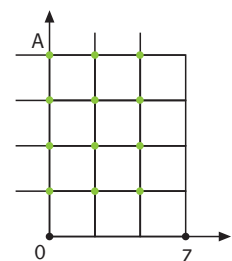
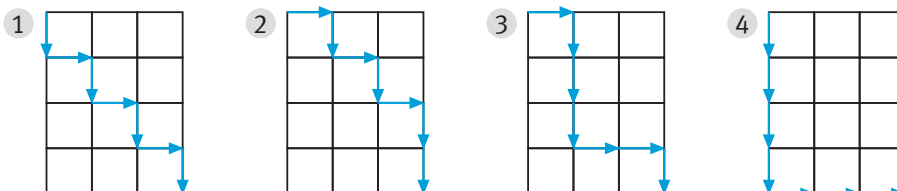
- 17** Etwa 40 % der Erwachsenen tragen ein Herpes-Virus im Körper, ohne jemals Bläschen oder andere Symptome zu spüren. Man sagt, das Virus „schlummert“. Bei weiteren 50 % der Bevölkerung bricht die Krankheit gelegentlich aus.

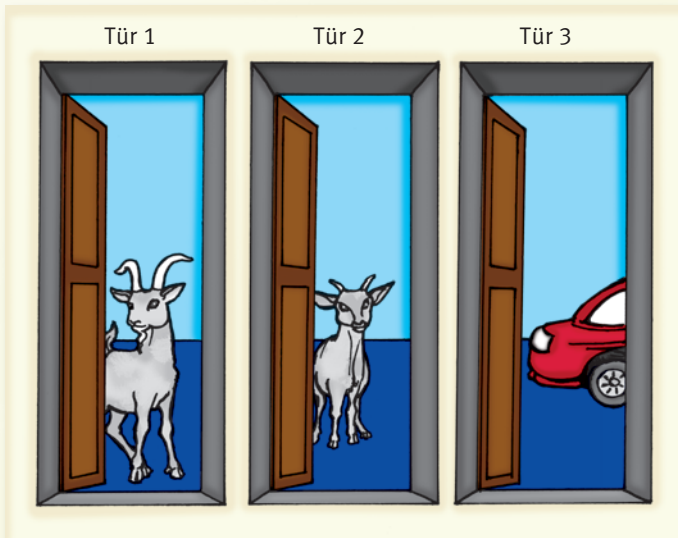
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass unter hundert zufällig ausgewählten Erwachsenen genau 50 Personen mit schlummerndem Herpes-Virus sind.
- Ermittle, wie viele Erwachsene man mindestens untersuchen muss, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens eine mit schlummerndem Virus ist.
- Durch einen Schnelltest, der nur bei Personen durchgeführt wird, die noch nie Symptome hatten, werden 95 % der Personen mit schlummerndem Virus erkannt. Allerdings stuft der Test auch 8 % der Gesunden falsch ein. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ...
 - eine Person, die der Test als Herpes-Virus-Träger identifiziert hat, das Virus auch tatsächlich in sich hat.
 - eine vom Test als gesund eingestufte Person das Virus in sich trägt.



- 18** Hungrige Mäuse tummeln sich vor dem Eingang A (0|4) eines Labyrinths. Zufalls-generatoren an jeder der 12 „Kreuzungen“ des Labyrinths [also z. B. im Punkt (0|2), aber nicht im Punkt (2|0)] öffnen jeder Maus genau einen kürzesten Weg von A zum Futterplatz Z (3|0). Die Öffnung „nach rechts“ erfolgt dabei jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4 und die „nach unten“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6.

- Ermittle, wie viele verschiedene kürzeste Wege es von A nach Z gibt.
- Ermittle bei jedem der vier kürzesten Wege 1 bis 4 die Wahrscheinlichkeit, dass die Maus ihn nimmt.





Stelle dir vor, du stehst während einer Fernseh-Spielshow vor drei geschlossenen Türen und erfährst vom Moderator, dass hinter einer der drei Türen als Gewinn ein Auto steht und hinter den beiden anderen Türen jeweils eine Ziege.

