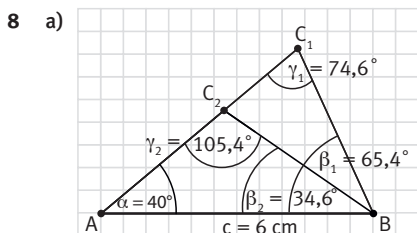


Lösungen zu „1.11 Das kann ich!“ – Seite 28

- 1 a) $\sin \alpha = 0,53$ $\cos \alpha = 0,85$ $\tan \alpha = 0,62$
 b) $\sin \alpha = 0,28$ $\cos \alpha = 0,96$ $\tan \alpha = 0,29$
- 2 a) $a \approx 5,9$ cm; $c \approx 6,5$ cm b) $c \approx 426,9$ m; $b \approx 408,2$ m
 c) $b \approx 0,8$ km; $c \approx 1,6$ km d) $b \approx 52,5$ mm; $c \approx 58,3$ mm

- 3 a) $\sin \alpha = \frac{5 \text{ m}}{13 \text{ m}} \approx 0,38$ $\sin \beta = \frac{12 \text{ m}}{13 \text{ m}} \approx 0,92$
 $\cos \alpha = \frac{12 \text{ m}}{13 \text{ m}} \approx 0,92$ $\cos \beta = \frac{5 \text{ m}}{13 \text{ m}} \approx 0,38$
 $\tan \alpha = \frac{5 \text{ m}}{12 \text{ m}} \approx 0,42$ $\tan \beta = \frac{12 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 2,4$
- b) $\sin \alpha = \frac{7,7 \text{ cm}}{8,5 \text{ cm}} \approx 0,91$ $\sin \beta = \frac{3,6 \text{ cm}}{8,5 \text{ cm}} \approx 0,42$
 $\cos \alpha = \frac{3,6 \text{ cm}}{8,5 \text{ cm}} \approx 0,42$ $\cos \beta = \frac{7,7 \text{ cm}}{8,5 \text{ cm}} \approx 0,91$
 $\tan \alpha = \frac{7,7 \text{ cm}}{3,6 \text{ cm}} \approx 2,14$ $\tan \beta = \frac{3,6 \text{ cm}}{7,7 \text{ cm}} \approx 0,47$

- 4 a) $\alpha \approx 11,9^\circ$; $\beta \approx 78,1^\circ$ b) $\alpha \approx 78,7^\circ$; $\beta \approx 11,3^\circ$
 c) $\alpha \approx 14,5^\circ$; $\beta \approx 75,5^\circ$ d) $\alpha \approx 36,9^\circ$; $\beta \approx 53,1^\circ$
 e) $\alpha \approx 18,7^\circ$; $\beta \approx 71,3^\circ$ f) $\alpha \approx 62,2^\circ$; $\beta \approx 27,4^\circ$
 g) $\alpha \approx 21,8^\circ$; $\beta \approx 68,2^\circ$ h) $\alpha \approx 44,4^\circ$; $\beta \approx 45,6^\circ$
 i) $\alpha = \beta = 45^\circ$
- 5 a) $\alpha = 17^\circ$; $\beta = 73^\circ$ b) $\alpha = 54^\circ$; $\beta = 36^\circ$
 c) $\alpha = 56^\circ$; $\beta = 34^\circ$ d) $\alpha = 72^\circ$; $\beta = 18^\circ$
 e) $\alpha = 48^\circ$; $\beta = 42^\circ$ f) $\alpha = 32^\circ$; $\beta = 58^\circ$
- 6 a) nicht rechtwinklig b) rechtwinklig mit $\alpha \approx 90^\circ$
- 7 a) $\alpha \approx 75,3^\circ$ b) $\alpha \approx -79,7^\circ$ bzw. $\alpha \approx 280,3^\circ$



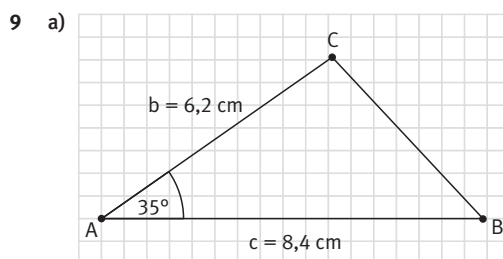
Anwendung des Sinussatzes: $\frac{4 \text{ cm}}{\sin 40^\circ} = \frac{6 \text{ cm}}{\sin \gamma}$
 $\sin \gamma = \sin 40^\circ \cdot \frac{6 \text{ cm}}{4 \text{ cm}}$

Der Zeichnung kann man entnehmen, dass es zwei Lösungen gibt:

$$\gamma_1 \approx 74,6^\circ \quad \Rightarrow \quad \beta_1 \approx 65,4^\circ$$

$$\gamma_2 \approx 180^\circ - \gamma_1 = 105,4^\circ \quad \Rightarrow \quad \beta_2 \approx 34,6^\circ$$

- b) $A_1 = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} \cdot \sin 65,4^\circ \approx 10,9 \text{ cm}^2$
 $A_2 = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} \cdot \sin 34,6^\circ \approx 6,8 \text{ cm}^2$



b) $a \approx 4,9$ cm

10 $a = b = c \approx 10,3$ cm
 $A = \frac{1}{2} a \cdot h_a \approx 45,8 \text{ cm}^2$

11 a) $\alpha = \gamma \approx 53,1^\circ$; $\beta \approx 73,8^\circ$; $h_b = 5,2$ cm
 b) $A = \frac{1}{2} \cdot 7,8 \text{ cm} \cdot 5,2 \text{ cm} \approx 20,3 \text{ cm}^2$
 $A = \frac{1}{2} \cdot (6,5 \text{ cm})^2 \cdot \sin 73,8^\circ \approx 20,3 \text{ cm}^2$

