CAS 11

Arbeitsheft

Mathematik mit CAS

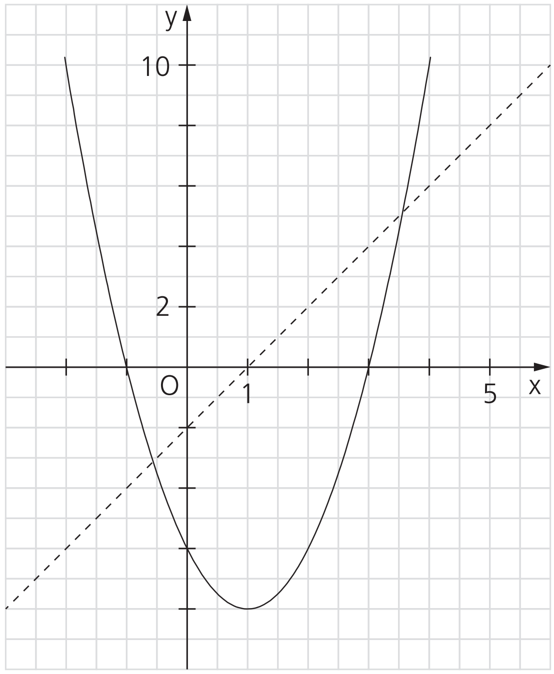
Lösungen für
CASIO-Geräte

C.C.BUCHNER

Aufgaben

1. Graph plotten, Wertetabelle erstellen, Gleichung lösen

a)



b)

x	−4	−2	0	2	4
f(x)	42	10	−6	−6	10
g(x)	−10	−6	−2	2	6

c) solve($2x^2 - 4x - 6 = 2x - 2$)

Schnittpunkte: $\left(1{,}5 - \frac{\sqrt{17}}{2} \mid 1 - \sqrt{17}\right)$; $\left(1{,}5 + \frac{\sqrt{17}}{2} \mid 1 + \sqrt{17}\right)$

Gerundet: $(-0{,}56 \mid -3{,}12)$; $(3{,}56 \mid 5{,}12)$

2. Gleichungssystem lösen

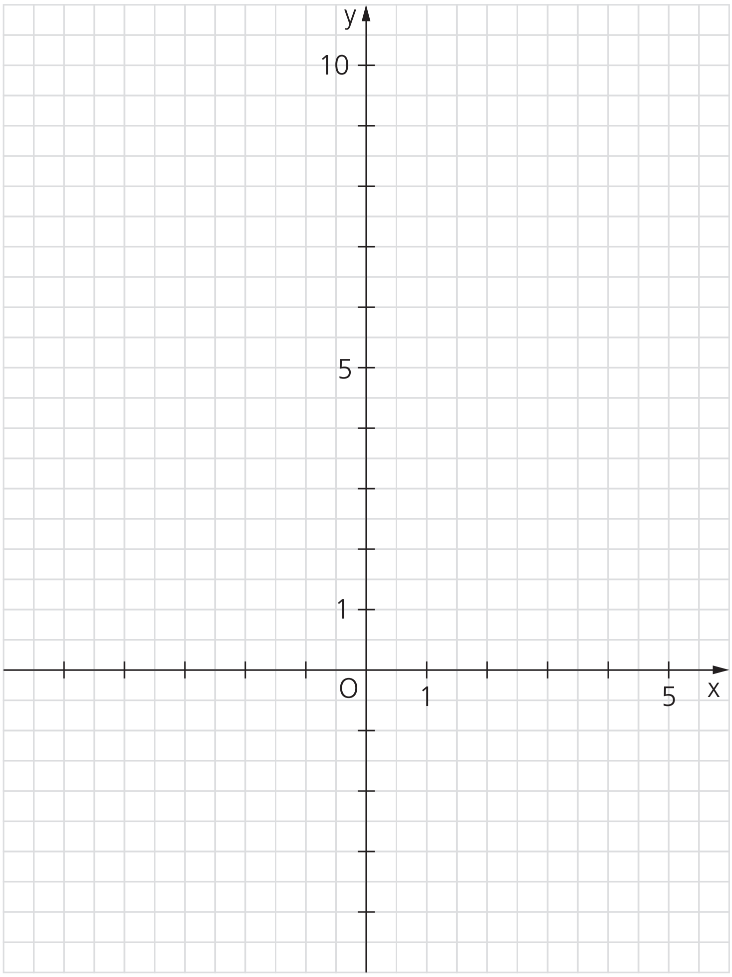
a) $m = -9$; $n = -3$

b) $a = -5$; $b = 20$; $c = -15$

c) Keine Lösung

3. Funktionenschar darstellen, Funktionsterm anpassen

a)



b) Für a = 1: T_1 (1 I1)
Für a = 2: T_2 (2I2)
Für a = 3: T_3 (3 I 3)
Allgemein: T (a I a) für $a \neq 0$

c) g(x) = x; $D_g = \mathbb{R}$

4. Terme umformen

Normalform: $f(x) = -\frac{11}{4}x^2 - \frac{33}{4}x + \frac{1\,001}{16}$

Nullstellenform: $f(x) = -2{,}75(x + 6{,}5)(x - 3{,}5)$

5. Grenzwert bestimmen

Mit dem entsprechenden Befehl des CAS kann man den Grenzwert $-\frac{1}{2}$ nachweisen.
Rechnerischer Weg:

$$\frac{1 - x^2}{2x^2 - x} = \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)}{x^2\left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{2 - \frac{1}{x}} \rightarrow \frac{0 - 1}{2 - 0} = -\frac{1}{2}$$

a) Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.

b) Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to -\frac{1}{2}$.

c) Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to 4$.

d) Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to 0$.

6. Zufallszahlen erzeugen, Daten im Diagramm darstellen

a) Individuelle Lösung

b) Individuelle Lösung

c) Beispiel:

Zahl	1	2	3	4
Absolute Häufigkeit	23	27	28	22
Relative Häufigkeit	23%	27%	28%	22%
Wahrscheinlichkeit	25%	25%	25%	25%
Prozentuale Abweichung der relativen Häufigkeit von der Wahrscheinlichkeit	8%	8%	12%	12%

7. Liste erzeugen

Zum Beispiel xs = {2; 4; 6; 8; 10; 12}
Bei a); c) und d) wird erneut eine Liste aus geraden Zahlen erzeugt.

a) f(xs) = {19 006; 19 012; 19 018; 19 024; 19 030; 19 036}
Multipliziert man eine gerade Zahl mit einer beliebigen natürlichen Zahl (3), so entsteht wieder eine gerade Zahl.
Addiert man zu einer geraden Zahl eine gerade Zahl (19000), so entsteht wieder eine gerade Zahl.
Also entsteht erneut eine Liste aus geraden Zahlen.

b) f(xs) = {1; 3; 5; 7; 9; 10}
Es entsteht eine Liste aus ungeraden Zahlen. Es gilt allgemein, dass man eine ungerade Zahl erhält, wenn man von einer geraden Zahl 1 subtrahiert.

c) f(xs) = {8; 24; 48; 80; 120; 168}
Quadriert man eine gerade Zahl, so erhält man erneut eine gerade Zahl (sogar eine durch 4 teilbare).
Addiert man dazu erneut eine gerade Zahl (2n), so erhält man eine gerade Zahl.

d) f(xs) = {4; 16; 64; 256; 1 024; 4 096}
Ist der Exponent von 2^n eine natürliche Zahl, so erhält man immer gerade Zahlen, da somit stets der Faktor 2 im Produkt vertreten ist (sogar n-mal).

8. Regression durchführen

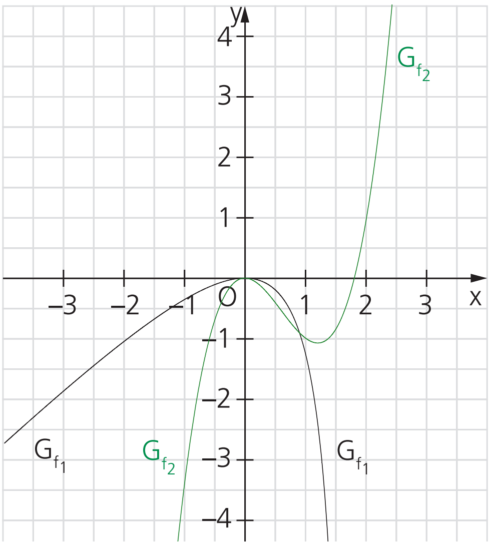
Regressionsgerade: $y = -0{,}4x + 12{,}3$

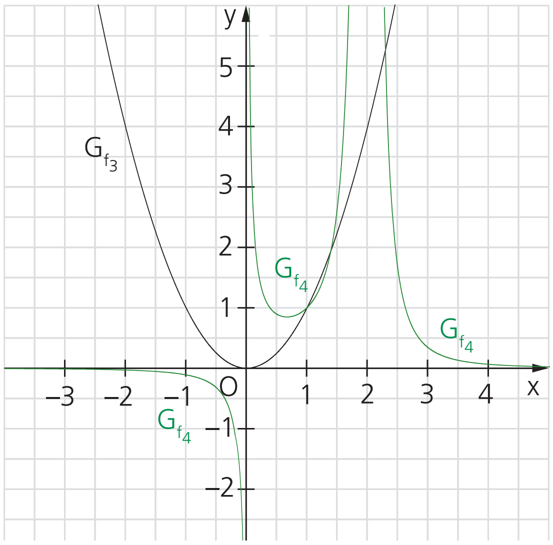
9. Tabellenkalkulation verwenden

Lösungen sind zum Beispiel $x = 1$; $y = 1$ oder $x = 3$; $y \approx 0{,}0247$.

Arbeitsauftrag

Funktionsterm	Definitions-lücke(n)	Maximale Definitionsmenge	Nullstelle(n)	Polstelle(n)	Gleichung(en) der Asymptote(n)
$f(x) = \frac{x^2(x-3)}{x-2}$	$x - 2 = 0$ $x = 2$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$	$x^2(x-3) = 0$ $x_1 = 0$ $x_2 = 3$	$x_3 = 2$ $x \to 2+$: $f(x) \to -\infty$ $x \to 2-$: $f(x) \to +\infty$	$x = 2$
$f_1(x) = \frac{x^2(x-2)}{(x-2)^2}$	$(x-2)^2 = 0$ $x_1 = 0$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$	$x^2 \cdot (x-2) = 0$ $x_1 = 0$ $x = 2 \notin D_{f_1}$	$x^2 = 2$ $x \to 2+$: $f(x) \to +\infty$ $x \to 2-$: $f(x) \to +\infty$	$x = 2$
$f_2(x) = \frac{x^2(x-2)^2}{(x-2)}$	$x - 2 = 0$ $x = 2$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$	$x^2 \cdot (x-2)^2 = 0$ $x_1 = 0$ $x = 2 \notin D_{f_2}$	$x = 2$ $x \to 2+$: $f(x) \to 0$ $x \to 2-$: $f(x) \to 0$ Also ist bei $x = 2$ keine Polstelle.	$x = 2$
$f_3(x) = \frac{x^2(x-2)}{(x-2)}$	$x - 2 = 0$ $x = 2$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$	$x^2 \cdot (x-2) = 0$ $x_1 = 0$ $x = 2 \notin D_{f_3}$	$x = 2$ $x \to 2+$: $f(x) \to 4$ $x \to 2-$: $f(x) \to 4$ Also ist bei $x = 2$ keine Polstelle.	$x = 2$
$f_4(x) = \frac{x^2(x-2)}{x^3(x-2)^3}$	$x^3(x-2)^3 = 0$ $x = 2$ oder $x = 0$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$	$x^2 \cdot (x-2) = 0$ $x = 0 \notin D_{f4}$ $x = 2 \notin D_{f4}$	$x_1 = 0$ $x \to 0+$: $f(x) \to +\infty$ $x \to 0-$: $f(x) \to -\infty$ $x_2 = 2$ $x \to 2+$: $f(x) \to +\infty$ $x \to 2-$: $f(x) \to +\infty$	$x = 2$ und $x = 0$





Die Definitionslücken erhält man, indem man die Nullstellen des Nennerpolynoms bestimmt.

Die maximale Definitionsmenge erhält man, indem man von den reellen Zahlen die Definitionslücken ausschließt.

Die Nullstellen erhält man, indem man das Zählerpolynom gleich null setzt und die Lösung(en) dieser Gleichung bestimmt. Dabei muss man die maximale Definitionsmenge beachten.

Die Polstellen erhält man, indem man prüft, ob für $x \to x_0$ gilt, dass $f(x) \to \infty$ oder $f(x) \to -\infty$.
Ein Pol liegt nicht mehr vor, wenn sich der Faktor im Nenner so oft kürzen lässt, dass bei $x = x_0$ keine Nennernullstelle mehr vorliegt.

Die Gleichungen der senkrechten Asymptoten erhält man, indem man „x = Polstellen“ schreibt.

