4 Exponentialfunktionen und -gleichungen

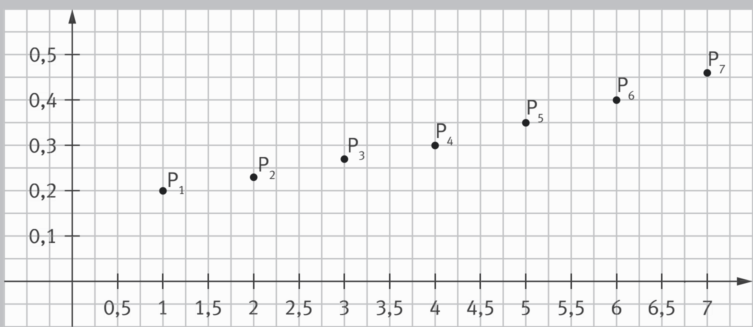
Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

KX
- Tabelle:

Tag 1	Tag 2	Tag 3	Tag 4	Tag 5	Tag 6	Tag 7
$0{,}2\,cm^2$	$0{,}23\,cm^2$	$0{,}265\,cm^2$	$0{,}304\,cm^2$	$0{,}350\,cm^2$	$0{,}402\,cm^2$	$0{,}463\,cm^2$

KX
- Grafik:



KX
- Als Modellierung lässt sich $f(x) = 0{,}2 \cdot 1{,}15^x$ wählen, wobei x die Anzahl der Tage bezeichnet.

KX
- 90 Quadratmillimeter sind nach 11 Tagen bedeckt.

Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.
Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

K 5

1 **a)** Termstruktur: Summe oder Differenz
$5 + 2 \cdot 5 - 2 = 13$
b) Termstruktur: Differenz
$(5 + 2) \cdot 5 - 2 = 33$
c) Termstruktur: Produkt
$(5 + 2) \cdot (5 - 2) = 21$
d) Termstruktur: Summe oder Differenz
$\frac{5}{4} + 2 \cdot 5 - 2 = \frac{37}{4} = 9\frac{1}{4}$
e) Termstruktur: Differenz
$\frac{5+2}{4} \cdot 5 - 2 = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$
f) Termstruktur: Produkt
$\frac{5+2}{4} \cdot (5 - 2) = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$
g) Termstruktur: Quotient
$\frac{5 \cdot 2^3}{4} = 10$
h) Termstruktur: Quotient
$\frac{(5 \cdot 2)^3}{4} = 250$
i) Termstruktur: Potenz
$\left(\frac{5 \cdot 2}{4}\right)^3 = \frac{125}{8} = 15\frac{5}{8}$

2 **a)** $7a^3 - 2a^3 + 4a^3 + 11a^3 - 15a^3 = 5a^3$
b) $4x^2y^2 \cdot \frac{1}{2}x^3y^2 \cdot 0{,}5x^3y^3 = x^8y^7$
c) $x^{3n-2} \cdot 2x^{m-2n+7} \cdot 5x^{2n+m} = 10x^{3n+2m+5}$

3 **a)** $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
b) $3x^{m+2} = 3x^m \cdot x^2$
c) $b^{2x+1} = b^{2x} \cdot b$
d) $z^{\frac{1}{2}x+2} = z^{\frac{1}{2}x} \cdot z^2$

4 **a)** $4^{3+0-5} = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ **b)** $4^{-2+3-(-2)} = 4^3 = 64$ **c)** $2^{-3+4} + 2^{-2+4} = 2 + 2^2 = 6$
d) $1{,}2^{4-3} - 1{,}2^{4-4} = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$ **e)** $(-2)^{8-4-2} = (-2)^2 = 4$ **f)** $2^{4-7-(-3)} = 2^0 = 1$

5 **a)** $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$ **b)** $\mathbb{L} = \{-1; 1\}$ **c)** $\mathbb{L} = \{\,\}$
d) $\mathbb{L} = \{-0{,}8; 0{,}8\}$ **e)** $\mathbb{L} = \{-0{,}3; 0{,}3\}$ **f)** $\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\} = \{-1{,}41; 1{,}41\}$
g) $\mathbb{L} = \{-6; 6\}$ **h)** $\mathbb{L} = \{-2; 2\}$ **i)** $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$

6 **a)** $\mathbb{L} = \{-7; 7\}$ **b)** $\mathbb{L} = \{-1{,}5; 1{,}5\}$ **c)** $\mathbb{L} = \{0\}$
d) $\mathbb{L} = \{-4; 4\}$ **e)** $\mathbb{L} = \{\,\}$ **f)** $\mathbb{L} = \left\{-\frac{3}{7}; \frac{3}{7}\right\}$
g) $\mathbb{L} = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$ **h)** $\mathbb{L} = \{\,\}$ **i)** $\mathbb{L} = \{\,\}$

7 $P_1\,(-1|7)$; $P_2\,(2|4)$; $P_3\left(\frac{1}{2}\middle|1\right)$

8 $\frac{1}{5} \cdot x + 2 = -x^2 + 4$
$x^2 + \frac{1}{5} \cdot x - 2 = 0$
$x_{1/2} = -\frac{1}{10} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 2}$
$x_1 = 1{,}32$; $x_2 = -1{,}52$

KX **9** $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) > -1\}$

Monotonie:

fallend für $x \in]-\infty; 0[$

steigend für $x \in]0; +\infty[$

Symmetrie:

$f(-x) = 2 \cdot (-x)^{-2} - 1 = 2x^{-2} - 1 = f(x)$

$\Rightarrow$ Achsensymmetrie

Schnittpunkte mit x-Achse:

$f(x) = 0$

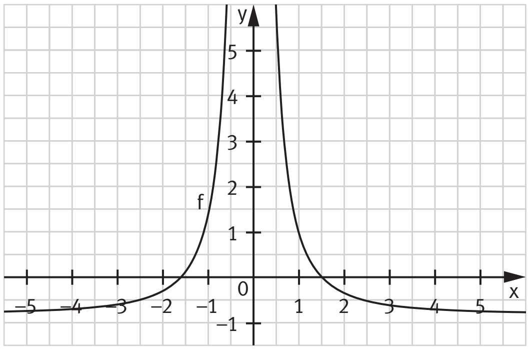
$2x^{-2} - 1 = 0$

$x^{-2} = \frac{1}{2}$

$x^2 = 2$

$x_1 = 1{,}41;\ x_2 = -1{,}41$

Da $x \neq 0$ laut Definitionsbereich, gibt es keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.



10 a) Die beiden Graphen können höchstens zwei Schnittpunkte haben. Weil beide nur einmal ihre Monotonie von steigend auf fallend bzw. von fallend auf steigend ändern (an der Stelle $x = 0$), kann es nicht mehr Schnittpunkte geben.

b) $x^{-2} + 1 = -x^{-4} + 3 \qquad | -3 + x^{-4}$

$x^{-2} + x^{-4} - 2 = 0 \qquad | \cdot x^{-4}$

$x^2 + 1 - 2x^4 = 0 \qquad | : (-2)$

$x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} = 0$

Substitution von $x^2 = z$ liefert eine quadratische Gleichung:

$z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow z_1 = 1;\ z_2 = -\frac{1}{2}$

Bei der Rücksubstitution bleiben nur noch die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ übrig, weil die Wurzel-aus $-\frac{1}{2}$ nicht berechenbar ist.

Die Schnittpunkte der beiden Graphen sind also $P_1\,(1|2)$ und $P_2\,(-1|2)$.

11 a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

B: $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \qquad \Rightarrow c = 1$

A: $f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 1 = 1 \qquad \Rightarrow a = b$

C: $f(1) = a + a + 1 = 3 \qquad \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow b = 1$

$f(x) = x^2 + x + 1$

b) A: $f(-2) = 4a - 2b + c = 4$

B: $f(-4) = 16a - 4b + c = 2$

C: $f(2) = 4a + 2b + c = -4$

Die Gleichungen für A und C voneinander subtrahieren liefert:

$4b = -8 \qquad \Rightarrow b = -2$

b in die Gleichungen für A und B einsetzen und diese voneinander subtrahieren liefert:

$12a + 4 = -2 \qquad \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

a und b in die Gleichung für A einsetzen liefert:

$4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 + c = 4 \qquad \Rightarrow c = 2$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

Kap. 4.1

Alles wächst

KX
- Es sind individuelle Lösungen möglich.

KX
- Die Killerkresse heißt so, da sie sich exponentiell ausbreitet. Da es sich aber um eine sehr kleine Pflanze handelt, ist erstens eine Gefahr für die Gartenlaube ausgeschlossen. Außerdem ist der exponentielle Wachstum auch nur begrenzt wahr. Ist eine natürliche Grenze erreicht, wächst die Killerkresse nicht mehr weiter.

Kap. 4.2

KX

Die Reiskornlegende

Auf einem Feld mit der Nummer x liegen 2^{x-1} Körner.

a) Annahme: Eine Portion sind 60 g.
$f(x) = 0{,}03\,\text{g} \cdot 2^{x-1}$ $f(12) \approx 61\,\text{g}$
Auf dem 12. Feld liegt ungefähr eine Portion Reis.

b) Annahme: Ein Mensch wiegt 80 kg.
$f(x) = 0{,}03\,\text{g} \cdot 2^{x-1}$ $f(23) \approx 126\,\text{kg}$
Auf dem 23. Feld liegt Reis mit einer Masse, die die eines Menschen (üblicherweise) bei weitem übersteigt.

c) Annahme: 7,5-Tonner mit Ladevolumen von 35 m^3 bzw. einer maximalen Ladekapazität von 2200 kg.
$f(x) = 5\,\text{mm}^3 \cdot 2^{x-1}$ $f(33) \approx 21{,}5\,\text{m}^3$
$f(x) = 0{,}03\,\text{g} \cdot 2^{x-1}$ $f(27) \approx 2013\,\text{kg}$
Die Beladungsgrenze des Lkw wird zuerst durch die Massebeschränkung erreicht: Auf dem 27. Feld liegen 2013 kg Reis – so viel, dass der Lkw bis 10 % unter seiner Massegrenze beladen ist.

d) Entfernung Mond – Erde ca. 384 000 km
$f(x) = 5\,\text{mm} \cdot 2^{x-1}$ $f(47) = 351\,843\,721\,\text{km}$ $f(48) = 703\,687\,442\,\text{km}$
Die Länge der Kette des 47. Feldes ist zu kurz, die des 48. Feldes zu lang.

e) Oberfläche der Erde: 510 100 000 km^2
$f(x) = 5\,\text{mm}^2 \cdot 2^{x-1}$ $f(64) = 46\,116\,860\,\text{km}^2$
Um die Erdoberfläche mit Reiskörnern der Größe 5 mm^2 zu bedecken, reicht das Schachbrett-Modell nicht aus – man müsste das Schachbrett auf 68 Felder erweitern: $f(68) = 737\,869\,763\,\text{km}^2$.

Kap. 4.3

Berechenbarer Zufall?

K6
- Es sind individuelle Lösungen möglich. Die Schüler und Schülerinnen und sollen anhand des Experiments ein Gespür dafür bekommen, wie sich die Anzahl eines Treffers („Würfel mit Lieblingszahl") entwickelt, wenn die Anzahl der verbleibenden Würfel vom vorherigen Durchgang abhängt.

Kap. 4.4

Alles wird Potenz

K6

-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	1,5	2	4	5	6	7	8	9
$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	$\approx 1{,}83$	4	16	32	64	128	256	512

K6

- Geschichte der Logarithmen:
  Stifel erkannte die Zusammenhänge zwischen Addition und Multiplikation in den Potenzgesetzen. Während er nur mit ganzen Zahlen in den Exponenten arbeitete, weitete Napier dies auf die reellen Zahlen aus. Bürgi und Napier entwickelten beide unabhängig voneinander die Theorie der Logarithmen. Briggs legte fest, dass man mit dem Logarithmus zur Basis 10 arbeitete. Nach Leonard Euler wurde dann allerdings die Eulersche Zahl e als Basis verwendet.
  Auf dem Logarithmus basiert die Funktionsweise des Rechenschiebers, denn dieser arbeitet mit logarithmischen Skalen, anhand derer die Grundrechenarten abgebildet werden können.
  Hintergrund: Über die Logarithmusgesetze kann man Additionen in Multiplikationen umwandeln und umgekehrt.

Kap. 4.6

Von hier bis zum Mond ...

K6
- Ein Blatt Papier lässt sich mit normaler menschlicher Kraft nicht zwölfmal falten. Ist die Papierdicke 0,01 mm, so ist sie nach zwölfmaligem Falten bei 4,096 cm.

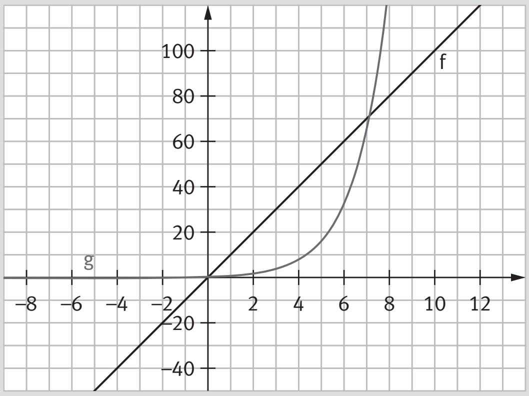
K6
- Gallivan hat eine Formel vorgelegt, anhand derer für eine bestimmte Anzahl von erwünschten Faltungen die nötige Länge des Papierstreifens angegeben wird. Ihre Idee bestand darin, einen langen Streifen Toilettenpapier zu nehmen und diesen immer in die gleiche Richtung zu falten.

Entdecken

K3 ■ Wenn Emil lange genug durchhält, lohnt sich der zweite Vorschlag.

K3 ■ Nach dem 3. Monat hat Emil bei der 1. Variante 30 €, bei der 2. Variante 4 €. Nach dem 6. Monat bei der 1. Variante 60 € und bei der 2. Variante 32 €. Nach 9 Monaten hat er bei der ersten Variante 90 € und bei der 2. Variante 256 €. Nach zwölf Monaten hat er dann 120 € bzw. 2048 €.

K3 ■



Nachgefragt

K1 ■ Die Aussage von Tim ist zunächst etwas unklar, da er nicht weiter ausführt, ob er tatsächlich von einem „Wachstumsprozess“, also einer Zunahme der Werte, ausgeht oder unter „Wachstum“ vielleicht auch die Abnahme von Werten versteht.
Geht man von einem Wachstum aus, so hat Tim Recht. Auf lange Sicht gesehen verläuft lineares Wachstum immer langsamer als exponentielles.
Begründung: Beim linearen Wachstum kommt immer ein konstanter Wert hinzu. Beim exponentiellen Wachstum wird der Wert, der hinzukommt, ständig größer, und irgendwann übersteigt dieser Wert den konstanten Summanden.
Geht man von einer Abnahme aus, so hat Tim (auf lange Sicht gesehen) nicht Recht: Bei linearer Abnahme wird immer derselbe Wert subtrahiert. Beim exponentiellen wird der Wert, der subtrahiert wird, stets kleiner.

Aufgaben

K5 **1** **Hinweis zu Teilaufgabe c):** Im ersten Druck der ersten Auflage befindet sich ein Druckfehler. Die Zahlenreihe in der zweiten Zeile muss lauten: 1 – 2 – 4 – 8

a) linear
b) exponentiell
c) exponentiell
d) exponentiell
e) linear
f) exponentiell

KX **2** **a)** exponentiell
b) exponentiell
c) linear
d) exponentiell

K6 **3** **a)** Exponentielles Wachstum: Pro Zeiteinheit (eine Woche) verdoppelt sich die Anzahl der Algen. Zwei

0	1	2	3
10	11	12,1	13,31

Wochen später kann man von einer Vervierfachung ausgehen. Es liegt also eine Multiplikation mit

0	1	2	3
54 000	40 500	30 375	22 781,25

einem konstanten Faktor zugrunde.

0	1	2	3
10	9,6	9,2	8,8

b) Lineares Wachstum: Jeden Monat wird derselbe Geldbetrag (Summand) addiert.

0	1	2	3
0,5	2	8	32

c) Exponentielles Wachstum: Es wird mit dem Faktor 3 vervielfacht.

K1 **4** A – 4: Da der Graph gleichmäßig bis zu einem bestimmten Niveau ansteigt und dann konstant verläuft.

B – 2: Da der Graph beim Maximum anfängt und dann erst sehr stark und mit der Zeit immer weniger abnimmt: Der Grundwert für diese Prozentrechnung (Multiplikation mit dem Faktor 0,82) wird immer kleiner.

C – 1: Da der Graph exponentiell bis (fast) zu einem Maximum ansteigt und dann auf diesem Niveau bleibt. Das Maximum existiert wegen des abgeschlossenen Gefäßes.

D – 3: Da die Geschwindigkeit konstant ist, nimmt die Anzahl der verbleibenden Kilometer linear ab.

Entdecken

K3
- Bevölkerungszahl in Millionen:
  2005 82,4
  2006 82,21
  2008 81,83
  2010 81,46
  2018 79,97
- Die tatsächlichen Zahlen lauten laut statistischem Bundesamt (in Millionen):
  2006 82,32
  2008 82
  2010 81,75
  2018 82,9

Nachgefragt

KX
- Für b = 1 ist der Graph eine Parallele zur x-Achse mit y-Achsenabschnitt 1. Es liegt keine Exponentialfunktion vor, da der Graph nicht immer stärker ansteigt oder immer schwächer abnimmt, sondern konstant auf einem Niveau bleibt.

