Startklar!

KX **1** **a)** A: $-8{,}9$ B: $-7{,}4$ C: $-5{,}7$
b) D: $-1{,}9$ E: $-0{,}6$ F: $0{,}5$

KX **2** **a)** $-9 < -6{,}5 < -6 < -4 < 0 < 4 < 4{,}5 < 7$
b) $-1 < -0{,}8 < -\frac{3}{4} < -0{,}3 < \frac{1}{4} < 0{,}3 < \frac{2}{3}$
c) $-4{,}4 < -4{,}35 < -4\frac{1}{3} < -4{,}3 < -4\frac{1}{4} < -4\frac{1}{9} < 0$
d) $2{,}03 < 2{,}033 < 2{,}3 < 2{,}303 < 2{,}33 = 2{,}330$

KX **3** 1, 3 und 4

KX **4** **a)** 1 $x + 3{,}3$ 2 $-4{,}6x - 19{,}7$ 3 $4{,}7a + 2b - 4{,}5c$ 4 $2\frac{1}{2}a - 2b - 3{,}75c$
b) 1 $a^2 + a - 6$ 2 $-4a^2 + 9$ 3 $2b + 8{,}5a$ 4 $8a^2 - 2b^2$ 5 $s^2 - 6st + 9t^2$
c) 1 $kj + 2k - j - 2$ 2 $x^2 + 4xy + 4y^2$ 3 $(3k + l)^2 = 9k^2 + 6kl + 1 \cdot l^2$ 4 $s^2 + 3st + 2t^2$

KX **5**

Potenz	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2	16^2	17^2	18^2	19^2	20^2
Quadratzahl	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

KX **6**
$3 = 4 - 1 = 2^2 - 1^2$ $5 = 9 - 4 = 3^2 - 2^2$
$7 = 16 - 9 = 4^2 - 3^2$ $9 = 25 - 16 = 5^2 - 4^2$
$11 = 36 - 25 = 6^2 - 5^2$ $13 = 49 - 36 = 7^2 - 6^2$
$15 = 64 - 49 = 8^2 - 7^2$ $17 = 81 - 64 = 9^2 - 8^2$
Jede ungerade Zahl n größer als 1 lässt sich als $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ schreiben.

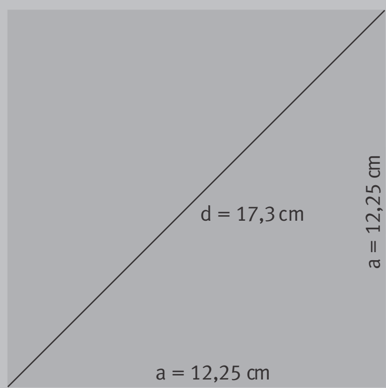
3 Wurzeln und reelle Zahlen

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K6

- $1{,}5\,\text{ha} = 150\,\text{a} = 15\,000\,\text{m}^2$
  Gesucht ist diejenige Zahl, die mit sich selbst multipliziert 15 000 ergibt.
  Lösungsmöglichkeit: Man kann in einem ersten Schritt das sogenannte Intervallhalbierungsverfahren durchführen; Intervallhalbierung ist ein Näherungsverfahren, das oft beim systematischen Probieren angewendet wird.
  $100^2 = 10\,000$ $\quad$ $110^2 = 12\,100$ $\quad$ $120^2 = 14\,400$ $\quad$ $30^2 = 16\,900$
  Die Zahl muss zwischen 120 und 130 liegen: $\quad$ $125^2 = 15\,625$
  Die Zahl muss kleiner als 125, aber größer als 120 sein. $\quad$ $122{,}5^2 = 15\,006{,}25$
  Der Wert 122,5 m ist als erste Näherung für die vorliegende Fragestellung bereits genügend genau.
  Umfang des Pariser Platzes: $u = 4 \cdot 122{,}5\,\text{m} = 490\,\text{m}$
  Die Streckenlänge beträgt ungefähr 490 m.



K3

- Für die Zeichnung bietet sich ein Maßstab 1 : 1000 an, die Seiten des Quadrats sind also 12,25 cm lang. Die Diagonale ist 17,3 cm, in Wirklichkeit also gut 173 m lang.

K6

- Eine Schätzung kann ergeben, dass ca. ein Viertel der Fläche des Pariser Platzes durch beide Gartenanlagen bedeckt ist. Folglich haben die Gartenanlagen zusammen eine Fläche von $3750\,\text{m}^2$. Diese Fläche soll gedanklich durch ein Quadrat ersetzt werden. Man kann die Seitenlänge dieses Quadrats entweder durch Intervallhalbierung (vgl. oben) ermitteln. Die einfachere Lösung ist aber folgende: Der Pariser Platz lässt sich in vier Quadrate mit je $3750\,\text{m}^2$ Flächeninhalt aufteilen. Daher hat jedes dieser Quadrate die halbe Seitenlänge des Pariser Platzes, also $122{,}5\,\text{m} : 2 = 61{,}25\,\text{m}$.

Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.
Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Kap. 3.1

Selbst ist das Kind

K5
- Weil die Tür auch aus den Brettern besteht, kann bei der Rechnung auch so vorgegangen werden, dass statt der Tür eine solide Wand vorliegt. Dann werden die 100 Holzbretter auf 5 Flächen – vier Wände und die Decke – verteilt. Somit besteht beim würfelförmigen Aufbau eine Fläche aus 20 Brettern. Die größte Fläche eines Bretts hat den Flächeninhalt $50\,\text{mm} \cdot 150\,\text{mm} = 7500\,\text{mm}^2 = 75\,\text{cm}^2$. Bildet man aus 20 Brettern eine Innenfläche der Garage, so hat diese die Fläche $20 \cdot 75\,\text{cm}^2 = 1500\,\text{cm}^2$. Die Kantenlänge erhält man durch das Ziehen der Quadratwurzel zu $\sqrt{1500}\,\text{cm} \approx 38{,}7\,\text{cm}$.
  Das Innenvolumen der Garage beträgt dann $(38{,}7\,\text{cm})^3 \approx 58\,000\,\text{cm}^3 = 0{,}058\,\text{m}^3$. Da ein Würfel bei gegebener Oberfläche das größte Volumen aufweist, ist das Volumen für jeden Quader, der aus den Brettern gebaut wird, kleiner.

K6
- Um die würfelförmige Anordnung zu erhalten, müssen die Bretter zersägt werden, sodass alle Kantenlängen 38,7 cm lang werden. Letztlich wird die Garage in diesem Fall aus vielen kleinen Brettstücken zusammengehalten. Dies ist vom Aufwand und der Stabilität her ungünstig. Besser ist eine quaderförmige Konstruktion, deren Wände aus ganzzahligen Anzahlen von Brettern bestehen. Bei einer Kantenlänge von 38,7 cm im Fall des Würfels ist jedoch generell fragwürdig, ob ein Tretfahrzeug hineinpasst, da diese meistens größer sind.

Kap. 3.2

Der Teufel steckt im Detail

KX
- Im Text ist mit „Rettich“ das Ziehen der Quadratwurzel gemeint.

KX
- $\sqrt{2} \approx 1{,}41421$

Kap. 3.4

Vergrößern leicht gemacht, oder?

K1
- Verdoppelt man die Seitenlängen, so vervierfacht sich die Fläche, da die Fläche des Quadrates quadratisch mit der Seitenlänge wächst. Verdoppelt man die Fläche, so muss die Seitenlänge um den Faktor vergrößert werden, der quadriert 2 ergibt. Dieser ist die Quadratwurzel aus 2, kurz $\sqrt{2}$.

K6
- Zeichnerisch lässt sich die Quadratfläche verdoppeln, indem man die ursprüngliche Diagonale als neue Kante verwendet. Diese hat aufgrund des Satzes von Pythagoras die $\sqrt{2}$-fache Länge.

Kap. 3.5

K6

Immer Ärger mit den Hausaufgaben

- **a)** Das erste Zwischenergebnis ist richtig. Will man die Terme unter einer Wurzel zusammenfassen, so gilt jedoch $\sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{80}$. Der Fehler besteht also darin, dass die 4 im letzten Schritt nicht einfach unter die Wurzel gezogen werden darf.
  b) Die Wurzel wurde bereits gezogen und darf im Ergebnis nicht erneut geschrieben werden. Korrekt lautet das Ergebnis $\frac{3}{4}$.
  c) Hier wurden die Summanden multipliziert statt wie gefordert addiert. Das korrekte Ergebnis lautet $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

K1

- Für die Addition und Subtraktion zweier Wurzelterme gibt es im Allgemeinen keine Vereinfachung. Bei der Multiplikation bzw. Division werden zuerst die Zahlen unter den Wurzeln (Radikanden) multipliziert bzw. dividiert und dann die Wurzel gezogen.

3.1 Quadratzahlen und Kubikzahlen

Alternativer Einstieg: Schulbuch Seite 78

Entdecken

KX ■ Beim Anfertigen der Zeichnungen entwickeln die Schülerinnen und Schüler ein Verständnis für die quadratische bzw. kubische Anordnung der Plättchen bzw. Würfel.

KX ■ ① Anzahl der Plättchen: 1; 4; 9; 16; 25; 36; … (Quadratzahlen)
② Anzahl der Würfel: 1; 8; 27; 64; 125; 216; … (Kubikzahlen)

KX ■ ① Anzahl der Plättchen: n^2
② Anzahl der Würfel: n^3

Nachgefragt

K6 ■ $2 \cdot 3$ kann durch eine Addition ersetzt werden, nämlich $3 + 3 = 6$.
3^2 kann durch eine Multiplikation ersetzt werden, nämlich $3 \cdot 3 = 9$.

K1 ■ „Der Exponent gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert wird."

Aufgaben

KX **1** **a)** $11^2 = 121$ $17^2 = 289$ $13^2 = 169$ $18^2 = 324$ $25^2 = 625$

b)

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kubikzahl	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Zahl	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Kubikzahl	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859	8000

KX **2** Die Quadratzahlen (Kubikzahlen) entsprechen der Anzahl der Elemente bei quadratischer (würfelförmiger bzw. kubischer) Anordnung (vgl. „Entdecken" auf Seite 80 im Schulbuch).

KX **3** **a)** Beispiele: $26^2 = 676$; $18^2 = 324$; $31^2 = 961$
b) Beispiele: $25^3 = 15\,625$; $26^3 = 17\,576$; $27^3 = 19\,683$

K5 **4**

	a	b	$\lvert a - b \rvert$	a^2	b^3	$(a + b)^2$	$b^3 - a^2$
a)	9	1	8	81	1	100	–80
b)	4	3	1	16	27	49	11
c)	2	10	8	4	1000	144	996

K5 **5** **a), b)**

①
13^2
5^2 | 12^2
3^2 | 4^2 | 128

②
194
69 | 5^3
2^3 | 61 | 8^2

③
70
34 | 6^2
5^2 | 3^2 | 3^3

K1 **6** **a)** ① 4; 400; 0,04; 0,0004 ② 144; 14 400; 1,44; 0,0144
③ 8; 8000; 0,008; 0,000008 ④ 125; 125 000; 0,125; 0,000125

b) Die von Null verschiedenen Ziffern des Potenzwertes sind immer dieselben. Die Anzahl der Nullen bzw. die Kommaverschiebung lässt sich aus der ersten Rechnung ermitteln, indem die Zahl geeignet in zwei Faktoren zerlegt wird, von denen einer eine Zehnerpotenz ist.
Beispiel: $3^2 = 9$ $\quad 0{,}3^2 = (3 \cdot 0{,}1)^2 = 3^2 \cdot 0{,}1^2 = 9 \cdot 0{,}01 = 0{,}09$
Ist in der Basis das Komma also beispielsweise um eine Stelle nach links (rechts) verschoben, so muss es im Ergebnis bei einer 2. Potenz um zwei Stellen nach links (rechts) verschoben werden, bei einer 3. Potenz um drei Stellen.