- Du wählst eine Tür aus, die aber zunächst noch verschlossen bleibt.
- Daraufhin öffnet der Moderator, der weiß, hinter welcher Tür das Auto steht, eine der beiden von dir nicht gewählten Türen, hinter der eine Ziege steht.
- Dann fragt dich der Moderator, ob du bei der von dir gewählten Tür bleiben oder ob du wechseln möchtest.



- 1 Glaubst du, dass es vorteilhaft ist, deine Entscheidung zu ändern, weil du der Ansicht bist, dass die Wahrscheinlichkeit, den Gewinn zu erhalten, größer wird, wenn du dich für die andere Tür entscheidest? Diskutiere mit deinem Mitschülern/Mitschülerinnen über dieses Problem.



- 2 Simuliere die Show durch folgendes Spiel, das du mit zwei Mitschülern/Mitschülerinnen [Moderator(in) M, Kandidat(in) A, Kandidat(in) B] durchspielst:
Du nimmst drei Spielkarten, z. B. als „Ziegenkarten“ Kreuz-Ass und Pik-Ass und als „Gewinnkarte“ Herz-Ass.



- M mischt die drei Karten und legt sie dann verdeckt auf den Tisch. Kandidat(in) A zeigt auf eine der Karten. M, der (die) die Karten kennt, deckt eine nicht von A gewählte „Ziegenkarte“ auf und fragt A, ob er (sie) wechseln möchte. A bleibt bei der getroffenen Wahl.
- M legt die Karten, neu gemischt, verdeckt auf den Tisch. Kandidat(in) B zeigt auf eine der Karten. M, der (die) die Karten wieder kennt, deckt eine nicht von B gewählte „Ziegenkarte“ auf und fragt B, ob er (sie) wechseln möchte. B wechselt.
- Spielt das Spiel zwanzigmal; dabei soll A nie wechseln, B jedoch stets wechseln. Legt in eurem Heft eine Tabelle an, in die ihr jedes „Spielergebnis“ einträgt.

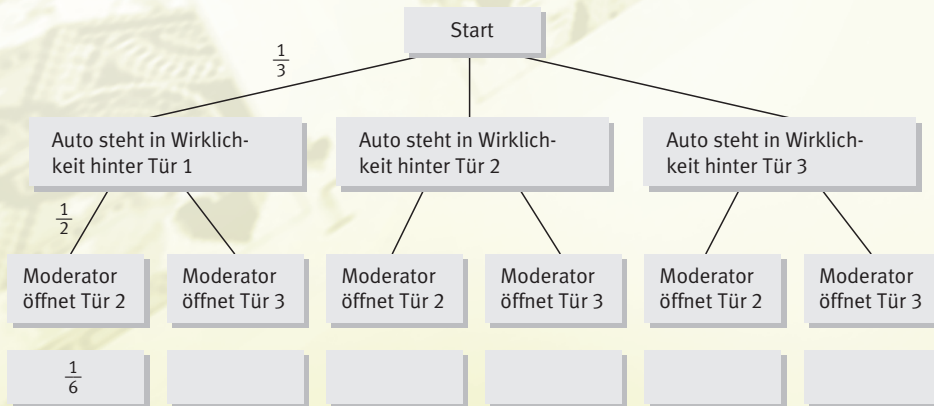
Spiel	„Nicht Wechseln“ (A)		„Wechseln“ (B)	
	Gewonnen	Verloren	Gewonnen	Verloren
1				
2				
...				
19				
20				

- Wertet das Spiel aus, indem ihr jeweils die absolute und die relative Häufigkeit der gewonnenen Spiele beim „Nichtwechseln“ und beim „Wechseln“ angebt.
- Vergleicht das Ergebnis eurer Gruppe mit den Ergebnissen der anderen Gruppen. Was fällt euch auf?