Vorzeichenwechsel:
f_1: Pol bei $x = 2$ mit Vorzeichenwechsel
f_2: keine Polstelle
f_3: keine Polstelle
f_4: Pol bei $x = 0$ mit Vorzeichenwechsel; Pol $x = 2$ ohne Vorzeichenwechsel

Aufgaben

1. Pol- und Nullstellen

a) $\frac{(x+3)\cdot(x-2)^3}{2\cdot(x+3)^2(x-2)} = \frac{(x-2)^2}{2(x+3)}$

$x = 2$ doppelte Nullstelle, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3; -2\}$

$x = -3$ einfache Polstelle

b) $\frac{(x+1)^2(x-2)}{5(x+1)(x-1)} = \frac{(x+1)(x-2)}{5(x-1)}$

$(x = -1)$ $x = 2$ einfache Nullstelle, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{+1; -1\}$

$x = 1$ einfache Polstelle

c) $\frac{x^2(x+2)^2(x-2)}{x(x+2)} = x(x+2)(x-2)$

einfache Nullstellen, die Definitionslücken sind bei $(x = -2,\ x = 0)$ $x = 2$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0; -2\}$

2. Negative Funktionswerte

- solve $(f(x) \leqq 0, x)$
  $x < -103;\ 2 < x < 105$
- Alternativ: Vorzeichentabelle durch Faktorisieren erstellen und daraus Intervalle ablesen

3. Funktionstermsuche 1

$f(x) = a\cdot\frac{(x+3)(x-2)}{(x-1)^2}$ enthält (1), (2)

$f(-1) = 3 \Rightarrow a = -2$ Bedingung (3)

$\Rightarrow f(x) = -2\cdot\frac{(x+3)(x-2)}{(x-1)^2}$

4. Symmetrische Funktion

$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$

a) $0 \leqq \frac{\overbrace{2x^2}^{\in \mathbb{R}_0^+}}{\underbrace{x^2+1}_{> 1}}$

$\frac{2x^2}{x^2+1} \leqq 2 \iff 2x^2 \leqq 2x^2 + 2 \iff 0 \leqq 2$

wahre Aussage

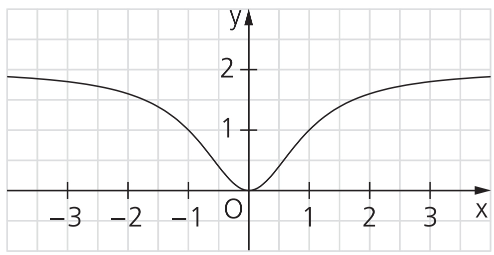
$\Rightarrow 0 \leqq f(x) \leqq 2$

b) aus a) folgt $W = [0; 2]$

c) $f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{2x^2}{x^2+1} = f(x)$

symmetrisch bzgl. der y–Achse

d)



- aus a) bzw. b) $\Rightarrow y = a$ mit $a < 0 \wedge a \geqq 2$
  $\Rightarrow$ es existieren keine Schnittpunkte
- $y = a$ mit $a = 0 \Rightarrow S\,(0\,|\,0)$
- $y = a$ mit $a \in\ ]0; 2[\ \Rightarrow$ zwei Schnittpunkte
  $f(x) = a \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a}{2-a}}$

5. Parameter und Pol- und Nullstellen

$f(x) = \frac{2(x-a)^2\,(x-b)}{(x-c)}$

$a \neq b \neq c \Rightarrow x = a$ (doppelte Nullstelle), $x = b$ (einfache Nullstelle)
$x = c$ (einfache Polstelle)

$a \neq b = c \Rightarrow x = a$ (doppelte Nullstelle), $x = b$ (hebbare Definitionslücke)

$a = b \neq c \Rightarrow x = a$ (einfache Nullstelle)
$x = c$ (einfache Polstelle)

$a = c \neq b \Rightarrow x = a$ (hebbare Definitionslücke)
$x = b$ (einfache Nullstelle)

$a = b = c \Rightarrow x = a$ (hebbare Definitionslücke)

6. Symmetrieeigenschaften

$f(x) = \frac{x^4 - x^2}{2x^2 + 4} = \frac{x^2(x^2-1)}{2(x^2+2)}$

a) $x = 0$ (doppelte Nullstelle)
$x = -1,\ x = 1$ (einfache Nullstelle)

b) Zeige, dass der Nenner $\geqq 0$ ist
$2(x^2+2) \geqq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \geqq 0$
um 2 LE nach oben veschobene Normalparabel $\Rightarrow W \in \mathbb{R}^+$
$\Rightarrow$ keine Definitionslücke

c) $f(-x) = \frac{(-x)^4 - (-x)^2}{2(-x)^2 + 4} = \frac{x^4 - x^2}{2x^2 + 4} = f(x)$
$\Rightarrow$ symmetrisch zur y-Achse

d) $g(x) = x \cdot f(x)$
Nachweis $g(-x) = -x \cdot f(-x) = -x \cdot f(x) = -g(x)$
$\Rightarrow$ punktsymmetrisch zum Ursprung

e) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$
$h(-x) = f(-x) \cdot g(-x)$
$= f(x) \cdot (-g(x)) = -h(x)$

achsensymmetrisch	punktsymmetrisch
$f(-x) = f(x)$	$g(-x) = g(x)$

$\Rightarrow$ h ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

7. Funktionstermsuche 2

a) $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+1}$

d) $f(x) = \frac{x}{(x-1)\,(x+1)}$

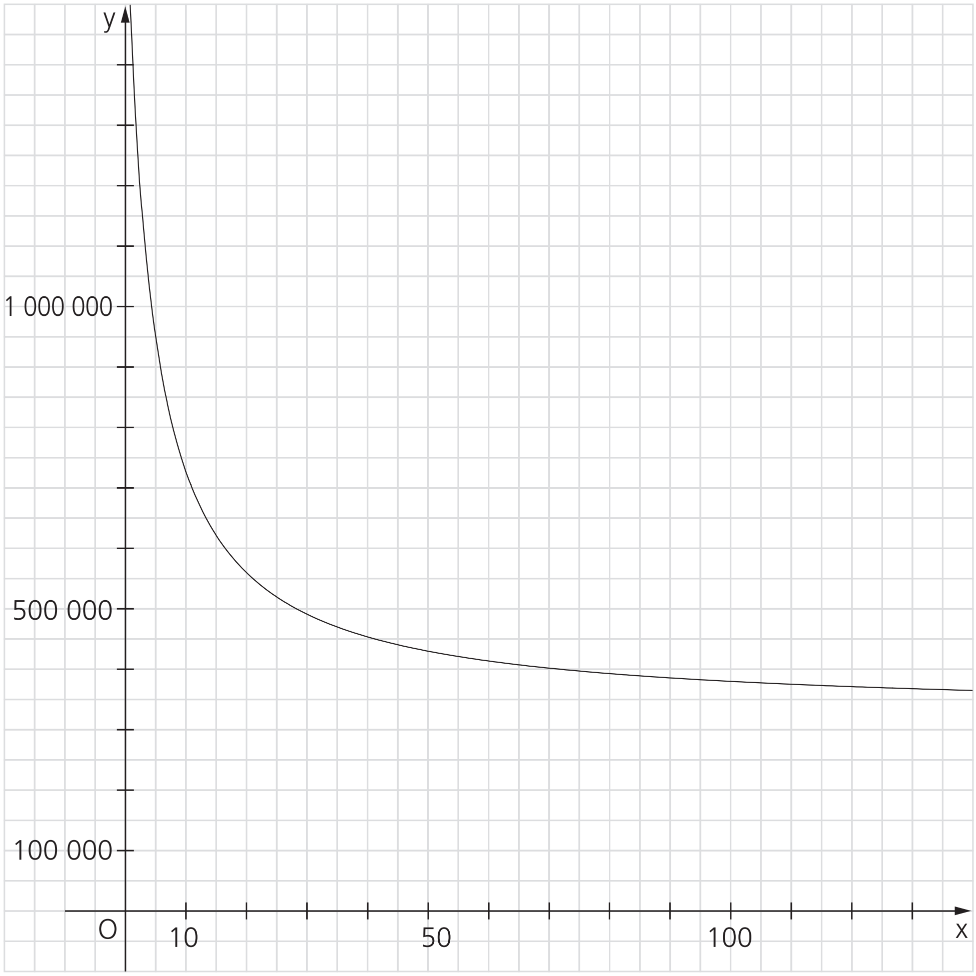
8. Kostenanalyse

$f(x) = 10\,000 \cdot \frac{ax+b}{x+4}$

$f(5) = 950\,000;\ f(20) = 560\,000$

a) I $f(5) = 950\,000$
II $f(20) = 560\,000 \Rightarrow a = \frac{163}{5},\ b = 692$

b) $f(x) = 10\,000 \cdot \dfrac{\frac{163}{5} \cdot x + 692}{x + 4}$



c) $f(x) \leqq 400\,000$

$\Rightarrow x \approx 71{,}89$

Ab der 72 Produktionseinheit liegen die Kosten unter 400 000 **€**.

d) $f(x - 1) - f(x) \leqq 10\,000$

$\Rightarrow$ ($x < -27{,}20...$) negative Einheiten sinnlos

$x > 20{,}20$; d. h. ab 20 Produktionseinheiten weichen die Kosten der Einheiten um weniger als 10 000 **€** ab.

9. Funktionsveränderungen

- linker Graph
  – Spiegelung an der x-Achse
  – Verschiebung um 2 LE nach rechts
- rechter Graph
  – Verschiebung um m LE nch links
  – Verschiebung um n LE nach oben

Arbeitsauftrag

Funktion	$x \to \infty$	$x \to -\infty$	Gleichung der waagrechten Asymptoten
$f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2}{x^3 - 2}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\sqrt[3]{2}\}$	$f(x) \to 3$	$f(x) \to 3$	$y = 3$
$f_1(x) = \frac{2x^2 - 5x^3}{x^4 + 1}$; $D_{f_1} = \mathbb{R}$	$f(x) \to 0$	$f(x) \to 0$	$y = 0$
$f_2(x) = \frac{-8x^4 + 4x^6}{2 + x^2 + x^6}$; $D_{f_2} = \mathbb{R}$	$f(x) \to 4$	$f(x) \to 4$	$y = 4$
$f_3(x) = \frac{9x^4 + 8x^3}{x^3 - 4x^2}$; $D_{f_3} = \mathbb{R}\setminus\{0; 4\}$	$f(x) \to +\infty$	$f(x) \to -\infty$	keine
$f_4(x) = \frac{5x^5 - 1}{x^6 - 1}$; $D_{f_4} = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$	$f(x) \to 0$	$f(x) \to 0$	$y = 0$

Der Graph einer gebrochenrationalen Funktion besitzt eine waagrechte Asymptote, wenn der Nennergrad größer oder gleich dem Zählergrad ist.
Der Graph einer gebrochenrationalen Funktion hat die x-Achse ($y = 0$) als waagerechte Asymptote, wenn der Nennergrad größer als der Zählergrad ist.
Der Graph einer gebrochenrationalen Funktion hat eine zur x-Achse parallele Gerade ($y = a$; $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$) als Asymptote, wenn der Nennergrad kleiner als der Zählergrad ist.

Schräge Asymptoten

a) Individuelle Vermutungen z. B. $y = 2x$

b) Befehl bei Classpad: propFrac

Schriftliche Rechnung:

Polynomdivision: $(2x^4 + x^3) : (x^3 - 1) = 2x + 1 + \frac{2x + 1}{x^3 - 1}$

$$
\begin{array}{l}
-(2x^4 - 2x) \\
\qquad x^3 + 2x \\
\quad -(x^3 - 1) \\
\qquad\quad 2x - 1
\end{array}
$$

c) Der Summand $\frac{2x + 1}{x^3 - 1}$ geht gegen null. Daher bestimmt nur $2x + 1$ das Verhalten im Unendlichen.
Der Graph wird sich also dieser Geraden immer mehr annähern.

d) Für große positive x-Werte hat $\frac{2x + 1}{x^3 - 1}$ einen sehr kleinen positiven Wert.
Also näher sich der Graph für $x \to \infty$ von oben an $y = 2x + 1$ an.
Für große negative x-Werte hat $\frac{2x + 1}{x^3 - 1}$ einen sehr kleinen positiven Wert.
Also näher sich der Graph für $x \to -\infty$ auch von oben an $y = 2x + 1$ an (vgl. Abbildung).

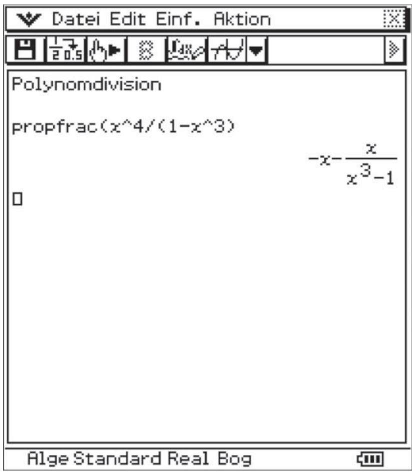
e) Der Grad des Zählerpolynoms muss genau um 1 größer sein als der des Nennerpolynoms.

Mit dem entsprechenden CAS-Befehl erhält man die Darstellung: $f(x) = -3x + 2 + \frac{3x - 2}{1 - x^2}$.
Die schräge Asymptote ist also $y = -3x + 2$.

Allgemeines Vorgehen:
1. Prüfen, ob der Zählergrad um genau 1 größer als der Nennergrad ist.
2. Mit CAS-Befehl Darstellung Bruch als Summe schreiben.
3. Geradengleichung aus Summendarstellung ablesen

Aufgaben

1. Asymptotengleichungen



$f_1(x) = -x - \frac{x}{x^3 - 1}$ → • $a(x) = -x$ (schräge Asymptote)
• $x = 1$ (senkrechte Asymptote)

$f_2(x) = -1 + \frac{-6}{x - 1}$ → • $a(x) = -1$ (waagrechte Asymptote)
• $x = 1$ (senkrechte Asymptote)

$f_3(x) = -x - 11 - \frac{36}{x - 1}$ → • $a(x) = -x - 11$ (schräge Asymptote)
• $x = 1$ (senkrechte Asymptote)

$f_4(x) = \frac{x}{(x-1)^2} + \frac{5}{(x-1)^2}$ → • $a(x) = 0$
• $x = 1$ (senkrechte Asymptote)

$f_5(x) = \frac{5x^5 - 4x^4}{3x^3 - 2x^2}$

• Zählergrad von 2 größer als Nennergrad → keine waagrechte und schräge Asymptote.
• $3x^3 - 2x^2 = 0$ → $x = 0$ $x = \frac{2}{3}$ (senkrechte Asymptote)

$f_6(x) = -\frac{3}{4} + \ldots$ → • $a(x) = -\frac{3}{4}$ (waagrechte Asymptote)
• $4 + 4x^2 + 4x^5 = 0$
→ $x \approx -1{,}1939$ (senkrechte Asymptote)

$f_7(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{5x^2 - 5} = \frac{x}{5} - \frac{2}{5x - 5}$ • $a(x) = \frac{1}{5}x$ (schräge Asymptote)
• $x = 1$ (senkrechte Asymptote)

$f_8(x) = 1 + \frac{1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$ • $a(x) = 1$ (waagrechte Asymptote)

$f_9(x) = x + 2 - \ldots$ • $a(x) = x + 2$ (schräge Asymptote)
• $x = 0$, $x = -\sqrt[3]{2}$ (senkrechte Asymptote)

$f_{10}(x) = \frac{x}{2} - \frac{7}{2} + \ldots$ • $a(x) = \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$ (schräge Asymptote)
• $a(x) = -3$, $x = 2$ (senkrechte Asymptote)

2. Funktionsterme aus Graphen

a) $f(x) = -2 + \underbrace{\left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}\right)}_{\text{Nullstellenkorrektur}} \cdot 2$

b) $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot 0{,}25$

c) $f(x) = \frac{x^3}{(x + 0{,}5) \cdot (x - 1)^2}$

3. Funtionsterme aus Bedingungen

a) $y = 3x + 3$
$f(x) = 3x + 3 + \frac{1}{x}$ => $f(x) = \frac{3x^2 + 3x + 1}{x}$
$f(x) = 3x + 3 + \frac{1}{x^2}$ => $f(x) = \frac{3x^3 + 3x^2 + 1}{x^2}$
usw.