K2 **7** Der Zaun von Familie Schmidt muss länger sein, da das Quadrat gegenüber einem flächengleichen Rechteck immer den geringeren Umfang besitzt. Man kann sich dies anschaulich leicht an Zahlenbeispielen klarmachen:
Rechteck der Größe 36 FE, Seitenlängen hier Teiler von 36:

a in LE	1	2	3	4	6	9	12	18	36
b in LE	36	18	12	9	6	4	3	2	1
A in FE	36	36	36	36	36	36	36	36	36
u in LE	74	40	30	26	24	26	30	40	74

KX **8** Summe der ersten 10 Quadratzahlen:
$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 = 385$
$\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)$ mit $n = 10$: $\frac{1}{6} \cdot 10 \cdot (10 + 1) \cdot (20 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 = 385$

a) Einsetzen von $n = 10$ in den Term liefert die Summe der ersten 10 Quadratzahlen. Dies legt die Vermutung nahe, dass der Term allgemein die Summe der ersten n Quadratzahlen angeben könnte. Dies kann an weiteren Beispielen überprüft werden (eine allgemeine Begründung ist dies jedoch nicht):
Summe der ersten 11 Quadratzahlen:
$385 + 121 = 506$
$\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)$ mit $n = 11$: $\frac{1}{6} \cdot 11 \cdot (11 + 1) \cdot (22 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 11 \cdot 12 \cdot 23 = 506$
Summe der ersten 12 Quadratzahlen:
$506 + 144 = 650$
$\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)$ mit $n = 12$: $\frac{1}{6} \cdot 12 \cdot (12 + 1) \cdot (24 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 13 \cdot 25 = 650$

b) Beispiele:
Summe der ersten n natürlichen Zahlen: $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$
Summe der ersten n Kubikzahlen: $\frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n + 1)^2$
Anmerkung: Die Summe der ersten n Kubikzahlen ist damit das Quadrat der Summe der ersten n natürlichen Zahlen.

Alternativer Einstieg: Schulbuch Seite 78

Entdecken

KX
- (1) gelbes Quadrat: $4\,cm^2$ grünes Quadrat: $9\,cm^2$ (2) gelbes Quadrat: $2\,cm^2$ grünes Quadrat: $5\,cm^2$

KX
- Seitenlängen:
  (1) blaues Quadrat: 1 cm gelbes Quadrat: 2 cm grünes Quadrat: 3 cm
  (2) blaues Quadrat: 1 cm gelbes Quadrat: ≈ 1,4 cm grünes Quadrat: ≈ 2,2 cm

KX
- Die Kantenlänge des Würfels (in cm) ist die Zahl, deren dritte Potenz 27 ist (3). Diese Zahl kann durch Probieren gefunden werden.

Nachgefragt

K1
- Die einzigen beiden Zahlen, für die dies zutrifft, sind 0 und 1:
  $\sqrt{0} = 0 = \sqrt[3]{0}$ $\sqrt{1} = 1 = \sqrt[3]{1}$

K1
- Es kann keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl geben, denn wenn man eine Zahl (ungleich 0) quadriert, dann ist das Ergebnis immer positiv.

KX
- (1) $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
  (2) $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$ $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Aufgaben

K5 **1** **a)**

Quadratzahl	100	225	2500	324	625
Quadratwurzel	10	15	50	18	25

b)

Kubikzahl	1	27	125	125 000	1 000 000
Kubikwurzel	1	3	5	50	100

K5 **2** $A_{Rechteck} = 64\,m \cdot 25\,m = 1600\,m^2$
$A_{Quadrat} = \sqrt{1600\,m^2} = 40\,m$, da $40\,m \cdot 40\,m = 1600\,m^2$
Die Seitenlänge des quadratischen Grundstücks beträgt 40 m.

K3 **3** **a)** neuer Flächeninhalt: $A = 2 \cdot 16\,cm^2 = 32\,cm^2$ ($A = 2 \cdot 25\,m^2 = 50\,cm^2$)
b) neue Seitenlänge: $a = \sqrt{32}\,cm \approx 5{,}7\,cm$ ($a = \sqrt{50}\,cm \approx 7{,}1\,cm$)
c) $A = 2 \cdot 25\,cm^2 = 50\,cm^2$ ($a = \sqrt{50}\,cm \approx 7{,}1\,cm$)

KX **4** Das Ziehen der Quadratwurzel ist die Umkehrung des Quadrierens: $\sqrt{144} = 12$, da $12^2 = 144$.
Das Ziehen der dritten Wurzel ist die Umkehrung des Potenzierens mit Exponent 3: $\sqrt[3]{729} = 9$, da $9^3 = 729$.
Diese Zusammenhänge lassen sich auch geometrisch interpretieren (vgl. z. B. „Entdecken" auf Seite 80 im Schulbuch):
Ein Quadrat mit der Seitenlänge 12 cm hat den Flächeninhalt $144\,cm^2$. Das Quadrieren der Seitenlänge ergibt den Flächeninhalt, das Ziehen der Quadratwurzel aus dem Flächeninhalt liefert die Seitenlänge des Quadrats.
Ein Würfel mit der Kantenlänge 9 cm hat das Volumen $729\,cm^3$. Das Erheben der Seitenlänge zur dritten Potenz ergibt das Volumen, das Ziehen der Kubikwurzel aus dem Volumen liefert die Kantenlänge des Würfels.

K5 **5** **a)** ① $\sqrt{121} = 11$ ② $\sqrt{100} = 10$ ③ $\sqrt{144} = 12$ ④ $\sqrt{625} = 25$ oder $\sqrt{225} = 15$

$\sqrt{64} = 8$ $\sqrt{400} = 20$ $\sqrt{256} = 16$ $\sqrt{576} = 24$ oder $\sqrt{676} = 26$

b) ① $\sqrt[3]{27} = 3$ ② $\sqrt[3]{343} = 7$ ③ $\sqrt[3]{1000} = 10$ ④ $\sqrt[3]{1728} = 12$

$\sqrt[3]{64} = 4$ $\sqrt[3]{125} = 5$ $\sqrt[3]{1331} = 11$ $\sqrt[3]{3375} = 15$

K6 **6** **a)** Wird ein Radikand mit 100 multipliziert oder durch 100 dividiert, so ist die Wurzel aus dieser Zahl das 10-Fache bzw. der 10. Teil des Wurzelwerts des Radikanden; z. B. sei der Radikand 0,04:

$\sqrt{0{,}04 \cdot 100} = \sqrt{4} = 2 = 0{,}2 \cdot 10 = \sqrt{0{,}04} \cdot 10$

$\sqrt{0{,}04 : 100} = \sqrt{0{,}0004} = 0{,}02 = \sqrt{0{,}04} : 10$

b) ① $\sqrt{62\,500} = 250$ $\sqrt{0{,}0625} = 0{,}25$ $\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ $\sqrt{625\,000\,000} = 25\,000$

② $\sqrt{3\,610\,000} = 1900$ $\sqrt{0{,}000361} = 0{,}019$ $\sqrt{361} = 19$ $\sqrt{36\,100} = 190$

③ $\sqrt{4{,}84} = 2{,}2$ $\sqrt{0{,}0484} = 0{,}22$ $\sqrt{484\,000\,000} = 22\,000$ $\sqrt{484} = 22$

K5 **7** **a)** 6 7 9 10 11 13 15 20 25 30 100

b) 1 0,8 0,5 0,3 0,9 1,1 1,2 0,1 0,01 0,04

K5 **8** Die Einheiten der Seitenlängen und Flächeninhalte wurden passend vereinheitlicht.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
A	324 cm²	576 m²	1225 cm²	134,56 cm²	16 900 m²	49 dm²
a	18 cm	24 m	35 cm	11,6 cm	130 m	7 dm
b	27 cm	40 m	25 cm	2,9 cm	100 m	3,5 dm
c	12 cm	14,4 m	49 cm	46,4 cm	169 m	14 dm

KX **9**

	Alaska	Baikalsee	Belgien	China	Deutschland	Frankreich	Ukraine
Flächeninhalt in km²	$1{,}7 \cdot 10^6$	31 500	30 500	$9{,}6 \cdot 10^6$	357 000	544 000	603 700
Seitenlänge des Quadrats in km	1 300	180	180	3100	600	740	780
Im Maßstab 1 : 40 000 000 verkleinert	3,3 cm	0,5 cm	0,5 cm	7,8 cm	1,5 cm	1,9 cm	2,0 cm

KX

Wissen

Wurzeln mit dem Taschenrechner

- Durch die Eingabe werden die Schülerinnen und Schüler mit den Funktionen und Tastenkombinationen ihres Taschenrechners vertraut.
- **a)** 8; 19; 0,8; 1,1; 0,7 **b)** $\frac{4}{3}$; $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$; $\frac{19}{100} = 0{,}19$; 0,17

  c) 4; 5; 0,1; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{10}$ **d)** ≈ 6,71; ≈ 9,49; ≈ 2,71; ≈ 8,99; ≈ 4,89

K5 **10 a)** ① $4 < \sqrt{20} < 5$ ② $3 < \sqrt{12} < 4$ ③ $8 < \sqrt{70} < 9$ ④ $10 < \sqrt{111} < 11$ ⑤ $22 < \sqrt{500} < 23$

$6 < \sqrt{40} < 7$ $4 < \sqrt{18} < 5$ $9 < \sqrt{85} < 10$ $11 < \sqrt{138} < 12$ $26 < \sqrt{700} < 27$

$7 < \sqrt{50} < 8$ $5 < \sqrt{32} < 6$ $9 < \sqrt{99} < 10$ $14 < \sqrt{200} < 15$ $31 < \sqrt{999} < 32$

b) Zunächst überlegt man, welche Kubikzahl in der Nähe von 150 liegt. Im Beispiel:
$\sqrt[3]{125} < \sqrt[3]{150} < \sqrt[3]{216}$; $5^3 = 125$; $5{,}3^3 \approx 150$; $6^3 = 216$. Das Vorgehen ist analog zu dem in Teil a), aber mit Kubikzahlen.

c) $3 < \sqrt[3]{30} < 4$ $9 < \sqrt[3]{927} < 10$

$4 < \sqrt[3]{100} < 5$ $14 < \sqrt[3]{3112} < 15$

$6 < \sqrt[3]{250} < 7$ $15 < \sqrt[3]{4095} < 16$

$7 < \sqrt[3]{500} < 8$ $16 < \sqrt[3]{4098} < 17$

KX **11 a)** ① $a = 1{,}5\,\text{m}$ ② $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2 = 9{,}61\,\text{m}^2$; $a = 3{,}1\,\text{m}$

③ $\frac{5a + a}{2} \cdot a = 3a^2 = 108\,\text{dm}^2$; $a^2 = 36\,\text{dm}^2$; $a = 6\,\text{dm}$

b) Beispiele:

① $A = a^2 = 81\,\text{cm}^2$; $a = 9\,\text{cm}$ ② $A = a^2 = 529\,\text{m}^2$; $a = 23\,\text{m}$ ③ $A = 3a^2 = 8{,}67\,\text{m}^2$; $a = 17\,\text{dm}$

c) ④ $a = 5\,\text{cm}$ ⑤ $a = 0{,}5\,\text{m}$

KX **12** Beispiele: $\sqrt{\sqrt{1}} = 1$; $\sqrt{\sqrt{16}} = 2$; $\sqrt{\sqrt{\sqrt{6561}}} = 3$; $\sqrt{\sqrt{625}} = 5$; $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10^8}}} = 10$

Man multipliziert die Quadratzahl mehrfach mit sich selbst und erhält im Anschluss durch mehrfaches Wurzelziehen eine natürliche Zahl.

Entdecken

KX
- Individuelle Erläuterungen.
  Leon: Da $1 < 2 < 4$ gilt, muss $\sqrt{1} = 1 < \sqrt{2} < 2 = \sqrt{4}$ gelten.
  Paul: $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2 < 2{,}25 = 1{,}5^2$
  $\sqrt{2}$ muss somit zwischen 1,4 und 1,5 liegen, also weitere Dezimalstellen besitzen.
  Sophie: Wenn die Seitenlänge des Quadrats $\sqrt{2}$ cm ist, beträgt der Flächeninhalt des Quadrats $(\sqrt{2}\,\text{cm})^2 = 2\,\text{cm}^2$. Damit lässt sich die Zahl $\sqrt{2}$ wie von Sophie skizziert auf dem Zahlenstrahl konstruieren.

KX
- Der Flächeninhalt des weiß eingezeichneten Dreiecks ist ein Viertel des Flächeninhalts des Quadrats, wie man durch Einzeichnen der Diagonalen im Quadrat sieht. Damit gilt:
  $A_{\text{Quadrat}} = 4 \cdot A_{\text{Dreieck}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1\,\text{cm} \cdot 1\,\text{cm} = 2\,\text{cm}^2$

KX
- Die Schülerinnen und Schüler erhalten individuelle Näherungswerte für $\sqrt{2}$.

Nachgefragt

KX
- Das ist falsch, z. B. $\sqrt{9} = 3$ oder $\sqrt{361} = 19$.

