5 Exponentialfunktionen und deren Umkehrung

Einstieg

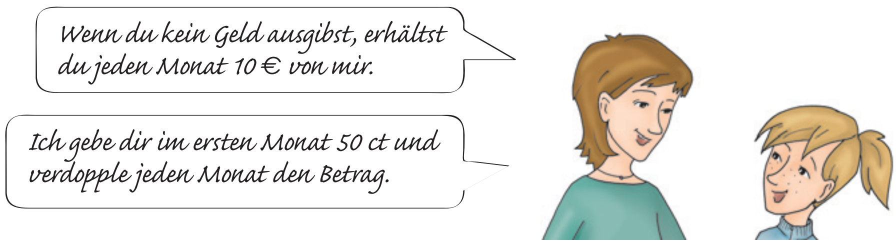
- In der Medizin werden Bakterienkulturen in Schalen gezüchtet, um beispielsweise neue Medikamente zu entwickeln oder zu erproben. Dabei betrachtet man das Wachstum der Bakterien unter optimalen Vermehrungsbedingungen.
  Ein bestimmter Bakterienstamm vergrößert die von ihm bedeckte Fläche jeden Tag um 15 %. Zu Beginn einer Messung nehmen die Bakterien auf einer Petrischale eine Fläche von 0,2 cm^2 ein. Erstelle eine Wertetabelle für die ersten sieben Tage des Wachstums.
- Stelle den Zusammenhang zwischen Zeit und Flächeninhalt grafisch dar.
- Die Schale hat einen Durchmesser von 90 mm. Schätze den Zeitpunkt, an dem die Bakterienkultur die ganze Schale bedeckt.

Ausblick

Am Ende dieses Kapitels hast du gelernt, …

- Exponentialfunktionen und ihre Eigenschaften zu beschreiben.
- Wachstums- und Abnahmeprozesse durch Exponentialfunktionen zu untersuchen.
- den Logarithmus und seine Eigenschaften zu beschreiben.
- Exponentialgleichungen zu lösen.

Isabells Mutter schlägt Isabell zwei Möglichkeiten vor, Geld zu sparen.



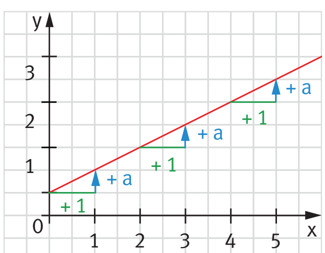
- Was rätst du Isabell? Begründe.
- Berechne jeweils, wie viel Geld Isabell nach dem 3., 6., 9. und 12. Monat insgesamt von ihrer Mutter erhalten würde.
- Stelle beide Sparmöglichkeiten in einem geeigneten Diagramm dar.

Merkwissen

Unter Wachstum bzw. Zerfall versteht man die Zu- bzw. Abnahme einer Größe.
Zwei **wichtige Wachstumsarten** sind:

1 lineares Wachstum

In gleichen Zeiträumen nehmen die Werte um den gleichen Summanden zu.



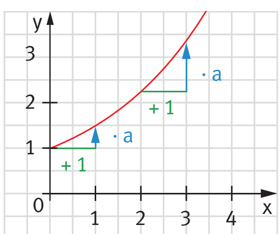
+ 1 + 1 + 1

x	0	1	2	3
y	0,5	1	1,5	...

+ 0,5 + 0,5 + 0,5

2 exponentielles Wachstum

In gleichen Zeiträumen werden die Werte mit dem gleichen Faktor vervielfacht.



+ 1 + 1 + 1

x	0	1	2	3
y	1	1,5	2,25	...

· 1,5 · 1,5 · 1,5

Auch **Zerfalls- und Abnahmeprozesse** lassen sich mit linearem bzw. exponentiellem Wachstum beschreiben.

Der Summand a ist kleiner null.	Der positive Faktor a ist kleiner 1.

Beispiele

1 Festmeter (1 fm) Holz = 1 m³ feste Holzmasse ohne Zwischenräume

I Gib an, ob es sich um lineares oder exponentielles Wachstum handelt. Löse dann.

a) Eine Kiefer ist beim Pflanzen 1,20 m hoch und wächst pro Jahr um ca. 44 cm. Bestimme die Höhe der Kiefer nach 20 Jahren, wenn sich das Wachstum so fortsetzt.

b) Der Holzbestand eines kleinen Waldes beträgt etwa 10 000 Festmeter und nimmt jährlich um 4 % zu. Berechne den Holzbestand nach 20 Jahren.

Lösung:

a) Lineares Wachstum:
$h(t) = 1{,}2\text{ m} + 0{,}44\text{ m} \cdot t$
$h(20) = 1{,}2\text{ m} + 0{,}44\text{ m} \cdot 20 = 10\text{ m}$

b) Exponentielles Wachstum:
$V(t) = 10\,000\text{ fm} \cdot 1{,}04^t$
$V(20) = 10\,000\text{ fm} \cdot 1{,}04^{20}$
$\approx 10\,000\text{ fm} \cdot 2{,}2 = 22\,000\text{ fm}$

t ist die Anzahl der Jahre

Verständnis

- Tim behauptet: „Das lineare Wachstum verläuft langsamer als das exponentielle.“ Stimmt das? Begründe.

Aufgaben

1 Prüfe, ob es sich um ein bekanntes Wachstum bzw. Zerfall handelt, oder nicht.

a)

x	0	1	2	3
y	2	7	12	17

b)

x	0	1	2	3
y	3	9	27	81

c)

x	0	1	2	3
y	1	2	5	10

d)

x	0	1	2	3
y	8	12	18	27

e)

x	0	1	2	3
y	11	9	7	5

f)

x	0	1	2	3
y	32	16	8	4

2 Beschreibe die Form des Wachstums. Erstelle eine geeignete Wertetabelle.

a) Nach den Tarifverhandlungen wird ein Mindestlohn von 10 Euro festgelegt, der jährlich um 10 % steigt.

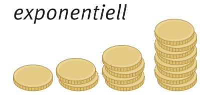
b) Ein Sportcoupé kostet neu 54 000 €. Es verliert anfangs jährlich 25 % an Wert.

c) Eine 10 cm hohe Kerze wird angezündet. Jede Minute brennt sie 4 mm herunter.

d) Eine Hefekultur ($0{,}5\text{ cm}^3$) vervierfacht stündlich ihre Masse.

Vergleiche:
linear

exponentiell



3 a) Übertrage die Wertetabelle in dein Heft und vervollständige.

	x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5
exponentiell	$y = 2^x$								
linear	$y = 2x$								
quadratisch	$y = x^2$								
kubisch	$y = x^3$	1,5	2,25	...					

b) Übertrage die Werte in ein Koordinatensystem. Vergleiche das Wachstum.

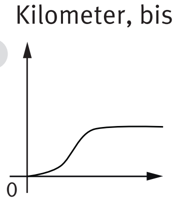
4 Ordne den folgenden Wachstums- und Abnahmevorgängen das richtige Diagramm zu. Begründe deine Antwort.

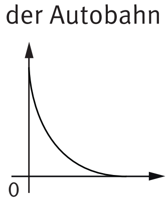
A Bei Leistungssportlern steigt der Puls beim Training gleichmäßig bis zu einem bestimmten Maximum an.

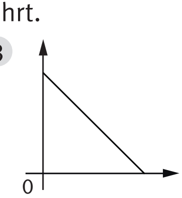
B Ein Auto verliert jährlich ca. 18 % an Wert.

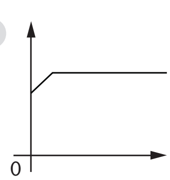
C Ein Bakterium vermehrt sich in einem abgeschlossenen Gefäß.

D Jona fährt mit konstanten 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf der Autobahn und zählt die Anzahl der Kilometer, bis er von der Autobahn abfährt.

1


2


3


4


Im Jahr 2050 doppelt so viele 60-Jährige wie Neugeborene – die deutsche Bevölkerung nimmt um fast 20 Millionen ab.

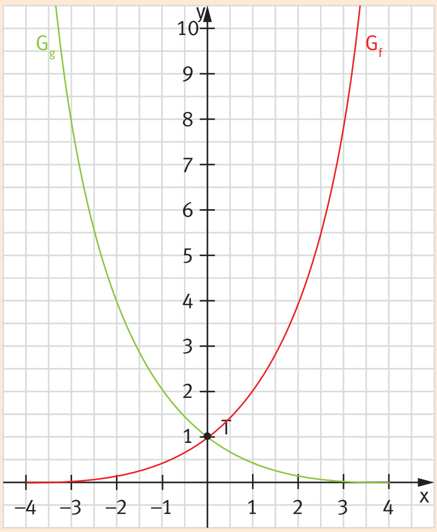
Lucas: *„Im Jahr 2065 gehören wir zu den etwa 60-Jährigen."*
Gregor: *„Die Geburtenrate ist zwar niedriger als die Sterberate, aber die Lebenserwartung steigt. Die Zahlen basieren auf kaum kalkulierbaren Annahmen."*
Sophie: *„Ich habe mich auf der Homepage des Statistischen Bundesamts informiert. Im Jahr 2005 betrug die Bevölkerungszahl in Deutschland 82,4 Millionen, die Sterberate 1,06 % und die Geburtenrate 0,83 %."*

- Ermittle ausgehend von den Daten des Statistischen Bundesamts für das Jahr 2005 die Bevölkerungszahl für die Jahre 2006, 2008, 2010, … 2019.
- Vergleiche soweit möglich die errechneten Anzahlen mit den wirklichen.

Merkwissen

Eine Funktion der Form $f(x) = b^x$ mit $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}$ heißt Exponentialfunktion mit dem Wachstumsfaktor b als Basis.

- Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
- Wertebereich: $W = \mathbb{R}^+$
- Der Graph der Funktion schneidet die y-Achse im Punkt T (0 | 1).
- Für $b > 1$ werden die Funktionswerte immer größer („Wachstum"), für $0 < b < 1$ werden die Funktionswerte immer kleiner („Zerfall").
- Die Exponentialfunktion hat keine Nullstelle, kommt aber der x-Achse beliebig nahe (**Asymptote**).
- Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = b^x$ und $g(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ sind symmetrisch zueinander bzgl. der y-Achse.



Ein Graph nähert sich einer Asymptote an, ohne sie zu berühren. Graph und Asymptote kommen sich „unendlich nahe".

Beispiele

I Die Intensität des Lichts nimmt mit steigender Wassertiefe ab. Pro Meter wird das Licht um 40 % schwächer. Die Lichtintensität an einer Wasseroberfläche soll 100 % betragen.

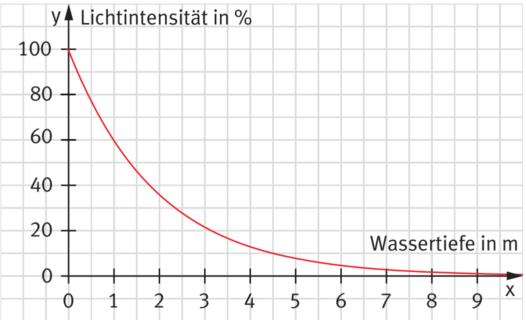
a) Gib eine Funktionsgleichung an, die die Lichtintensität in Abhängigkeit von der Wassertiefe beschreibt.

b) Zeichne den Graphen der Funktionsgleichung aus a) in ein geeignetes Koordinatensystem.

Lösung:

a) Nach 1 m Wassertiefe beträgt die Lichtintensität noch 60 % = 0,6. Nach 2 m Wassertiefe sinkt die Lichtintensität auf $0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36 = 36\ \%$. Somit ergibt sich die Funktionsgleichung: $f(x) = 0{,}6^x$.

b)



Verständnis

- Beschreibe den Graphen von $f(x) = b^x$ für $b = 1$ und begründe, dass es sich nicht um eine Exponentialfunktion handelt.
- Lina behauptet, dass die Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$ schneller ansteigt als die Potenzfunktion $g(x) = x^2$. Stimmt das? Begründe.

Aufgaben

1 Lukas hat gehört, dass man ein Blatt Papier nur 7 Mal falten kann – auf die Größe und Dicke des Papiers soll es dabei nicht ankommen.

a) Überprüfe die These durch Ausprobieren.

b) Gib eine Funktionsgleichung an, die die Zuordnung beschreibt: *Anzahl der Faltungen → Anzahl der Papierlagen*.

c) Stelle die Funktionsgleichung aus b) in einem Koordinatensystem dar.

2 Zeichne den Graphen der Exponentialfunktion $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$; $D = \mathbb{R}$, für $-3 \leqq x \leqq 3$ möglichst genau. Lies die fehlenden Werte so genau wie möglich ab. Bestimme die fehlenden Werte anschließend exakt durch Überlegung.

x	−0,25	−0,6	0,75	□	□	−0,5	□	1	−1	2,25	□
f (x)	□	□	□	$3\frac{3}{8}$	$\frac{4}{9}$	□	1	□	□	□	$\frac{2}{3}$

3 Zeichne jeweils den Graphen der Exponentialfunktionen anhand einer Wertetabelle in ein Koordinatensystem. Kontrolliere mit einem geeigneten Programm.

a) $f(x) = 5^x$; $D = \mathbb{R}$ **b)** $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$; $D = \mathbb{R}$ **c)** $f(x) = 0{,}5^x$; $D = \mathbb{R}$

4 Der Graph einer Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ soll durch den Punkt P verlaufen. Bestimme die Funktionsgleichung wie im Beispiel.

$f(x) = b^x$ P (3 | 125)
$125 = b^3$
$b = 125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$ $f(x) = 5^x$

a) P (2 | 4) **b)** P (2 | 0,04)
c) P (3 | 7) **d)** P (4 | 0,0256)

5 Gegeben sind die Funktionen $f_1(x) = 3^x$, $f_2(x) = 3^{-x}$, $f_3(x) = -3^x$ und $f_4(x) = -3^{-x}$.

a) Stelle die Funktionen in einem Koordinatensystem dar.

b) Gib die Eigenschaften der Funktionen an.

c) Beschreibe Zusammenhänge zwischen den Graphen der Funktionen.

6 Der Erfinder des Schachspiels soll angeblich einem Kalifen ein ungewöhnliches Angebot gemacht haben: „Als Lohn für die Entwicklung meines Spieles möchte ich mit Reiskörnern bezahlt werden. Sieh dir dazu das Schachbrett genau an. Auf dem ersten Feld soll 1 Korn liegen, auf dem zweiten 2 Körner und auf dem darauffolgenden immer doppelt so viele wie auf dem Feld zuvor, so lange, bis auf diesem Weg alle Felder gefüllt sind.“ Auf welchem Feld liegen genug Körner, um …

a) zu einer Mahlzeit Reis (eine Portion) zu essen?

b) einen Menschen damit aufzuwiegen?

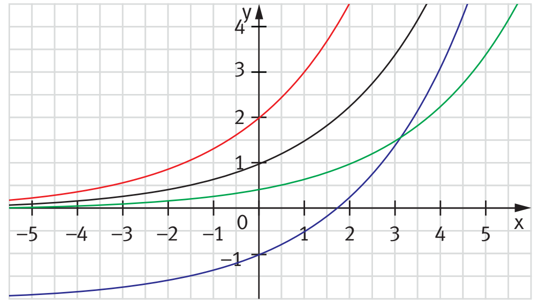
c) einen Lkw zu beladen?

d) eine Reiskette bis zum Mond zu legen?

e) die Erdkugel mit Reiskörnern zu übersäen?