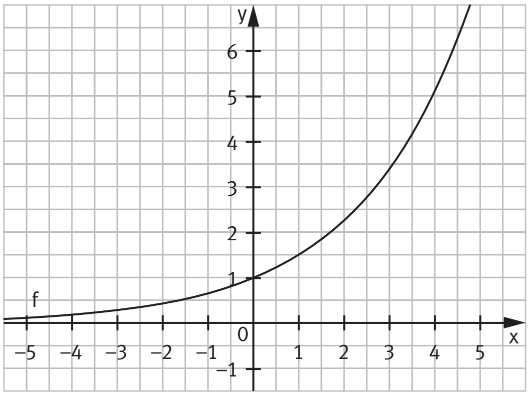
KX
- Zur Begründung können einige Funktionswerte herangezogen werden.

$f(x) = 2^x$	$g(x) = x^2$
$f(0) = 1$	$g(0) = 0$
$f(1) = 2$	$g(1) = 1$
$f(2) = 4$	$g(2) = 4$
$f(3) = 8$	$g(3) = 9$
$f(4) = 16$	$g(4) = 16$
$f(5) = 32$	$g(5) = 25$
$f(6) = 64$	$g(6) = 36$
$f(7) = 128$	$g(7) = 49$

  Wird x = 4 überstiegen, sind die Funktionswerte von f größer als die von g.
  Allgemein gilt: Eine Potenzfunktion wächst – auf lange Sicht gesehen – immer langsamer als eine Exponentialfunktion.

Aufgaben

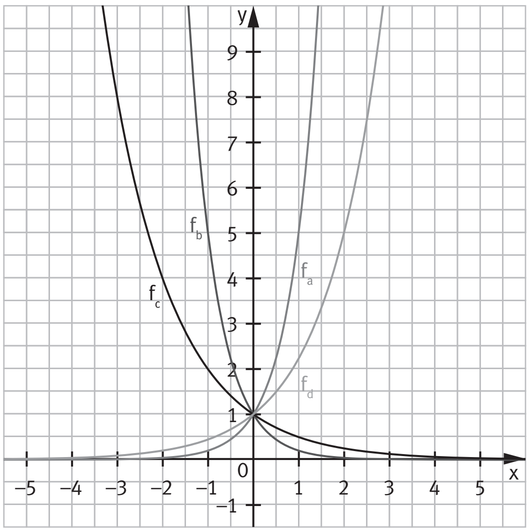
K5 **1**



x	–0,25	–0,6	0,75	3	–2	–0,5	0	1	–1	2,25	–1
f (x)	0,9	0,78	1,36	$3\frac{3}{8}$	$\frac{4}{9}$	0,82	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	2,49	$\frac{2}{3}$

KX **2**

	x	–3	–2	–1	–0,5	0	0,5	1	2	3
a)	$f_a(x) = 5^x$	0,01	0,04	0,2	0,45	1	2,24	5	25	125
b)	$f_b(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	125	25	5	2,24	1	0,45	0,2	0,04	0,01
c)	$f_c(x) = 0{,}5^x$	8	4	2	1,41	1	0,71	0,5	0,25	0,13
d)	$f_d(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x$	0,09	0,2	0,45	0,67	1	1,5	2,24	5	11,18



K5 **3** Aufgrund der Definition einer Exponentialfunktion, die im Schulbuch vorgenommen wurde, entfällt bei der Lösung der Gleichung $y = b^x$ eine etwaige negative Lösung für b.

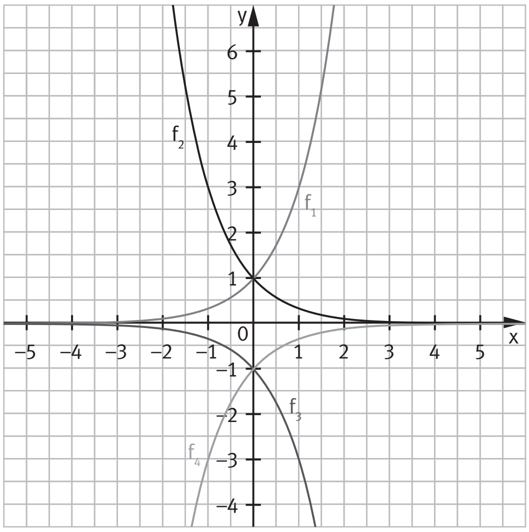
a) $f(x) = b^x$
$4 = b^2$
$b = \sqrt{4}$
$b = 2$
$f(x) = 2^x$

b) $f(x) = b^x$
$0{,}04 = b^2$
$b = \sqrt{0{,}04}$
$b = 0{,}2$
$f(x) = 0{,}2^x$

c) $f(x) = b^x$
$7 = b^3$
$b = \sqrt[3]{7}$
$f(x) = \left(\sqrt[3]{7}\right)^x = \sqrt[3]{7^x}$

d) $f(x) = b^x$
$0{,}0256 = b^4$
$b = \sqrt[4]{0{,}0256}$
$b = 0{,}4$
$f(x) = 0{,}4^x$

KX **4** **a)**



b) Schnittpunkte mit der y-Achse sind die Punkte S_1 (0|1) und S_2 (0|−1).
Die Funktionen f_1 und f_4 sind monton steigend, die Funktionen f_2 und f_3 sind monoton fallend.
f_1 und f_2 nehmen nur nichtnegative Werte an, f_3 und f_4 nehmen nur nichtpositive Werte an.

c)
- Spiegelungen an der y-Achse:
  f_2 erhält man durch Spiegelung von f_1 an der y-Achse (und umgekehrt). Ebenso erhält man f_4 durch Spiegelung von f_3 an der y-Achse (und umgekehrt).
- Spiegelungen an der x-Achse:
  f_1 erhält man durch Spiegelung von f_3 an der x-Achse (und umgekehrt). Ebenso erhält man f_4 durch Spiegelung von f_2 an der x-Achse (und umgekehrt).
- Spiegelungen an der Winkelhalbierenden:
  f_1 erhält man durch Spiegelung von f_4 an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten (und umgekehrt). f_2 erhält man durch Spiegelung von f_3 an der Winkelhalbierenden des II. und IV. Quadranten (und umgekehrt).

KX **5**

a) $f(x) = 3^x$, $\quad f^*(x) = 3^{x+2}$, $\quad f'(x) = -2 \cdot 3^{x+2}$

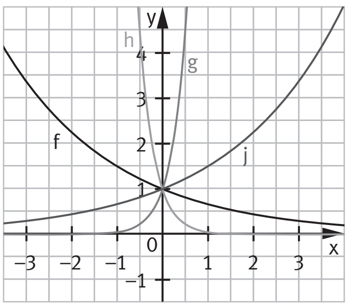
b) $f(x) = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^x$, $\quad f^*(x) = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^x - 2$, $\quad f'(x) = -2 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^x + 4$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $\quad f^*(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$, $\quad f'(x) = -\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}^{x+3}$

KX **6** Hier wurden die Werte $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, 20 und $\frac{1}{20}$ für b gewählt. Für Werte von b größer 1 gilt, dass der Graph monoton steigt, während er für b-Werte zwischen null und eins monoton fällt. Eine Gemeinsamkeiten aller solcher Funktionen ist, dass sie durch den Punkt (0|1) verlaufen und einen positiven Wertebereich (genauer $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$) besitzen.
Schließlich fallen Symmetrien zur y-Achse auf:

f entsteht durch Spiegelung von j an der y-Achse (und umgekehrt).

h entsteht durch Spiegelung von g an der y-Achse (und umgekehrt).



KX **7** Der Funktionswert wird

a) halbiert, da $f(x+1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2} \cdot f(x)$ ist.

b) vervierfacht, da $f(x-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \cdot f(x)$ ist.

c) mit $\sqrt{2}$ multipliziert, da $f(x-0{,}5) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-0{,}5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-0{,}5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{2} \cdot f(x)$ ist.

d) quadriert, da $f(2x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2 = [f(x)]^2$ ist.

e) Aus dem Funktionswert wird die Quadratwurzel gezogen, da
$f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0{,}5x} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{0{,}5} = \sqrt{f(x)}$ ist.

f) Vom Funktionswert wird der Kehrwert genommen, da $f(-x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x} = \frac{1}{f(x)}$ ist.

KX **8** Der Funktionswert wird

a) mit b multipliziert.

b) durch b^2 dividiert.

c) durch $\sqrt{b}$ dividiert.

d) quadriert.

e) Aus dem Funktionswert wird die Quadratwurzel gezogen.

f) Vom Funktionswert wird der Kehrwert genommen.

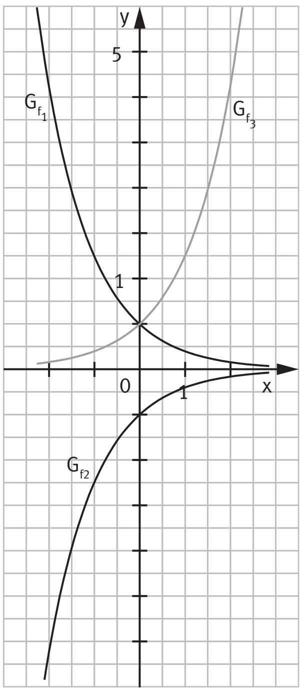
KX **9** g_1 – E; g_2 – C; g_3 – B; g_4 – D; A veranschaulicht $y = 2^x$.

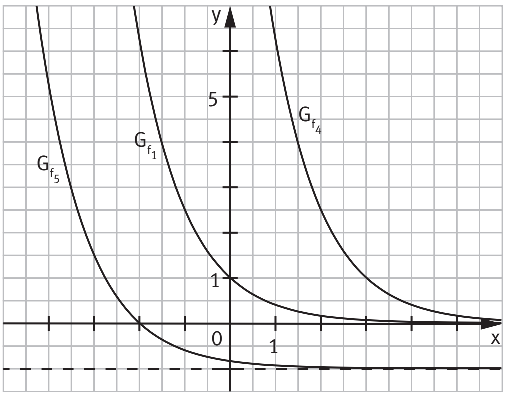
KX **10** **a)** $f_2(x) = -0{,}4^x$; $\mathbb{D}_{f_2} = \mathbb{R}$

b) $f_3(x) = 0{,}4^{-x}$; $\mathbb{D}_{f_3} = \mathbb{R}$

c) $f_4(x) = 0{,}4^{x-3}$; $\mathbb{D}_{f_4} = \mathbb{R}$

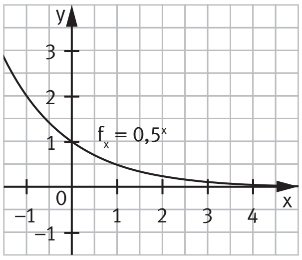
d) $f_5(x) = 0{,}4^{x+2} - 1$; $\mathbb{D}_{f_5} = \mathbb{R}$





KX **11** **a)** $y_p = \frac{1}{8}$

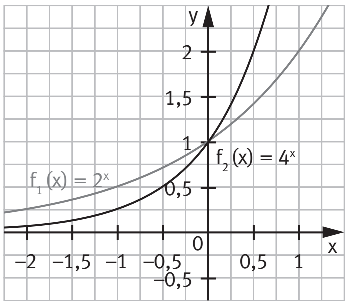
b)



Eigenschaften: Der Graph ist monoton fallend, immer im positiven Wertebereich und schneidet die y-Achse im Punkt (0|1). Die x-Achse schneidet er nicht, kommt ihr aber asymptotisch immer näher.

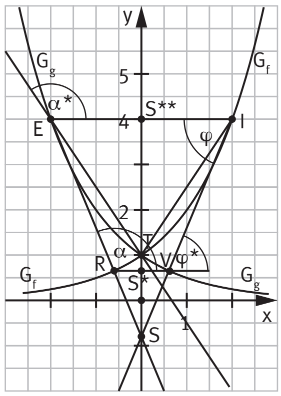
c) Den Wert 7 erreicht der Graph näherungsweise bei ca. –2,8.

KX **12** **a)**



b) Die Funktion f_2 mit $f_2(x) = 4^x$ lässt sich auch schreiben als $f_2(x) = 2^{2x}$. Damit ist $f_2(x) = f_1(2x)$.
Der Abstand von P_1 zur y-Achse ist folglich doppelt so groß, wie der von P_2 zur y-Achse.

KX **13** $V\left(0{,}5 \,|\, \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\right)$, $I(2|4)$, $E(-2|4)$, $R\left(-0{,}5 \,|\, \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\right)$



a) $A = \frac{\overline{RV} + \overline{IE}}{2} \cdot [f(2) - g(0{,}5)]\,\text{cm}$

$= \frac{1+4}{2}\,\text{cm} \cdot \left(4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\text{cm} =$

$= \left(10 - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)\text{cm}^2 \approx 8{,}232\,\text{cm}^2 \approx 8\,\text{cm}^2$;

$u = \overline{VI} + \overline{IE} + \overline{ER} + \overline{RV}$;

$\overline{VI} = \sqrt{(2 - 0{,}5)^2 + \left(4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\text{cm} \approx$

$\sqrt{1{,}5^2 + 3{,}293^2}\,\text{cm} \approx$

$3{,}62\,\text{cm}$; $\overline{ER} = \overline{VI}$;

$u \approx 3{,}62\,\text{cm} + 4\,\text{cm} + 3{,}62\,\text{cm} + 1\,\text{cm} \approx 12\,\text{cm}$;

$A_{ETI} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2$;

$A_{RVT} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\text{cm}^2 \approx 0{,}146\,\text{cm}^2$;

$A_{ETI} + A_{RVT} \approx 6{,}146\,\text{cm}^2$;

Bruchteil: $\frac{6{,}146\,\text{cm}^2}{8{,}232\,\text{cm}^2} \approx 0{,}747 \approx \frac{3}{4}$

b) $\tan\varphi = \frac{4 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2 - 0{,}5} \approx 2{,}195$; $\varphi \approx 65{,}5°$; $\alpha = 180° - \varphi \approx 114{,}5°$
Größen der vier Innenwinkel des Trapezes VIER: 114,5°; 65,5°; 65,5°; 114,5°

c) $\frac{\overline{SS^*}}{\overline{SS^{**}}} = \frac{\overline{TV}}{\overline{S^{**}I}}$; $SS^* = x\,cm$:

$\frac{x}{x + \left(4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$; $\quad | \cdot 4 \cdot \left(x + 4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$4x = x + 4 - \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\quad | -x$

$3x = 4 - \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\quad | : 3$

$x = \frac{1}{3}\left(4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 1{,}0976$;

$y_S = y_{S^*} - x = \frac{1}{\sqrt{2}} - x \approx -0{,}39$; $S\,(0\,|\,-0{,}39)$

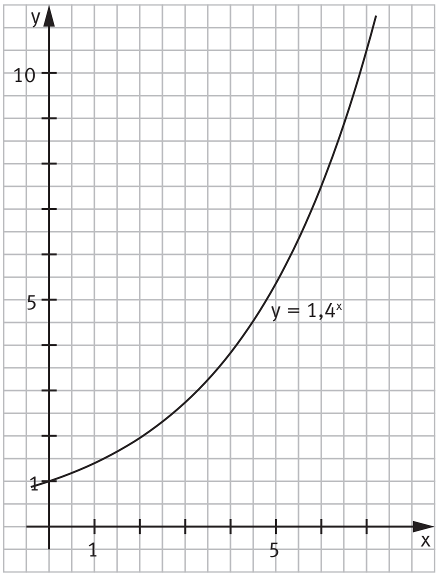
Wechselwinkel an Parallelen: φ und φ^*; Stufenwinkel an Parallelen: α und α^*

KX

14 a)

Anzahl n der Wochen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Größe A der von Wasserhyazinthen bedeckten Fläche (in m^2)	1	1,4	1,96	2,74	3,84	5,38	7,53	10,54	14,76	20,66	28,93

b) $f(x) = 1{,}4^x$



c) 1 Individuelle Schätzungen

2 $1{,}4^n = 2$; $n \approx 2$:
Nach etwa 2 Wochen hat sich die von Wasserhyazinthen bedeckte Fläche verdoppelt.

d) $1\,m^2 \cdot 1{,}4^x = 68\,000 \cdot 10^6\,m^2$; $x \approx 74$

Nach etwa 74 Wochen (also nach knapp eineinhalb Jahren) wäre der Victoria-See vollständig mit Wasserhyazinthen bedeckt.

1 $1{,}3^x = 68\,000 \cdot 10^6$; $x \approx 95$

2 $1{,}5^x = 68\,000 \cdot 10^6$; $x \approx 61{,}5$

Im ersten Fall wäre der Victoria-See erst nach etwa 95 Wochen, im zweiten Fall bereits nach etwa 62 Wochen völlig mit Wasserhyazinthen bedeckt.

Entdecken

K3 ■ f_1 schwarz, f_2 rot, f_3 grün, f_4 blau

K3 ■ Der Parameter
- a staucht bzw. streckt den Funktionsgraphen.
- d verschiebt den Funktionsgraphen entlang der x-Achse.
- c verschiebt den Funktionsgraphen entlang der y-Achse.

K3 ■ 1 Schnittpunkte mit der y-Achse werden durch alle Parameter a, c und d beeinflusst. Schnittpunkte mit der x-Achse werden lediglich durch den Parameter c ermöglicht (für $c < 0$ besitzt die Funktion f einen Schnittpunkt mit der y-Achse).