- 12 a) $a \approx 7,4$ dm; $b \approx 4,5$ dm; $\alpha = 61^\circ$
 b) $a \approx 90,8$ cm; $b \approx 48,0$ cm; $\beta = 31^\circ$
 c) $b \approx 12,8$ cm; $c \approx 14,2$ cm; $\alpha = 21,3^\circ$
 d) $c \approx 7,9$ cm; $\beta \approx 35,7^\circ$; $\gamma \approx 79,3^\circ$
 e) $a \approx 10,0$ cm; $\alpha \approx 95,9^\circ$; $\beta \approx 50,9^\circ$

Seite 35

- 13 a) $a \approx 4,4$ cm; $c \approx 5,6$ cm; $\gamma = 61^\circ$
 b) $b \approx 5,0$ cm; $c \approx 5,7$ cm; $\beta = 33^\circ$
 c) $\alpha \approx 54,4^\circ$; $\beta \approx 43,1^\circ$; $\gamma \approx 82,6^\circ$
 d) $b \approx 11,0$ cm; $\beta \approx 83,9^\circ$; $\gamma \approx 39,1^\circ$

14 Seitenhöhe $h_s \approx 8,1$ cm
 Körperhöhe $h \approx 7,7$ cm
 $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h \approx 66,8 \text{ cm}^3$

15 $a \approx 9,5$ cm

16

	a)	b)	c)
a	6,7 cm	6,4 m	4,6 cm
b	6,7 cm	5,8 m	7,0 cm
c	5,9 cm	10,5 m	10,3 cm
α	63,5°	32,3°	22,1°
β	64,1°	29,0°	34,9°
γ	52,4°	118,7°	123,0°

Hinweis: Je nach Rechnung bzw. Rundung können die Ergebnisse variieren.

17 $A \approx 33,5 \text{ cm}^2$

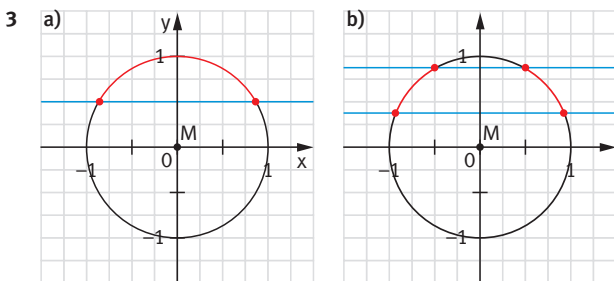
18 a) $A \approx 4,6 \text{ cm}^2$ b) $A \approx 662,7 \text{ mm}^2$ c) $A \approx 16,1 \text{ cm}^2$

19 Das ist richtig.

- 20 Das ist richtig.
- 21 Das ist falsch. Es gilt: $\sin 90^\circ = \cos 0^\circ = 1$. Der Tangenswert eines Winkels kann auch größer als 1 sein.
- 22 Das ist falsch: Sind nur die Winkel gegeben, kann man keinen Flächeninhalt berechnen. Für die Flächenberechnung mithilfe des Sinussatzes benötigt man beispielsweise zwei Seitenlängen und die Größe des eingeschlossenen Winkels.
- 23 Das ist falsch: Der Sinussatz gilt für jede Art von Dreieck. Im Falle eines rechtwinkligen Dreiecks ist der Sinuswert des rechten Winkels 1 ($\sin 90^\circ = 1$), woraus sich die schon zuvor bekannten trigonometrischen Beziehungen bei rechtwinkligen Dreiecken ergeben.
- 24 Das ist falsch: Der Satz des Pythagoras ist vielmehr ein Sonderfall des Kosinussatzes.
- 25 Das ist richtig.

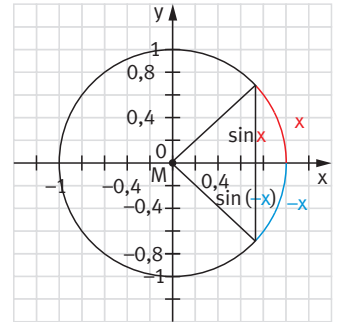
Lösungen zu „2.7 Das kann ich!“ – Seite 62

- 1 Die Werte für das Bogenmaß sind auf zwei Dezimalstellen gerundet.
 - 1 a) $\sin(-375^\circ) = \sin(-165^\circ) = \sin(-15^\circ) = \sin(195^\circ)$
 - b) $-375^\circ \triangleq -6,54$ $-165^\circ \triangleq -2,88$
 $-15^\circ \triangleq -0,26$ $195^\circ \triangleq 3,40$
 - 2 a) $\sin(-315^\circ) = \sin(-225^\circ) = \sin(135^\circ) = \sin(405^\circ)$
 - b) $-315^\circ \triangleq -5,50$ $-225^\circ \triangleq -3,93$
 $135^\circ \triangleq 2,36$ $405^\circ \triangleq 7,07$
 - 3 a) $\sin(-295^\circ) = \sin(65^\circ) = \sin(115^\circ) = \sin(425^\circ)$
 - b) $-295^\circ \triangleq -5,15$ $65^\circ \triangleq 1,13$
 $115^\circ \triangleq 2,01$ $425^\circ \triangleq 7,42$
- 2 a) $x_1 = 0,42$ $x_2 = 2,72$
- b) $x_1 = -1,76$ $x_2 = -1,38$
- c) $x_1 = -1,63$ $x_2 = 1,63$
- d) $x_1 = -1,92$ $x_2 = 1,92$
- e) $x_1 = 0,12$ $x_2 = 3,03$
- f) $x_1 = -2,42$ $x_2 = 2,42$



- 4 a) Man kann beispielhaft einige Werte ausrechnen:
 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6}$
 $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$

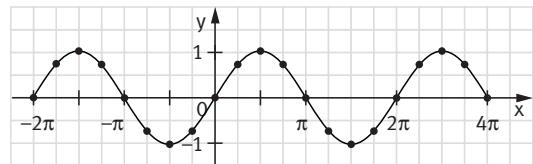
- b) Einer Zeichnung am Einheitskreis kann man entnehmen:
 Die Werte für $\sin x$ und $\sin(-x)$ sind betragsmäßig gleich groß, haben aber unterschiedliche Vorzeichen. Also gilt:
 $\sin(-x) = -\sin x$



- 5 Die Werte für $\sin x$ sind auf zwei Dezimalstellen gerundet.

x	-2π	$-\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\frac{5}{4}\pi$	$-\pi$
sin x	0	0,71	1	0,71	0

x	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	0	usw.
sin x	-0,71	-1	-0,71	0	usw.