Daten eines Reiskorns:
Abmessungen: etwa 5 mm × 1 mm × 1 mm
Masse m = 0,03 g

Dargestellt sind die Graphen der Funktionen $f_1(x) = 1{,}5^x$, $f_2(x) = 1{,}5^x - 2$, $f_3(x) = 1{,}5^{x-2}$ und $f_4(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$.



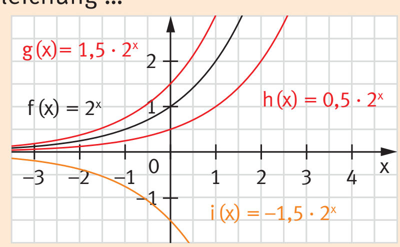
- Ordne den Graphen die zugehörigen Funktionsgleichungen zu.
- Arbeitet in Gruppen und untersucht den Einfluss der Parameter bei $f(x) = a \cdot b^{x-d} + c$ für b = 1,5 auf den Verlauf des Graphen im Vergleich zu $f_1(x) = 1{,}5^x$.
  Gruppe 1: $a \in \{-2; -1{,}5; -1; -0{,}5; 1; 1{,}5; 2; 2{,}5\}$; $c = d = 0$
  Gruppe 2: $c \in \{-2; -1{,}5; -1; -0{,}5; 1; 1{,}5; 2; 2{,}5\}$; $a = 1$; $d = 0$
  Gruppe 3: $d \in \{-2; -1{,}5; -1; -0{,}5; 1; 1{,}5; 2; 2{,}5\}$; $a = 1$; $c = 0$
- Beschreibt den Einfluss des Parameters auf …
  1 die Schnittpunkte mit den Achsen.
  2 den Definitions- und den Wertebereich.
  3 das Verhalten im Unendlichen.

Merkwissen

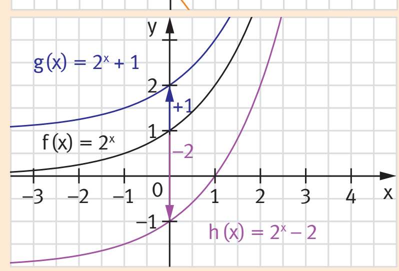
Der Graph von Exponentialfunktionen wird mittels Parameter systematisch beeinflusst.

Der Graph einer **Exponentialfunktion** mit der Gleichung …

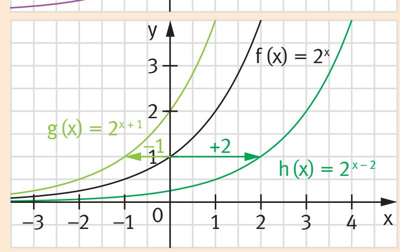
1 $f(x) = a \cdot b^x$ ($b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $a, x \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$) bewirkt eine Veränderung des Wertebereichs von $f(x) = b^x$.
$|a| < 1$ staucht | $|a| > 1$ streckt $\Big\}$ den Graphen von $f(x) = b^x$ in y-Richtung.
Falls $a < 0$ ist, wird der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.



2 $f(x) = b^x + c$ ($b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $c, x \in \mathbb{R}$) bewirkt eine Verschiebung des Graphen von $f_1(x) = b^x$ entlang der y-Achse:
für $c > 0$ in positive y-Richtung.
für $c < 0$ in negative y-Richtung.



3 $f(x) = b^{x-d}$ ($b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $d, x \in \mathbb{R}$) entsteht durch Verschiebung des Graphen von $f_1(x) = b^x$ entlang der x-Achse:
für $d > 0$ in positive x-Richtung.
für $d < 0$ in negative x-Richtung.

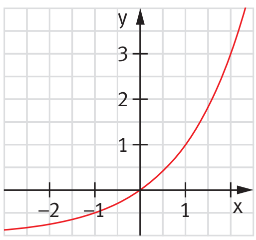


Beispiele

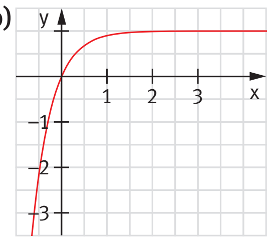
I Bestimme das Verhalten der Funktionen für $x \to \pm\infty$.

a) $f(x) = 2^x - 1$ **b)** $f(x) = -0{,}1^x + 1$ **c)** $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (3^x - 4)$

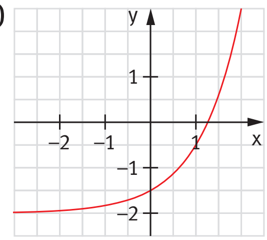
Lösung:
Mithilfe der grafischen Darstellung ergibt sich:

a)


$f(x) \to -1$ für $x \to -\infty$
$f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$
waagrechte Asymptote für $x \to -\infty$: $y = -1$

b)


$f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$
$f(x) \to 1$ für $x \to \infty$
waagrechte Asymptote für $x \to +\infty$: $y = 1$

c)


$f(x) \to -2$ für $x \to -\infty$
$f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$
waagrechte Asymptote für $x \to -\infty$: $y = -2$

Man sagt: „Der Grenzwert von $(2^x - 1)$ für x gegen $-\infty$ ist -1"

Verständnis

- Karim behauptet, dass der Einfluss der Parameter bei Potenz- und Exponentialfunktionen analog ist. Erläutere diese Aussage.
- Salaa behauptet, dass es eine Exponentialfunktion der Form $f(x) = a \cdot b^{x-d} + c$ gibt, deren Graph durch alle vier Quadranten des Koordinatensystems verläuft. Stimmt das? Begründe.

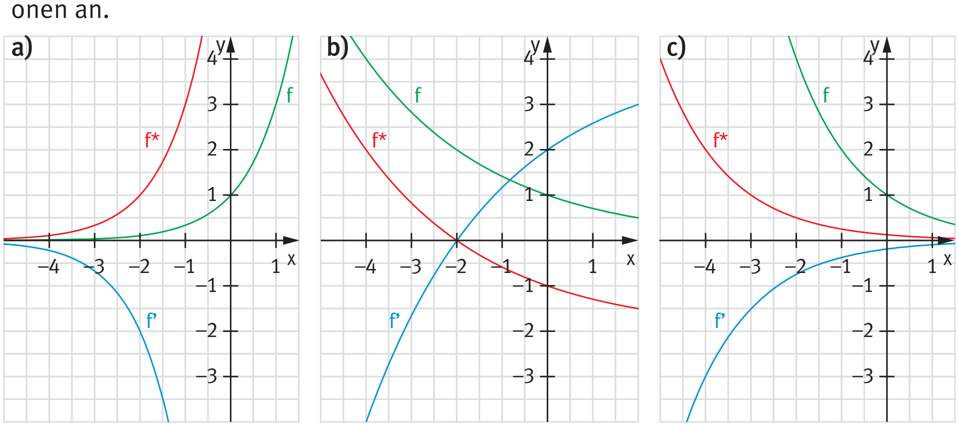
Aufgaben

oHiMi 1

1 Bestimme das Verhalten des Graphen für $x \to \pm\infty$.

a) $f(x) = -6^x - 8$ **b)** $f(x) = -0{,}5^x + 3$ **c)** $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (0{,}5^x - 9)$
d) $f(x) = 2^x - 3^x$ **d)** $f(x) = 3 \cdot 0{,}1^x - 4$ **e)** $f(x) = -\frac{5}{3} \cdot (3^x - 6)$
f) $f(x) = -(4 - 2)^x$ **g)** $f(x) = -0{,}2^x + 5^x$ **h)** $f(x) = \frac{1}{6} \cdot 1{,}5^x - 4 \cdot \frac{1}{2}$

2 Der Graph einer Funktion f der Form $f(x) = b^x$ wird durch eine Parallelverschiebung auf den Graphen der Funktion f* und dieser wiederum durch eine Streckung auf den Graphen der Funktion f' abgebildet. Gib mögliche Gleichungen dieser Funktionen an.



Tipp:
Nutze Schieberegler für a, b und c. Beginne mit Spezialfällen:
- *a = 1, b bel. , c = 0*
- *a bel., b fest, c = 0*
- *a fest, b fest, c bel.*

3 Stelle mit einem Computerprogramm jeweils in einem gemeinsamen Koordinatensystem die Funktionen grafisch dar. Nenne Gemeinsamkeiten und Unterschiede. Finde Eigenschaften der Funktion $f(x) = a \cdot b^x + c$ in Abhängigkeit von den Parametern a, b und c.

a) $f_2(x) = 2^x$; $f_3(x) = 3^x$; $f_{0,5}(x) = 0{,}5^x$; $f_{0,2}(x) = 0{,}2^x$

b) $f_{0,5}(x) = 0{,}5 \cdot 2^x$; $f_3(x) = 3 \cdot 2^x$; $f_{-0,5}(x) = -0{,}5 \cdot 2^x$; $f_{-3}(x) = -3 \cdot 2^x$

c) $f_{-0,5}(x) = 2^x + 0{,}5$; $f_{-3}(x) = 2^x + 3$; $f_{0,5}(x) = 2^x - 0{,}5$; $f_3(x) = 2^x - 3$

4 Zeichne für verschiedene Werte des Parameters b den Graphen der Exponentialfunktion $f_b(x) = b^x$, $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. Finde Gemeinsamkeiten und Unterschiede heraus und stelle deinen Ergebnisse der Klasse vor.

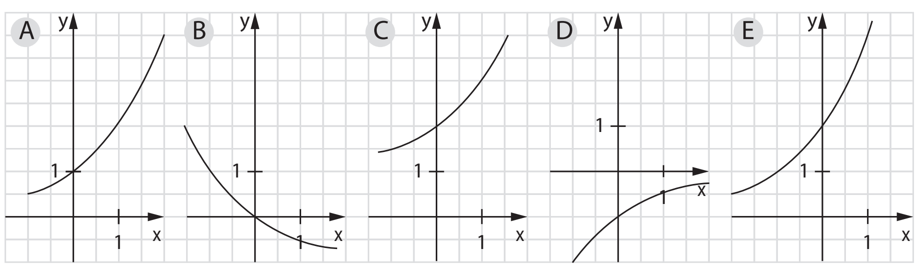
5 Finde jeweils heraus und begründe, wie sich bei der Exponentialfunktion $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $D = \mathbb{R}$, der Funktionswert ändert, wenn man …

a) x um 1 vergrößert. **b)** x um 2 verkleinert. **c)** x um 0,5 verkleinert.
d) x verdoppelt. **e)** x halbiert. **f)** x mit –1 multipliziert.

6 Finde jeweils heraus und begründe, wie sich bei der Exponentialfunktion $f(x) = b^x$; $b > 1$; $D = \mathbb{R}$, der Funktionswert ändert, wenn man …

a) x um 1 vergrößert. **b)** x um 2 verkleinert. **c)** x um 0,5 verkleinert.
d) x verdoppelt. **e)** x halbiert. **f)** x mit –1 multipliziert.

7 Ordne jede der vier Funktionen ($D = \mathbb{R}$) g_1, g_2, g_3 und g_4 mit $g_1(x) = 2^{x+1}$, $g_2(x) = 2^x + 1$, $g_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ und $g_4(x) = -2^{-x}$ einer der Abbildungen zu.



8 Zeichne den Graphen G_{f_1} der Funktion $f_1(x) = 0{,}4^x$; $D = \mathbb{R}$, für $-2 \leqq x \leqq 2{,}5$ in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm).

a) Spiegle G_{f_1} an der x-Achse. Gib die neu entstandene Funktion f_2 an.

b) Spiegle G_{f_1} an der y-Achse. Gib die neu entstandene Funktion f_3 an.

c) Verschiebe G_{f_1} um 3 cm nach rechts. Gib die neu entstandene Funktion f_4 an.

d) Verschiebe G_{f_1} um 2 cm nach links und um 1 cm nach unten. Gib die neu entstandene Funktion f_5 an.

9 Gib Parameter so an, dass die Funktion $f(x) = a \cdot b^{x-d} + c$ …

a) durch die Quadranten I, II und III verläuft.

b) nicht den III. Quadranten passiert, aber die waagrechte Asymptote der Funktion durch diesen Quadranten verläuft.

Monotonie findest du auf Seite 112.

c) monoton steigend ist und eine waagrechte Asymptote bei y = 3 besitzt.

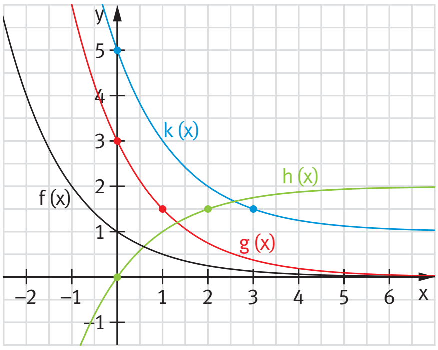
10 Untersuche und vergleiche den Einfluss der Parameter auf
1 die Sinus- bzw. Kosinusfunktion
2 die Potenzfunktion
3 die Exponentialfunktion
miteinander. Beschreibe Zusammenhänge und erstelle eine Übersicht. Präsentiere deine Ergebnisse.

11 Eine Exponentialfunktion der Form $f(x) = a \cdot 2^x + c$ besitzt eine waagrechte Asymptote bei $y = 2$ und verläuft durch den Punkt P (2 | 14). Sabine notiert nebenstehenden Lösungsweg zur Ermittlung der Parameter a und c. Erläutere ihren Lösungsweg.

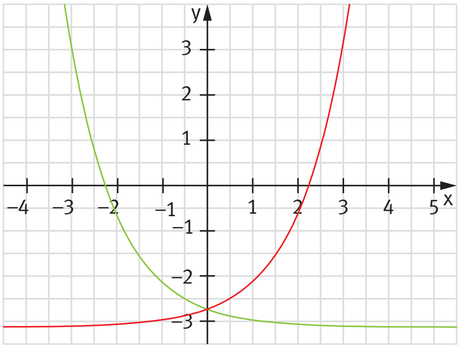
Die waagrechte Asymptote ist $y = 2$. Damit ist $c = 2$.
$f(x) = a \cdot 2^x + c$
$14 = a \cdot 2^2 + 2 \quad | -2$
$12 = a \cdot 4 \quad | :4$
$a = 3$

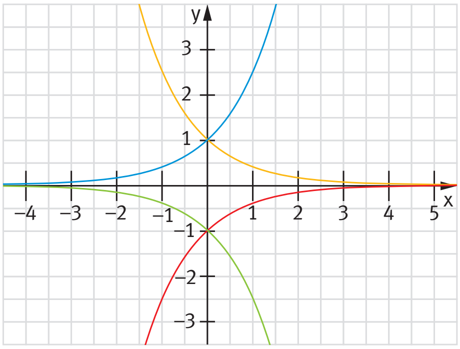
12 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1{,}2^x$ für $-2 \leqq x \leqq 2{,}5$.
a) Zeichne den Graphen der Funktion in ein Koordinatensystem (1 LE ≙ 1 cm).
b) Zeichne den Graphen und gib eine Funktionsgleichung an:
1 f_1: f wird an der y-Achse gespiegelt.
2 f_2: f wird um 2 cm nach rechts verschoben.
3 f_3: f wird um 1 cm nach oben und 2 cm nach rechts verschoben.

13 Gegeben sind die Graphen der Funktionen g, h und k mit der Gleichung $y = a \cdot 0{,}5^x + c$. Ermittle die Parameter mithilfe eines linearen Gleichungssystems und erläutere deren Einfluss auf den Verlauf des Graphen im Vergleich zum Graphen von $f(x) = 0{,}5^x$.