2 Definitions- und Wertebereich.
Der Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ bleibt auch durch die Parameter a, c und d erhalten. Der Wertebereich $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$ wird allein durch den Parameter d ebenfalls nicht beeinflusst. Kommen allerdings a und/oder c ins Spiel, so ändert sich der Wertebereich:
1. Fall: $a > 0$. Es folgt $\mathbb{W} =]c; \infty[$.
2. Fall: $a < 0$. Es folgt $\mathbb{W} =]-\infty; c[$.

3 Verhalten im Unendlichen.
Das Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ wird durch die Parameter a und c beeinflusst.

Nachgefragt

KX ■ Karim hat recht, in beiden Fällen haben die Parameter die gleiche Wirkung:
- Multiplikation mit einer Konstanten: Stauchung bzw. Streckung des Graphen in y-Richtung.
- Addition einer Konstanten: Verschiebung des Graphen entlang der y-Achse.
- Veränderung des Arguments der Funktion durch Addition einer Konstanten: Verschiebung in x-Richtung .

KX ■ Salaa hat nicht recht: Eine Exponentialfunktion ist entweder monoton steigend oder monoton fallend. Damit geht der Graph entweder durch zwei oder drei Quadranten, niemals aber durch alle vier.

Aufgaben

K1 **1**

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} -6^x - 8 = -8$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} -6^x - 8 = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} -0{,}5^x + 3 = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} -0{,}5^x + 3 = 3$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}(0{,}5^x - 9) = \infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2}(0{,}5^x - 9) = -4{,}5$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x - 3^x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} 2^x - 3^x = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3 \cdot 0{,}1^x - 4 = \infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} 3 \cdot 0{,}1^x - 4 = -4$

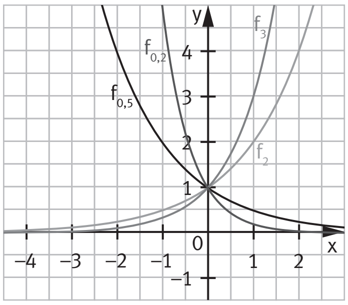
f) $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{5}{3} \cdot (3^x - 6) = -10$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} -\frac{5}{3} \cdot (3^x - 6) = \infty$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} -(4-2)^x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} -(4-2)^x = -\infty$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} -0{,}2^x + 5^x = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} -0{,}2^x + 5^x = \infty$

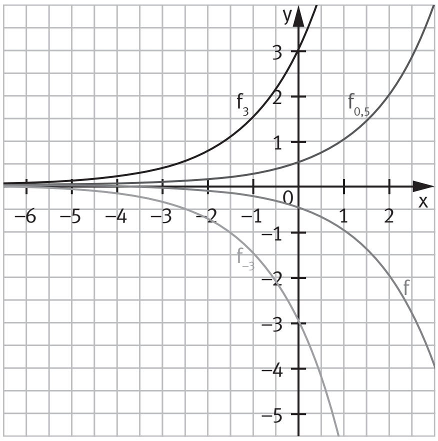
i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{6} \cdot 1{,}5^x - 4 \cdot \frac{1}{2} = -2$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{6} \cdot 1{,}5^x - 4 \cdot \frac{1}{2} = \infty$

KX **2** **a)**



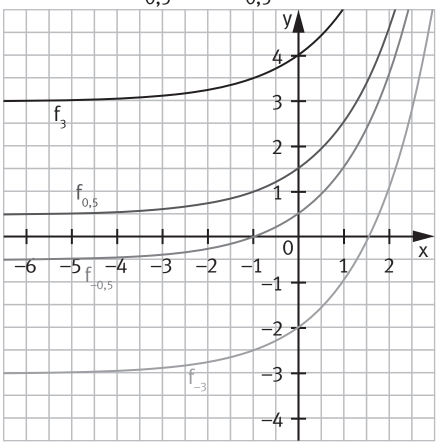
Für b = 0,2 und b = 0,5 fällt der Graph monoton, für b = 2 und b = 3 steigt er monoton.
$f_{0,5}$ entsteht aus f_2 durch Spiegelung an der y-Achse (und umgekehrt).

b)



Vom Vorfaktor hängt ab, ob die Funktion negative oder positive Werte annimmt.
f_3 entsteht aus f_{-3} durch Spiegelung an der x-Achse (und umgekehrt). Analoges gilt für die Funktionen $f_{0,5}$ und $f_{-0,5}$.

c)



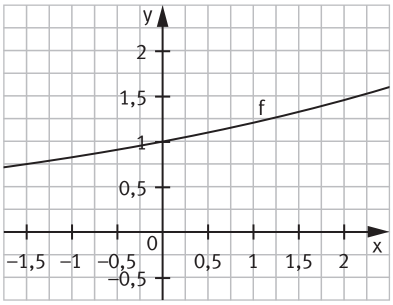
Der Parameter c verschiebt die Funktion $f(x) = 2^x$ entlang der y-Achse. Dadurch können auch negative Werte angenommen werden und Schnittpunkte mit der x-Achse sind möglich (siehe $f_{-0,5}$ und f_{-3}).

KX **3** Lösungsmöglichkeiten:

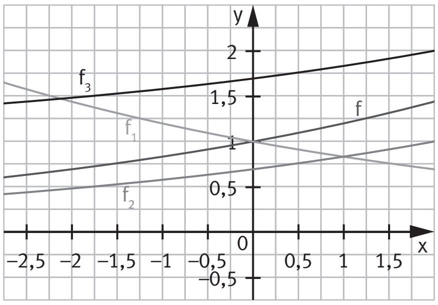
a) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ **b)** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 2$ **c)** $f(x) = 2^x + 3$

KX **4** Da Sabine weiß, dass f(x) = a · 2x eine Asymptote bei y = 0 hat, kann sie die Funktion mit c = 2 um 2 Einheiten nach oben verschieben, wodurch die Funktion bei y = 2 eine waagrechte Asymptote hat. Anschließend setzt sie den gegebenen Punkt, durch den der Funktionsgraph verläuft, in die Funktionsgleichung ein. Mit c = 2 und Auflösen nach a erhält sie den konstanten Vorfaktor a. Somit kann sie die Funktionsgleichung vollständig angeben.

KX **5** **a)**



b)



KX **6** ① Der Graph von g verläuft durch die Punkte (0|3) und (1|1,5).

$y = a \cdot 0{,}5^x + c$

I $3 = a \cdot 0{,}5^0 + c$

II $1{,}5 = a \cdot 0{,}5^1 + c$

$\Rightarrow c = 0,\ a = 3$

$g(x) = 3 \cdot 0{,}5^x$

a = 3 bewirkt eine Streckung des Graphen von f.

② Der Graph von h verläuft durch die Punkte (0|0) und (2|1,5).

$y = a \cdot 0{,}5^x + c$

I $0 = a \cdot 0{,}5^0 + c$

II $1{,}5 = a \cdot 0{,}5^2 + c$

$\Rightarrow a = -2,\ c = 2$

$h(x) = -2 \cdot 0{,}5^x + 2$

a = –2 bewirkt eine Streckung des Graphen und gleichzeitig eine Spiegelung an der x-Achse.
c = 2 bewirkt eine Verschiebung um 2 Einheiten in positive y-Richtung.

③ Der Graph von k verläuft durch die Punkte (0|5) und (3|1,5).

$y = a \cdot 0{,}5^x + c$

I $5 = a \cdot 0{,}5^0 + c$

II $1{,}5 = a \cdot 0{,}5^3 + c$

$\Rightarrow a = 4,\ c = 1$

$k(x) = 4 \cdot 0{,}5^x + 1$

a = 4 bewirkt eine Streckung des Graphen, c = 1 bewirkt eine Verschiebung um 1 Einheit entlang der positiven y-Achse.

KX **7** **a)** grüner Graph: $y = 2^{-x} - \frac{11}{3}$

roter Graph: $y = 2^{x} - \frac{11}{3}$

b) blauer Graph: $y = 2{,}5^{x}$

gelber Graph: $y = 2{,}5^{-x}$

grüner Graph: $y = -2{,}5^{x}$

roter Graph: $y = -2{,}5^{-x}$

c) **I. und II. Quadrant:**

roter Graph: $y = \frac{1}{3} \cdot 4^{x} + 1$

blauer Graph: $y = \frac{1}{3} \cdot 4^{x} + \frac{1}{3}$

grüner Graph: $y = \frac{1}{3} \cdot 4^{x}$

III. und IV. Quadrant:

roter Graph: $y = -\frac{1}{3} \cdot 4^{-x} - 1$

blauer Graph: $y = -\frac{1}{3} \cdot 4^{-x} - \frac{1}{3}$

grüner Graph: $y = -\frac{1}{3} \cdot 4^{-x}$

KX **8** **Hinweis zu Teilaufgabe c):** Im ersten Druck der ersten Auflage befindet sich ein Druckfehler. Die Bedingung an den Grenzwert muss lauten $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$.

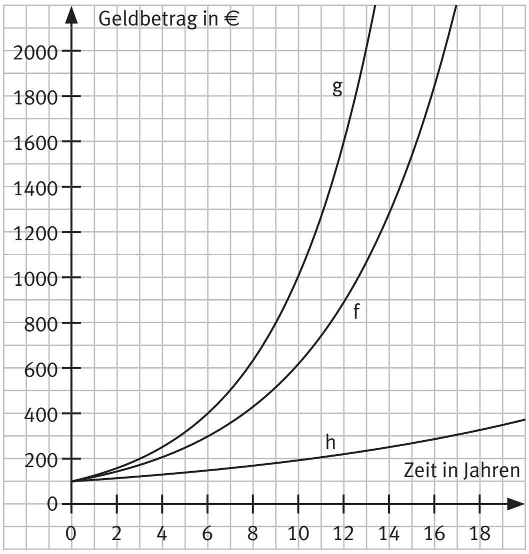
a) $f(x) = 0{,}5 \cdot 4^{x} + 1{,}5$ **b)** $f(x) = 4 \cdot 1{,}2^{x} - 4{,}8$ **c)** $f(x) = -2 \cdot 2^{x} + 3$

KX **9** **a)** rotes Angebot: $f(x) = 20\,000 \cdot 1{,}201x$ (f: Geldbetrag in €, x: Zeit in Jahren)

gelbes Angebot: $g(x) = 2000 \cdot 1{,}260x$ (g: Geldbetrag in €, x: Zeit in Jahren)

grünes Angebot: $h(x) = 10\,000 \cdot 1{,}068x$ (h: Geldbetrag in €, x: Zeit in Jahren)

b)



c) Bei der derzeitigen „Nullzinsphase“ (um das Jahr 2017) sind bei einer Geldanlage, die nicht auf Fonds oder Aktien fußt, bereits Zinsen über 3 % sehr kritisch zu bewerten. Zinsen um 20 % sind unseriös, denn aktuell gibt der Geldmarkt die versprochenen Zinsen nicht her. Ausnahmen sind evtl. relativ risikoreiche Aktiengeschäfte.

KX **10** Im Folgenden gibt x die Anzahl in Jahren bzw. Tagen und f die Restmasse an radioaktivem Material an.

a) $f(x) = 1\,\text{kg} \cdot \sqrt[30]{0{,}5}^{\,x}$

$f(100) = 1\,\text{kg} \cdot \sqrt[30]{0{,}5}^{\,100} \approx 1\,\text{kg} \cdot 0{,}977^{100} \approx 0{,}098\,\text{kg}$

b) $f(x) = 15\,\text{t} \cdot \sqrt[8]{0{,}5}^{\,x}$

$f(28) = 15\,\text{t} \cdot \sqrt[8]{0{,}5}^{\,28} \approx 15\,\text{t} \cdot 0{,}917^{28} \approx 1{,}326\,\text{t}$

c) $f(x) = 7\,\text{g} \cdot \sqrt[1620]{0{,}5}^{\,x}$

$f(2000) = 7\,\text{g} \cdot \sqrt[1620]{0{,}5}^{\,2000} \approx 7\,\text{g} \cdot 0{,}99957 \approx 2{,}962\,\text{g}$

KX **11** $k(12) = 20 + 40 \cdot 2^{-0{,}06 \cdot 12} \approx 44{,}3$ (°C)

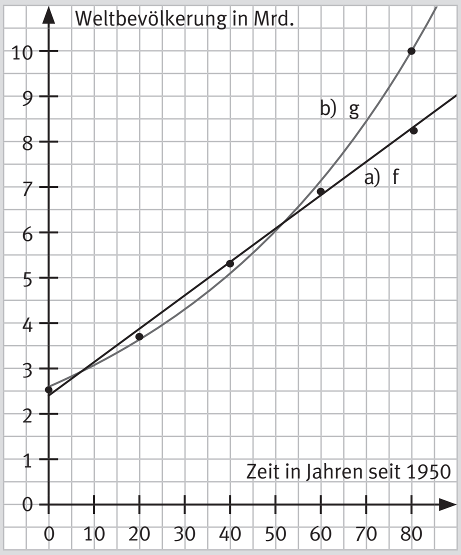
Alfredos Kaffee ist noch nicht kalt.

Wissen

KX
- Die Tabelle entspricht der im Schulbuch.

KX
- **a)** Möglicher Funktionsterm bei linearer Regression:
  $f(x) = 0{,}074x + 2{,}402$ (x in Jahren seit 1950)
  $f(80) \approx 8{,}32$ (Mrd Menschen auf der Erde im Jahr 2030)

  b) Möglicher Funktionsterm bei exponentieller Regression:
  $g(x) = 2{,}595 \cdot e^{0{,}017x}$ (x in Jahren seit 1950)
  $g(80) \approx 10{,}11$ (Mrd Menschen auf der Erde im Jahr 2030)



KX
- $f(x) = 82{,}7 \cdot 0{,}998^x$ (x in Jahren seit 2016)
  $f(-66) \approx 94{,}4$ (Mio Menschen im Jahr 1950)
  Diese Zahl stimmt mit Sicherheit nicht mit dem tatsächlichen Wert überein, da sich eine Wachstumsrate über einen solch langen Zeitraum öfter verändert.

KX
- $f(14) \approx 80{,}4$ (Mio Menschen im Jahr 2030)
  $f(34) \approx 77{,}3$ (Mio Menschen im Jahr 2050)

Entdecken

K3
KX

- Mit $T_H = 5370$, ergibt sich das Alter des Ötzi von ca. 5201 Jahren.
- Die Schüler sollen die einzelnen Parameter im Kontext erläutern.

Nachgefragt

K1

- Nein, das stimmt nicht, da $2^1 = 2 \neq 0$.
  Außerdem gilt: Die Gleichung $2^x = 0$ hat keine Lösung.

KX

- Nein, zur Lösung dieser Gleichung muss die dritte Wurzel aus 27 gezogen werden.
  1 $\log_a 1 = 0$, denn $a^0 = 1$.
  2 $\log_a \frac{1}{a} = -1$, denn $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Aufgaben

KX **1**

	a)	b)	c)	d)
Potenz	$4^3 = 64$	$17{,}5^2 = 306{,}25$	$7^3 = 343$	$5^6 = 15\,625$
Wurzel	$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt{306{,}25} = 17{,}5$	$\sqrt[3]{343} = 7$	$\sqrt[6]{15\,625} = 5$
Logarithmus	$\log_4 64 = 3$	$\log_{17,5} 306{,}25 = 2$	$\log_7 343 = 3$	$\log_5 15\,625 = 6$

KX **2** **a)** 4; 9; 1; 4; 5 **b)** −2; −4; −6; −3; −1

KX **3** **a)** $5^x = 125$, $x = 3$ **b)** $8^2 = x$, $x = 64$
c) $x^3 = 216$, $x = 6$ **d)** $10^x = 1000$, $x = 3$
e) $10^x = 0{,}00001$, $x = -5$ **f)** $5^x = 230$, $x = 3{,}38$

KX **4** **a)** 4 **b)** 1,45
c) 3,26 **d)** −2,02
e) 2 **f)** 0,82
g) 0,35 **h)** −2,89
i) 0,96 **j)** 1,97
k) −2,33 **l)** −0,65

KX **5** **a)** $x = \sqrt[4]{625} = 5$ **b)** $a = \sqrt[8]{6561} = 3$
c) $m = \sqrt[5]{120} = 2{,}61$ **d)** $y = \sqrt[10]{72} = 1{,}53$
e) $x = \log_4 256 = 4$ **f)** $b = \log_5 100 = 2{,}86$
g) $n = \log_{0,5} 0{,}05 = 4{,}32$ **h)** $y = \log_{0,2} 15 = -1{,}68$

KX **6** **a)** 0,48; 1,48; 2,48; 3,48; 4,48
b) 0,85; 1,85; 2,85; 3,85; 4,85
c) −0,30; −1,30; −2,30; −3,30; −4,30
Auffallend ist, dass sich mit jeder weiteren Zehnereinheit das Ergebnis um eins erhöht.
Begründung: $\lg a \cdot 10^x = \lg a \cdot 10^{x-1} + \lg 10 = \lg a \cdot 10^{x-1} + 1$.