KX
- Eine Quadratzahl ist genau dann gerade, wenn die Zahl, die quadriert wurde, gerade ist. Gerade Quadratzahlen sind also von der Form $(2a)^2$ (a ist eine natürliche Zahl). Für die Quadratwurzel aus einer geraden Quadratzahl gilt somit: $\sqrt{(2a)^2} = 2a$. Dies ist für jede natürliche Zahl a eine gerade Zahl.

Aufgaben

KX
1 **a)** ① $144 = 12^2$, also ist $\sqrt{144}$ (= 12) rational.
② Der Radikand 1000 ist keine Quadratzahl, also ist $\sqrt{1000}$ irrational.
③ $324 = 18^2$, also ist $\sqrt{324}$ (= 18) rational.
④ $\frac{2}{5}$ ist ein Bruch zweier natürlicher Zahlen, also rational.
⑤ 9 und 16 sind Quadratzahlen und es gilt $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$. Dies ist eine rationale Zahl.
⑥ $\frac{5}{36}$ ist ein Bruch zweier natürlicher Zahlen, also rational.

b) ① $6 < \sqrt{37} < 7$, da $6^2 < 37 < 7^2$
② $21 < \sqrt{480} < 22$, da $21^2 < 480 < 22^2$
③ $8 < \sqrt{75} < 9$, da $8^2 < 75 < 9^2$
④ $27 < \sqrt{750} < 28$, da $27^2 < 750 < 28^2$
⑤ $31 < \sqrt{1000} < 32$, da $31^2 < 1000 < 32^2$

KX
2 Beispiele:
a) $x \in \{2{,}1;\ 2{,}5;\ 2{,}75;\ 2{,}888;\ 2{,}99\}$
b) $x \in \{1{,}0009;\ 1{,}01;\ 1{,}015;\ 1{,}0671;\ 1{,}099\}$
c) $x \in \{1{,}0001;\ 1{,}0065;\ 1{,}007;\ 1{,}00888;\ 1{,}009999\}$
d) $x \in \{9{,}1;\ 9{,}5;\ 9{,}75;\ 9{,}819;\ 9{,}99999\}$

KX
3 **a)** $a^2 = 2 \cdot 9 = 18;\ a = \sqrt{18}$
b) $a = \sqrt{32}$

K5 **4** **a)** $\sqrt{5} < \sqrt{6}$ **b)** $1{,}5 < \sqrt{3}$ **c)** $\sqrt[3]{10} < \left(\sqrt[3]{10}\right)^3$ **d)** $\sqrt{25{,}25} > 5$
e) $\frac{12}{7} < \sqrt{3}$ **f)** $2\frac{1}{4} < \sqrt[3]{13}$ **g)** $\sqrt{27{,}04} = 5{,}2$ **h)** $\sqrt{\frac{1}{9}} < \sqrt{\frac{1}{3}}$

KX **5** **a)** Individuelle Erklärungen. Aus der Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational ist und sich somit als (vollständig gekürzter) Bruch $\frac{p}{q}$ schreiben lässt, wird hergeleitet, dass beide Zahlen p und q durch 2 teilbar sind. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass der Bruch $\frac{p}{q}$ vollständig gekürzt ist. Die Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational ist, ist somit falsch. $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

b) 1 Annahme: $\sqrt{3}$ ist eine rationale Zahl. Dann lässt sich $\sqrt{3}$ als vollständig gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{N}$) schreiben: $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$.

Daraus folgt:

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \quad |^2$$
$$3 = \frac{p^2}{q^2} \quad | \cdot q^2$$
$$3q^2 = p^2$$

$3q^2$ ist durch 3 teilbar, deshalb ist auch p^2 durch 3 teilbar. Damit muss p ein Vielfaches von 3 sein: $p = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$).

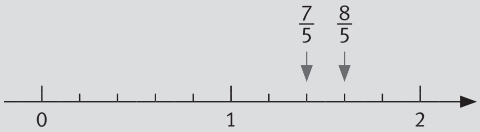
Einsetzen ergibt: $3q^2 = (3k)^2$, also $q^2 = 3k^2$. Damit ist auch q ein Vielfaches von 3. p und q sind also beide durch 3 teilbar im Widerspruch dazu, dass der Bruch $\frac{p}{q}$ vollständig gekürzt ist. Die Annahme, dass $\sqrt{3}$ eine rationale Zahl ist, ist somit falsch. $\sqrt{3}$ ist keine rationale Zahl.

2 Der Beweis für $\sqrt{5}$ erfolgt analog zu dem für $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$.

Alternativer Einstieg: Schulbuch Seite 79

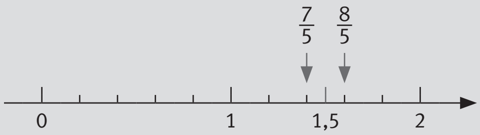
Entdecken

KX ■



KX ■ Mittelwerte: $\left(\frac{7}{5} + \frac{8}{5}\right) : 2 = 1{,}5$ $\left(\frac{7}{5} + \frac{8}{5} + 1{,}5\right) : 3 = 1{,}5$ $\left(\frac{7}{5} + \frac{8}{5} + 1{,}5 + 1{,}5\right) : 4 = 1{,}5$

KX ■



KX ■ $\sqrt{2}$ liegt zwischen $\frac{7}{5}$ und 1,5.

Nachgefragt

K1
- Die Aussage ist falsch. Es gibt reelle Zahlen, die nicht rational sind, z. B. $\sqrt{2}$.
- Durch Anhängen weiterer Nachkommastellen lassen sich beliebig viele Zahlen, die größer als 1,6 und kleiner als 1,7 sind erzeugen, z. B.: 1,601, 1,6001; 1,60001; …

Aufgaben

KX **1** $\sqrt{3}$ ist eine irrationale Zahl mit unendlich vielen Nachkommastellen. Da der Taschenrechner nur endlich viele dieser Stellen anzeigt (und die letzte Stelle u. U. gerundet ist), kann die Anzeige nicht exakt sein.

KX **2** **a)** $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$ **b)** $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$ **c)** $\sqrt{1024} = 32$: $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$
d) $\mathbb{R}$ **e)** $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$ **f)** $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$: $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$

K5 **3** **a)** $2 < \sqrt{6} < 3$ **b)** $3 < \sqrt{13} < 4$ **c)** $13 < \sqrt{170} < 14$ **d)** $25 < \sqrt{650} < 26$ **e)** $31 < \sqrt{990} < 32$

K1 **4** **a)** Das ist richtig, denn $\sqrt{2} \approx 1{,}4142136...$
b) Das ist richtig, den $\sqrt{4} = 2$.
c) Das ist richtig. Die Menge der natürlichen Zahlen ist eine Teilmenge der reellen Zahlen.
d) Das ist falsch, denn $\sqrt{2}$ beispielsweise ist zwar reell, aber irrational. Die Umkehrung wäre richtig, denn die rationalen Zahlen sind eine Teilmenge der reellen Zahlen.
e) Das ist richtig. Als Begründung für rationale Zahlen kann man eine Folge ähnlich der unter a) nehmen:
$\frac{5}{10}; \frac{51}{100}; \frac{511}{1000}; \frac{5111}{10\,000}; \frac{51\,111}{100\,000}; \frac{511\,111}{1\,000\,000}; \frac{5\,111\,111}{10\,000\,000}; \frac{51\,111\,111}{100\,000\,000}; \ldots$
Als Folge von irrationalen Zahlen, deren Folgeglieder zwischen 0,5 und 0,6 liegen, kann man beispielsweise diese hier verwenden:
$0{,}5 + \sqrt{2} \cdot 10^{-n-1}$ mit n = 1, 2, 3, 4, 5, …
f) Das ist falsch. Man kann das mit einem Widerspruchsbeweis zeigen.
Voraussetzung: x ist irrational.
Annahme: 10x ist rational.
Wenn die Annahme stimmt, dann ist 10x : 10 = x ebenfalls rational, was der Voraussetzung widerspricht.

K1 **5** **a)** ① $7 < \sqrt{50} < 8$, denn $7^2 = 49 < 50 < 64 = 8^2$

② $15 < \sqrt{245} < 16$, denn $15^2 = 225 < 245 < 256 = 16^2$

③ $32 < \sqrt{1040} < 33$, denn $32^2 = 1024 < 1040 < 1089 = 33^2$

④ $24 < \sqrt{600} < 25$, denn $24^2 = 576 < 600 < 625 = 25^2$

⑤ $63 < \sqrt{4000} < 64$, denn $63^2 = 3969 < 4000 < 4096 = 64^2$

b) Individuelle Lösungen.

Alternativer Einstieg: Schulbuch Seite 79

Entdecken

K3

- $\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{9 \cdot 4}$
  $\sqrt{6} \cdot \sqrt{13{,}5} = \sqrt{6 \cdot 13{,}5}$
  $\sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}}$
  $\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}} = \sqrt{\frac{225}{100}}$
  $\sqrt{16-9} \neq \sqrt{16} - \sqrt{9}$
  $\sqrt{64} - \sqrt{15} \neq \sqrt{64-15}$
  $\sqrt{81} + \sqrt{16} \neq \sqrt{81+16}$
  $\sqrt{7+9} \neq \sqrt{7} + \sqrt{9}$
- Die Gleichheit gilt für die Multiplikation und die Division von Wurzeln.
- Beim Multiplizieren bzw. Dividieren von Wurzeln können die Faktoren bzw. Divisoren und Dividenden unter eine Wurzel geschrieben werden. Bei der Addition bzw. Subtraktion ist dies nicht möglich.

Nachgefragt

- KX Die Umformung ist richtig, da das Kommutativgesetz auch bei der Addition von Wurzeln gilt.
- KX Die Wurzel aus einer nicht negativen Zahl ist als diejenige nicht negative Zahl definiert, deren Quadrat die ursprüngliche Zahl ist. Wegen $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 = x$ gilt somit die angegebene Beziehung.
- KX Quadratwurzeln sind nur dann definiert, wenn der Radikand größer oder gleich null ist. Für $\sqrt{x-5}$ muss also gelten: $x - 5 \geq 0$, also $x \geq 5$.

Aufgaben

K5 **1** **a)** 6 **b)** $\frac{4}{5}$ **c)** 14 **d)** 36 **e)** 9 **f)** 2
g) 10 **h)** 52 **i)** 10 **j)** $1\frac{1}{2}$ **k)** $\frac{3}{4}$ **l)** 10
m) 0 **n)** 15 **o)** $\frac{6}{7}$ **p)** 3

K5 **2** **a)** 6 **b)** 66 **c)** 8 **d)** 5
e) 10 **f)** $\sqrt{60} = 2\sqrt{15}$ **g)** $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **h)** $\sqrt{85}$
i) $\frac{\sqrt{24}}{7} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ **j)** $\sqrt{\frac{22}{5}} = \frac{\sqrt{110}}{5}$ **k)** $\sqrt{\frac{162}{289}} = \frac{9}{17}\sqrt{2}$ **l)** $10\sqrt{3}$
m) $\sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ **n)** $3\sqrt{11}$ **o)** $\frac{\sqrt{243}}{6} = \frac{9\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ **p)** $\sqrt{2}$

K5 **3**

20	$\sqrt{1125} : \sqrt{5}$	→	15	$\sqrt{32} \cdot \sqrt{8}$	→	16	$\sqrt{324} : \sqrt{4}$	→
9	$\sqrt{1690} : \sqrt{10}$	→	13	$\sqrt{6} \cdot \sqrt{54}$	→	18	$\sqrt{36} \cdot \sqrt{16}$	→
24	$\frac{\sqrt{432}}{\sqrt{27}}$	→	4	$\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}$	→	12	$\frac{\sqrt{2000}}{\sqrt{5}}$	→

K6 **4** **a)** 1 $4\sqrt{7}+2\sqrt{7}=\sqrt{7}\cdot(4+2)=6\sqrt{7}$

2 $4\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}\cdot(4-1)=3\sqrt{5}$

3 $6\sqrt{3}+10-2\sqrt{3}-4=\sqrt{3}\cdot(6-2)+10-4=4\sqrt{3}+6$

4 $3\sqrt{5}-5\sqrt{7}+4\sqrt{5}+6\sqrt{7}=\sqrt{7}\cdot(-5+6)+\sqrt{5}\cdot(3+4)=\sqrt{7}+7\sqrt{5}$

5 $5\sqrt{3}+4\sqrt{3}-5\sqrt{5}+4\sqrt{6}=\sqrt{3}\cdot(5+4)-5\sqrt{5}+4\sqrt{6}=9\sqrt{3}-5\sqrt{5}+4\sqrt{6}$

b) Wurzeln lassen sich addieren bzw. subtrahieren, wenn die Zahl unter der Wurzel (also der Radikand) dieselbe ist.
Hier sind viele individuelle Beispiele möglich.