14 Erzeuge die nachstehenden Graphen mit einem Computerprogramm.

a)


b)


Gletschermumie „Ötzi“

Altersbestimmung: C14-Methode

Jeder Mensch nimmt über die Luft radioaktiven C14-Kohlenstoff auf und lagert ihn in den Knochen ein. Durch gleichzeitige Aufnahme und radioaktiven Zerfall bleibt der C14-Gehalt nahezu konstant. Mit dem Tod hört die Aufnahme auf und der Kohlenstoff C14 zerfällt langsam mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren. Das bedeutet, dass 5730 Jahre nach dem Tod eines Menschen nur noch halb so viel C14 vorhanden ist wie zum Zeitpunkt seines Todes.

- Im Jahr 1991 wurden in den Ötztaler Alpen auf südtiroler Gebiet die Überreste eines Mannes („Ötzi“) gefunden. Bei Ötzi betrug die C14-Menge nur noch 53,3 % der ursprünglichen Menge. Bestimme, vor wie viel Jahren Ötzi gestorben ist.
- Die Funktionsgleichung $m(t) = m_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{T_H}}$ beschreibt die Abnahme der C14-Menge.

Häufiger Logarithmus:
$\log_{10} x = \lg x$
(logarithmus generalis)
$b^1 = 1 \Longrightarrow \log_b b = 1$
$b^0 = 1 \Longrightarrow \log_b 1 = 0$
$b^{-1} = \frac{1}{b} \Longrightarrow \log_b \frac{1}{b} = -1$

Merkwissen

Ist der Exponent gesucht, so ist die **Umkehrung des Potenzierens** das **Logarithmieren**.
Die Gleichung $b^c = a$ mit $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $a \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}$ lässt sich umformen zu $\log_b a = c$ (sprich: „Der Logarithmus von a zur Basis b ist c“)

$b^c = a$ — Potenz — $2^3 = 8$

$b = \sqrt[c]{a} \longleftrightarrow c = \log_b a$ — Wurzel $\longleftrightarrow$ Logarithmus — $2 = \sqrt[3]{8} \longleftrightarrow 3 = \log_2 8$

Für das Rechnen mit Logarithmen gilt ($a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $p, q \in \mathbb{R}^+$; $r \in R$):
- Logarithmus eines Produktes: $\log_b (p \cdot q) = \log_b p + \log_b q$
- Logarithmus eines Quotienten: $\log_b \left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q$
- Logarithmus einer Potenz: $\log_b (p^r) = r \cdot \log_b p$
- Wechsel der Basis: $\log_b a = \frac{\log_p a}{\log_p b}$ insbesondere: $\log_b a = \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$

$\log_b a = \frac{\lg a}{\lg b}$ ist besonders praktisch für den Taschenrechner.

Beispiele

I Schreibe die Potenzen als Logarithmus.

a) $4^3 = 64$ b) $7^5 = 16\,807$ c) $10^8 = 100\,000\,000$

Lösung:

a) $\log_4 64 = 3$ b) $\log_7 16\,807 = 5$ c) $\lg 100\,000\,000 = 8$

II Vereinfache folgende Terme.

a) $\log_2 6 - \log_2 48$ b) $\log_5 \sqrt{250} - \log_5 \sqrt{10}$ c) $3 \log_b x + 2 \log_b y$

Lösung:

a) $\log_2 6 - \log_2 48 = \log_2 \frac{6}{48} = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 (2)^{-3} = -3$

b) $\log_5 \sqrt{250} - \log_5 \sqrt{10} = \log_5 \frac{\sqrt{250}}{\sqrt{10}} = \log_5 \sqrt{\frac{250}{10}} = \log_5 5^1 = 1$

c) $3 \log_b x + 2 \log_b y = \log_b x^3 y^2$

Beachte:
$\log_b b^a = a$

Verständnis

- Maike behauptet, dass $\log_2 0 = 1$ ist. Stimmt das? Begründe.
- Kann die Gleichung $x^3 = 27$ mit dem Logarithmus gelöst werden?
- Zeige, dass gilt: (1) $\log_a 1 = 0$ (2) $\log_a \frac{1}{a} = -1$.

Aufgaben

oHiMi 1, 2, 3, 7

1 Übertrage die Tabelle ins Heft und vervollständige die Lücken.

	a)	b)	c)	d)
Potenz	$4^3 = 64$	$17{,}5^2 = 306{,}25$	□	□
Wurzel	□	□	$\sqrt[3]{343} = 7$	□
Logarithmus	□	□	□	$\log_5 15\,625 = 6$

2 Berechne im Kopf.

Überlege dir die dazugehörige Potenz.

a) $\log_3 81$ $\log_2 512$ $\log_4 4$ $\log_4 256$ $\log_3 243$

b) $\log_3 \frac{1}{9}$ $\log_3 \frac{1}{81}$ $\log_2 \frac{1}{64}$ $\log_4 \frac{1}{64}$ $\log_4 0{,}25$

3 Stelle die zugehörige Potenz auf. Bestimme dann x.

Beispiel:
$\log_6 7776 = x$
zugehörige Potenz:
$6^x = 7776$

a) $\log_5 125 = x$ b) $\log_8 x = 2$ c) $\log_x 216 = 3$
d) $\lg 1000 = x$ e) $\lg 0{,}00001 = x$ f) $5^x = 230$

4 Benutze zur Berechnung des Zehnerlogarithmus den Taschenrechner.

a) $\lg 10\,000$ b) $\lg 28$ c) $\lg 1800$ d) $\lg 0{,}0095$
e) $\lg 20 + \lg 5$ f) $\lg 0{,}3 + \lg 22$ g) $\lg 2 \cdot \lg 14$ h) $\lg 0{,}01 \cdot \lg 28$
i) $\lg \sqrt{83}$ j) $\lg 3{,}1^4$ k) $\lg 6^{-3}$ l) $\lg \frac{2}{9}$

5 Löse die Gleichungen mithilfe der passenden Umkehroperation.

a) $x^4 = 625$ b) $a^8 = 6561$ c) $m^5 = 120$ d) $y^{10} = 72$
e) $4^x = 256$ f) $5^b = 100$ g) $0{,}5^n = 0{,}05$ h) $0{,}2^y = 15$

6 Vergleiche jeweils die Ergebnisse und beschreibe Gesetzmäßigkeiten.

a) $\lg 3$ $\lg 30$ $\lg 300$ $\lg 3000$ $\lg 30\,000$
b) $\lg 7$ $\lg 70$ $\lg 700$ $\lg 7000$ $\lg 70\,000$
c) $\lg 0{,}5$ $\lg 0{,}05$ $\lg 0{,}005$ $\lg 0{,}0005$ $\lg 0{,}00005$

7 Fasse zusammen und vereinfache, wenn möglich.

a) $\lg x - \lg y$ b) $\lg x + 3\lg y - 2\lg z$ c) $\lg a - \lg b$ d) $2\lg x + \lg y$
e) $\lg a + 1$ f) $\lg 5 - 2$ g) $\lg 3 + 2\lg a$ h) $(\lg 18 - \lg 3)$

8 Forme unter Anwendung der Logarithmengesetze um.

a) $\lg (a \cdot b \cdot c \cdot d)$ b) $\lg \frac{a \cdot b}{c}$ c) $\lg (a^2 \cdot b)$
d) $\lg (a \cdot b)^4$ e) $\lg (a \cdot b)^3$ f) $\lg \frac{a \cdot b}{2c}$
g) $\lg \frac{a\sqrt{b}}{c}$ h) $\lg \frac{b}{\sqrt[3]{a}}$ i) $\lg \left(2a^3 \sqrt{8a}\right)$

9 Finde durch Überlegen heraus, welches der drei Zeichen <, = bzw. > anstelle des Platzhalters ☐ stehen muss, damit eine wahre Aussage entsteht.

a) $\log_2 4$ ☐ $\log_3 9$ b) $\lg 10$ ☐ $\log_2 10$ c) $\log_2 10$ ☐ $\log_3 10$
d) $\log_5 125$ ☐ $\log_3 27$ e) $\log_5 35$ ☐ $\log_3 35$ f) $\log_6 108$ ☐ $\log_2 12$
g) $\lg 1000$ ☐ $\log_2 16$ h) $1 + \log_2 8$ ☐ $\log_2 32$ i) $(\log_2 2)^2$ ☐ $(\log_4 4)^4$

10 Ermittle unter Verwendung von $\log_5 7 \approx 1{,}21$ einen Näherungswert für
a) $\log_5 35$ b) $\log_5\left(\frac{1}{7}\right)$ c) $\log_5 1{,}4$ d) $\log_5 175$ e) $\log_5 49$ f) $\log_5 \sqrt{7}$

11 Begründe, dass für $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $p \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{R}$ stets $\log_b (p^r) = r \cdot \log_b p$ gilt.

12 Leite einen Zusammenhang zwischen $\log_b a$ und $\log_b\left(\frac{1}{a}\right)$ $(a \in \mathbb{R}^+;\ b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$ her. Begründe, warum man sich bei der Erstellung von Tabellenwerken („Logarithmentafeln“), in denen früher Logarithmenwerte nachgeschlagen wurden, auf die Logarithmen von Zahlen größer als 1 beschränken konnte.

13 a) Lucas und Laura lösen beide die Gleichung $b^x = y$ nach x auf.

Lucas: $b^x = y$
$x = \log_b y$ (1)

Laura: $b^x = y$
$x \log_{10} b = \log_{10} y \quad | : \log_{10} b$
$x = \frac{\log_{10} y}{\log_{10} b}$ (2)

Erkläre deinem Nachbarn / deiner Nachbarin die beiden Vorgehensweisen und gib an, was man aus (1) zusammen mit (2) folgern kann.

b) Leite unter Verwendung der Vorgehensweise bei Teilaufgabe a) her, dass für $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $p \in \mathbb{R}^+$ stets $\log_b p = \frac{\log_a p}{\log_a b}$ ist.

c) Berechne die Termwerte auf Tausendstel gerundet.
$\log_2 10$ $\log_3 10$ $\log_2 18$ $\log_3 18$ $\log_2 100$ $\log_3 100$ $\log_5 8$

Termwerte zu 13 c): 1,292; 2,096; 2,631; 3,322; 4,170; 4,192; 6,644

14 Anzahl der Stellen einer natürlichen Zahl

a) Finde heraus, was die Logarithmenwerte aller Zahlen zwischen 100 und 1000 gemeinsam haben.

b) Gib Gemeinsamkeiten aller fünf- (sechs-, fünfzehn-)stelligen Zahlen an. Bestätige die Allgemeingültigkeit deiner Aussage, indem du die Zahlen in wissenschaftlicher Notation darstellst.

Wissenschaftliche Notation: $345\,678 = 3{,}45678 \cdot 10^5$

c) Finde mithilfe von Teilaufgabe b) heraus, wie viele Ziffern die Werte der Potenzen 22^{22}, 55^{55}, 99^{99} bzw. $(99^{99})^{99}$ besitzen.

d) Überprüfe, ob die in der Pressemeldung angegebene Anzahl der Stellen der bei Veröffentlichung des Artikels größten Primzahl richtig sein kann. Finde heraus, aus welchem Jahr die Meldung vermutlich stammt.

2 hoch 30 402 457 minus 1
Zwei amerikanische Professoren haben die bisher größte Primzahl entdeckt. Sie hat 9 152 052 Stellen, wie das Internet-Primzahlenprojekt GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) in Orlando (Florida) berichtet.

e) Im Jahr 1999 schrieb die Electronic Frontier Foundation (EFF) ein Preisgeld in Höhe von 250 000 \$ für die erste Primzahl mit mehr als einer Milliarde Ziffern aus. Dabei suchte man vor allem sogenannte Mersenne-Primzahlen; das sind Primzahlen, die sich in der Form $2^n - 1$ $(n \in \mathbb{N})$ schreiben lassen.
(1) Gib mindestens vier Mersenne-Primzahlen an.
(2) Berechne, wie groß n mindestens sein muss, um mit der zugehörigen Mersenne-Primzahl das Preisgeld von 250 000 \$ zu gewinnen.

15 Ermittle ohne Verwendung des Taschenrechners den Wert des Terms
$\lg\left(1+\frac{1}{1}\right)+\lg\left(1+\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\lg\left(1+\frac{1}{99}\right)$ möglichst geschickt.

16 Gib jeweils unter der Voraussetzung $\log_3(x+y)=2$ den Termwert an.
a) $\log_3(x^2+2xy+y^2)$ **b)** $\log_3\sqrt{x+y}$ **c)** $\log_3\frac{1}{x+y}$ **d)** $x+y$ **e)** $(x+y)^{x+y}$

17 Berechne jeweils die Halbwertszeit (in Zeiteinheiten) auf zwei Dezimalstellen gerundet.
Beispiel: $y = 4\cdot 0{,}5^x$ mit Startwert $y_0 = 4$
Gesucht ist x für $y=\frac{4}{2}=2$.
$2 = 4\cdot 0{,}5^x$
$0{,}5 = 0{,}5^x$, d. h $x = 1$.
a) $y = 20\cdot 0{,}9^x$ **b)** $y = 8\cdot 0{,}06^x$ **c)** $y = 100\cdot 0{,}75^x$

Lösungen zu 17: 0,25; 2,41; 6,58

18 Die Halbwertszeit des radioaktiven Kohlenstoffisotops C14 beträgt etwa 5730 Jahre.
a) Übertrage die Tabelle in dein Heft und ergänze sie dann dort.

Anzahl der Halbwertsperioden	0	1	2	3	4
Anzahl der Jahre	0	5730	▢	▢	▢
Anteil des verbleibenden C14	1 = 100 %	▢	▢	▢	▢

Zeichne mithilfe der Tabelle einen Funktionsgraphen G.
b) Bei einer Ausgrabung wurde ein Fossil gefunden, das nur noch 20 % der ursprünglichen C14-Menge enthielt. Bestimme mithilfe des Graphen G das ungefähre Alter des Fossils grafisch.
Gib einen Funktionsterm an, mit dem man den Anteil des verbleibenden C14 nach n Halbwertsperioden berechnen kann, und berechne dann das Alter des Fossils auf Jahrtausende gerundet.
c) Vor wie vielen Jahrhunderten hat der ägyptische König Tutanchamun gelebt, wenn seine Mumie jetzt noch 67 % des ursprünglichen C14-Anteils enthält?

*Als **Halbwertszeit** bezeichnet man jeweils den Zeitraum, in dem die Hälfte eines Anfangswerts zerfallen ist (z. B. beim radioaktiven Zerfall).*

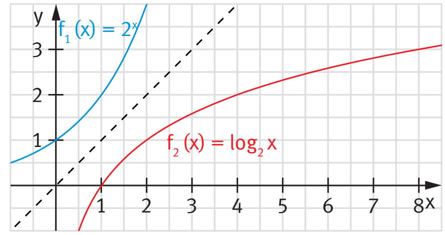
19 Bei dem großen Reaktorunfall 1986 in Tschernobyl wurden u. a. radioaktives Jod 131 und radioaktives Caesium 137 freigesetzt.
a) Die Masse des radioaktiven Jods 131 nimmt pro Tag um 8,3 % ab. Berechne die Halbwertszeit von Jod 131 und ermittle, wie viel Milligramm Jod 131 nach 120 Tagen von jedem ursprünglich freigesetzten Kilogramm Jod 131 noch vorhanden waren.
b) Caesium 137 hat eine Halbwertszeit von 33 Jahren. Finde heraus, wie viel Prozent der anfangs vorhandenen Menge Caesium 137 nach zehn (zwanzig, dreißig, hundert) Jahren noch vorhanden waren (bzw. sein werden).