KX **7** **a)** $\lg\frac{x}{y}$ **b)** $\lg\frac{xy^3}{z^2}$
c) $\lg\frac{a}{b}$ **d)** $\lg x^2y$
e) $\lg 10a$ **f)** Es ist keine weitere Vereinfachung möglich.
g) $\lg 3a^2$ **h)** $\lg 6$

KX **8** **a)** $\lg a + \lg b + \lg c + \lg d$ **b)** $\lg a + \lg b - \lg c$
c) $2\lg a + \lg b$ **d)** $4 \cdot (\lg a + \lg b)$
e) $3 \cdot (\lg a + \lg b)$ **f)** $\lg a + \lg b - \lg 2c$
g) $\lg a + \frac{1}{2}\lg b - \lg c$ **h)** $\lg b - \frac{1}{3}\lg a$
i) $\lg 2 + 3\lg a + \frac{1}{2} \cdot (\lg 8 + \lg a) = \lg 2 + \frac{7}{2}\lg a + \frac{1}{2}\lg 8$

KX **9** **a)** $\log_2 4 = \log_3 9$ **b)** $\log_{10} < \log_2 10$ **c)** $\log_2 10 > \log_3 10$
d) $\log_5 125 = \log_3 27$ **e)** $\log_5 35 < \log_3 35$ **f)** $\log_6 108 < \log_2 12$
g) $\log 1000 < \log_2 16$ **h)** $1 + \log_2 8 < \log_2 32$ **i)** $(\log_2 2)^2 = (\log_4 4)^4$

KX **10** **a)** $\log_5 35 = \log_5(5 \cdot 7) = \log_5 5 + \log_5 7 = 1 + \log_5 7 \approx 1 + 1{,}21 = 2{,}21$
b) $\log_5\left(\frac{1}{7}\right) = -\log_5 7 \approx -1{,}21$
c) $\log_5 1{,}4 = \log_5\left(\frac{7}{5}\right) = \log_5 7 - 1 \approx 1{,}21 - 1 = 0{,}21$
d) $\log_5 175 = \log_5(25 \cdot 7) = 2 + \log_5 7 \approx 2 + 1{,}21 = 3{,}21$
e) $\log_5 49 = 2 \cdot \log_5 7 \approx 2 \cdot 1{,}21 = 2{,}42$
f) $\log_5\sqrt{7} = 0{,}5 \cdot \log_5 7 \approx 1{,}21 : 2 = 0{,}605$

KX **11** $b^x = p$; $x = \log_b p$; $rx = r \cdot \log_b p$ (1)
$p^r = (b^x)^r = b^{rx}$; $\log_b(p^r) = rx$ (2)
Aus (1) und (2) folgt $\log_b(p^r) = r \cdot \log_b p$.

KX **12** $\log_b a = \log_b a - 0 = \log_b a - \log_b 1 = -(\log_b 1 - \log_b a) = -\log_b\left(\frac{1}{a}\right)$:
Der Logarithmus jeder Zahl a zwischen 0 und 1 (z. B. a = 0,25) ist also einfach die Gegenzahl des Logarithmus ihres Kehrwerts $\frac{1}{a}$ (im Beispiel: 4), die größer als 1 ist (im Beispiel: 4 > 1) und muss deshalb nicht eigens tabelliert werden.

KX **13** **a)** Individuelle Lösungen möglich.
b) $b^x = p$; $x = \log_b p$ (1)
$\log_a(b^x) = \log_a p$; $x \cdot \log_a b = \log_a p$; $\mid : \log_a b$
$x = \frac{\log_a p}{\log_a b}$ (2)
Aus (1) und (2) folgt $\log_b p = \frac{\log_a p}{\log_a b}$
c) $\log_2 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 2} \approx 3{,}322$
$\log_3 10 = \frac{\log 10}{\log 3} \approx 2{,}096$
$\log_2 18 = \frac{\log 18}{\log 2} \approx 4{,}170$
$\log_3 18 = \frac{\log 18}{\log 3} \approx 2{,}631$
$\log_2 100 = \frac{\log 100}{\log 2} \approx 6{,}644$
$\log_3 100 = \frac{\log 100}{\log 3} \approx 4{,}192$
$\log_5 8 = \frac{\log 8}{\log 5} \approx 1{,}292$

KX **14 a)** Ihr Logarithmuswert liegt zwischen 2 und 3; die Zahl vor dem Komma ist stets 2.

b) Für alle fünfstelligen (natürlichen) Zahlen x gilt $10\,000 \le x \le 99\,999$;
$1 \cdot 10^4 \le x \le 9{,}9999 \cdot 10^4$; $4 \le \log x < 5$.
Für alle sechsstelligen Zahlen y gilt $100\,000 \le y \le 999\,999$;
$1 \cdot 10^5 \le y \le 9{,}99999 \cdot 10^5$; $5 \le \log y < 6$.
Für alle fünfzehnstelligen Zahlen z gilt
$100\,000\,000\,000\,000 \le z \le 999\,999\,999\,999\,999$;
$1 \cdot 10^{14} \le z \le 9{,}99999999999999 \cdot 10^{14}$; $14 \le \log z < 15$.

c) $\lg 22^{22} = 22 \lg 22 \approx 22 \cdot 1{,}34 = 29{,}48$:
Der Wert der Potenz 22^{22} besitzt 30 Ziffern.
$\lg 55^{55} = 55 \lg 55 \approx 55 \cdot 1{,}74 = 95{,}7$:
Der Wert der Potenz 55^{55} besitzt 96 Ziffern.
$\lg 99^{99} = 99 \lg 99 \approx 99 \cdot 1{,}996 = 197{,}604$:
Der Wert der Potenz 99^{99} besitzt 198 Ziffern.
$\lg[(99^{99})^{99}] = \lg(99^{99 \cdot 99}) = 99 \cdot 99 \lg 99 \approx 19\,559{,}22$:
Der Wert der Potenz $(99^{99})^{99}$ besitzt 19 560 Ziffern.

d) $\lg(2^{30\,402\,457} - 1) \approx 30\,402\,457 \cdot \lg 2 \approx 9\,152\,051{,}499$:
Die Primzahl besitzt tatsächlich 9 152 052 Ziffern.

e) 1 Mersenne-Zahlen sind Werte von Termen der Form $2^n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$, also die Zahlen
1; 3; 7; 15; 31; 63; … .
Mersenne-Primzahlen sind z. B.:
$2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 3^1$, $2^7 - 1 = 127$ und $2^{13} - 1 = 8\,191$.
Hinweis: $2^{11} - 1 = 2\,047 = 23 \cdot 89$ ist nicht prim.

2 $2^n - 1 \ge 10^{100\,000\,000}$;
$2^n > 10^{1000\,000\,000}$;
$n > \frac{1\,000\,000\,000}{\lg 2}$;
$n > 3\,321\,928\,095$: Der Exponent n muss mindestens gleich 3 321 928 096 sein.

KX **15** $\lg\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \lg\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \lg\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ldots + \lg\left(1 + \frac{1}{99}\right) = \lg\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{98} \cdot \frac{100}{99}\right) = \lg 100 = 2$

KX **16 a)** $\log_3(x^2 + 2xy + y^2) = \log_3[(x + y)^2] = 2 \log_3(x + y) = 2 \cdot 2 = 4$

b) $\log_3\sqrt{x + y} = 0{,}5 \cdot \log_3(x + y) = 0{,}5 \cdot 2 = 1$

c) $\log_3 \frac{1}{x + y} = \log_3 1 - \log_3(x + y) = 0 - 2 = -2$

d) $x + y = 3^2 = 9$

e) $(x + y)^{x + y} = 9^9 \approx 3{,}87 \cdot 10^8$

KX **17 a)** $4 \cdot 0{,}5^x = 2; \quad | : 4$
$0{,}5^x = 0{,}5$;
$x = 1{,}00$

b) $20 \cdot 0{,}9^x = 10; \quad | : 20$
$0{,}9^x = 0{,}5$;
$x = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}9} \approx 6{,}58$

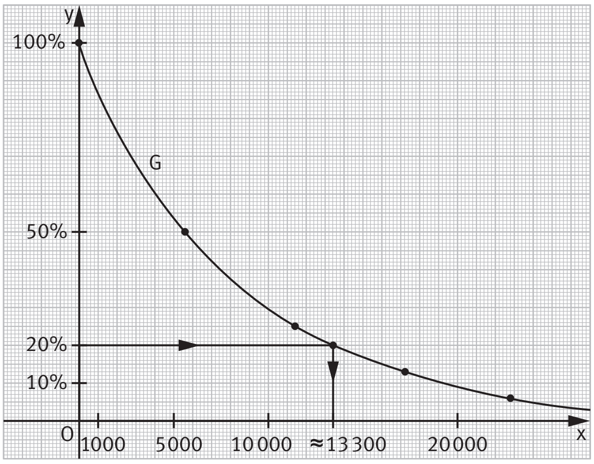
c) $8 \cdot 0{,}06^x = 4; \quad | : 8$
$0{,}06^x = 0{,}5$;
$x = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}06} \approx 0{,}25$

d) $100 \cdot 0{,}75^x = 50; \; | : 100$
$0{,}75^x = 0{,}5$;
$x = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}75} \approx 2{,}41$

KX **18** $\log(b^r) = \log(\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{\text{r-mal}}) = \underbrace{\log b + \log b + \ldots + \log b}_{\text{r-mal}} = r \cdot \log b$

KX **19**

Anzahl der Halbwertsperioden	0	1	2	3	4
Anzahl der Jahre	0	5730	11460	17190	22920
Anteil des verbleibenden C14	1 = 100 %	$\frac{1}{2}$ = 50%	$\frac{1}{4}$ = 25%	$\frac{1}{8}$ = 12,5%	$\frac{1}{16}$ = 6,25%



a) 1 Aus dem Graphen G ergibt sich ein Alter von etwa 13 300 Jahren.

2 $\frac{m}{m_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$; $20\,\% = \left(\frac{1}{2}\right)^n$; $n \cdot \lg\left(\frac{1}{2}\right) = \lg 0{,}20$; $\quad | : \lg\left(\frac{1}{2}\right)$

$n = \frac{\lg 0{,}20}{\lg \frac{1}{2}} \approx 2{,}32$; $t \approx 2{,}32 \cdot t_H \approx 2{,}32 \cdot 5730\text{ a} \approx 13\,000\text{ a}$

b) $0{,}5^x = 0{,}533$;

$x \lg 0{,}5 = \lg 0{,}533$; $\quad | : \lg 0{,}5$

$x = \frac{\lg 0{,}533}{\lg 0{,}5} = 0{,}90779\ldots$;

$\frac{t}{t_H} = 0{,}90779\ldots$; $\quad | \cdot t_H$

$t \approx 0{,}9078 \cdot 5730\text{ a} \approx 5200\text{ a}$.

c) $0{,}5^x = 0{,}67$; $x \lg 0{,}5 = \lg 0{,}67$; $x = \frac{\lg 0{,}67}{\lg 0{,}5} = 0{,}57776\ldots$;

$t \approx 0{,}5778 \cdot 5730\text{ a} \approx 3300\text{ a}$:

Tutanchamun ist vor etwa 33 Jahrhunderten gestorben.

KX **20** **a)** 1 $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_H}}$; $t = 1\text{ d}$; $m \approx (1 - 8{,}3\,\%) \cdot m_0 = 0{,}917 m_0$;

$0{,}917 m_0 \approx m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1\text{ d}}{t_H}}$; $\frac{1\text{ d}}{t_H} \approx \frac{\lg 0{,}917}{\lg\left(\frac{1}{2}\right)}$; $t_H \approx \frac{\lg\left(\frac{1}{2}\right)}{\lg 0{,}917\text{ d}} \approx 8{,}00\text{ d}$

2 $m \approx 1000\text{ g} \cdot 0{,}917^{120} \approx 31\text{ mg}$

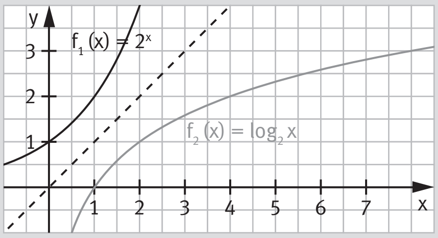
b) $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_H}}$; $\frac{m(t)}{m_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{33\text{ a}}}$

$\frac{m(10\text{ a})}{m_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{33}} = 0{,}8105\ldots \approx 81\%$

t	10 a	20 a	30 a	100 a
$\frac{m(t)}{m_0}$	81 %	66 %	53 %	12 %

KX **21** **a)** 14,12 Jahre **b)** 53,66 Jahre **c)** 830,56 Jahre

Entdecken

K3 ■ 

K3 ■ f_1 und f_2 sind symmetrisch bzgl. der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.

K3 ■ f_1 erhält man aus f_2 (und umgekehrt f_2 aus f_1) durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.

Nachgefragt

K1 ■ Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten entspricht der Vertauschung von Funktionswert und Argument.

K3 ■ Das erste Logarithmusgesetzt ist beispielsweise bei der Darstellung der Funktion $f_5(x) = \log_{10}(5 \cdot x)$ hilfreich, denn es genügt im Grunde, den Funktionsverlauf der Funktion $f(x) = \log_{10} x$ zu kennen. Der Graph von f_5 ergibt sich dann durch eine Verschiebung entlang der y-Achse um die Konstante $\log_{10}(5)$:

$$f_5(x) = \log_{10}(5 \cdot x) = \log_{10}(5) + \log_{10} x = \log_{10}(5) + f(x).$$

Allgemein ausgedrückt, gilt für eine beliebige Konstante a und $c = \log_b(a)$:

$$f(a \cdot x) = \log_b(a \cdot x) = \log_b(a) + \log_b x = f(x) + c.$$

Eine Veränderung des Arguments x durch einen Parameter a entspricht also der Verschiebung der Funktion in y-Richtung (um $\log_b(a)$ Einheiten).

K3 ■ Sei $a > 0$. Es gilt: $P(a|b) \in G_f \Leftrightarrow b = \log_3 a \Leftrightarrow 3^b = a \Leftrightarrow Q(b|a) \in G_g$.
Die Einschränkung $a > 0$ ist nötig, da die Logarithmusfunktion nur für positive Zahlen definiert ist.

Aufgaben

KX **1 a)** ①

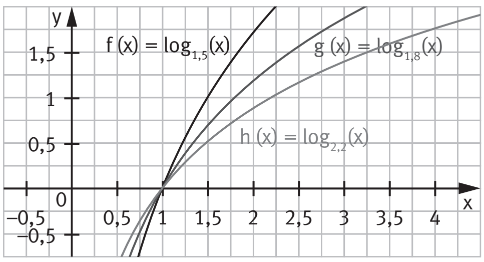
x	0,1	0,2	0,3	1	1,2	2,1	3	5
$f(x) = \log_{1,5} x$	–5,68	–3,97	–2,97	0	0,45	1,83	2,71	3,97

②

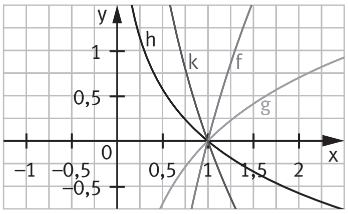
x	0,1	0,2	0,3	1	1,2	2,1	3	5
$g(x) = \log_{1,8}(x)$	–3,92	–2,74	–2,05	0	0,31	1,26	1,87	2,74

③

x	0,1	0,2	0,3	1	1,2	2,1	3	5
$h(x) = \log_{2,2}(x)$	–2,92	–2,04	–1,53	0	0,23	0,94	1,39	2,04

b) 

KX **2** **Hinweis:** Im ersten Druck der ersten Auflage befindet sich ein Druckfehler (die Funktionen h und k sind identisch). Stattdessen wird hier in Teilaufgabe d) die Funktion $k(x) = \log_{0,7} x$ betrachtet.



	a) $f(x) = \log_{1,3} x$	**b)** $g(x) = \log_{2,7} x$
Definitionsbereich	$]0; \infty[$	$]0; \infty[$
Wertebereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Monotonie	monoton steigend	monoton steigend
Nullstellen	(1 | 0)	(1 | 0)
Asymptote	negative y-Achse	negative y-Achse
Gleichung der Umkehrfunktion	$f^{-1}(x) = 1{,}3^x$	$g^{-1}(x) = 2{,}7^x$

	c) $h(x) = \log_{0,3} x$	**d)** $k(x) = \log_{0,7} x$
Definitionsbereich	$]0; \infty[$	$]0; \infty[$
Wertebereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Monotonie	monoton fallend	monoton fallend
Nullstellen	(1 | 0)	(1 | 0)
Asymptote	positive y-Achse	positive y-Achse
Gleichung der Umkehrfunktion	$h^{-1}(x) = 0{,}3^x$	$k^{-1}(x) = 0{,}7^x$

KX **3** 1 – r, 2 – p, 3 – q, 4 – g, 5 – h, 6 – f

4 **a)** $f(x) = \log_{2\sqrt{2}} x$
b) $f(x) = \log_{\sqrt[8]{2}} x$
c) $f(x) = \log_2 x$
d) $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x$
e) Jedes beliebige $b \in \mathbb{R}$ ist möglich
f) $f(x) = \log_{\sqrt[6]{10}} x$

KX **5** **a) + b)**
Der Verbreitung des Gerüchts liegt die Gleichung $f(t) = 2 \cdot 3^t$ zugrunde, wobei t die Anzahl der Stunden bezeichnet. Es bedeutet, dass jeder Schüler das Gerücht an drei andere Schüler pro Stunde weitererzählt. Damit kennen 54 Schüler das Gerücht nach der dritten Stunde und 486 Schüler das Gerücht nach der fünften Stunde.
c) $\frac{1}{2} \cdot 849 = 2 \cdot 3^t$ führt zu $t = 4{,}9$.

