11|12

mathe.delta

Mathematik für das Gymnasium

TEILDRUCK

C.C.BUCHNER

Basisfach
Baden-Württemberg

mathe.delta 11|12

Mathematik für das Gymnasium

Basisfach

Baden-Württemberg

C.C.Buchner

mathe.delta
Baden-Württemberg
Herausgeber: Axel Goy

mathe.delta 11/12 Basisfach – Baden-Württemberg
Autorinnen und Autoren: Benjamin Castillo-Schulz, Axel Goy, Dominik Hellmann, Christoph Hempfer, Romy Hempfer, Catrin Köninger

Zu diesem Lehrwerk sind erhältlich:
- **Lösungsband 11/12** (BN 63023)
- Digitales Lehrmaterial **click & teach 11/12** (63024)

Weitere Materialien finden Sie unter www.ccbuchner.de.

Dieser Titel ist auch als digitale Ausgabe unter www.ccbuchner.de erhältlich.

Teildruck
2. Auflage, 1. Druck

Dieses Werk folgt der reformierten Rechtschreibung und Zeichensetzung. Ausnahmen bilden Texte, bei denen künstlerische, philologische oder lizenzrechtliche Gründe einer Änderung entgegenstehen.

An keiner Stelle im Schülerbuch dürfen Eintragungen vorgenommen werden.

Layout und Satz: tiff.any GmbH, Berlin
Umschlag: tiff.any GmbH, Berlin
Druck und Bindung: mgo360 GmbH & Co. KG, Bamberg

www.ccbuchner.de

ISBN der genehmigten Auflage 978-3-661-**63021**-2

Der Kapitelaufbau in mathe.delta 11/12 Basisfach

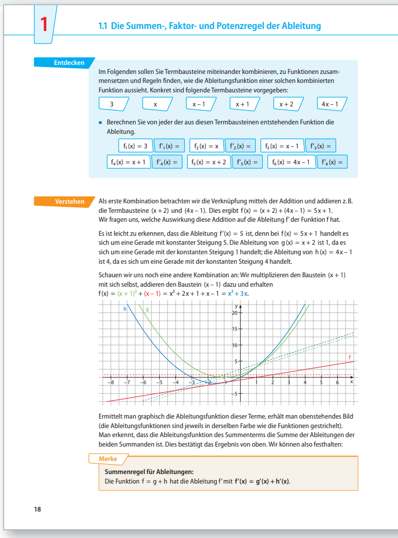
Alle Kapitel haben dieselbe Struktur und sind aus denselben Gliederungseinheiten aufgebaut.
Die Konzeption hat die besonderen Anforderungen der mündlichen Abiturprüfung dabei von Anfang an im Blick.

Einstieg und Ausblick

- Überblick über die Inhalte des Kapitels
- Vorgehensweise und Methodik als „roter Faden" des Kapitels
- Ausblick auf die zu erwerbenden Kompetenzen

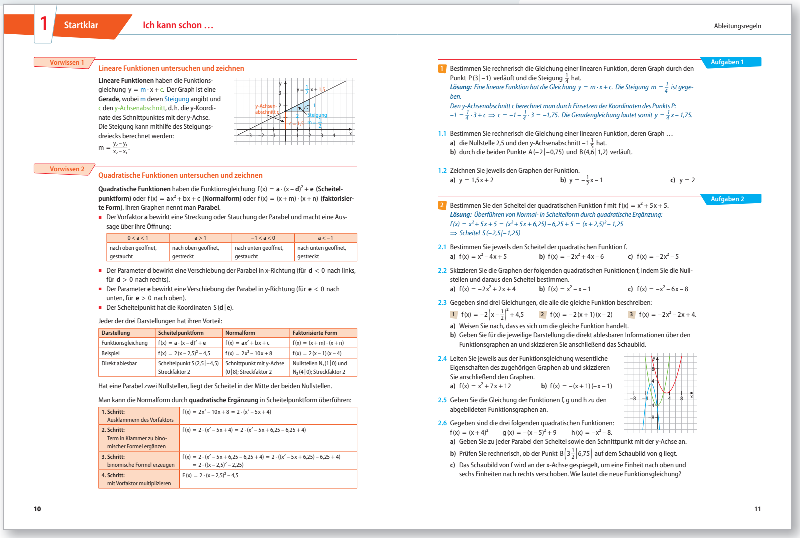
Unterkapitel – Herleitungen und Merkwissen

- motivierender Einstieg
- ausführliche Hinführung und Herleitung der Inhalte



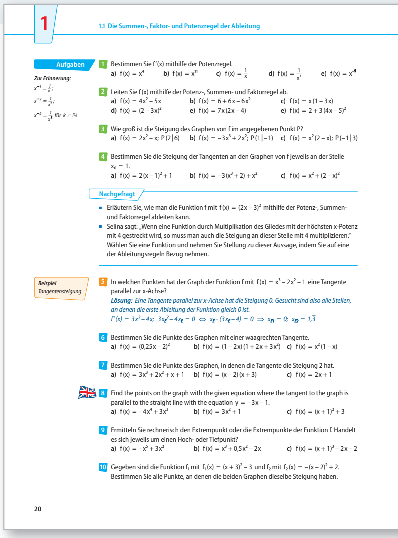
Startklar

- Basiskompetenzen wiederholen und sichern
- Grundwissen und dazu passende Aufgaben
- Lösungen im Anhang

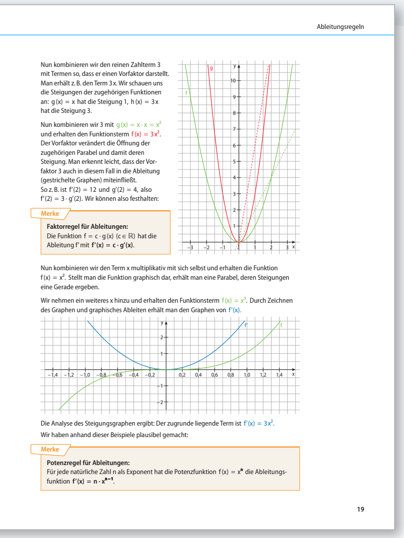


Unterkapitel – Beispiele und Aufgaben

- Beispielaufgaben mit Lösungen zum nachvollziehenden Lernen
- Aufgaben auf drei Anforderungsniveaus

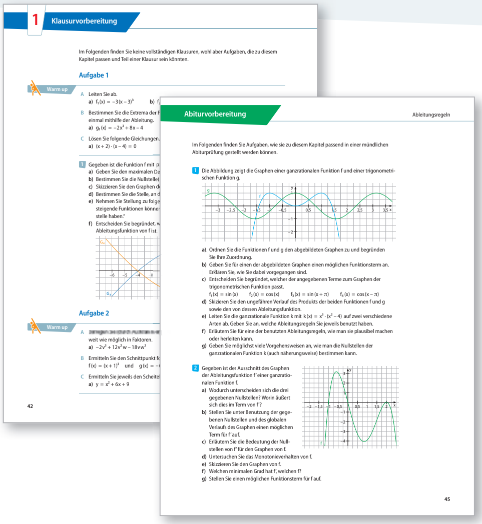


- maximale Anschaulichkeit
- Merkwissen übersichtlich und kompakt zusammengefasst

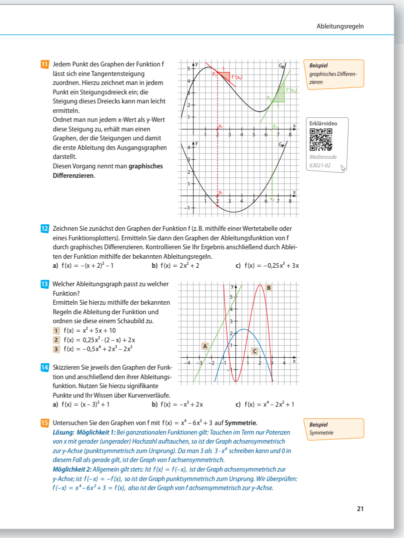


Klausurvorbereitung und Abiturvorbereitung

- jeweils drei Seiten Training anhand typischer Aufgabenstellungen
- Reflexion über die für die mündliche Abiturprüfung besonders relevanten Aufgabenformate

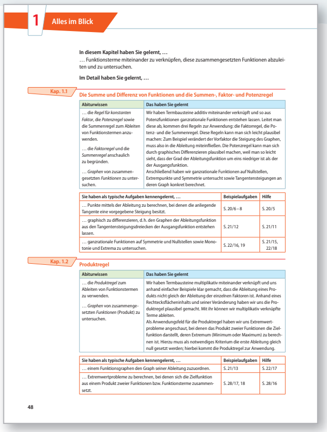


- „Nachgefragt“: Reflexion über das Gelernte auf zwei Niveaus



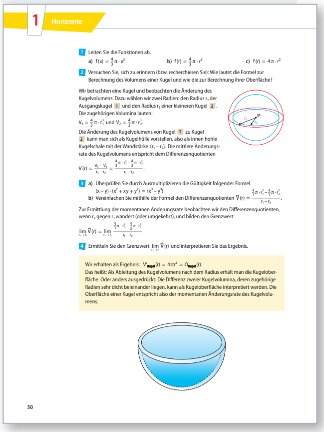
Alles im Blick

- Übersicht über die Inhalte und Kompetenzen mit Bezug zum Bildungsplan für das Basisfach



Horizonte

- Anwendungen und Vertiefungen (MINT)



Erweiterung der Differentialrechnung I: Ableitungsregeln

1

Einstieg

In diesem Kapitel wollen wir die Arbeitsweise eines Mathematikers simulieren. Die Phänomene, mit denen wir uns beschäftigen, sind einerseits Terme, andererseits ihre zugehörigen Graphen mit ihren Eigenschaften wie Extrempunkte oder Monotonieverhalten. Wir gehen dabei so vor, dass wir Terme auf verschiedene Arten miteinander kombinieren.

In einem **ersten Schritt** kombinieren wir Terme, indem wir sie additiv miteinander verknüpfen.

Am Ende des ersten Unterkapitels können Sie **Funktionen** wie $f(x) = 2x^5 + 3x^3 + 6$ ableiten sowie **auf Monotonie, Symmetrie und Nullstellen untersuchen.**

In einem **zweiten Schritt** kombinieren wir Terme, indem wir sie multiplikativ miteinander verknüpfen.

Am Ende des zweiten Unterkapitels haben Sie die **Produktregel als neue Ableitungsregel** kennen gelernt und können Funktionen wie $f(x) = (x+5)^2 \cdot (x-3)$ ableiten.

In einem **dritten Schritt** kombinieren wir Terme, indem wir sie miteinander verketten. Dabei entsteht eine innere und eine äußere Funktion.

Am Ende des dritten Unterkapitels haben Sie die **Verkettung von Termen** kennengelernt und können Funktionen wie $f(x) = (3x+4)^6$ mit der **Kettenregel** ableiten.

In einem **vierten Schritt** nehmen wir den Sinus und Kosinus hinzu und kombinieren sie mit linearen Termen.

Am Ende des vierten Unterkapitels können Sie **Funktionen** wie $f(x) = 4 \cdot \sin(x+2)$ **ableiten** sowie auf **Monotonie, Symmetrie und Nullstellen untersuchen.**

Was ist Mathematik? Der renommierte Mathematiker Keith Devlin beantwortete diese Frage singgemäß wie folgt: Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern. Sie untersucht abstrakte Muster, z. B. Zahlenmuster, Termmuster oder Muster in Graphen. Dabei geht es z. B. darum, Ähnlichkeiten zwischen zwei Phänomenen zu erkennen und diese in Beziehung zu setzen zu Ähnlichkeiten zweier anderer Phänomene.

Ausblick

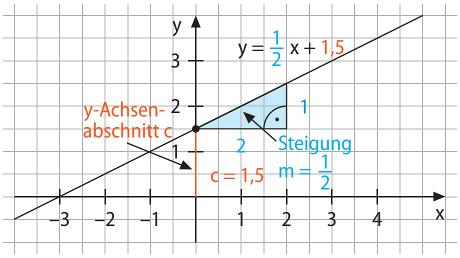
Die Mustererkennung, die sich als roter Faden durch das Kapitel zieht, spielt sowohl beim Zusammenspiel zwischen dem Aussehen des Terms und dem Aussehen des Graphen eine Rolle als auch beim Erkennen und Entdecken der Ableitungsregeln.

Ich kann schon …

Vorwissen 1

Lineare Funktionen untersuchen und zeichnen

Lineare Funktionen haben die Funktionsgleichung $y = m \cdot x + c$. Der Graph ist eine **Gerade**, wobei m deren Steigung angibt und c den y-Achsenabschnitt, d. h. die y-Koordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse. Die Steigung kann mithilfe des Steigungsdreiecks berechnet werden: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.



Vorwissen 2

Quadratische Funktionen untersuchen und zeichnen

Quadratische Funktionen haben die Funktionsgleichung $f(x) = \mathbf{a} \cdot (x - \mathbf{d})^2 + \mathbf{e}$ **(Scheitelpunktform)** oder $f(x) = \mathbf{a}x^2 + bx + c$ **(Normalform)** oder $f(x) = (x + m) \cdot (x + n)$ **(faktorisierte Form)**. Ihren Graphen nennt man **Parabel**.

- Der Vorfaktor **a** bewirkt eine Streckung oder Stauchung der Parabel und macht eine Aussage über ihre Öffnung:

$0 < \mathbf{a} < 1$	$\mathbf{a} > 1$	$-1 < \mathbf{a} < 0$	$\mathbf{a} < -1$
nach oben geöffnet, gestaucht	nach oben geöffnet, gestreckt	nach unten geöffnet, gestaucht	nach unten geöffnet, gestreckt

- Der Parameter **d** bewirkt eine Verschiebung der Parabel in x-Richtung (für $\mathbf{d} < 0$ nach links, für $\mathbf{d} > 0$ nach rechts).
- Der Parameter **e** bewirkt eine Verschiebung der Parabel in y-Richtung (für $\mathbf{e} < 0$ nach unten, für $\mathbf{e} > 0$ nach oben).
- Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $S(\mathbf{d} \mid \mathbf{e})$.

Jeder der drei Darstellungen hat ihren Vorteil:

Darstellung	Scheitelpunktform	Normalform	Faktorisierte Form
Funktionsgleichung	$f(x) = \mathbf{a} \cdot (x - \mathbf{d})^2 + \mathbf{e}$	$f(x) = \mathbf{a}x^2 + bx + c$	$f(x) = (x + m) \cdot (x + n)$
Beispiel	$f(x) = 2(x - 2{,}5)^2 - 4{,}5$	$f(x) = 2x^2 - 10x + 8$	$f(x) = 2(x - 1)(x - 4)$
Direkt ablesbar	Scheitelpunkt $S(2{,}5 \mid -4{,}5)$ Streckfaktor 2	Schnittpunkt mit y-Achse $(0 \mid 8)$; Streckfaktor 2	Nullstellen $N_1(1 \mid 0)$ und $N_2(4 \mid 0)$; Streckfaktor 2

Hat eine Parabel zwei Nullstellen, liegt der Scheitel in der Mitte der beiden Nullstellen.

Man kann die Normalform durch **quadratische Ergänzung** in Scheitelpunktform überführen:

1. Schritt: Ausklammern des Vorfaktors	$f(x) = 2x^2 - 10x + 8 = 2 \cdot (x^2 - 5x + 4)$
2. Schritt: Term in Klammer zu binomischer Formel ergänzen	$f(x) = 2 \cdot (x^2 - 5x + 4) = 2 \cdot (x^2 - 5x + 6{,}25 - 6{,}25 + 4)$
3. Schritt: binomische Formel erzeugen	$f(x) = 2 \cdot (x^2 - 5x + 6{,}25 - 6{,}25 + 4) = 2 \cdot ((x^2 - 5x + 6{,}25) - 6{,}25 + 4)$ $= 2 \cdot ((x - 2{,}5)^2 - 2{,}25)$
4. Schritt: mit Vorfaktor multiplizieren	$F(x) = 2 \cdot (x - 2{,}5)^2 - 4{,}5$

Aufgaben 1

1 Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung einer linearen Funktion, deren Graph durch den Punkt $P(3|-1)$ verläuft und die Steigung $\frac{1}{4}$ hat.
Lösung: *Eine lineare Funktion hat die Gleichung $y = m \cdot x + c$. Die Steigung $m = \frac{1}{4}$ ist gegeben.*
Den y-Achsenabschnitt c berechnet man durch Einsetzen der Koordinaten des Punkts P:
$-1 = \frac{1}{4} \cdot 3 + c \Rightarrow c = -1 - \frac{1}{4} \cdot 3 = -1{,}75$. Die Geradengleichung lautet somit $y = \frac{1}{4}x - 1{,}75$.

1.1 Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung einer linearen Funktion, deren Graph …
a) die Nullstelle 2,5 und den y-Achsenabschnitt $-1\frac{1}{5}$ hat.
b) durch die beiden Punkte $A(-2|-0{,}75)$ und $B(4{,}6|1{,}2)$ verläuft.

1.2 Zeichnen Sie jeweils den Graphen der Funktion.
a) $y = 1{,}5x + 2$ **b)** $y = -\frac{1}{2}x - 1$ **c)** $y = 2$

Aufgaben 2

2 Bestimmen Sie den Scheitel der quadratischen Funktion f mit $f(x) = x^2 + 5x + 5$.
Lösung: *Überführen von Normal- in Scheitelform durch quadratische Ergänzung:*
$f(x) = x^2 + 5x + 5 = (x^2 + 5x + 6{,}25) - 6{,}25 + 5 = (x + 2{,}5)^2 - 1{,}25$
$\Rightarrow$ Scheitel $S(-2{,}5|-1{,}25)$

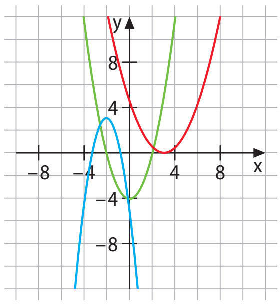
2.1 Bestimmen Sie jeweils den Scheitel der quadratischen Funktion f.
a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ **b)** $f(x) = -2x^2 + 4x - 6$ **c)** $f(x) = -2x^2 - 5$

2.2 Skizzieren Sie die Graphen der folgenden quadratischen Funktionen f, indem Sie die Nullstellen und daraus den Scheitel bestimmen.
a) $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$ **b)** $f(x) = x^2 - x - 1$ **c)** $f(x) = -x^2 - 6x - 8$

2.3 Gegeben sind drei Gleichungen, die alle die gleiche Funktion beschreiben:
1 $f(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4{,}5$ **2** $f(x) = -2(x + 1)(x - 2)$ **3** $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$.
a) Weisen Sie nach, dass es sich um die gleiche Funktion handelt.
b) Geben Sie für die jeweilige Darstellung die direkt ablesbaren Informationen über den Funktionsgraphen an und skizzieren Sie anschließend das Schaubild.

2.4 Leiten Sie jeweils aus der Funktionsgleichung wesentliche Eigenschaften des zugehörigen Graphen ab und skizzieren Sie anschließend den Graphen.
a) $f(x) = x^2 + 7x + 12$ **b)** $f(x) = -(x + 1)(-x - 1)$

2.5 Geben Sie die Gleichung der Funktionen f, g und h zu den abgebildeten Funktionsgraphen an.

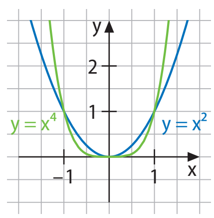
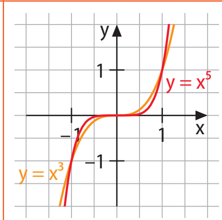


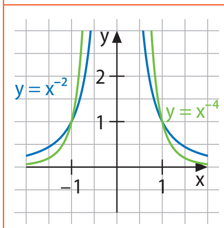
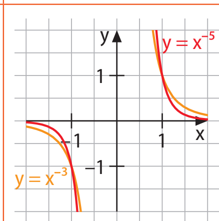
2.6 Gegeben sind die drei folgenden quadratischen Funktionen:
$f(x) = (x + 4)^2$ $g(x) = -(x - 5)^2 + 9$ $h(x) = -x^2 - 8$.
a) Geben Sie zu jeder Parabel den Scheitel sowie den Schnittpunkt mit der y-Achse an.
b) Prüfen Sie rechnerisch, ob der Punkt $B\left(3\frac{1}{2}\middle|6{,}75\right)$ auf dem Schaubild von g liegt.
c) Das Schaubild von f wird an der x-Achse gespiegelt, um eine Einheit nach oben und sechs Einheiten nach rechts verschoben. Wie lautet die neue Funktionsgleichung?