20 Herr Günther legt auf einem Bankkonto 12 500 € an. Der Zinssatz beträgt 1,3 %. Berechne, wie viele Jahre er brauchen würde, damit er …
a) 15 000 € auf seinem Bankkonto hat.
b) sein Geld verdoppelt hat.
c) Millionär ist.
d) sich für 570 Millionen Euro eine Luxusjacht kaufen kann.

Stelle zunächst eine Gleichung auf und stelle sie um.

Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen $f_1(x) = 2^x$ und $f_2(x) = \log_2 x$.

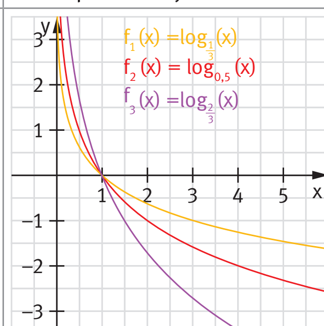
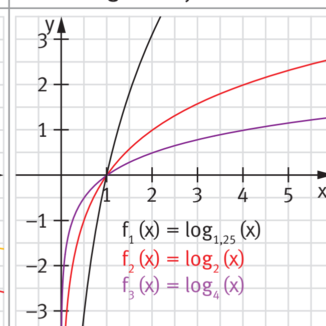
- Zeichen die Funktionsgraphen in dein Heft.
- Beschreibe die Symmetriebeziehungen zwischen den Graphen.
- Wie kann man den Graphen von f_2 aus dem Graphen von f_1 erhalten?



Merkwissen

Du weißt bereits, dass man durch Vertauschen des Funktionswertes y mit dem Argument x eines Funktionsterms die Umkehrfunktion erhält.

Die **Logarithmusfunktion $f(x) = \log_b x$** ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = b^x$. Die Logarithmusfunktion $f(x) = \log_b x$ mit $x, b > 0$, $b \neq 1$ hat folgende Eigenschaften:

	$0 < b < 1$	$b > 1$
Definitionsbereich	$D = \mathbb{R}^+$	$D = \mathbb{R}^+$
Wertebereich	$W = \mathbb{R}$	$W = \mathbb{R}$
gemeinsamer Punkt	A (0 | 1)	A (0 | 1)
Monotonie	monoton fallend	monoton steigend
Asymptoten	positive y-Achse	negative y-Achse
Graph		

Beispiele

I Bestimme rechnerisch zur Funktion f mit $f(x) = 1{,}5^x$ die Umkehrfunktion $\bar{f}$.

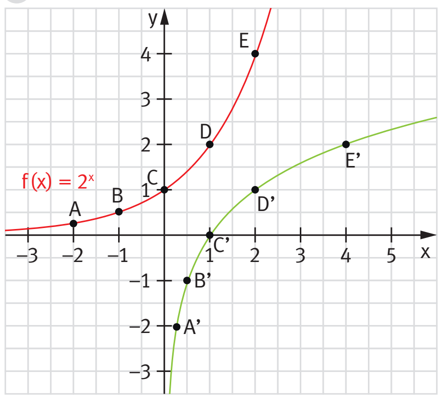
Lösung:

Vorgehen	Beispiel: $f(x) = 1{,}5^x$	allgemein: $f(x) = b^x$
D und W von f bestimmen	$D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}^+$	$D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}^+$
Funktionsterme mit x und y schreiben	$y = 1{,}5^x$	$y = b^x$
Variablen tauschen	$x = 1{,}5^y$	$x = b^y$
nach y auflösen	$y = \bar{f}(x) = \log_{1,5} x$	$y = \bar{f}(x) = \log_b x$
$D_{\bar{f}}$ und $W_{\bar{f}}$ von $\bar{f}$ bestimmen	$D = \mathbb{R}^+$; $W = \mathbb{R}$	$D = \mathbb{R}^+$; $W = \mathbb{R}$

II Bestimme grafisch zu f mit $f(x) = 2^x$ die Umkehrfunktion $\bar{f}$.

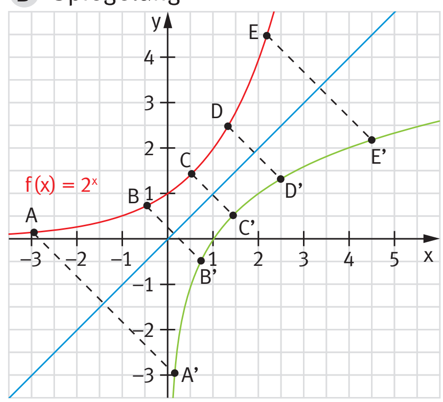
Lösungsmöglichkeiten:

A Koordinatentausch



1. D und W von f bestimmen
2. Graph der Funktion f zeichnen
3. von mindestens vier Punkten die Koordinaten vertauschen und eintragen, z. B. E (2 | 4) ⟹ E' (4 | 2)
4. Graph der Umkehrfunktion vervollständigen und Funktionsgleichung aufstellen: $\bar{f}(x) = \log_2 x$
5. D und W von $\bar{f}$ bestimmen

B Spiegelung



1. D und W von f bestimmen
2. Graph der Funktion f zeichnen
3. Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten zeichnen
4. ausgewählte Punkte an der Winkelhalbierenden spiegeln
5. Graph der Umkehrfunktion vervollständigen und Funktionsgleichung aufstellen: $\bar{f}(x) = \log_2 x$
6. D und W von $\bar{f}$ bestimmen

Der Koordinatentausch, wie du ihn bereits von den Potenzfunktionen kennst, entspricht einer Spiegelung des Funktionsgraphen der Funktion f an der Winkelhalbierenden des I. und II. Quadranten.

Verständnis

- Erläutere am Graphen ein Logarithmusgesetz deiner Wahl mit $u, v \in \mathbb{R}^+$; $r \in \mathbb{R}$:
  1. $\log_b (u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$
  2. $\log_b \left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$
  3. $\log_b (u^r) = r \cdot \log_b u$
- Begründe: Ein Punkt P (a | b) mit a > 0 gehört genau dann zum Graphen der Funktion $f(x) = \log_3 x$, wenn der Punkt Q (b | a) zum Graphen von $g(x) = 3^x$ gehört. Warum ist die Einschränkung a > 0 notwendig?

Aufgaben

1 **a)** Übertrage die Wertetabellen in dein Heft und vervollständige sie.
b) Zeichne die Graphen im Intervall $0 < x \leq 5$.

1

x	0,1	0,2	0,3	1	1,2	2,1	3	5
$f(x) = \log_{1,5} x$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

2

x	0,1	0,2	0,3	1	1,2	2,1	3	5
$g(x) = \log_{1,8} x$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

3

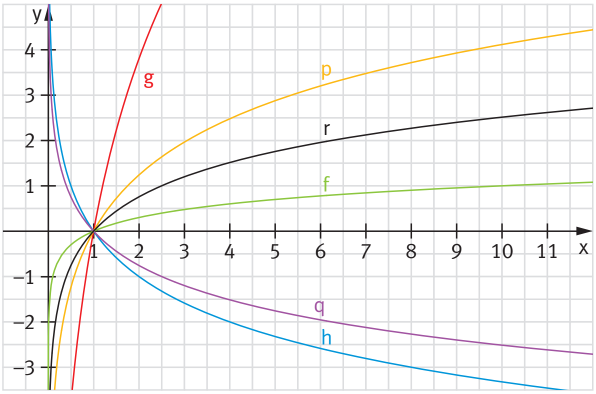
x	0,1	0,2	0,3	1	1,2	2,1	3	5
$h(x) = \log_{2,2} x$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

2 Zeichne die Graphen der Funktionen und ergänze ihre Eigenschaften im Heft.

	a) $f(x) = \log_{1,3} x$	**b)** $g(x) = \log_{2,7} x$	**c)** $h(x) = \log_{0,3} x$	**d)** $k(x) = \log_{0,5} x$
Definitionsbereich				
Wertebereich				
Monotonie				
Nullstellen				
Asymptote				
Gleichung der Umkehrfunktion				

3 Ordne jedem der sechs Graphen die jeweilige Funktionsgleichung zu.

1. $\log_{2,5} x$
2. $\log_{1,75} x$
3. $\log_{0,5} x$
4. $\log_{1,2} x$
5. $\log_{0,4} x$
6. $\log_{10} x$



4 Bestimme die Gleichung der Logarithmusfunktion mit $f(x) = \log_b x$, $x > 0$, deren Graph durch den Punkt P verläuft.

a) P (8 | 2) **b)** P (2 | 8) **c)** P (0,5 | −1)
d) P (0,5 | 2) **e)** P (1 | 0) **f)** P (0,1 | −6)

5 In einer Schule mit 849 Schülern wird am Morgen von zwei Schülern ein Gerücht erfunden, das sich von nun an verbreitet. Nach der ersten Stunde kennen bereits sechs Schüler das Gerücht. Nimm an, dass sich das Gerücht mit der gleichen Geschwindigkeit weiterverbreitet.

a) Wie viele Schüler kennen das Gerücht nach der 3. Stunde, wie viele nach der 5. Stunde?

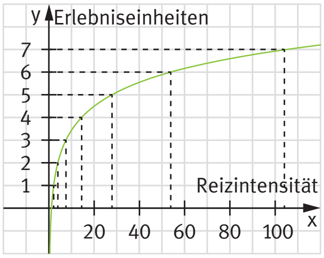
b) Gib eine Gleichung an, die die Ausbreitung des Gerüchts beschreibt.

c) Nach wie vielen Stunden hat mindestens die Hälfte aller Schüler von dem Gerücht gehört?

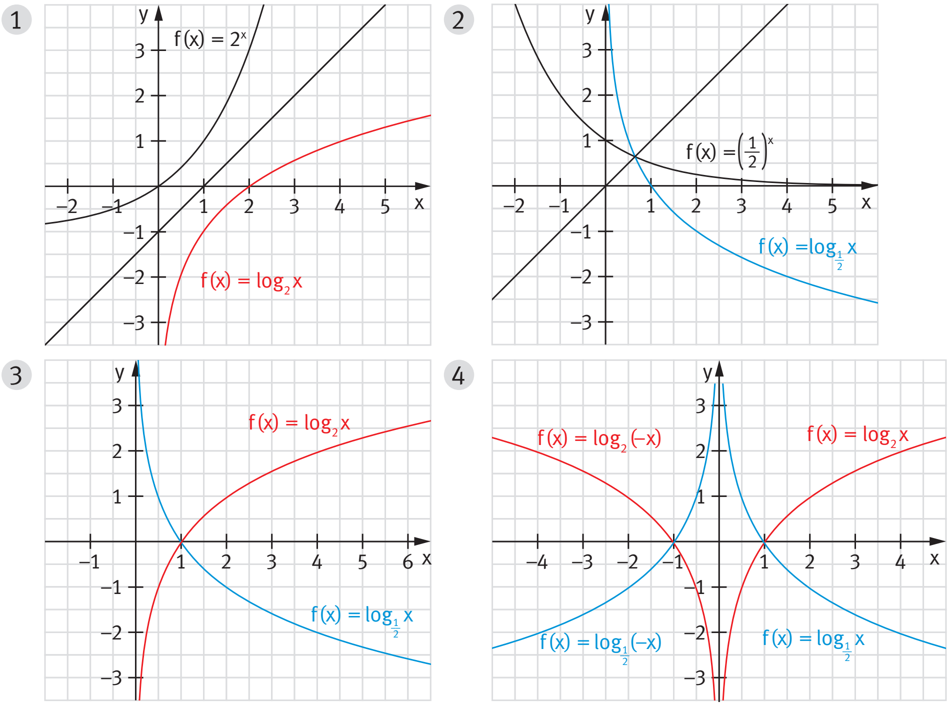
6 Das Weber-Fechnersche „psychophysische Grundgesetz“ von 1859:
Der Unterschied zweier Sinnesempfindungen e_1 und e_2 ist proportional zum Logarithmus der Verhältnisse der physikalischen Reize r_1 und r_2, von denen die Sinnesempfindungen hervorgerufen werden:

$$e_1 - e_2 = \log_{10}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

Informiere dich, wo das psychophysische Grundgesetz Anwendung findet, und stelle deine Ergebnisse in einem Vortrag der Klasse vor.



7 Untersuche die wesentlichsten Eigenschaften der Logarithmusfunktionen mithilfe eines geeigneten Computerprogramms.



8 **a)** Erstelle ein Lernposter zum Thema „Die Logarithmusfunktion und ihre Eigenschaften“. Stelle das Poster der Klasse vor.

b) Beschreibe Gemeinsamkeiten bei der Bestimmung einer Umkehrfunktion zur Potenzfunktion und Exponentialfunktionen.

9 Welcher Graph wächst eigentlich schneller?

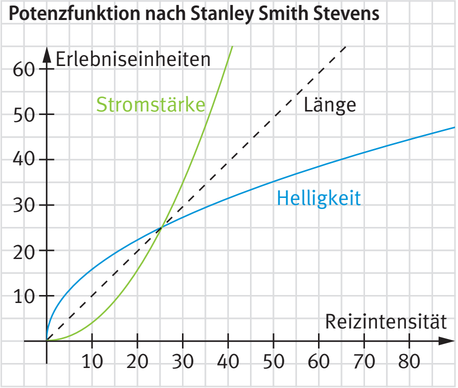
$f_1(x) = x$ $\quad$ $f_2(x) = x^n$ $(n = 2,3)$ $\quad$ $f_3(x) = b^x$

$f_4(x) = \log_b x$ $\quad$ $f_5(x) = \sqrt[n]{x}$ $\quad$ $f_6(x) = x!$

Untersuche das Wachstumsverhalten und stelle deine Ergebnisse der Klasse vor.

n! gelesen n Fakultät
$n! = n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

10 Die Stevens’sche Potenzfunktion von 1957 als Verallgemeinerung des Weber-Fechnerschen Gesetzes: Die Stevens’sche Potenzfunktion besagt, dass die Erlebnisstärke (E) zu einer (jeweils bestimmten) Potenz der Reizintensität (S) proportional ist. Es gilt mit der Konstanten k und $r \in \mathbb{R}$: $E = k \cdot S^r$. Welche Werte könnten k und r für die Stromstärke, die Länge bzw. die Helligkeit annehmen?



Herr Meyer zieht in eine neue Wohnung mit einer Monatsmiete von 650 €. Im Mietvertrag ist vereinbart, dass die Miete jährlich um 6 % steigt. Herr Meyer hat ein Gehalt von monatlich 3800 €. Er rechnet mit einer jährlichen Gehaltssteigerung von 2,5 %.

- Berechne, nach wie viel Jahren Herr Meyers Miete so hoch ist wie sein Einkommen.
- Bestimme, wie viel Prozent seines Einkommens die Miete nach 5 Jahren (10 Jahren, 20 Jahren) ausmacht.

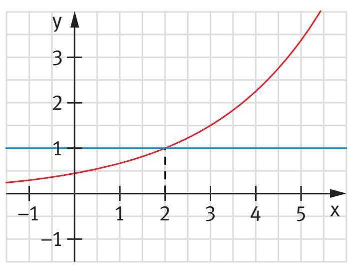
Merkwissen

Unter einer **Exponentialgleichung** versteht man eine Gleichung, bei der die Variable (nur) im Exponenten auftritt. Die Lösungsmenge einer Exponentialgleichung kann man grafisch ermitteln oder rechnerisch durch Logarithmieren und Exponentenvergleich.