KX **6** Das psychophysische Grundgesetz findet Anwendungen in der Astronomie bei der Bestimmung der Helligkeit von Sternen sowie in der Akustik bei der Bestimmung der Tonhöhe. Es wird des Weiteren auch in der Mikroökonomie benutzt als sogenannte Fühlbarkeitsschwelle.

KX **7** **a)** Die Exponentialfunktion schneidet die Abszisse niemals, denn sie nimmt keine nichtpositiven Werte an. Dadurch reicht auch keine endliche Blätterreihe.

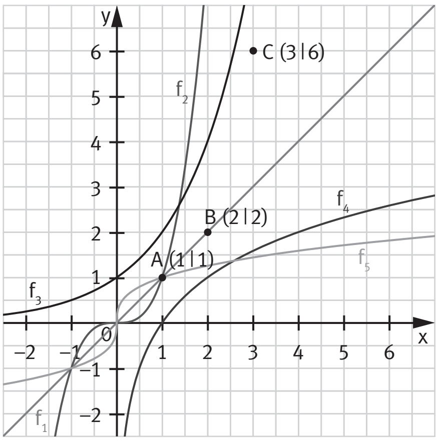
b) Der Abstand von der Erde zur Sonne beträgt 149 600 000 km. Dies entspricht einem Funktionswert von 8,17 [km]. Dies lässt sich auftragen.

c) Ein DIN-A-4-Blatt ist ca. 30 cm lang.
Der Umfang der Erde beträgt 40 075 km. Damit bräuchte man 133 583 334 Blätter, um die Erde einmal zu umlegen. Der Abstand von der Erde zur Sonne beträgt 149 600 000 km.
Zur Sonne bräuchte man daher $5 \cdot 10^{11}$ Blätter.

d) Das Gewicht eines DIN-A-4-Blatts beträgt 5 g. Die Reihe um die Erde würde daher 667 917 kg wiegen. Die Reihe zur Sonne wäre damit 2 493 333 333 kg schwer.

KX **8** Man erkennt folgende Eigenschaften: Die Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten. Die entsprechende Funktion mit dem Kehrwert in der Basis des Logarithmus erhält man durch Spiegelung an der x-Achse. Die korrespondierende Funktion mit negativem Argument erhält man durch Spiegelung an der y-Achse.

KX **9** Hier sind mehrere Lösungen möglich. Exemplarisch vergleichen wir hier die Funktionen für n = 3 und b = 2. Beachte, f_6 ist nur für natürliche Zahlen definiert, d. h. $\mathbb{D}_{f_6} = \mathbb{N}$.



Zum einen kann man die Funktionen nun insgesamt betrachten. Zunächst wächst der Graph von f_3 am schnellsten. Ab x-Werten $x > x_1$ mit $2^{x_1} = x_1^3$ wächst f_2 am schnellsten. Dies gilt für x-Werte mit $x_1 < x < x_2 = 4$. Ab dort ist f_6 die am schnellsten wachsende Funktion.
Eine weitere Möglichkeit ist es, die Funktionen spaltenweise zu vergleichen:

1. Der Graph von f_1 wächst linear und damit schneller als der von f_4. Beachte, dass f_4 nur für b > 1 monoton steigt.
2. f_2 und f_5 sind Funktion und Umkehrfunktion. Für $0 \leq x < 1$ wächst der Graph von f_5 schneller als der von f_2. Für x > 1 verhält es sich genau umgekehrt.
3. Der Graph von f_6 wächst „ab einem gewissen Punkt“ schneller als der von f_3, da bei f_6 die einzelnen Faktoren immer größer werden, während sie bei f_3 konstant sind.

	1	2	3	4	5
f_3	2	$2 \cdot 2 = 4$	8	16	32
f_6	1	$1 \cdot 2 = 2$	6	24	120

KX **10** Wie man am Diagramm sieht, ist $S \geq 0$. Da auch der Graph nur Funktionswert ≥ 0 annimmt, kann k lediglich positive Werte annehmen. Bezüglich r gilt: Für die Stromstärke ist r > 1, für die Länge r = 1 und für die Helligkeit r < 1.

Entdecken

K3 ■ Die Miete wird durch die Gleichung $m(t) = 650 \cdot 1{,}06^t$ und das Gehalt durch $g(t) = 3800 \cdot 1{,}025^t$ beschrieben. Das bedeutet, dass die Miete nach 52,6 Jahren dem Gehalt von Herrn Meyer entspricht.

K3 ■ Nach fünf Jahren entspricht die Miete 20,2 % des Einkommens von Herrn Meyer. Nach zehn Jahren sind es 23,9 % und nach zwanzig Jahren bereits 33,4 %.

Nachgefragt

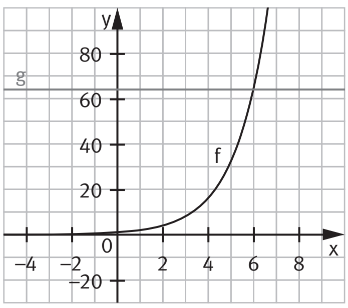
K1 ■ Es ist zwar möglich, aber nicht sinnvoll, den Exponenten bei verschiedenen Basen zu vergleichen. Der Exponent allein sagt nichts darüber aus, ob ein Term groß oder klein ist. Dies hängt vielmehr davon ab, ob die Basis größer oder kleiner eins ist.

KX ■ 1 $x = 0$ 2 $x = 2$

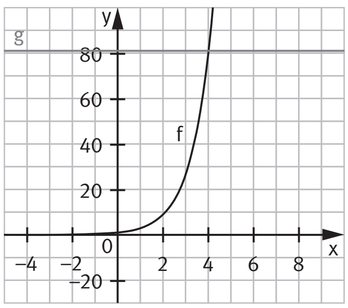
Aufgaben

KX **1** **a)** $x = 0{,}5$ **b)** $x = -1{,}5$ **c)** $x = -1$
d) $x = 2$ **e)** $x = \{\}$ **f)** $x = \{\}$
g) $x = 4$ **h)** $x = -1$ **i)** $x = 9$

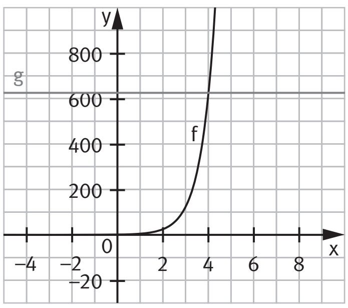
KX **2** **a)** $x = 6$



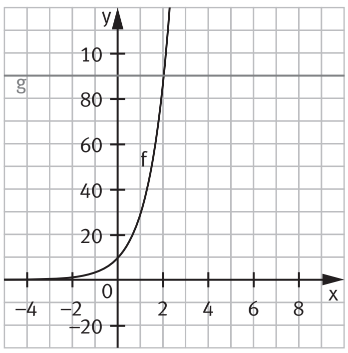
b) $x = 4$



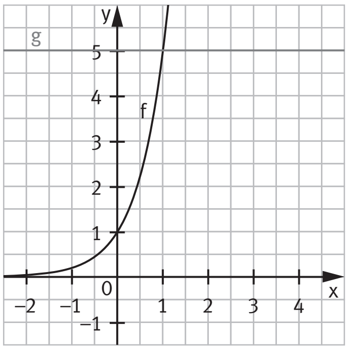
c) $x = 4$



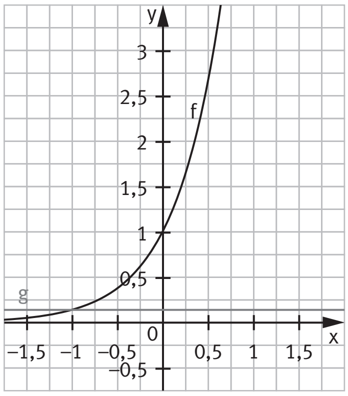
d) $3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$



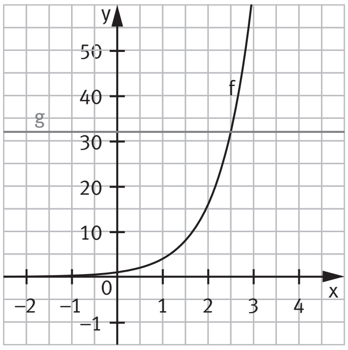
e) $5^x = 5 \Rightarrow x = 1$



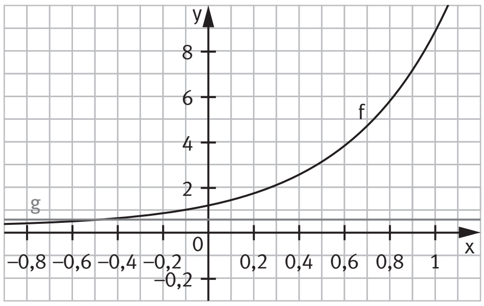
f) $7^x = \frac{1}{7} = 7^{-1} \Rightarrow x = -1$



g) $x = \frac{5}{2}$



h) $x = -\frac{1}{2}$



K X **3** **a)** $2^{x+1} = 2^2 \Leftrightarrow x = 1$

b) $3^{x-5} = 3^4 \Leftrightarrow x = 9$

c) $2^{2x+3} = 2^{-5} \Leftrightarrow 2x = -8 \Leftrightarrow x = -4$

d) $3^{5x-1,5} = 3^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow 5x = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{9}{20}$

K X **4** $x = \log_2 10 \approx 3,3$ bzw. $x = \log_2 20 \approx 4,3$

K X **5** **a)** $x = \log_3 2 \approx 0,63$; $\mathbb{L} = \{0,63\}$

b) $x = \log_4 0,8 \approx -0,16$; $\mathbb{L} = \{-0,16\}$

c) $x = \log_{10} 3,7 \approx 0,57$; $\mathbb{L} = \{0,57\}$

d) $x = -\log_3 0,8 \approx 0,2$; $\mathbb{L} = \{0,2\}$

e) $2^{2x+2} - 2^{2x+1} = 1 \Leftrightarrow 2^{2x+1} \cdot (2-1) = 1 = 2^0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$; $\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

f) $2^{2x+3} - 2^{2+2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x+2} \cdot (2-1) = 1 = 2^0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$; $\mathbb{L} = \{-1\}$

g) $2^{3x+1} \cdot (2^4 - 2^2 - 1) = 176 \Leftrightarrow 2^{3x} \cdot (16 - 4 - 1) = 88 \Leftrightarrow 2^{3x} = 8 = 2^3 \Leftrightarrow x = 1$; $\mathbb{L} = \{1\}$

K X **6** **a)** $1,5^{x-2} = 1,5^1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$

b) $4^{x+3} = 128 \Leftrightarrow 4^x = 2 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $8,5^x \cdot 8,5^{2,7} = 8,5^3 \Leftrightarrow x = 0,3$

K 3 **7** **a)** $100\,\text{mg} = 200\,\text{mg} \cdot 2,5^{-0,4t}$ $t \approx 1,89$ (Stunden)

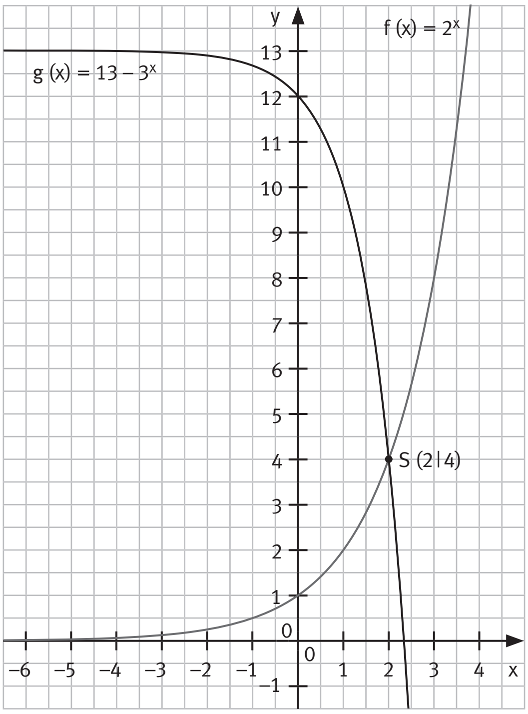
$50\,\text{mg} = 200\,\text{mg} \cdot 2,5^{-0,4t}$ $t \approx 3,78$ (Stunden)

$20\,\text{mg} = 200\,\text{mg} \cdot 2,5^{-0,4t}$ $t \approx 6,28$ (Stunden)

b) $30\,\text{mg} = 200\,\text{mg} \cdot 2,5^{-0,4t}$ $t \approx 5,18$ (Stunden)

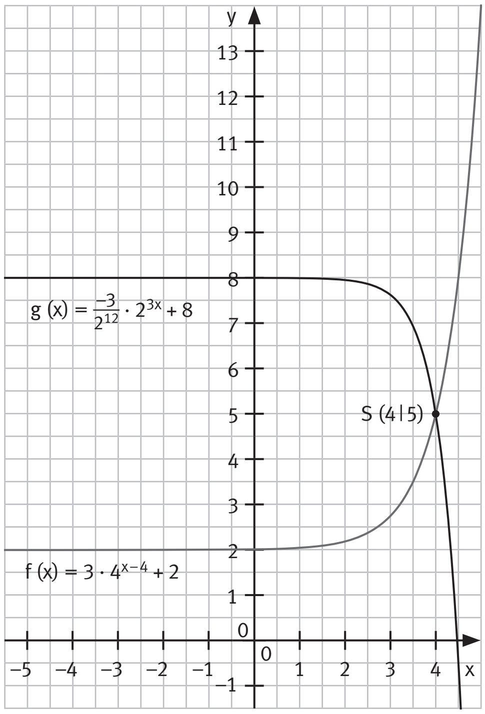
K5 **8** **a)** Die Gleichung wurde zeichnerisch gelöst. Die x-Koordinate des Schnittpunkts ist die Lösung der Gleichung.

b) 1



$x = 2$

2



$x = 4$

KX **9** **a)** $2^{2x} = 12 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^x \cdot 2^x = 12 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^x = 12 \Leftrightarrow x = \log_2 12 \approx 3{,}58$

b) $(\lg x)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \lg x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lg x + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \lg x = 1 \Leftrightarrow x = 10$

c) Anwendung der Rechenregeln für den Logarithmus ergibt $0 = 2 \cdot \lg x \Leftrightarrow x = 1$

KX **10** **a)** $x = \log_3 10 \approx 2{,}1$; Logarithmieren

b) $x = \log_2 \frac{9}{5} \approx 0{,}85$; Logarithmieren

c) $x = \log\left(\frac{16}{15}\right) \approx 0{,}05$; Logarithmieren

d) $x = \log_{1,5} 3{,}28 - 6 \approx -3{,}07$; Logarithmieren

e) $x = \log_2 \frac{1}{10} \approx 2{,}68$; Logarithmieren

f) $x = \log_{3,6} 3{,}5 - 1 \approx -0{,}02$; Logarithmieren

g) $3^3 - 1 = 26 \cdot 3^{2-x} \Leftrightarrow 3^0 = 3^{2-x} \Leftrightarrow x = 2$; Exponentenvergleich

h) $x = \frac{1}{2} \cdot \left(\log_3\left(\frac{35}{6}\right) + 7\right) \approx 4{,}3$; Logarithmieren

i) $x = \log_7 \frac{1{,}6}{2{,}1} - 8 \approx -8{,}14$ Logarithmieren

j) Es gibt keine Lösung, da der Logarithmus nicht für negative Zahlen definiert ist.

k) $3 \cdot 6^{3x+2} = 3 \cdot 6^3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$; Exponentenvergleich

l) $3^{x+4} = 3^{3 \cdot (2x+3)} \Leftrightarrow x = -1$; Exponentenvergleich

KX **11** **a)** Der letzte Schritt ist falsch, denn von gleichen Exponenten kann man nicht generell auf die gleiche Basis schließen: $a^0 = 1$, unabhängig von der Wahl von a. Im vorliegenden Beispiel wissen wir, dass unterschiedliche Basen vorliegen ($3 \neq 4$), deshalb muss der Exponenten gleich null sein, also $x = -5$.

b) Der letzte Schritt ist falsch, denn $\log\left(\frac{1}{3}\right)$ ist eine negative Zahl. Dividiert man aber beide Seiten einer Ungleichung durch eine negative Zahl, so dreht sich die Ungleichung um.

KX **12 a)** 1 $S_y\,(0|1)$, einen Schnittpunkt mit der x-Achse gibt es nicht.