Vorwissen 3

Die Wirkung des Exponenten in Potenzfunktionen erklären und Potenzfunktionen ableiten

Potenzfunktionen haben die Funktionsgleichung $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{Z}$. Der Exponent r bestimmt das Aussehen des Graphen.

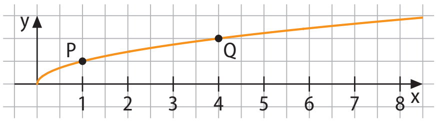
Potenzfunktionen mit natürlichen Hochzahlen	
gerade Hochzahl	ungerade Hochzahl
Beispiele: $f(x) = x^2;\ x^4;\ x^{10}$	Beispiele: $f(x) = x^3;\ x^7;\ x^{11}$
Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$	Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$
Nullstelle bei (0|0)	Nullstelle bei (0|0)
Tiefpunkt bei (0|0)	kein Extrempunkt, monoton steigend
Gemeinsame Punkte: (0|0), (1|1), (–1|1)	Gemeinsame Punkte: (0|0), (1|1), (–1|–1)
Symmetrisch zur y-Achse	Punktsymmetrisch zum Ursprung
	

Potenzfunktionen mit negativen ganzen Hochzahlen	
gerade Hochzahl	ungerade Hochzahl
Beispiele: $f(x) = x^{-2};\ x^{-4};\ x^{-8}$	Beispiele: $f(x) = x^{-3};\ x^{-5};\ x^{-13}$
Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$	Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
keine Nullstellen, x-Achse ist Asymptote	keine Nullstellen, x-Achse ist Asymptote
Tiefpunkt bei (0|0)	kein Extrempunkt, monoton steigend
Gemeinsame Punkte: (1|1) und (–1|1)	Gemeinsame Punkte: (1|1) und (–1|1)
keine Extrempunkte, aber untere Schranke	keine Extrempunkte
	

Die Graphen nennt man **Hyperbeln**; sie bestehen aus zwei Ästen, die sich an die Koordinatenachsen anschmiegen. Die Koordinatenachsen sind die **Asymptoten**.

Aufgaben 3

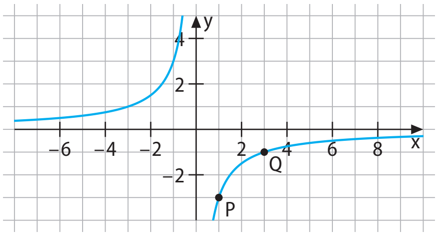
3 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion, deren Gleichung die Form $y = a \cdot x^r$ hat. Welche Aussagen können Sie ohne Rechnung über a und r machen?



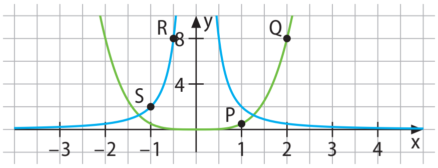
Bestimmen Sie die Parameter a und r anhand der gegebenen Punkte $P(1\,|\,0{,}5)$ und $Q(4\,|\,1)$.

Lösung: *r muss eine Bruchzahl sein, denn der Graph ist offensichtlich der einer Wurzelfunktion.*
a muss positiv sein; da der Graph aber eher flach ist, ist $a < 0$.
Ansatz: P und Q in $y = a \cdot x^r$ einsetzen.
P: $0{,}5 = a \cdot 1^r \Rightarrow a = 0{,}5$; Q: $1 = 0{,}5 \cdot 4^r \Rightarrow r = 0{,}5$

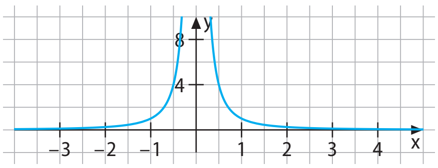
3.1 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion, deren Gleichung die Form $y = a \cdot x^r$ hat.
Welche Aussagen können Sie ohne Rechnung über a und r machen? Bestimmen Sie die Parameter a und r anhand der gegebenen Punkte $P(1\,|\,-3)$ und $Q(3\,|\,-1)$.



3.2 Die Abbildung zeigt Schaubilder der Funktionen f und g; ihre Gleichungen haben beide die Form $y = a \cdot x^r$.
Bestimmen Sie mithilfe der Punkte P, Q bzw. R, S für beide Funktionen a und r.



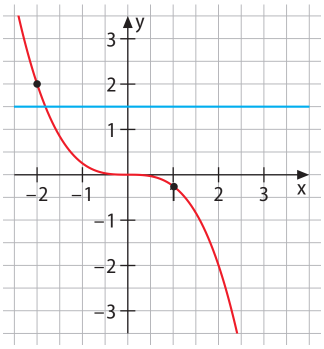
3.3 Gegeben ist das Schaubild einer Potenzfunktion der Form $y = a \cdot x^r$.
Welche Aussagen können Sie über a und r machen? Begründen Sie Ihre Antwort. Es ist keine Rechnung verlangt.



3.4 Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen.
$f(x) = -x^3$ $g(x) = x^{-5}$ $h(x) = x^4 - 1$ $i(x) = x^{0{,}5}$ $j(x) = -\frac{1}{x^2}$

3.5 Eine Funktion der Form $f(x) = a \cdot x^n$ ($n \notin \mathbb{N}$) geht durch die Punkte $A(-1\,|\,-4)$ und $B(0{,}5\,|\,0{,}125)$. Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung.

3.6 Welche Potenzgleichung der Form $a \cdot x^n = d$ ($n \notin \mathbb{N}$) ist in der Abbildung graphisch dargestellt? Die Punkte A und B haben die Koordinaten $A(-2\,|\,2)$ und $B(1\,|\,-0{,}25)$. Bestimmen Sie die Lösung rechnerisch (mit dem WTR).

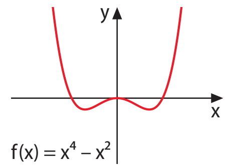


3.7 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = \frac{1}{2}x^{-2}$; $x \neq 0$.
a) Skizzieren Sie das Schaubild von f.
b) Um wie viel Prozent verändert sich der Funktionswert, wenn x ($x > 0$) verdoppelt wird?

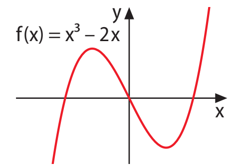
Vorwissen 4

Symmetrie ganzrationaler Funktionen und deren Verhalten im Unendlichen untersuchen

- Der Graph einer Funktion f ist **achsensymmetrisch zur y-Achse**, falls für alle Werte von x gilt: $\mathbf{f(-x) = f(x)}$.
- Der Graph einer Funktion f ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**, falls für alle Werte von x gilt: $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$.



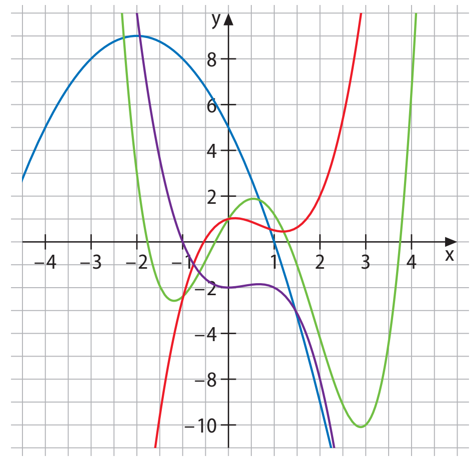
achsensymmetrisch



punktsymmetrisch

Das **Verhalten des Funktionsgraphen** von f mit $f(x) = a_n \cdot x^n + a_n - 1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ **für** $|x| \to \infty$ hängt nur von a_n und n ab:

- Ist n gerade und $a_n > 0$, verläuft der Graph von links oben nach rechts oben.
- Ist n gerade und $a_n < 0$, verläuft der Graph von links unten nach rechts unten.
- Ist n ungerade und $a_n > 0$, „kommt“ der Graph von links unten und verläuft nach rechts oben.
- Ist n ungerade und $a_n < 0$, „kommt“ der Graph von links oben und verläuft nach rechts unten.



Erklärvideo

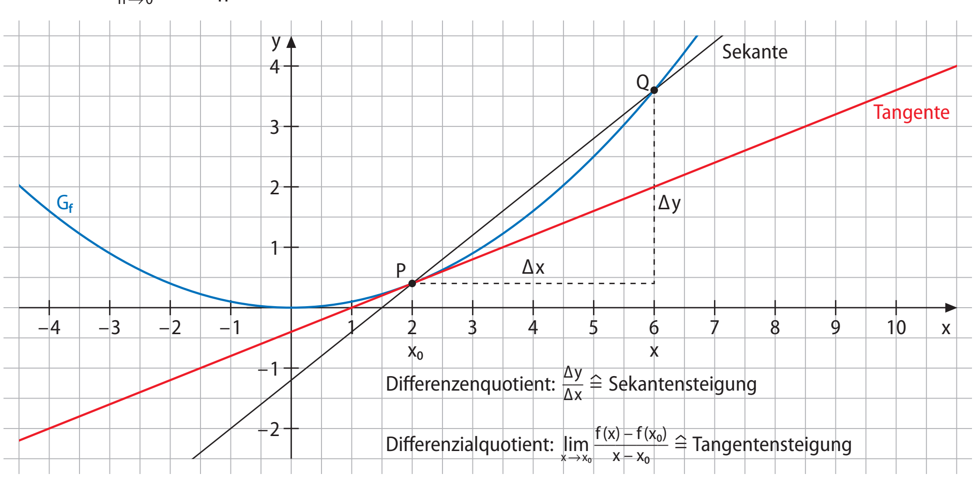
Mediencode 63021-01

Vorwissen 5

Die Ableitung erklären

- Während der **Differenzenquotient** die Sekantensteigung und damit die mittlere Änderungsrate angibt, gibt der **Differentialquotient** die Steigung der Tangente an eine Kurve an und damit die momentane Änderungsrate.
- Als **Ableitung** bezeichnet man den Grenzwert des Differentialquotienten; die Ableitung einer Funktion in einem Kurvenpunkt gibt also die Steigung des Funktionsgraphen in diesem Kurvenpunkt an:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



Aufgaben 4

4 Untersuchen Sie den Graphen von $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x - 6$ auf Symmetrie und auf sein Verhalten im Unendlichen.

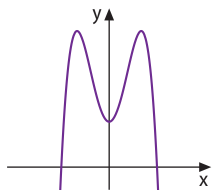
Lösung: *Da der Funktionsterm sowohl gerade als auch ungerade Exponenten enthält, liegt keine Symmetrie vor. Der höchste Exponent ist 3, der Vorfaktor von x^3 ist positiv. Deshalb strebt der Graph der Funktion für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ und für $x \to \infty$ gegen ∞, d. h. er verläuft „von links unten nach rechts oben“.*

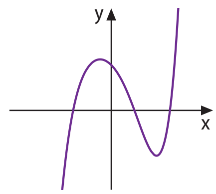
4.1 Untersuchen Sie die Graphen von f auf Symmetrie und auf ihr Verhalten im Unendlichen.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ **b)** $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 1$ **c)** $f(x) = x^5 + x^3 + x$
d) $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 1$ **e)** $f(x) = x \cdot (x+2)^2 - 2$ **f)** $f(x) = (x-1)^3$

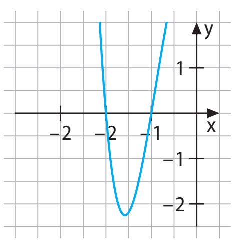
4.2 Ordnen Sie aufgrund ihres Verhaltens für $x \to \pm\infty$ jedem Graphen die passende Funktion zu. Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen, die nicht abgebildet sind.

$f(x) = -x^4 + 4x^2 + 2$ $f(x) = x^4 + x + 2$
$f(x) = x^3 + x^2 + 1$ $f(x) = x^5 - 2x^2 - x + 1$

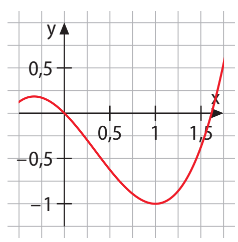




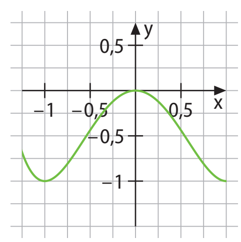
4.3 Vervollständigen Sie den gegebenen Ausschnitt so, dass die Eigenschaften des Graphen wiedergegeben werden, die Sie für wesentlich halten.



$f(x) = (x-1) \cdot (x+1)(x-2)(x+2)$



$g(x) = x^3 - x^2 - x$



$h(x) = x^4 - 2x^2$

Aufgaben 5

5 Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate von f mit $f(x) = x^2 - 9$ im Intervall $I = [0; 1]$ und die lokale/momentane Änderungsrate an der Stelle 2.

Lösung: *mittlere Änderungsrate:* $\frac{f(1) - f(0)}{1} = \frac{-8 - (-9)}{1} = 1$

momentane Änderungsrate: Differenzenquotient für $x_0 = 2$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{((2+h)^2 - 9) - (2^2 - 9)}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 9 - 4 + 9}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = \frac{h(h+4)}{h} = h + 4$$

Für $h \to 0$ strebt der Ausdruck gegen 4; die momentane Änderungsrate ist also 4.

5.1 Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate von f im angegebenen Intervall I.

a) $f(x) = x^2$; $I = [0; 3]$ **b)** $f(x) = 2x^3 + 1$; $I = [-1; 2]$
c) $f(x) = 2x^2 + x$; $I = [1; 3]$ **d)** $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$; $I = [0; 1]$

5.2 Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Funktionen f an der angegebenen Stelle.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$; $x_0 = -2$ **b)** $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 1$; $x_0 = 1$
c) $f(x) = x^5 + x^3 + x$; $x_0 = 2$ **d)** $f(x) = x \cdot (x+2)^2 - 2$; $x_0 = 9$

Vorwissen 6

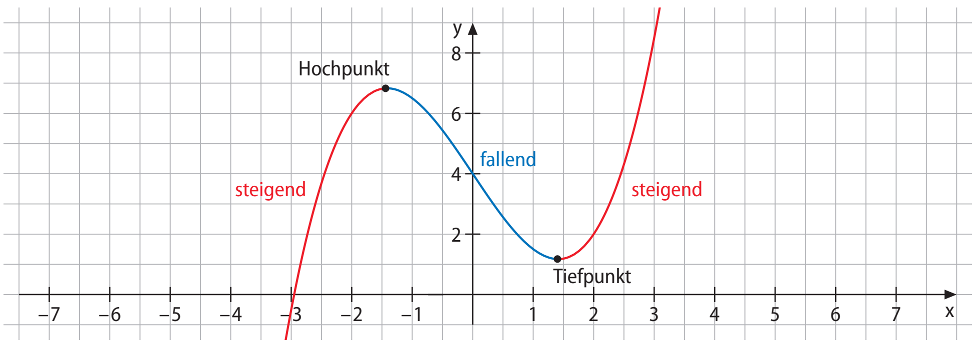
Funktionen auf Monotonie und Extrempunkte untersuchen

Das Vorzeichen von $f'(x)$ gibt Auskunft über Steigen und Fallen des Graphen von f:

- In Intervallen, in denen $f'(x) > 0$ ist, ist f streng monoton steigend.
- In Intervallen, in denen $f'(x) < 0$ ist, ist f streng monoton fallend.

Ein Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ kennzeichnet lokale Extrempunkte von f:

- An einer Stelle, an der $f'(x)$ das Vorzeichen von + nach – wechselt, liegt ein Hochpunkt von $f(x)$ vor.
- An einer Stelle, an der $f'(x)$ das Vorzeichen von – nach + wechselt, liegt ein Tiefpunkt von $f(x)$ vor.



Vorwissen 7

Funktionen auf einfache und doppelte Nullstellen untersuchen

Um die Nullstellen einer Funktion zu bestimmen, löst man eine Gleichung $f(x) = 0$. Je nach Aussehen der Gleichung bieten sich dabei (wenn möglich) unterschiedliche Verfahren an:

Art des Funktionsterms	Vorgehensweise	Beispiel
Gleichungen, bei denen in jedem Summanden ein x (bzw. eine Potenz von x) auftaucht	Ausklammern erzeugt ein Produkt, von dessen Faktoren man die Nullstellen leichter bestimmen und auf das man den Satz vom Nullprodukt anwenden kann.	$0 = x^3 - 2x^2 - x = x \cdot (x^2 - 2x - 1)$ Nach dem Satz vom Nullprodukt ist $x_{N1} = 0$, die anderen beiden erhält man aus $x^2 - 2x - 1 = 0$ mit der Mitternachtsformel.
Gleichungen der Art $x^n - c = 0$	Umformen zu $x^n = c$ und ziehen der n-ten Wurzel	$0 = x^4 - 16 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x_{N1,2} = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$
Gleichungen, die auf binomische Formeln zurückzuführen sind	Das Distributivgesetz rückwärts anwenden und dann die Nullstelle(n) eines jeden Faktors bestimmen	$0 = 4x^4 - 9 = (2x^2 + 3) \cdot (2x^2 - 3)$ liefert nach dem Satz vom Nullprodukt für $2x^2 - 3 = 0$ die beiden Nullstellen $\pm\sqrt{1{,}5}$

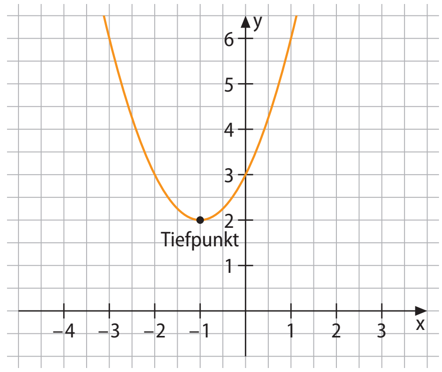
Zuweilen kann man Funktionen f in der Form $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ schreiben $(x_i \in \mathbb{R})$. Dann sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Nullstellen. Wird der Linearfaktor $(x - x_i)$ mit n potenziert, nennt man x_i eine **n-fache Nullstelle** (für $n = 2$: doppelte Nullstelle).

- Ist die Potenz **gerade** (also 2, 4, …), so ist die **Nullstelle** zugleich Extremstelle, d. h. der Graph **berührt** die x-Achse an der Stelle x_i.
- Ist die Potenz **ungerade** (also 1, 3, …), so **schneidet** der Graph die x-Achse an der Stelle x_i.

Aufgaben 6

6 Untersuchen Sie f mit $f(x) = x^2 + 2x + 3$ auf Monotonie und Extrempunkte.
Geben Sie auch die Art des Extremums an.

Lösung: *$f'(x) = 2x + 2$;*
$f'(x_0) = 2x_0 + 2 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$
Für $x < -1$ ist $f'(x) < 0$, d. h. der Graph fällt hier monoton, für $x > -1$ ist $f'(x) > 0$, d. h. der Graph steigt hier monoton. f' hat also einen Vorzeichenwechsel von – nach + bei $x_0 = -1$.
Der Punkt $T(-1|2)$ ist also ein Tiefpunkt des Graphen der Funktion f.



6.1 Untersuchen Sie die Funktionen auf Monotonie und auf Extrempunkte. Geben Sie gegebenenfalls auch an, ob Hoch- oder Tiefpunkte vorliegen.

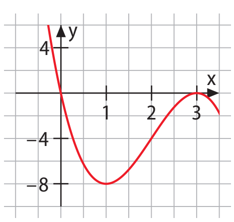
a) $f(x) = 0{,}5x^2 - 1$
b) $f(x) = -2x^2 + x$
c) $f(x) = 2x^3 + x$
d) $f(x) = 0{,}25x^3 + 4x^2 - 2$
e) $f(x) = \sqrt{x}$; $I = [1; 4]$
f) $f(x) = \frac{1}{x-1}$; $I = [1{,}5; 3]$

6.2 **a)** Geben Sie eine ganzrationale Funktion vom Grad 2 an, die ein lokales Maximum besitzt, das im I. Quadranten liegt.
b) Geben Sie eine ganzrationale Funktion vom Grad 3 an, die ein lokales Maximum und ein lokales Minimum besitzt.
c) Geben Sie eine ganzrationale Funktion vom Grad 4 an, die insgesamt drei Extrema besitzt.

Aufgaben 7

7 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f mit
$f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x$ rechnerisch und zeichnerisch.

Lösung: *$f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x = -2x \cdot (x^2 - 6x + 9)$*
$= -2x \cdot (x-3)^2$.
Nach dem Satz vom Nullprodukt erhält man als Nullstellen $x_{N1} = 0$ und $x_{N2} = 3$.