b) $f(x) = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)}$ => $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$
Zählergrad < Nennergrad

c) $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2+1}$ => $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
Nennerpolygom ohne reelle Nullstelle

d) vgl. Aufgabe 2 c)
Ausmultiplizieren:
$f(x) = \frac{x^3}{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}}$

e) $f(x) = 2x + \frac{1}{(x-1)(x+1)}$
=> $f(x) = \frac{2x^3 - 2x + 1}{(x+1)(x-1)}$

4. Funktionsterme mit dem Banknachbarn ermitteln

mögliche Probleme:
- Ausschnitt zeigt nicht alle wichtigen Charakteristiken der Funktion
- Skalierung macht exaktes Ablesen sehr schwer

1. Funktionsuntersuchung I

a) $D_{max} = \mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$

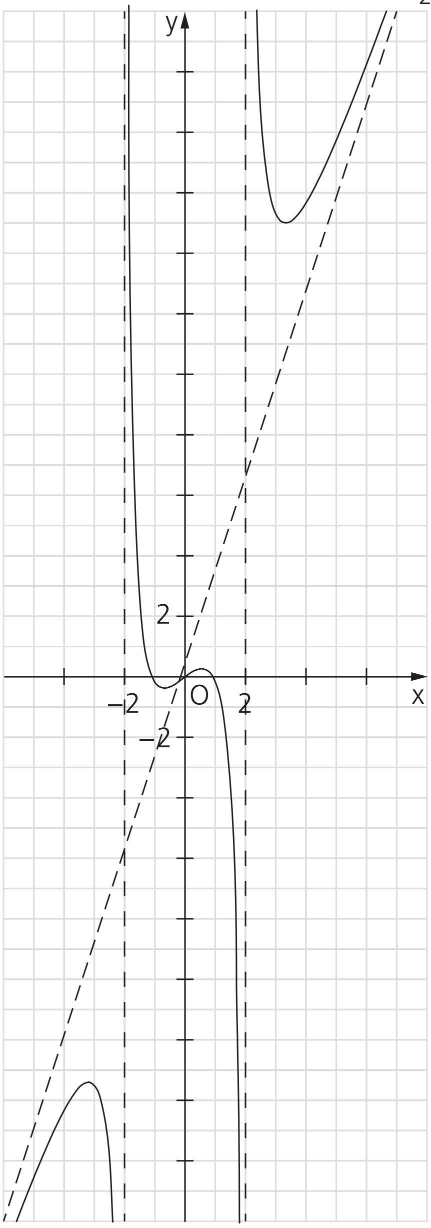
b) Nullstellen $x = 0$ $\quad x = \pm\sqrt{\frac{145}{12}} - \frac{1}{12}$

Polstellen $x = -2$, $x = 2$

c) $f(x) = 3x + \frac{1}{2} + \frac{9x}{x^2 - 4} + \frac{2}{x^2 - 4}$

schräge Asymptote => $a(x) = 3x + \frac{1}{2}$

d)



2. Funktionsuntersuchung II

a) $D_{max} = \mathbb{R}\setminus\{0; 2\}$

$f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x(x-2)^2}$

$\frac{x^3 - 3x}{x(x-2)^2} \geqq -3$

$x^3 - 3x \geqq -3x(x-2)^2 - 3 \mid : x$ (wegen $0 \notin D_g$)

$x^2 - 3 \geqq -3(x^2 - 4x + 4)$

$4x^2 - 12x + 9 \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (Scheitel bei (1,5 I0))

b) aus a) => $W_f = [-3; \infty[$

c) $a \in [-\infty; -3[$ => es existiert kein Schnittpunkt

$a = -3$ => genau ein Schnittpunkt bei S (1,5 I 1)

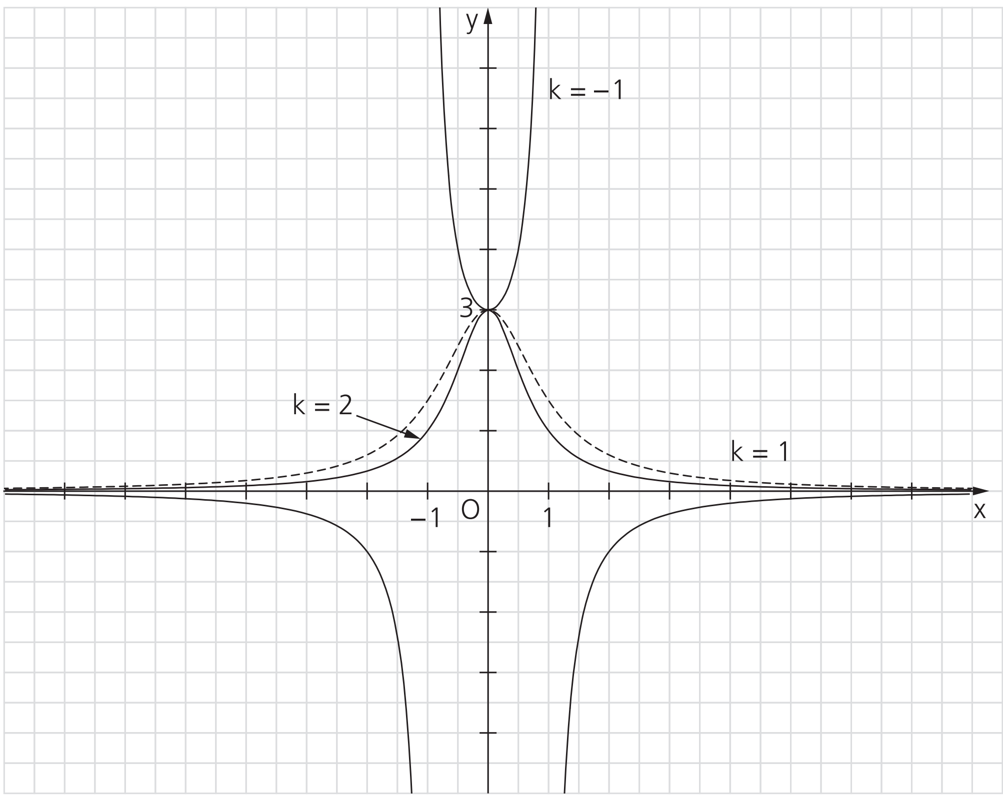
$a \in]-3; 1[$ => zwei Schnittpunkte

$a = 1$ => ein Schnittpunkt

$a > 1$ => zwei Schnittpunkte

3. Funktionenschar

a)



b) • $f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetr. bzgl. der y-Achse

• Nullstelle → keine

• Polstellen

• $k < 0$ zwei Polstellen bei $1 + kx^2 = 0$

$=> x \pm \sqrt{\frac{1}{k}}$

• $k \geqq 0$ => keine Pole

• Asymptote: $y = 0$ da Nennergrad größer als Zählergrad (alternativ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$)

4. Erzwungene elektrische Schwingungen

a) $I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(w - \frac{1}{\omega}\right)^2}}$

$\lim\limits_{\omega \to 0} I(\omega) = 0$

$\lim\limits_{\omega \to \infty} I(\omega) = 0$

b) keine Polstelle, d. h. Nenner $\geqq 0$

=> $\sqrt{R^2 + \left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)^2} \geqq 0$

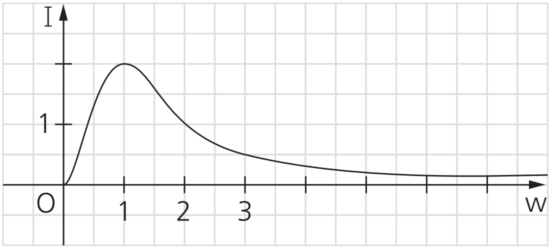
=> $\sqrt{R^2 + \left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)^2} \geqq 0$

=> $\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)^2 \geqq 0$

=> $\omega - \frac{1}{\omega} \geqq 0$

Plotten von $\omega - \frac{1}{\omega}$ zeigt, dass für positive ω der Wert immer 1 ist => Nenner ist nullstellenfrei

c)



d) U => Extremum y-Koordinate

R => Extremum y-Koordinate

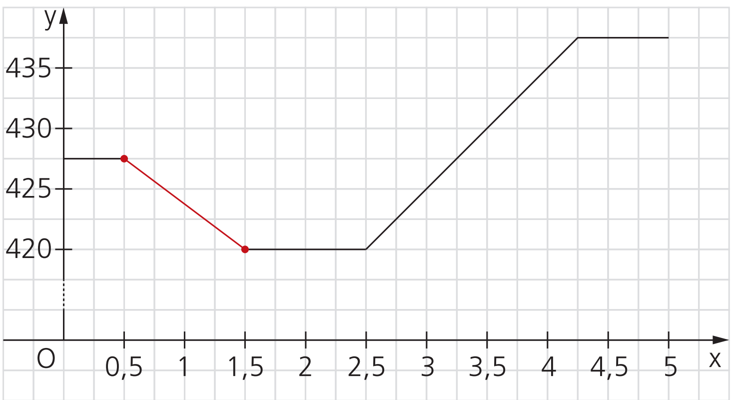
U, R beeinflussen nicht den x-Wert des Extremums

Arbeitsauftrag

a)

[0; 0,5] $\frac{427{,}5 - 427{,}5}{0 - 0{,}5} = 0$	[2,5; 4,5] $\frac{420 - 437{,}5}{2{,}5 - 4{,}5} = 8{,}75$
[0,5; 1,5] $\frac{427{,}5 - 420}{0{,}5 - 1{,}5} = -7{,}5$	[0;5] $\frac{427{,}5 - 437{,}5}{0 - 5} = 2$
[1,5; 2,5] $\frac{420 - 420}{1{,}5 - 2{,}5} = 0$	Allgemein: [a; b] $\frac{f(a) - f(b)}{a - b}$

b)



Gleichung der Geraden: $g(x) = mx + t$

1. Möglichkeit: Lineares Gleichungssystem

$(0{,}5 \mid 427{,}5) \in G_g$: $0{,}5\,m + t = 427{,}5$

$(1{,}5 \mid 420) \in G_g$: $1{,}5\,m + t = 420$

$\Rightarrow m = -7{,}5;\ t = 431{,}25$

$g(x) = -7{,}5x + 431{,}25$

2. Möglichkeit: Steigungsdreieck

$m = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = -7{,}5$

$y = -7{,}5x + t$

$(1{,}5 \mid 420) \in G_g$: $1{,}5 \cdot (-7{,}5) + t = 420 \Rightarrow t = 431{,}25$

Zusammenhang: Die durchschnittliche Geschwindigkeit entspricht der Steigung der Geraden (vgl. Steigungsdreieck zur Berechnung).

c) Mittlere Änderungsrate: $m_{\text{mittlere}} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$

Eine betragsmäßig große Änderungsrate bedeutet, dass sich im Vergleich vom Anfangs- zum Endwert die Funktionswerte stark ändern.

Analog bedeutet eine betragsmäßig kleine Änderungsrate, dass sich im Vergleich vom Anfangs- zum Endwert die Funktionswerte wenig ändern.

Eine negative Änderungsrate bedeutet, dass der Endwert geringer als der Anfangswert ist.

d) $m(a; b) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{(a^2 - 1) - (b^2 - 1)}{a - b} = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a - b)(a + b)}{a - b} = a + b$

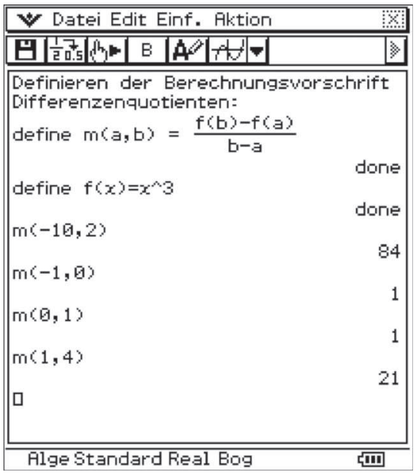
$m(a; b) = a + b = b + a = m(b; a)$

$m(0; 1) = 1 = m(1; 0)$

Deutung: Es ist für die Berechnung der mittleren Änderungsrate unerheblich, ob zuerst der linke und dann der rechte Punkt eingesetzt wird oder umgekehrt.

Aufgaben

1. Änderungsraten



	[–10; 2]	[–1; 0]	[0; 1]	[1; 4]
$f(x) = x^3$	84	1	1	21
$f(x) = \sin(3x)$	–0,106	0,141	0,141	–0,226
$f(x) = 3x$	0,750	0,667	2	26

2. Intervalle bestimmen

$f(x) = x^3 - 2x^2$, $x \in \mathbb{R}$

a) $m(I_1) = m(-2; 0) = 3$
$m(I_2) = m(4; 8) = 88$

b) $g(x) = 4 \cdot 2x$
Ansatz
$m(a, 1) = 3$ $\underset{\text{solve}}{=>}$ $a = -1$ => $I = [-1; 1]$
$m(a, 1) = 88$ => $a = 7{,}086$ => $I = [1; 7{,}086]$

c) Betrachtung des Graphen G_f zeigt, dass hier negative Änderungsraten vorliegen =>
Exponentialfunktion der Art g(x) steigt jedoch ständig

3. Auf Funktionensuche

z. B. $f_{n,a}(x) = a \cdot x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$
Setze n = 2, 3, 4, und ermittle a)
$m = -5$ => $n = 2,\ a = 5;\ n = 3,\ a = -\frac{5}{3};\ n = 4,\ a = 1$
$m = 0$ => alternativer Ansatz $f(x) = (x + 0{,}5)^n$, n gerade
$m = 3$ => $n = 2,\ a = -3;\ n = 3,\ a = 1;\ n = 4,\ a = -\frac{3}{5}$

4. Börsenkurse

a) 13. Juni $f(0) = 53{,}0$
20. Juni $f(7) = 51{,}75$
=> $m = \frac{53 - 51{,}75}{0 - 7} = -\frac{5}{28}$