Beispiele

I Löse **grafisch** die Exponentialgleichung $1{,}5^{x-2} = 1$.

Lösung:



$f(x) = 1{,}5^{x-2}$
$g(x) = 1$
An der Stelle $x = 2$ ist der Funktionswert $f(x)$ gleich 1.
Probe:
$1{,}5^{2-2} = 1$ (wahr)
$L = \{2\}$

II Löse durch **Logarithmieren** die Exponentialgleichung $4 \cdot 2^{3-2x} = 6$.

Nutze: $\log_b (u^r) = r \cdot \log_b u$

Lösung:

$4 \cdot 2^{3-2x} = 6 \quad | :4$
$2^{3-2x} = 1{,}5 \quad | \lg()$
$\lg 2^{3-2x} = \lg 1{,}5$
$(3-2x) \cdot \lg 2 = \lg 1{,}5 \quad | :\lg 2$
$3 - 2x = \frac{\lg 1{,}5}{\lg 2} \quad | -3 \; | \cdot(-1)$
$2x = 3 - \frac{\lg 1{,}5}{\lg 2} \quad | :2$
$x \approx 1{,}21$

Probe:
$4 \cdot 2^{3-2\cdot 1{,}21} \approx 6$ (wahr)
Da die Werte des Logarithmus gerundet sind, kann die Lösung nur im Rahmen der Rundungsgenauigkeit bestimmt werden.
$L = \{1{,}21\}$

III Löse durch **Exponentenvergleich** bei gleicher Basis.

a) $2^{x+4} = 8$ b) $4 \cdot 3^{x-5} = 36$

Nutze:

$b^x = b^x \qquad \log_b b^x = x$

Lösung:

a) $2^{x+4} = 8 \iff 2^{x+4} = 2^3$
Vergleich: $x + 4 = 3$
$x = -1$
Probe:
$2^{-1+4} = 8$ (wahr)
$L = \{-1\}$

b) $4 \cdot 3^{x-5} = 36 \iff 3^{x-5} = 3^2$
Vergleich: $x - 5 = 2$
$x = 7$
Probe:
$4 \cdot 3^{7-5} = 36$ (wahr)
$L = \{7\}$

Verständnis

- Begründe die Aussage:
  „Der Exponentenvergleich ist nur möglich, wenn alle Basen gleich sind.“
- Finde durch Überlegen die Lösung folgender Exponentialgleichungen:
  1 $4^x + 3^x = 2$ 2 $4^x - 3^x = 7$

Aufgaben

oHiMi 1, 3, 4, 6

1 Löse die Gleichungen in ℝ.

a) $4^x = 2$ **b)** $4^x = 0{,}125$ **c)** $3 - 0{,}5^x = 1$
d) $1 + 2^{3x} = 65$ **e)** $4 \cdot 1^{2-3x} = 8$ **f)** $5 + 3^x = 1{,}5$
g) $6 \cdot 2^{x-2} = 24$ **h)** $0{,}2 \cdot 5^{x+3} = 5$ **i)** $1500 \cdot 0{,}1^{x-6} = 1{,}5$

2 Bestimme die Lösungsmenge in D = ℝ grafisch mithilfe eines Computers.

a) $2^x = 64$ **b)** $3^x = 81$ **c)** $5^x = 625$ **d)** $2 \cdot 3^x = 18$
e) $7 \cdot 5^x = 35$ **f)** $9 \cdot 7^x = \frac{9}{7}$ **g)** $4^x = 32$ **h)** $9^x = \frac{1}{3}$

3 Löse durch Exponentenvergleich.

a) $2^{x+1} = 4$ **b)** $3^{x-5} = 81$ **c)** $2^{2x+3} = \frac{1}{32}$ **d)** $3^{5x-1{,}5} = \sqrt[4]{27}$

4 Für welchen Wert von x hat die Funktion mit $f(x) = 2^x$ den Funktionswert 10 (20)?

5 Löse die Gleichungen.

a) $5 \cdot 1{,}5^{x-2} = 7{,}5$ **b)** $1{,}6 \cdot 4^{x+3} = 204{,}8$ **c)** $10 \cdot 8{,}5^{x+2{,}7} = 6141{,}25$

6 Berechne die Lösungsmenge.

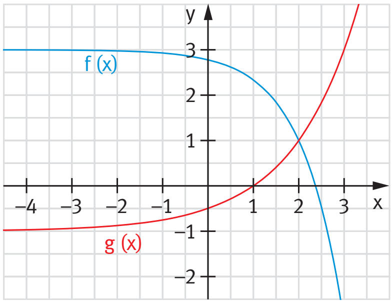
a) $3^x = 2$ **b)** $4^x = 0{,}8$ **c)** $10^x = 3{,}7$ **d)** $3^{-x} = 0{,}8$
e) $2^{2x+4} - 8 \cdot 4^x - 4 = 0$ **f)** $2^{2x+3} - 4 \cdot 4^x - 1 = 0$ **g)** $2^{3x+5} - 2^{3x+3} - 2^{3x+1} = 176$

7 Die Gleichung $m(t) = 200\,\text{mg} \cdot 2{,}5^{-0{,}4t}$ ($t \geqq 0$: Anzahl der Stunden) beschreibt den Abbau eines Medikaments von 200 mg im Körper.

a) Berechne, nach wie vielen Stunden das Medikament auf die Hälfte (ein Viertel, 10 %) der ursprünglichen Menge abgebaut ist.

b) Berechne, nach wie vielen Stunden die Restmenge im Körper nur noch 30 mg beträgt.

8 Im Koordinatensystem sind die Graphen der Funktionen $f(x) = -2 \cdot 3^{x-2} + 3$ und $g(x) = 2^{x-1} - 1$ dargestellt.



a) Erkläre, wie die Gleichung $-2 \cdot 3^{x-2} + 3 = 2^{x-1} - 1$ gelöst wurde.

b) Ermittle ebenso die Lösung der Gleichung.

1 $2^x = 13 - 3^x$

2 $3 \cdot 4^{x-4} + 2 = \frac{-3}{2^{12}} \cdot 2^{3x} + 8$

9 Löse die Gleichungen.

a) $(2^x)^2 - 3 \cdot 2^{x+2} = 0$ **b)** $(\lg x)^2 + 3 \cdot \lg x - 4 = 0$
c) $\lg(16x^2) - \lg(8x^2) = 2 \cdot \lg(4x^2) - \lg(x^2) - \lg 8$

10 Löse die Exponentialgleichung. Begründe deine Wahl des Verfahrens ($D = \mathbb{R}$).

a) $\frac{1}{2} \cdot 3^x = 5$ **b)** $5 \cdot 2^{x+1} = 18$ **c)** $3 \cdot 4^{x-1} = 0{,}8$
d) $1{,}5^{x+6} = 3{,}28$ **e)** $3 \cdot 2^{x-3} = 2{,}4$ **f)** $4 \cdot 3{,}6^{x+1} = 14$
g) $3^{x+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} = 26$ **h)** $6 \cdot 3^{2x-7} = 35$ **i)** $-2{,}1 \cdot 7^{x+8} = -1{,}6$
j) $24 \cdot 31^{2x+19} = -6$ **k)** $3 \cdot 6^{3x+2} = 648$ **l)** $3^{x+4} = 27^{2x+3}$

11 Hier stimmt etwas nicht. Finde den Fehler und korrigiere ihn.

a)
$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^5$$
$$\frac{3^x}{4^x} = \frac{4^5}{3^5}$$
$$3^x \cdot 3^5 = 4^x \cdot 4^5$$
$$3^{x+5} = 4^{x+5}$$
$$3 = 4$$

b)
$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 > \left(\frac{1}{3}\right)^7 \quad | \lg()$$
$$3 \cdot \lg\left(\frac{1}{3}\right) > 7 \cdot \lg\left(\frac{1}{3}\right) \quad | : \lg\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$3 > 7$$

12 ① $f(x) = 2^{x+1}$ $g(x) = 3{,}5$ ② $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 4$ $g(x) = -1{,}5$
③ $f(x) = 4 \cdot 3^{x-2} - 1$ $g(x) = 8747$ ④ $f(x) = 0{,}5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} - 2$ $g(x) = -1{,}98$

a) Bestimme die Koordinaten der Achsenschnittpunkte des Graphen von f.
b) Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts der Graphen von f und g.

13 Ermittle jeweils die Lösungsmenge im Bereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

a) $4^x = 2$ **b)** $4^x = 0{,}125$ **c)** $3 - 0{,}5^y = 1$ **d)** $1 + 2^{3x} = 65$
e) $4 \cdot 1^{2-3y} = 8$ **f)** $1 + 2^{3y} = -5$ **g)** $3y = 0{,}\overline{1}$ **h)** $5 + 3^y = 1{,}5$
i) $2 \cdot 4^{-x} = 1$ **j)** $(1 + 3x)^3 = 8$ **k)** $2x - 16 = 0$ **l)** $2^{3x+1} - 8 = 0$
m) $2^{x^2-1} - 8 = 0$ **n)** $2^{\sqrt{x}-1} = 8;\ x \geq 0$ **o)** $2^x = 3$ **p)** $4 \cdot 2^x - 1 = 63$
q) $64 = 10^y$ **r)** $64 = 10^{1-2y}$ **s)** $64 = (10^y - 6)^2$ **t)** $10^{y+1} - 90 = 10$
u) $x^2 + 15x + 56 = 0$ **v)** $\frac{9x}{x^2 + 20} = 1$ **w)** $\sqrt{x^2 + 9} = 7$ **x)** $\frac{2^4}{x^2 + 6} = 2^3$

14 Ermittle jeweils zunächst, welche reellen Zahlen man für x einsetzen kann. Bestimme die Lösungsmenge, möglichst durch Überlegen.

a) $\log(x - 1) = 0$ **b)** $\log(1 - x^2) = 0$
c) $\log(1 - x^2) = -1$ **d)** $\log(x + 1) - \log x = 1$

15 Bestimme jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

a) I $y = 2x$; II $2^x - 2^y = 0$
b) I $2^x + y = 10$; II $y - 2^x + 6 = 0$
c) I $5^{x-y} = 625$; II $\log(x + y) = 1$
d) I $x + y = 101$; II $\log x + \log y = 2$

Lösungen zu Aufgabe 16: $-1;\ 0;\ 10^{-6};\ 1;\ 2;\ 3;\ 10;\ 104$

16 Finde jeweils die Lösungsmenge für $D = \mathbb{R}$ heraus.

a) $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ **b)** $16^y - 4{,}25 \cdot 4^y + 1 = 0$ **c)** $144^x = 12^6$
d) $(\lg z)^2 + 5 \cdot \lg z - 6 = 0;\ z > 0$ **e)** $10^{\lg z} = 1;\ z > 0$ **f)** $\lg\sqrt{z} = \sqrt{\lg z};\ z \geqq 1$

17 Informiere dich z. B. im Internet, was man unter der „Halbwertszeit des Wissens“ versteht, und stelle die Ergebnisse deiner Recherche der Klasse vor.

18 Laura und Lucas haben – unter möglichst großer Schaumentwicklung – einen Maßkrug mit alkoholfreiem Bier „gefüllt“, und zwar so, dass der Schaumrand gerade noch unterhalb des Glasrands war. Anschließend haben sie alle 10 Sekunden die Höhe h der Schaumkrone gemessen und ihre Messergebnisse tabelliert:

Zeit (in s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
h (in cm)	16,8	13,7	11,2	9,2	7,5	6,1	5,0	4,1	3,3	2,7	2,2

Bestimme mithilfe der Wertepaare (0 | 16,8) und (60 | 5,0) die Werte der Parameter a und b in der Zerfallsgleichung $h = a \cdot b^t$ und untersuche, wie gut diese Gleichung den Schaumzerfall beschreibt. Wie groß war die Halbwertszeit der Schaumhöhe in etwa?

19 Gregor und Sophie haben den in Aufgabe 18 beschriebenen Versuch mit einer anderen alkoholfreien Biersorte wiederholt.

$t_1 = 0$ s
$h_1 = 16{,}8$ cm
$t_2 = 60$ s
$h_2 = 2{,}7$ cm
$h(t) = 16{,}8\text{ cm} \cdot 0{,}97^{t^*}$

a) Untersuche, ob die von Gregor und Sophie angegebene Zerfallsgleichung rechnerisch richtig ermittelt ist (verstrichene Zeit: t* Sekunden; $t^* \in \mathbb{R}_0^+$).

b) Zeichne ein t-h-Diagramm.

c) Führe mit einem Freund/einer Freundin einen entsprechenden Versuch durch und stellt eure Ergebnisse der Klasse vor.

20 Der Bestand einer Population von Oryxantilopen wird durch die Funktion $f(t) = 18\,000 \cdot 3^{0{,}02t}$ mit t (Anzahl der Jahre) beschrieben.

a) Finde heraus, nach wie viel Jahren der Bestand um 40 % zugenommen hat.

b) Finde sowohl mithilfe einer Wertetabelle wie auch durch einen grafischen oder rechnerischen Ansatz heraus, wann die Zunahme innerhalb eines Jahrs erstmals mehr als 500 Individuen beträgt.

22 Ein Badesee wurde durch eine Chemikalie verunreinigt; dabei wurde eine Schadstoffkonzentration von 100 ppm (ppm: parts per million) gemessen. Der Verunreinigungsgrad nimmt pro Woche um 15 % ab. Finde heraus, wann das Badeverbot wieder aufgehoben werden kann, wenn der gesundheitlich unbedenkliche Wert für diese Chemikalie bei höchstens 20 ppm liegt.

23 Beim Durchgang von Licht durch eine Scheibe der Dicke d einer bestimmten Glassorte sinkt die Lichtintensität auf 96 % des ursprünglichen Werts.

a) Licht geht durch einen Stapel aus drei Scheiben dieser Glassorte, die jeweils die Dicke d besitzen. Finde heraus, auf wie viel Prozent des ursprünglichen Werts die Lichtintensität dadurch sinkt.

b) Welche Gesamtdicke müsste ein Stapel aus Scheiben (Dicke jeweils d) dieser Glassorte besitzen, damit die Lichtintensität auf die Hälfte des ursprünglichen Werts sinkt?

Zu 5.1

1 Ergänze die Wertetabellen so, dass …

a) lineares Wachstum vorliegt.

x	0	1	2	3	4
f (x)	☐	☐	4	6	☐

b) exponentielles Wachstum der Form $f(x) = b^x$ vorliegt.

x	0	1	2	3	4
f (x)	☐	2	☐	☐	☐

a) lineares Wachstum vorliegt.

x	0	1	2	3	4
f (x)	☐	☐	1,0	☐	1,6

b) exponentielles Wachstum der Form $f(x) = b^x$ vorliegt.

x	0	1	2	3	4
f (x)	☐	☐	144	☐	☐

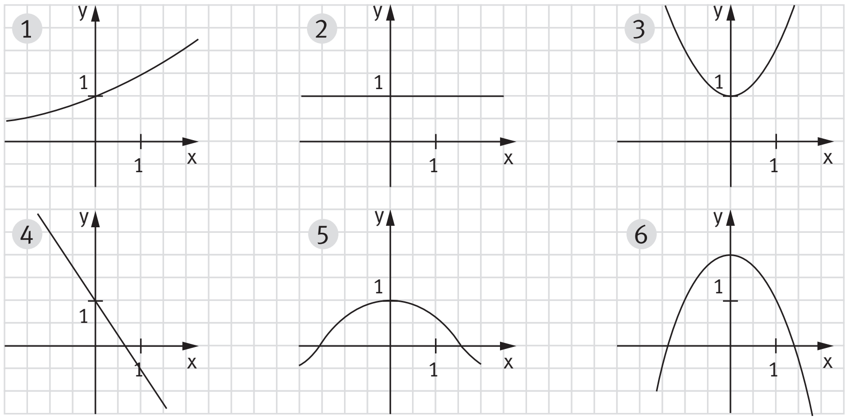
Zu 5.2

2 Ordne jedem Funktionsgraphen einen Funktionstypen zu und begründe deine Entscheidung.

1 konstante Funktion
2 lineare Funktion
3 quadratische Funktion
4 trigonometrische Funktion
5 Exponentialfunktion

Ordne jeder Funktionsgleichung einen der sechs Funktionsgraphen zu und begründe deine Entscheidung.