K1 **5** 1 $\sqrt{0{,}729}\approx 0{,}8538$ $\quad\sqrt{7{,}29}\approx 2{,}7$
$\sqrt{72{,}9}\approx 8{,}538$ $\quad\sqrt{729}\approx 27$
$\sqrt{7290}\approx 85{,}38$ $\quad\sqrt{72\,900}\approx 270$

2 $\sqrt{1258}\approx 35{,}47$ $\quad\sqrt{125{,}8}\approx 11{,}22$
$\sqrt{12{,}58}\approx 3{,}547$ $\quad\sqrt{1{,}258}\approx 1{,}122$
$\sqrt{0{,}1258}\approx 0{,}3547$ $\quad\sqrt{0{,}01258}\approx 0{,}1122$

3 $\sqrt{1024}\approx 32$ $\quad\sqrt{102{,}4}\approx 10{,}12$
$\sqrt{10{,}24}\approx 3{,}2$ $\quad\sqrt{1{,}024}\approx 1{,}01$
$\sqrt{0{,}1024}\approx 0{,}32$ $\quad\sqrt{0{,}01024}\approx 0{,}10$

4 $\sqrt{0{,}025}\approx 0{,}158$ $\quad\sqrt{0{,}25}\approx 0{,}5$
$\sqrt{2{,}5}\approx 1{,}581$ $\quad\sqrt{25}\approx 5$
$\sqrt{250}\approx 15{,}81$ $\quad\sqrt{2500}\approx 50$

Haben Radikanden die gleiche Ziffernfolge, z. B. 1258; 125,8; 12,58; …, dann hat die Wurzel des jeweils 10-Fache eines Radikanden eine andere Ziffernfolge als die Wurzel des Radikanden. Die Wurzel des jeweils 100-Fachen eines Radikanden hat jedoch die gleiche Ziffernfolge wie die Wurzel des betrachteten Radikanden, im Beispiel die Radikanten 1258; 12,58; 0,1258 mit 35,47; 3,547; 0,3547 bzw. die Radikanten 125,8; 1,258; 0,01258 mit 11,22; 1,122; 0,1122.
Begründung: $\sqrt{a\cdot 100}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{100}=10\cdot\sqrt{a}$ und $\sqrt{a\cdot 10}=\sqrt{10}\cdot\sqrt{a}\approx 3{,}16\cdot\sqrt{a}$ und mit $a\geq 0$

K5 **6** **a)** $\frac{7}{13}\in\mathbb{Q}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt{169}}\in\mathbb{Q}^+$ **c)** $\frac{1}{\sqrt{91}}\notin\mathbb{Z}$ **d)** $\frac{1}{2}\sqrt{3}\in\mathbb{R}$

K5 **7** **a)** $-\frac{1}{2}\sqrt{2}<\sqrt{2}-1<0{,}5<\sqrt{2}<\sqrt{2^3}<\sqrt{13}<2\cdot\sqrt{6}$

b) $-2\sqrt{8}<-\sqrt{10}<-\sqrt{3}<0{,}2<\frac{1}{5}\sqrt{20}<\frac{1}{4}\sqrt{64}=\sqrt{4}<\sqrt{30}$

K5 **8** **a)** 6 **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** 9 **d)** $\frac{3}{2}$ **e)** 1,8 **f)** 26
g) a^2 **h)** 5b **i)** $\frac{6}{a}$ **j)** 12xy **k)** $\frac{y^2}{15x}$ **l)** $1{,}3\frac{1}{y^2}$

KX **9** Der Radikand wird als Produkt geschrieben, so dass möglichst viele Faktoren Quadratzahlen oder Quadrate von Variablen sind. Dabei werden die bekannten Rechengesetze (Assoziativgesetz, Distributivgesetz, Kommutativgesetz) angewandt. Aus diesen quadratischen Faktoren wird dann die Wurzel gezogen.

K5 **10** **a)** $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$
c) $\sqrt{63}=3\sqrt{7}$ **d)** $\sqrt{343}=7\sqrt{7}$
e) $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$ **f)** $\sqrt{18}+\sqrt{45}=3(\sqrt{2}+\sqrt{5})$
g) $\sqrt{80}-\sqrt{112}=4(\sqrt{5}-\sqrt{7})$ **h)** $\sqrt{99}+\sqrt{44}=5\sqrt{11}$
i) $\frac{\sqrt{60}+\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=3\sqrt{5}$ **j)** $\frac{\sqrt{25}-\sqrt{175}}{\sqrt{63}}=\frac{5-5\sqrt{7}}{3\sqrt{7}}$
k) $\frac{\sqrt{700}-\sqrt{112}}{\sqrt{175}+\sqrt{63}}=\frac{10\sqrt{7}-4\sqrt{7}}{5\sqrt{7}+3\sqrt{7}}=\frac{3}{4}$ **l)** $\frac{\sqrt{1331}}{\sqrt{176}}=\frac{11\sqrt{11}}{4\sqrt{11}}=2\frac{3}{4}$

KX **11** **a)** $\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}}=\frac{7}{2}$ **b)** $\sqrt{\frac{18}{98}}=\sqrt{\frac{2\cdot 9}{2\cdot 49}}\cdot\sqrt{\frac{9}{49}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{49}}=\frac{3}{7}$
c) $\sqrt{\frac{75}{48}}=\sqrt{\frac{3\cdot 25}{3\cdot 16}}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}=\frac{5}{4}$ **d)** $\sqrt{\frac{180}{36}}=\sqrt{5}$
e) $\sqrt{\frac{125}{320}}=\sqrt{\frac{5\cdot 25}{5\cdot 64}}=\sqrt{\frac{25}{64}}=\frac{5}{8}$ **f)** $\sqrt{\frac{162}{72}}=\sqrt{\frac{9\cdot 18}{4\cdot 18}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

KX **12** $\sqrt{180 \cdot x^5} = \sqrt{180} \cdot \sqrt{x^5} = 6\sqrt{5} \cdot \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{x} = 6x^2\sqrt{5x}$

$\sqrt{\frac{200}{x}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{x}} = 10\sqrt{\frac{2}{x}}$

$\sqrt{128 \cdot x^3} = \sqrt{2 \cdot 64} \cdot \sqrt{x \cdot x^2} = 8\sqrt{2} \cdot x\sqrt{x}$

Die jeweilige Einschränkung für x stellt sicher, dass der Radikand nicht negativ bzw. der Nenner nicht null wird.

K5 **13 a)** $\sqrt{18} = \boxed{\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{1}}} = \boxed{5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{144}}{2\sqrt{2}}} = \boxed{\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{4}}} = \boxed{3\sqrt{2}}$

b) Individuelle Lösungen möglich.

K5 **14**

Start	$\sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$	→	$a\sqrt{5}$	$\sqrt{27a^3} = 3a\sqrt{3a}$	→
$3a\sqrt{3a}$	$\sqrt{175a^5b^2c^3} = 5a^2bc\sqrt{7ac}$	→	$5a^2bc\sqrt{7ac}$	$\frac{\sqrt{18a^3b}}{\sqrt{27}} = a \cdot \frac{\sqrt{2ab}}{3}$	→
$a\sqrt{\frac{2ab}{3}}$	$\sqrt{21a^7 + 29a^7} = 5a^3\sqrt{2a}$	→	$5a^3\sqrt{2a}$	$\frac{\sqrt{80a^4 + a^4}}{\sqrt{2b^2}} = \frac{9a^2}{b} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$	→
$\frac{9a^2}{b} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{3a^3 \cdot 2b^4}}{\sqrt{4a^3 \cdot 3b^4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	→	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	Ziel	

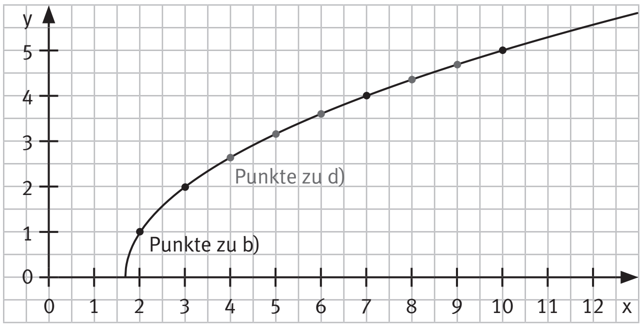
K5 **15 a)** $L = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$ **b)** $L = \{-6; 6\}$ **c)** $L = \{\,\}$ **d)** $L = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$

e) $L = \{-\sqrt{0{,}5}; \sqrt{0{,}5}\}$ **f)** $L = \{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$ **g)** $L = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$ **h)** $L = \{-2 \cdot \sqrt{3}; 2 \cdot \sqrt{3}\}$

K6 **16 a)**

x	2	3	7	10	23
$\sqrt{3x - 5}$	1	2	4	5	8

b)



Aus Platzgründen wurde der Punkt mit den Koordinaten (23 | 8) nicht eingetragen.

Alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme der Vielfachen von 3 sind in der Wertemenge der Funktion $f(x) = \sqrt{3x - 5}$ enthalten. Die entsprechenen x-Werte erhält man für alle natürlichen Zahlen n außer den Vielfachen von 3 durch die Folge: $x = \frac{n^2 + 5}{3}$.

n	1	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17
$n^2 + 5$	2	3	7	10	18	23	35	42	58	67	87	98
$f(x) = \sqrt{3x - 5}$	1	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17

c) Wurzeln sind nur dann definiert, wenn der Wert unter der Wurzel (der Radikand) ≥ 0 ist. Der Termwert von $3x - 5$ ist für $x = 0$ und $x = 1$ in beiden Fällen negativ, weshalb die Wurzel nicht definiert ist.

d) $(4 \mid \sqrt{7})$ $(5 \mid \sqrt{10})$ $(6 \mid \sqrt{13})$ $(8 \mid \sqrt{19})$ $(9 \mid \sqrt{22})$

Die Punkte sind bereits im Graphen von b) eingetragen.

K5 **17** **a)** richtig, $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \geq 5\}$
b) falsch. Richtig ist: $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \leq 5\}$.
c) Der Term ist definiert für die angegebene Zahlenmenge, aber die Definitionsmenge lautet: $D = \mathbb{R}$.
d) falsch. Richtig ist: $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \geq 10\}$.
e) falsch. Richtig ist: $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ mit } x > 0\}$.
f) richtig, $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ mit } x < 1\}$

KX **18** **a)** $x = 25$ **b)** $x = 169$ **c)** keine Lösung **d)** $x = 4$ **e)** $x = 49$ **f)** $x = 6$

KX **19** **a)** Der Nenner wird rational gemacht, indem man den Bruch mit dem Nenner erweitert.
b) ① $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ $\frac{12}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{7}} = \frac{12\sqrt{42}}{42} = \frac{2\sqrt{42}}{7}$
④ $\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{5}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$

K5 **20** **a)** $\frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{x}$ **b)** $\frac{12}{\sqrt{6a}} = \frac{12\sqrt{6a}}{6a} = \frac{2\sqrt{6a}}{a}$
c) $\frac{12}{\sqrt{6+y}} = \frac{12\sqrt{6+y}}{6+y}$ **d)** $\frac{12}{\sqrt{6y}} = \frac{12\sqrt{6y}}{6y} = \frac{2\sqrt{6y}}{y}$
e) $\frac{a}{\sqrt{5+a}} = \frac{a\sqrt{5+a}}{5+a}$ **f)** $\frac{a}{\sqrt{5} + a\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5} \cdot (1+a)} = \frac{a\sqrt{5}}{5 \cdot (a+1)}$

K6 **21** **a)** richtig, denn: $\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$
b) falsch, der Term kann nicht weiter vereinfacht werden.
c) falsch, richtig ist: $\sqrt{\frac{5}{20}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