7.1 Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Graphen der Funktion f mit der x-Achse.

a) $f(x) = 3x^2 - 3x - 2$
b) $f(x) = x^3 - 6x$
c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x$
d) $f(x) = x^2 \cdot (x^2 - 4)$
e) $f(x) = x^3 \cdot (x - 1)$
f) $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot (x^2 - 2x + 1)$

7.2 Geben Sie jeweils Gleichungen zweier Funktionen an, die die angegebenen Nullstellen haben.

a) $x_{N1} = 2$, $x_{N2} = -3$
b) $x_{N1} = 1$, $x_{N2} = 2$, $x_{N3} = 3$
c) $x_{N1} = 0$ und $x_{N2} = 1$
d) $x_{N1} = \frac{2}{3}$, $x_{N2} = -\frac{3}{2}$
e) $x_{N1} = -0{,}\overline{1}$, $x_{N2} = -0{,}\overline{2}$, $x_{N3} = -0{,}\overline{3}$
f) $x_{N1} = \sqrt{2}$ und $x_{N2} = \sqrt[3]{2}$

7.3 Skizzieren Sie zu den gegebenen Funktionsgleichungen jeweils einen passenden Graphen.

$f_1(x) = -(x+3)^2(x-1)$

$f_2(x) = (x+1)^3(x-2)^2$

$f_3(x) = -x \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4)$

$f_4(x) = -x(x-2)^3$

1.1 Die Summen-, Faktor- und Potenzregel der Ableitung

Entdecken

Im Folgenden sollen Sie Termbausteine miteinander kombinieren, zu Funktionen zusammensetzen und Regeln finden, wie die Ableitungsfunktion einer solchen kombinierten Funktion aussieht. Konkret sind folgende Termbausteine vorgegeben:

3	x	$x-1$	$x+1$	$x+2$	$4x-1$

- Berechnen Sie von jeder der aus diesen Termbausteinen entstehenden Funktion die Ableitung.

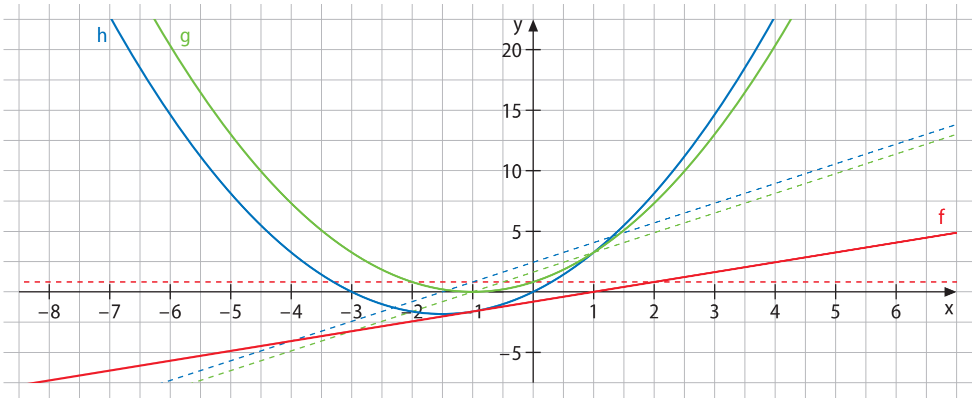
$f_1(x) = 3$	$f'_1(x) =$	$f_2(x) = x$	$f'_2(x) =$	$f_3(x) = x-1$	$f'_3(x) =$
$f_4(x) = x+1$	$f'_4(x) =$	$f_5(x) = x+2$	$f'_5(x) =$	$f_6(x) = 4x-1$	$f'_6(x) =$

Verstehen

Als erste Kombination betrachten wir die Verknüpfung mittels der Addition und addieren z. B. die Termbausteine $(x+2)$ und $(4x-1)$. Dies ergibt $f(x) = (x+2)+(4x-1) = 5x+1$. Wir fragen uns, welche Auswirkung diese Addition auf die Ableitung f' der Funktion f hat.

Es ist leicht zu erkennen, dass die Ableitung $f'(x) = 5$ ist, denn bei $f(x) = 5x+1$ handelt es sich um eine Gerade mit konstanter Steigung 5. Die Ableitung von $g(x) = x+2$ ist 1, da es sich um eine Gerade mit der konstanten Steigung 1 handelt; die Ableitung von $h(x) = 4x-1$ ist 4, da es sich um eine Gerade mit der konstanten Steigung 4 handelt.

Schauen wir uns noch eine andere Kombination an: Wir multiplizieren den Baustein $(x+1)$ mit sich selbst, addieren den Baustein $(x-1)$ dazu und erhalten
$f(x) = (x+1)^2 + (x-1) = x^2+2x+1+x-1 = x^2+3x$.



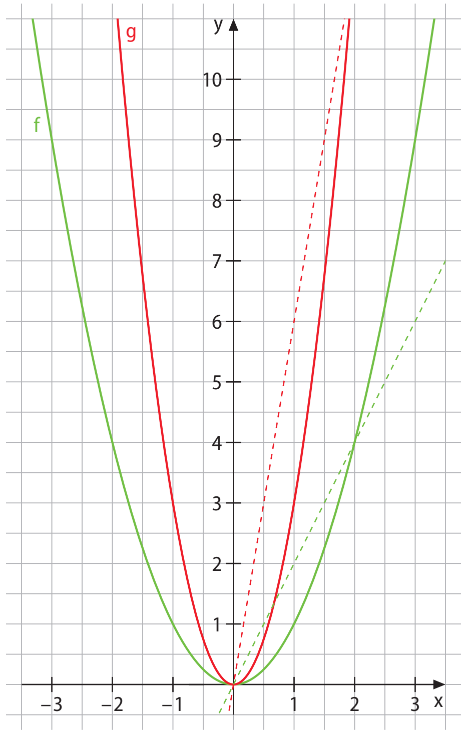
Ermittelt man graphisch die Ableitungsfunktion dieser Terme, erhält man obenstehendes Bild (die Ableitungsfunktionen sind jeweils in derselben Farbe wie die Funktionen gestrichelt). Man erkennt, dass die Ableitungsfunktion des Summenterms die Summe der Ableitungen der beiden Summanden ist. Dies bestätigt das Ergebnis von oben. Wir können also festhalten:

Merke

Summenregel für Ableitungen:
Die Funktion $f = g + h$ hat die Ableitung f' mit $\mathbf{f'(x) = g'(x) + h'(x)}$.

Nun kombinieren wir den reinen Zahlterm 3 mit Termen so, dass er einen Vorfaktor darstellt. Man erhält z. B. den Term $3x$. Wir schauen uns die Steigungen der zugehörigen Funktionen an: $g(x) = x$ hat die Steigung 1, $h(x) = 3x$ hat die Steigung 3.

Nun kombinieren wir 3 mit $g(x) = x \cdot x = x^2$ und erhalten den Funktionsterm $f(x) = 3x^2$. Der Vorfaktor verändert die Öffnung der zugehörigen Parabel und damit deren Steigung. Man erkennt leicht, dass der Vorfaktor 3 auch in diesem Fall in die Ableitung (gestrichelte Graphen) miteinfließt.
So z. B. ist $f'(2) = 12$ und $g'(2) = 4$, also $f'(2) = 3 \cdot g'(2)$. Wir können also festhalten:

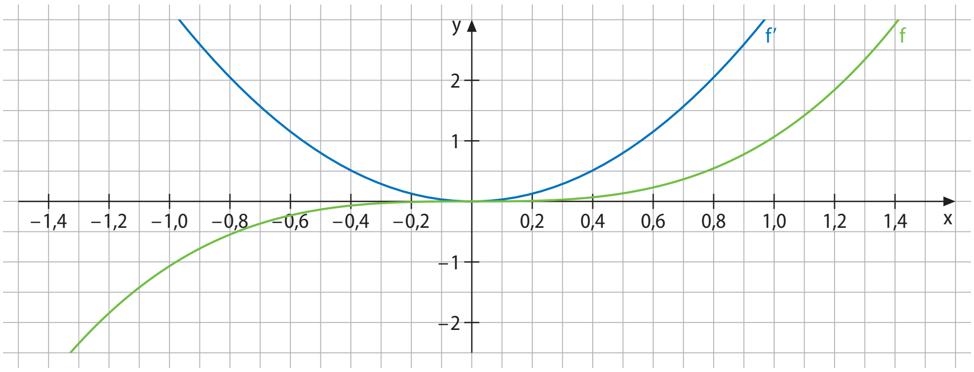


Merke

Faktorregel für Ableitungen:
Die Funktion $f = c \cdot g(x)$ $(c \in \mathbb{R})$ hat die Ableitung f' mit $\mathbf{f'(x) = c \cdot g'(x)}$.

Nun kombinieren wir den Term x multiplikativ mit sich selbst und erhalten die Funktion $f(x) = x^2$. Stellt man die Funktion graphisch dar, erhält man eine Parabel, deren Steigungen eine Gerade ergeben.

Wir nehmen ein weiteres x hinzu und erhalten den Funktionsterm $f(x) = x^3$. Durch Zeichnen des Graphen und graphisches Ableiten erhält man den Graphen von $f'(x)$.



Die Analyse des Steigungsgraphen ergibt: Der zugrunde liegende Term ist $f'(x) = 3x^2$.

Wir haben anhand dieser Beispiele plausibel gemacht:

Merke

Potenzregel für Ableitungen:
Für jede natürliche Zahl n als Exponent hat die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ die Ableitungsfunktion $\mathbf{f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$.

Aufgaben

Zur Erinnerung:

$x^{-1} = \frac{1}{x}$;

$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$;

$x^{-2} = \frac{1}{x^k}$ *für* $k \in \mathbb{N}$

1 Bestimmen Sie $f'(x)$ mithilfe der Potenzregel.
a) $f(x) = x^4$ **b)** $f(x) = x^{11}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x}$ **d)** $f(x) = \frac{1}{x^3}$ **e)** $f(x) = x^{-5}$

2 Leiten Sie $f(x)$ mithilfe der Potenz-, Summen- und Faktorregel ab.
a) $f(x) = 4x^2 - 5x$ **b)** $f(x) = 6 + 6x - 6x^2$ **c)** $f(x) = x(1 - 3x)$
d) $f(x) = (2 - 3x)^2$ **e)** $f(x) = 7x(2x - 4)$ **e)** $f(x) = 2 + 3(4x - 5)^2$

3 Wie groß ist die Steigung des Graphen von f im angegebenen Punkt P?
a) $f(x) = 2x^2 - x;\ P(2|6)$ **b)** $f(x) = -3x^3 + 2x^2;\ P(1|-1)$ **c)** $f(x) = x^2(2 - x);\ P(-1|3)$

4 Bestimmen Sie die Steigung der Tangenten an den Graphen von f jeweils an der Stelle $x_0 = 1$.
a) $f(x) = 2(x - 1)^2 + 1$ **b)** $f(x) = -3(x^3 + 2) + x^2$ **c)** $f(x) = x^2 + (2 - x)^2$

Nachgefragt

- Erläutern Sie, wie man die Funktion f mit $f(x) = (2x - 3)^2$ mithilfe der Potenz-, Summen- und Faktorregel ableiten kann.
- Selina sagt: „Wenn eine Funktion durch Multiplikation des Gliedes mit der höchsten x-Potenz mit 4 gestreckt wird, so muss man auch die Steigung an dieser Stelle mit 4 multiplizieren.“ Wählen Sie eine Funktion und nehmen Sie Stellung zu dieser Aussage, indem Sie auf eine der Ableitungsregeln Bezug nehmen.

Beispiel
Tangentensteigung

5 In welchen Punkten hat der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ eine Tangente parallel zur x-Achse?
Lösung: *Eine Tangente parallel zur x-Achse hat die Steigung 0. Gesucht sind also alle Stellen, an denen die erste Ableitung der Funktion gleich 0 ist.*
$f'(x) = 3x^2 - 4x;\ \ 3x_E^2 - 4x_E = 0 \iff x_E \cdot (3x_E - 4) = 0 \implies x_{E1} = 0;\ x_{E2} = 1{,}\overline{3}$

6 Bestimmen Sie die Punkte des Graphen mit einer waagrechten Tangente.
a) $f(x) = (0{,}25x - 2)^2$ **b)** $f(x) = (1 - 2x)(1 + 2x + 3x^2)$ **c)** $f(x) = x^2(1 - x)$

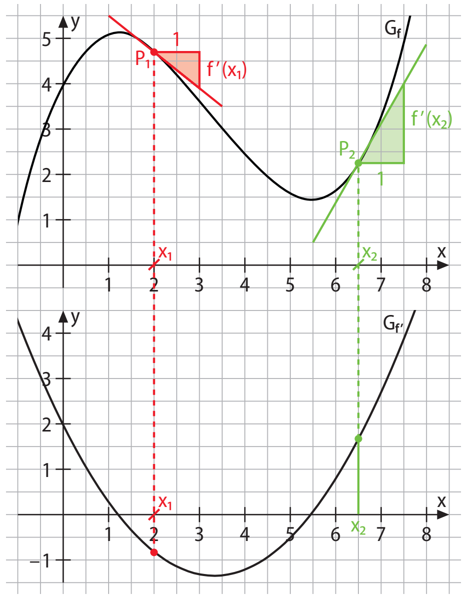
7 Bestimmen Sie die Punkte des Graphen, in denen die Tangente die Steigung 2 hat.
a) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ **b)** $f(x) = (x - 2)(x + 3)$ **c)** $f(x) = 2x + 1$

8 Find the points on the graph with the given equation where the tangent to the graph is parallel to the straight line with the equation $y = -3x - 1$.
a) $f(x) = -4x^4 + 3x^3$ **b)** $f(x) = 3x^2 + 1$ **c)** $f(x) = (x + 1)^2 + 3$

9 Ermitteln Sie rechnerisch den Extrempunkt oder die Extrempunkte der Funktion f. Handelt es sich jeweils um einen Hoch- oder Tiefpunkt?
a) $f(x) = -x^5 + 3x^2$ **b)** $f(x) = x^3 + 0{,}5x^2 - 2x$ **c)** $f(x) = (x + 1)^3 - 2x - 2$

10 Gegeben sind die Funktion f_1 mit $f_1(x) = (x + 3)^2 - 3$ und f_2 mit $f_2(x) = -(x - 2)^2 + 2$. Bestimmen Sie alle Punkte, an denen die beiden Graphen dieselbe Steigung haben.

11 Jedem Punkt des Graphen der Funktion f lässt sich eine Tangentensteigung zuordnen. Hierzu zeichnet man in jedem Punkt ein Steigungsdreieck ein; die Steigung dieses Dreiecks kann man leicht ermitteln.
Ordnet man nun jedem x-Wert als y-Wert diese Steigung zu, erhält man einen Graphen, der die Steigungen und damit die erste Ableitung des Ausgangsgraphen darstellt.
Diesen Vorgang nennt man **graphisches Differenzieren**.

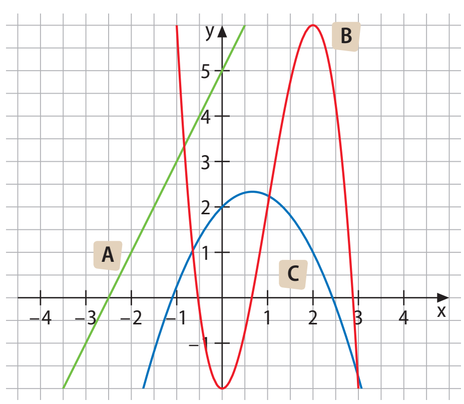


Beispiel
graphisches Differenzieren

Erklärvideo
Mediencode 63021-02

12 Zeichnen Sie zunächst den Graphen der Funktion f (z. B. mithilfe einer Wertetabelle oder eines Funktionsplotters). Ermitteln Sie dann den Graphen der Ableitungsfunktion von f durch graphisches Differenzieren. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis anschließend durch Ableiten der Funktion mithilfe der bekannten Ableitungsregeln.
a) $f(x) = -(x+2)^2 - 1$ **b)** $f(x) = 2x^2 + 2$ **c)** $f(x) = -0{,}25x^3 + 3x$

13 Welcher Ableitungsgraph passt zu welcher Funktion?
Ermitteln Sie hierzu mithilfe der bekannten Regeln die Ableitung der Funktion und ordnen sie diese einem Schaubild zu.
1 $f(x) = x^2 + 5x + 10$
2 $f(x) = 0{,}25x^2 \cdot (2 - x) + 2x$
3 $f(x) = -0{,}5x^4 + 2x^3 - 2x^2$



14 Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion und anschließend den ihrer Ableitungsfunktion. Nutzen Sie hierzu signifikante Punkte und Ihr Wissen über Kurvenverläufe.
a) $f(x) = (x-3)^2 + 1$ **b)** $f(x) = -x^3 + 2x$ **c)** $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

15 Untersuchen Sie den Graphen von f mit $f(x) = x^4 - 6x^2 + 3$ auf **Symmetrie**.
Lösung: Möglichkeit 1: *Bei ganzrationalen Funktionen gilt: Tauchen im Term nur Potenzen von x mit gerader (ungerader) Hochzahl auftauchen, so ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse (punktsymmetrisch zum Ursprung). Da man 3 als* $3 \cdot x^0$ *schreiben kann und 0 in diesem Fall als gerade gilt, ist der Graph von f achsensymmetrisch.*
Möglichkeit 2: *Allgemein gilt stets: Ist* $f(x) = f(-x)$*, ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse; ist* $f(-x) = -f(x)$*, so ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung. Wir überprüfen:* $f(-x) = x^4 - 6x^2 + 3 = f(x)$*, also ist der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse.*

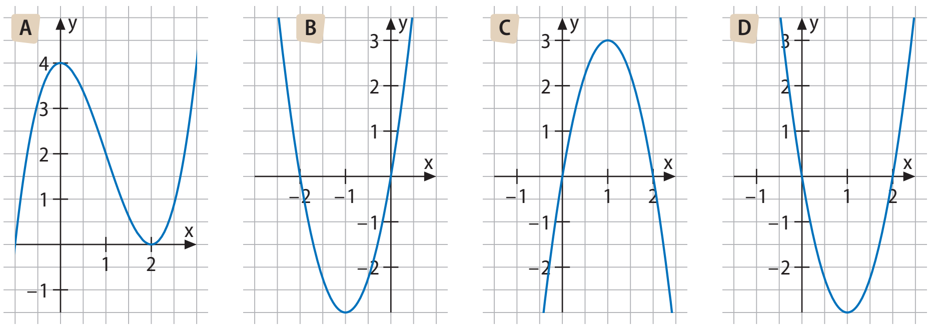
Beispiel
Symmetrie

16 Untersuchen Sie den Graphen von f auf zwei unterschiedliche Arten auf Symmetrie.

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - x$ **b)** $f(x) = 2x^5 + 2x^3 - x$ **c)** $f(x) = -0{,}25x^3 + 4x^2$

d) $f(x) = -(x+1)^2 - 1$ **e)** $f(x) = (x-3)^2 + 2x^3$ **f)** $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

17 Die Abbildung **A** zeigt den Graphen einer Funktion f. Genau eine der Abbildungen **B** bis **D** stellt den Graphen der Ableitungsfunktion f′ von f dar. Finden Sie durch Ausschluss heraus, welche der drei Abbildungen dies ist, indem Sie bei jedem der beiden übrigen Graphen angeben, warum es sich nicht um den Graphen der Ableitungsfunktion f′ handeln kann.



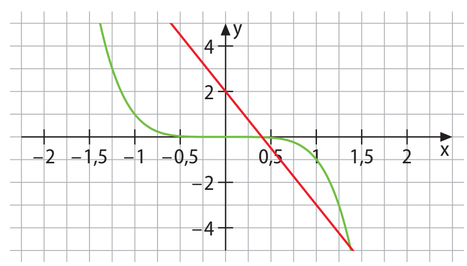
Beispiel
Nullstellen

18 Manchmal gibt es kein Verfahren zur direkten Bestimmung der Nullstellen ganzrationaler Funktionen. In diesem Fall kann man die Gleichung so umwandeln, dass die Bestimmung der Nullstellen in die Bestimmung der Schnittstellen zweier Funktionsgraphen transformiert wird. Dies wird an zwei Beispielen dargestellt.

Bestimmen Sie die Nullstellen der Graphen folgender Funktionen:

a) f mit $f(x) = x^4 - 4x^2$

b) g mit $g(x) = -x^5 + 5x - 2$



Lösung:

a) *Ausklammern von x^2 liefert:*

$x^2(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow x^2(x+2)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -2;\ x_3 = 2$

b) *Man wandelt die Gleichung $-x^5 + 5x - 2 = 0$ um in $-x^5 = -5x + 2$ und bestimmt graphisch (näherungsweise) die Schnittstellen der Funktionsgraphen, die der linken und der rechten Seite der Gleichung zugrunde liegen.*

$x_1 = -1{,}58;\ x_2 = 0{,}4;\ x_3 = 1{,}3$

Satz von Vieta:
Sind p und q die Koeffizienten der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ und x_1 und x_2 ihre Lösungen, dann gilt:
$p = -(x_1 + x_2)$,
$q = x_1 \cdot x_2$.