1 $f(x) = x^2 + 1$
2 $f(x) = 1{,}5^x$
3 $f(x) = 1 - 1{,}5x$
4 $f(x) = 1$
5 $f(x) = \cos x$



3 In einem Fernsehquiz, bei dem maximal 10 Fragen gestellt werden, kann man immer zwischen zwei Optionen wählen. Bei einer falschen Antwort geht der Gewinn verloren.

Option 1
Der Kandidat hat 100 € Startguthaben.
Jede richtige Antwort verdoppelt das Guthaben.

Option 2
Jede richtige Antwort bringt 500 €.

Beschreibe die beiden Optionen jeweils durch eine Funktionsgleichung.

Für welche Option würdest du dich entscheiden? Begründe.

Zu 5.3

4 Gib D, W und die Asymptoten der Funktion f an.

1 $f(x) = 6^x$ 2 $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

1 $f(x) = 1{,}5^x - 3$ 2 $f(x) = 0{,}25^{x-2} - 5$

5 Ermittle die Logarithmen im Kopf. **Zu 5.4**

a) $\log_4 256$ b) $\log_3 27$ c) $\log_6 216$
d) $\log_{12} 12^9$ e) $\log_5 5^8$ f) $\log_4 1$

a) $\lg 1000$ b) $\log_5 125$ c) $\log_2 4^2$
d) $\lg 10\,000$ e) $\log_2 2$ f) $\log_9 81$

6 Bestimme die fehlende Größe.

a) $\log_b 9 = 2$ b) $\log_b 64 = 3$
c) $\log_b 125 = 3$ d) $\log_b 81 = 2$
e) $\log_5 a = 3$ f) $\log_2 a = 4$

a) $\log_b 8 = 3$ b) $\log_b 10 = 1$
c) $\log_b 1{,}3^9 = 9$ d) $\log_b 1000 = 4$
e) $\log_9 a = 2$ f) $\log_3 a = 3$

7 Gegeben ist die Gleichung einer Exponentialfunktion f. Bestimme die Gleichung der Umkehrfunktion $\bar{f}$. Zeichne die Graphen von f und $\bar{f}$ in ein Koordinatensystem. **Zu 5.5**

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = 1{,}5^x$

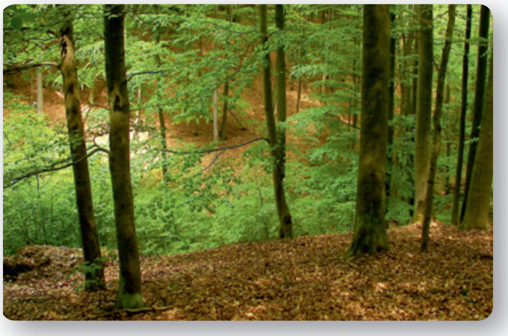
a) $f(x) = 0{,}5^x$ b) $f(x) = 1{,}1^x$

8 Der Luftdruck p nimmt mit zunehmender Höhe ab. Es gilt die „Barometerformel“ $p(h) = p_0 \cdot 0{,}883^h$ (Höhe h in km). Der Luftdruck auf Meereshöhe beträgt $p_0 = 1{,}013$ bar. **Zu 5.6**

Berechne den Luftdruck …
1 auf dem Großen Arber ($h_1 = 1456$ m).
2 auf der Zugspitze ($h_2 = 2962$ m).
3 auf dem Mt Everest ($h_3 = 8848$ m).
4 am Toten Meer ($h_4 = -428$ m).

Bei einem Flugzeug mit einer Flughöhe von 12 000 m herrscht ein Kabinendruck, der einer Höhe von 2200 m entspricht. Berechne die Kraft, die auf einen Quadratmeter der Flugzeughülle drückt.
Tipp: Berechne die Druckdifferenz und wende dann die Gleichung $p = \frac{F}{A}$ an.

9 Der Holzbestand eines Waldes beträgt zu Beginn einer Messung 8000 fm. Die Erfahrung zeigt, dass durch Holzwachstum dieser Wert jedes Jahr um 3 % zunimmt.



a) Wie viel fm Holz sind nach 10 Jahren vorhanden? Löse grafisch.
b) Nach welcher Zeit wäre der Holzbestand auf 10 000 fm angewachsen?

a) Wie viel fm Holz sind nach 10 Jahren vorhanden? Löse rechnerisch.
b) Nach Ablauf von 10 Jahren werden 2000 fm Holz geschlagen. Wie lange dauert es, bis der Wald wieder den Holzbestand von vor der Fällung erreicht hat? Schätze zunächst und berechne anschließend.

Aufgaben

1 Bei jedem der durch die Tabelle beschriebenen Wachstumsvorgänge liegt entweder lineares oder exponentielles Wachstum vor. Beschreibe zunächst die Art des Wachstums durch einen Funktionsterm. Übertrage dann die Tabelle in dein Heft und ergänze dort die noch fehlenden Werte.

	Zeit (in h)	0	1	2	3	4	5	6	10
a)	Volumen einer Bakterienkultur (in mm^3)	2	6	18			486		
b)	Anzahl der Personen, die von einem Gerücht erfahren haben	1	4		64		1024		
c)	Füllhöhe eines Wasserbeckens (in cm)	20	30		50		70		

2 Gib bei jedem der Terme an, welche prozentuale Zunahme bzw. welche prozentuale Abnahme er beschreibt.

a) $1{,}10^x$ **b)** $1{,}05^y$ **c)** $0{,}993^z$

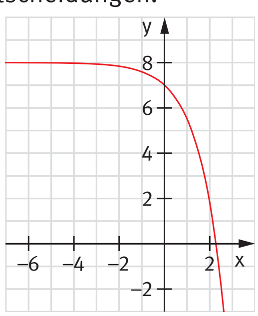
d) $2000\,€ \cdot 1{,}03^n$ **e)** $750\,\text{mg} \cdot 0{,}50^t$

3 Gib jeweils den Wachstums- bzw. den Abnahmefaktor an:

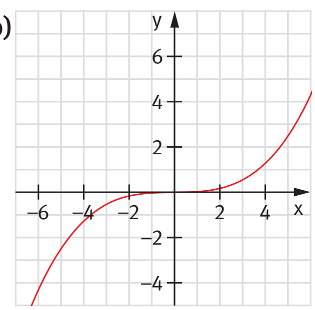
a) 3,5 % Wachstum **b)** 5,2 % Abnahme **c)** 10 % Wachstum **d)** 1 % Abnahme

4 Welche der folgenden Wachstumsvorgänge sind exponentiell? Begründe deine Entscheidungen.

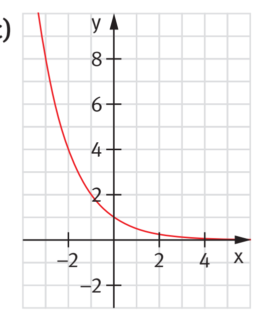
a)



b)



c)



d) Peter verteilt täglich 500 Prospekte, um für einen Elektronikmarkt zu werben.

5 Erstelle mit deinem Computer die Graphen der Funktionen f und g.
Was stellst du fest? Gib Gründe dafür an.

a) $f(x) = \frac{1}{8} \cdot 2^x$ $\quad g(x) = 2^{x-3}$ **b)** $f(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^{4x}$ $\quad g(x) = \left(\frac{625}{16}\right)^x$

6 Löse die Gleichungen.

a) $3^x = 27$ **b)** $\log_9 x = 5$ **c)** $4^{x+4} = 262\,144$

d) $6 \cdot 3^{x+1} = 1$ **e)** $\log_7 x = 3$ **f)** $\log_2(x) + 1 = 4$

7 Zeichne eine 15 cm lange Strecke und teile sie in 4 Abschnitte, wobei ...

a) jeder folgende Abschnitt doppelt so groß ist wie der vorherige.

b) jeder folgende Abschnitt um 1 cm größer ist als der vorherige.

c) jeder folgende Abschnitt dreimal so groß ist wie der vorherige.

8 Berechne – soweit möglich – ohne Taschenrechner.

a) $\log_5 1$ **b)** $\log_5 2$ **c)** $\log_5 10$ **d)** $\log_5 125$ **e)** $\log_5 0{,}1$
f) $\log_5 0{,}25$ **g)** $\log_5 0{,}4$ h) $\log_{0,2} 2$ i) $\log_{0,75} 0{,}75$ **j)** $\log_{100} 150$

9 Löse die Gleichung. Beschreibe dein Vorgehen.

a) $3{,}5^{1,5} = x$ **b)** $x^{1,5} = 3{,}5$ **c)** $3{,}5^x = 1{,}5$ **d)** $3^{-x} = 2$
e) $8 = \log_x 0{,}7$ **f)** $0{,}7 = \log_8 x$ **g)** $x^3 = 50$ **h)** $2^{2-x} = 3$

10 Finde bei jeder der Tabellen heraus, ob sie zu einem linearen Wachstum, einem exponentiellen Wachstum oder zu einer anderen Art von Wachstum gehört. Gib jeweils einen Wachstumsfunktionsterm an.

a)

x	0	1,5	2	2,5
f (x)	1	3,375	8	15,625

b)

x	1	2	3	4
f (x)	1,2	2,4	3,6	4,8

c)

x	0	0,5	1	2
f (x)	1	1,73	3	9

d)

x	0	0,5	1	1,5
f (x)	15	13,25	11,5	9,75

11 Übertrage jede Tabelle zweimal in dein Heft und ergänze sie dann so, dass …

a) eine lineare Abnahme vorliegt. **b)** eine exponentielle Abnahme vorliegt.

1

x	0	1	2	3	4
f (x)	40	36	☐	☐	☐

1

x	0	1	2	3	4
f (x)	60	50	☐	☐	☐

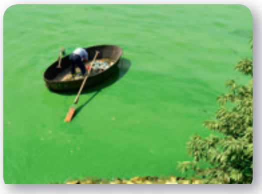
3

x	0	1	2	3	4
f (x)	☐	☐	☐	50	25

2

x	0	1	2	3	4
f (x)	☐	☐	16	☐	4

12 Gib an, ob es sich um lineares oder exponentielles Wachstum handelt. Begründe.


Algen im Lake Chao

a) Der Lake Chao in China war von einer Plage befallen. In nur einer Woche verdoppelte sich die Anzahl der Grünalgen im fünftgrößten See Chinas.

b) Maik steckt jeden Monat 10 € in sein Sparschwein.

c) Herr Müller ist in ein Schneeballsystem geraten und verkauft nun Lizenzen für Wasserfilter. Er muss drei Lizenzen verkaufen; die Käufer der Lizenzen müssen wiederum drei Lizenzen verkaufen, um Gewinn zu erzielen.

13 Die Blätter einer Teichseerose bedecken $0{,}5\ m^2$ einer Teichfläche. Nach jeweils 14 Tagen nehmen sie die doppelte Fläche ein.

a) Zeige, dass das Wachstum durch die Funktionsgleichung $f(x) = 0{,}5 \cdot 2^x$ beschrieben werden kann. Setze 14 Tage als eine Zeiteinheit.

b) Welche Fläche bedecken die Seerosenblätter nach 35 Tagen?

c) Nach wie vielen Tagen wäre ein Teich von $10\ m^2$ Fläche völlig zugewachsen?

14 Gegeben sind die Funktionen $f_1(x) = a^x$ und $f_2(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

a) Zeige, dass gilt: $f_1(-x) = f_2(x)$.

b) Beschreibe die Lage beider Funktionsgraphen zueinander.

15 Die Tabelle zeigt die Weltbevölkerung seit 1960 in Milliarden.

1960	1970	1980	1990	2000	2010
3,00	3,58	4,38	5,23	6,12	6,90

a) Zeige, dass das Wachstum annähernd exponentiell durch $f(x) = a \cdot b^x$ beschrieben werden kann. Verwende zur Bestimmung von a und b die Jahre 1960 und 2010.

b) Bestimme den Wert für 2015 mit dem Taschenrechner. Gib die Abweichung vom tatsächlichen Wert 7,29 Mrd. in Prozent an.

c) Gib für 2020 und 2030 die zu erwartenden Bevölkerungszahlen an. Kann das Modell auch für das Jahr 2100 verwendet werden? Berechne und begründe.

16 a) Erstelle für jede Funktion eine Wertetabelle für $x \in [-5; 5]$ mit Schrittweite $\Delta x = 1$.

$f_3(x) = 1 \cdot 0{,}5^x$ $\quad$ $f_4(x) = 2 \cdot 0{,}5^x$ $\quad$ $f_1(x) = 0{,}25 \cdot 0{,}5^x$

$f_5(x) = 4 \cdot 0{,}5^x$ $\quad$ $f_2(x) = 0{,}5 \cdot 0{,}5^x$

b) Vergleiche die Funktionswerte zu den Funktionen aus a). Beschreibe Zusammenhänge, die du erkennst. Überprüfe die Zusammenhänge an weiteren Beispielen mit einem Computerprogramm.

17 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ verläuft durch die Punkte A und B. Bestimme die Parameter a und b.

a) A (0|3); B (1|1,2) $\quad$ **b)** A (0|0,5); B (1|2)

c) A (2|12); B (5|96) $\quad$ **d)** A (1|6); B (3|24)

18 Löse die Exponentialgleichungen mit einem Verfahren deiner Wahl.

a) $6^x + 12 = 24$ $\quad$ **b)** $2{,}5^{x+1{,}5} - 7{,}5 = -1{,}5$ $\quad$ **c)** $9^{2x-3} + 9 = 19$

d) $0{,}75^x = 0{,}75^{x-2} - 2{,}7$ $\quad$ **e)** $5^{3x+1} - 21 = 125^x$ $\quad$ **f)** $3^{3x+2} = 27^{x-0{,}5} + 134$

19 Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $f_1(x) = 2^{x-3} - 2$.

a) Stelle die Funktion im Intervall für $x \in [-3; 7]$ grafisch dar und gib die Eigenschaften der Funktion an.

b) Ermittle rechnerisch die Gleichung der Umkehrfunktion $\bar{f}_1$ der Funktion f_1, gib ihre Eigenschaften an und zeichne ihren Graphen ein.

c) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen mit den Koordinatenachsen .

d) Überprüfe rechnerisch, ob sich die Graphen der Funktion $\bar{f}_1$ und der Funktion f_2 mit der Gleichung $f_2(x) = \log_2(x - 1) + 5$ schneiden.