KX **22** **a)** Der Bruch wird zur 3. binomischen Formel erweitert und der Nenner wird mit der 3. binomischen Formel vereinfacht.
b) Bei der 1. und 2. binomischen Formel entsteht neben den beiden Quadraten immer auch das doppelte gemischte Produkt, das weiterhin Wurzeln enthält.
Beispiel: $\frac{7}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{7(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7}-\sqrt{2})} = \frac{7(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2} = \frac{7(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{7 - 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{2} + 2} = \frac{7(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{9 - 2\sqrt{14}}$
Bei der 3. binomischen Formel hingegen kommen nur Quadrate und somit keine Wurzeln vor.
c) ① $\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$ ② $\frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5}\sqrt{5}$ ③ $\frac{12}{\sqrt{15}} = \frac{4}{5}\sqrt{15}$ ④ $\frac{5}{\sqrt{15}} = \frac{1}{3}\sqrt{15}$
⑤ $\frac{24}{\sqrt{32}} = \frac{24}{4\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ ⑥ $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}-\sqrt{7}} = \frac{2(2+\sqrt{7})}{4-7} = \frac{4+2\sqrt{7}}{-3}$
⑦ $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}-\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+\sqrt{11})}{3-11} = \frac{6+2\sqrt{33}}{-8} = \frac{3+\sqrt{33}}{-4}$
⑧ $\frac{9}{2+\sqrt{7}} = \frac{9 \cdot (2-\sqrt{7})}{4-7} = \frac{9 \cdot (2-\sqrt{7})}{-3} = -3 \cdot (2-\sqrt{7})$
⑨ $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{13}}{\sqrt{7}-\sqrt{13}} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{13})^2}{7-13} = \frac{7 + 2\sqrt{7 \cdot 13} + 13}{-6} = -\frac{10+\sqrt{91}}{3}$
⑩ $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

KX **1** **a)** 1,4 **b)** 1400 **c)** 280
d) 0,014 **e)** 0,08 **f)** 2,5

a) 32 **b)** $1\frac{2}{3}$ **c)** 3
d) 1 **e)** 10 **f)** 14

KX **2** **a)** $\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{10}$ **b)** $\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{21}$
c) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{4}}=\sqrt{3}$ **d)** $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2{,}5}=\sqrt{20}$
e) $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{1}}=\sqrt{30}$ **f)** $\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}=13$

a) $\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{11}}=\sqrt{11}$ **b)** $\sqrt{12}\cdot\sqrt{48}=\sqrt{576}$
c) $\sqrt{9}\cdot\sqrt{36}=18$ **d)** $\sqrt{336}:\sqrt{21}=4$
e) $\sqrt{121}\cdot\sqrt{0}=0$ **f)** $\sqrt{169}:\sqrt{13}=\sqrt{13}$

KX **3** **a)**

36
$\sqrt{12}$ | $\sqrt{108}$
$\sqrt{2}$ | $\sqrt{6}$ | $\sqrt{18}$
$\sqrt{2}$ | $\sqrt{1}$ | $\sqrt{6}$ | $\sqrt{3}$

a)

128
$\sqrt{128}$ | $\sqrt{128}$
$\sqrt{16}$ | $\sqrt{8}$ | $\sqrt{16}$
$\sqrt{8}$ | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{4}$ | $\sqrt{4}$

KX **4** **a)** wahr
b) wahr
c) wahr

a) falsch. Gegenbeispiel: 0,5
b) falsch. Gegenbeispiel: $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$
c) wahr

KX **5** **a)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}>\sqrt{2\cdot 3}$
b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}>\sqrt{5}$
c) $\sqrt{16}-\sqrt{9}<\sqrt{7}$

a) $\sqrt{100}-\sqrt{50}<\sqrt{50}$
b) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 9}$
c) $\sqrt{45}-\sqrt{5}>\sqrt{45:5+1}$

KX **6** **a)** {10; 11; ...; 21; 22}
({5; 6; 7})
b) {18; 19; ...; 25; 26}
({7; 8})
c) {31; 32}
({10})

a) {32; 33; 34; 35; 36}
({10})
b) {26; 27; ...; 31; 32}
({9; 10})
c) {110; 111; 112; 113; 114}
({23})

KX **7** Beispiele:

	rationale Zahlen	irrationale Zahl
a)	2,55; 2,9	$\sqrt{6}$
b)	10,03; $10\frac{1}{3}$	$\sqrt{101}$
c)	$\sqrt{9{,}9225}$; 3,198	$\sqrt{10}$
d)	$1\frac{1}{4}$; 1,401	$\sqrt{2}$

Beispiele:

	rationale Zahlen	irrationale Zahl
a)	4,177; 4,1705	$\sqrt{17{,}45}$
b)	5,2345; 5,23477	$\sqrt{27{,}4}$
c)	0,0009; $\frac{1}{2345}$	$\frac{\sqrt{3}}{10\,000}$
d)	10; $\sqrt{144}$	$\sqrt{122}$

KX **8** **a)** 40 **b)** 180 **c)** 8 **d)** 100

a) 3640 **b)** 750 **c)** 16 **d)** 4

KX **9**

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt{5} & \xrightarrow{\cdot\sqrt{4}} & \sqrt{20} & \longrightarrow & \sqrt{80} \\ \downarrow{\scriptstyle\cdot\sqrt{5}} & & \downarrow & & \downarrow \\ 5 & \longrightarrow & 10 & \longrightarrow & 20 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5\cdot\sqrt{5} & \longrightarrow & 10\cdot\sqrt{5} & \longrightarrow & 20\cdot\sqrt{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt{504} & \xrightarrow{:\sqrt{2}} & \sqrt{252} & \longrightarrow & \sqrt{126} \\ \downarrow{\scriptstyle :\sqrt{3}} & & \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{168} & \longrightarrow & \sqrt{84} & \longrightarrow & \sqrt{42} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{56} & \longrightarrow & \sqrt{28} & \longrightarrow & \sqrt{14} \end{array}$$

KX **10**

	1	2	3	4	max. Bereich
a)	–	0	$\sqrt{0,5}$	$\sqrt{5}$	$x \in \mathbb{R}_0^+$
b)	–	–	–	$\sqrt{8}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
c)	2	0	–	–	$x \in \mathbb{R}_0^-$

	1	2	3	4	max. Bereich
a)	2	$\sqrt{2}$	1	–	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$
b)	$\sqrt{5}$	1	–	–	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0,5\}$
c)	–	–	–	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

KX **11** **a)** $x = 625$ **b)** $x = 169$
c) $x = 36$ **d)** $x = 51$

a) $x = 5$ **b)** $x = 13$
c) $x = 1$ **d)** keine Lösung

KX **12** **a)** $7\sqrt{5}$ **b)** $-11\sqrt{b}$ **c)** $17\sqrt{2x}$
d) 0 **e)** $(x + \sqrt{5})^2$

a) $10\sqrt{5}$ **b)** 0 **c)** $5x\sqrt{y}$
d) $27\sqrt{x}$ **e)** $(\sqrt{3}x - \sqrt{7})^2$

K5 **1** **a)** ① $a = \sqrt[3]{2}\,\text{cm} \approx 1{,}26\,\text{cm}$ ② $a = 2\,\text{cm}$ ③ $a = \sqrt[3]{25}\,\text{dm} \approx 2{,}92\,\text{dm}$ ④ $a = \sqrt[3]{75}\,\text{dm} \approx 4{,}22\,\text{dm}$

b) ① $O \approx 6 \cdot 1{,}59\,\text{cm}^2$, $O \approx 9{,}53\,\text{cm}^2$ ② $O = 6 \cdot 4\,\text{cm}^2$, $O = 24\,\text{cm}^2$ ③ $O \approx 6 \cdot 8{,}53\,\text{dm}^2$, $O \approx 51{,}30\,\text{dm}^2$ ④ $O \approx 6 \cdot 17{,}81\,\text{dm}^2$, $O \approx 106{,}71\,\text{dm}^2$

K5 **2**

	a)	b)	c)	d)	e)
Ausgangszahl	100	500	650	999	2500
Quadratzahl	$10^2 = 100$	$22^2 = 484$	$25^2 = 625$	$32^2 = 1024$	$50^2 = 2500$
Abweichung	0	16	25	25	0
Kubikzahl	$5^3 = 125$	$8^3 = 512$	$9^3 = 729$	$10^3 = 1000$	$14^3 = 2744$
Abweichung	25	12	79	1	244

K6 **3** Der Taschenrechner liefert ein auf neun Stellen gerundetes Ergebnis. Die neunte Nachkommastelle der Zahl auf dem Taschenrechner ist eine 8. Multipliziert man die Zahl mit sich selbst, steht wegen $8^2 = 64$ auf der 18. Nachkommastelle eine 4.

K1 **4** Um die benachbarten Zahlen herauszufinden, müssen diejenigen Zahlen bestimmt werden, deren Quadrat „ein bisschen kleiner“ bzw. „ein bisschen größer“ als der Radikand ist.

a) $6 < \sqrt{40} < 7$; $3 < \sqrt{10} < 4$; $2 < \sqrt{5} < 3$

b) $4 < \sqrt{18} < 5$; $5 < \sqrt{32} < 6$; $7 < \sqrt{60} < 8$

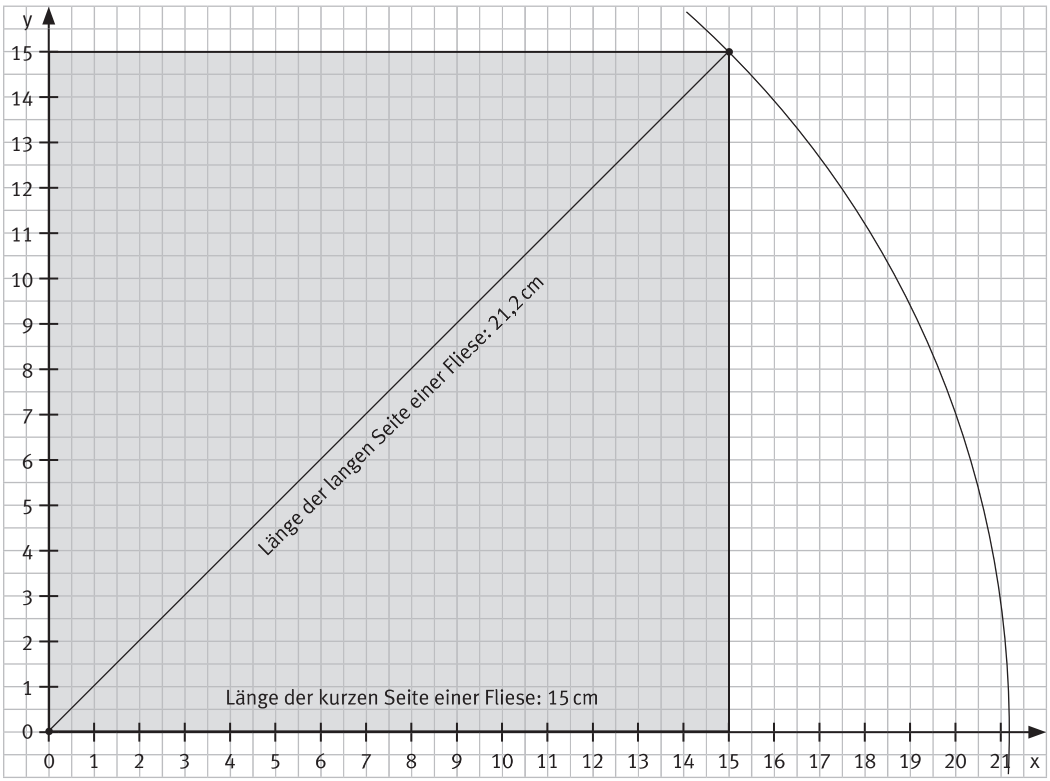
c) $17 < \sqrt{316} < 18$; $12 < \sqrt{145} < 13$; $14 < \sqrt{200} < 15$

d) $9 < \sqrt{88} < 10$; $8 < \sqrt{77} < 9$; $9 < \sqrt{99} < 10$

e) $10 < \sqrt{112} < 11$; $13 < \sqrt{170} < 14$; $12 < \sqrt{168} < 13$

f) $18 < \sqrt{360} < 19$; $20 < \sqrt{420} < 21$; $22 < \sqrt{501} < 23$

K4 **5** **a)** Die Fliesen sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, deren kurze Seiten $60\,\text{cm} : 4 = 15\,\text{cm}$ lang sind. Um die Länge der langen Seite zeichnerisch zu bestimmen, zeichnet man ein Quadrat der Seitenlänge 15 cm und misst die Länge der Diagonale: $\approx 21{,}2\,\text{cm}$.



b) Die gesamte, von den Fliesen bedeckte Fläche ist $60\,\text{cm} \cdot 30\,\text{cm} = 1800\,\text{cm}^2$ groß. Ein rotes Quadrat bedeckt genau ein Viertel dieser Fläche, also $450\,\text{cm}^2$. Die Seitenlänge dieses Quadrats und damit die lange Seite einer Fliese ist also: $\sqrt{450}\ \text{cm} \approx 21{,}2\,\text{cm}$.