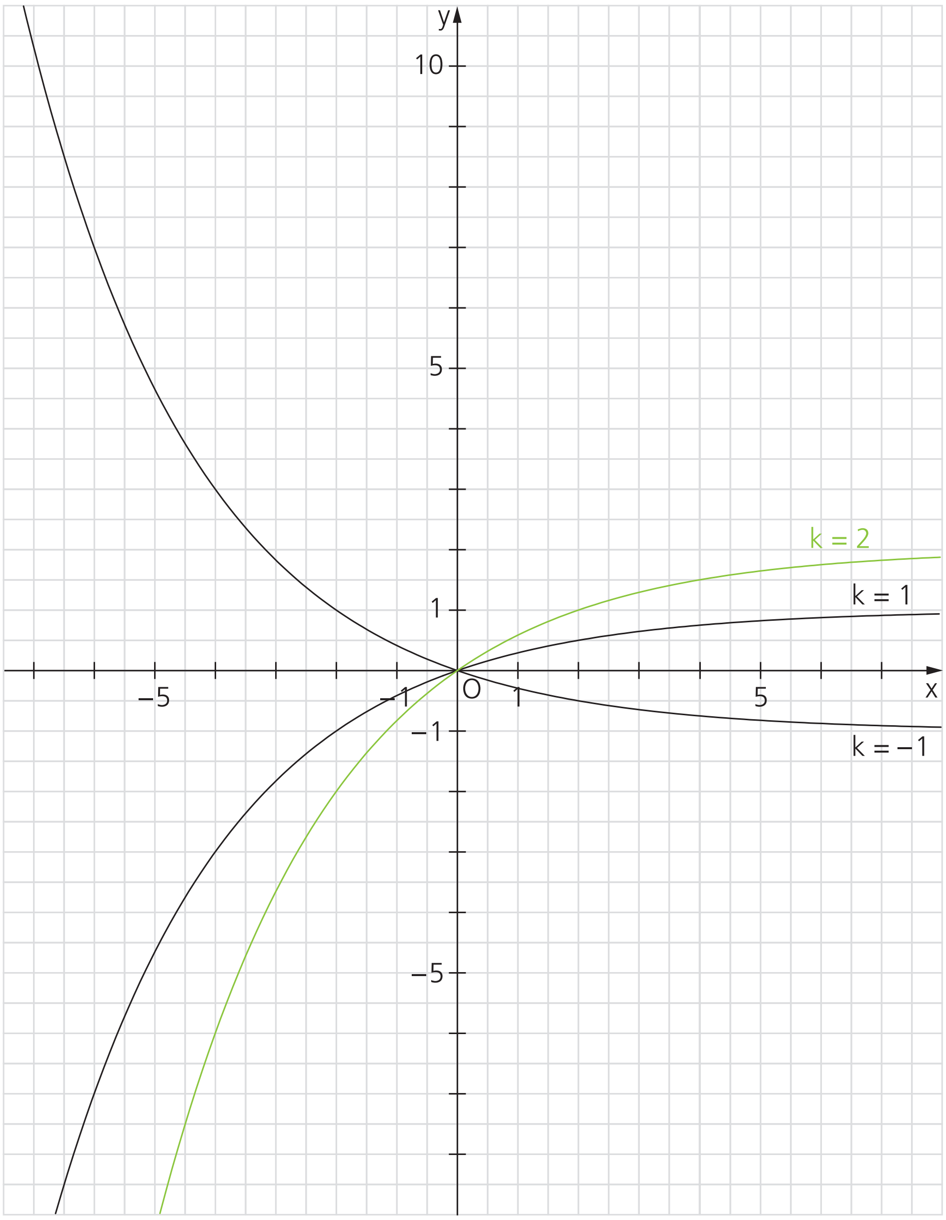
b) 26. Juni $f(0) = 50{,}25$
4. Juli $f(8) = 53{,}75$
=> $m = \frac{50{,}25 - 53{,}75}{0 - 8} = \frac{7}{16}$

c) $53{,}25 + (53{,}75 - 50{,}25) = 56{,}75$

5. Beschränktes Wachstum

$f(x) = k - k \cdot 2^{-0,5x}$, $k > 0$, $D_f = \mathbb{R}^+$

a)



b) Es wird der Fall $a \to \infty$ (mit $a < b$) betrachtet.
Da für $x \to \infty$ ein Grenzwert existiert, strebt die Änderungsrate gegen 0.

Arbeitsauftrag

a) $m_{\text{mittlere}} = \frac{f(0) - f(2)}{0 - 2} = \frac{0 - (-2)}{-2} = -1$

b) Individuelle Schätzung, z. B. $m = -1$

$m(a;\, b) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$

$m(1;\, 1{,}1) = -0{,}95$

$m(1;\, 1{,}001) = -0{,}9995$

$m(1;\, 1{,}000001) = -0{,}9999995$

Schätzung: $m = -1$

c) $\lim\limits_{b \to 1} m(1;\, b) = -1$; Schätzung $m = -1$ somit korrekt.

d) Individuelle Schätzungen bei der Steigung an den verschiedenen Stellen

$x_0 = 0$: $m = -1$

$x_1 = 1$: $m = 1$

$x_2 = 2$: $m = 3$

$x_3 = 3$: $m = 5$

Die Ableitung $f'(x_0)$ berechnet man mit $f'(x_0) = \lim\limits_{b \to x_0} m(x_0;\, b)$.

Aufgaben

1. Überblick über die neuen Begriffe

$m\,(a;\, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$s\,(a;\, b) : y\,(x) = m\,(a;\, b) \cdot (x - a) + f(a)$

$l(a) = \lim\limits_{b \to a} m(a,\, b)$

$t\,(a;\, b) : y(x) = l(a) \cdot (x - a) + f(a)$

2. Unbestimmter Ausdruck $\frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 2^{-x}}{x} = 2 \cdot \ln 2$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\log x}{x - 1} = \frac{1}{\ln 10}$

3. Händisches Rechnen mit Hilfe

a)

Datei Edit Einf. Aktion

a)

simplify $\dfrac{(x\text{^}2-1)-(1.5\text{^}2-1)}{x-1.5}$

$x+\dfrac{3}{2}$

Einsetzen der Stelle x0=1.5

$x+\dfrac{3}{2}\,|\,x=1.5$

3

Alge Standard Real Bog

b) $g'(x) = 3x + \frac{1}{2}$

$g'(0{,}5) = 2$

c) $h'(x) = 2x^2 - 4x + 13$

$h'(-2) = 29$

4. Kurvenanpassung

Datei Edit Einf. Aktion

Steigung des Graphen g in A(1|1) und h in B(3|1)
define g(x)=2-x^2

done

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}\right)$

−2

define h(x)=2x-5

done

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{h(x)-h(3)}{x-3}\right)$

2

Parabel muss symmetrisch zu A und B gewählt werden.
Daraus resultiert folgender Funktionsterm:

define f(x,a)=a*(x-2)^2

done

Durch die Symmetrie müssen die beiden Parameter durch Anpassung an den vorhandenen Funktionswert und der Steigung z.B. im Punkt A bestimmt werden.

-> Funktionswert f(1)=1

solve(f(1,a)=1,a)

{a=1}

-> Steigung

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x,a)-f(1,a)}{x-1}\right)$

−2·a|a=1

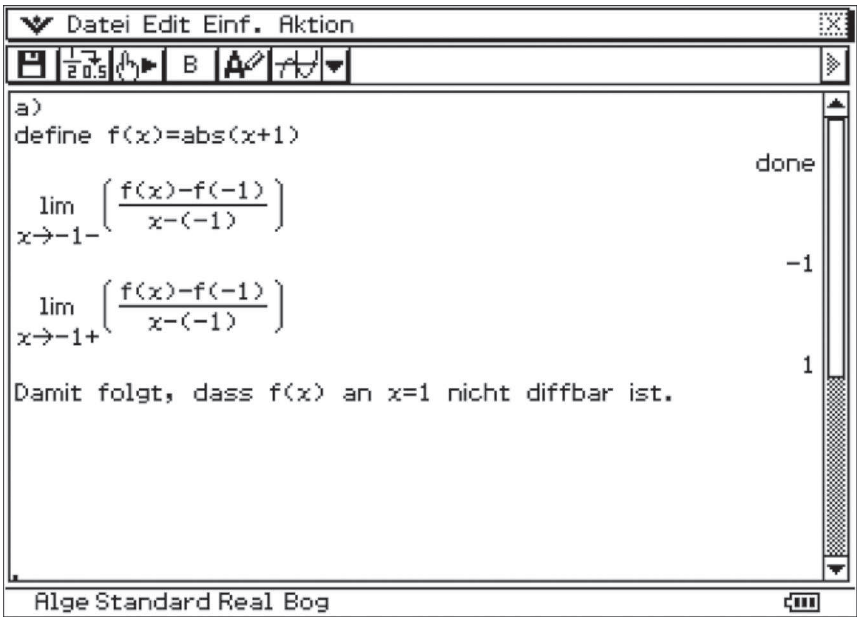
−2

Damit ist die gesuchte Funktion f: f(x)=(x-2)^2

Alge Standard Real Bog

5. Betragsfunktion

a)



b) $f(x) = (x - 2)\,|x - 2|$; $x_0 = 2$

→ Steigung $x \to 2^- \Rightarrow 0$

Steigung $x \to 2^+ \Rightarrow 0$

Da links- und rechtsseitiger Grenzwert gleich null ist, ist die Funktion an x = 2 differenzierbar.

c) $f(x) = \left|\frac{x-1}{x}\right|$, $x_0 = 1$

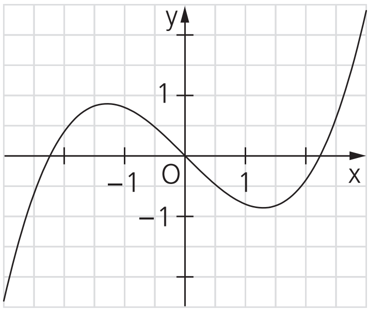
$x \to 1^- \Rightarrow -1$

$x \to 1^+ \Rightarrow 1$

Da links- und rechtsseitiger Grenzwert ungleich sind, ist die Funktion an x = 1 nicht differenzierbar.

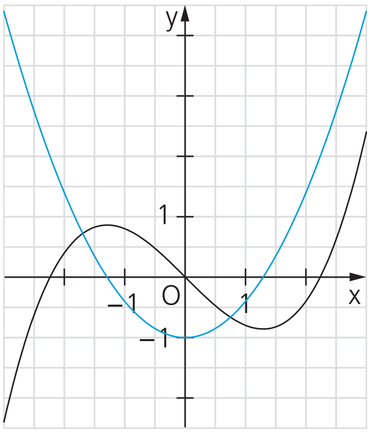
Arbeitsauftrag

a)



b)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
m	4,4	1,4	−0,4	−1	−0,4	1,4	4,4



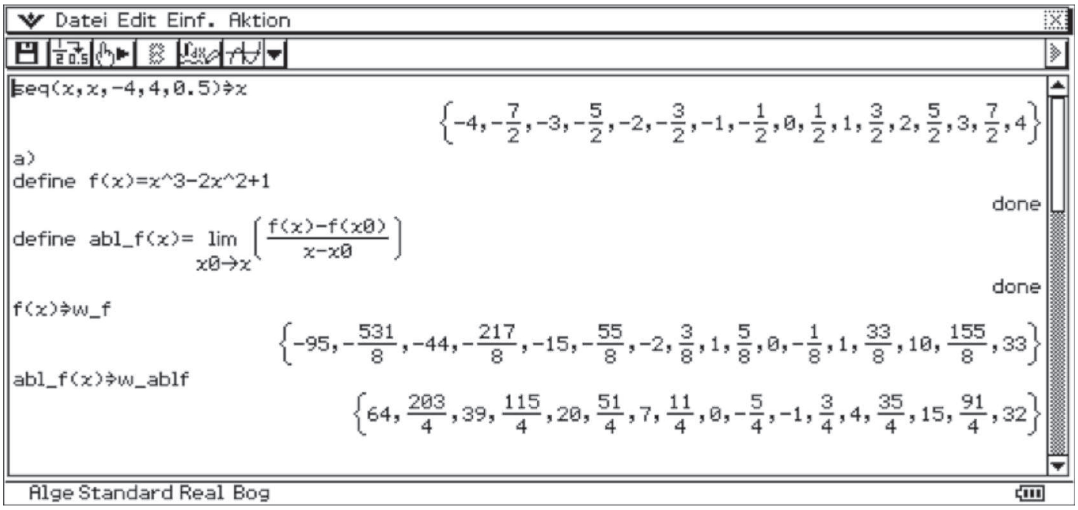
Diese Funktion nennt man Ableitungsfunktion und bezeichnet sie mit f‘.

c) An den Nullstellen befinden sich die Extremstellen von f.
Negative Funktionswerte von f‘ bedeuten fallender Graph.
Positive Funktionswerte von f‘ bedeuten steigender Graph.

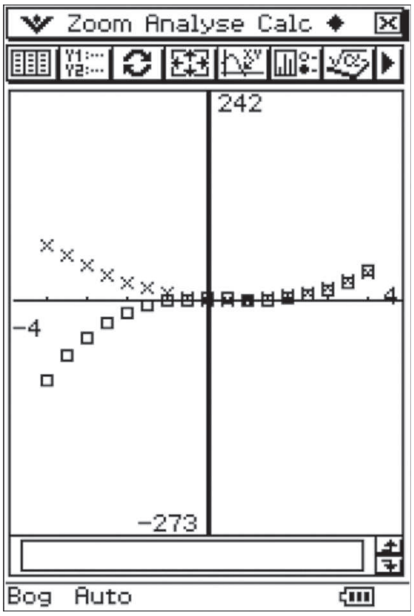
Aufgaben

1. Ableitungsfunktion

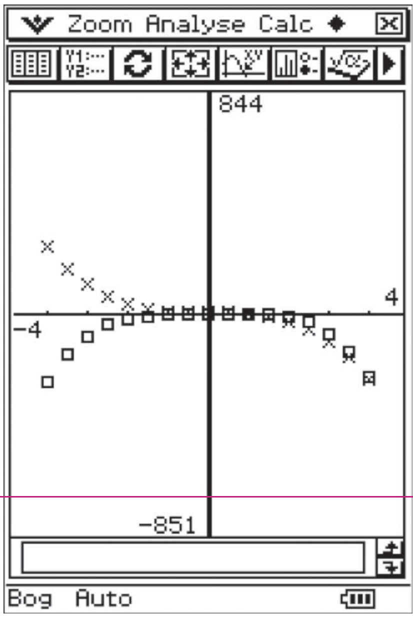
a) Berechnung der Funktionswerte und der zugehörigen Ableitungen:



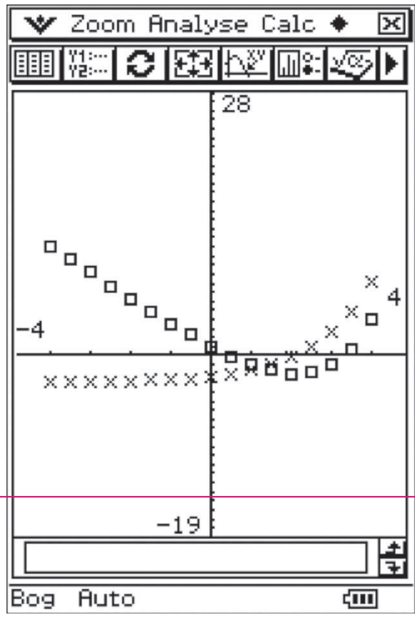
Punkteplot



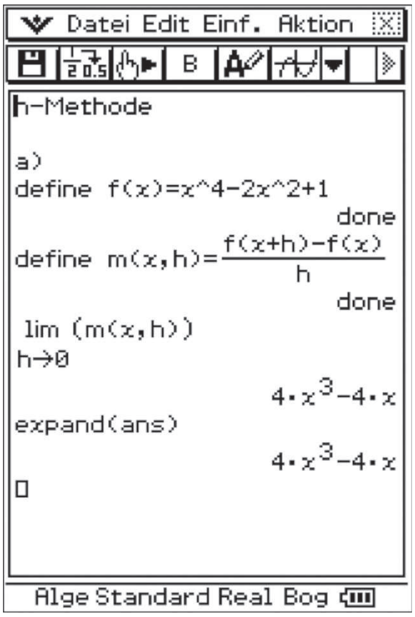
b)



c)



2. h – Methode

a) 

b) $g'(x) = 3x^2 - 3$

c) $h'(x) = -\dfrac{3}{(x-1)^2}$

3. Ableitung einer Funktionenschar

$f_a(x) = x^3 - 2x + a,\ a \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$

$f'_a(x) = 3x^2 - 2$

f'_a ist unabhängig vom Parameter a

4. Stammfunktion

a) $f(x) = x^2 - 4 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + c$

b) $g(x) = x^6 + 3x^2 - x \Rightarrow G(x) = \frac{1}{7}x^7 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c$

c) $h(x) = x^3 - 4x^2 + 24x + 0{,}5 \Rightarrow H(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 12x^2 + 0{,}5x + c$

5. Tangenten und Normalen

a) $f(x) = -2x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = -4x$

$x \mapsto -8x + 11$

n: $x \mapsto \frac{x - 42}{8}$

b) $g(x) = -3x^4 - 2x^2 - 1 \Rightarrow g'(x) = -12x^3 + 4x$

t: $x \mapsto -1$

n: $x = 0$

c) $h(x) = 4x^3 - 2x^2 \Rightarrow h'(x) = 12x^2 - 4x$

t: $x \mapsto 176x - 480$

n: $x \mapsto \frac{-x + 39\,428}{176}$

6.