Die Nullstellen von $f(x) = \sin x$ sind bei:
 $-2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi; 3\pi; 4\pi$

- 6 a) Periodenlänge 4
- b) Periodenlänge 3
- 7 Lösungsmöglichkeiten:
 - a) Bei einer Kosinusfunktion mit der Gleichung $f(x) = a \cdot \cos x$ beschreibt der Faktor a die Amplitude, also den im Vergleich zu $f(x) = \cos x$ größeren oder kleineren „Ausschlag“ des Funktionsgraphen.
 - b) Bei einer Kosinusfunktion mit der Gleichung $f(x) = \cos(b \cdot x)$ beschreibt der Faktor b, wie die Periode im Vergleich zu $f(x) = \cos x$ verändert ist.
 - c) Bei einer Kosinusfunktion mit der Gleichung $f(x) = \cos(x - d)$ beschreibt der Wert d die Verschiebung des Funktionsgraphen entlang der x-Achse im Vergleich zu $f(x) = \cos x$.
- 8 Der rote Funktionsgraph entsteht aus dem schwarzen der Grundfunktion $f(x) = \sin x$ durch Verschieben entlang der x-Achse. Man erhält als „vorläufigen“ Funktionsterm:
 $f^*(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
 Zusätzlich wird der verschobene Graph noch an der x-Achse gespiegelt und anschließend um den Faktor 2,5 gestreckt, sodass der Funktionsterm lautet:
 $f^{**}(x) = -2,5 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -2,5 \cos x$.

- 9 a) $-\frac{3}{2}\pi; -\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi$ b) keine Nullstellen
 c) $\frac{1}{6}\pi; \frac{5}{6}\pi; \frac{13}{6}\pi; \frac{17}{6}\pi$ d) $-\frac{5}{4}\pi; -\frac{3}{4}\pi; \frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi$

10

Winkel im Gradmaß	0°	15°	20°	135°	75°
Winkel im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$

Seite 63

- 11 a) $f(x) = 2 \cdot \sin x$ b) $f(x) = 2 \cdot \sin(2x)$
 $g(x) = 1,5 \cdot \sin x$ $g(x) = \sin(4x)$
 $h(x) = -0,5 \cdot \sin x$ $h(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

- 12 a) Lösungsmöglichkeit:
 Das Diagramm beginnt im Januar (Sommer auf der Südhalbkugel) mit einer mittleren täglichen Sonnenscheindauer von etwa 8,1 h. Bis zum Winter nimmt dann die Sonnenscheindauer auf etwa 7,4 h ab. Danach nimmt sie wieder zu, bis im Dezember die höchste Sonnenscheindauer von etwa 8,4 h erreicht wird.

- b) Wertetabelle für die Monatsenden (t in d, D in h und f(x) in h):

t	30	60	90	120	150	180
D	8,1	7,7	7,6	7,4	7,4	7,4
f(x)	8,25	8,03	7,78	7,55	7,42	7,41

t	210	240	270	300	330	360
D	7,6	7,7	7,9	8,2	8,3	8,4
f(x)	7,53	7,75	8,00	8,23	8,37	8,39

Auch der größte relative Fehler (im Februar) beträgt nur etwa 4 %: Sophies Term gibt also die Sonnenscheindauer gut wieder.

- 13 Das ist falsch: Die Periode der Sinusfunktion beträgt 2π . Entsprechend wiederholen sich die Werte auch am Einheitskreis erst nach einem ganzen Kreisdurchgang.
- 14 Das ist richtig. Winkelmaß und Bogenmaß lassen sich eindeutig ineinander umrechnen.
- 15 Das ist richtig, ihre Periode ist 2π .
- 16 Das ist falsch: Will man den Graphen der Kosinusfunktion aus dem der Sinusfunktion erhalten, so muss man diesen um $\frac{\pi}{2}$ „nach links“, also in negative x-Richtung, verschieben.
- 17 Das ist richtig. Als Gleichung ausgedrückt bedeutet das: $\cos(-x) = \cos x$.
- 18 Das ist falsch, die Periodenlänge ist bei beiden Funktionen gleich, nämlich 2π . Es ändert sich lediglich die Amplitude, der Funktionsgraph wird gestreckt.
- 19 Das ist falsch, sie hat den Wertebereich $[-1,5; 2,5]$.
- 20 Das ist richtig, denn die eine entsteht aus der anderen durch Verschiebung, wodurch sich die Periode nicht ändert.

Lösungen zu „3.8 Das kann ich!“ – Seite 88

- 1 a) 1 $P(\text{„drei gleichfarbige Kugeln“})$
 $= P(\text{ggg}) + P(\text{rrr}) + P(\text{bbb})$
 $= \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^2 + \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{5}{15}\right)^3 \cdot \left(\frac{10}{15}\right)^2 + \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^3 \cdot \left(\frac{13}{15}\right)^2$
 $\approx 52,3\%$
- 2 $P(\text{„mindestens eine grüne Kugel“})$
 $= 1 - P(\text{„keine grüne Kugel“})$
 $= 1 - \left(\frac{7}{15}\right)^5 \approx 97,8\%$
- 3 $P(\text{„genau drei grüne Kugeln“})$
 $= \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^2 \approx 33,0\%$
 $P(\text{„keine rote Kugel“})$
 $= \left(\frac{10}{15}\right)^5 \approx 13,2\%$
- b) 1 $P(\text{„mindestens eine blaue Kugel“})$
 $= 1 - P(\text{„keine blaue Kugel“})$
 $= 1 - \left(\frac{13}{15}\right)^n \geq 0,6$
 $0,4 \geq \left(\frac{13}{15}\right)^n$

Durch Probieren erhält man, dass Otto mindestens 7-mal ziehen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60% mindestens eine blaue Kugel zu erwischen.