KX **6** **a)** Die Aussage ist falsch. $\sqrt{25} = 5 < 6 = \sqrt{36}$
b) $\sqrt{5}$ ergibt quadriert 5, $\sqrt{5}$ ist aber keine rationale Zahl.
c) Die Aussage ist falsch. Die Quadratwurzel ist als positive Zahl definiert, also $\sqrt{81} = 9$.
d) Die Aussage ist richtig.
e) Die Aussage ist richtig. Es sind sogar alle natürlichen Zahlen auch reelle Zahlen.
f) Die Aussage ist richtig (für irrationale, rationale und reelle Zahlen).
g) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4} > \frac{1}{8} = \sqrt{\frac{1}{64}}$

KX **7**

	a)	b)	c)	d)	e)
Zahl	626	4097	10 001	250 001	$10^8 + 1$
Quadratwurzel	≈ 25,02	≈ 64,00781	≈ 100,005	≈ 500,001	≈ 1000,0005
Abweichung	≈ 0,02	≈ 0,00781	≈ 0,005	≈ 0,001	≈ 0,0005
Zahl	15 626	262 145	1 000 001	$1{,}25 \cdot 10^8 + 1$	$10^9 - 1$
Kubikwurzel	≈ 25,00053	≈ 64,000081	≈ 100,00003	$\approx 500 + 1{,}3 \cdot 10^{-6}$	≈ 999,9999997
Abweichung	≈ 0,00053	≈ 0,000081	≈ 0,00003	$\approx 1{,}3 \cdot 10^{-6}$	$\approx -3 \cdot 10^{-7}$

KX **8** Individuelle Lösungen. Beispiele:

Quadratwurzeln: größer als der Radikand: $\sqrt{0{,}001} = 0{,}1$
kleiner als Radikand: $\sqrt{25} = 5$

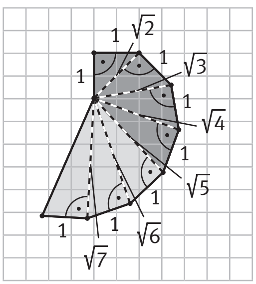
Kubikwurzeln: größer als Radikand: $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$
kleiner als Radikand: $\sqrt[3]{216} = 6$

K1 **9** **a)** Ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 9 (FE) hat die Seitenlänge $\sqrt{9}$ (LE) = 3 (LE), ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 16 (FE) hat entsprechend die Seitenlänge $\sqrt{16}$ (LE) = 4 (LE). Beide Quadrate zusammen haben den Flächeninhalt 25 (FE). Zeichnet man jedoch ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 25 (FE), so hat es die Seitenlänge $\sqrt{9 + 16}$ (LE) = $\sqrt{25}$ (LE) = 5 (LE). Obwohl die Flächeninhalte jeweils gleich sind, gilt dieses nicht für die Summe der Seitenlängen, sodass eine entsprechende Additionsregel für Wurzeln nicht gilt.
b) Es sind individuelle Lösungen möglich, die jedoch nicht immer zu natürlichen Zahlen führen, z. B. $\sqrt{16} + \sqrt{25} \neq \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$.

KX **10**

a)	b)	c)	d)	e)
5	24	9	2,5	8
12	2,5	−2,4	8	8
8	10	1	27	0

K3 **11** **a)**



b) Flächeninhalt der im Schulbuch abgebildeten Wurzelschnecke (4 Schritte):

$A_4 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\,\text{FE} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2}\,\text{FE} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3}\,\text{FE} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{4}\,\text{FE}$
$= \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})\,\text{FE} \approx 3{,}07\,\text{FE}$

Flächeninhalt der fortgesetzten Wurzelschnecke (7 Schritte):

$A_7 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})\,\text{FE} \approx 6{,}74\,\text{FE}$

KX **12** Seitenlänge des Quadrats WALD: a
Seitenlänge des Quadrats FELS: b

a) $a^2 = 0{,}36b^2$; $b = \frac{5}{3}a \approx 1{,}67a$

b) $a^2 = 0{,}50b^2$; $b = a\sqrt{2} \approx 1{,}41a$

c) $a^2 = 0{,}64b^2$; $b = 1{,}25a$

d) $a^2 = 0{,}95b^2$; $b = \frac{2}{19}\sqrt{95}\,a \approx 1{,}03a$

KX **13** **a)** irrational **b)** rational **c)** irrational **d)** irrational **e)** rational **f)** rational
g) rational **h)** irrational **i)** irrational **j)** irrational **k)** irrational **l)** rational

K5 **14** **a)** $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

b) $\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

c) $\sqrt{432} = \sqrt{144 \cdot 3} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

d) $\sqrt{720} = \sqrt{144 \cdot 5} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{5} = 12\sqrt{5}$

e) $\sqrt{\frac{6}{25}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{6}}{5}$

f) $\sqrt{\frac{324}{125}} = \frac{\sqrt{324}}{\sqrt{25 \cdot 5}} = \frac{18}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{5}} = \frac{18}{5\sqrt{5}}$

K6 **15** **a)** $\sqrt{19} + \sqrt{30}$ Der Term kann nicht weiter vereinfacht werden.

b) $\sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$

c) $5\sqrt{44} - 7\sqrt{99} = 5 \cdot \sqrt{4 \cdot 11} - 7\sqrt{9 \cdot 11} = 5 \cdot 2\sqrt{11} - 7 \cdot 3\sqrt{11} = 10\sqrt{11} - 21\sqrt{11} = -11\sqrt{11}$

d) $\sqrt{a^2 + b^2}$ Der Term kann nicht weiter vereinfacht werden.

KX **16** **a)** Die Faktoren werden unter einer einzigen Wurzel zusammengefasst, und dann wird aus den quadratischen Faktoren die Wurzel gezogen.

b) ① $\frac{\sqrt{xy^5}}{\sqrt{x^3 \cdot y^3}} = \sqrt{\frac{xy^5}{x^3 \cdot y^3}} = \sqrt{\frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x}$

② $\sqrt{4x} \cdot \sqrt{16x} = \sqrt{64x^2} = 8x$

③ $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{12ab^2} = \sqrt{36a^2b^2} = 6ab$

④ $\frac{\sqrt{150x^3}}{\sqrt{216x}} = \sqrt{\frac{150x^3}{216x}} = \sqrt{\frac{25x^2}{36}} = \frac{5}{6}x$

⑤ $\frac{\sqrt{45a^2}}{\sqrt{245a^4}} = \sqrt{\frac{45a^2}{245a^4}} = \sqrt{\frac{9}{49a^2}} = \frac{3}{7a}$

K5 **17** **a)** $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

b) $\sqrt{250} = 5\sqrt{10}$

c) $\sqrt{49x^5} = 7x^2\sqrt{x}$

d) $\sqrt{275} - \sqrt{99} = 5\sqrt{11} - 3\sqrt{11} = 2\sqrt{11}$

e) $\sqrt{288x^3y} = 12x\sqrt{2xy}$

f) $\sqrt{10a^3 + 22a^3} = \sqrt{32a^3} = 4a\sqrt{2a}$

g) $\frac{\sqrt{45} + \sqrt{80}}{\sqrt{147}} = \frac{3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{7\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{15}$

h) $\frac{\sqrt{363a^2b^7c^9}}{ab^2c} = \frac{11ab^3c^4\sqrt{3bc}}{ab^2c} = 11bc^3\sqrt{3bc}$

KX **18** **a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **c)** $2\sqrt{3}$ **d)** $3\sqrt{2}$ **e)** $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ **f)** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
g) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **h)** $\sqrt{2}$ **i)** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ **j)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **k)** $\frac{-\sqrt{6}}{2}$ **l)** 3

K5 **19**

$\sqrt{100 + 44}$	=	12	$\left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{2}$	=	$\sqrt{8}$
$2^2 \cdot \sqrt{2}$	=	$\sqrt{32}$	2^2	=	$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$

Übrig bleibt:

$\sqrt{100} + \sqrt{44}$

K5 **20** **a)** 3; 10; 0,1; 0,5; 10^3; 0,13; 1,8 **b)** 10; 0,2; $\frac{5}{4}$; $\frac{1}{3}$; 2
c) 3; 5; 0,1; 0,5; 10 **d)** 4; 6; 6; 10; 0,4

KX **21** **a)** $2{,}4 < \sqrt{7} < 2\sqrt{2} < 2{,}\overline{8}$ **b)** $0{,}1 < 0{,}31311... < \frac{1}{3} < \sqrt{\frac{1}{4}}$
c) $-\frac{7}{2} < -3{,}\overline{45} < -\sqrt{10} < -\sqrt[3]{27}$ **d)** $(0{,}2)^2 < \sqrt{0{,}16} < \sqrt[3]{0{,}064} < \frac{4}{9}$

KX **22** **a)** 8 **b)** 22 **c)** $56 - 12\sqrt{14}$
d) 14 **e)** $a - 3\sqrt{a}$ **f)** $10x - 14\sqrt{xy}$

KX **23** **a)** $a^2 = (3 + 1)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 6 = 10$; $a = \sqrt{10}$ **b)** $a^2 = 24$; $a = \sqrt{24}$

KX **24** **a)** $\sqrt{36 + 36} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{36} = 6\sqrt{2}$ Passt nicht, da das Ergebnis keine ganze Zahl ist.
$(\sqrt{36} - \sqrt{12} \cdot \sqrt{3}) = 0$ $36\sqrt{36} = 216$
$\sqrt{36} + \sqrt{72} : \sqrt{2} = 6 + 6 = 12$ $\sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt{\frac{64}{4}} = 4$

$\frac{\sqrt{64} + \sqrt{16} + \sqrt{4}}{\sqrt{64} - \sqrt{4} : 2} = \frac{8 + 4 + 2}{8 - 1} = \frac{14}{7} = 2$

$\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16} + \sqrt{16}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{64}{16}} = 1$

$\frac{(\sqrt{64} - \sqrt{8} + \sqrt{4})}{\sqrt{2}} = \frac{8 - \sqrt{8} + 2}{\sqrt{2}} = \frac{10 - 2\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} - 2$

Passt nicht, da es keine ganze Zahl ist, es ist eine irrationale Zahl.

$\sqrt{128} : \sqrt{8} = 8\sqrt{2} : 2\sqrt{2} = 4$

K3 **25** **a)** $A_{\text{Grundstück}} = \frac{333{,}3 + 243{,}3}{2} \cdot 120\,m^2 = 34\,596\,m^2$
b) $a_{\text{Quadrat}} = \sqrt{34596}\,m = 186\,m$; $u_{\text{Quadrat}} = 4 \cdot 186\,m = 744\,m$
$u_{\text{Trapez}} = 333{,}3\,m + 150\,m + 243{,}3\,m + 120\,m = 846{,}6\,m$; $u_{\text{Quadrat}} < u_{\text{Trapez}}$
Das flächengleiche Quadrat hat eine Seitenlänge von 186 m und einen Umfang von 744 m.
Der Umfang des Trapezes mit 846,6 m ist länger als der Umfang des Quadrats.
c) Jassin hat Recht. Von allen flächengleichen Vierecken hat das Quadrat den kleinsten Umfang.