19 Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen graphisch und wenn möglich auch rechnerisch.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ **b)** $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **c)** $f(x) = x^2 + 3x - 4$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$ **e)** $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ **f)** $f(x) = -x^4 + 2x - 1$

g) $f(x) = 2x^2 - 5x - 1$ **h)** $f(x) = x^3 - 4x + 4$ **i)** $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$

20 Finden Sie jeweils den Fehler und korrigieren Sie ihn.

a) $f(x) = -5x^5 - 0{,}5x^2;\ f'(x) = -10x^4 - 0{,}5x$ **b)** $f(x) = x^{-4};\ f'(x) = -4x^{-3}$

c) $f(x) = x^{\frac{3}{2}};\ f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ **d)** $f(x) = \sqrt[4]{x^3};\ f'(x) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{x^3}$

21 Im Folgenden finden Sie einen Beweis für die Faktorregel mittels des Differenzen- und Differentialquotienten. Vervollständigen Sie im Heft die Tabelle, indem Sie jede Umformung kommentieren und dabei auch sagen, warum sie gemacht wurde.

Vorgehensweise symbolisch	Vorgehensweise verbalisiert	Ziel der Umformung
$f(x) = k \cdot g(x)$		
$f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	allg. Form des Differenzenquotienten	Aus dem Differenzenquotient wird später der Differentialquotient abgeleitet.
$f(x) = \frac{k \cdot g(x+h) - k \cdot g(x)}{h}$		
$f(x) = \frac{k \cdot (g(x+h) - g(x))}{h}$		
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	allg. Form des Differentialquotienten	
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left(k \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)$	Übergang zum Differentialquotienten	
$f'(x) = k \cdot \lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)$		
$f'(x) = k \cdot g'(x)$		

22 Auf ähnliche Art wie in Aufgabe 21 kann man auch die Summenregel beweisen. Vervollständigen Sie den Beweis; kommentieren Sie jeden Ihrer Schritte.

Vorgehensweise symbolisch	Vorgehensweise verbalisiert	Ziel der Umformung
$f(x) = g(x) + k(x)$		
$f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$		
$f(x) = \frac{g(x+h) + k(x+h) - g(x) - k(x)}{h}$	Differenzenquotient für eine Summe von Funktionen	
$f(x) =$		
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	allg. Form des Differentialquotienten	Der Differentialquotient liefert die Ableitung.
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (\qquad\qquad)$	Differentialquotient für obige Funktion	
$f'(x) =$		
$f'(x) = g'(x) + k'(x)$		

Nachgefragt

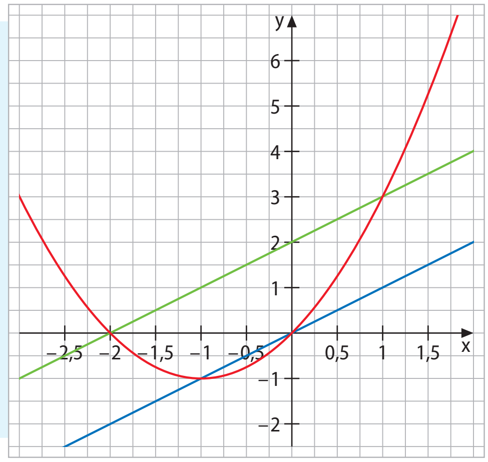
- „Eine Verschiebung der ursprünglichen Funktion um zwei Einheiten nach links verschiebt auch die Ableitungsfunktion um zwei Einheiten nach links.“ Stimmt das? Untersuchen Sie.
- „Zwei verschiedene Funktionen können nicht die gleiche Ableitungsfunktion haben.“ Stimmt das? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Axel meint: „Wenn man den Graphen einer Funktion an der y-Achse spiegelt, so spiegelt sich auch der Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion an der y-Achse.“ Hat er recht? Begründen Sie.
- Catrin meint: „Wenn man den Graphen einer Funktion an der x-Achse spiegelt, so spiegelt sich auch der Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion an der x-Achse.“ Hat sie recht? Begründen Sie.

1.2 Das Produkt von Funktionen und die Produktregel

Entdecken

Kombiniert man die beiden Terme x und $(x + 2)$ durch Multiplikation, erhält man $x \cdot (x + 2)$. Die Abbildung zeigt die Graphen dieser Funktionen.

- Warum können Sie anhand der Graphen entscheiden, dass die Ableitung eines Produkts nicht gleich dem Produkt der Ableitungen beider Faktoren ist, d. h. wenn $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ gilt, ist $f'(x) \neq g'(x) \cdot h'(x)$?



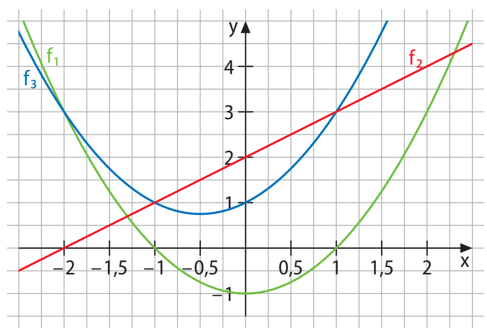
Verstehen

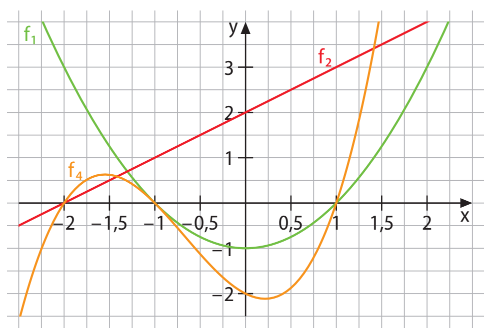
Bisher haben wir vor allem ganzrationale Funktionen, z. B. f mit $f(x) = x^3 + 2x - 1$, betrachtet; in ihnen sind Termbausteine (hier x^3, $2x$ und 1) entweder additiv oder subtraktiv verknüpft.

Zur Erinnerung:
3. binomische Formel
$(x + 1) \cdot (x - 1) = x^2 - 1$

Im Folgenden wollen wir die multiplikative Verknüpfung von Termbausteinen betrachten. Zunächst verknüpfen wir die beiden Termbausteine $(x^2 - 1)$ und $(x + 2)$ additiv miteinander und schauen uns sowohl die Graphen von $f_1(x) = x^2 - 1$ und $f_2(x) = x + 2$ an als auch den Graphen der durch Addition entstandenen Funktion $f_3(x) = (x^2 - 1) + (x + 2) = x^2 + x + 1$.

Man erkennt: Die Addition der beiden Funktionen verändert den Graphen der Funktion, die den höheren Grad hat (also $f_1(x)$), nicht wesentlich, er verschiebt sich, wodurch sich auch die Anzahl der Nullstellen ändert; der prinzipielle Kurvenverlauf aber ist ähnlich. Nun multiplizieren wir die beiden Terme miteinander und betrachten die daraus resultierende Funktionsgleichung und deren Graphen:
$f_4(x) = (x^2 - 1) \cdot (x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.





Wir sehen, dass sich nun einiges verändert hat: Der prinzipielle Kurvenverlauf hat sich ebenso verändert wie die Anzahl der Nullstellen, die Anzahl der Extrempunkte, das Steigungsverhalten, die Monotonie. Insofern ist es folgerichtig, dass sich auch die Ableitung ändert, wenn das Produkt aus Termen gebildet wird.

Merke

Bildet man das Produkt zweier Funktionen, entsteht eine neue Funktion mit gänzlich anderen Eigenschaften als die beiden Ausgangsfunktionen. Unter anderem ist auch deren Steigungsverhalten völlig verschieden und somit deren Ableitung.

Im vorliegenden Fall ist die Ableitung des Produkts der beiden Funktionen f_1 und f_2 leicht zu bestimmen, denn das Ausmultiplizieren und anschließende Ableiten liefert das Gewünschte:
$f_4(x) = (x^2 - 1) \cdot (x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
$f'_4(x) = 3x^2 + 4x - 1.$

In vielen Fällen ist es aber wünschenswert, manchmal auch gar nicht anders möglich, die Ableitung direkt (ohne Ausmultiplizieren) zu bestimmen.
Wir starten mit einer Vermutung: Ist die Ableitung der Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ vielleicht $f(x) = u'(x) \cdot v'(x)$?
Für obiges Beispiel würde dies mit $u(x) = x^2 - 1$ und $v(x) = x + 2$ bedeuten:
$f'_4(x) = 2x \cdot 1 = 2x,$ also eine lineare Funktion. Die Steigung des Graphen von $f_4(x)$ würde also beständig zunehmen. Das ist falsch, wie man am Graphen der Funktion $f_4(x)$ sieht.

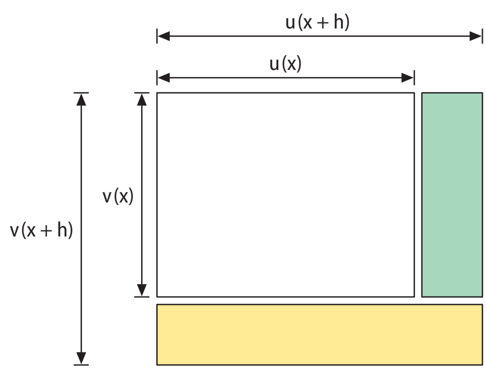
Wir müssen also einen anderen Weg wählen: Für jeden Wert von x können wir u (x) und v (x) als Länge und Breite eines Rechtecks interpretieren und das Produkt von u und v als dessen Flächeninhalt.

Ändern wir x um den Betrag h, hat dies Auswirkungen auf u und auf v, beide Rechtecksseitenlängen ändern sich und somit auch der Flächeninhalt des Rechtecks.

Den Rand kann man in zwei Teile zerlegen und die Flächeninhalte jeweils berechnen:

$(u(x+h) - u(x)) \cdot v(x)$

$(v(x+h) - v(x)) \cdot u(x+h)$



Wir erinnern uns: Die Ableitung an einer Stelle x kann man mithilfe des Differentialquotienten berechnen: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Der Differentialquotient gibt die (momentane) Änderung (hier: des Flächeninhalts) an.

Da uns die Ableitung interessiert, wenden wir diese Definition auf unsere Veranschaulichung mittels der Funktionen u und v an. Die Subtraktion der beiden Rechteckflächen liefert bei gleichzeitiger Division durch h:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot v(x) + \lim_{h \to 0} u(x) \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$
$$= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Wir erhalten damit die

Merke

Produktregel der Differentialrechnung:
Ist f das Produkt zweier Funktionen u und v, d. h. gilt $f = u \cdot v$, so kann man die Ableitung dieses Produkts wie folgt berechnen: $\mathbf{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$.

Merkregel:
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Aufgaben

Beispiel Produktregel

1 Leiten Sie mit der Produktregel ab: $f(x) = x^3 \cdot (x-3)$.
Lösung: *Mit* $u(x) = x^3$ *und* $v(x) = (x-3)$ *ergibt sich:*
$f'(x) = 3x^2 \cdot (x-3) + x^3 \cdot 1 = 3x^3 - 9x^2 + x^3 = 4x^3 - 9x^2$

2 Leiten Sie mit der Produktregel ab.
a) $f(x) = (1+2x)^2$ **b)** $f(x) = x \cdot (x+5)$ **c)** $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$
d) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$ **e)** $f(x) = (x+2) \cdot (2x-3)$ **f)** $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{x^3}$

3 Ergänzen Sie die fehlenden Bausteine.
a) $f(x) = (x+4)^2$; $f'(x) = \bigcirc \cdot (x+4) + \square \cdot 1$
b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x+1)$; $f'(x) = \bigcirc \cdot (x+1) + \sqrt{x} \cdot 1$
c) $f(x) = 2x \cdot \sqrt{x^3}$; $f'(x) = 2 \cdot \bigcirc + 2x \cdot \square$
d) $f(x) = (3x+2) \cdot (2x-3)$; $f'(x) = \bigcirc \cdot \square + \triangle \cdot 2$

Lösungen zu 4:
$2x-2$; $3x^2$; $3x^2+4x$;
$3x^2+2x-1$; $-4x^3+3x^2$;
$4x^3-16x$

4 Leiten Sie ab, indem Sie **1** erst ausmultiplizieren und dann die Potenz-, Summen- und Faktorregel anwenden und indem Sie **2** die Produktregel anwenden. Vergleichen Sie Ihre beiden Ergebnisse.
a) $f(x) = x^2(2+x)$ **b)** $f(x) = (x-1)^2$ **c)** $f(x) = x(x^2+x-1)$
d) $f(x) = (x+2)^2(x-2)^2$ **e)** $f(x) = (x+1)(x^2-x+1)$ **f)** $f(x) = x^3(1-x)$

5 Bilden Sie die erste Ableitung auf zwei verschiedene Arten.
a) $f(x) = (x+1)(3x-3)$ **b)** $f(x) = (x^2-1)(x+1)$ **c)** $f(x) = (x^2+2)^2$
d) $f(x) = 3x \cdot \sqrt{x}$ **e)** $f(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{x}$ **f)** $f(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{x^3}$

6 Welche Regeln werden für die Bestimmung der Ableitung jeweils benötigt?
a) $f(x) = x^3(x^2-1)$ **b)** $f(x) = x^2 \cdot (x-1)^2$
c) $f(x) = x\sqrt{x}$ **d)** $f(x) = (x+2)^2(x^2-1)$
e) $f(x) = (x^2-x)^2$ **f)** $f(x) = \sqrt{2x} - x^2$

Potenzregel | Summenregel | Faktorregel | Produktregel

Nachgefragt

- Entscheiden Sie, bei welchen der angegebenen Funktionen die Produktregel zur Bestimmung der Ableitung angewendet werden kann und ob dies jeweils sinnvoll ist.
  $f_1(x) = x \cdot x$ $f_2(x) = \pi \cdot x^3$ $f_3(x) = (x-1)^2$ $f_4(x) = x^2 \cdot \frac{1}{x}$
- Geben Sie ein Beispiel für einen Funktionsterm an, bei dem die Anwendung der Produktregel das Aufstellen der Ableitungsfunktion erleichtert.
- Zeigen Sie an einem geeigneten Beispiel, welcher der beiden Vorschläge für die Ableitungsregel von Produkten $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ richtig ist.
  1 $f'(x) = u'(x) \cdot v'(x)$ **2** $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

7 Wo steckt der Fehler?
a) $f(x) = 2x \cdot \sqrt{x}$; $f'(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ **b)** $f(x) = (x^2-2)^2$; $f'(x) = 4x^2(x^2-2)$
c) $f(x) = x^2(x+3)$; $f'(x) = 2(x+3) + x^2 \cdot 3$ **d)** $f(x) = \sqrt{4x} \cdot \sqrt{9x}$; $f'(x) = 2x \cdot \sqrt{9x} + \sqrt{4x} \cdot 3x$

8 Zeigen Sie, dass die Funktion f′ die Ableitung der Funktion f ist:
$f'(x) = 6 \cdot (3x+2)$; $f(x) = (3x+2)^2$
Lösung: *Wir leiten* $f(x) = (3x+2)^2 = (3x+2) \cdot (3x+2)$ *nach der Produktregel ab:*
$f'(x) = 3 \cdot (3x+2) + (3x+2) \cdot 3 = 9x+6+9x+6 = 18x+12 = 6 \cdot (3x+2)$.

Beispiel
Produktregel

9 Zeigen Sie jeweils, dass F diejenige Funktion ist, deren Ableitung f ist.
a) $F(x) = (2x-4)^2$; $f(x) = 8x-16$ **b)** $F(x) = \left(x^2 - \frac{2}{3}\right)^2$; $f(x) = 4x^3 - \frac{8}{3}x$
c) $F(x) = (x^2-1) \cdot (x+1)$; $f(x) = 3x^2+2x-1$
d) $F(x) = (x^2+3x) \cdot (3x-3)$; $f(x) = 3(3x^2+4x-3)$

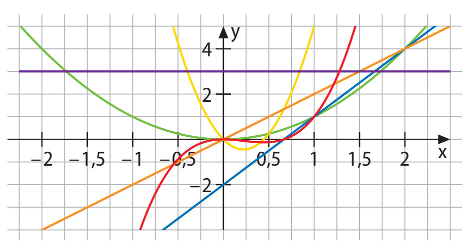
*Die Funktion F nennt man auch **Stammfunktion** von f.*

10 Calculate the derivates of f and determine all x for which the graph of f has a horizontal tangent.
a) $f(x) = 3(x+1)^2$ **b)** $f(x) = 8x^3+4x$

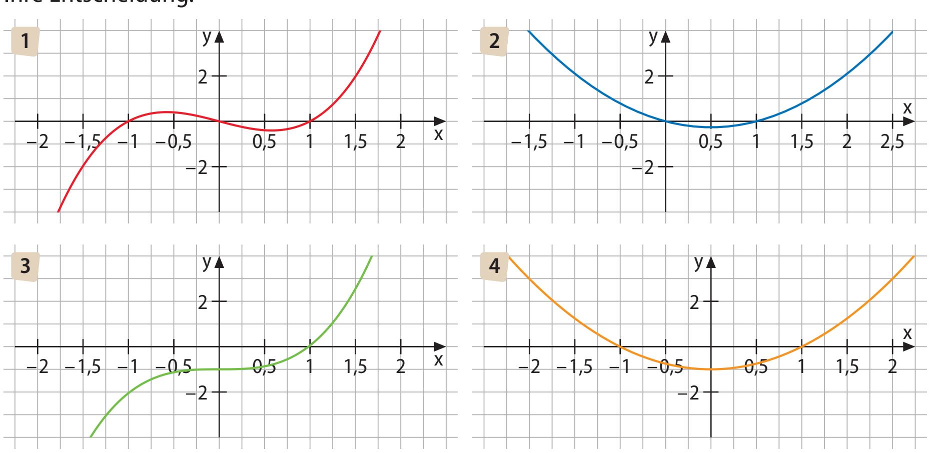
11 Geben Sie jeweils eine Funktion f an, die die Ableitungsfunktion f′ besitzt.
a) $f'(x) = x+4x^2$ **b)** $f'(x) = 4$ **c)** $f'(x) = 0$
d) $f'(x) = 2+0{,}5x$ **e)** $f'(x) = (1-x)^2$ **f)** $f'(x) = (x-1)^2$

12 Es ist $f'(x) = 2-x+3x^2$. Geben Sie jeweils diejenige Funktion an, die die Ableitung f′ besitzt und deren Graph …
a) durch den Ursprung verläuft. **b)** durch den Punkt $P(2\,|\,-3)$ verläuft.

13 Aus den beiden Funktionen $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = 3x-2$ wird die Funktion $f_3(x) = x^2 \cdot (3x-2)$ gebildet.
Im Bild sind die Graphen von f_1, f_2, f_3, f'_1, f'_2 und f'_3 dargestellt. Welcher Graph gehört zu welcher Funktion bzw. Ableitungsfunktion?

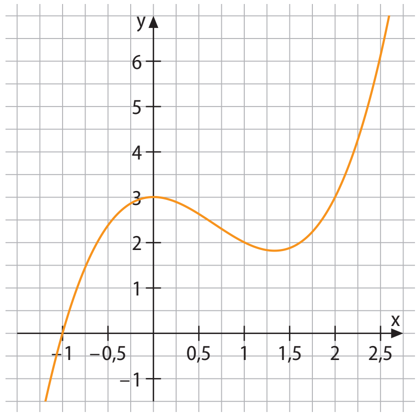


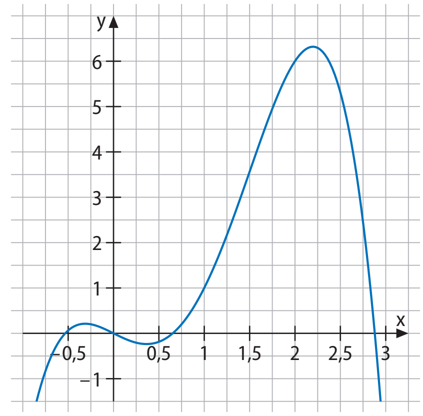
14 Auf den vier Bildern sind die Graphen verschiedener Ableitungsfunktionen dargestellt. Welcher gehört zur Ableitungsfunktion von f mit $f(x) = (x^2+x) \cdot (x-1)$? Begründen Sie Ihre Entscheidung.