- 2 a) $P_a = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} \cdot \frac{23}{28} = \frac{115}{203} \approx 56,7\%$
 b) $P_b = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} \cdot \frac{5}{28} = \frac{25}{203} \approx 12,3\%$
 c) $P_c = \left(\frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} \cdot \frac{5}{28}\right) \cdot 3 = \frac{75}{203} \approx 36,9\%$
 d) $P_d = \left(\frac{25}{30} \cdot \frac{5}{29} \cdot \frac{4}{28}\right) \cdot 3 = \frac{25}{406} \approx 6,2\%$
 e) $P_e = 1 - P_a \approx 43,3\%$
- 3 $\binom{5}{3} = 10$ $\binom{101}{99} = 101$
 $\binom{16}{2} = 1024$ $2^{10} = 1024$

- 4 Lösungsmöglichkeiten:
- a) Aus einer Urne mit 23 unterscheidbaren Kugeln werden 18 ohne Zurücklegen herausgenommen. Die Reihenfolge der Kugeln wird nicht beachtet. Alternativ kann man die Kugeln auch gleichzeitig entnehmen.
 Beispiel: Der Englischlehrer hat die Liste verlegt, auf der er notiert hat, welche Schüler aus seiner zehnten Klasse Interesse an einem Schüleraustausch bekundet haben. Er erinnert sich, dass es 18 der 23 Schüler waren. Es gibt insgesamt $\binom{23}{18}$ Möglichkeiten.
- b) Aus einer Urne mit 8 unterscheidbaren Kugeln werden 15 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
 Beispiel: Die acht Nachtwächter einer Firma lösen 15 Wochen nacheinander aus, wer den Bereitschaftsdienst am Wochenende übernehmen muss. Dann gibt es 8^{15} verschiedene Reihenfolgen für die 15 Wochenenden.
- c) Aus einer Urne mit 65 unterscheidbaren Kugeln werden 11 Kugeln ohne Zurücklegen entnommen. Die Reihenfolge wird notiert.
 Beispiel: Zwei fünfte Klassen mit insgesamt 65 Kindern haben zusammen Mittagspause. 11 Kinder stellen sich hintereinander in die Schlange der Schulmensa. Wenn man nicht weiß, welche der Kinder in der Schlange stehen, gibt es $65 \cdot 64 \cdot \dots \cdot 56 \cdot 55 = \frac{65!}{54!}$ mögliche Reihenfolgen für diese Schlange.

$$5 \quad P(\text{„Augenzahl größer als 4“}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$a) P_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27} \approx 15 \%$$

$$b) P_b = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \approx 44 \%$$

$$c) P_c = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27} \approx 70 \%$$

$$d) P_d = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{27} \approx 70 \%$$

$$e) P_e = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \approx 4 \%$$

$$f) P_f = 1 - P_c = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \approx 30 \%$$

$$6 \quad a) P_a = 1 - 0,4^4 \approx 97 \%$$

$$b) P_b = 0,4^4 + 4 \cdot 0,6 \cdot 0,4^3 \approx 18 \%$$

$$c) P_c = 4 \cdot 0,6 \cdot 0,4^3 \approx 15 \%$$

$$d) P_d = 0,6 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6 \approx 6 \%$$

$$e) P_e = 4 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4 \approx 35 \%$$

$$1 - 0,4^n \geq 0,90$$

$$-0,4^n \geq -0,10$$

$$0,4^n \leq 0,10$$

Durch Probieren erhält man, dass Lucas mindestens 3 Elfmeter schießen muss.

- 7 Für jeden der beiden weiteren Buchstaben gibt es 26 Möglichkeiten. Für die vierstellige Nummer gibt es pro Ziffer 10 Möglichkeiten. Damit gibt es zunächst

$$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^2 \cdot 10^4 = 6\,760\,000$$

mögliche Kombinationen. Die Kombinationen „KZ“, „SS“, „SA“ sind nicht zulässig. Damit folgt, dass es im Hochtaunus 6 759 997 Autokennzeichen gibt.

$$8 \quad a) \binom{35}{5} = 324\,632$$

$$b) \frac{1}{\binom{35}{5}} = \frac{\binom{5}{5} \cdot \binom{30}{0}}{\binom{35}{5}} = \frac{1 \cdot 1}{324\,632} \approx 3,08 \cdot 10^{-6}$$

$$c) \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{30}{2}}{\binom{35}{5}} = \frac{10 \cdot 435}{324\,632} \approx 0,014$$

$$d) \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{30}{5}}{\binom{35}{5}} = \frac{1 \cdot 142\,506}{324\,632} \approx 0,439$$

Seite 89

- 9 a) Beim Laplace-Tetraederwürfel wird jede der Ziffern 1 bis 4 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewürfelt, also mit $\frac{1}{4} = 0,25$.