- 3 Die Ergebnisse des Spiels aus Aufgabe 2 legen die Vermutung nahe, dass die Wahrscheinlichkeit, das Auto zu gewinnen, durch Wechseln größer wird. Diese Vermutung soll nun mithilfe eines Baumdiagramms untersucht werden. Nimm an, dass du bei dieser Spielshow die Tür 1 gewählt hast. Übertrage das Baumdiagramm in dein Heft und ergänze es dann dort unter dieser Voraussetzung.

Tür 1	Tür 2	Tür 3
		
		
		



- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass der Moderator eine Tür mit einer Ziege öffnet, und du das Auto gewinnst, wenn du die Tür nicht wechselst.
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass der Moderator eine Tür mit einer Ziege öffnet, und du das Auto gewinnst, wenn du die Tür wechselst.
- Sophie behauptet: „Bei dieser Spielshow lohnt es sich, zu wechseln.“ Diskutiere Sophies Behauptung und stelle dein Diskussionsergebnis der Klasse vor.



- 4 Diskutiere mit deinem Nachbarn/deiner Nachbarin Gregors Argumentation: „Wenn man bei der ersten Wahl bleibt, gewinnt man das Auto mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, denn alle drei Türen hatten die gleiche Wahrscheinlichkeit. Beim Wechseln wird genau dann gewonnen, wenn die erste Wahl falsch war, also mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$.“

KAPITEL 3

Überprüfe deine Fähigkeiten und Kenntnisse. Bearbeite dazu die folgenden Aufgaben und bewerte anschließend deine Lösungen mit einem Smiley.

😊	😐	☹️
Das kann ich!	Das kann ich fast!	Das kann ich noch nicht!

Hinweise zum Nacharbeiten findest du auf der folgenden Seite. Die Lösungen stehen im Anhang.

Aufgaben zur Einzelarbeit

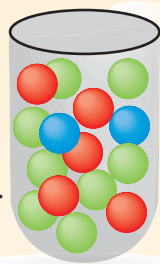
- 1 In einer Urne befinden sich acht grüne, fünf rote und zwei blaue Kugeln.

a) Otto zieht fünf Kugeln mit Zurücklegen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass Otto ...

- 1 drei gleichfarbige Kugeln zieht.
- 2 mindestens eine grüne Kugel zieht.
- 3 genau drei grüne Kugeln zieht.
- 4 keine rote Kugel zieht.

Runde jeweils auf Zehntel Prozent.

b) Berechne, wie viele Kugeln Otto mindestens mit Zurücklegen ziehen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60 % mindestens eine blaue Kugel zu erhalten.



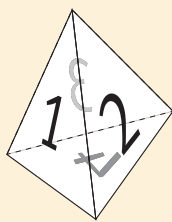
- 2 Für eine Party haben Laura und Lucas 30 Brownies gebacken; fünf davon haben sie mit Senf und 25 mit Schokoladencreme gefüllt. Gregor nimmt nacheinander drei Brownies und legt sie auf seinen Teller. Finden Sie heraus, mit welcher Wahrscheinlichkeit von diesen drei Brownies

- a) keines ein „Senfbrownie“ ist.
- b) nur das dritte ein „Senfbrownie“ ist.
- c) genau eines ein „Senfbrownie“ ist.
- d) genau zwei „Senfbrownies“ sind.
- e) mindestens eines ein „Senfbrownie“ ist.