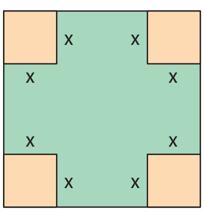
15 Schätzen Sie den Wert der Steigung an den angegebenen Stellen und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse rechnerisch.

a) $f(x) = x^2(x-2)+3;\ x_1 = -0{,}5;\ x_2 = 1$ **b)** $f(x) = -x(x^3+3x^2-1);\ x_1 = -0{,}5;\ x_2 = 1$





Beispiel
Extremwertprobleme



16 **Extremwertprobleme** sind eine wichtige Anwendung der Differentialrechnung. Wie muss man einen DIN-A4-Pappbogen (Maße: 21,0 cm × 29,7 cm) zurechtschneiden, damit daraus eine Schachtel (ohne Deckel) mit maximalem Volumen entsteht?

Lösung: *Offensichtlich ist das Volumen der Schachtel von der Tiefe x des Einschnitts abhängig.*

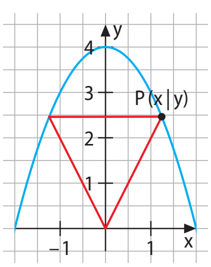
$V_{Quader}(x) = (21 \cdot 29{,}7 - 4x^2) \cdot x$

$\Rightarrow V'_{Quader}(x) = -8x \cdot x + (21 \cdot 29{,}7 - 4x^2) = -8x^2 + 623{,}7 - 4x^2 = -12x^2 + 623{,}7$

Notw. Kriterium: $V'(x_E) = 0 \Rightarrow -12x_E^2 + 623{,}7 = 0 \Rightarrow x_E^2 = \frac{623{,}7}{12} = 51{,}98 \Rightarrow x_E = 7{,}2$

Hinr. Kriterium: *VZW an* $x_E = 7{,}2$ *von + nach –* $\Rightarrow x_E = 7{,}2$ *ist Minimalstelle.*

17 Wie groß ist die größte rechteckige Fläche, die man mit einem 20 m langen Zaun einzäunen kann?



18 Welches gleichschenklige Dreieck innerhalb des zur Parabel mit der Gleichung $y = 4 - x^2$ gehörenden Parabelsegments (siehe Abbildung) hat den größten Flächeninhalt?

19 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x+1)$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen x_{N_1} und x_{N_2} der Funktion.

b) Welche Steigung haben die Tangenten an den Graphen der Funktion in den Nullstellen x_{N_1} und x_{N_2}?

c) Überprüfen Sie, ob der Graph eine waagerechte Tangente besitzt.

Eine Skizze hilft.

20 Überprüfen Sie folgenden Satz: Wenn der Graph von f mit $f(x) = 3x^3 - 4x$ an der Stelle $x_0 = a$ eine waagrechte Tangente hat, dann hat auch der Graph von g mit $g(x) = (f(x))^2$ dort eine waagerechte Tangente.

- Ermitteln Sie hierzu zunächst die Stellen mit waagerechter Tangente.
- Stellen Sie dann den Term g (x) auf und ermitteln Sie seine Stellen mit waagrechter Tangente.
- Vergleichen Sie anschließend.

Überprüfen Sie den Satz an einem selbstgewählten anderen Beispiel.

21 Viele Funktionen, deren Term ein Bruch ist, kann man auch mit der Produktregel ableiten. So kann man $\frac{2}{x}$ schreiben als $2 \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot x^{-1}$, so dass man die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x}$ mithilfe der Produktregel ableiten kann.

a) Ermitteln Sie so die Ableitung von $f(x) = \frac{2}{x}$.

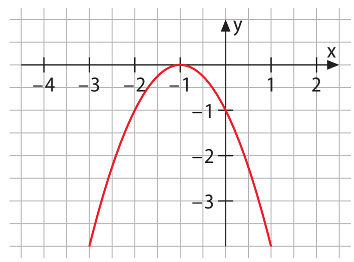
b) Ermitteln Sie in ähnlicher Weise die Ableitungen folgender Funktionen:

1 $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ **2** $f(x) = \frac{3x+2}{x^2}$ **3** $f(x) = \frac{1}{2x}$

4 $f(x) = \frac{3}{2x^3}$ **5** $f(x) = \frac{x^2-4}{x \cdot (x-2)}$ **6** $f(x) = \frac{(3x+3)\cdot(x-1)}{x^4 \cdot (x^2-1)}$

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen, die man mit der sogenannten ***Quotientenregel*** *gewonnen hätte:*
Für die Funktion f mit
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ *ist*
$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$.

22 Das Schaubild der Funktion f_1 mit $f_1(x) = -(x+1)^2$ besitzt an $x_0 = -1$ eine doppelte Nullstelle.



a) Zeigen Sie, dass auch das Schaubild der Funktion f_2 mit $f_2(x) = x \cdot f_1(x)$ die x-Achse im Punkt $(-1\,|\,0)$ berührt.

b) Ist ein Tiefpunkt des Schaubilds von f_1 auch ein Tiefpunkt des Schaubilds von f_2? Untersuchen Sie.

c) Durch die Hinzunahme eines weiteren Faktors x erhält man die Funktion f_3 mit $f_3(x) = -x^2 \cdot (x+1)^2$. Welche Veränderung bewirkt dies am Graphen? Versuchen Sie, dies zunächst durch Überlegen herauszufinden und überprüfen Sie Ihre These anschließend durch Rechnen.

Zur Erinnerung: Doppelte Nullstelle *heißt, dass dort Nullstelle und Extremstelle zusammenfallen.*

23 Das Schaubild der Funktion g_1 mit $g_1(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1)^2$ besitzt zwei doppelte Nullstellen.

a) Geben Sie diese beiden doppelten Nullstellen an.

b) Begründen Sie, dass es sich tatsächlich um doppelte Nullstellen handelt, d. h. weisen Sie das gleichzeitige Vorhandensein von Extrema an diesen Stellen nach.

c) An welchen Stellen besitzt die Tangente an das Schaubild von g_1 die Steigung 1?

d) Beschreiben Sie (ohne vorherige Berechnung), wodurch sich das Schaubild der Funktion g_2 mit $g_2(x) = (x+2)^2 + (x-1)^2$ von dem von g_1 unterscheidet.

e) Bestimmen Sie die Monotoniebereiche der Funktion $g_1(x)$.

f) Untersuchen Sie die Funktion g_2 auf Symmetrie.

Nachgefragt

- Skizzieren und erläutern Sie die Vorgehensweise, wie man die Produktregel herleiten kann.
- Führen Sie ein Beispiel an, bei dem das Aufstellen der Ableitung unter Zuhilfenahme der Produktregel sehr sinnvoll ist und den Arbeitsaufwand minimiert. Führen Sie ein zweites Beispiel einer Funktion an, die man sowohl mit der Produktregel als auch ohne die Produktregel ableiten kann. Führen Sie drittens ein Beispiel an, bei dem man die Produktregel zwar anwenden kann, bei dem sie aber keine Erleichterung bringt.
- Erläutern Sie an einem Beispiel, dass die Faktorregel ein Spezialfall der Produktregel ist.
- Erläutern Sie an einem Beispiel, in welchem Kontext man die Differentialrechnung (und damit zum Beispiel auch die Produktregel) anwenden kann.
- Recherchieren Sie: Was versteht man unter dem isoperimetrischen Problem? Was hat es mit dem Inhalt dieses Kapitels zu tun?

1.3 Die Verkettung von Funktionen und die Kettenregel

Entdecken

Mit einem 3D-Drucker können in mehreren Schritten komplexe Werkstücke hergestellt werden. Dabei baut jeder Schritt auf das Ergebnis des jeweils vorangehenden Schritts auf.

- Ähnliches ist auch in der Mathematik möglich. Inwiefern kann man Funktionen wie f mit $f(x) = (x+1)^2$ oder g mit $g(x) = \sqrt{3x-1}$ als Hintereinanderausführung von Funktionen interpretieren?
- Finden Sie weitere Beispiele für eine solche „Verkettung“ von Funktionen.

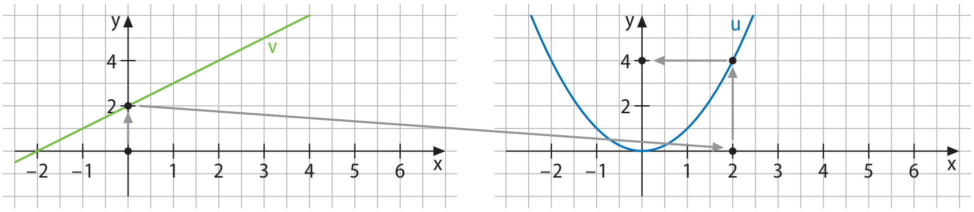
Verstehen

Bisher haben Sie Funktionen bzw. Termbausteine stets durch die Operatoren $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ verknüpft. Nun lernen Sie eine neue Art der Verknüpfung kennen: die Verkettung. Bei der Verkettung werden Funktionen hintereinander ausgeführt.
Wir betrachten hierzu als Beispiel die Funktion f mit $f(x) = (x+2)^2$. Man wird zunächst $(x+2)$ berechnen und das Ergebnis anschließend quadrieren. Zuerst wird also mit v der Funktionswert $v(x) = (x+2)$ ermittelt und dann wird auf diesen Funktionswert die Funktion u mit $u(x) = x^2$ angewendet.

x → **Funktion v** → v (x) → **Funktion u** → u (v (x))

Die nebenstehende Wertetabelle spiegelt diesen Prozess wider.
Graphisch umsetzen kann man ihn, indem man zunächst das Schaubild von $v(x) = (x+2)$ zeichnet und anschließend auf Werte dieses Schaubilds die Funktion $u(v(x)) = (x+2)^2$ anwendet.

x	v (x)	u (v (x))
−1	1	1
−0,5	1,5	2,25
0	2	4
0,5	2,5	6,25
1	3	9



u ∘ v liest man „u verkettet mit v“.

Man bezeichnet eine solche Art der Verknüpfung als Verkettung $f = u \circ v$ zweier Funktionen.

Merke

Beim Verketten zweier Funktion u und v entsteht eine neue Funktion $f = u \circ v$ mit dem Funktionsterm $f(x) = u(v(x))$.

Beispiel I:
$v(x) = x + 2,\ u(x) = x^2 \quad \Rightarrow\ f(x) = u(v(x)) = (x+2)^2$
$v\colon x \mapsto v(x)$ wird innere Funktion und $u\colon x \mapsto u(x)$ wird äußere Funktion genannt.

Beispiel II:
$v(x) = 2 + 3x,\ u(x) = \sin(x) \ \Rightarrow\ f(x) = u(v(x)) = \sin(2+3x)$.

Die Frage ist nun: Wie sieht die Ableitung solcher verketteter Funktionen aus?

Wir versuchen, diese Frage zu beantworten, indem wir die Verkettung zunächst auflösen und die daraus entstehende Funktion ableiten. Wir nehmen hierzu den Termbaustein $(4x-1)$ und multiplizieren ihn mit sich selbst; so erhalten wir $(4x-1)^2$.
Die Funktion f mit $f(x) = (4x-1)^2$ können wir – wie oben beschrieben – als Verkettung von $v(x) = (4x-1)$ mit $u(x) = x^2$ verstehen. Wir lösen die Verkettung nun auf:
$f(x) = (4x-1)^2 = (4x-1)\cdot(4x-1) = 16x^2 - 4x - 4x + 1 = 16x^2 - 8x + 1$
Diesen Ausdruck können wir leicht ableiten:
$f'(x) = 32x - 8 = 4\cdot(8x-2) = 4\cdot 2\cdot(4x-1)$.
Wir vergleichen diesen Ausdruck mit der Ableitung der inneren Funktion und der Ableitung der äußeren Funktion: $v(x) = (4x-1) \;\Rightarrow\; v'(x) = 4$
$u(x) = x^2 \;\Rightarrow\; u'(x) = 2x$

Zur Erinnerung:
2. binomische Formel
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Dieses Beispiel legt die Vermutung nahe, dass man die Ableitung einer verketteten Funktion bildet, indem man die Ableitung der inneren Funktion mit der Ableitung der äußeren Funktion multipliziert. Wir wollen diese Vermutung anhand zweier weiterer Beispiele überprüfen.

1 Wir bilden aus $u(x) = x - 1$ und $v(x) = 3x$ **a)** die Verkettung $u(v(x))$ und **b)** die Verkettung $v(u(x))$ und bestimmen jeweils ihre Ableitungen.

a) $u(v(x)) = u(3x) = (3x) - 1 = 3x - 1$
Die Ableitung davon ist 3. Berechnen wir sie nach unserer oben formulierten Vermutung, erhalten wir als Ableitung der inneren Funktion u die Zahl 1 und als Ableitung der äußeren Funktion v die Zahl 3. Das Produkt ergibt ebenfalls 3.

b) $v(u(x)) = v(x-1) = 3(x-1) = 3x - 3$
Die Ableitung davon ist wiederum 3. Berechnen wir sie nach unserer oben formulierten Vermutung, erhalten wir als Ableitung der inneren Funktion v die Zahl 3 und als Ableitung der äußeren Funktion u die Zahl 1. Das Produkt ergibt wieder 3.

2 Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$ und $D = \mathbb{R}^+$. Zur Berechnung der Ableitung formen wir zunächst um: $f(x) = \sqrt{(x+2)^2} = x + 2$. Die Ableitung ist 1.
Berechnet man die Ableitung über unsere Regel, ist $u(x) = x^2 + 4x + 4$ die innere Funktion u. Ihre Ableitung ist $u'(x) = 2x + 4 = 2(x+2)$.
Die äußere Funktion v ist $\sqrt{x} = x^{0,5}$, ihre Ableitung ist $v'(x) = 0{,}5x^{-0,5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Insgesamt ergibt sich als Ableitung $f'(x) = \frac{2(x+2)}{2\cdot\sqrt{(x+2)^2}} = 1$.

Zwar genügen drei Positivbeispiele nicht, um einen Satz zu beweisen, aber immerhin, um ihn plausibel zu machen. Wir können also festhalten:

Merke

Die Ableitungsregel für eine verkettete Funktion $f(x) = u(v(x))$ lautet:

$$\mathbf{f'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x)}$$

Dabei ist
- $u'(v(x))$ die Ableitung der **äußeren Funktion** an der inneren Funktion und
- $v'(x)$ die Ableitung der **inneren Funktion**.

Merkregel:
innere Ableitung mal äußere Ableitung

Aufgaben

1 Bilden Sie $u(v(x))$ und $v(u(x))$.

a) $u(x) = 3x;\ v(x) = 4x$ **b)** $u(x) = 5x;\ v(x) = x - 4$ **c)** $u(x) = 2x;\ v(x) = x^2$

d) $u(x) = 2x + 1;\ v(x) = 1 - x^2$ **e)** $u(x) = x - 2;\ v(x) = \sqrt{x}$ **f)** $u(x) = \frac{1}{x};\ v(x) = x^2$

2 Bilden Sie $u \circ v$ und $v \circ u$ für $u(x) = 2x + 1$ und $v(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

3 Bilden Sie die Verkettungen $f(x) = u(v(x))$ und $g(x) = v(u(x))$ für $u(x) = 2\sqrt{x}$ und $v(x) = \frac{1}{x^2}$.

4 Stellen Sie die Funktionen f als Verkettung zweier Funktionen u und v dar.

a) $f(x) = (x + 4)^3$ **b)** $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$ **c)** $f(x) = \frac{2}{3x + 4}$ **d)** $f(x) = x^2 + 6x + 9$

Beispiel
innere und äußere Funktion

5 Bestimmen Sie die innere Funktion $v(x)$ und die äußere Funktion $u(x)$ der Funktion f, die als Verkettung von u und v interpretiert werden kann: $f(x) = (x + 2)^2$. Bestimmen Sie anschließend $f(x) = v(u(x))$.

Lösung: *Als innere Funktion wählt man $v(x) = x + 2$, als äußere Funktion $u(x) = x^2$.*
$v(u(x)) = (x^2) + 2 = x^2 + 2$.

6 Die Funktion f kann als Verkettung $u \circ v$ aufgefasst werden. Bestimmen Sie die innere Funktion v und die äußere Funktion u.

a) $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2x^2}$ **c)** $f(x) = x^2 + 8x + 16$

d) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x^2 + 1}}$ **e)** $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ **f)** $f(x) = \frac{2x}{4x^3 - 6x^2}$

Nachgefragt

- Auch im Alltag spielt die Verkettung von Ausdrücken eine Rolle. Ebenso wie in der Mathematik ist die Reihenfolge der Verkettung in der Regel von Bedeutung. Untersuchen Sie folgende Beispiele auf $u(v(x)) = v(u(x))$ bzw. $u(v(x)) \neq v(u(x))$.
  a) *Macht der Sprache und Sprache der Macht*
  b) *Studie der Themen und Themen der Studie*
  c) *Rundfahrt der Sieger und Sieger der Rundfahrt*
  d) *Liga der Champions und Champions der Liga*
  e) *Teiler der Zahl und Zahl der Teiler.*
- Erläutern Sie anhand einer Wertetabelle, dass die Reihenfolge bei der Verkettung der Funktionen f mit $f(x) = 3x - 2$ und g mit $g(x) = \sqrt{x + 1}$ eine Rolle spielt.
- In der Regel ist also $u(v(x)) \neq v(u(x))$. Geben Sie drei Beispiele an, in denen $u(v(x)) = v(u(x))$ ist.

Beispiel
Kettenregel

7 Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (4 + 5x)^2$ auf zwei verschiedene Arten.

Lösung: **1** *Mithilfe der Kettenregel: $u(v) = v^2;\ u'(v) = 2v;\ v(x) = 4 + 5x;\ v'(x) = 5;$*
$f'(x) = u'(v) \cdot v'(x) = 2 \cdot (4 + 5x) \cdot 5 = 40 + 50x$

2 *Mithilfe einer binomischen Formel erhält man $f(x) = 16 + 40x + 25x^2$; somit ist $f'(x) = 40 + 25 \cdot 2x = 40 + 50x$.*

8 Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit von f (x) auf zwei verschiedene Arten.

a) $f(x) = (2x-2)^2$ **b)** $f(x) = (x+1)^3$ **c)** $f(x) = \frac{1}{2x^2-x}$

d) $f(x) = \frac{x}{2x^2-x}$ **e)** $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1}$ **f)** $f(x) = (x^2-10x+25)^{-2}$

Zur Erinnerung:
$\frac{1}{x} = x^{-1}$

9 Leiten Sie ab und vereinfachen Sie (wenn möglich) das Ergebnis.

a) $f(x) = (2x+4)^5$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^3-1}$ **c)** $f(x) = \frac{x}{x+1}$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x}$ **e)** $f(x) = \sqrt{x^5+5}$ **f)** $f(x) = (5x^4-2x)^{-3}$

10 Untersuchen Sie f mit $f(x) = (5x+5)^2$ auf Monotonie und auf Extremstellen.

Lösung: *Nach der Kettenregel mit $v(x) = (5x+5)$ und $u(x) = x^2$ ist*
$f'(x) = 2(5x+5) \cdot 5 = 50x+50$. Aus $50x+50 = 0$ erhält man $x = -1$.
Da $f'(x) < -1$ für alle $x < -1$ gilt, ist die Funktion für $x < -1$ streng monoton fallend;
für $x > -1$ ist $f'(x) > 0$, hier ist die Funktion also streng monoton steigend.
Da an $x = -1$ ein Vorzeichenwechsel in der 1. Ableitung von – nach + vorliegt,
handelt es sich um eine Minimalstelle.