20 Benjamin hat einige Terme und Gleichungen mit Potenzen bearbeitet. Überprüfe die Lösungen und berichtige sie gegebenenfalls.

a) $\log_3 x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 3$ $\quad$ b) $2^4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$

c) $4^x = 4096 \Leftrightarrow \log_4 4096 = x = 6$ $\quad$ d) $x^4 = \frac{625}{16} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \pm 2{,}5$

e) $\log_2 x = 64 \Leftrightarrow x^2 = 64 \Leftrightarrow x = \pm 8$ $\quad$ f) $3^x = 64 \Leftrightarrow x = 64^{\frac{1}{3}} = 4$

21 Aus einer Amöbenzelle entstehen durch Zellteilung neue Zellen. Ihre Anzahl verdoppelt sich pro Tag.

a) Wie viele Zellen können in fünf Tagen (30 Tagen) aus einer Amöbe entstehen?

b) Durch welche Funktion f kann der Vorgang beschrieben werden, wenn zu Beginn drei Amöben vorhanden sind?

c) Tabellarisiere f für $x \in [0; 9]$ mit Schrittweite $\Delta x = 1$ und zeichne den zugehörigen Graphen (x-Achse: 1 cm ≙ 1 Tag; y-Achse: 1 cm ≙ 200 Amöben).

d) Berechne, nach wie vielen Tagen mehr als 1000 Amöben entstanden sind. Wie viele Amöben gibt es nach 14 Tagen? Kontrolliere grafisch.

22 Der pH-Wert gibt an, wie hoch die Konzentration c an Hydroniumionen (H_3O^+) in einem Stoff ist. Er errechnet sich gemäß: pH-Wert = –log c .

c	10^{-0}				10^{-4}			10^{-7}			10^{-10}				10^{-14}
pH	0				4			7			10				14

a) Begründe, dass die pH-Werte positiv sind, obwohl der pH-Wert mithilfe des negativen dekadischen Logarithmus berechnet wird.

b) Wasser hat einen pH-Wert von 7. Die Haut schützt sich mithilfe des sogenannten Säureschutzmantels, der einen pH-Wert von 5,5 aufweist. Berechne, um das Wievielfache die Konzentration an Hydroniumionen auf der Haut im Vergleich zu Wasser höher ist.

23 In der Nuklearmedizin werden dem Körper zur Erkennung von Krankheiten radioaktive Isotope zugeführt. Häufig wird das schwach strahlende Technetium-99m verwendet, da es eine Halbwertszeit von nur 6 Stunden aufweist.

a) Über eine Injektion werden einem Menschen 1,5 mg Technetium-99m zugeführt. Bestimme, nach wie vielen Stunden das radioaktive Isotop auf 5 % seiner ursprünglichen Menge zerfallen ist.

b) Stelle den Zerfall von 1,5 mg Technetium-99m in einem Diagramm dar.

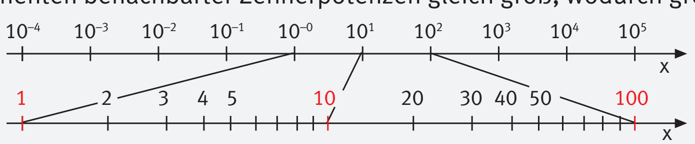
c) Begründe, dass in Wirklichkeit die Menge an Technetium-99m im menschlichen Organismus schneller reduziert wird, als berechnet.

Wissen

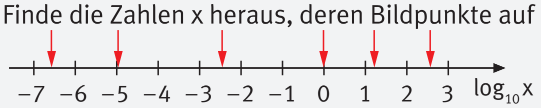
Logarithmische Skalen

Auf einer „normalen“ Zahlengerade sind die Abstände zwischen benachbarten ganzen Zahlen gleich groß.

Exponentielle Abhängigkeiten lassen sich besser in einem Koordinatensystem mit logarithmischer Skala darstellen. Wählt man bei der *logarithmischen* Skala z. B. die Basis 10, sind die Abstände zwischen den Exponenten benachbarter Zehnerpotenzen gleich groß, wodurch größere Zahlen darstellbar sind.



- Finde die Zahlen x heraus, deren Bildpunkte auf der logarithmischen Skala markiert sind.



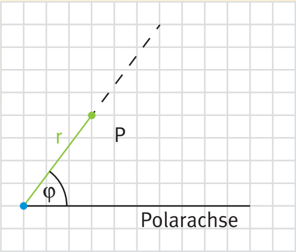
- Fertige ein halblogarithmisches Koordinatensystem an, d. h. die x-Achse weist eine lineare und die y-Achse eine logarithmische Skaleneinteilung auf. Zeichne anschließend die Funktion f mit $f(x) = 3^x$ in das Koordinatensystem. Beschreibe, was dir auffällt.

Archimedische Spirale

Viele Wachstumsprozesse, die in der Natur stattfinden, lassen unglaubliche Formen entstehen. Manche davon scheinen der Struktur einer Spirale zu folgen.

Solche Spiralen kann man auch im mathematischen Sinne als Wachstumsprozesse auffassen: Man dreht einen Punkt (mehrfach) um ein Drehzentrum und vergrößert dabei gleichzeitig den Abstand zum Drehzentrum immer weiter.

Zur Beschreibung von Spiralen nutzt man wegen der Drehung meist Polarkoordinaten. Den Ursprung des **Polarkoordinatensystems** bezeichnet man als **Pol**. Zusätzlich definiert man eine feste Richtung. Der von dieser Richtung im Pol entspringende Strahl wird auch **Polarachse** genannt.



Jeder Punkt im Polarkoordinatensystem wird durch seinen Abstand r zum Pol und den Winkel φ (im Bogenmaß und gegen den Uhrzeigersinn) zur Polarachse beschrieben. Ein Punkt P $(r \mid \varphi)$ mit den Koordinaten $(5 \mid 0{,}93)$ ist demnach 5 LE vom Pol entfernt und liegt auf einem gedachten Strahl im 53°-Winkel zur Polarachse.

Für die Umrechnung von Gradmaß und Bogenmaß gilt:

$$\text{Gradmaß} = \text{Bogenmaß} \cdot \frac{180°}{\pi}$$
$$\text{Bogenmaß} = \text{Gradmaß} \cdot \frac{\pi}{180°}$$

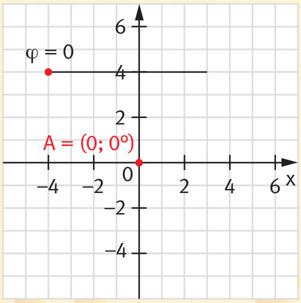
a) Eine archimedische Spirale (auch arithmetische Spirale genannt) ist die einfachste Spirale, die man selbst zeichnen kann. Dabei entspricht jeder Abstand eines Punktes zum Pol dem Winkel im Bogenmaß. Damit liegen diese Punkte P_1 $(1 \mid 1)$, P_2 $(2 \mid 2)$, P_3 $(3 \mid 3)$, … auf der Spirale.
Zeichne diese Spirale. Rechne ggf. die Winkel in das Gradmaß um.

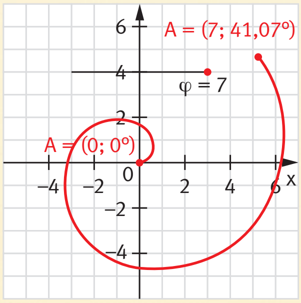
b) Die Punkte $(a \cdot \varphi \mid \varphi)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ liegen auf archimedischen Spiralen. Wähle für den Parameter $a = 2$ $(a = 4;\ a = 0{,}5)$ und zeichne die Spiralen.

Zeichnen von Spiralen mit dynamischer Geometriesoftware

Man kann mithilfe von dynamischer Geometriesoftware auch Spiralen zeichnen – allerdings muss das Programm die Punkte in Polarkoordinaten anzeigen und verarbeiten können.

Lege einen Schieberegler an. Definiere ihn zunächst für positive Zahlen und wähle die Abstände sehr klein (z. B. 0,01). Später kannst du den Bereich sowie die Abstände auch noch nachregeln.
Definiere einen Punkt auf dem Geometrieblatt mit den Polarkoordinaten (φ; φ) (kenntlich beispielsweise durch einen Strichpunkt). Durch Verändern des Schiebereglers ändert sich nun auch die Position des Punktes A.
Besonders eindrucksvoll wird die Spirale, wenn du die Spur des Punktes noch einblendest.





a) Zeichne die Spiralen aus den Aufgaben a) und b) der Vorseite und vergleiche sie mit deinen handschriftlichen Zeichnungen.

b) Wähle $-4{,}7 \leqq \varphi \leqq 4{,}7$. Welcher Figur gleicht die Bahn?

Logarithmische Spirale – spira mirabilis

Große Aufmerksamkeit findet in der Mathematik die logarithmische Spirale. Aufgrund ihrer vielen einzigartigen Eigenschaften wurde sie vom Mathematiker Jakob Bernoulli auch *spira mirabilis* („die wundersame Spirale") genannt.

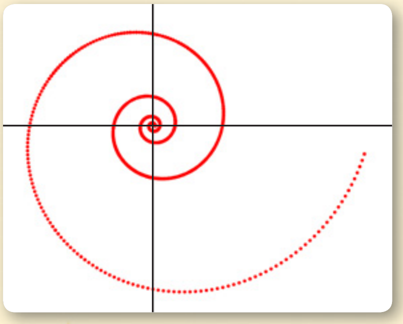
Bei der logarithmischen Spirale wächst der Abstand r exponentiell mit dem Bogenmaß φ. Damit ergibt sich die folgende Gleichung für die logarithmische Spirale:
$r = a \cdot q^{\varphi}$ mit $a > 0$; $q > 0$; φ im Bogenmaß.

a) Finde heraus, für welches q die logarithmische Spirale einen Kreis ergibt.

b) Zeichne mit einem dynamischen Geometrieprogramm die logarithmische Spirale mit den Parametern $a = 1$ und $q = 1{,}2$ ($a = 0{,}5$ und $q = 2{,}1$).

c) Für die *spira mirabilis* gilt unter anderem:
   - Die Spirale umkreist den Pol des Koordinatensystems unendlich oft, ohne ihn zu erreichen. Der Ursprung ist somit ein asymptotischer Punkt.
   - Der Radius wächst mit jeder Windung um einen konstanten Faktor.

   Überprüfe, welche dieser Eigenschaften der *spira mirabilis* auch auf die archimedische Spirale zutreffen.



Überprüfe deine Fähigkeiten und Kenntnisse. Bearbeite dazu die folgenden Aufgaben und bewerte anschließend deine Lösungen mit einem Smiley.

☺	😐	☹
Das kann ich!	Das kann ich fast!	Das kann ich noch nicht!

Hinweise zum Nacharbeiten findest du auf der folgenden Seite. Die Lösungen stehen im Anhang.

Aufgaben zur Einzelarbeit

1 Begründe, ob es sich um lineares oder exponentielles Wachstum handelt.

a) Ein Riesenbambus wächst unter guten Bedingungen bis zu 70 cm pro Tag.

b) Jedes Jahr steigt der Bambuspreis um ca. 5 %.

2 Der Graph einer Exponentialfunktion der Form $f(x) = b^x$ verläuft durch den Punkt P. Bestimme b.

a) $P(5 \mid 1024)$ **b)** $P(0{,}5 \mid \sqrt{2})$

3 Gegeben ist die Funktion mit $f(x) = 0{,}5^x$.

a) Zeichne den Graphen der Funktion in ein Koordinatensystem.

b) Spiegle die Funktion f an der y-Achse und gib die Funktionsgleichung der entstandenen Funktion g an.

c) Spiegle die Funktion f an der x-Achse und verschiebe sie anschließend entlang der y-Achse um 3 LE nach oben. Gib die Funktionsgleichung der entstandenen Funktion h an.

4 Gib den Definitions- und Wertebereich, die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, die Monotonie sowie das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ der folgenden Funktionen an. Kontrolliere mit einem Computerprogramm.

a) $f(x) = 4 \cdot 0{,}5^x$ **b)** $f(x) = -4 \cdot 0{,}5^x$

c) $f(x) = 2^x - 4$ **d)** $f(x) = 0{,}5 \cdot 2^x + 3$

e) $f(x) = -5^x + 125$ **f)** $f(x) = 2^{x-3}$

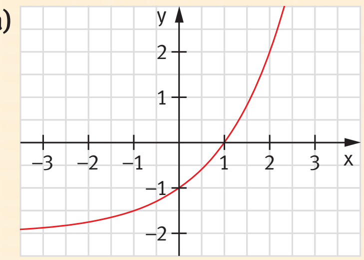
5 Berechne.

a) $\log_4 512$ **b)** $\log_3 3187$ **c)** $\log_6 36^5$

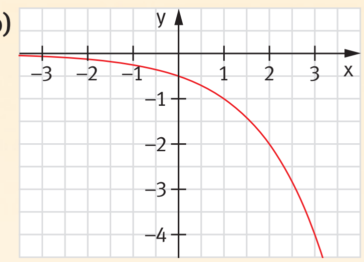
d) $\log_{0,5} 81$ **e)** $\lg 10\,000$ **f)** $\lg 10^{1,5}$

6 Gib die Funktionsgleichungen der Graphen der Form $f(x) = a \cdot 2^x + c$ an.

a)



b)



7 Kobalt-60 hat eine Halbwertszeit von 5 Jahren. In einen Container werden 12 t des radioaktiven Elements eingelagert. Wie viel Kobalt-60 sind nach 5 (10, 15, 30, 100) Jahren noch vorhanden?

8 Eine spezielle Alge verdoppelt ihren Bestand innerhalb von 12 Stunden.

a) Wann befinden sich mehr als 1 Million Algen im Teich, wenn es zu Beginn 50 Algen sind?

b) Gib eine Funktionsgleichung an, die diese Situation beschreibt.

c) Erkläre, dass das Wachstum von Algen in einem Teich nur zeitweise als exponentiell angenommen werden kann.

9 Skizziere zu jedem der Texte einen Graphen.

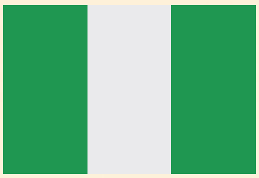
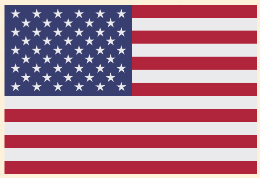
a) Eine Pinguinkolonie wächst zunächst exponentiell an, dann nimmt die Zuwachsrate bis auf null ab.

b) Frau Spar legt wöchentlich 20 € für Weihnachtsgeschenke zurück.

c) Sarah nimmt 10 mg eines Medikaments ein. Im Körper werden täglich 10 % des noch vorhandenen Medikaments abgebaut.

d) Lucas fährt mit dem Rad zum Fußballtraining. Die eine Hälfte des Wegs fährt er mit einer Geschwindigkeit von $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, die andere mit $12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

10 In Nigeria leben 177,5 Millionen Menschen und die Bevölkerung steigt jährlich um 2,5 %. Die USA haben zwar 317,7 Millionen Menschen, die Anzahl wächst aber nur mit einer Rate von 0,4 %.
Bestimme, nach wie vielen Jahren in beiden Ländern die gleiche Anzahl an Menschen lebt, wenn sich die Wachstumsraten nicht ändern.

11 Löse im Kopf ($D = \mathbb{R}$).

a) $2^x = 64$ **b)** $0{,}4^x = 0{,}064$
c) $0{,}3^x = 0{,}027$ **d)** $\log_7 343 = x$
e) $\log_{0,9} 0{,}729 = x$ **f)** $\log_3 243 = x$

12 Frau Meier legt auf ihrem Konto 4000 € zu einem Zinssatz von 1,8 % an.

a) Berechne, wie viel Geld Frau Meier nach 5 (10, 30) Jahren auf ihrem Konto hat.
b) Berechne, nach wie vielen Jahren Frau Meier den ursprünglichen Anlagebetrag vervierfacht hat.