- 3 Berechne $\binom{5}{3}$, $\binom{101}{99}$, $\binom{16}{2}$, 2^{10} ...
- a) ohne Verwendung von Hilfsmitteln.
 - b) unter Verwendung deines Taschenrechners.
- 4 Beschreibe jeweils ein passendes Urnenexperiment und finde eine Anwendungsmöglichkeit.
- a) $\binom{23}{18}$
 - b) 8^{15}
 - c) $65 \cdot 64 \cdot \dots \cdot 56 \cdot 55$
- 5 Ein Laplace-Spielwürfel wird dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt eine Augenzahl größer als 4 ...
- a) genau beim dritten Wurf?
 - b) frühestens beim dritten Wurf?
 - c) bei mindestens einem der drei Würfe?
 - d) spätestens beim dritten Wurf?
 - e) bei allen drei Würfeln?
 - f) bei keinem der drei Würfe?
- 6 Lucas verwandelt beim Fußball Elfmeterschüsse mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 60%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er bei vier Elfmetern
- a) mindestens einmal erfolgreich?
 - b) höchstens einmal erfolgreich?
 - c) genau einmal erfolgreich?
 - d) nur beim ersten und beim vierten Elfmeter erfolgreich?
 - e) genau dreimal erfolgreich?
- Wie viele Elfmeter muss er mindestens schießen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens einmal erfolgreich zu sein?
- 7 Wie viele Autokennzeichen gibt es im Hochtaunuskreis (HG), wenn das Kennzeichen aus zwei weiteren Buchstaben und einer vierstelligen Nummer besteht. Bestimmte Buchstabenkombinationen sind dabei nicht zulässig: KZ, SS, SA!
- 8 Beim Tele Lotto in der früheren DDR konnte man mit einem Tipp 5 aus 35 Zahlen auswählen.
- a) Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es für einen Tipp?
 - b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für „5 Richtige“?
 - c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für „3 Richtige“?
 - d) Berechne die Wahrscheinlichkeit, überhaupt keine Zahl richtig getippt zu haben.

- 9 Bei einem Tetraederwürfel gilt immer diejenige Zahl als gewürfelt, die auf der Unterseite des Tetraeders steht. Ein Laplace-Tetraederwürfel mit den Zahlen 1 bis 4 wird 20-mal geworfen.



- a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 20 Ergebnissen ...

- 1 genau sechsmal eine 3 erscheint.
- 2 genau 10 der Ergebnisse gerade sind.
- 3 mindestens fünfmal eine 4 erscheint.

- b) Olivia hat sechsmal eine 1, siebenmal eine 2, dreimal eine 3 und viermal eine 4 geworfen. Berechne, in wie vielen verschiedenen Reihenfolgen dies geschehen sein kann.

- c) Ermittle, wie oft Olivia den Laplace-Tetraeder mindestens werfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine Vier zu werfen.

- 10 Ein Laplace-Spielwürfel wird zehnmal (allgemein: n -mal; $n \in \mathbb{N}$) geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man ...

- a) genau einmal eine ungerade Primzahl?
- b) mindestens einmal eine ungerade Primzahl?
- c) höchstens einmal eine ungerade Primzahl?

Aufgaben für Lernpartner

Arbeitsschritte

- 1 Bearbeite die folgenden Aufgaben alleine.
- 2 Suche dir einen Partner und erkläre ihm deine Lösungen. Höre aufmerksam und gewissenhaft zu, wenn dein Partner dir seine Lösungen erklärt.
- 3 Korrigiere gegebenenfalls deine Antworten und benutze dazu eine andere Farbe.

Sind folgende Behauptungen **richtig** oder **falsch**? Begründe schriftlich.

11 $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-8) = \frac{n!}{(n-7)!}$

- 12 Die Buchstaben des Wortes TITICACASEE kann man auf $\frac{11!}{32}$ unterschiedliche Arten anordnen.

- 13 Das Bilden der Augensumme beim zweifachen Würfelwurf ist ein Laplace-Experiment.

- 14 Die sechs Mathematikbücher der fünften bis zehnten Klasse kann man auf 720 verschiedene Arten in einem Regal anordnen.

- 15 Im Durchschnitt befinden sich in 2 von 7 Schokoriegeln ein Aufkleber. Dann muss man mindestens 21 Schokoriegel kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens einen Aufkleber zu erhalten.

- 16 Es gilt die folgende Gleichheit:

a) $\binom{56}{12} = \binom{56}{44}$ b) $\frac{200!}{198!} = 3980$

- 17 Wenn man ein Glücksrad herstellen möchte, um damit ein Bernoulli-Experiment durchzuführen, muss man darauf achten, das Rad in Sektoren mit gleichen Mittelpunktswinkeln einzuteilen.

- 18 Bei einer Bernoulli-Kette ist die Trefferwahrscheinlichkeit $P(T)$ in jeder Stufe des n -stufigen Zufallsexperiments gleich.