Beispiel
Monotonie

11 Find the intervals of monotony of the given function f and identify its extrema.

a) $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x^2+0{,}5}$ **c)** $f(x) = (x+1)^3-2x-4$

12 Unter welchem Winkel schneidet der Graph der Funktion f die y-Achse im angegebenen Intervall I?

a) $f(x) = \sin(x+1) \cdot \sqrt{x+1}$; $I = [0; \pi]$ **b)** $f(x) = \cos^2(x+1) - 0{,}5$; $I = [0; 2]$

Zur Erinnerung: *Schneidet der Graph die x-Achse an der Stelle x_0, berechnet man den Schnittwinkel α über $\alpha = \tan^{-1}(f'(x_0))$.*

13 Vorgelegt sind die sechs Funktionsterme

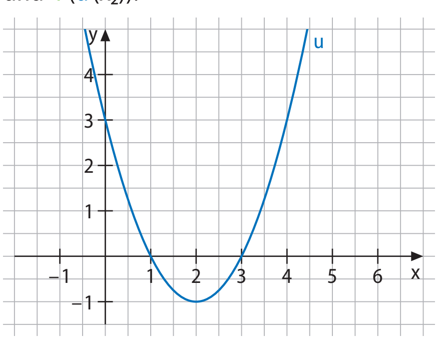
$f_1(x) = x^2$ | $f_2(x) = 2x-1$ | $f_3(x) = 1+x$ | $g_1(x) = 3x-1$ | $g_2(x) = x^2-1$ | $g_3(x) = 2-3x$

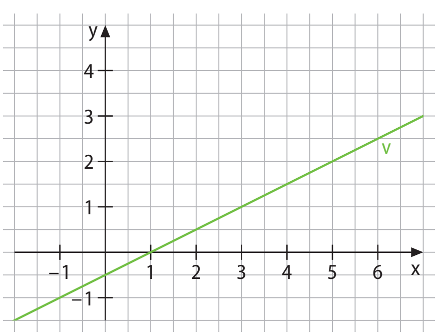
Finden Sie heraus, welcher der sechs Terme

$3(2x-1)$ | $3-6x$ | $3x$ | x^2 | $2x^2-3$ | $9x^2-6x+1$ | x^4-2x^2+1 | $(2-3x)^2$ | $3-3x$

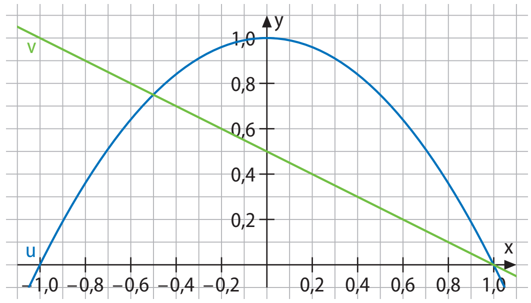
gleich $f_1(g_1(x))$, $f_1(g_2(x))$, $f_1(g_3(x))$, $f_2(g_1(x))$, $f_2(g_2(x))$, $f_2(g_3(x))$, $f_3(g_1(x))$, $f_3(g_2(x))$, $f_3(g_3(x))$ ist.

14 Gegeben sind die Graphen der Funktionen u und v. Bestimmen Sie für $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ näherungsweise $u(v(x_0))$, $u(v(x_1))$ und $u(v(x_2))$ sowie $v(u(x_0))$, $v(u(x_1))$ und $v(u(x_2))$.

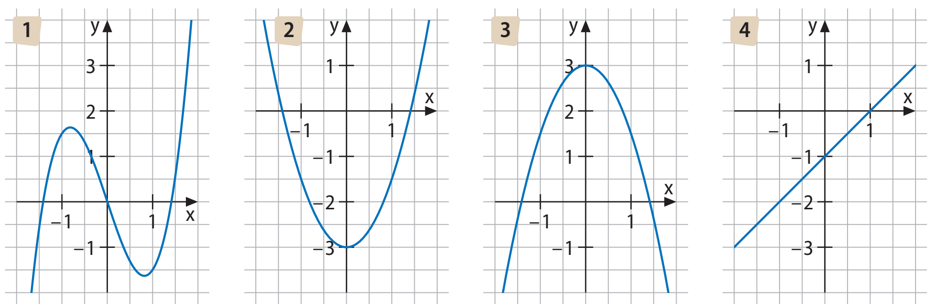




15 Bestimmen Sie zunächst die beiden Funktionsterme von u und v aus den jeweiligen Graphen und ermitteln Sie dann $u(v(x_0))$ und $v(u(x_0))$ für $x_0 = -1,\ 0$ und 1.



16 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (0{,}5x^2 - 1)^3$. Welcher der abgebildeten Graphen ist der von $f'(x)$? Argumentieren Sie.



17 Bestimmen Sie die Funktionen, die die angegebenen Ableitungen haben.

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$ **b)** $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$ **c)** $f(x) = 4(x+3)^3$

d) $f(x) = 12(x+3)$ **e)** $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ **f)** $f(x) = \frac{-2}{x^3}$

18 Wo steckt der Fehler? Korrigieren Sie.

a) $f(x) = (4x-1)^3$
$f'(x) = 3(4x-1)^2$

b) $f(x) = \sqrt{3x^2 - x}$
$f'(x) = \frac{1}{2}(6x-1)$

c) $f(x) = \frac{3}{x+1}$
$f'(x) = \frac{9}{(x+1)^2}$

19 Für welchen Wert von t entsteht ein Graph, der an der Stelle x_0 einen Extrempunkt besitzt? Geben Sie auch an, ob es sich um einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt handelt.

a) $f(x) = ((x+k)^2 + x)^2$; $x_0 = -2$

b) $f(x) = (x^2 + kx)^3$; $x_0 = 1$

c) $f(x) = ((x+k)^2 - 1)^4$; $x_0 = 1$

20 Man kann auch drei Funktionen miteinander verketten und davon die Ableitung bestimmen.

a) Ermitteln Sie die Ableitung von $k(x) = f(g(h(x)))$, indem Sie zunächst die Ableitung von $g(h(x))$ bestimmen und dann noch mit f verketten.

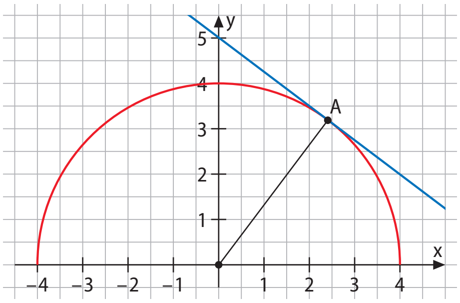
b) Führen Sie das Ganze am Beispiel $k(x) = (\sqrt{3x-1})^2$ durch.

21 Überprüfen Sie an einem konkreten Beispiel Ihrer Wahl: Hat der Graph von g an der Stelle x_1 eine waagrechte Tangente, so hat auch der Graph von k mit $k(x) = \sqrt{g(x)}$ an der Stelle x_1 eine waagrechte Tangente.

22 An den Graphen von f mit $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ wird im Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ eine Tangente angelegt (siehe Zeichnung).

a) Bestimmen Sie die Steigung der Tangente mithilfe der Eigenschaft der Tangente, dass sie senkrecht zum Radius steht.

b) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis mithilfe von $f'(x)$.



Tipp:
Für die Steigungen zweier senkrechter Geraden gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

23 Es ist $u(x) = 4x^2 + 2x$ und $v(x) = 3x - 5$.
Bilden und vereinfachen Sie die Funktionsterme $h(x) = u(v(x))$ und $k(x) = v(u(x))$ sowie ihre Ableitungen $h'(x)$ und $k'(x)$ und vergleichen Sie $[u(v(x))]'$ und $[v(u(x))]'$ miteinander. Was fällt Ihnen auf?

24 An den Graphen von f mit $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ sollen an den Stellen −0,5 und 0 die Tangenten angelegt werden. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Tangenten.

Erklärvideo
Mediencode 63021-03

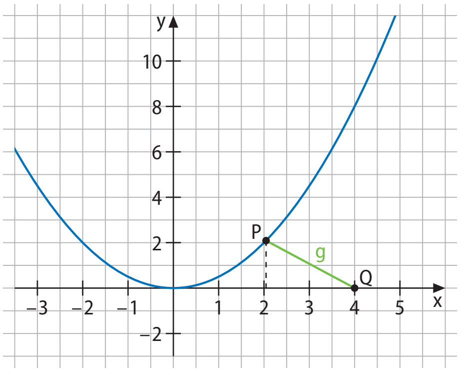
25 Wählen Sie für $u(x)$, $v(x)$ und $w(x)$ drei einfache Funktionen. Bestimmen Sie $u(v(w(x)))$ und ermitteln Sie die Ableitung dieser doppelt verketteten Funktion. Versuchen Sie, eine Regel aufzustellen.

26 **a)** Bestimmen Sie den Punkt P auf der Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$, der den kürzesten Abstand vom Punkt $Q(4|0)$ hat.

Tipp 1: Den Abstand können Sie mit dem Satz des Pythagoras bestimmen.

Tipp 2: Von dieser Abstandsfunktion ist das Minimum gesucht.

b) Zeigen Sie, dass die Gerade PQ senkrecht zur Tangenten an den Graphen im Punkt Q steht.

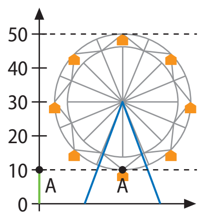


Nachgefragt

- Ist die Verkettung zweier linearer Funktionen wie z. B. $f(x) = 2(x + 2) + 3$ mit $u(x) = 2x + 3$ und $v(x) = x + 2$ wieder eine lineare Funktion? Beurteilen Sie anhand mehrerer konkreter Beispiele.
- Überprüfen Sie bei der Funktion g mit $g(x) = \sqrt{f(x)}$, ob gilt: Falls der Graph von f an der Stelle x_0 eine waagrechte Tangente hat, dann hat auch der Graph von g an x_0 eine waagrechte Tangente. Wählen Sie zunächst eine konkrete Funktion mit waagerechter Tangente und überprüfen Sie; danach sollten Sie die Überprüfung für eine allgemeine Funktion f durchführen.
- Probieren Sie anhand mehrerer Beispiele aus, ob $[u(v(x))]' = [v(u(x))]'$ sein kann, ohne dass $u(v(x)) = v(u(x))$ ist.

1.4 Trigonometrische Funktionen und ihre Ableitung

Entdecken



Jede Gondel eines Riesenrads verändert beim Drehen des Rads ständig ihre Höhe über dem Boden.

- Beobachten Sie die Höhe über dem Boden einer Gondel für eine Umdrehung des Riesenrads und zeichnen Sie diese Höhe im Koordinatensystem in Abhängigkeit von der Zeit ein (konstante Geschwindigkeit wird vorausgesetzt).
- Untersuchen Sie den entstehenden Graphen. Welche Eigenschaften hat er? Wie würde er sich bei der nächsten Umdrehung des Rads verändern?

Verstehen

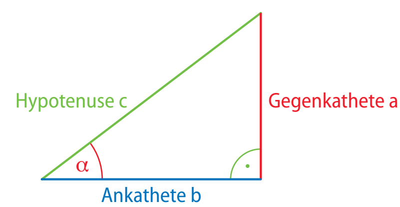
Wir nehmen die neuen Termbausteine sin und cos hinzu und betrachten Funktionen wie $f(x) = 2 \cdot \sin(2x - 3)$ sowie deren Ableitung.

Hierzu wiederholen wir zunächst, wie der Sinus und der Kosinus sowie die Sinus- und die Kosinusfunktion definiert sind und wie deren Ableitungen aussehen.

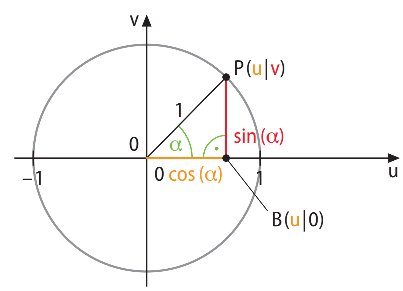
Für Winkel zwischen 0° und 90° sind Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck definiert als

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$



Wendet man diese Definition auf ein Dreieck im Einheitskreis an, also auf ein Dreieck, dessen Hypotenusenlänge 1 ist, kann man wie folgt definieren: Liegt der Punkt $P(u|v)$ auf dem Einheitskreis, gilt für das zum Winkel α gehörende rechtwinklige Dreieck: $\sin(\alpha) = v$ und $\cos(\alpha) = u$.

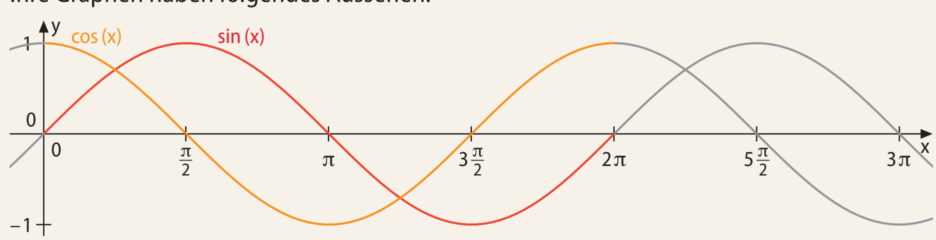


Mithilfe des Einheitskreises kann man Winkel also durch Längen ausdrücken.
Gleichzeitig wird durch jeden Winkel ein Kreisbogen der Länge x festgelegt, da α und x zueinander proportional sind. **x** nennt man das **Bogenmaß des Winkels α**.

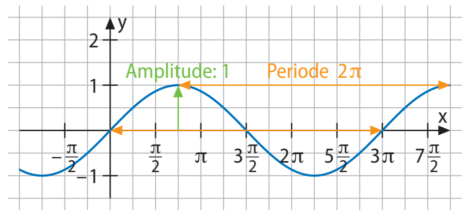
*Die Sinus- und die Kosinusfunktion gehören zu den **trigonometrischen Funktionen**.*

Merke

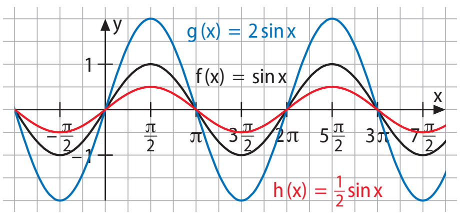
Die eindeutige Zuordnung, die jeder reellen Zahl x den Wert sin (x) zuordnet, nennt man **Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$**. Analog nennt man die eindeutige Zuordnung, die jeder reellen Zahl x den Wert cos(x) zuordnet, **Kosinusfunktion $g(x) = \cos(x)$**.
Ihre Graphen haben folgendes Aussehen:



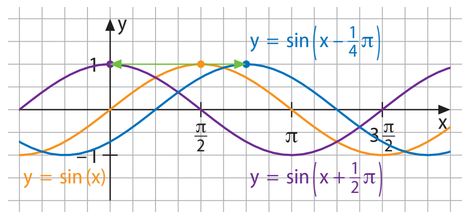
Die Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen wiederholen sich jeweils nach 2π. 2π nennt man die **Periode**, den maximalen „Ausschlag“ der Funktionswerte (von der x-Achse aus gesehen) **Amplitude**.



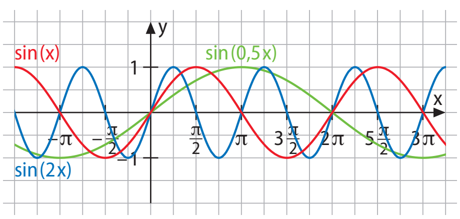
Kombinieren wir die Sinusfunktion mit den uns bekannten Termbausteinen, erhalten wir z. B. die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin(3(x-4)) + 3$, allgemein: $f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$.
Wir variieren nun die einzelnen Parameter a, b, c und d, lassen uns die Graphen mit einem Funktionsplotter zeichnen, um ein Muster bezüglich der Auswirkungen zu erkennen.



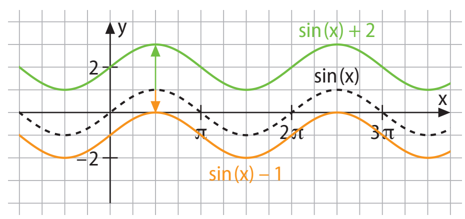
Der Parameter a bewirkt eine Streckung oder Stauchung des Graphen der Sinusfunktion in y-Richtung. Die Zahl $A = |a|$ ist die Amplitude der Funktion.



Der Parameter c bewirkt eine Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion in x-Richtung.



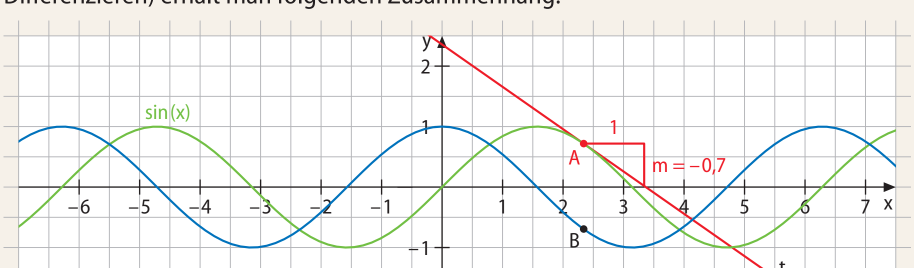
Der Parameter b bewirkt eine Streckung des Graphen der Sinusfunktion in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$. Die Funktion f mit $f(x) = \sin(b \cdot x)$ hat die Periode $p = \frac{2\pi}{b}$.



Der Parameter d bewirkt eine Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion in y-Richtung.

Merke

Durch Betrachten der Tangentensteigungen des Graphen der Sinusfunktion (graphisches Differenzieren) erhält man folgenden Zusammenhang:



Für $f(x) = \sin(x)$ gilt: $f'(x) = \cos(x)$. Für $g(x) = \cos(x)$ gilt: $g'(x) = -\sin(x)$.

Aufgaben

1 Da durch jeden Winkel α ein Kreisbogen der Länge x (das **Bogenmaß des Winkels α**) festgelegt wird, und da der Umfang des Kreises $U = 2\pi r$ und damit der Umfang des Einheitskreises ($r = 1$) $U = 2\pi$ ist und einem Vollwinkel von $\alpha = 360°$ entspricht, erhält man:

Beim Taschenrechner muss man den Modus von Gradmaß (degree, DEG) auf Bogenmaß (radian, RAD) umschalten, um Winkel im Bogenmaß zu bestimmen.

Gradmaß α	360°	180°	90°	1°	n°
Bogenmaß x	2π	π			

a) Vervollständigen Sie die Tabelle.

b) Begründen Sie auf Basis der Tabelle, dass gilt: $x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}$.

c) Jede reelle Zahl bzw. jedes Bogenmaß x kann folglich als Winkel α aufgefasst werden. Begründen Sie, dass gilt: $\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180°$.

Beispiel
Bogenmaß und Gradmaß

2 Verwandeln Sie vom Bogenmaß ins Gradmaß oder umgekehrt.

a) $\alpha = 45°$ **b)** $x = \frac{\pi}{2}$

Lösung:

a) Wegen $x = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi$ ergibt sich für $\alpha = 45°$: $x = \frac{1}{4} \cdot \pi$.

b) Wegen $\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180°$ ergibt sich $x = \frac{\pi}{2}$: $\alpha = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} \cdot 180° = 90°$.

3 Verwandeln Sie ins Gradmaß.

a) π **b)** 10 **c)** 1 **d)** 0,1

4 Verwandeln Sie ins Bogenmaß.

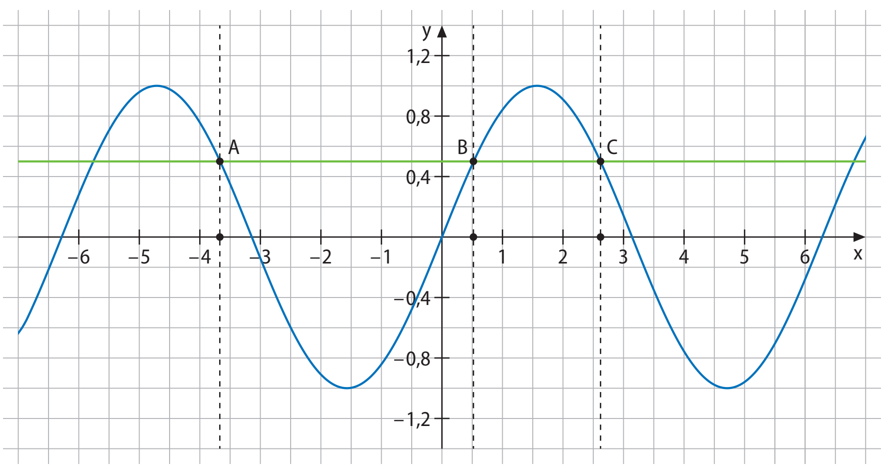
a) 45° **b)** 60° **c)** 210° **d)** 380°

Beispiel
Gleichung lösen

5 Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $\sin(x) = 0{,}5$ im Intervall $[-4; 4]$ und geben Sie diese sowohl im Bogen- als auch im Gradmaß an.

Lösung:

1 *Graphisch: Zeichnen Sie die linke Seite der Gleichung und die rechte und ermitteln Sie die Schnittpunkte beider Graphen. Man erhält $x_1 = 0{,}52$, $x_2 = 2{,}62$, $x_3 = -3{,}67$. Wegen $\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180°$ entspricht dies $x_1 = 30°$, $x_2 = 150{,}1°$ und $x_3 = 210{,}3°$.*



2 *Rechnerisch: Der Taschenrechner liefert für $\sin^{-1}(0{,}5)$ den Wert $x_1 = 0{,}52$.*

6 Bestimmen Sie die Lösung(en) folgender Gleichungen im Intervall $[0; 2\pi]$ und geben Sie diese sowohl im Bogen- als auch im Gradmaß an.

a) $\sin(x) = 0{,}75$ **b)** $\sin(x) = -0{,}25$ **c)** $\sin(x) = -1$

d) $\cos(x) = 0{,}75$ **e)** $\cos(x) = -0{,}25$ **f)** $\cos(x) = -1$

Nachgefragt

- Geben Sie in eigenen Worten wieder, welche Konsequenzen die Übertragung der trigonometrischen Beziehung $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ auf den Einheitskreis hat und in welchem Zusammenhang das Bogenmaß hierzu steht.
- Erläutern Sie, weshalb gilt: $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ und $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
- Erläutern Sie, wie man anschaulich erklären kann, dass die Ableitung der Sinusfunktion die Kosinusfunktion ist.
- Wie lautet die 111-te Ableitung und wie die 222-te Ableitung von sin (x), wie die 333-te und 444-te Ableitung von cos (x)?