Datei Edit Einf. Aktion

Extremfahrt in einem Geländewagen

a)

define f(x)=0.3*x^2

done

$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x))=1.51,x\right)$

{x=2.516666667}

b)

$\frac{d}{dx}(f(x))\,|\,x=1$

$\frac{3}{5}$

$\tan^{-1}(\text{ans})$

30.96375653

Der Steigungswinkel ist ca. 31°

Alge Standard Real Gra

7.

Datei Edit Einf. Aktion

Numerische Berechnungen

a)

define f(x)=x^2-x

done

Differenzialquotient:

$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$

$2\cdot x-1$

zentraler Differenzenquotient für h->0

$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right)$

$2\cdot x-1$

Beobachtung: Beide Grenzwerte sind gleich

b)

{0.1, 0.01, 0.001}⇒h

$\left\{\frac{1}{10},\frac{1}{100},\frac{1}{1000}\right\}$

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\left\{10\cdot\left(\left(x+\frac{1}{10}\right)^2-x^2-\frac{1}{10}\right),100\cdot\left(\left(x+\frac{1}{100}\right)^2-x^2-\frac{1}{100}\right),1000\cdot\left(\left(x+\frac{1}{1000}\right)^2-x^2-\frac{1}{1000}\right)\right\}$

expand(ans)

$\left\{2\cdot x-\frac{9}{10},2\cdot x-\frac{99}{100},2\cdot x-\frac{999}{1000}\right\}$

$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

$\left\{5\cdot\left(\left(x+\frac{1}{10}\right)^2-\left(x-\frac{1}{10}\right)^2-\frac{1}{5}\right),50\cdot\left(\left(x+\frac{1}{100}\right)^2-\left(x-\frac{1}{100}\right)^2-\frac{1}{50}\right),500\cdot\left(\left(x+\frac{1}{1000}\right)^2-\left(x-\frac{1}{1000}\right)^2-\frac{1}{500}\right)\right\}$

expand(ans)

$\{2\cdot x-1,2\cdot x-1,2\cdot x-1\}$

Der zentrale Differenzenquotient berechnet quadratische Funktionen exakt, während der "übliche" Differenzenquotient die Ableitung nur annähert.

Alge Standard Real Bog

Arbeitsauftrag

a) $f'(x) = 2x$; $g'(x) = \cos x$

b) $(1)' = 0$; $(2)' = 0$; $(27)' = 0$; $(-5)' = 0$

Konstantenregel:	$f(x) = c;\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$

c) $(x)' = 1$; $(x^2)' = 2x$; $(x^3)' = 3x^2$; $(x^4)' = 4x^3$

$(x^{-2})' = -2x^{-3}$; $(x^{-3})' = -3x^{-4}$; $(x^{-4})' = -4x^{-5}$

Potenzregel:	$f(x) = x^z;\ z \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \Rightarrow f'(x) = z \cdot x^{z-1}$

d) $(2x^2)' = 4x$; $(3x^2) = 6x$; $(4x^2) = 8x$

Faktorregel:	$f(x) = c \cdot u(x);\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$

e) $(3x^2 + 2)' = 6x$; $(3x^2 + 2x)' = 6x + 2$; $(2x^3 + 5x^4)' = 6x^2 + 20x^3$

Summenregel:	$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

f) $(x^2 \cdot \sin (x))' = zx \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$; $(x^3 \cdot x^6)' = 3x^2 \cdot x^6 + x^3 \cdot 6x^5 = 9x^8$

Produktregel:	$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

g) $\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)' = \frac{-x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x}{(\sin x)^2}$

Quotientenregel:	$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)};\ h(x) \neq 0; \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$

Aufgaben

Die Ableitung rationaler Funktionen – Ableitungsregeln

1. a) $f'(x) = 3x^2 - 4$

b) $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 4x$

c) $f'(x) = 4x - 14$

d) $f'(x) = 3 \cdot (8x - 12)$

e) $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 11}{(x-2)^2}$

f) $f'(x) = -\frac{2x + 6}{x^4}$

2. $f(x) = 2x^3 - x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $D_f = \mathbb{R}^+$

$f'(x) = \frac{12 \cdot x^{\frac{7}{2}} - 4x^{\frac{5}{2}} - 1}{2x^{\frac{3}{2}}}$

$f'(x) = 1 \Rightarrow x \approx 0{,}737\ldots$
$f'(x) = 4 \Rightarrow x \approx 1{,}045\ldots$
$f'(x) = 9 \Rightarrow x \approx 1{,}422\ldots$

3. a) $f'(x) = 1 \cdot (x^3 - 2x) + (x - 1) \cdot (3x^2 - 2) = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 2$

b) $f'(x) = 3 \cdot [2 \cdot (x - 17)^{17} + (2x + 5) \cdot 17(x - 1)^{16}]$
Hinweis: • (x – 17)17 mit TC ableiten
• Ausmultiplizieren => 17 Summand

c) $f'(x) = 30x^{29}(1 + x)^{31} + x^{30} \cdot 31(1 + x)^{30}$

d) $f'(x) = 4 \cdot [4x^3 \cdot (x - x^{12}) + x^4 \cdot (1 - 12x^{11})] = -64x^{15} + 20x^4$

e) $f'(x) = 2 \cdot \left(\sqrt{x} + 1\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (3 + x)^4 + \left(\sqrt{x} + 1\right)^2 \cdot 4(3 + x)^3$
Hinweis: Faktorisieren, Ausmultiplizieren bzw. Vereinfachen mit dem TC machen das Ergebnis nicht “schöner“.

f) $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(x + \sqrt{x}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{x^{\frac{5}{2}} + x^2}{x^{\frac{5}{2}}}$

4. a) $f'(x) = \frac{(x^2 - 8x) \cdot 2 - 2x \cdot (2x - 8)}{(x^2 - 8x)} = -\frac{2}{(x-8)^2}$

b) $f'(x) = \frac{(3x + 2) \cdot (2x + 7) - (x^2 + 7x + 6) \cdot 3}{(3x + 2)^2} = \frac{3x^2 + 4x - 4}{(3x + 2)^2}$

c) $f'(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot 2x - (x^2 - 4)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{3x^2 + 4}{2\left(\sqrt{x}\right)^3}$

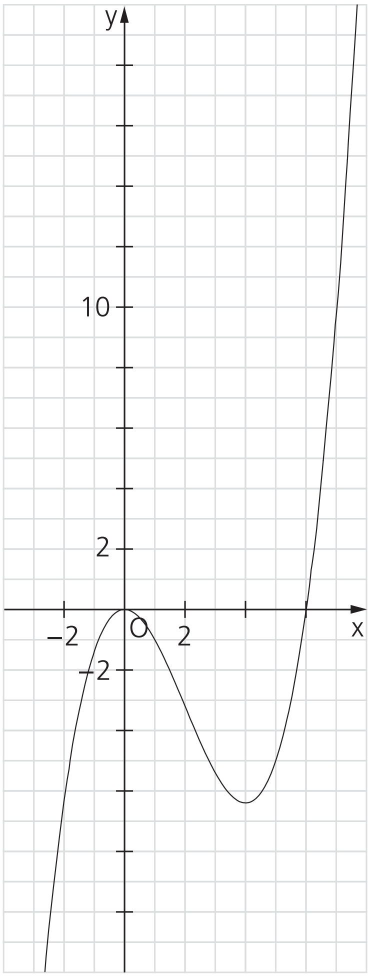
5. $f_a(x) = 3x - \frac{a}{x^2}$, $D_{f_a} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$f'_a(x) = 3 - (-2)\frac{a}{x^3} = 3 + 2\frac{a}{x^3}$

$f'_a(x) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{2a}{3}}$

6. $f(x) = 0{,}2x^3 - 1{,}2x^2$, $D_f = \mathbb{R}$

a)



b) t: $y = \left(\frac{3a^2}{5} - \frac{12}{5}a\right)x - \frac{2}{5}a^3 + \frac{6}{5}a^2$

c) A $(-2 \mid 0)$ in t.
Auflösen der Gleichung $t(-2) = 0$ nach a.
=> $a = 0$, $a = \pm 2\sqrt{3}$, d. h. 3 Tangenten
B $(3 \mid 0)$
=> $a = 0$ => 1 Tangente
C $(4 \mid -4)$
=> $a \approx 0{,}7859\ldots$ => 1 Tangente

7. a) $f'(x) = \frac{x \cdot 1 - 1 \cdot x}{x^2} = \frac{0}{x^2} = 0$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot x + \frac{1}{x} \cdot 1 = 0$

b) $f'(x) = \frac{x \cdot 1 - (x+2) \cdot 1}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot (x+2) + 1 \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2}{x^2}$

c) $f'(x) = \frac{(x+2)2(x-3) - (x-3)^2 \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x - 21}{(x+2)^2}$

$f'(x) = (x-3)^2 \cdot \left(-\frac{1}{(x+2)^2}\right) + 2(x-3) \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{x^2 + 4x - 21}{(x+2)^2}$

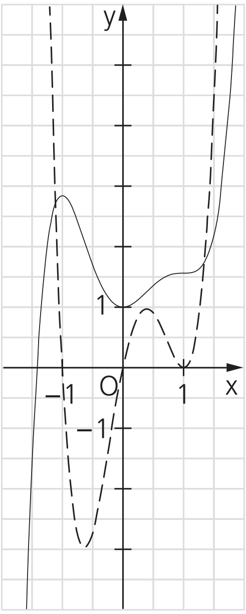
d) $f'(x) = \frac{x^2 \cdot 1 - (x+1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-x-2}{x^3}$

$f'(x) = -2 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot (x+1) + \frac{1}{x^2} \cdot 1 = \frac{-x-2}{x^3}$

Arbeitsauftrag

a) Intervalle, in denen der Funktionsgraph steigt: $]-\infty; -1[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$
Hinweis: Mathematisch gesehen dürften auch die (reellen) Randpunkte hinzugenommen werden, sodass auch die Antwort $]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$ korrekt wäre.
Intervalle, in denen der Funktionsgraph fällt: $]-1; 0[$
Hinweis: siehe oben $[-1; 0]$

b) $f'(x) = 4{,}8x^4 - 4{,}8x^3 - 4{,}8x^2 + 4{,}8x$



c)

x	$]-\infty; -1[$	-1	$]-1; 0[$	0	$]0; 1[$	1	$]1; +\infty[$
Vorzeichen von $f'(x)$	+	0	–	0	+	0	+
Vorzeichenwechsel von $f'(x)$		Von + nach –		Von – nach +		kein VZW	
Steigungsverhalten von G_f	steigend		fallend		steigend	steigend	steigend
Graph G_f		HOP		TIP		Kein Extrempunkt	

Steigungsverhalten;
f' negativ => G_f fällt
f' positiv => G_f steigt
Punkte mit $f'(x) = 0$:
TIP (Tiefpunkt), falls Steigungsverhalten von G_f sich von steigend nach fallend ändert.
HOP (Hochpunkt), falls Steigungsverhalten von G_f sich von fallend nach steigend ändert.
Kein Extrempunkt, falls sich das Steigungsverhalten von G_f sich nicht ändert.

Aufgaben

1. Monotonieuntersuchungen I

a) $f(x) = x^2 - 4x + 4;\ x_0 = 2$
$f'(x) = 2x - 4;\ f'(2) = 0$
Betrachten der Umgebung von x_0
$\Rightarrow x < 2 \Rightarrow$ Steigung negativ
$x > 2 \Rightarrow$ Steigung positiv
$\Rightarrow$ TIP $(2 \mid 0)$

b) $f(x) = 0{,}5x^3 - 2{,}5x + 1,\ x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\sqrt{15}}{3}$
$f'(x) = 1{,}5x^2 - 2{,}5$

$f'(x_0) \neq 0$

	$x < x_0$	$x > x_0$
Steigung	neg.	neg.

$\Rightarrow$ keine Charakteristik

$f'(x_1) = 0$

	$x < x_1$	$x > x_1$
Steigung	neg.	pos.

$\Rightarrow$ TIP $\left(\frac{\sqrt{15}}{3} \mid \frac{-5\sqrt{15}}{9} + 1\right)$

c) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x,\ x_0 = 1,\ x_1 = \frac{1}{16}\left(1 + \sqrt{33}\right)$
$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 1$

$f'(x_0) = 0$

	$x < x_0$	$x > x_0$
Steigung	neg.	neg.

$\Rightarrow$ TIP $(1 \mid 0)$

$f'(x_1) \neq 0$

	$x < x_1$	$x > x_1$
Steigung	pos.	pos.