- 19 Arno hat die vierstellige Kombination seines Zahlenschlosses vergessen. Er erinnert sich, dass er ausschließlich Primzahlen verwendet hat. Die Wahrscheinlichkeit, dass er sein Schloss beim ersten Versuch knackt, ist $\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$.

Aufgabe	Ich kann ...	Hilfe
1, 2, 13, 15	Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten berechnen.	S. 70
3, 11, 16	mit Binomialkoeffizienten rechnen.	S. 74
4, 8	Situationen mithilfe des Urnenmodells simulieren.	S. 74
7, 9, 12, 14, 19	Anzahlen von Kombinationsmöglichkeiten mithilfe kombinatorischer Überlegungen bestimmen.	S. 74
5, 6, 9, 10, 15, 17, 18	Bernoulli-Experimente erkennen und Wahrscheinlichkeiten mit der Bernoulli-Formel berechnen.	S. 76

KAPITEL 3

S. 68

Aus den Buchstaben eines Wortspiels wird einer zufällig gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es ein Vokal?



$$\Omega = \{I; M; N; O; S\} \quad |\Omega| = 5$$

Es kann davon ausgegangen werden, dass alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind.

$E =$ „Der gezogene Buchstabe ist ein Vokal.“

$$E = \{I; O\} \quad |E| = 2$$

$$P(E) = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$$

Bei einem Zufallsexperiment kann jedem **Ereignis** eine **Wahrscheinlichkeit** zugeordnet werden. Man schreibt kurz:

$P(E)$ „Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E “

Bei einem **Laplace-Experiment** gilt:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} \left(\frac{\text{günstige Ergebnisse}}{\text{„alle möglichen Ergebnisse“}} \right)$$

$|E|$: Anzahl der Elemente des Ereignisses E

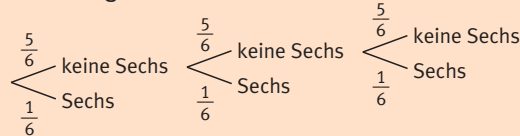
$|\Omega|$: Anzahl der Elemente des Ergebnisraums Ω

Beachte:

$$0 \leq P(E) \leq 1 \quad P(E) + P(\bar{E}) = 1$$

S. 68

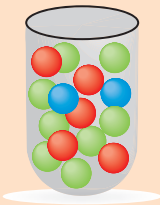
Dreimaliger Wurf eines Würfels



In einem Baumdiagramm werden oftmals die Wahrscheinlichkeiten, die zu einem Pfad gehören, an dem Pfad notiert.

1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades werden multipliziert.

2. Pfadregel: Wenn mehrere Pfade zu einem Ereignis gehören, addiert man die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Pfade.

S. 70
S. 74

Ziehen mit Zurücklegen

Bei einer Trefferwahrscheinlichkeit $P(T)$ ist die Wahrscheinlichkeit, im n -ten Versuch ($n \in \mathbb{N}$) zum ersten Mal zu treffen:

$$P(T)^{n-1} \cdot P(T) = [1 - P(T)]^{n-1} \cdot P(T)$$

Aus n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) unterschiedlichen Kugeln werden k ($k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$) Kugeln unter Beachtung der Reihenfolge gezogen: n^k Möglichkeiten.

S. 74

Eingabe	Ausgabe
$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}$	20
6 nCr 3	20
$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$	210
10 nCr 4	210

Ziehen ohne Zurücklegen

Aus n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) unterschiedlichen Kugeln werden k ($k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$) Kugeln ...

- **unter Beachtung der Reihenfolge** gezogen:
 $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ Möglichkeiten.
- **ohne Beachtung der Reihenfolge** gezogen:
 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$ Möglichkeiten.
 $\binom{n}{k}$ bezeichnet man als Binomialkoeffizienten.