- 1 X: „Anzahl der gewürfelten Ziffer ‚3‘ bei 20 Ergebnissen“

$$P(X = 6) = \binom{20}{6} \cdot 0,25^6 \cdot 0,75^{14} \approx 16,9 \%$$

- 2 Y: „Anzahl gerader Ziffern bei 20 Ergebnissen“

$$P(Y = 10) = \binom{20}{10} \cdot 0,5^{10} \cdot 0,5^{10} \approx 17,6 \%$$

- 3 Z: „Anzahl der gewürfelten Ziffer ‚4‘ bei 20 Ergebnissen“

$$P(Z \geq 5) = 1 - P(Z < 5) = 1 - P(Z) \leq 4 \approx 58,5 \%$$

$$b) \text{Es gibt } \frac{20!}{6! \cdot 7! \cdot 3! \cdot 4!} = 4\,655\,851\,200 \text{ Möglichkeiten.}$$

$$c) P(\text{„mindestens eine Vier“}) = 1 - P(\text{„keine Vier“})$$

$$= 1 - 0,75^n \geq 0,9$$

$$0,1 \geq 0,75^n$$

Durch Probieren erhält man $n \geq 9$.

$$10 \quad n = 10 \quad p = \frac{1}{3}$$

X: „Anzahl der gewürfelten ungeraden Primzahlen bei 10 (allgemein n) Würfeln.“

$$a) P(X = 1) = \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \approx 0,08671 \approx 8,7 \%$$

$$\text{allgemein: } P(X = 1) = \binom{n}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = n \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$b) P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0,98266 \approx 98,3 \%$$

$$\text{allgemein: } P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$c) P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0,10405 \approx 10,4 \%$$

allgemein:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + n \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

- 11 Das ist falsch:

$$\frac{n!}{(n-7)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-5) \cdot (n-6) \cdot (n-7) \cdot (n-8) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-7) \cdot (n-8) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-6) \text{ oder}$$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-8) =$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-8) \cdot (n-9) \cdot (n-10) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-9) \cdot (n-10) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

- 12 Das ist richtig. Im Wort TITICACASEE gibt es fünf Buchstaben, die jeweils doppelt vorkommen, und das S, das einmal vorkommt. Also gibt es

$$\frac{11!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{11!}{(2!)^5} = \frac{11!}{2^5} = \frac{11!}{32} = 1\,247\,400 \text{ Möglichkeiten.}$$

- 13 Das ist falsch. Beim zweimaligen Würfelwurf ist nicht jede Augensumme gleich wahrscheinlich. Beispielsweise ist $P(\text{Augensumme } 2) = \frac{1}{36}$ und $P(\text{Augensumme } 4) = \frac{3}{36}$.

- 14 Das ist richtig, denn $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$.

- 15 Das ist falsch.

$$P(\text{„mindestens ein Aufkleber“}) = 1 - P(\text{„kein Aufkleber“})$$

$$1 - \left(\frac{5}{7}\right)^n \geq 0,9$$

$$0,1 \geq \left(\frac{5}{7}\right)^n$$

Durch Probieren ergibt sich, dass es genügt, 7 Riegel zu kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einen Aufkleber zu erhalten.

$$16 \quad a) \text{Das ist richtig: } \binom{56}{12} = \frac{56!}{12! \cdot (56-12)!} = \frac{56!}{12! \cdot 44!} = \frac{56!}{(56-44)! \cdot 44!} = \binom{56}{44}$$

$$b) \text{Das ist falsch: } \frac{200!}{198!} = \frac{200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{198 \cdot 197 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 200 \cdot 199 = 39\,800$$

- 17 Das ist falsch, denn es würde bedeuten, lauter gleich wahrscheinliche Sektoren herzustellen. Dies ist bei einem Bernoulli-Experiment nicht notwendig. Hier muss aber darauf geachtet werden, dass das Zufallsexperiment nur zwei verschiedene Ausgänge hat.

- 18 Das ist richtig (Definition einer Bernoulli-Kette).

- 19 Das ist falsch. Die Aussage wäre richtig, wenn er sich erinnerte, dass er lauter verschiedene Primzahlen verwendet hat. So beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4!}$.

Lösungen zu „4.12 Das kann ich!“ – Seite 124

1 a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 5 $\frac{1}{5}$ $\sqrt{5}$

b) $\frac{1}{3}$ -1 $\sqrt[3]{3}$ $-\frac{1}{27}$

2 $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$ $a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a^3}}$
 $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$ $\frac{1}{\sqrt{a^2}} = a^{-\frac{2}{3}}$

3 Übertrage die Tabelle in dein Heft und vervollständige sie.

Basis \ Exponent	1	5	8	10
-1	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{3}$	$\sqrt[3]{1} = 1$	$\sqrt[3]{5}$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$\sqrt[3]{10}$
$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{1}} = 1$	$\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$
$\frac{2}{3}$	$\sqrt[3]{1^2} = 1$	$\sqrt[3]{25}$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt[3]{100}$
$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}} = 1$	$\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{100}}$

- 4 a) Der Wert der Potenz wird quadriert.
 b) Aus dem Wert der Potenz wird die Quadratwurzel gezogen.
 c) Der Wert der Potenz wird durch 16 geteilt.
 d) Es wird der Kehrwert des Potenzwertes gebildet.
 e) Der Wert der Potenz wird quadriert.
 f) Es wird der Kehrwert des Potenzwertes gebildet.

5 b) und d) sind richtig.

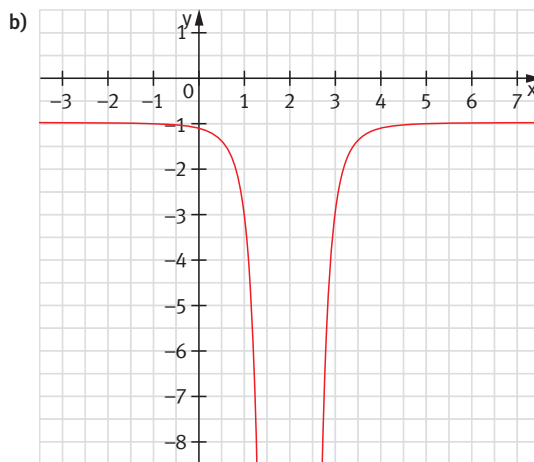
6 Lösungsmöglichkeiten:

- a) Die Graphen zu g und i gehen beide durch den Punkt A(1|0,5) und sind monoton fallend für $x < 0$.
 b) Die Graphen zu g, i und j verlaufen alle durch den Punkt A(1|0,5) (das gilt im Übrigen für alle fünf Funktionen).