KX **26** $2\sqrt{3} = \sqrt{12} < \sqrt{13}$; $2\sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{3} > \sqrt{3} + 1$; $1 < \sqrt{3} < 2$:
$\sqrt{13} > 2\sqrt{3} > \sqrt{3} + 1 > 2\sqrt{3} - 1 > \sqrt{3} > \sqrt{3} - 1$

KX **27** $2z^2 = 5x$; $z = \sqrt{2{,}5x}$; $z^* = kz$; $k = \frac{z^*}{z} = \frac{\sqrt{r \cdot 2{,}5x}}{\sqrt{2{,}5x}} = \sqrt{r}$

	z^*	$k = \frac{z^*}{z}$
a)	$\sqrt{5x}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2{,}5}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$
b)	$\frac{5}{4} \cdot \sqrt{10x}$	$\frac{\sqrt{15{,}625}}{\sqrt{2{,}5}} = 2{,}5$
c)	$\sqrt{r \cdot 2{,}5x}$	$\frac{\sqrt{r \cdot 2{,}5x}}{\sqrt{2{,}5x}} = \sqrt{r}$

KX **28** Volumen des Laderaums des Transporters: $V = 3\,m \cdot 13\,m \cdot 4\,m = 156\,m^3$
Wenn x die gesuchte Kantenlänge des würfelförmigen Containers in Metern bezeichnet, gilt: $V = x^3$, also $x^3 = 156$. Daraus folgt $x = \sqrt[3]{156} \approx 5{,}38\,m$

K6 **Intervallhalbierung**

a) Dadurch, dass immer Werte halbiert werden, die schon einmal halbiert wurden, kommt immer eine weitere Nachkommastelle hinzu.

b) Berechnung von $\sqrt{2}$:

Schritt	unterer Wert	oberer Wert	Mittelwert	Mittelwert²
1	1	2	1,5	$1{,}5^2 = 2{,}25 > 2$, also oberen Wert ersetzen
2	1	1,5	1,25	$1{,}25^2 = 1{,}5625 < 2$, also unteren Wert ersetzen
3	1,25	1,5	1,375	$1{,}375^2 \approx 1{,}89 < 2$, also unteren Wert ersetzen
4	1,375	1,5	1,4375	$1{,}4375^2 \approx 2{,}07 > 2$, also oberen Wert ersetzen
5	1,375	1,4375	1,40625	$1{,}40625^2 \approx 1{,}98 < 2$, also unteren Wert ersetzen
6	1,40625	1,4375	1,421875	$1{,}421875^2 \approx 2{,}02 > 2$, also oberen Wert ersetzen
7	1,40625	1,421875	…	…

Berechnung von $\sqrt{8}$:

Schritt	unterer Wert	oberer Wert	Mittelwert	Mittelwert²
1	2	3	2,5	$2{,}5^2 = 6{,}25 < 8$, also unteren Wert ersetzen
2	2,5	3	2,75	$2{,}75^2 = 7{,}5625 < 8$, also unteren Wert ersetzen
3	2,75	3	2,875	$2{,}875^2 \approx 8{,}27 > 8$, also oberen Wert ersetzen
4	2,75	2,875	2,8125	$2{,}8125^2 \approx 7{,}91 < 8$, also unteren Wert ersetzen
5	2,8125	2,875	2,84375	$2{,}84375^2 \approx 8{,}09 > 8$, also oberen Wert ersetzen
6	2,8125	2,84375	2,828125	$2{,}828125^2 \approx 7{,}998 < 8$, also unteren Wert ersetzen
7	2,828125	2,84375	…	…

Berechnung von $\sqrt{500}$:

Schritt	unterer Wert	oberer Wert	Mittelwert	Mittelwert²
1	22	23	22,5	$22{,}5^2 = 506{,}25 > 500$, also oberen Wert ersetzen
2	22	22,5	22,25	$22{,}25^2 \approx 495{,}06 < 500$, also unteren Wert ersetzen
3	22,25	22,5	22,375	$22{,}375^2 \approx 500{,}64 > 500$, also oberen Wert ersetzen
4	22,25	22,375	22,3125	$22{,}3125^2 \approx 497{,}85 < 500$, also unteren Wert ersetzen
5	22,3125	22,375	22,34375	$22{,}34375^2 \approx 499{,}24 < 500$, also unteren Wert ersetzen
6	22,34375	22,375	22,359375	$22{,}359375^2 \approx 499{,}9 < 500$, also unteren Wert ersetzen
7	22,359375	22,375	…	…

c) Bei der „Intervallhalbierung“ geht es darum, das Intervall um die gesuchte Zahl immer enger zu gestalten, und sich so von beiden Seiten immer näher an die gesuchte Zahl hinzuarbeiten.

d) Entscheidend ist, dass man beim Erstellen des Tabellenblattes eine Fallunterscheidung einbaut, etwa wie unten dargestellt.

	A	B	C	D	E
1	Intervallhalbierungsverfahren				
2					
3	Berechnung von Wurzel		2		
4					
5	Schritt	unterer Wert	oberer Wert	Mittelwert	Mittelwert²
6	0	0	2	1	1
7	1	1	2	1,5	2,25
8	2	1	1,5	1,25	1,5625
9	3	1,25	1,5	1,375	1,890625
10	4	1,375	1,5	1,4375	2,06640625
11	5	1,375	1,4375	1,40625	1,97753906
12	6	1,40625	1,4375	1,421875	2,02172852
13	7	1,40625	1,421875	1,4140625	1,99957275
14	8	1,4140625	1,421875	1,41796875	2,01063538
15	9	1,4140625	1,41796875	1,416015625	2,00510025
16	10	1,4140625	1,416015625	1,415039063	2,00233555
17	11	1,4140625	1,415039063	1,414550781	2,00095391

	A	B	C	D	E
1	**Intervallhalbierungsverfahren**				
2					
3	**Berechnung von Wurzel**		2		
4					
5	**Schritt**	**unterer Wert**	**oberer Wert**	**Mittelwert**	**Mittelwert²**
6	0	0	=C3	=MITTELWERT(B6:C6)	=D6^2
7	1	=WENN(E6<C3;D6;B6)	=WENN(E6>C3;D6;C6)	=MITTELWERT(B7:C7)	=D7^2
8	2	=WENN(E7<C3;D7;B7)	=WENN(E7>C3;D7;C7)	=MITTELWERT(B8:C8)	=D8^2

Erstellt man das Tabellenblatt wie angegeben, so genügt es, wenn man in Zelle C3 den neuen Quadratwert eingibt. Die Berechnung aktualisiert sich dann selbstständig. Für die Erstellung des eigentlichen Algorithmus wird man die Zeilen 6 und 7 komplett eingeben, anschließend die Matrix B7:E7 markieren und mit der Maus nach unten ziehen.

K 5

Alles Näherung

a) Auf dem Tabellenblatt wird die Berechnung von $\sqrt{10}$ dargestellt. Der Startwert ist diejenige natürliche Zahl, deren Quadrat gerade noch kleiner als der Wurzelwert (Radikand) ist, im vorliegenden Falle also 3. Danach addiert man zur 3 immer die Schrittweite und überprüft in der letzten Spalte der Tabelle, wie groß das Quadrat der Zahl ist. So verfährt man weiter und kann dabei die Schrittweite immer verkleinern, wodurch man sich letztlich der Wurzel der gesuchten Zahl nähert.

b) Ermittlung von $\sqrt{3}$ auf vier Dezimalen:

	A	B	C	D	E	F	G
2							
3	**Berechnung von Wurzel**		3				
4		**Startwert**	**1**				
5		**Schrittweite**	**0,1**		**Schrittweite**	**0,001**	
6							
7	**Schritt**	**a**	**a²**		**Schritt**	**a**	**a²**
8	1	1,0	1		1	1,730	2,9929
9	2	1,1	1,21		2	1,731	2,996361
10	3	1,2	1,44		3	1,732	2,999824
11	4	1,3	1,69		4	1,733	3,003289
12	5	1,4	1,96				
13	6	1,5	2,25				
14	7	1,6	2,56				
15	8	1,7	2,89				
16	9	1,8	3,24				
17							
18							
19	**Schrittweite**	**0,01**			**Schrittweite**	**0,0001**	
20							
21	**Schritt**	**a**	**a²**		**Schritt**	**a**	**a²**
22	1	1,70	2,89		1	1,7320	2,999824
23	2	1,71	2,9241		2	1,7321	3,00017041
24	3	1,72	2,9584				
25	4	1,73	2,9929				
26	5	1,74	3,0276				

$\sqrt{3} = 1{,}7320...$

Ermittlung von $\sqrt{12}$ auf vier Dezimalen:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Systematisches Probieren						
2							
3	Berechnung von Wurzel		12				
4		Startwert	3				
5		Schrittweite	0,1		Schrittweite	0,001	
6							
7	Schritt	a	a²		Schritt	a	a²
8	1	3,0	9		1	3,460	11,9716
9	2	3,1	9,61		2	3,461	11,978521
10	3	3,2	10,24		3	3,462	11,985444
11	4	3,3	10,89		4	3,463	11,992369
12	5	3,4	11,56		5	3,464	11,999296
13	6	3,5	12,25		6	3,465	12,006225
14							
15							
16							
17							
18							
19	Schrittweite	0,01			Schrittweite	0,0001	
20							
21	Schritt	a	a²		Schritt	a	a²
22	1	3,40	11,56		1	3,4640	11,999296
23	2	3,41	11,6281		2	3,4641	11,9999888
24	3	3,42	11,6964		3	3,4642	12,0006816
25	4	3,43	11,7649				
26	5	3,44	11,8336				
27	6	3,45	11,9025				
28	7	3,46	11,9716				
29	8	3,47	12,0409				

$\sqrt{12} = 3{,}4641...$

Ermittlung von $\sqrt{200}$ auf vier Dezimalen:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Systematisches Probieren						
2							
3	Berechnung von Wurzel		200				
4		Startwert	14				
5		Schrittweite	0,1		Schrittweite	0,001	
6							
7	Schritt	a	a²		Schritt	a	a²
8	1	14,0	196		1	14,140	199,9396
9	2	14,1	198,81		2	14,141	199,967881
10	3	14,2	201,64		3	14,142	199,996164
11					4	14,143	200,024449
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19	Schrittweite	0,01			Schrittweite	0,0001	
20							
21	Schritt	a	a²		Schritt	a	a²
22	1	14,10	198,81		1	14,1420	199,996164
23	2	14,11	199,0921		2	14,1421	199,998992
24	3	14,12	199,3744		3	14,1422	200,001821
25	4	14,13	199,6569				
26	5	14,14	199,9396				
27	6	14,15	200,2225				

$\sqrt{200} = 14{,}1421...$

Hinweis: Die hier angegebenen Werte sind nicht gerundet, sondern brechen nach vier Dezimalen ab. Wollte man die Wurzelwerte auf vier Dezimalen runden, müsste man noch eine fünfte Dezimale berechnen, um dann anschließend runden zu können.

c) Wenn man einen Startwert wählt, dessen Quadrat größer ist als der Radikand, dann müsste man die Schrittweite vom Startwert nicht (wie hier) addieren, sondern subtrahieren. Sobald das Quadrat der Zahl zum ersten Mal kleiner wäre als der Radikand, müsste man die Anzahl der Dezimalen erhöhen.

K4 **Das Heronverfahren nach klassischer Art**

a) 1 Bestimmung von $\sqrt{2}$:

$a = 2\,\text{cm}$ $\quad$ $b = 1\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{2\,\text{cm} + 1\,\text{cm}}{2} = 1{,}5\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{2\,\text{cm}^2}{1{,}5\,\text{cm}} \approx 1{,}333\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{1{,}5\,\text{cm} + 1{,}333\,\text{cm}}{2} \approx 1{,}417\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{2\,\text{cm}^2}{1{,}417\,\text{cm}} \approx 1{,}411\,\text{cm}$

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$

2 Bestimmung von $\sqrt{6}$:

$a = 3\,\text{cm}$ $\quad$ $b = 2\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{3\,\text{cm} + 2\,\text{cm}}{2} = 2{,}5\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{6\,\text{cm}^2}{2{,}5\,\text{cm}} = 2{,}4\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{2{,}5\,\text{cm} + 2{,}4\,\text{cm}}{2} = 2{,}45\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{6\,\text{cm}^2}{2{,}45\,\text{cm}} \approx 2{,}449\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{2{,}45\,\text{cm} + 2{,}449\,\text{cm}}{2} \approx 2{,}450\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{6\,\text{cm}^2}{2{,}450\,\text{cm}} \approx 2{,}449\,\text{cm}$

$\sqrt{6} \approx 2{,}45$

3 Bestimmung von $\sqrt{12}$:

$a = 4\,\text{cm}$ $\quad$ $b = 3\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{4\,\text{cm} + 3\,\text{cm}}{2} = 3{,}5\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{12\,\text{cm}^2}{3{,}5\,\text{cm}} \approx 3{,}429\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{3{,}5\,\text{cm} + 3{,}429\,\text{cm}}{2} \approx 3{,}465\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{12\,\text{cm}^2}{3{,}465\,\text{cm}} \approx 3{,}463\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{3{,}465\,\text{cm} + 3{,}463\,\text{cm}}{2} = 3{,}464\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{12\,\text{cm}^2}{3{,}464\,\text{cm}} \approx 3{,}464\,\text{cm}$

$\sqrt{12} \approx 3{,}46$

4 Bestimmung von $\sqrt{20}$:

$a = 5\,\text{cm}$ $\quad$ $b = 4\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{5\,\text{cm} + 4\,\text{cm}}{2} = 4{,}5\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{20\,\text{cm}^2}{4{,}5\,\text{cm}} \approx 4{,}444\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{4{,}5\,\text{cm} + 4{,}444\,\text{cm}}{2} = 4{,}472\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{20\,\text{cm}^2}{4{,}472\,\text{cm}} \approx 4{,}472\,\text{cm}$

$\sqrt{20} \approx 4{,}47$

b) Die Wahl der Startwerte spielt eine entscheidende Rolle. Je weiter die Startwerte voneinander entfernt liegen, desto mehr Schritte im Heronverfahren werden benötigt.