S. 76

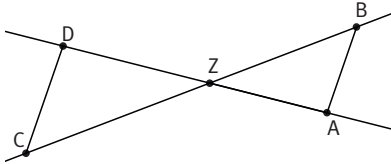
Bernoulli-Experiment: Zufallsexperiment mit genau zwei Ergebnissen
Bernoulli-Kette der Länge n : n -stufiges Bernoulli-Experiment

Bei einer **Bernoulli-Kette** der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p gilt:

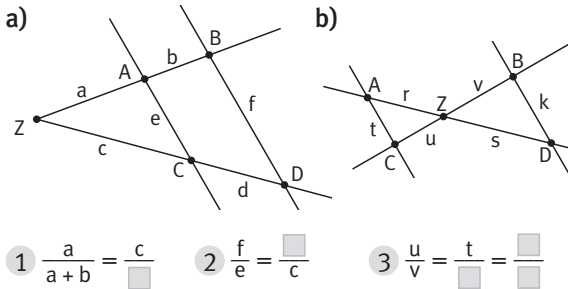
$$P(\text{„genau } k \text{ Treffer“}) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Strahlensätze

- 1 In der Zeichnung gilt: $AB \parallel CD$. Berechne die Längen $\overline{CD}$ und $\overline{BZ}$ für $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$, $\overline{AZ} = 4 \text{ cm}$, $\overline{ZD} = 5 \text{ cm}$ und $\overline{ZC} = 6,5 \text{ cm}$.



- 2 Die Geraden AC und BD sind jeweils parallel. Ersetze die Symbole so, dass für die abgebildeten Figuren eine Verhältnisgleichung entsteht.



- 3 „x ist 4-mal so lang wie y.“ Welche der folgenden Gleichungen drücken dies aus?

$$4x = y$$

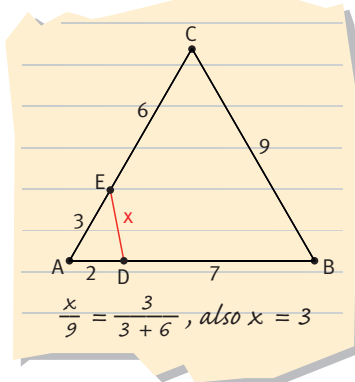
$$x = 4y$$

$$y = 4 - x$$

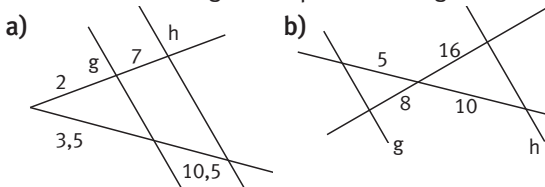
$$\frac{x}{y} = 4$$

$$x = y + y + y + y$$

- 4 Julia hat mit dem Strahlensatz x bestimmt. Was meinst du zu Julias Vorgehen? Begründe deine Meinung.



- 5 Sind die Geraden g und h parallel? Begründe.



Wurzeln

- 6 Gib alle Zahlen an, die quadriert die folgenden Werte ergeben.

a) 4

b) 100

c) -49

d) 0

e) 1

f) -1

g) $\frac{1}{16}$

h) 0,81

- 7 Berechne den Termwert, falls möglich.

a) $\sqrt{25}$

b) $\sqrt{4^2}$

c) $(\sqrt{9})^2$

d) $\sqrt{1}$

e) $\sqrt{-16}$

f) $\sqrt{0}$

g) $\sqrt{9}$

h) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}$

i) $\sqrt{(-9)^2}$

- 8 Bestimme die Lösungsmenge im Kopf ($x \in \mathbb{R}$).

a) $x^2 = 9$

b) $x^2 = 1$

c) $x^2 = -1$

d) $x^2 = 0,64$

e) $x^2 = 0,09$

f) $x^2 = 2$

g) $2x^2 = 72$

h) $x^2 - 2 = 2$

i) $x^2 = \sqrt{81}$

- 9 a) Wie lang ist die Seite eines Quadrats, dessen Flächeninhalt 400 cm^2 beträgt?

- b) Welche Kantenlänge hat ein Würfel, dessen Oberflächeninhalt $121,5 \text{ cm}^2$ ist?