7 Aus $f(x) = g(x)$, d. h. $x^3 = 4x$, folgt, dass x entweder 0, -2 oder 2 ist. Dies führt zu den möglichen gemeinsamen Punkten A(-2|-8), B(0|0) und C(2|8). Da h an der Stelle $x = 0$ nicht definiert ist, ist B(0|0) sicherlich kein gemeinsamer Punkt der drei Funktionsgraphen. Allerdings ist $h(-2) = \frac{16}{-2} = -8$ bzw. $h(2) = \frac{16}{2} = 8$. h verläuft also durch A und C. Somit sind A(-2|-8) und C(2|8) die gemeinsamen Punkte der Funktionsgraphen zu f, g und h.

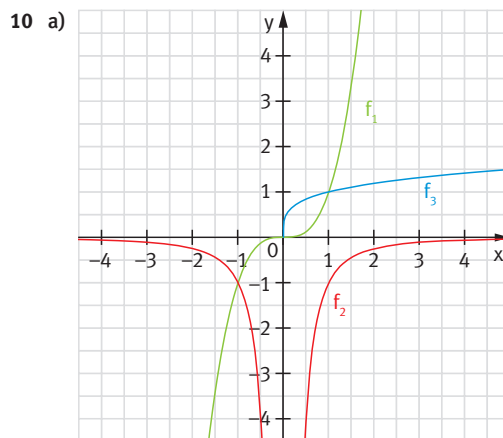
8 a) und e) sind richtig.

9 a) $f_{\text{neu}}(x) = \frac{-2}{(x-2)^4} - 1$



Die Funktion hat an der Stelle $x = 2$ eine **Definitionslücke**, hier hat sie auch eine senkrechte **Asymptote**. Der Graph der Funktion ist monoton fallend für $x < 2$ und monoton steigend für $x > 2$. Der **Grenzwert** der Funktion für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$ ist -1, für $x \rightarrow 2$ ist er $-\infty$. Die Gerade $y = -1$ ist eine waagerechte Asymptote des Funktionsgraphen. Der Graph ist **symmetrisch** zur Geraden $x = 2$.

Seite 125



b) f_1 mit $f_1(x) = x^3$: f_2 mit $f_2(x) = -\frac{1}{x^2}$:

$f_1(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$

$f_2(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$

$f_1(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow -\infty$

$f_2(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow 0$

$f_1(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$

$f_2(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$

f_3 mit $f_3(x) = \sqrt[4]{x}$:

$f_3(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$

$f_3(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$

- 11 a) Der Funktionsgraph verläuft durch die Punkte $O(0|0)$, $P(-1|1)$ und $Q(1|-1)$. Weiter ist er punktsymmetrisch zum Punkt $O(0|0)$ und monoton fallend für alle $x \in \mathbb{R}$.
- b) Der Funktionsgraph verläuft durch die Punkte $O(0|0)$ und $P(1|1)$. Er ist monoton steigend für alle $x \geq 0$. Für $x < 0$ ist die Funktion nicht definiert.
- c) Der Funktionsgraph ist punktsymmetrisch zum Ursprung, hat eine Definitionslücke in $x = 0$ und die x - und y -Achse als Asymptoten:
- für $x \rightarrow -\infty$ bzw. $x \rightarrow \infty$ gilt $f(x) \rightarrow 0$.
 - für $x > 0$ mit $x \rightarrow 0$ gilt $f(x) \rightarrow \infty$.
 - für $x < 0$ mit $x \rightarrow 0$ gilt $f(x) \rightarrow -\infty$.
- Für $x \in \mathbb{R}^-$ und $x \in \mathbb{R}^+$ ist der Funktionsgraph jeweils monoton fallend.
- d) Der Funktionsgraph ist achsensymmetrisch zur y -Achse und hat eine Definitionslücke in $x = 0$. Seine Asymptoten sind die x -Achse und die positive y -Achse:
- für $x \rightarrow -\infty$ bzw. $x \rightarrow \infty$ gilt $f(x) \rightarrow 0$.
 - für $x \rightarrow 0$ gilt $f(x) \rightarrow \infty$.
- Für $x \in \mathbb{R}^-$ ist der Funktionsgraph monoton steigend, für $x \in \mathbb{R}^+$ monoton fallend.

- 12 a) $20^5 = 2^5 \cdot 10^5 = 3\,200\,000$
- b) $20^5 + 20^4 + 20^3 + 20^2 + 20 = 3\,368\,420$
ca. 7,35 Milliarden Personen (Stand Ende 2015), ca. ein Zweitausendstel der Erdbevölkerung
- c) $30^5 + 30^4 + 30^3 + 30^2 + 30 = 25\,137\,930$, dies entspricht etwa 0,34 % der Erdbevölkerung.

13 Das ist richtig, denn per Definition ist $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

14 Das ist falsch, es verhält sich genau „umgekehrt“: $a^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{a^7}$, d. h. die fünfte Wurzel aus der siebten Potenz der Basis.

15 Das ist falsch.
Gegenbeispiel: $2^4 \cdot 2^3 = 16 \cdot 8 = 128 \neq 4096 = 2^{12}$
Richtig wäre: Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die Basis beibehalten wird und die Exponenten addiert werden.

16 Das ist falsch.
Gegenbeispiel: $\sqrt{1^{-1}} = \sqrt{1} = 1$

17 Das ist richtig. Man kann – ohne Taschenrechner – beispielsweise folgendermaßen argumentieren:
 $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{8} < \sqrt[5]{32} = 2$

18 Das ist richtig.
 $3^5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 = 3^5 \cdot \frac{4^5}{3^5} = 4^5 = 2^{10} = 1024 > 1000$

19 Das ist falsch:
 $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x) \neq -f(x)$
Richtig wäre: Der Graph ist symmetrisch zur y -Achse.