$\Rightarrow$ keine besondere Charakteristik

2. Kurvendiskussion

a) $f(x) = (x - 3) \cdot (x^2 - 3x) + 2$
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
Nullstelle $f(x) = 0 \Rightarrow x \approx -0{,}196$
Extrema $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3$

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f'(x)$	> 0	0	< 0	0	> 0
		HOP $(1 \mid 6)$		TIP $(3 \mid 2)$	

b) $f(x) = 3x^2 - 4x^4$
$f'(x) = 6x - 16x^3$
Nullstelle $f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$
Extrema $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$

	$x < -\frac{\sqrt{6}}{4}$	$x = -\frac{\sqrt{6}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6}}{4} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \frac{\sqrt{6}}{4}$	$x = \frac{\sqrt{6}}{4}$	$x > \frac{\sqrt{6}}{4}$
$f'(x)$	> 0	0	< 0	0	> 0	0	< 0
		HOP $\left(-\frac{\sqrt{6}}{4} \mid \frac{9}{16}\right)$		TIP $(0 \mid 0)$		HOP $\left(-\frac{\sqrt{6}}{4} \mid \frac{9}{16}\right)$	

c) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 - x + 0{,}7$

$f'(x) = x^4 + 6x^3 - 1$

Nullstelle $f(x) = 0 \Rightarrow x \approx -7{,}513$

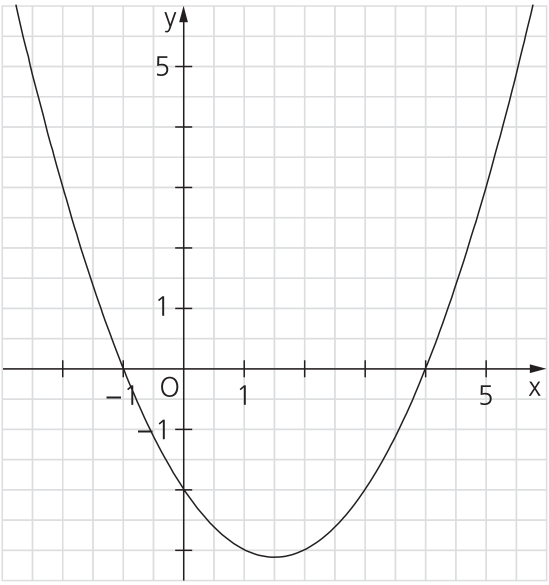
Extrema $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 \approx -6{,}005;\ x_2 \approx 0{,}535$

	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x > x_2$
$f'(x)$	> 0	$= 0$	< 0	$= 0$	> 0

HOP $(-6{,}005 \mid 395{,}5)$ TIP $(0{,}535 \mid 0{,}3)$

3. Monotonieuntersuchungen II

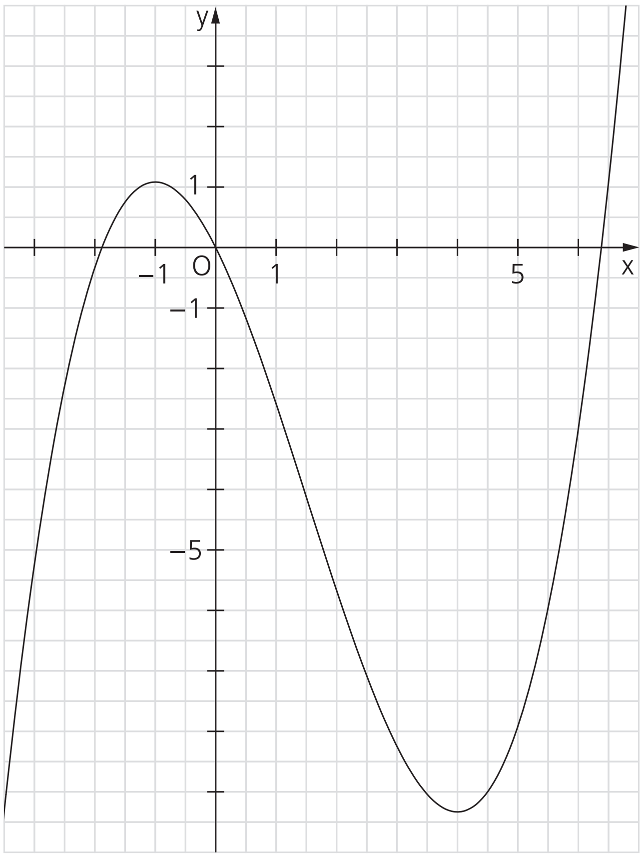
a)



Monotonieverhalten

$x < -1$	$-1 < x < 4$	$x > 4$
streng monoton steigend	streng monoton fallend	streng monoton steigend

b)



c) $f(x) = 0{,}5 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4\right)$

4. Extrema einer Funktionenschar

a) $f(x) = 0{,}2x^4 - ax \Rightarrow f'(x) = 0{,}8x^3 - a$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}a}$

Für alle $a \in \mathbb{R}$ existiert ein Extremum.

b) $f(x) = x^5 - ax^3 + x \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 3ax^2 + 1$

$f'(x) = 0$

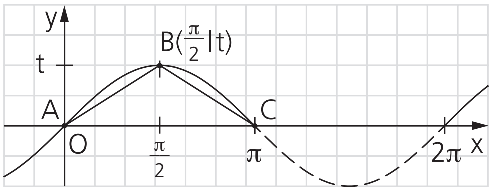
$\Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{10\left(3a \pm \sqrt{9a^2 - 20}\right)}}{10}$

- $9a^2 - 20 < 0 \Rightarrow a \in \left]-\frac{2}{3}\sqrt{5};\ \frac{2}{3}\sqrt{5}\right[$
  $\Rightarrow$ kein Extremum
- $a = \pm\frac{2}{3}\sqrt{5}$
  $\Rightarrow$ es existieren 2 Extrema, da $3a = \sqrt{9a^2 - 20}$ ist.
- $a \in \mathbb{R}\backslash\left[-\frac{2}{3}\sqrt{5};\ \frac{2}{3}\sqrt{5}\right]$
  $\Rightarrow$ Es existieren 4 Extrema.

c) $f(x) = 3x^2\,(x - 0{,}5a)$
$f'(x) = 9x^2 - 3ax$
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \frac{9}{3}$
- $a = 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt (doppelte Nullstelle)
- $a \neq 0 \Rightarrow$ zwei Extrema

5. Dreiecke in der Sinusfunktion

$f_t(x) = t \cdot \sin x$



a) ΔABC ist gleichseitig.
$\overline{AB} = \overline{BC} = \pi$
$\overline{AB} = \sqrt{t^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \pi \quad \Rightarrow \quad t = \pm\frac{\pi}{2}\sqrt{3}$

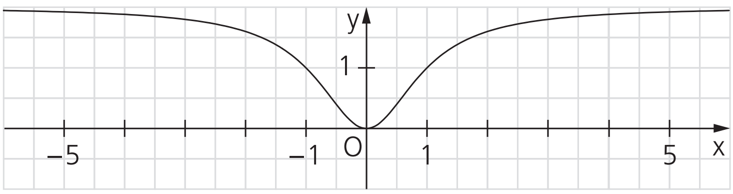
b) $A = \frac{1}{2}\,\pi \cdot \frac{\pi}{2}\sqrt{3} = \frac{\pi^2}{4}\sqrt{3}$

c) Pythagoras:
$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \left(t^2 + \frac{\pi^2}{4}\right) + \left(t^2 + \frac{\pi^2}{4}\right) = \pi^2$
$\Leftrightarrow 2t^2 + \frac{\pi^2}{2} = \pi^2 \Rightarrow t^2 = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t_{1,2} = \pm\frac{\pi}{2}$

6. Extremwertaufgabe

$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$

a)



b) Zielfunktion: $A(u) = 2u \cdot (2 - f(u))$
$A'(u) = \frac{-(4u^2 - 4)}{(u^2 + 1)^2}$

$\left.\begin{array}{l} A'(u) = 0 \Rightarrow u = \pm 1 \\ A(1) = 2 \end{array}\right\}$ Für $u = \pm 1$ wird der Flächeninhalt maximal.

Arbeitsauftrag

1. **a)** Symmetrie bezüglich der y-Achse: $f(x) = f(-x)$
Symmetrie bezüglich des Ursprungs: $f(x) = -f(-x)$

b) Schnittpunkte mit der x-Achse => Nullstellenbestimmung: $(f(x) = 0 \mid 0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0 \mid f(0))$

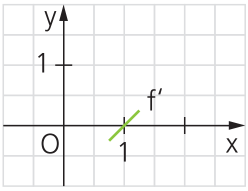
c) Bestimmung des Limes (von links und von rechts)

d) Vorzeichenuntersuchung der Ableitungsfunktion

e) horizontale Tangente an den Stellen mit $f(x) = 0$

f) Untersuchung der Stellen mit horizontalen Tangenten:
Vorzeichenwechsel von f' an dieser Stelle => Extrempunkt (HOP wenn von + nach -; TIP wenn von – nach +)
Kein Vorzeichenwechsel von f' an dieser Stelle => kein Extrempunkt

2.



a) Folgerung:
Da $f'' > 0$, folgt, dass f' an dieser Stelle steigt.
Also ändert sich das Steigungsverhalten von – nach +.
Somit liegt an dieser ein TIP vor.
Satz allgemein:
Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat f bei $x = x_0$ einen Tiefpunkt.

b) Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann hat f bei $x = x_0$ einen Hochpunkt.

c) Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, dann kann man keine allgemein gültige Aussage treffen. Es kann einen HOP/TIP geben, aber auch nicht.
Vergleiche: $f(x) = x^4$ und $g(x) = x^5$.
Bei $x = 0$ hat f einen TIP, obwohl $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$.
Bei $x = 0$ hat f keinen Extrempunkt. Es gilt $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$.

Aufgaben

1. Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema

a) $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 + 4}$

$f'(x) = -\frac{4x^2 - 12x - 16}{(x^2 + 4)^2}$; $f''(x) = \frac{8x^3 - 36x^2 - 96x + 48}{(x^2 + 4)^3}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$; $x_2 = 4$

$f''(x_1) > 0$; $f''(x_2) < 0$

$\Rightarrow$ TIP $(-1 \mid 0)$; HOP $(4 \mid 2{,}5)$

b) $f(x) = 2 + \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}$

$f'(x) = -\frac{8x + 12}{x^3}$; $f''(x) = \frac{16x + 36}{x^4}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1{,}5$; $f''(-1{,}5) > 0$

$\Rightarrow$ TIP $\left(-1{,}5 \mid -\frac{2}{3}\right)$

2. Nachweis eines Extremums

$f(x) = x^4 + x^3$; $f'(x) = 4x^3 + 3x^2$

$f''(x) = 12x^2 + 6x$

- $x = 0$ lokales Maximum
  $f'(0) = 0$; $f''(0) = 0 \Rightarrow$ falsch
- $x = 0$ lokales Minimum
  s. o. $\Rightarrow$ falsch
- $x = -0{,}75$ lokales Maximum
  $f'(-0{,}75) = 0$; $f''(-0{,}75) = \frac{9}{4} > 0$
  $\Rightarrow$ falsch
- $x = -0{,}75$ lokales Minimum
  $\Rightarrow$ richtig
- $x = -\frac{4}{3}$ lokales Maximum
  $f'\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{112}{23} \neq 0 \Rightarrow$ falsch

3. Gewinnmaximierung

$G(n) = -0{,}5\,(n - 8)^3 + 96(n - 8) + 12$

$G'(n) = -\frac{3n^2 - 48n}{2}$; $G''(n) = -3n + 24$

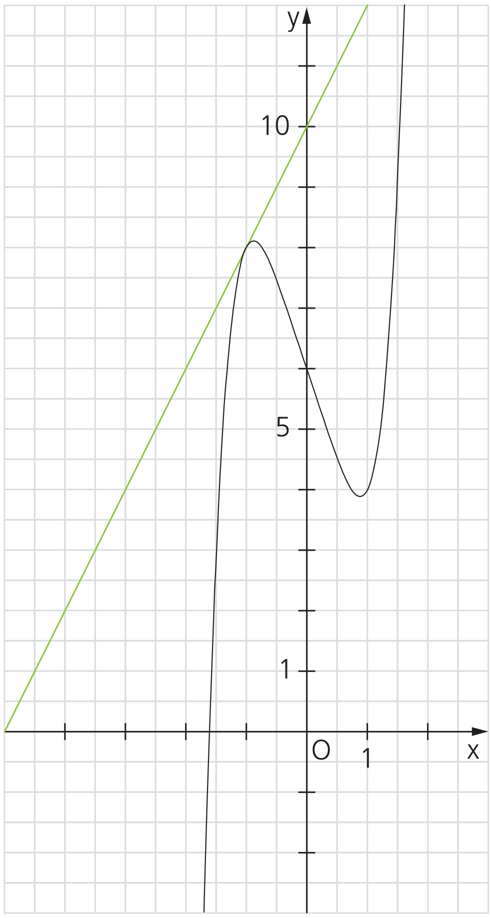
$G'(n) = 0 \Rightarrow n_1 = 0$; $n_2 = 16$

$G''(0) > 0$; $G''(16) < 0$

Der Gewinn wird für $n = 16$ maximal, $G(16) = 524$.

4. Berührpunkt zweier Graphen

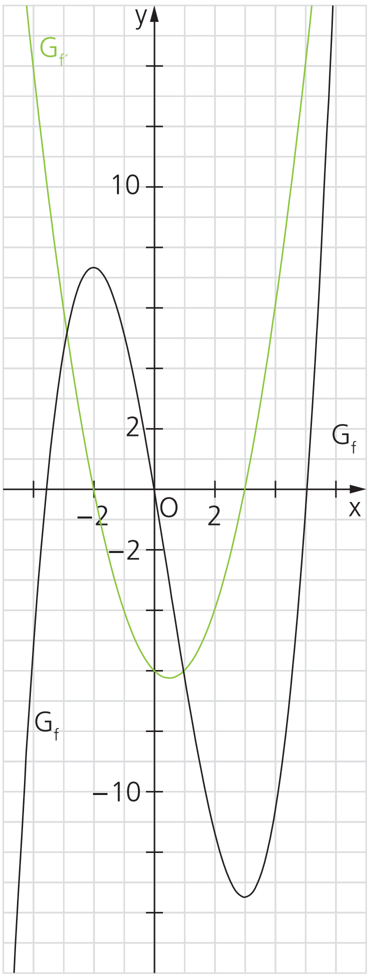
$f(x) = ax^5 - 3x + b$
$g(x) = 10 + 2x$
$f'(x) = 5ax^4 - 3,\ g'(x) = 2$
Punkte mit gleicher Steigung
$f'(x) = g'(x)$
$5ax^4 - 3 = 2 \Leftrightarrow 5ax^4 = 5$
$\Leftrightarrow ax^4 = 1$
$\Leftrightarrow x^4 = \frac{1}{a}$
Wähle z. B. $a = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
Punkte mit gleichem y-Wert
z. B. $x = -1$
$f(-1) = g(-1) \Rightarrow -a + 3 + b = 10 - 2$
$\Rightarrow 2 + b = 8 \Rightarrow b = 6$
$f(x) = x^5 - 3x + 6$
berührt die Gerade $g(x) = 10 + 2x$ im Punkt $(-1 \mid 8)$



5. Funktionsuntersuchung I

$f_a(x) = x^3 - 2ax - 5$
$f_a'(x) = 3x^2 - 2a$
$f_a'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{6a}}{3}$
Für $a > 0$ existieren zwei Stellen mit waagrechter Tangente.
Für Polynome 3. Grades ergeben sich somit 2 Extrema.