13 In einem See nimmt die Lichtintensität pro Meter Tiefe um 15 % ab. Berechne, bis zu welcher Tiefe eine Kamera, die bis zu einer Lichtintensität von 20 % funktioniert, einsatzfähig ist.

14 Löse die Gleichungen. Kontrolliere mit deinem Computer.

a) $3^x + 12 = 6573$ **b)** $2^{x+1} = 4^3$
c) $\log_5 x = 6$ **d)** $2^x = 3^x$
e) $2^{x+5} = 512$ **f)** $4^{x^2} = 256$

15 Aufgrund der technischen Weiterentwicklung haben Computer eine hohe Wertminderungsrate von etwa 50 % pro Jahr.
Sophie kauft ein Notebook für 1200 €.
Welchen Wert hat es am Ende ihrer Schulzeit, also nach zweieinhalb Jahren?

Aufgaben für Lernparnter

Arbeitsschritte

1. Bearbeite die folgenden Aufgaben alleine.
2. Suche dir einen Partner und erkläre ihm deine Lösungen. Höre aufmerksam und gewissenhaft zu, wenn dein Partner dir seine Lösungen erklärt.
3. Korrigiere gegebenenfalls deine Antworten und benutze dazu eine andere Farbe.

Sind folgende Behauptungen **richtig** oder **falsch**? Begründe schriftlich.

16 Exponentialfunktionen haben genau einen Schnittpunkt mit der x-Achse.

17 Die Funktion mit der Gleichung $y = 2 \cdot 1^x$ ist eine spezielle Exponentialfunktion.

18 Wachstumsprozesse sind entweder linear oder exponentiell.

19 Spiegelt man eine Funktion mit $f(x) = b^x$ ($b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) an der x-Achse, so erhält man eine Logarithmusfunktion.

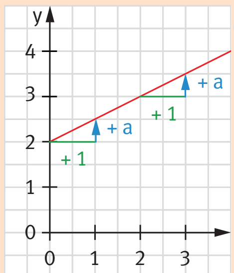
20 Jede exponentielle Funktion der Form $f(x) = b^x$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ schneidet die y-Achse im Punkt $P(0|1)$.

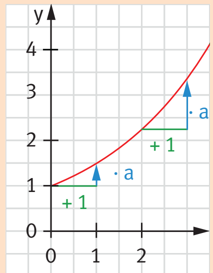
21 Exponentielles Wachstum bedeutet, dass sich ein Wert in gleichen Zeiteinheiten um jeweils denselben Faktor vervielfacht.

22 Die Graphen der Funktionen $f(x) = 9^x$ und $f(x) = 9 \cdot 3^x$ sind kongruent und lassen sich durch Verschiebung aufeinander abbilden.

Aufgabe	Ich kann …	Hilfe
1, 2, 3, 18, 20	Exponentialfunktionen erkennen.	S. 130, 132
4, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 17, 20, 22	Eigenschaften von Exponentialfunktionen beschreiben.	S. 132, 134
5, 11, 18	den Logarithmus und seine Eigenschaften nutzen.	S. 138, 142
10, 12, 13, 14	Exponentialgleichungen aufstellen und lösen.	S. 146

S. 130

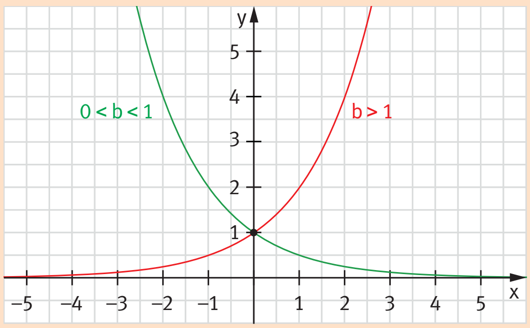
1


2


Wachstumsprozesse

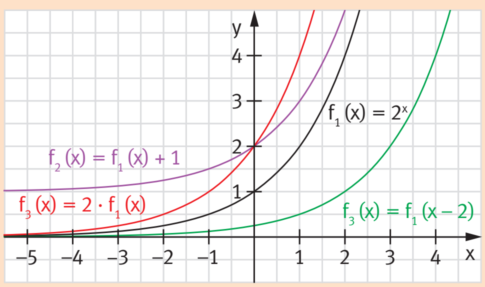
Beim **linearen Wachstum** 1 nimmt der Bestand in gleichen Zeiträumen um den gleichen Summanden zu.
Beim **exponentiellen Wachstum** 2 wird der Bestand in gleichen Zeiträumen mit demselben Faktor multipliziert.

S. 132
S. 134



Exponentialfunktion

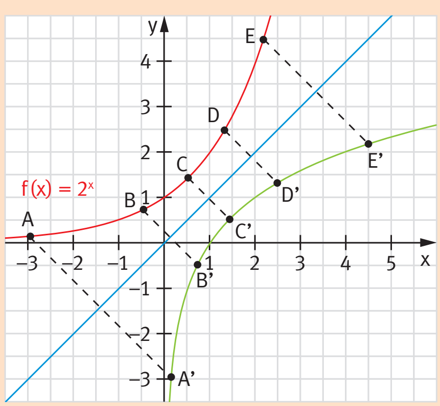
Eine Funktion der Form $f(x) = b^x$ ($b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $x \in \mathbb{R}$) nennt man **Exponentialfunktion** mit **Wachstumsfaktor** b.



Die allgemeine Form für Exponentialfunktionen lautet:
$f(x) = a \cdot b^{x-d} + c$ ($b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $a, c, d, x \in \mathbb{R}$).
Durch den Parameter …

- a ($a \neq 0$) wird der Graph der Funktion gestaucht oder gestreckt bzw. an der y-Achse gespiegelt.
- c wird der Funktionsgraph entlang der y-Achse verschoben.
- d wird der Graph der Funktion entlang der x-Achse verschoben.

S. 138
S. 142



Logarithmus / Logarithmusfunktion

Eine **Umkehrung des Potenzierens** ist das **Logarithmieren**.

Der Exponent in der Gleichung $\mathbf{b^c = a}$ heißt **Logarithmus von c zur Basis b** ($a, b \in \mathbb{R}^+$; $b \neq 1$, $c \in \mathbb{R}$): $c = \log_b a$.

Die **Logarithmusfunktion** $f(x) = \log_b x$ ist die **Umkehrfunktion der Exponentialfunktion** $f(x) = b^x$.

S. 146

Die Exponentialgleichung $1{,}5^{x-2} = 1$ hat $L = \{2\}$, denn $1{,}5^{2-2} = 1$.

Exponentialgleichungen

Eine **Exponentialgleichung** ist eine Gleichung, bei der die Variable nur im Exponenten auftritt. Sie kann rechnerisch oder grafisch gelöst werden.

Lineare Gleichungen und Ungleichungen

1 Löse folgende (Un-)Gleichungen ($D = \mathbb{Q}$).

a) $3g - 7 = g - 1 + 2 \cdot (g + 4)$

b) $2x + (x + 9) \cdot 2 = 2 \cdot (x + 1)$

c) $(x - 7) \cdot (x + 7) = x^2 + 4x - 5$

d) $(-1)^3 \cdot x - (-3)^2 - 7x \leqq 5^2x + 5 - 2{,}5^2 + 107{,}75$

e) $2 \cdot (x + 3)^2 - (x - 1) \cdot 2x - 8 \cdot (2x - 3) > 16$

2 Ergänze im Heft die fehlenden Terme ($D = \mathbb{Z}$).

$(x + \square)^2 - x^2 = (x - 4)^2 - x \cdot (\square + \square)$

$\square + 6x + \square - x^2 = x^2 - \square + 16 - x^2 - 7x$

$6x + \square = -8x + \square - 7x$

$6x + \square = \square + 16$

$21x = \square$

$x = \square$

$L = \square$

3 Löse mithilfe einer passenden Gleichung ($D = \mathbb{Q}$).

a) Subtrahiert man vom Fünffachen einer Zahl das Zweifache der um 4 verminderten Zahl, so erhält man das Achtfache der um 10 verminderten Zahl.

b) Verkürzt man die eine Seite eines Quadrates um 3 cm und verlängert gleichzeitig die andere Seite um 5 cm, so wird der Flächeninhalt des entstehenden Rechtecks um 10 cm² größer als der des ursprünglichen Quadrates.

4 Ein Vertreter fährt an drei Tagen insgesamt 441 km. Am 2. Tag fährt er doppelt so weit wie am 1. Tag und am 3. Tag 36 km weiter als am 2. Tag. Berechne mithilfe einer passenden Gleichung, wie viele km er an den einzelnen Tagen fährt ($D = \mathbb{N}$).

5 Bestimme die Lösungsmenge.

a) $\frac{x + 3}{5x} = \frac{2}{3}$ **b)** $\frac{1}{x} = \frac{2}{6 - x}$

c) $\frac{3x - 4}{3x - 6} = \frac{2x + 5}{2x - 4}$ **d)** $\frac{2\,(x - 4) \cdot (x + 7)}{x^2 - 8x + 16} = \frac{4}{7}$

Flächeninhalt ebener Figuren

16 Berechne die fehlende Größe im Dreieck ABC.

a) $c = 4{,}5$ cm; $h_c = 5$ cm $A = \square$

b) $A = 25$ m²; $h_a = 6{,}2$ m $a = \square$

c) $a = 4$ m; $b = 6$ m; $\gamma = 90°$ $A = \square$

d) $A = 128$ cm²; $b = 75$ cm $h_b = \square$

17 Berechne den Flächeninhalt des Vierecks.

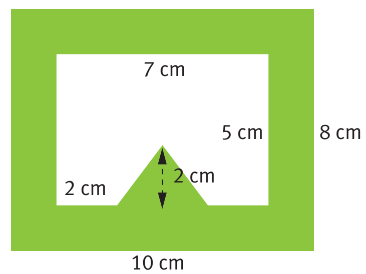
a) Trapez mit $a = 6$ cm; $c = 2a$; $h = 0{,}5a$ und $a \parallel c$

b) Drachenviereck mit $e = 6{,}3$ cm und $f = 8{,}4$ cm

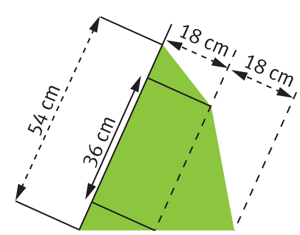
c) Raute mit $e = 0{,}5$ m und $f = 4{,}4$ dm

18 Berechne den Flächeninhalt der gefärbten Figuren.

a)



b)



19 Zeichne die Figuren und bestimme ihren Flächeninhalt mithilfe von Vektoren.

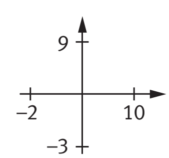
a) Dreieck ABC mit A (–2|–1); B (6,5|1,5); C (0,5|8)

b) Viereck ABCD mit A (–3|0); B (8|1); C (5|8); D (1|7)

c) Fünfeck ABCDE mit A (–3|–4,5); B (8,4|1); C (5|8,3); D (1|7) und E (–1,2|9,6)

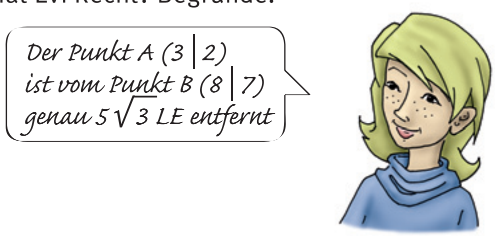
20 Bestimme x so, dass das Dreieck ABC_1 einen Flächeninhalt von 22,5 FE besitzt. Zeichne anschließend das Dreieck und die Gerade g ein.

g: $y = 0{,}5x + 3{,}5$; ΔABC_n mit A (–1|–2); B (6|0,5) und C (x|0,5x + 3,5) $\in$ g

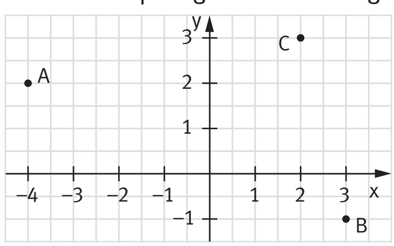


Berechnungen im Koordinatensystem

10 Hat Evi Recht? Begründe.



11 Bestimme denjenigen der drei Punkte A, B oder C, der vom Ursprung die Entfernung $\sqrt{13}$ LE hat.



12 Überprüfe rechnerisch, ob das Dreieck ABC mit A (0 | 3), B (2 | –2) und C (7 | 0) rechtwinklig ist. Gib gegebenenfalls an, wo der rechte Winkel liegt.

13 Das Dreieck ABC wird durch zentrische Streckung mit dem Zentrum Z $(2 | y_Z)$ und dem Streckungsfaktor k auf das Dreieck A'B'C' abgebildet. Die Punkte C und Z liegen auf g: $y = x - 1$ $(x, y \in \mathbb{R})$.
Es gilt: A (2 | 3); B (4 | 1); C $(4 | y_C)$; A' (2 | 6)

a) Zeichne die Dreiecke ABC und A'B'C' und bestimme die fehlenden Bildpunkte B' und C'.

b) Berechne den Streckungsfaktor k.

c) Berechne die Flächeninhalte von Urdreieck und Bilddreieck.

14 Von einem Dreieck ABC_n kennt man die Eckpunkte A (–2 | –1) und B (4 | 0,5). Die Punkte C_n (x | y) liegen auf g: $y = -0{,}5x + 4$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

a) Zeichne g und das Dreieck ABC_1 für x = 4 in ein Koordinatensystem.

b) Welche Werte von x sind zulässig?

c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC_1.

d) Bestimme den Flächeninhalt A der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit von x.
Bestätige hiermit auch den Wert aus c).

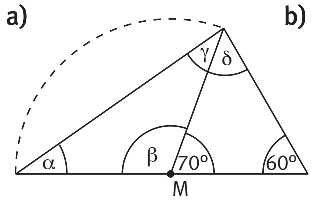
e) Für welchen Wert von x erhält man einen Flächeninhalt von A = 9 FE (A = 15,75 FE)?

Besondere Dreiecke

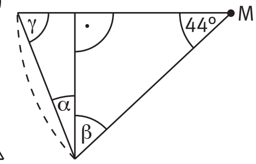
15 Welche Dreiecksarten lassen sich in Bezug auf Seitenlängen (auf Winkelmaße) unterscheiden?

16 Bestimme die fehlenden Winkelmaße.

a)



b)



17 Welche der Aussagen sind für das nebenstehende Dreieck wahr, welche falsch?

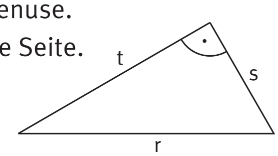
a) Die Seite t ist eine Kathete.

b) Die Seite r ist die Hypotenuse.

c) Die Seite r ist die längste Seite.

d) $t^2 + s^2 = r^2$

e) $s = \sqrt{r} - \sqrt{t}$



18 Konstruiere mithilfe des Thaleskreises ein rechtwinkliges Dreieck ABC, für das gilt:
c = 6 cm; a = 4 cm; γ = 90°

19 Gegeben ist ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC mit c = 8 cm. Ferner gilt: $\overline{AC} = x$ cm mit $x \in \mathbb{R}^+$.

a) Zeige, dass gilt: $0 < x < 8$.

b) Stelle den Flächeninhalt A des Dreiecks in Abhängigkeit von x dar.

c) Welcher Flächeninhalt ergibt sich für x = 5?

20 Was lässt sich über die Flächeninhalte der Dreiecke AFB, BDC und CEA aussagen?