20 Das ist falsch, denn beispielsweise Potenzfunktionen mit negativen Exponenten haben keine Nullstellen.

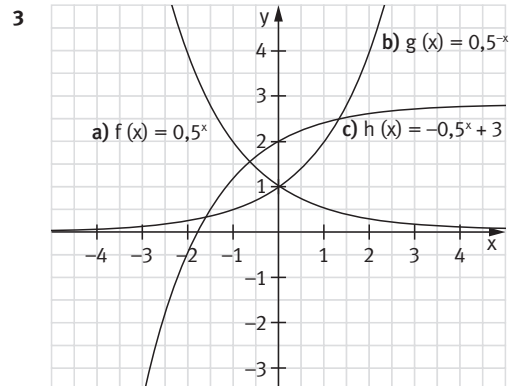
21 Das ist falsch. Die Gerade mit der Gleichung $x = -2$ ist Symmetrieachse des Funktionsgraphen.

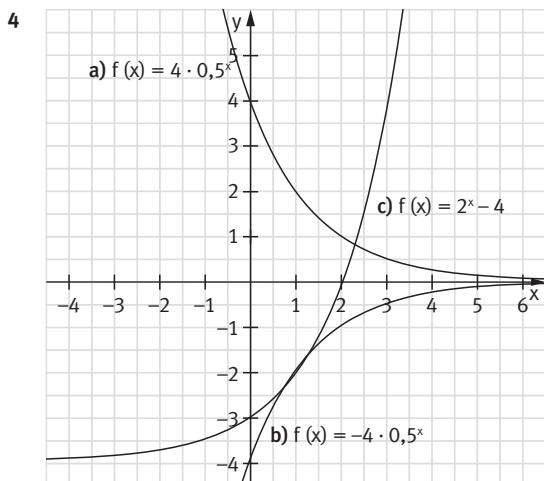
- 22 Das ist falsch.
Gegenbeispiel: Der Graph der Potenzfunktion $f(x) = x^{-2}$ hat sowohl die x - als auch die y -Achse als Asymptote, ist aber nicht symmetrisch zum Ursprung.
- 23 Das ist richtig. Falls x gegen 0 geht, sind die Werte für x^4 alle positiv, werden aber immer kleiner. Deren Kehrwert wird also immer größer, es gilt daher: $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 0$.
- 24 Das ist richtig: Wenn $f(2) = f(-2)$ gilt, so kann $f(x) = x^n$ keinen ungeraden Exponenten n haben, da in diesem Fall die Funktionswerte für negative x -Werte negativ, für positive x -Werte positiv sind – insbesondere also nicht übereinstimmen können. n ist also gerade und für jedes gerade n ist der Graph von $f(x) = x^n$ symmetrisch zur y -Achse.

Lösungen zu „5.10 Das kann ich!“ – Seite 158

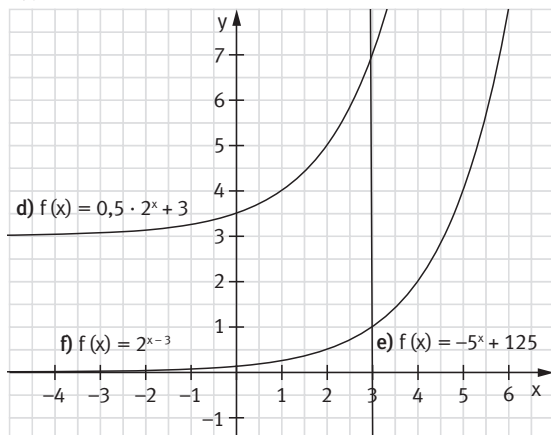
- 1 a) Das Wachstum des Riesenbambus ist linear, weil die Größe immer um den gleichen Summanden (70 cm) steigt. Allerdings gilt wie bei allen realen Wachstumsvorgängen: Das angenommene – hier: lineare – Wachstum gilt nur unter bestimmten Bedingungen und vor allem zeitlich begrenzt.
- b) Das Preiswachstum ist exponentiell, da der Preis jährlich um den gleichen Faktor (1,05) steigt.

- 2 a) $1024 = b^5 \iff b = \sqrt[5]{1024} = 4$
 $f(x) = 4x$
- b) $\sqrt{2} = b^{0,5} = \sqrt{b} \iff b = 2$
 $f(x) = 2^x$





- a) $f(x) = 4 \cdot 0,5^x$
 Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
 Wertebereich: $y \in \mathbb{R}^+$
 Schnittpunkte: S_x existiert nicht, $S_y(0|4)$
 Monotonie: monoton fallend
 Grenzwerte:
 $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow -\infty$
 $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow +\infty$
- b) $f(x) = -4 \cdot 0,5^x$
 Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
 Wertebereich: $y \in \mathbb{R}^-$
 Schnittpunkte: S_x existiert nicht, $S_y(0|-4)$
 Monotonie: monoton steigend
 Grenzwerte:
 $f(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow -\infty$
 $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow +\infty$
- c) $f(x) = 2^x - 4$
 Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
 Wertebereich: $y \in \{y \in \mathbb{R} | y > -4\}$
 Schnittpunkte: $S_x(2|0)$, $S_y(0|-3)$
 Monotonie: monoton steigend
 Grenzwerte:
 $f(x) \rightarrow -4$ für $x \rightarrow -\infty$
 $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow +\infty$



- d) $f(x) = 0,5 \cdot 2^x + 3$
 Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
 Wertebereich: $y \in \{y \in \mathbb{R} | y > 3\}$
 Schnittpunkte: S_x existiert nicht, $S_y(0|3,5)$
 Monotonie: monoton steigend
 Grenzwerte:
 $f(x) \rightarrow 3$ für $x \rightarrow -\infty$
 $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow +\infty$

- e) $f(x) = -5^x + 125$
 Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
 Wertebereich: $y \in \{y \in \mathbb{R} | y < 125\}$
 Schnittpunkte: $S_x(3|0)$, $S_y(0|125)$
 Monotonie: monoton fallend
 Grenzwerte:
 $f(x) \rightarrow 125$ für $x \rightarrow -\infty$
 $f(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow +\infty$