2 $S_y\left(0\middle|-\frac{10}{3}\right)$, $S_x\,(-\log_3 6 \approx -1{,}63|0)$

3 $S_y\left(0\middle|-\frac{5}{9}\right)$, $S_x\left(\log_3\frac{1}{4}+2 \approx 0{,}74\middle|0\right)$

4 $S_y\,(0|60{,}5)$, $S_x\,(2{,}14|0)$

b) 1 $S\left(\log_2\frac{7}{4} \approx 0{,}81\middle|3{,}5\right)$

2 $S\,(-\log_3\frac{15}{4} \approx -1{,}20|-1{,}5)$

3 $S\,(9|8747)$

4 $S\,(5|-1{,}98)$

KX **13 a)** $\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ **b)** $\mathbb{L} = \{-1{,}5\}$ **c)** $0{,}5^y = 2;\ \mathbb{L} = \{-1\}$

d) $2^{3x} = 64;\ \mathbb{L} = \{2\}$ **e)** $\mathbb{L} = \{\,\}$ **f)** $2^{3y} = -6;\ \mathbb{L} = \{\,\}$

g) $3y = \frac{1}{9};\ \mathbb{L} = \left\{\frac{1}{27}\right\}$ **h)** $3^y = -3{,}5;\ \mathbb{L} = \{\,\}$

i) $4^{-x} = \frac{1}{2};\ \mathbb{L} = \{0{,}5\}$ **j)** $1 + 3x = 2;\ \mathbb{L} = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

k) $\mathbb{L} = \{8\}$ **l)** $2^{3x+1} = 2^3;\ 3x + 1 = 3;\ \mathbb{L} = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

m) $2^{x^2-1} = 2^3;\ x^2 - 1 = 3;\ x^2 = 4;\ \mathbb{L} = \{-2;\ 2\}$

n) $2^{\sqrt{x}-1} = 2^3;\ \sqrt{x} - 1 = 3;\ \sqrt{x} = 4;\ x = 16;\ \mathbb{L} = \{16\}$

o) $2^x = 3;\ x = \lg_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1{,}58;\ \mathbb{L} = \{\lg_2 3\} = \left\{\frac{\lg 3}{\lg 2}\right\}$

p) $4 \cdot 2^x - 1 = 63;\ 4 \cdot 2^x = 64;\ 2^x = 16;\ \mathbb{L} = \{4\}$

q) $10^y = 64;\ y = \lg 64 \approx 1{,}81;\ \mathbb{L} = \{\lg 64\}$

r) $1 - 2y = \lg 64; \quad | -1$

$-2y = \lg 64 - 1 = \lg 6{,}4; \quad | : (-2)$

$y = -\frac{1}{2}\lg 6{,}4 = \lg\left(\frac{1}{\sqrt{6{,}4}}\right) = \lg\left(\frac{1}{8}\sqrt{10}\right) \approx -0{,}403;\ \mathbb{L} = \left\{\lg\left(\frac{1}{8}\sqrt{10}\right)\right\}$

s) $10^y - 6 = \pm 8; \quad | +6$

$10^{y_1} = 14;\ y_1 = \lg 14 \approx 1{,}15;$

$10^{y_2} = -2$: keine reelle Lösung;

$\mathbb{L} = \{\lg 14\}$

t) $2 \cdot 10^{y+1} = 200; \quad | : 2$

$10^{y+1} = 100 = 10^2;\ y + 1 = 2;\ \mathbb{L} = \{1\}$

u) $(x + 8)(x + 7) = 0;$

$\mathbb{L} = \{-8;\ -7\}$

v) $\frac{9x}{x^2 + 20} + 20 = 1; \quad | \cdot (x^2 + 20)$

$9x = x^2 + 20; \quad | -9x$

$x^2 - 9x + 20 = 0;$

$(x - 4)(x - 5) = 0;$

$x_1 = 4;\ x_2 = 5;\ \mathbb{L} = \{4;\ 5\}$

w) $\sqrt{x^2 + 9} = 7;\ x^2 + 9 = 49; \quad | -9$

$x^2 = 40;$

$x_1 = 2\sqrt{10};$

$x_2 = -2\sqrt{10};\ \mathbb{L} = \{-2\sqrt{10};\ 2\sqrt{10}\}$

x) $\frac{2^4}{x^2 + 6} = 2^3; \quad | \cdot \frac{x^2 + 6}{2^3}$

$2 = x^2 + 6; \quad | -6$

$x^2 = -4;\ \mathbb{L} = \{\,\}$

KX **14** Bemerkung: Mit log ist hier stets der Logarithmus zur Basis 10 gemeint.

a) $\mathbb{D}_{max} =]1; \infty[$; $\quad \mathbb{L} = \{2\}$

b) $\mathbb{D}_{max} =]-1; 1[$; $\quad \mathbb{L} = \{0\}$

c) $\mathbb{D}_{max} =]-1; 1[$; $\quad \mathbb{L} = \left\{-\frac{3}{10}\sqrt{10}; \frac{3}{10}\sqrt{10}\right\}$

d) $\mathbb{D}_{max} = \mathbb{R}^+$;

$\log(y+1) - \log y = 1$;

$\log\frac{y+1}{y} = \log 10$;

$\frac{y+1}{y} = 10; \quad | \cdot y$

$y + 1 = 10y; \quad | -y$

$9y = 1; \quad | : 9$

$y = \frac{1}{9} \in \mathbb{D}_{max}$; $\quad \mathbb{L} = \left\{\frac{1}{9}\right\}$

KX **15** Bemerkung: Mit log ist hier stehts der Logarithmus zur Basis 10 gemeint.

a) I $y = 2x$

II $2^x - 2^y = 0$; $2^x = 2^y$

II‘ $x = y$ eingesetzt in I ergibt

$y = 2y$; $y = 0$; eingesetzt in II‘ ergibt $x = 0$;

$\mathbb{L} = \{(0; 0)\}$

b) I $2^x + y = 10$

II $y - 2^x + 6 = 0$

I + II $2y + 6 = 10 \quad | -6$

$2y = 4 \quad | : 2$

$y = 2$ eingesetzt in I:

$2^x + 2 = 10 \quad | -2$

$2^x = 8 = 2^3$

$x = 3$

$\mathbb{L} = \{(3; 2)\}$

c) I $5^{x-y} = 625$

II $\log(x+y) = 1$

II’ $x + y = 10$

I’ $5^{x-y} = 5^4$

I’’ $x - y = 4$

I’’ + II’ $2x = 14 \quad | : 2$

$x = 7$ in II‘

$y = 3$

$\mathbb{L} = \{(7; 3)\}$

d) I $x + y = 101$

II $\log x + \log y = 2$

II’ $\log(xy) = 10^2$

II’’ $xy = 100$

Durch Überlegen findet man

$x_1 = 100$; $y_1 = 1$

$x_2 = 1$; $y_2 = 100$

$\mathbb{L} = \{(100; 1); (1; 100)\}$

KX **16** Bemerkung: Mit log ist hier stets der Logarithmus zur Basis 10 gemeint.

	Funktionsterm	D_f	f(0)	Nullstelle(n) von f
a)	$f(x) = 2^{x-1} - 2^{1-x}$	$]-2; 5[$	$-1{,}5$	$x = 1$
b)	$f(x) = 2 \cdot \frac{2^x - 4}{2^x + 4}$	$\mathbb{R}_0^-$	$-1{,}2$	$x = 2$
c)	$f(x) = (10 - 100^x) \cdot 10^x$	$\mathbb{R}_0^+$	9	$x = \frac{1}{2}$
d)	$f(x) = \log(x^2 + 10)$	$\mathbb{R}$	1	–

Zu **a)** $2^{x-1} = 2^{1-x}$ $\quad | : 2^{1-x}$ $\quad 2^{x-1-1+x} = 1;$
$2^{2x-2} = 2^0;\ 2x - 2 = 0;\ x = 1$

Zu **b)** $2^x - 4 = 0;\ 2^x = 2^2;\ x = 2$

Zu **c)** $10^x \neq 0;\ 10 - 100^x = 0;\ 100^x = 100^{\frac{1}{2}};\ x = \frac{1}{2}$

Zu **d)** $x \in \mathbb{R}$: $x^2 + 10 \geq 10;\ \log(x^2 + 10) \geq 1;$
also hat f keine Nullstelle.

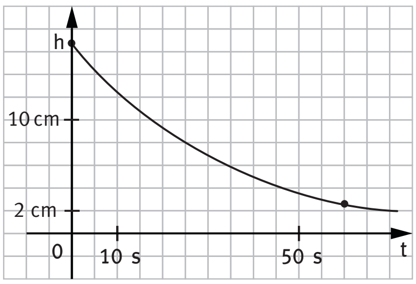
KX **17** ① $h = a \cdot b^t;\quad 16{,}8 = a \cdot b^0;\ a = 16{,}8;\quad 5{,}0 = 16{,}8 \cdot b^{60};\quad b = \sqrt[60]{\frac{50}{16{,}8}} \approx 0{,}980$

② Die Zerfallsgleichung $h = 16{,}8 \cdot 0{,}980^t$ liefert z. B. für $t_3 = 30$ bzw. für $t_9 = 90$ die Werte $h_3 \approx 9{,}16$ bzw. $h_9 \approx 2{,}73$, gibt also die entsprechenden Tabellenwerte gut wieder.

③ $16{,}8 \cdot 0{,}980^{t_H} = \frac{1}{2} \cdot 16{,}8;\ \mid\ : 16{,}8\qquad 0{,}980^{t_H} = 0{,}5;\quad t_H = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}980} \approx 34{,}3$:
Die Halbwertszeit betrug etwa eine halbe Minute.

KX **18** **a)** $h = a \cdot b^{t^*};\quad 16{,}8\text{ cm} = a \cdot b^0;\quad a = 16{,}8\text{ cm};\quad 2{,}7\text{ cm} = 16{,}8\text{ cm} \cdot b^{60};\quad | : (16{,}8\text{ cm})$
$b^{60} = \frac{2{,}7}{16{,}8};\quad b = \sqrt[60]{\frac{2{,}7}{16{,}8}} \approx 0{,}970$: Die Zerfallsgleichung ist richtig ermittelt.

b)



c) Es sind individuelle Lösungen möglich.

KX **19** **a)** $(3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 9 = 0;$
$(3^x - 9) \cdot (3^x - 1) = 0;$
$3^{x_1} = 9;\ 3^{x_1} = 3^2;\ x_1 = 2;$
$3^{x_2} = 1;\ 3^{x_2} = 3^0;\ x_2 = 0;$
$\mathbb{L} = \{0; 2\}$

b) $16^y - 4{,}25 \cdot 4^y + 1 = 0;$
$4^{2y} - 4{,}35 \cdot 4^y + 1 = 0;$
$\left(4^y - \frac{1}{4}\right) \cdot (4^y - 4) = 0;$
$4^{y_1} - \frac{1}{4} = 0;\ 4^{y_1} = 4^{-1};\ y_1 = -1;$
$4^{y_2} - 4 = 0;\ 4^{y_2} = 4^1;\ y_2 = 1;$
$\mathbb{L} = \{-1; 1\}$

c) $144^x = 12^6;\ (12^2)^x = 12^6;\ 12^{2x} = 12^6;\ x = 3;$
$\mathbb{L} = \{3\}$

d) $(\lg z)^2 + 5 \lg z - 6 = 0;$
$(\lg z + 6) \cdot (\lg z - 1) = 0;$
$\lg z_1 = -6;\ z_1 = 10^{-6};$
$\lg z_2 = 1;\ z_2 = 10;$
$\mathbb{L} = \{10^{-6};\ 10\}$

e) $10^{\lg z} = 1;\ \lg z = 0;\ z = 1$
$\mathbb{L} = \{1\}$

f) $\lg\sqrt{z} = \sqrt{\log z}$; | quadrieren
$\left(\frac{1}{2}\lg z\right)^2 = \lg z;$ | $\cdot 4$
$(\lg z)^2 = 4 \lg z;$ | $-4 \lg z$
$(\lg z)\ (\lg z - 4) = 0;$
$\lg z_1 = 0;\ z_1 = 1;$
$\lg z_2 = 4;\ z_2 = 10^4$
$\mathbb{L} = \{1;\ 10^4\}$

KX **20** **a)** 15 % von 18 000 sind 2700.
$18\,000 \cdot 3^{-0{,}2t} = 2700;$ | $: 18\,000$
$3^{-0{,}2t} = 0{,}15;$
$-0{,}2t \cdot \log 3 = \log 0{,}15;$ | $: (-0{,}2 \cdot \log 3)$
$t \approx 8{,}63$
Nach etwa $8\frac{1}{2}$ Jahren macht der Bestand nur noch 15 % des Anfangsbestands aus.

b) ① Tabelle:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$10^{-3} \cdot f(t)$	18,00	14,45	11,60	9,31	7,47	6,00	4,82	3,87	3,10
Abnahme	3 550	2 850	2 290	1 840	1 470	1 180	950	770	

② $18\,000 \cdot 3^{-0{,}2(t-1)} - 18\,000 \cdot 3^{-0{,}2t} < 1\,000;$ | $: 18\,000$
$3^{-0{,}2t}\ (3^{0{,}2} - 1) < \frac{1}{18};$ | $\cdot 18 \cdot 3^{0{,}2t}$
$3^{0{,}2t} > 18 \cdot (3^{0{,}2} - 1);$ | Logarithmieren zur Basis 10 | $: \lg 3$
$0{,}2t > \frac{\lg[18 \cdot (3^{0{,}2} - 1)]}{\lg 3};$ | $\cdot 5$
$t > \frac{5\lg[18 \cdot (3^{0{,}2} - 1)]}{\lg 3} \approx 6{,}77$
Innerhalb des siebten Jahres nimmt der Bestand zum ersten Mal um weniger als 1 000 Tiere ab.

KX **21** „Halbwertszeit des Wissens": Zeitraum, innerhalb dessen die Hälfte des vorhandenen Wissens veraltet (und durch neue Erkenntnisse ersetzt wird).
Individuelle Rechercheergebnisse und Referatbeiträge.

KX **22** $100\text{ ppm} \cdot (1 - 15\%)^n \le 20\text{ ppm};$ | $: (100\text{ ppm})$ $\quad 0{,}85^n \le 0{,}20;$
$n \lg 0{,}85 \le \lg 0{,}20;$ | $: \lg 0{,}85 \ge n\ \frac{\lg 0{,}20}{\lg 0{,}83} \approx 9{,}90$:
Das Badeverbot darf erst nach etwa 10 Wochen aufgehoben werden.

KX **23** **a)** Die Lichtintensität sinkt auf etwa $(0{,}96^3 \approx 0{,}885 \approx)$ 88 %.
b) $0{,}96^n = 0{,}50;\quad n = \frac{\lg 0{,}50}{\lg 0{,}96} \approx 16{,}98$:
Die gesamte Stapeldicke müsste etwa $17 \cdot d$ betragen.

K5 **1**

x	0	1	2	3	4	5
y	0	2	4	6	8	10

x	0	1	2	3	4	5
y	1	2	4	8	16	32

x	0	1	2	3	4	5
y	0,4	0,7	1,0	1,3	1,6	1,9

x	0	1	2	3	4	5
y	1	12	144	1728	20 736	248 832

K5 **2**

	Funktionstyp	Funktionsgraph	Begründung
A	konstant	2	Parallele zur x-Achse
B	linear	4	Gerade mit konstanter Steigung
C	quadratisch	3	Nach oben geöffnete Parabel
D	trigonometrisch	5	Graph der Kosinusfunktion
E	exponentiell	1	Graph der Exponentialfunktion

	Funktionstyp	Funktionsgraph	Begründung
A	$y = x^2 + 1$	3	nach oben geöffnente Parabel mit dem Scheitel S (0∣1)
B	$y = 1{,}5^x$	1	Graph einer Exponentialfunktion durch die Punkte A (0∣1) und B (1∣1,5)
C	$y = 1 - 1{,}5x$	4	Gerade mit $m = -1{,}5$ und $t = 1$
D	$y = 1$	2	Parallele zur x-Achse durch A (0∣1)
E	$y = \cos x$	5	Graph der Kosinusfunktion

K3 **3** Sei x die Anzahl der aufeinanderfolgenden richtigen Antworten.

Option 1: $f(x) = 100 \cdot 2^{x-1}$

Option 2: $g(x) = 500x$

Nach sechs richtigen Antworten hat man bei Option 1 erstmalig mehr Geld (3200 €) als bei Option 2 (3000 €). Gibt man die falsche Antwort, so ist alles Geld verloren. Sind die Fragen also hinreichend schwierig, ist Option 2 die bessere Variante. Ist das Spiel hingegen einfach, ist man mit Option 1 besser beraten.

KX **4**

1. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} =]0; \infty[$, asymptotisch zur negativen x-Achse, keine Nullstelle
2. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} =]0; \infty[$, asymptotisch zur positiven x-Achse, keine Nullstelle
3. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} =]5{,}5; \infty[$, Asymptote $y = 5{,}5$, keine Nullstelle

1. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} =]-3; \infty[$, Asymptote $y = -3$, Nullstelle in $(\log_{1,5} 3 \approx 2{,}71 \mid 0)$
2. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} =]-5; \infty[$, Asymptote $y = -5$, Nullstelle in $(\log_{0,25} 5 + 2 \approx 0{,}839 \mid 0)$
3. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} =]7; \infty[$, Asymptote $y = 7$, keine Nullstelle.