6. Funktionenrätsel I

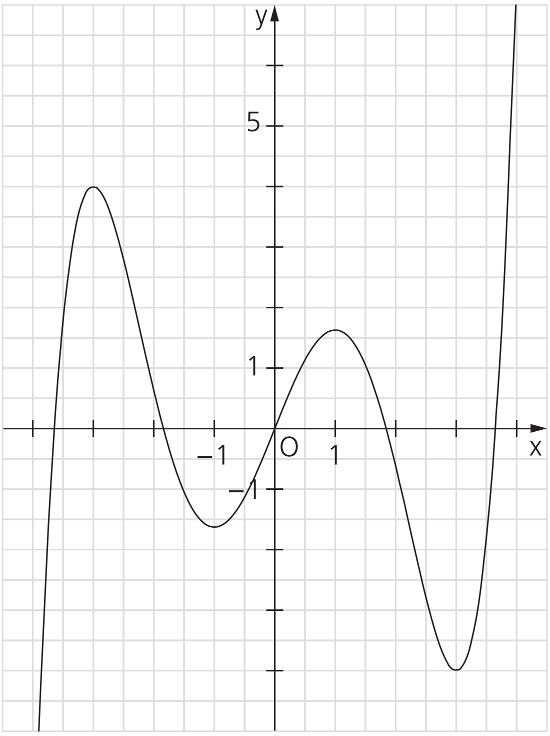


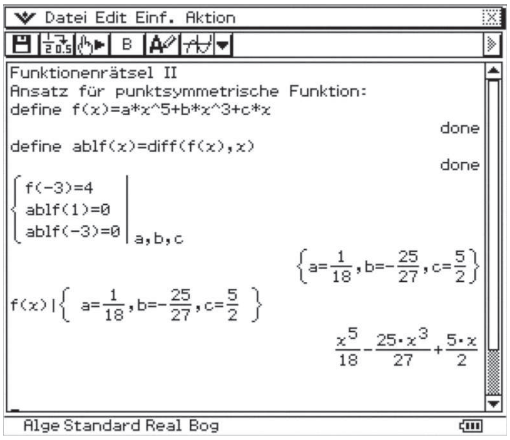
a) $f'(x) = (x + 2)(x - 3)$
$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$

b) $g(x) = f(x) + 2$
$h(x) = f(x) - 5$

7. Funktionenrätsel II

a)





b) Aufgrund der vier Extrema und der Punktsymmetrie muss die Funktion genau fünf Nullstellen haben.

8. Funktionsuntersuchung II

a) $f_a(x) = (a - x)\,(x + 2)^2$, $a > 0$
$f_a'(x) = -3x^2 + 2ax - 8x + 4a - 4$

b) $f_a'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2$, $\quad x_2 = \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}$
TIP bei $x = 2$
HOP bei $x = \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}$

c) $t\colon x \mapsto (-32 + 8a)x + 32$

d) $x = 4$ soll HOP sein
$\Rightarrow \frac{2}{3}a - \frac{2}{3} = 4 \Rightarrow a = 7$

9. Ortskurven

$f_k(x) = kx^3 + 8x^2,\ k \in \mathbb{R}$

a) Die Extrempunkte liegen auf einer Parabel.

b) $f_k'(x) = 3kx^2 + 16x$

$f_k'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = -\frac{16}{3k}$

TIP $(0 \mid 0)$, HOP $\left(-\frac{16}{3k} \mid \frac{2\,048}{27k^2}\right)$

c) $x = \frac{16}{3k} \Rightarrow k = -\frac{16}{3x}$

$y = \frac{2\,048}{27\,k^2} = \frac{8}{3}\,x^2$

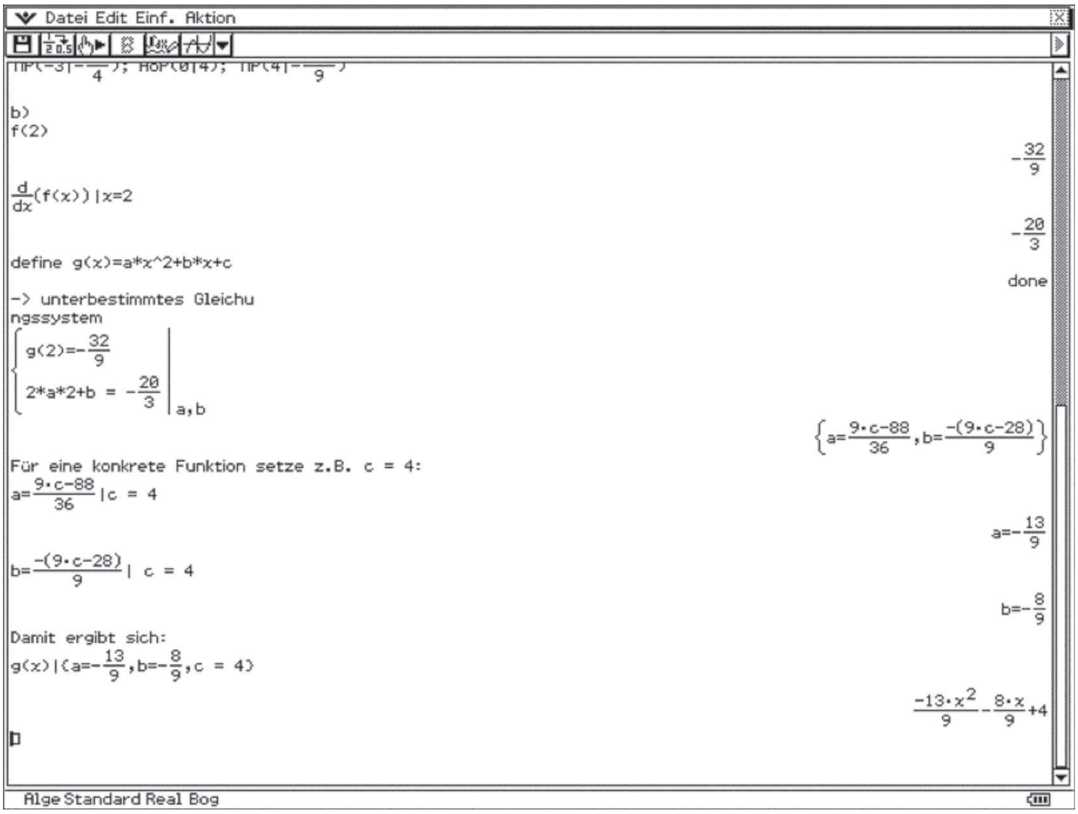
Auf der Parabel $y = \frac{8}{3}x^2$ liegen alle HOPs und (wegen $0 = \frac{8}{3} \cdot 0^2$) ebenfalls der TIP.

10. Polynome

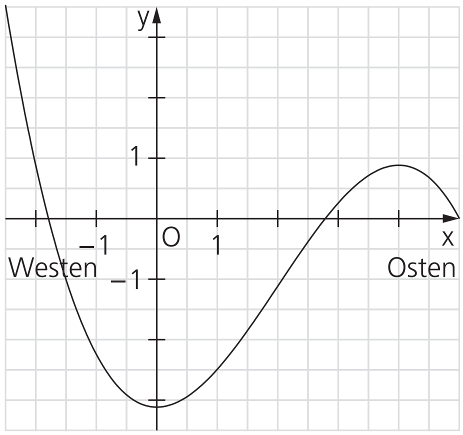
a) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{9}x^3 - 2x^2 + 4$

TIP $\left(-3 \mid -\frac{17}{4}\right)$; HOP $(0 \mid 4)$;

TIP $\left(4 \mid -\frac{124}{9}\right)$

b) 

11. Staudamm

a) 

b) Steilste Stelle $f'(x) = -0{,}375x^2 + 1{,}5x$

Extremum der 1.Abl. → $f''(x) = 0$

$f''(x) = -0{,}75x + 1{,}5 = 0 \Rightarrow x = 2$

z. B. Ansatz $|f'(x)| = f'(2)$

$\Rightarrow x_1 = 2,\ x_{2,3} = \pm 2\sqrt{2} + 2$

Stelle $x = -2\sqrt{2} + 2$ hat betragsmäßig die gleiche Steigung wie bei $x = 2$.

c) $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ TIP, ($x = 4$ HOP)

Höhe der Staumauer über TIP: $f(0) + 3{,}125 = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow (x_1 = 5),\ x_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{1}{2}$

Breite: $\left(\frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{21}$

12. Badestrand

a) HoP $P\left(2 \mid \frac{25}{16}\right)$: $f'(x) = -\frac{x^3}{4} + x$; $\quad f'(2) = 0$

$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 1$; $\quad f''(2) = -2 < 0$

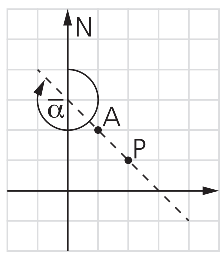
$\Rightarrow$ P ist HoP

Länge der Absperrkette

G_f ist eine zur y-Achse symmetrisch, d. h. die Länge kann wie folgt berechnet werden:

$2 \cdot 2 = 4$

x-Koord. des HoP P



Ausdehnung in N-S-Richtung

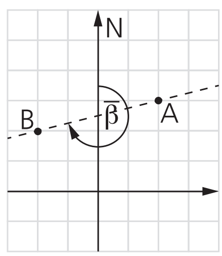
Berechne TiP: $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 2$

$f''(0) = 1 > 0 \Rightarrow$ TiP

TiP $\left(0 \mid \frac{9}{16}\right)$

Ausdehnung: $\frac{25}{16} - \frac{9}{16} = \frac{16}{16} = 1$

b) 1. Etappe: $\overline{PA} = \sqrt{1^2 + \left(3 - \frac{25}{16}\right)^2} \approx 1{,}75$



$\tan\alpha = \frac{3 - \frac{25}{16}}{-1} \Rightarrow \alpha = -55{,}18°$

$\Rightarrow \overline{\alpha} = 325{,}18°$

2. Etappe: zweiter HoP

$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + \left(3 - \frac{25}{16}\right)^2} \approx 3{,}33$

$\tan\beta = \frac{3 - \frac{25}{16}}{1 - (-2)} \Rightarrow \beta \approx 25{,}60°$

$\Rightarrow \overline{\beta} \approx 244{,}40°$

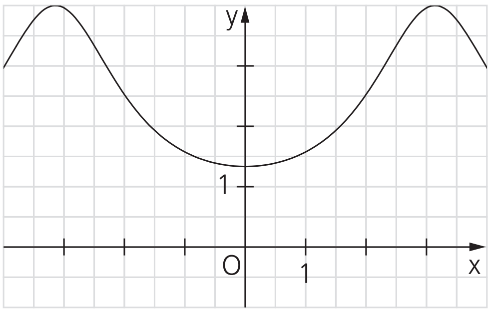
13. Verkaufspreis und Absatzmenge

a) f: Nachfrage abhängig vom Preis x
g_K: Nachfrage → Anzahl * Stückgewinn
=> Gesamtgewinn

b) Analytische bzw. graphische Lösung liefert das Gewinnmaximum bei ca. 88 Geräten und beträgt 5 829,26 €.

14. Approximationsproblem

a)



b) $D = \mathbb{R}$, $W = [\frac{4}{3}; 4]$
$p = 2\pi$
HoPs: $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
TiPs: $x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

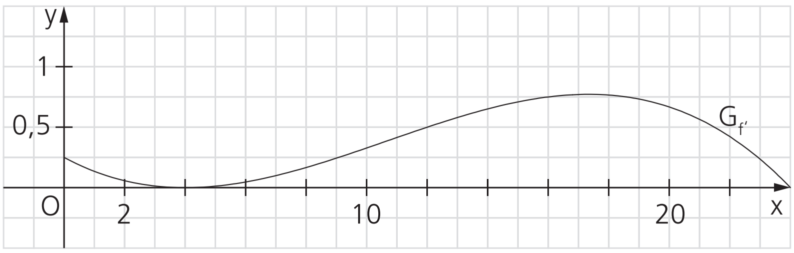
c) Ansatz
Wähle aufgrund der Achsensymmetrie
$g(x) = ax^2 + c$
I $f(0) = g(0)$ $a \approx 0{,}2980$
II $f(2) = g(2)$ $c \approx \frac{4}{3}$
$d(x) = |f(x) - g(x)|$ beschreibt den Approximationsfehler
Dieser wird maximal für $x = \pm 1{,}391$ und beträgt 0,074.

15. Wetterstation

a) momentane Regenstärke ist die „aktuelle" Änderung des Wasservolumens im Gefäß

b) $f'(t) = -\frac{1}{1\,536} \cdot (x^3 - 32x^2 + 208x - 384)$

t	5	10	15	20
f'(t)	$\frac{19}{1\,536}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{363}{512}$	$\frac{2}{3}$



c) $f''(t) = -\frac{1}{1\,536} \cdot (3x^2 - 64x + 208)$
$f''(t) = 0 \Rightarrow t = 4,\ t = \frac{52}{3}$
$t = 4$ mit $f'(4) = 0 \Rightarrow$ kein Regen
$t = \frac{52}{3} = 17\frac{1}{3}$ => beonders starker Regen

d) $f(24) - f(0)$ => gesamte Regenmenge des Tages
$\Rightarrow \Delta f = \frac{9\,163}{1\,152} \approx 7{,}95$ (Liter pro m²)

Arbeitsauftrag

a) $n(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$n(3) \approx 1{,}833333333$

$n(1{,}833333333) \approx 1{,}462121212$

$n(1{,}462121212) \approx 1{,}41499843$

$n(1{,}41499843) \approx 1{,}41421378$

b) Bestimmen Sie die Nullstelle von $\sin x - 2x + 4$.