- 10 Gib den Termwert auf zwei Dezimalstellen gerundet an.

a) $\sqrt{5}$

b) $\sqrt{10}$

c) $\sqrt{718}$

d) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

e) $\sqrt{7} + 1$

f) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

g) $\frac{1}{2} \sqrt{2}$

h) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{8}$

i) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

- 11 Handelt es sich um eine rationale oder um eine irrationale Zahl?

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{16}$

c) $\frac{2}{17}$

d) $-\frac{4}{9}$

e) 1,76

f) $0,\overline{3}$

- 12 Ergänze die Lücken passend.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\quad} = \sqrt{100}$

b) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{\quad} = 10$

c) $\sqrt{\quad} \cdot \sqrt{17} = 17$

d) $\sqrt{\quad} : \sqrt{4} = \sqrt{0}$

- 13



Der Vorgänger von $\sqrt{3}$ ist $\sqrt{2}$, der Nachfolger von $\sqrt{3}$ ist $\sqrt{4}$.

Was meinst du?

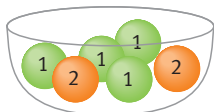
Pfadregeln

- 14 Pia hat – um ihre Schwester zu ärgern – in einen Korb mit 6 gekochten Eiern 4 rohe dazugelegt. Beim Frühstück nimmt ihre Schwester 3 Eier heraus.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie kein rohes Ei zieht?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie mindestens ein rohes Ei erwischt?
- 15 Wird ein Buch in den Druck gegeben, wird im Vorfeld nach Fehlern gesucht. In der Regel findet der erste Kontrolleur 80 % der vorhandenen Fehler und korrigiert sie. Von den übriggebliebenen Fehlern findet der zweite Kontrolleur 50 % und korrigiert sie ebenfalls.



Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Fehler, der ursprünglich in einem Text vorhanden war, auch nach den beiden Kontrollen noch unentdeckt?

- 16 Aus der abgebildeten Urne wird dreimal ohne Zurücklegen je eine Kugel gezogen.



- Zeichne ein Baumdiagramm.
- Überlege dir selbst mögliche Aufgabenstellungen, zu deren Lösung die Anwendung der Pfadadditions- und Pfadmultiplikationsregel nötig ist.

- 17 Aus den verdeckt liegenden Zahlenkarten werden zwei zufällig ausgewählt und die beiden darauf stehenden Zahlen addiert.

-1,5

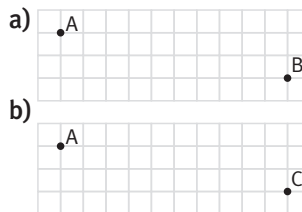
 $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{3}$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Summenwert positiv (negativ, null) ist?

Besondere Vierecke

- 18 Ein Quadrat hat 8 cm lange Diagonalen. Um wie viel Prozent verringert sich der Flächeninhalt der Figur, wenn man eine Diagonale um 2 cm verlängert und dafür die andere um 2 cm verkürzt?

- 19 Gegeben sind zwei Eckpunkte eines Quadrats ABCD. Konstruiere das Quadrat.



- 20 Entscheide dich für wahr (w) oder falsch (f), dann erhältst du ein Lösungswort.

	w	f
Es gibt Parallelogramme, die Rauten sind.	P	V
Beim Drachenviereck ist die längere Diagonale die Symmetrieachse.	E	F
Jedes Quadrat hat vier Symmetrieachsen.	A	R
Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm.	D	F
Es gibt Rechtecke, die auch Quadrate sind.	R	A
Jede Raute ist ein Quadrat.	H	E
Es gibt Trapeze, die auch Rechtecke sind.	G	R
Es gibt Drachenvierecke, die auch Quadrate sind.	E	T
Jedes Quadrat ist eine Raute.	L	N

- 21 Ein Viereck ABCD, dessen Eckpunkte alle auf demselben Kreis liegen, nennt man Sehnenviereck. Zeige, dass die Summe der Maße gegenüberliegender Innenwinkel im Sehnenviereck jeweils 180° ergibt.