K3 **5**

a) 4 **b)** 3
c) 3 **d)** 9
e) 8 **f)** 0

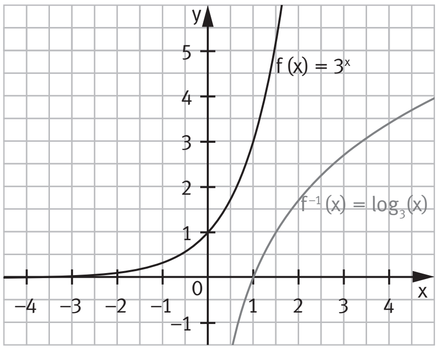
a) 3 **b)** 3
c) 4 **d)** 4
e) 1 **f)** 2

K3 **6**

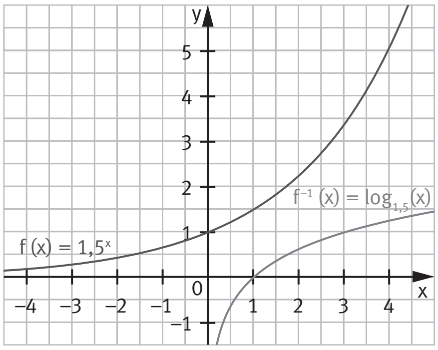
a) 3 **b)** 4
c) 5 **d)** 9
e) 125 **f)** 16

a) 2 **b)** 10
c) 1,3 **d)** $\sqrt[4]{1000} \approx 5{,}62$
e) 81 **f)** 27

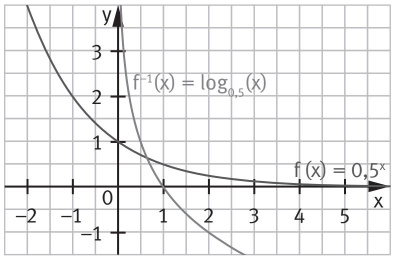
K 3 **7** **a)** $f^{-1}(y) = \log_3(y)$



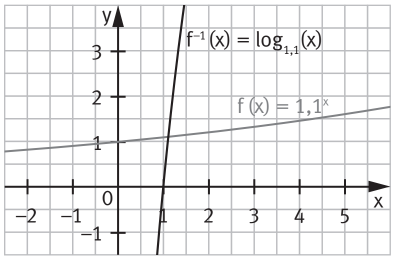
b) $f^{-1}(y) = \log_{1,5}(y)$



a) $f^{-1}(y) = \log_{0,5}(y)$



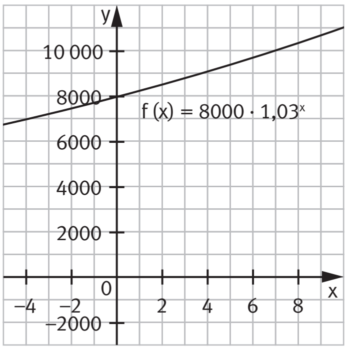
b) $f^{-1}(y) = \log_{1,1}(y)$



K 3 **8**
1. 0,85 bar
2. 0,70 bar
3. 0,34 bar
4. 1,07 bar

Bei 12 000 m sollte ein Druck von 0,23 bar herrschen, stattdessen liegen 0,77 bar vor. Die Differerenz beträgt 0,54 bar. Dies entspricht dann 0,54 $\frac{\text{bar}}{\text{m}^2}$ bzw. einer Kraft von 54 000 Newton, die auf die Flugzeughülle drückt.

K 3 **9** **a)**



Nach zehn Jahren sind bereits ca. 10 700 fm Wald vorhanden.

b) Nach ca. 7,5 Jahren ist der Wald bereits auf 10 000 fm angewachsen.

a) Nach zehn Jahren sind 10 751 fm Holz vorhanden.

b) Nach der Fällung sind ca. 8751 fm Holz vorhanden. Es dauert danach 6,96 Jahre, also fast sieben Jahre, bis der Wald die alte Größe erreicht hat.

K X **8** **a)** 0 **b)** 0,43 **c)** 1,43
d) 3 **e)** −1,43 **f)** −0,86
g) −0,57 **h)** −0,43 **i)** 1
j) 1,09

K X **9** **a)** 6,55 Potenzieren
b) 2,31 Wurzel ziehen
c) 0,32 Logarithmieren

K5 **1** Funktionsterme (nur Maßzahlen):

a) $f(t) = 2 \cdot 3^t$

b) $f(t) = 4^t$

c) $f(t) = 20 + 10 \cdot t$

	Zeit (in h)	0	1	2	3	4	5	6	10
a)	Volumen einer Bakterienkultur (in mm^3)	2	6	18	54	162	486	1 458	118 098
b)	Anzahl der Personen, die von einem Gerücht erfahren haben	1	4	16	64	256	1024	4096	1 048 576
c)	Füllhöhe eines Wasserbeckens (in cm)	20	30	40	50	60	70	80	120

KX **2** **a)** Prozentuale Zunahme: 10 % **b)** Prozentuale Zunahme: 5 %
c) Prozentuale Abnahme: 0,7 % **d)** Prozentuale Zunahme: 3 %
e) Prozentuale Abnahme: 50 %

KX **3** **a)** Wachstumsfaktor: 1,035 **b)** Abnahmefaktor: 0,948
c) Wachstumsfaktor: 1,1 **d)** Abnahmefaktor: 0,99

K1 **4** **a)** Exponentiell: Der Graph hat eine Asymptote bei y = 8 und ist streng monoton fallend: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

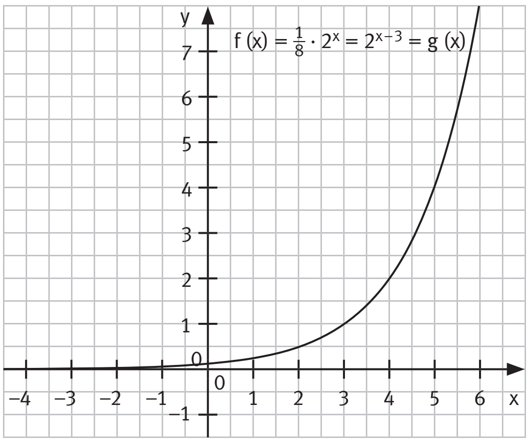
b) Nicht exponentiell: Der Graph hat keine Asymptote. Er ist zwar monoton, aber nicht streng monoton wachsend.

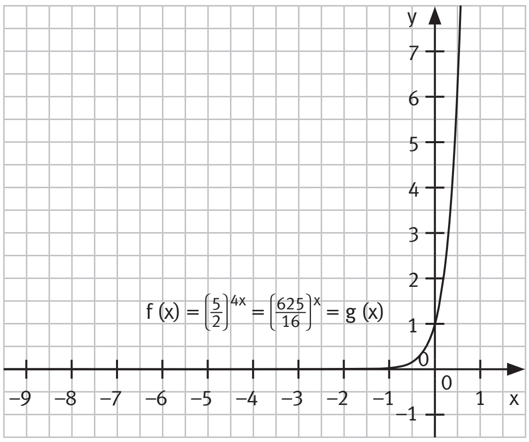
c) Exponentiell: Der Graph hat eine Asymptote bei y = 0 und ist streng monoton fallend: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.

d) Nicht exponentiell: Es werden jeden Tag gleich viele Prospekte verteilt.

K5 **5** Die Graphen sind identisch, was man jeweils anhand der Potenzgesetze zeigen kann:

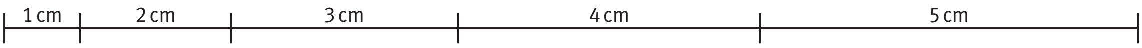
a) $f(x) = \frac{1}{8} \cdot 2^x = 2^{-3} \cdot 2^x = 2^{x-3} = g(x)$ **b)** $f(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^{4x} = \left(\left(\frac{5}{2}\right)^4\right)^x = \left(\frac{625}{16}\right)^x = g(x)$





K5 **6** **a)** x = 3 **b)** x = 59 049 **c)** x = 5
d) $x \approx -2{,}63$ **e)** x = 343 **f)** x = 8

K3 **7** **a)** 

b) 

d) −0,63 Logarithmieren
e) 0,96 Wurzel ziehen
f) 4,29 Potenzieren
g) 3,68 Wurzel ziehen
h) 0,42 Logarithmieren

KX **10** **a)** $f(x) = 1 - \frac{47}{30}x + \frac{4}{5}x^2 + \frac{13}{15}x^3$ (polynomiales Wachstum)
b) $f(x) = 1{,}2x$ (lineares Wachstum)
c) $f(x) = 3^x$ (exponentielles Wachstum)
d) $f(x) = 15 - 3{,}5x$ (lineares Wachstum)

KX **11** ① **a)** $f(x) = 40 - 4x$

x	0	1	2	3	4
f(x)	40	36	32	28	24

b) $f(x) = 40 \cdot 0{,}9^x$

x	0	1	2	3	4
f(x)	40	36	32,4	29,2	26,2

② **a)** $f(x) = 60 - 10x$

x	0	1	2	3	4
f(x)	60	50	40	30	20

b) $f(x) = 60 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^x$

x	0	1	2	3	4
f(x)	60	50	41,7	34,7	28,9

③ **a)** $f(x) = 125 - 25x$

x	0	1	2	3	4
f(x)	125	100	75	50	25

b) $f(x) = 400 \cdot 0{,}5^x$

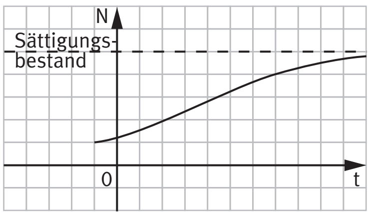
x	0	1	2	3	4
f(x)	400	200	100	50	25

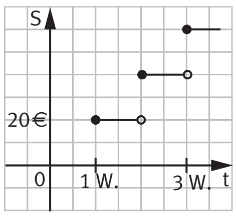
④ **a)** $f(x) = -6 \cdot x + 28$

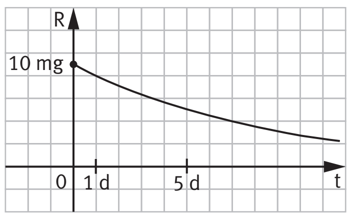
x	0	1	2	3	4
f(x)	28	22	16	10	4

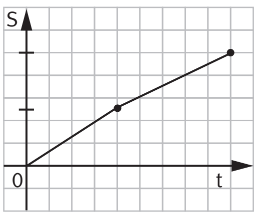
b) $f(x) = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

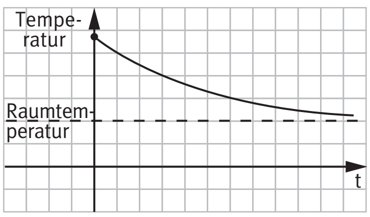
x	0	1	2	3	4
f(x)	64	32	16	8	4

KX **12** ①


②


③


④


⑤


K3 **13** **a)** $x = \log_6 12 \approx 1{,}39$
b) $x = \log_{2,5} 6 - 1{,}5 \approx 0{,}46$
c) $x = \frac{1}{2} \cdot (\log_9 10 + 3) \approx 2{,}02$
d) $x = \log_{0,75} - \frac{2{,}7}{1 - 0{,}75^{-2}} \approx -4{,}33$
e) $x = \frac{1}{3} \log_5 \frac{21}{4} \approx 0{,}34$
f $x = \frac{1}{3} \cdot \log_3 \frac{134}{3^2 - 3^{-1,5}} \approx 0{,}83$

KX **14** **a)** Es gilt $f_1(-x) = a^{-x} = (a^{-1})^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x = f_2(x)$.

b) Die beiden Graphen sind zueinander an der y-Achse gespiegelt.

KX **15** **a)** Sei x die Anzahl der Jahre seit 1960. Dann erhalten wir aus $3{,}00 = k \cdot a^0$ die Information $k = 3{,}00$. Außerdem wissen wir $6{,}9 = 3{,}00 \cdot a^{50}$. Damit erhalten wir $a \approx 1{,}02$. Die Funktionsgleichung, die das Wachstum annähernd beschreibt, s lautet also $f(x) = 3{,}00 \cdot 1{,}02^x$.

b) Für 2015 erhalten wir eine Weltbevölkerung von ca. 8,92 Mrd. Die Differenz zur tatsächlichen Weltbevölkerung beträgt damit 1,63 Mrd.

c) Im Jahr 2020 wären es 9,84 Mrd. laut dem Modell. Im Jahr 2030 dann 12,0 Mrd.
Das Modell eignet sich allerdings nicht für das Jahr 2100, da es unwahrscheinlich ist, dass die Weltbevölkerung im gleichen Maße weiterwachsen wird.

16

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_2(x)$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_3(x)$	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_4(x)$	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_5(x)$	128	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

b) Die Tabelle zeigt, dass die Ergebnisse nach rechts rechts rücken.

K3 **17** **a)** $k = 3$; $a = 0{,}4$

b) $k = 0{,}5$; $a = 4$

c) $k = 3$; $a = 2$

d) $k = 3$, $a = 2$

KX **18** $0 \le x \le 80{,}0 \le y \le 100$

1 (1 | 0,2)

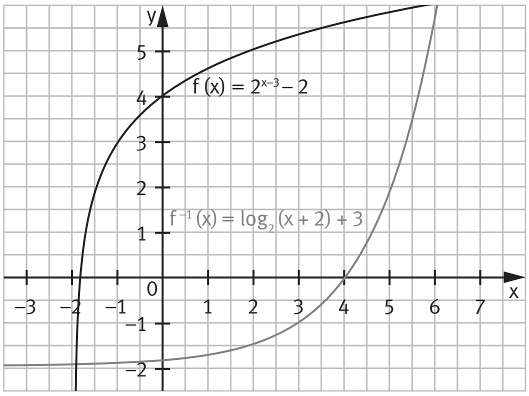
2 (3,06 | 100)

3 (5,68 | 100)

4 (0 | 0,2)

5 (2 | 100)

K X **19** **a)**



Der Wertebereich von f_1 ist $\mathbb{W} =]-2; \infty[$ und f_1 besitzt eine horizontale Asymptote in $y = -2$.
Weiter ist die Funktion monoton wachsend und sie hat eine Nullstelle in $(4|0)$:

$$2^{x-3} = 2^1 \Leftrightarrow x - 3 = 1, \text{ d. h. } x = 4.$$

b) Die Umkehrfunktion lautet $f_1^{-1}(x) = \log_2(x+2) + 3$.
Der Wertebereich von f_1^{-1} ist $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ und f_1^{-1} besitzt eine vertikale Asymptote in $x = -2$. Die Funktion ist monoton wachsend und sie hat eine Nullstelle in $(-1{,}875|0)$.

c) Neben den Nullstellen (vgl. a) und b)) gibt es auch Schnittpunkte mit der y-Achse.
Für f_1 liegt dieser bei $(0|-1{,}875)$, für die Umkehrfunktion bei $(0|4)$.

d) Die beiden Funktionen schneiden sich im Punkt $(2|5)$, denn:
$\log_2(x+2) - \log_2(x-1) = 2 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$ und $f_1^{-1}(2) = f_2(2) = 5$.

K X **20** **a)** Seien 14 Tage eine Zeiteinheit. Für $x = 1$ ist $f(1) = 1 = 0{,}5 \cdot 2$.
Die eingenommene Fläche hat sich also nach einer Zeiteinheit verdoppelt.

b) Wir setzen $x = \frac{35}{14} = \frac{3}{2}$ ein und erhalten $f\left(\frac{5}{2}\right) \approx 2{,}83\,\text{m}^2$.

c) Nach ca. $4{,}32 \cdot 14 \approx 61$ Tagen wäre die Fläche völlig zugewachsen.

K6/5 **21** **a)** $\log_3 x = 9 \;\Leftrightarrow\; x = 3^9 \;\Leftrightarrow\; x = 19\,683$

b) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

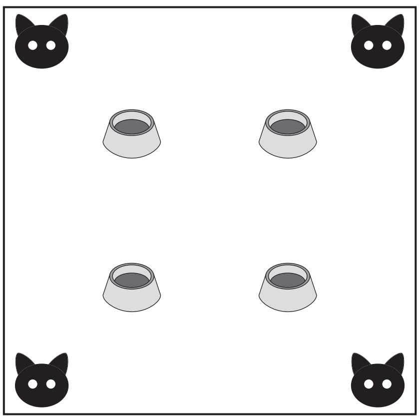
c) Hier wurde korrekt umgeformt.

d) $x^4 = \frac{625}{16} \;\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt[4]{625} = \pm 2{,}5$
(Das „Vorzeichen" ± fehlt vor der Wurzel.)

e) $\log_2 x = 64 \;\Leftrightarrow\; x = 2^{64} \;\Leftrightarrow\; x = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$

f) $3^x = 64 \;\Leftrightarrow\; \log_3 64 = x \;\Leftrightarrow\; x \approx 3{,}79$

K3 **22** Es sind vier Katzen und vier Fressnäpfe im Raum.



K3 **23 a)** $f(x) = b \cdot a^x$

$0{,}2 = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$

Nimmt man (0,5 | 0,17818) als weiteres Wertepaar, so ergibt sich:

$0{,}17818 = 0{,}2 \cdot a^{0{,}5}$, also $a = 0{,}79370$

$f(x) = 0{,}2 \cdot 0{,}79370^x$

$f(1) = 0{,}15874$

$f(2) = 0{,}12599$

$f(2{,}5) = 0{,}11225$

$f(5) = 0{,}06300$

$f(10) = 0{,}01984$

Bei Verwendung eines anderen Wertepaares sind evtl. andere Lösungen möglich.

b) $0{,}1 = 0{,}2 \cdot 0{,}79370^x$

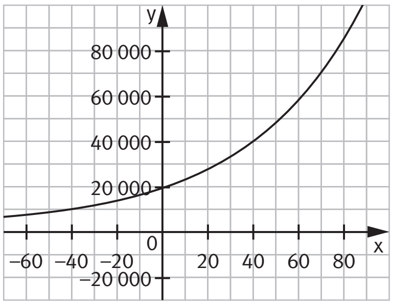
$0{,}5 = 0{,}79370^x$

$x \approx 3{,}000$

Die Halbwertszeit beträgt ca. 3 Minuten.