Startwert, nachdem der Graph geplottet wurde: $x = 2$

$n(2) \approx 2{,}376341956$

$n(2{,}376341956\ ) \approx 2{,}354305393$

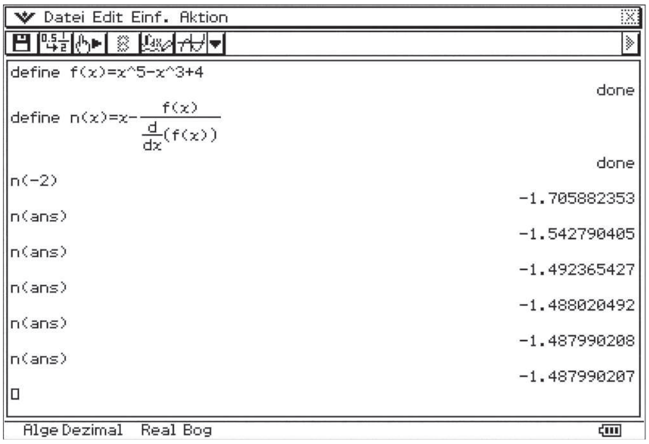
$n(2{,}354305393) \approx 2{,}354242759$

c) Die Funktionswerte oszillieren zwischen 0 und 2. Ein Näherungswert wird dadurch nicht erreicht. Das Newtonverfahren funktioniert also nicht immer.

Aufgaben

1. Newton-Verfahren I

a)



b) Term umformen $f(x) = 2 \sin(x) + x - 2$; $x = 0{,}704576...$

c) $x = -0{,}486389...$

2. Newton-Verfahren II

Vorgehensweise: Plotten des Graphen, um durch dessen Betrachtung einen günstigen Startwert in der Nähe der Nullstelle zu finden.

a) $f(x) = x^3 - 2x - 1$

Nullstellen: $x = -1$ (exakt); $x = -0{,}618...$ (Startwert $-0{,}5$); $x = 1{,}618...$ (Startwert 2)

b) $f(x) = \sin(x) - x^2 + 2$

Nullstellen: $x = -1{,}062...$ (Startwert -1); $x = 1{,}728...$ (Startwert 2)

c) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 4 - \cos(x)$

Nullstellen: $x = 0{,}451...$ (Startwert 0,5); $x = -0{,}451...$ (wegen Symmetrie zur y-Achse)

3. Vergleich zweier numerischer Verfahren und deren Fehlerentwicklung

a) Vergleich zwischen Bisektions- und Newton-Verfahren

Iterationsschritt	Bisektionsverfahren		Newton-Verfahren
	Intervall	Mitte c	
1	[1;2]	1,5	1,5
2	[1;1,375]	1,1875	1,296296296
3	[1,375; 1,1875]	1,28125	1,260932225
4	[1,1875;1,28125]	1,234375	1,259921861
5	[1,234375; 1,28125]	1,2578125	1,25992105
6	…	1,26953125	1,25992105
7	…	1,263671875	1,25992105

b) Fehler: $f(n) = \frac{|x_n - \sqrt[3]{2}|}{\sqrt[3]{2}}$, x_n Näherungslösung im n-ten Schritt

Iterationsschritt	Fehler Bisektion	Fehler Newton
1	0,19055...	0,19055...
2	0,05748...	0,02887...
3	0,01692...	$8{,}02570... \cdot 10^{-4}$
4	0,02027...	$6{,}43774... \cdot 10^{-7}$
5	$0{,}16735... \cdot 10^{-3}$	$8{,}34337... \cdot 10^{-11}$

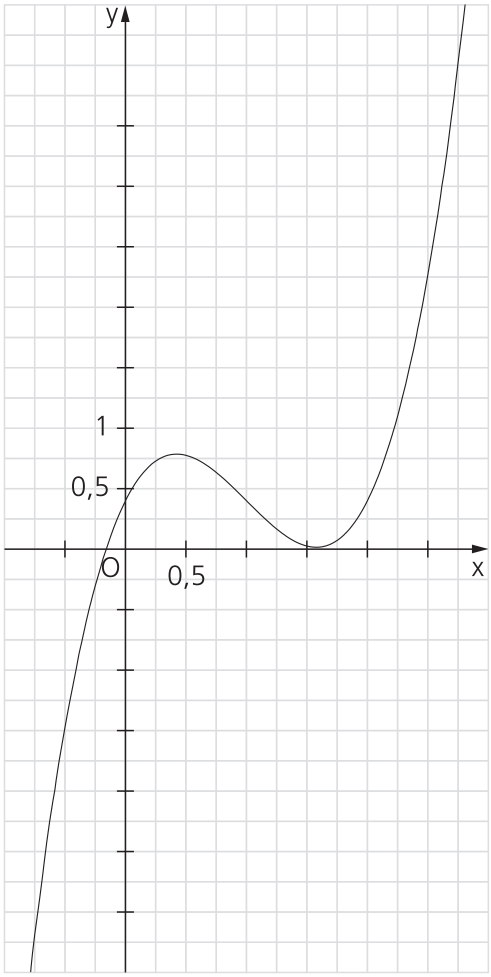
Das Newton-Verfahren konvergiert sehr viel schneller (Verfahren der Ordnung 2) als das Bisektionsverfahren. Man erreicht hier schon im dritten Schritt eine gute Näherung.

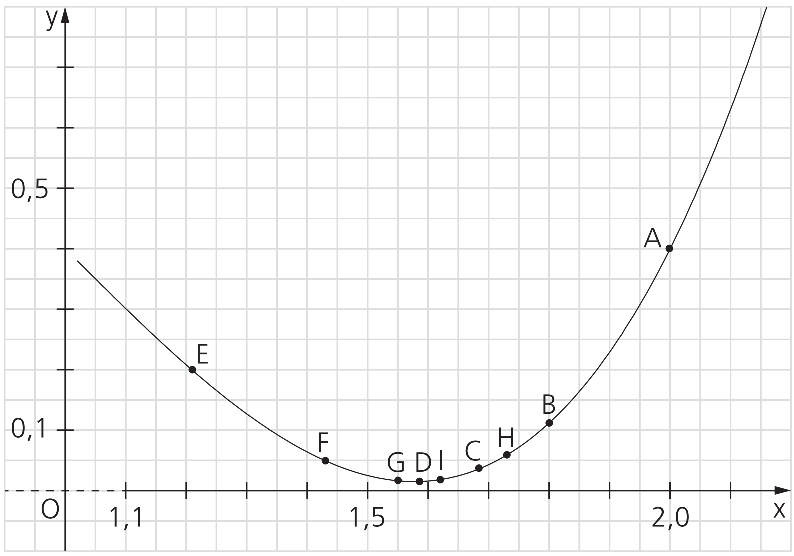
4. Fälle, in denen das Newton-Verfahren versagt

a) Es findet im Algorithmus eine Division durch null statt.

b) Der Algorithmus oszilliert zwischen zwei x-Werten (0 und 1) und kann damit nicht konvergieren.

c) Das Verfahren ist in der Umgebung des Minimums gefangen und überwindet nicht den Hochpunkt, um die Nullstelle zu erreichen.


y
1
0,5
O
0,5
x


y
0,5
0,1
O
1,1
1,5
2,0
x
A
B
C
D
E
F
G
H
I

1. h-Methode

$f(x) = 3x^3 - 0{,}5x$

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3(x+h)^3 - 0{,}5 \cdot (x+4) - (3x^3 - 0{,}5x)}{h} = \frac{18x^2 + 6h^2 + 18hx - 1}{2}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{18x^2 + 6h^2 + 18hx - 1}{2} = 9x^2 - 0{,}5$

2. Ableitungsregeln

a) $f(x) = \sqrt{3}x^6 - \pi x^3 + 12^2$

$f'(x) = 6\sqrt{3}x^5 - 3\pi x^2$

b) $f(x) = (\sqrt{x} + x) \cdot x^4$

$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right) \cdot x^4 + (\sqrt{x} + x) \cdot 4x^3 = \frac{10x^4 + 9 \cdot (\sqrt{x})^7}{2}$

c) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$

$f'(x) = x \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \cdot \sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

d) $f(x)\ (\sin x - x)^2$

$f'(x) = (\sin x - x) \cdot (\cos x - 1) + (\cos x - 1) \cdot (\sin x - x) = 2(\sin x - x)(\cos x - 1)$

e) $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 5}{x - 3x^7}$

$f'(x) = \frac{(x - 3x^7)(3x^2 + 8x) - (x^3 + 4x^2 + 5) \cdot (1 - 21x^6)}{(x - 3x^7)^2} = \frac{12x^9 + 60x^8 + 105x^6 + 2x^3 + 4x^2 - 5}{(x - 3x^7)^2}$

3. Stammfunktion

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 0{,}2x + 2$

$F(x) = \frac{1}{15}x^5 - 0{,}1x^2 + 2x$

b) $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 5x)$

$F(x) = \frac{x^4 - 6x^3 - 5x^2}{2}$

c) $f(x) = \sqrt{x} + 4x^3 - \frac{1}{x^2}$

$F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^4 + \frac{1}{x}$

4. Monotonie

a) $f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 3x - 8$

$f'(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 7x + 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{4}{9}\sqrt{19} + \frac{14}{9}$

	$x < -\frac{4}{9}\sqrt{19} + \frac{14}{9}$	$-\frac{4}{9}\sqrt{19} + \frac{14}{9} < x < \frac{4}{9}\sqrt{19} + \frac{14}{9}$	$x > \frac{4}{9}\sqrt{19} + \frac{14}{9}$
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0
Monotonie	smf	sms	smf

b) $f'(x) = -(x + 3)(x - 1)$

$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x$

5. Entscheidbar oder nicht

a) falsch, da $x = 2$ (doppelte Nullstelle von f') und damit kein Extremum, sondern Terrassenpunkt

b) falsch, da die Winkelhalbierende eine Steigung $m = 1$ hat und hier die Steigung $f'(0) < 1$ ist

c) nicht entscheidbar, da der Funktionswert bei $x = -2{,}5$ nicht bekannt ist. Wäre dieser negativ, so wäre die Aussage wahr.

6. Fischzucht

a) $E(x) \;=\; f(x) \;-\; x$

Population in nächster Generation ($f(x)$) — aktuelle Population (x)

b) $E(x) = 0{,}02x^3 - 0{,}66x^2 + 4{,}4x - x$

$E'(x) = 0{,}06x^2 - 1{,}32x + 3{,}4$

$E'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{579}}{3} + 11$

$x = -\frac{\sqrt{579}}{3} + 11 \approx 2{,}58$ (Maximum)

Mit einer Population von 2,98 t kann ein maximale Entnahme von 4,8 t realisiert werden.

Möglicher Gewinn: 4,8 · 3 500 € = 16 800 €

7. Rechnen kann sinnvoll sein …

a) Vermutung: Minimum bei $x = 0$ (aus Abbildung)

Es existieren aber 3 Extrema.

b) $f(x) = 0{,}2x^4 - 0{,}07x^3 + \frac{1}{1\,000}x^2 - 1$

$f'(x) = \frac{4}{5}x^3 - 0{,}21x^2 + \frac{1}{500}x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x_2 = -\sqrt{\frac{377}{160}} + \frac{21}{60} \approx 9{,}9 \cdot 10^{-3}$

$x_3 = \frac{\sqrt{377}}{160} + \frac{21}{60} \approx 0{,}25$

x_1: TIP; x_2: HOP; x_3: TIP

8. Funktionenschar

$f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 + 2x^2 + tx, \quad t > 0$

a) $f_t'(x) = \frac{3}{t}x^2 + 4x + t$

$f_t'(0) = 1$ (Winkelhalbierende)

$\Rightarrow t = 1$

b) $f_t'(x) = 0$

$\Rightarrow x = -t;\; x = -\frac{t}{3}$

$f_t''(x) = \frac{6}{t}x + 4$

$f_t''(-t) = -6 + 4 = -2 \Rightarrow$ HOP $(-t \mid 0)$

$f_t''(-\frac{t}{3}) = -2 + 4 = 2 \Rightarrow$ TIP $(-\frac{t}{3} \mid -\frac{4}{27}t^2)$

c) $x = -\frac{t}{3} \Rightarrow t = -3x$

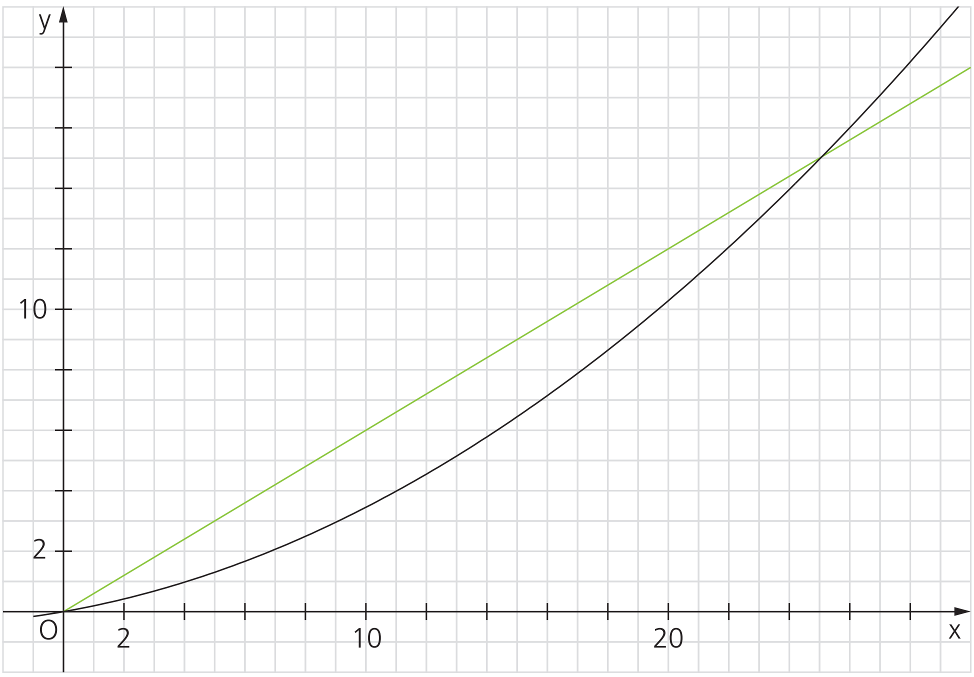
$y = -\frac{4}{27} \cdot t^2 = -\frac{4}{27} \cdot (-3x)^2 = -\frac{4}{3}x^2$

9. Hochseilgarten

a) Eine mögliche Wahl für den Koordinatenursprung ist die Spitze des linken Mastes.
=> c = 0; a,b ungleich null

b) Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem $f(x) = ax^2 + bx$
I $f(25) = 15$
II $f'(0) = \tan 10°$
TC => a = 0,0169…, b = 0,1763…

c) Gerade: $g(x) = \frac{15}{25}\,x$



d) $d(x) = g(x) - f(x)$
$d'(x) = 0$ (maximaler Seildurchhang) => x = 12,5

10. Numerische Näherung