7 Bestimmen Sie Amplitude und Periode der folgenden trigonometrischen Funktionen f.

a) $f(x) = 3\sin(2x)$ **b)** $f(x) = \sin(3x)$

c) $f(x) = 3\cos(2x)$ **d)** $f(x) = 2 \cdot \sin(3x + 4) - 5$

8 Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \sqrt{\sin(x)}$.

Beispiel *Ableitung*

Lösung: *Der Vorfaktor 3 ist vom Ableiten nicht betroffen, er bleibt erhalten. Den Wurzelausdruck leitet man mittels der Kettenregel ab, wobei $v(x) = \sin(x)$ die innere Funktion und $u(x) = \sqrt{x}$ die äußere Funktion ist.*

Es ist $u'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ und $v'(x) = \cos(x)$.

$f'(x) = 3 \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$.

9 Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen f.

a) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ **b)** $f(x) = 4 \cdot \cos(x)$ **c)** $f(x) = 2 \cdot \sin(x) + 3$

d) $f(x) = \sqrt{\sin(x)} + 3x - 1$ **e)** $f(x) = (\cos(x))^2 + \frac{2}{3}x^3$ **f)** $f(x) = \frac{1}{2 \cdot \sin(x)} + \frac{1}{x}$

g) $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ **h)** $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ **i)** $f(x) = x^2 \cdot \sin^2(x)$

10 Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen und geben Sie jeweils Amplitude und Periode an.

a) $f(x) = 2 \cdot \sin(0{,}5x) - 1$ **b)** $f(x) = -\cos(2x - \pi) + 2$ **c)** $f(x) = -2 \cdot \sin(2\pi x) + \pi$

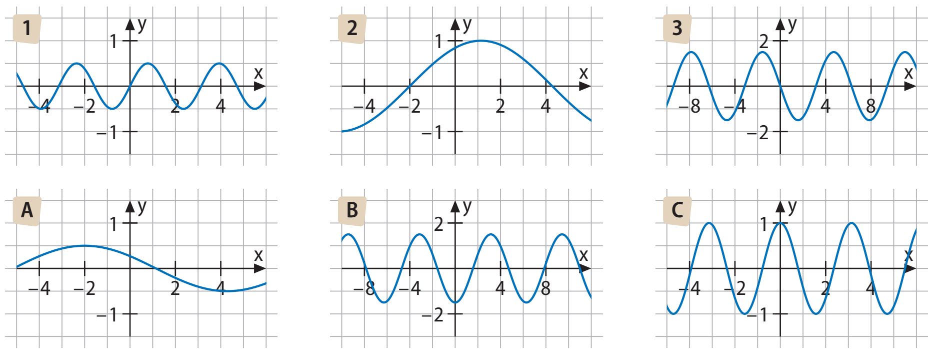
d) $f(x) = 1{,}5\sin(x) + 2$ **e)** $f(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **f)** $f(x) = \sin^2(x)$

11 Determine the amplitude and the period for the following functions f and calculate their derivative f′.

a) $f(x) = \sin(2x) + 2$ **b)** $f(x) = -4\cos(\pi)$ **c)** $f(x) = -0{,}5 \cdot \sin(0{,}1x)$

d) $f(x) = \cos(2x) + 2$ **e)** $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \sin\left(\frac{x}{4}\right)$ **f)** $f(x) = -0{,}2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{12}x\right) - \pi$

12 Ordnen Sie jedem Graphen **1** bis **3** der Sinusfunktionen den zugehörigen Graphen der Ableitung (**A** bis **C**) zu. Bestimmen Sie jeweils sowohl die Gleichung der Funktion als auch die der Ableitungsfunktion; überprüfen Sie anschließend den graphisch gewonnenen Term der Ableitungsfunktion, indem Sie f ableiten.



Beispiel
Gleichung lösen

Die Gleichung $\sin(x) = 1$ kann man mit dem Taschenrechner lösen, indem man $\sin^{-1}(1)$ eingibt. Der Taschenrechner liefert $1{,}57 = \frac{\pi}{2}$.

13 Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $\sin(x) = 1$ im Intervall $[-\pi; \pi]$ und veranschaulichen Sie Ihre Lösung auch graphisch.
Lösung: *$\sin(x) = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin^{-1}(1) = x;\; x = \frac{\pi}{2}$*

14 Geben Sie an, in welchen Punkten der Graph von f mit $f(x) = \sin(x)$ dieselbe Steigung hat wie …

a) die 1. Winkelhalbierende.
b) die 2. Winkelhalbierende.
c) die x-Achse.
d) die Gerade mit der Gleichung $y = -0{,}5x + 2$.

15 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin(x)$.

a) Ermitteln Sie im Intervall von –1 bis 4 die Koordinaten aller Punkte, die der Graph von f mit den Koordinatenachsen gemeinsam hat.
b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und ermitteln Sie alle Extrempunkte des Graphen von f.
c) Der Graph von f hat mit der Parabel P mit der Gleichung $y = -\frac{4}{\pi^2} \cdot x \cdot (x - \pi)$ zwei Punkte gemeinsam. Geben Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte A und B an und untersuchen Sie, ob sich die beiden Graphen in den Punkten A und B berühren oder schneiden.

16 Die durchschnittliche Tageslänge (in Stunden) in Deutschland, also die Zeit zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang, kann näherungsweise durch die Funktion f mit $f(x) = 4{,}4 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(x - 81)\right] + 12{,}2;\; D_f = \{1; 2; 3; \ldots; 365\}$, wiedergegeben werden; hierbei bedeutet f(x) die durchschnittliche Tageslänge am x-ten Tag des Jahres.

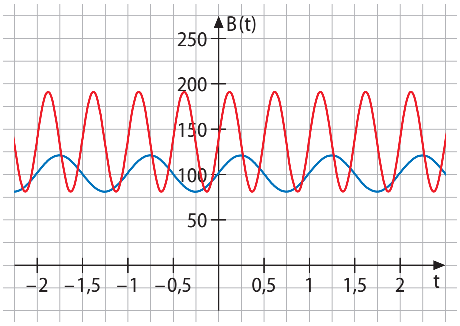
a) Skizzieren Sie den Graphen G_f bzw. lassen Sie ihn sich von einem Funktionsplotter zeichnen (in Ihrer Zeichnung dürfen Sie D_f durch $[1; 365]$ ersetzen).
b) Ermitteln Sie die größte und die kleinste Tageslänge sowie das jeweils zugehörige Datum.
c) Ermitteln Sie graphisch und rechnerisch die durchschnittliche Tageslänge am Frühlingsanfang (21. März), am Sommeranfang (21. Juni), am Herbstanfang (23. September) und am Winteranfang (21. Dezember).

17 Die Funktionen f und g haben folgendes Aussehen: $f: f(x) = 2(\sin x)^2 - 1$ und $g: g(x) = \frac{1}{(\sin(x))^2}$.

a) Was können Sie zum Definitionsbereich der Funktion g sagen?

b) Ermitteln Sie die Koordinaten der Extrempunkte der Graphen der beiden Funktionen im Intervall von −4 bis 4 sowie die Koordinaten derjenigen Punkte, die die beiden Graphen miteinander gemeinsam haben. Was fällt Ihnen auf?

18 Der Blutdruck B (t) (in mm Hg) einer Sprinterin kann im Ruhezustand (Puls: 60) näherungsweise durch $B_1(t) = 100 + 20\sin(2\pi t)$ (Zeit t in s) und nach einer Trainingsbelastung (Puls: 120) näherungsweise durch den Term $B_2(t) = 135 + 55\sin(4\pi t)$ beschrieben werden.



a) Welcher der beiden Graphen gehört zu B_1, welcher zu B_2? Begründen Sie.

b) Geben Sie jeweils Beispiele für Zeitpunkte an, zu denen der Blutdruck besonders stark zunimmt (bzw. besonders stark abnimmt).

c) Reflektieren Sie: Warum ist Bluthochdruck so gefährlich? Woher kommt er? Was passiert bei einem Blutdruck von 200 mmHg?

19 Es besteht der in der Tabelle abgebildete Zusammenhang zwischen einem Winkel und den zugehörigen sin-, cos- und tan-Werten (im Gradmaß).
Leiten Sie diese Zusammenhänge her.

Tipp 1: Warum ist das Dreieck bei einem 45°-Winkel gleichschenklig?

Tipp 2: Ergänzen Sie das Dreieck mit dem 30°-Winkel zu einem gleichschenkligen Dreieck.

Tipp 3: Benutzen Sie den Satz des Pythagoras.

Winkel α	sin (α)	cos (α)	tan (α)
0°	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	0
30°	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	–

Nachgefragt

- Nehmen Sie Stellung zu der Aussage, dass eine Verschiebung in x-Richtung die Periodenlänge einer Sinusfunktion verändert.
- Helene meint: „Die Ableitung einer Sinusfunktion $\sin(b \cdot x)$ hat immer die gleiche Amplitude wie die Funktion selbst.“ Stimmt das? Argumentieren Sie.
- Nehmen Sie Stellung zu folgenden Aussagen.

  1 „Die Periodenlänge der Funktion $\sin(b \cdot x)$ ist umgekehrt proportional zu b.“

  2 „Die Veränderung der Amplitude der Kosinusfunktion hat keinen Einfluss auf die Lage der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.“

Im Folgenden finden Sie keine vollständigen Klausuren, wohl aber Aufgaben, die zu diesem Kapitel passen und Teil einer Klausur sein könnten.

Aufgabe 1

Warm up

A Leiten Sie ab.

a) $f_1(x) = -3(x-3)^3$ **b)** $f_2(x) = \sqrt{x^3 + 3x}$ **c)** $f_3(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)$

B Bestimmen Sie die Extrema der Funktionen, einmal ohne Zuhilfenahme der Ableitung, einmal mithilfe der Ableitung.

a) $g_1(x) = -2x^2 + 8x - 4$ **b)** $g_2(x) = 3x^2 + 12x + 9$

C Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $(x+2) \cdot (x-4) = 0$ **b)** $x^2 + 4x + 4 = 0$ **c)** $x - 1 = \sqrt{x+1}$

1 Gegeben ist die Funktion f mit p: $y = \sqrt{x+2}\,(x-4)$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an und erläutern Sie dies.

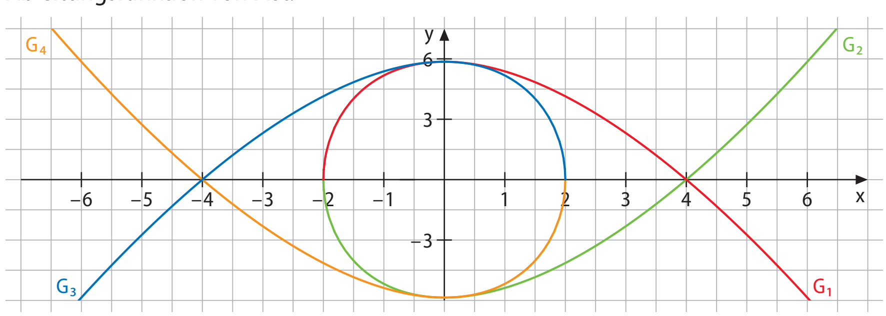
b) Bestimmen Sie die Nullstelle(n) des Graphen von f sowie seine Extremstelle(n).

c) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitung von f. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

d) Bestimmen Sie die Stelle, an der der Graph von f parallel zur Geraden $y = x + 4$ verläuft.

e) Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage: „Über einem Intervall streng monoton steigende Funktionen können in der ersten Ableitung in diesem Intervall keine Nullstelle haben."

f) Entscheiden Sie begründet, welcher der abgebildeten Graphen der Graph der Ableitungsfunktion von f ist.



Aufgabe 2

Warm up

A Zerlegen Sie (durch Ausklammern und/oder Anwendung der binomischen Formeln) so weit wie möglich in Faktoren.

a) $-2v^3 + 12v^2w - 18vw^2$ **b)** $-333m^4 + 37n^2$

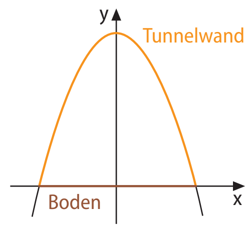
B Ermitteln Sie den Schnittpunkt folgender Funktionen zeichnerisch und rechnerisch.

$f(x) = (x+1)^2$ und $g(x) = -(x+1)(x-2)$

C Ermitteln Sie jeweils den Scheitel der quadratischen Funktionen.

a) $y = x^2 + 6x + 9$ **b)** $y = x^2 + 6x + 5$ **c)** $y = x^2 + 7x + 12$

2 Sie haben sich mit Ihrem Auto in den Bergen auf Wald- und Wiesenwegen verirrt und kommen an einen Tunnel. Die maximale Höhe des Tunnels wird mit 3 m angegeben, die maximale Breite am Boden ebenfalls mit 3 m. Ihr Auto ist 1,70 m breit und 1,50 m hoch.



a) Stellen Sie einen quadratischen Term auf, mit dem Sie die Tunnelwände modellieren können.
b) Schließen Sie vom Graphen der Funktion f auf den Graphen der Ableitungsfunktion f′.
c) Berechnen Sie den Winkel, den die Tunnelwände mit dem Boden einschließen.
d) Berechnen Sie, ob Ihr Auto durch den Tunnel passt.

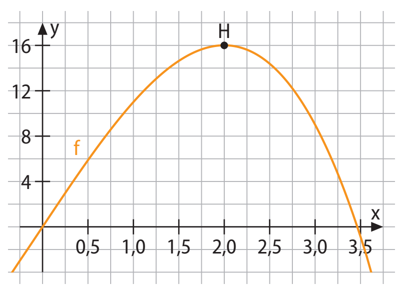
Aufgabe 3

Warm up

A Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen.
a) $f(x) = x^5 + 3x^3 + x$ **b)** $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3$ **c)** $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$

B Untersuchen Sie auf Nullstellen, Monotonie und Extremstellen und skizzieren Sie anschließend den jeweiligen Graphen.
a) $f(x) = x^4 - 2x + 1$ **b)** $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 1$ **c)** $f(x) = x^2(x - 1)$

3 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 12x$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie dessen Hochpunkt $H(2|16)$.



a) Vergrößern Sie das Intervall in geeigneter Weise und vervollständigen Sie so den Graphen.
b) Die Gerade g verläuft durch den Punkt H und besitzt eine negative Steigung. Zudem ist ihre Steigung dieselbe wie die, die der Graph von f im Punkt $P(2{,}5|14{,}375)$.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g mit der y-Achse.
c) Der Funktionsterm von f wird leicht verändert, man erhält die Funktion g mit $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Führen Sie zwei wesentliche Veränderungen im Graphen an und deren Ursache.
d) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion von f und beschreiben Sie, wie Sie vorgegangen sind.
e) Berechnen Sie die Extrema von f und von g sowie die jeweiligen Nullstellen (möglichst exakt, ansonsten näherungsweise).
f) Der Ausschnitt des Graphen ähnelt einer Parabel. Eine Parabel ist definiert als Menge aller Punkte X (der Ebene), von denen jeder von einer gegebenen Geraden, der sogenannten Leitgeraden l, und von einem festen Punkt, dem Brennpunkt F, jeweils gleichen Abstand hat. Der Punkt, der in der Mitte zwischen Brennpunkt und Leitgerade liegt, heißt Scheitel der Parabel. Die Verbindungsgerade von Brennpunkt und Scheitel wird auch Achse der Parabel genannt. Skizzieren Sie die ungefähre Lage der Leitgeraden und des Brennpunkts.
g) Beschreiben Sie, wie die Lage von Leitgerade und Brennpunkt die Öffnung der Parabel beeinflussen.

Aufgabe 4

Warm up

A Leiten Sie die Funktionen ab.

a) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x-1)$ **b)** $f(x) = (\sin(x))^2 - 3\cos(2x)$

B Bestimmen Sie Amplitude und Periode und skizzieren Sie den Graphen.

a) $f(x) = 2\sin(2(x-2))$ **b)** $f(x) = -\cos(-x) - 1$

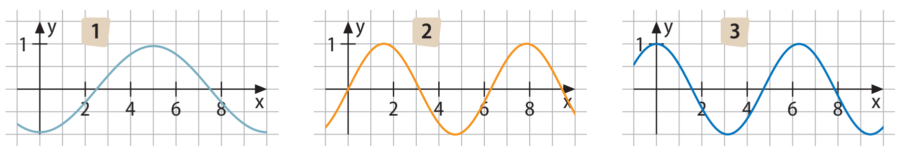
4 Am Elbufer wird täglich der Wasserstand gemessen. Durch Ebbe und Flut entsteht eine wellenförmige Kurve, wenn man die Werte in einem Koordinatensystem veranschaulicht. Die Messwerte können durch folgende Funktionsgleichung wiedergegeben werden: $f(t) = 1{,}5\sin\left(\frac{\pi}{5}(t-5)\right) + 1{,}5$ (t in h, f(t) in m).

a) Geben Sie den Wasserstand zum Zeitpunkt $t = 0$ an.

b) Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen.

c) Steigt oder fällt der Wasserstand zum Zeitpunkt $t = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Welcher der folgenden Graphen gehört zur ersten Ableitung von f? Begründen Sie.



e) Berechnen Sie: Wann erreicht der Wasserstand sein Maximum, wann sein Minimum? Wie hoch ist das Wasser dann jeweils? Wie groß ist der Tidenhub, also der Unterschied zwischen dem Scheitelpegel (Flut) und dem untersten Pegelstand (Ebbe)?

Reflexion

Wie sehen typische Klausuraufgaben aus?

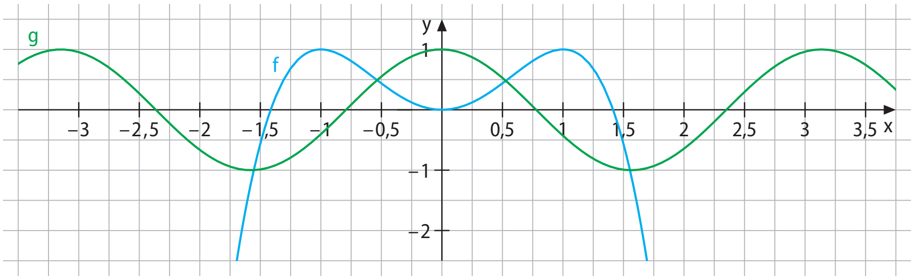
- Zuordnen von Termen und Graphen
- Aufstellen eines Terms zu einer gegebenen Sachsituation, Sachsituationen modellieren
- Ableitungen im Sachzusammenhang interpretieren (z. B. als Steigung) und Ableitungen berechnen (dabei Ableitungsregeln anwenden)
- Signifikante Punkte eines Graphen (Nullstellen, Extremstellen) berechnen, Graphen auf Monotonie untersuchen
- Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitung erkennen, diese begründen und Graphen als Ableitungsgraphen identifizieren
- Graphen auf Symmetrie untersuchen, speziell auch die ganzrationaler Funktionen

Typische Aufgabenteile für das Warm up:

- Lösen von linearen, quadratischen, Bruch-, Wurzel- und Potenzgleichungen
- Extrema quadratischer Funktionen mit und ohne Ableitung bestimmen
- Faktorisieren von Summen und Differenzen
- Aussagen treffen über die Parameter von Funktionen
- Ganzrationale Funktionen auf Symmetrie, Monotoniebereiche und Extrema untersuchen und ihre Graphen skizzieren
- bei trigonometrischen Funktionen Amplitude und Periode bestimmen und die Funktionen ableiten

Im Folgenden finden Sie Aufgaben, wie sie zu diesem Kapitel passend in einer mündlichen Abiturprüfung gestellt werden können.

1 Die Abbildung zeigt die Graphen einer ganzrationalen Funktion f und einer trigonometrischen Funktion g.



a) Ordnen Sie die Funktionen f und g den abgebildeten Graphen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

b) Geben Sie für einen der abgebildeten Graphen einen möglichen Funktionsterm an. Erklären Sie, wie Sie dabei vorgegangen sind.

c) Entscheiden Sie begründet, welcher der angegebenen Terme zum Graphen der trigonometrischen Funktion passt.