- f) $f(x) = 2^{x-3}$
 Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
 Wertebereich: $y \in \mathbb{R}^+$
 Schnittpunkte: S_x existiert nicht, $S_y(0|0,125)$
 Monotonie: monoton steigend
 Grenzwerte:
 $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$
 $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow +\infty$

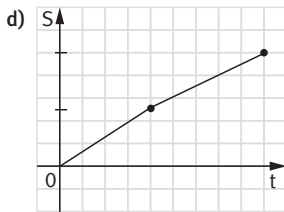
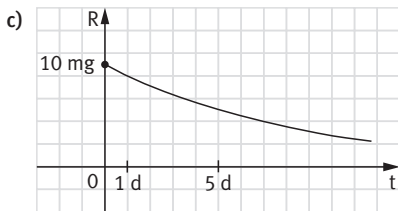
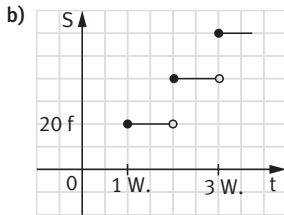
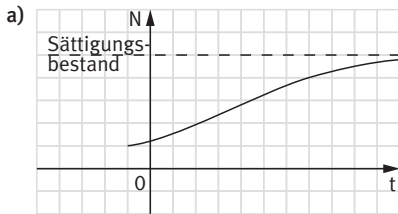
- 5 a) $\log_4 512 = 4,5$ b) $\log_3 3187 \approx 7,43$
 c) $\log_6 36^5 = 10$ d) $\log_{0,5} 81 \approx -6,34$
 e) $\lg 10\,000 = 4$ f) $\lg 10^{1,5} = 1,5$

- 6 a) $f(x) = 2^x - 2$
 b) $f(x) = -0,5 \cdot 2^x$

- 7 $f(a) = 12t \cdot 0,5^a$
 Eine Zeiteinheit a entspricht 5 Jahren.
 5 Jahre: $f(1) = 6$ t
 10 Jahre: $f(2) = 3$ t
 15 Jahre: $f(3) = 1,5$ t
 30 Jahre: $f(6) = 0,188$ t
 100 Jahre: $f(20) \approx 0,000011$ t

- 8 a) $50 \cdot 2^x = 1\,000\,000 \Leftrightarrow \log_2 20\,000 \approx 14,29$
 $14,29 \cdot 12$ Stunden = $171,48$ Stunden ≈ 7 Tage 4 h
 b) $f(x) = 50 \cdot 2^x$
 Eine Zeiteinheit x entspricht 12 Stunden.
 c) Die Fläche des Teichs ist endlich, weshalb auch die Ressourcen endlich sind. Dadurch wird das Wachstum ab einem bestimmten Punkt gehemmt und somit nicht durchgängig exponentiell.

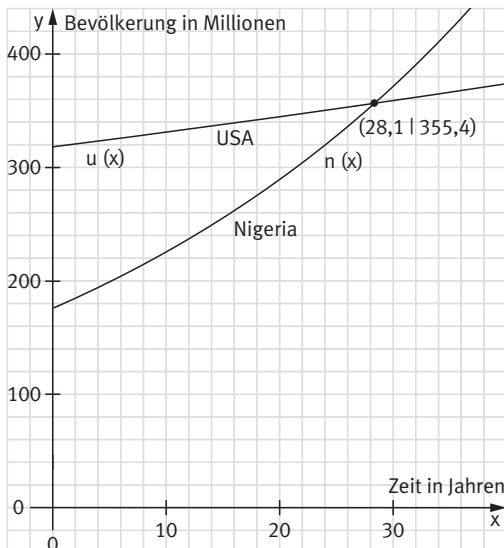
9 Skizzen der Graphen:



Seite 159

10 Grafische Lösung:

Nigeria: $n(x) = 177,5 \cdot 1,025^x$
 USA: $u(x) = 317,7 \cdot 1,004^x$



Rechnerische Lösung:

$177,5 \cdot 1,025^x = 317,7 \cdot 1,004^x \Leftrightarrow x \approx 28,1$
 Nach gut 28 Jahren leben in beiden Staaten mit ca. 355 Millionen gleich viele Menschen.

- 11 a) $x = 6$ b) $x = 3$ c) $x = 3$
 d) $x = 3$ e) $x = 3$ f) $x = 5$

12 a) $f(x) = 4000 \text{ €} \cdot 1,018^x$
 $f(5) \approx 4373,20 \text{ €}$
 $f(10) \approx 4781,21 \text{ €}$
 $f(30) \approx 6831,14 \text{ €}$

b) $16\,000 \text{ €} = 4000 \text{ €} \cdot 1,018^x \Leftrightarrow x \approx 77,7$
 Nach knapp 78 Jahren hat sich der Betrag vervierfacht.

13 $0,2 = 0,85^x \Leftrightarrow \log_{0,85} 0,2 \approx 9,9$
 Die Kamera ist bis knapp 10 m Tiefe einsatzfähig.

- 14 a) $x = 8$ b) $x = 5$ c) $x = 15\,625$
 d) $x = 0$ e) $x = 4$ f) $x = 2$

15 $1200 \text{ €} \cdot 0,5^{2,5} \approx 212,13 \text{ €}$

16 Die Aussage ist falsch. Eine Exponentialfunktion kann entweder einen oder keinen Schnittpunkt mit der x-Achse haben.

17 Die Aussage ist falsch. 1^x ist keine Exponentialfunktion, sondern eine konstante Funktion: Sie nimmt für jedes x den Wert 1 an.

18 Die Aussage ist falsch. Beispielsweise kann auch eine quadratische Funktion einen Wachstumsprozess darstellen.

19 Die Aussage ist falsch. Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion und man erhält sie durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.

20 Die Aussage ist richtig.

21 Die Aussage ist richtig.

22 Die Aussage ist falsch.