Bestimmung von $\sqrt{50}$ mit „guten“ Startwerten:

$a = 8\,\text{cm}$ $\quad$ $b = 6{,}25\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{8\,\text{cm} + 6{,}25\,\text{cm}}{2} = 7{,}125\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{50\,\text{cm}^2}{7{,}125\,\text{cm}} \approx 7{,}018\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{7{,}125\,\text{cm} + 7{,}018\,\text{cm}}{2} \approx 7{,}072\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{50\,\text{cm}^2}{7{,}072\,\text{cm}} \approx 7{,}070\,\text{cm}$

$\sqrt{50} \approx 7{,}07$

Bestimmung von $\sqrt{50}$ mit „schlechten“ Startwerten:

$a = 50\,\text{cm}$ $\quad$ $b = 1\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{50\,\text{cm} + 1\,\text{cm}}{2} = 25{,}5\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{50\,\text{cm}^2}{25{,}5\,\text{cm}} \approx 1{,}961\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{25{,}5\,\text{cm} + 1{,}961\,\text{cm}}{2} \approx 13{,}731\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{50\,\text{cm}^2}{13{,}731\,\text{cm}} \approx 3{,}641\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{13{,}731\,\text{cm} + 3{,}641\,\text{cm}}{2} = 8{,}686\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{50\,\text{cm}^2}{8{,}686\,\text{cm}} \approx 5{,}756\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{8{,}686\,\text{cm} + 5{,}756\,\text{cm}}{2} = 7{,}221\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{50\,\text{cm}^2}{7{,}221\,\text{cm}} \approx 6{,}924\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{7{,}221\,\text{cm} + 6{,}924\,\text{cm}}{2} = 7{,}073\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{50\,\text{cm}^2}{7{,}073\,\text{cm}} \approx 7{,}069\,\text{cm}$

$a_{neu} = \frac{7{,}073\,\text{cm} + 7{,}069\,\text{cm}}{2} = 7{,}071\,\text{cm}$ $\quad$ $b_{neu} = \frac{50\,\text{cm}^2}{7{,}071\,\text{cm}} \approx 7{,}071\,\text{cm}$

$\sqrt{50} \approx 7{,}07$

K5 **Das Heronverfahren mit dem Computer**

a) Das Tabellenblatt zeigt das Verfahren für die Berechnung von $\sqrt{10}$. Die Tabelle hat vier Spalten: Anzahl der Schritte, Länge des Rechtecks, Breite des Recktecks, Flächeninhalt des Rechtecks.

Die Zelle C3 enthält die Zahl, deren Wurzel berechnet werden soll. In den Zellen B6 und C6 stehen die Startwerte. Ab der Zelle B7 steht in Spalte B jeweils das arithmetische Mittel aus der Länge und Breite des letzten Rechtecks (eine Zeile darüber). Ab der Zelle C7 steht in Spalte C jeweils der Quotient aus der Ausgangszahl (Zelle C3) und dem Wert in Spalte B. Die Spalte D enthält das Produkt der Werte aus den Spalten B und C.

b)

	A	B	C	D
1	**Heronverfahren**			
2				
3	**Berechnung von Wurzel**		40	
4				
5	**Schritt**	**Länge**	**Breite**	**Kontrolle**
6	1	8	5	40
7	2	6,5	6,15384615	40
8	3	6,32692308	6,32218845	40
9	4	6,32455576	6,32455488	40
10	5	6,32455532	6,32455532	40
11	6	6,32455532	6,32455532	40
12	7	6,32455532	6,32455532	40

$\sqrt{40} = 6{,}3245...$

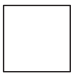
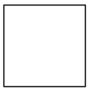
	A	B	C	D
1	**Heronverfahren**			
2				
3	**Berechnung von Wurzel**		99	
4				
5	**Schritt**	**Länge**	**Breite**	**Kontrolle**
6	1	10	9,9	99
7	2	9,95	9,94974874	99
8	3	9,94987437	9,94987437	99
9	4	9,94987437	9,94987437	99
10	5	9,94987437	9,94987437	99
11	6	9,94987437	9,94987437	99
12	7	9,94987437	9,94987437	99

$\sqrt{99} = 9{,}9498...$

KX **1** **a)** 4; 8 **b)** 36; 216 **c)** 100; 1000 **d)** 144; 1728 **e)** 324; 5832
f) 625; 15 625 **g)** 1600; 64 000 **h)** 3025; 166 375 **i)** 40 000; 8 000 000 **j)** 62 500; 15 625 000

KX **2** Potenz in Klammern
a) 1 1; 100; 10 000 (1; 1000; 1 000 000) 2 4; 400; 40 000 (8; 8000; 8 000 000)
3 144; 1,44; 0,0144 (1728; 1,728; 0,001728) 4 25; 0,25; 0,0025 (125; 0,125; 0,000125)
b) Für jede Stelle, die das Komma einer Zahl nach rechts (links) verschoben wird, wird das Komma der quadrierten Zahl um zwei Stellen nach rechts (links) verschoben bzw. beim Potenzieren mit 3 um je 3 Stellen nach rechts (links).

KX **3** **a)** 0,2; 0,4; $\frac{1}{2}$; 0,5; $\frac{6}{7}$; 0,03 **b)** 3; 5; 8; 10; 12

KX **4** **a)**  Seite a = $\sqrt{6}$ cm ≈ 2,45 cm **b)**  Seite a = $\sqrt{20}$ cm ≈ 4,47 cm
c)  Seite a = $\sqrt{30}$ cm ≈ 5,48 cm

Bei den Rechtecken gibt es verschiedene Möglichkeiten, z. B.:
a)  $6\,cm^2 = 3\,cm \cdot 2\,cm$ **b)**  $20\,cm^2 = 5\,cm \cdot 4\,cm$
c)  $30\,cm^2 = 6\,cm \cdot 5\,cm$

KX **5** **a)** 1 2; 6,3245…; 20; 63,245…; 200; 632,45; 2000; 6324,5…
2 3; 9,4868…; 30; 94,868…; 300; 948,68…; 3000; 9486,8…
3 1; 2,15443; 4,64158…; 10; 21,5443…; 46,4158…; 100; 215,433…
4 2; 4,30886…; 9,28317…; 20; 43,0886; 92,8317…; 200; 430,886…
b) Multipliziert man die Zahl unter einer Quadratwurzel schrittweise mit 10, so verzehnfacht sich der Wert der Wurzel nach jeweils 2 Schritten, denn $\sqrt{100} = 10$.
Multipliziert man die Zahl unter einer Kubikwurzel schrittweise mit 10, so verzehnfacht sich der Wert der Wurzel nach jeweils 3 Schritten, denn $\sqrt[3]{1000} = 10$.

KX **6** **a)** 2 **b)** 6 **c)** 9 **d)** 12 **e)** 15 **f)** 20 **g)** $\frac{2}{3}$ **h)** $\frac{6}{5}$ **i)** $\frac{2}{3}$ **j)** $\frac{8}{7}$

KX **7** **a)** $5 < \sqrt{28} < 6$, da $25 < 28 < 36$ **b)** $7 < \sqrt{55} < 8$, da $49 < 55 < 64$
c) $1 < \sqrt{1{,}10} < 2$, da $1 < 1{,}1 < 4$ **d)** $0 < \sqrt{0{,}05} < 1{,}0 < 0{,}05 < 1$

KX **8** **a)** $\sqrt{3 \cdot 8} = \sqrt{24}$; $\sqrt{3} + \sqrt{8}$; $\sqrt{\frac{3}{8}}$ **b)** $\sqrt{\frac{27}{18}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{27} - \sqrt{18}$; $\sqrt{27 \cdot 18} = \sqrt{486}$
c) $\sqrt{99} - \sqrt{11}$; $\sqrt{99} + \sqrt{11}$; $\sqrt{\frac{99}{11}} = \sqrt{9} = 3$ **d)** $\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{10}$; $\sqrt{2{,}5} + \sqrt{4}$; $\sqrt{2{,}5} - \sqrt{4}$

KX **9** **a)** falsch, da $\sqrt{1600} = 40$ **b)** richtig
c) falsch, da $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$ **d)** richtig
e) falsch, da $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$ **f)** falsch, da $\sqrt{0{,}5^2} = 0{,}5$

KX **10** **a)** $2 \cdot \sqrt{8} + 3\sqrt{8} = 5\sqrt{8}$
b) $9 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{3} = 10\sqrt{3} - \sqrt{3 \cdot 4} = 10\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$
c) $6 \cdot \sqrt{15} - 2 \cdot \sqrt{60} = 6 \cdot \sqrt{15} - 4 \cdot \sqrt{15} = 2 \cdot \sqrt{15}$
d) $7 \cdot \sqrt{63} - 5 \cdot \sqrt{28} = 21\sqrt{7} - 10\sqrt{7} = 11\sqrt{7}$

KX **11** **a)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{50}$ **b)** $\sqrt{49} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{196}$ **c)** $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{100}$ oder $\sqrt{30} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{150}$
d) $\sqrt{432} : \sqrt{12} = 6$ **e)** $\frac{\sqrt{1083}}{\sqrt{3}} = 19$ **f)** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{57{,}8} = 17$

KX **12** **a)** $\sqrt{144 \cdot a^3 b^2} = 12ab\sqrt{a}$ **b)** $\sqrt{\frac{8a^2}{b^2}} = \frac{2a\sqrt{2}}{b}$ **c)** $\sqrt{\frac{xy^2}{49}} = \frac{y\sqrt{x}}{7}$ **d)** $\sqrt{\frac{1}{0{,}81 \cdot x^2y^4}} = \frac{1}{0{,}9xy^2}$

KX **13** **a)** $L = \{-18; 18\}$ **b)** $L = \{\,\}$ **c)** $L = \{2; 5\}$

KX **14** **a)** $4\sqrt{3}$ **b)** $4a\sqrt{6a}$ **c)** $8y\sqrt{5x}$ **d)** $10a^2bc\sqrt{10b}$

Aufgaben für Lernpartner

K1/6 **A** Die Aussage ist für nicht negative Zahlen richtig.

K1/6 **B** Die Aussage ist richtig.

K1/6 **C** Die Aussage ist falsch. Richtig ist: $\sqrt[3]{5^3} = 5$.

K1/6 **D** Die Aussage ist falsch. Die Seitenlänge eines Quadrats kann man mithilfe der Quadratwurzel aus dem Flächeninhalt eines Quadrats bestimmen.

K1/6 **E** Die Aussage ist richtig.

K1/6 **F** Die Aussage ist richtig.

K1/6 **G** Die Aussage ist falsch. Ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $5\,m^2$ hat die Seitenlänge $\sqrt{5}\,m \approx 2{,}24\,m$.

K1/6 **H** Die Aussage ist richtig. Der Flächeninhalt beträgt jeweils $12\,cm^2$.

K1/6 **I** Die Aussage ist falsch. $\sqrt{100} + \sqrt{49} = 10 + 7 = 17$ $\sqrt{100 + 49} + \sqrt{149} \approx 12{,}21$

K1/6 **J** Die Aussage ist richtig.

K1/6 **K** Die Aussage ist richtig. $\sqrt{100} : \sqrt{36} = \sqrt{\frac{100}{36}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

K1/6 **L** Die Aussage ist richtig.

K1/6 **M** Die Aussage ist falsch. Irrationale Zahlen lassen sich nicht als Bruch ganzer Zahlen darstellen.

K1/6 **N** Die Aussage ist falsch. Bei der Umwandlung eines Bruchs in eine Dezimalzahl kann eine nicht endliche periodische Dezimalzahl entstehen. Beispiel: $\frac{2}{3} = 0{,}0666\,... = 0{,}\overline{6}$

K1/6 **O** Die Aussage ist richtig.

K1/6 **P** Die Aussage ist falsch. Beispiele: $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{4}{7}$ und $\sqrt{144} = 12$ sind rationale Zahlen.

K1/6 **Q** Die Aussage ist richtig (mit Ausnahme der Zahl $\sqrt{0} = 0$).

K1/6 **R** Die Aussage ist falsch. Reelle Zahlen können auch irrationale Zahlen sein. Beispiel: $\sqrt{2}$ ist eine irrationale reelle Zahl.

K1/6 **S** Die Aussage ist falsch. Beispiel: $-\sqrt{5}$ ist eine negative irrationale Zahl.

K1/6 **T** Die Aussage ist richtig.

K1/6 **U** Die Aussage ist richtig, da (mindestens) die Wurzel aus dem Faktor 4 gezogen werden kann.