KX **24 a)** Der Bevölkerungszuwachs kann durch die Funktion $f(x) = 20\,000 \cdot 1{,}015^x$ beschrieben werden.

b)



c) In fünfzig Jahren wird die Bevölkerung 42 105 Menschen umfassen.

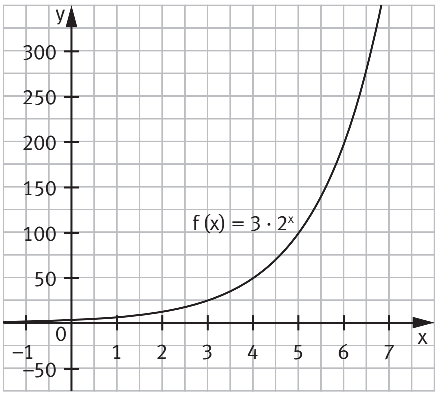
d Nach 15 Jahren beläuft sich die Bevölkerung auf 25 001.

KX **25 a)** In fünf Tagen können 32 Amöben entstehen und in 30 Tagen 1 073 741 824.

b) $f(x) = 3 \cdot 2^x$

c)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	3	6	12	24	48	96	192	384	768	1536

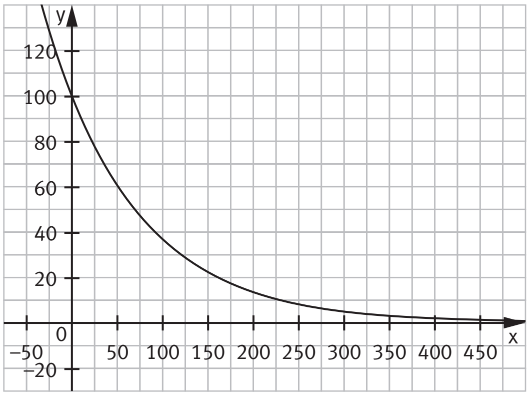


d) Nach 9 Tagen sind schon mehr als 1000 Amöben entstanden. Nach zwei Wochen sind 49 152 Amöben entstanden.

KX **26 a)** Die Funktionsgleichung ist korrekt, denn $100\,g \cdot 0{,}997^1 = 99{,}7\,g$. Damit sind 0,3 g zerfallen.

b)

T [in s]	0	50	100	150	200
m (t) [in g]	100	86,05	74,05	63,72	54,83

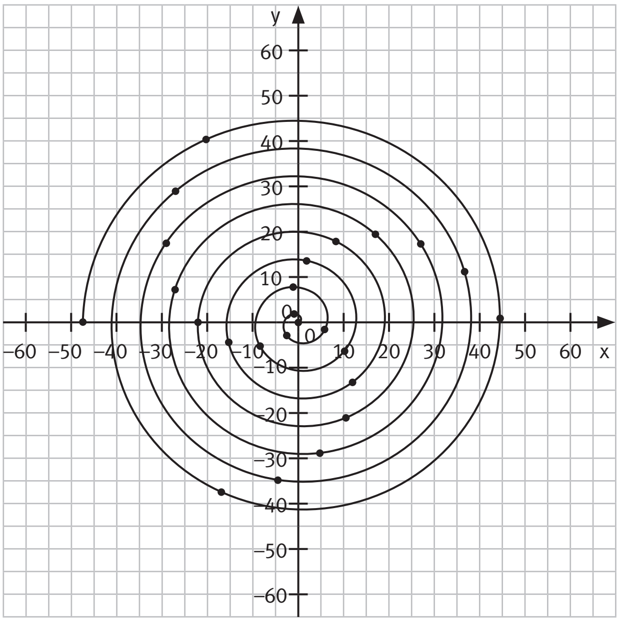


c) Die Halbwertszeit beträgt 230,7 Tage, denn:
$0{,}5 \cdot m_0 = m_0 \cdot 0{,}997^t \Leftrightarrow t = \log_{0{,}997} 0{,}5 \approx 230{,}7$

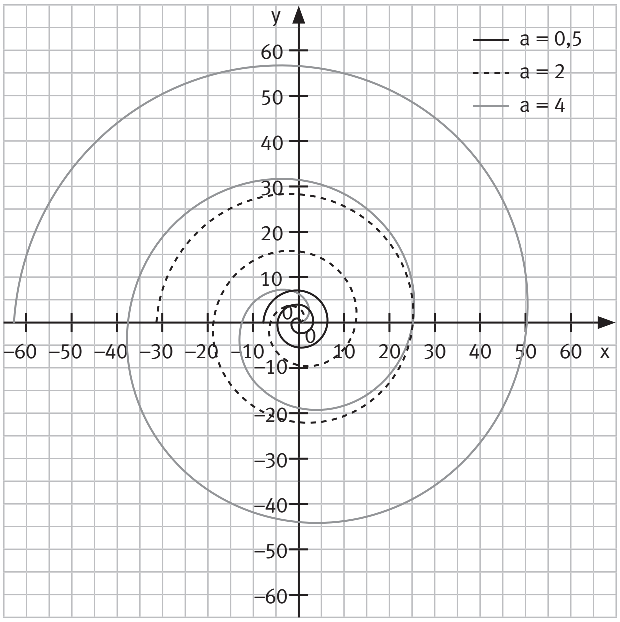
d) Nach 998 Tagen sind mehr als 95 % zerfallen.

K6 **Archimedische Spirale**

a) In der Spirale sind die Punkte (0|0), (2|2), (4|4), (6|6), (8|8), … eingezeichnet. Der Drehwinkel ist bei zu einem Bogenmaß von 15π eingestellt.



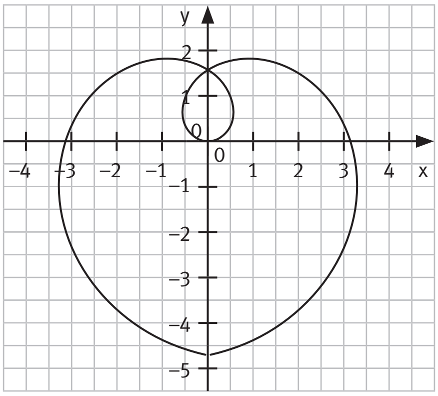
b)



K 2 **Zeichnen von Spiralen mit dynamischer Geometriesoftware**

a) Es enstehen die gleichen Bilder.

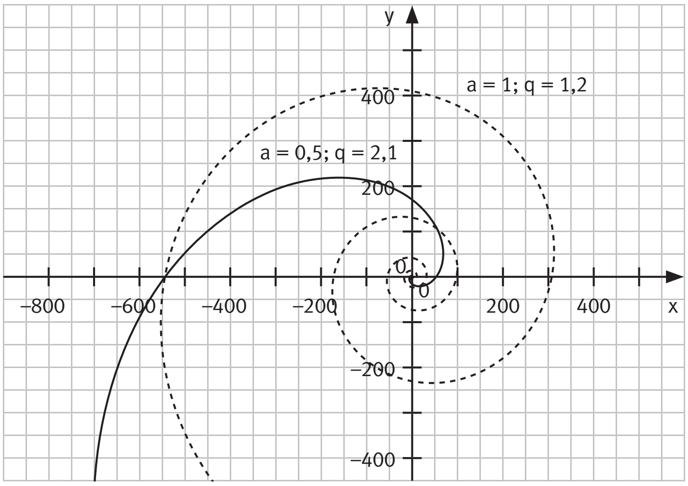
b) Die Figur gleicht einem Herz.



K 2 **Logarithmische Spirale – spira mirabilis**

a) Für q = 1 ergibt die logarithmische Spirale einen Kreis.

b)



c)
- Die archimedische Spirale erreicht – im Gegensatz zur logarithmischen Spirale – den Pol des Koordinatensystems.
- Der Radius der archimedischen Spirale wächst mit jeder Windung um einen konstanten Wert (nicht um einen konstanten Faktor).

K5 **1 a)** Das Wachstum des Riesenbambus ist linear, weil die Größe immer um den gleichen Summanden (70 cm) steigt. Allerdings gilt wie bei allen realen Wachstumsvorgängen: Das angenommene – hier: lineare – Wachstum gilt nur unter bestimmten Bedingungen und vor allem zeitlich begrenzt.

b) Das Preiswachstum ist exponentiell, da der Preis jährlich um den gleichen Faktor (1,05) steigt.

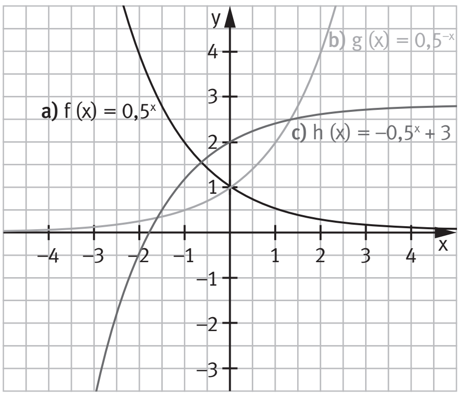
KX **2 a)** $1024 = b^5 \Leftrightarrow b = \sqrt[5]{1024} = 4$

$f(x) = 4^x$

b) $\sqrt{2} = b^{0,5} = \sqrt{b} \Leftrightarrow b = 2$

$f(x) = 2^x$

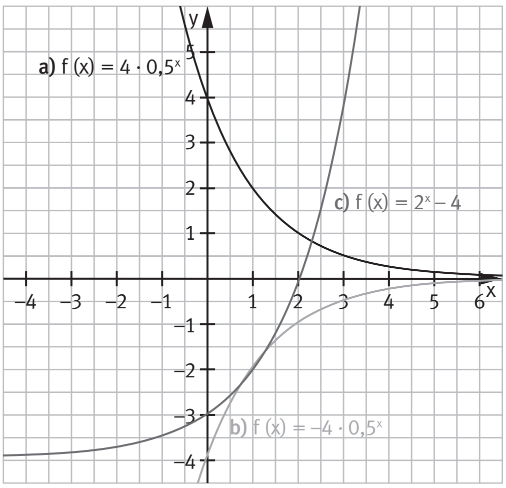
KX **3**



KX **4 a)** $f(x) = 2^x - 2$

b) $f(x) = -0,5 \cdot 2^x$

KX **5**



a) $f(x) = 4 \cdot 0,5^x$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$

Wertebereich: $\{y \in \mathbb{R}, y > 0\}$

Schnittpunkte: S_x existiert nicht, S_y (0|4)

Monotonie: monoton fallend

Grenzwerte:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b) $f(x) = -4 \cdot 0{,}5^x$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$

Wertebereich: $\{y \in \mathbb{R},\ y < 0\}$

Schnittpunkte: S_x existiert nicht, $S_y\ (0|-4)$

Monotonie: monoton steigend

Grenzwerte:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c) $f(x) = 2^x - 4$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$

Wertebereich: $\{y \in \mathbb{R},\ y > -4\}$

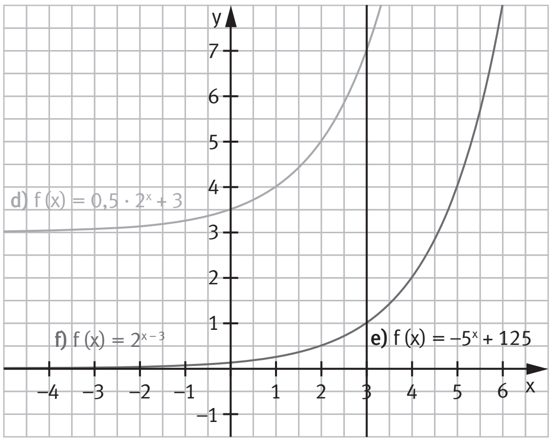
Schnittpunkte: $S_x\ (2|0)$, $S_y\ (0|-3)$

Monotonie: monoton steigend

Grenzwerte:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -4$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



d) $f(x) = 0{,}5 \cdot 2^x + 3$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$

Wertebereich: $\{y \in \mathbb{R},\ y > 3\}$

Schnittpunkte: S_x existiert nicht, $S_y\ (0|3{,}5)$

Monotonie: monoton steigend

Grenzwerte:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

e) $f(x) = -5^x + 125$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$

Wertebereich: $\{y \in \mathbb{R},\ y < 125\}$

Schnittpunkte: $S_x\ (3|0)$, $S_y\ (0|125)$

Monotonie: monoton fallend

Grenzwerte:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 125$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

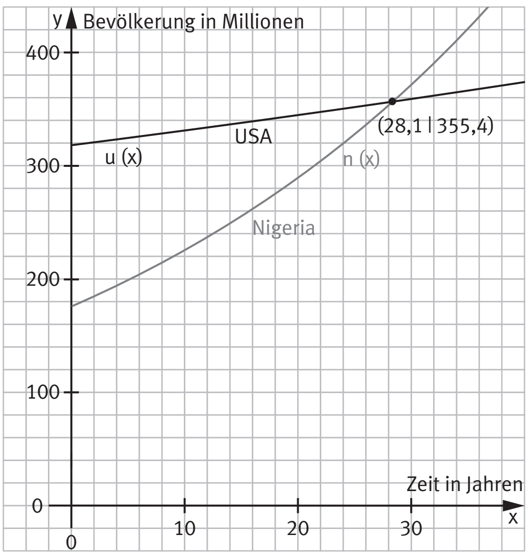
f) $f(x) = 2^{x-3}$
Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
Wertebereich: $\{y \in R, y > 0\}$
Schnittpunkte: S_x existiert nicht, S_y $(0 \mid 0{,}125)$
Monotonie: monoton steigend
Grenzwerte:
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

KX **6** **a)** $\log_4 512 = 4{,}5$ **b)** $\log_3 3187 \approx 7{,}43$
c) $\log_6 36^5 = 10$ **d)** $\log_{0,5} 81 \approx -6{,}34$
e) $\lg 10\,000 = 4$ **f)** $\lg 10^{1,5} = 1{,}5$

KX **7** $f(a) = 12\,t \cdot 0{,}5^a$
Eine Zeiteinheit a entspricht 5 Jahren.
5 Jahre: $f(1) = 6\,t$
10 Jahre: $f(2) = 3\,t$
15 Jahre: $f(3) = 1{,}5\ t$
30 Jahre: $f(6) = 0{,}188\,t$
100 Jahre: $f(20) \approx 0{,}000011\,t$

KX **8** **a)** $50 \cdot 2^x = 1\,000\,000 \Leftrightarrow \log_2 20\,000 \approx 14{,}29$
$14{,}29 \cdot 12$ Stunden $= 171{,}48$ Stunden ≈ 7 Tage 4 h
b) $f(x) = 50 \cdot 2^x$
Eine Zeiteinheit x entspricht 12 Stunden.
c) Die Fläche des Teichs ist endlich, weshalb auch die Ressourcen endlich sind. Dadurch wird das Wachstum ab einem bestimmten Punkt gehemmt und somit nicht durchgängig exponentiell.

KX **9** Grafische Lösung:
Nigeria: $n(x) = 177{,}5 \cdot 1{,}025^x$
USA: $u(x) = 317{,}7 \cdot 1{,}004^x$



Rechnerische Lösung:
$177{,}5 \cdot 1{,}025^x = 317{,}7 \cdot 1{,}004^x \Leftrightarrow x \approx 28{,}1$
Nach gut 28 Jahren leben in beiden Staaten mit ca. 355 Millionen gleich viele Menschen.

KX **10** **a)** $x = 6$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = 3$
d) $x = 3$ **e)** $x = 3$ **f)** $x = 5$

KX **11** **a)** $f(x) = 4000\,€ \cdot 1{,}018^x$
$f(5) \approx 4373{,}20\,€$
$f(10) \approx 4781{,}21\,€$
$f(30) \approx 6831{,}14\,€$
b) $16\,000\,€ = 4000\,€ \cdot 1{,}018^x \Leftrightarrow x \approx 77{,}7$
Nach knapp 78 Jahren hat sich der Betrag vervierfacht.

KX **12** $0{,}2 = 0{,}85^x \Leftrightarrow \log_{0{,}85} 0{,}2 \approx 9{,}9$
Die Kamera ist bis knapp 10 m Tiefe einsatzfähig.

KX **13** **a)** $x = 8$ **b)** $x = 5$ **c)** $x = 15\,625$
d) $x = 0$ **e)** $x = 4$ **f)** $x = 2$

KX **14** $1200\,€ \cdot 0{,}5^{2{,}5} \approx 212{,}13\,€$

Aufgaben für Lernpartner

K1/6 **A** Die Aussage ist falsch. Eine Exponentialfunktion kann entweder eine oder keine Nullstelle haben.

K1/6 **B** Die Aussage ist falsch. 1^x ist keine Exponentialfunktion, sondern eine konstante Funktion: Sie nimmt für jedes x den Wert 1 an.

K1/6 **C** Die Aussage ist falsch. Beispielsweise kann auch eine quadratische Funktion einen Wachstumsprozess darstellen.

K1/6 **D** Die Aussage ist falsch. Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion und man erhält sie durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.

K1/6 **E** Die Aussage ist richtig.

K1/6 **F** Die Aussage ist richtig.

K1/6 **G** Die Aussage ist richtig. Die gegebene Funktion nähert sich für negative x-Werte asymptotisch dem Wert 2 an. Für größer werdende x-Werte ist sie monoton steigend und kann daher keine Nullstellen haben.

K1/6 **H** Die Aussage ist falsch.

K1/6 **I** Die Aussage ist richtig.