$f_1(x) = \sin(x)$ $\quad f_2(x) = \cos(x)$ $\quad f_3(x) = \sin(x + \pi)$ $\quad f_4(x) = \cos(x - \pi)$

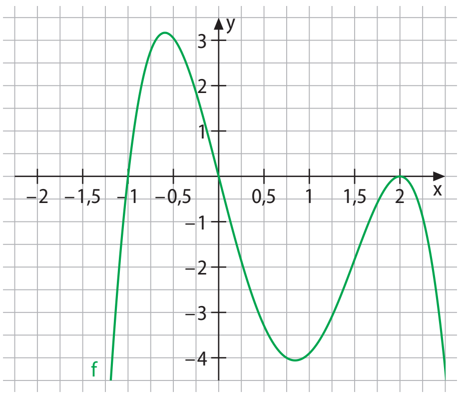
d) Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf des Produkts der beiden Funktionen f und g sowie den von dessen Ableitungsfunktion.

e) Leiten Sie die ganzrationale Funktion k mit $k(x) = x^3 \cdot (x^2 - 4)$ auf zwei verschiedene Arten ab. Geben Sie an, welche Ableitungsregeln Sie jeweils benutzt haben.

f) Erläutern Sie für eine der benutzten Ableitungsregeln, wie man sie plausibel machen oder herleiten kann.

g) Geben Sie möglichst viele Vorgehensweisen an, wie man die Nullstellen der ganzrationalen Funktion k (auch näherungsweise) bestimmen kann.

2 Gegeben ist der Ausschnitt des Graphen der Ableitungsfunktion f′ einer ganzrationalen Funktion f.



a) Wodurch unterscheiden sich die drei gegebenen Nullstellen? Worin äußert sich dies im Term von f′?

b) Stellen Sie unter Benutzung der gegebenen Nullstellen und des globalen Verlaufs des Graphen einen möglichen Term für f′ auf.

c) Erläutern Sie die Bedeutung der Nullstellen von f′ für den Graphen von f.

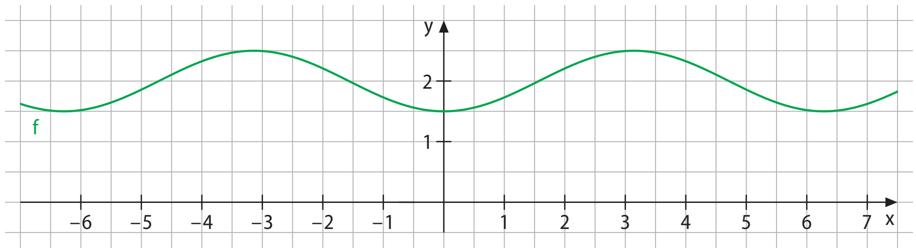
d) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f.

e) Skizzieren Sie den Graphen von f.

f) Welchen minimalen Grad hat f′, welchen f?

g) Stellen Sie einen möglichen Funktionsterm für f auf.

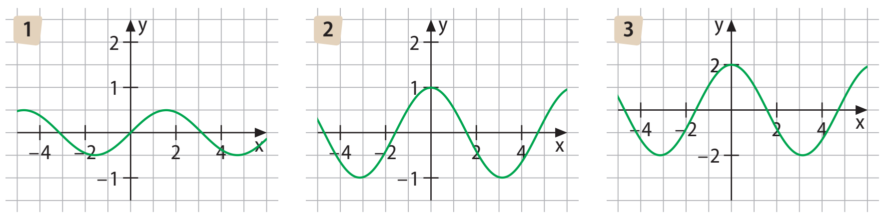
3 Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ und ihr Graph.



a) Machen Sie im Graphen die Amplitude und die Periode kenntlich.

b) Erläutern Sie, wie der Graph von f aus dem der Funktion g mit $g(x) = \sin(x)$ hervorgeht.

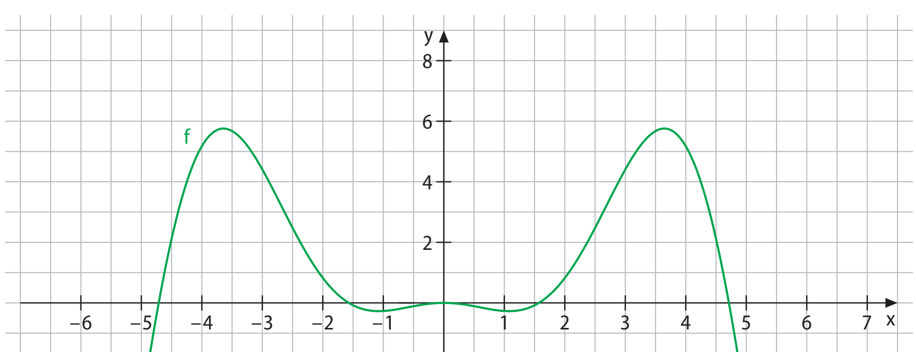
c) Eine der folgenden Abbildungen zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f′ von f.
Entscheiden Sie begründet, welcher der Graphen den der Ableitungsfunktion darstellt.



d) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Eine trigonometrische Funktion ist durch die Angabe der Koordinaten eines beliebigen Hochpunktes und eines beliebigen Tiefpunktes ihres Graphen eindeutig bestimmt.

e) Erläutern Sie, wie man die Sinusfunktion aus der trigonometrischen Beziehung
$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ erhält. Verwenden und erläutern Sie dabei auch die Begriffe „Einheitskreis“ und „Bogenmaß“.

Eine mögliche Erweiterung:



f) Der Funktionsterm von f wird leicht abgewandelt, so dass man $h(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ erhält. Der Graph von h ist für das Intervall $I =]-2\pi; 2\pi[$ oben abgebildet.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph achsensymmetrisch ist.

g) Skizzieren Sie im gleichen Koordinatensystem den Graphen der Ableitungsfunktion.

h) Leiten Sie h ab und vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis aus g).

Reflexion

Fragen, die im Laufe eines mündlichen Abiturs gestellt werden könnten	Hilfe
Beschreiben Sie, wie Sie aus dem Graphen einer Ableitungsfunktion den Graphen der Funktion rekonstruieren können.	S. 21/11
Was sagt die Ableitung an einer Stelle des Graphen einer Funktion aus?	S. 14/5
Beschreiben Sie Anwendungskontexte, in denen das Bestimmen der Ableitung eine Rolle spielt.	S. 41/18
Beschreiben Sie, wie man das Extremum einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades mit und ohne das Bestimmen einer Ableitung finden kann. Führen Sie beide Verfahren an einem konkreten Funktionsterm durch.	S. 10/2, 16/6
Beschreiben Sie an einem konkreten Beispiel, was man unter der Verkettung einer Funktion versteht.	S. 30
Führen Sie ein Beispiel für einen Funktionsterm an, den man mit der Produktregel ableiten kann, bei dem man die Produktregel aber auch umgehen könnte.	S. 26/4
Führen Sie ein Beispiel für einen Funktionsterm an, den man mit der Kettenregel ableiten kann, bei dem man die Kettenregel aber auch umgehen könnte.	S. 32/7, 33/8
Erläutern Sie an einem konkreten Funktionsterm, dass die Ableitung eines Produkts nicht gleich dem Produkt der Ableitungen der Faktoren ist.	S. 25
Machen Sie die Faktorregel für Ableitungen an einem konkreten Beispiel plausibel. Warum bleibt der Vorfaktor bei der Ableitung erhalten?	S. 19
Warum fällt das absolute Glied, also der Teil eines Terms, der mit keinem x verknüpft ist, beim Ableiten weg?	S. 19
Beschreiben Sie, wie man die Ableitung einer Funktion an einer Stelle ohne Ableitungsregeln ermitteln kann. Benutzen Sie dabei auch die Begriffe Differenzen und Differentialquotient sowie Sekanten- und Tangentensteigung. Inwiefern spielt der Grenzwert in diesem Kontext eine Rolle?	S. 14/5
Beschreiben Sie an einem selbstgewählten Beispiel, wie man Graphen ganzrationaler Funktionen auf Symmetrie untersuchen kann.	S. 14/4
Welche Arten von Symmetrie kennen Sie? Beschreiben Sie ein Kriterium, mit dem Sie eine beliebige Funktion anhand ihres Terms auf Symmetrie untersuchen können.	S. 14/4
Was versteht man unter einer ganzrationalen Funktion und wodurch unterscheidet sie sich von Potenzfunktionen?	S. 18
Wie lautet der Monotoniesatz für Funktionen? Gilt auch seine Umkehrung? Reflektieren Sie über die Umkehrbarkeit von Sätzen. Geben Sie Beispiele für umkehrbare und für nicht umkehrbare Sätze an.	S. 16/6
Nennen Sie die beiden hinreichenden Kriterien für Extremstellen. Wodurch unterscheiden Sie sich vom notwendigen Kriterium? Sind beide hinreichenden Kriterien gleich mächtige Werkzeuge, oder kann eines der beiden Kriterien mehr als das andere?	S. 16/6

1 Alles im Blick

In diesem Kapitel haben Sie gelernt, …
… Funktionsterme miteinander zu verknüpfen, diese zusammengesetzten Funktionen abzuleiten und zu untersuchen.

Im Detail haben Sie gelernt, …

Kap. 1.1

Die Summe und Differenz von Funktionen und die Summen-, Faktor- und Potenzregel

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… die *Regel für konstanten Faktor*, die *Potenzregel* sowie die Summenregel zum Ableiten von Funktionstermen anzuwenden. … die *Faktorregel* und die *Summenregel* anschaulich zu begründen. … *Graphen* von zusammengesetzten *Funktionen* zu untersuchen.	Wir haben Termbausteine additiv miteinander verknüpft und so aus Potenzfunktionen ganzrationale Funktionen entstehen lassen. Leitet man diese ab, kommen drei Regeln zur Anwendung: die Faktorregel, die Potenz- und die Summenregel. Diese Regeln kann man sich leicht plausibel machen: Zum Beispiel verändert der Vorfaktor die Steigung des Graphen, muss also in die Ableitung miteinfließen. Die Potenzregel kann man sich durch graphisches Differenzieren plausibel machen, weil man so leicht sieht, dass der Grad der Ableitungsfunktion um eins niedriger ist als der der Ausgangsfunktion. Anschließend haben wir ganzrationale Funktionen auf Nullstellen, Extrempunkte und Symmetrie untersucht sowie Tangentensteigungen an deren Graph konkret berechnet.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… Punkte mittels der Ableitung zu berechnen, bei denen die anliegende Tangente eine vorgegebene Steigung besitzt.	S. 20/6 – 8	S. 20/5
… graphisch zu differenzieren, d. h. den Graphen der Ableitungsfunktion aus den Tangentensteigungsdreiecken der Ausgangsfunktion entstehen lassen.	S. 21/12	S. 21/11
… ganzrationale Funktionen auf Symmetrie und Nullstellen sowie Monotonie und Extrema zu untersuchen.	S. 22/16, 19	S. 21/15, 22/18

Kap. 1.2

Produktregel

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… die *Produktregel* zum Ableiten von Funktionstermen zu verwenden. … *Graphen* von zusammengesetzten *Funktionen* (Produkt) zu untersuchen.	Wir haben Termbausteine multiplikativ miteinander verknüpft und uns anhand einfacher Beispiele klar gemacht, dass die Ableitung eines Produkts nicht gleich der Ableitung der einzelnen Faktoren ist. Anhand eines Rechtecksflächeninhalts und seiner Veränderung haben wir uns die Produktregel plausibel gemacht. Mit ihr können wir multiplikativ verknüpfte Terme ableiten. Als Anwendungsfeld für die Produktregel haben wir uns Extremwertprobleme angeschaut, bei denen das Produkt zweier Funktionen die Zielfunktion darstellt, deren Extremum (Minimum oder Maximum) zu berechnen ist. Hierzu muss als notwendiges Kriterium die erste Ableitung gleich null gesetzt werden; hierbei kommt die Produktregel zur Anwendung.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… einem Funktionsgraphen den Graph seiner Ableitung zuzuordnen.	S. 21/13	S. 22/17
… Extremwertprobleme zu berechnen, bei denen sich die Zielfunktion aus einem Produkt zweier Funktionen bzw. Funktionsterme zusammensetzt.	S. 28/17, 18	S. 28/16

Kap. 1.3

Verkettete Funktionen und die Kettenregel

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… die *Kettenregel* zum Ableiten von Funktionstermen, bei denen die innere Funktion eine lineare Funktion ist, zu verwenden. … *Graphen* von zusammengesetzten *Funktionen* (Verkettung mit linearer innerer Funktion) zu untersuchen. … *Funktionen* verketten und *Verkettungen* von *Funktionen* zu erkennen, falls die innere Funktion eine lineare Funktion ist.	Wir haben Termbausteine „ineinander geschachtelt" und so miteinander verkettet. E entsteht eine innere und eine äußere Funktion. Die zugehörige Ableitungsregel ist die Kettenregel. Wir haben sie uns anhand von Funktionen plausibel gemacht, bei denen die Anwendung einer neuen Ableitungsregel gar nicht zwingend notwendig ist (wie z. B. $f(x) = (x+2)^2$). Die Kettenregel kommt z. B. dann zur Anwendung, wenn unter der Wurzel ein (etwas umfangreicherer) Funktionsterm steht (z. B. $f(x) = \sqrt{2x+3}$). Auch wenn Summen potenziert werden (z. B. bei $f(x) = (x+1)^5$), ist die Anwendung der Kettenregel hilfreich.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… verkettete Funktionen als solche zu erkennen und innere sowie äußere Funktion zu definieren.	S. 32/1 – 4, 6	S. 32/5
… verkettete Funktionen abzuleiten.	S. 33/8, 9	S. 32/7
… wann die Kettenregel typischerweise zur Anwendung kommt.	S. 33/9	S. 33/10

Kap. 1.4

Trigonometrische Funktionen und ihre Ableitungen

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… trigonometrische Funktionen aus den trigonometrischen Beziehungen am Einheitskreis entstehen zu lassen und dabei das Bogenmaß mit dem Winkelmaß in Verbindung zu bringen. … trigonometrische Funktionen zu untersuchen und dabei Periode und Amplitude zu benennen sowie die Wirkung der Parameter hinsichtlich Verschiebungen und Streckungen einzuschätzen. … die Ableitung trigonometrischer Funktionen zu bestimmen, auch unter Zuhilfenahme der Kettenregel.	Wir haben als „Termbaustein" die trigonometrischen Funktionen hinzugenommen und sie z. B. mit Termbausteinen kombiniert, die zu ganzrationalen Funktionen gehören. Die trigonometrischen Funktionen haben wir aus den trigonometrischen Beziehungen am Einheitskreis gewonnen und dabei Gradmaß in Bogenmaß umzurechnen gelernt. Wir haben die Abhängigkeit von Amplitude und Periode von den Parametern trigonometrischer Funktionen betrachtet. Die Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion haben wir uns durch graphisches Ableiten plausibel gemacht, anschließend mittels der Kettenregel auf komplexere Funktionsterme erweitert. Als typische Anwendungen für trigonometrische Funktionen haben wir z. B. periodische Vorgänge wie Ebbe und Flut oder Blutdruckskurven angeschaut und mithilfe der Differentialrechnung signifikante Punkte berechnet.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… Gradmaß in Bogenmaß umzuwandeln und dies am Einheitskreis zu erklären.	S. 38/1, 3, 4	S. 38/2
… trigonometrische Funktionen (oft unter Verwendung der Kettenregel) abzuleiten und Ausgangstermen ihre Ableitungsterme zuzuordnen.	S. 39/9, 40/12	S. 39/8
… trigonometrische Funktionen in Sachzusammenhängen zu untersuchen.	S. 40/15, 16	S. 41/17 – 19

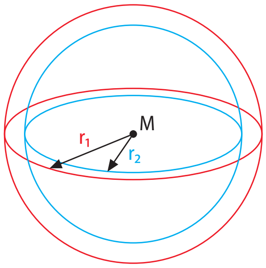
1 Leiten Sie die Funktionen ab.

a) $f(x) = \frac{4}{3}\pi \cdot x^3$ **b)** $f(r) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ **c)** $f(r) = 4\pi \cdot r^2$

2 Versuchen Sie, sich zu erinnern (bzw. recherchieren Sie): Wie lautet die Formel zur Berechnung des Volumens einer Kugel und wie die zur Berechnung ihrer Oberfläche?

Wir betrachten eine Kugel und beobachten die Änderung des Kugelvolumens. Dazu wählen wir zwei Radien: den Radius r_1 der Ausgangskugel **1** und den Radius r_2 einer kleineren Kugel **2**. Die zugehörigen Volumina lauten:

$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3$ und $V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3$.



Die Änderung des Kugelvolumens von Kugel **1** zu Kugel **2** kann man sich als Kugelhülle vorstellen, also als innen hohle Kugelschale mit der Wandstärke $(r_1 - r_2)$. Die mittlere Änderungsrate des Kugelvolumens entspricht dem Differenzenquotienten

$$\overline{V}(r) = \frac{V_1 - V_2}{r_1 - r_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3}{r_1 - r_2}.$$

3 **a)** Überprüfen Sie durch Ausmultiplizieren die Gültigkeit folgender Formel.
$(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) = (x^3 - y^3)$

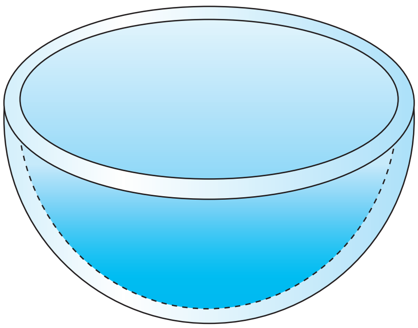
b) Vereinfachen Sie mithilfe der Formel den Differenzenquotienten $\overline{V}(r) = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3}{r_1 - r_2}$.

Zur Ermittlung der momentanen Änderungsrate beobachten wir den Differenzenquotienten, wenn r_2 gegen r_1 wandert (oder umgekehrt), und bilden den Grenzwert:

$$\lim_{r_2 \to r_1} \overline{V}(r) = \lim_{r_2 \to r_1} \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3}{r_1 - r_2}.$$

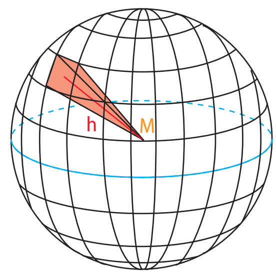
4 Ermitteln Sie den Grenzwert $\lim\limits_{r_2 \to r_1} \overline{V}(r)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Wir erhalten als Ergebnis: $V'_{Kugel}(r) = 4\pi r^2 = O_{Kugel}(r)$.
Das heißt: Als Ableitung des Kugelvolumens nach dem Radius erhält man die Kugeloberfläche. Oder anders ausgedrückt: Die Differenz zweier Kugelvolumina, deren zugehörige Radien sehr dicht beieinander liegen, kann als Kugeloberfläche interpretiert werden. Die Oberfläche einer Kugel entspricht also der momentanen Änderungsrate des Kugelvolumens.



Alternativ kann man den Zusammenhang zwischen Kugelvolumen und Kugeloberfläche auch wie folgt herleiten:

Eine Kugel kann man sich aus unendlich vielen, infinitesimalen (unendlich kleinen) Pyramiden zusammengesetzt vorstellen. Die Grundflächen dieser Pyramiden ergeben zusammen die Kugeloberfläche; die Höhen der Pyramiden sind jeweils gleich dem Kugelradius. Da das Pyramidenvolumen durch die Formel $V_P = \frac{1}{3}G \cdot h$ gegeben ist und hier $r = h$ ist, folgt: $V_P = \frac{1}{3}G \cdot r$.
Die Summe aller Pyramidengrundflächen nähert sich bei immer feinerer Unterteilung der Oberfläche der Kugel an, es gilt also: $V_P = \frac{1}{3}O_K \cdot r$. Wegen $V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ ergibt sich: $\frac{1}{3}O_K \cdot r = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.



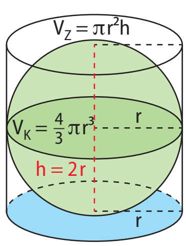
5 Erklären Sie anhand der Gleichung $\frac{1}{3}O_K \cdot r = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, dass die Oberfläche einer Kugel einem Grenzwert entspricht, und ermitteln Sie eine Formel für die Kugeloberfläche durch Umstellen der Gleichung.

Aus dem Dargestellten ergibt sich die Frage nach der Übertragbarkeit auf andere Fälle – einer Frage, die in der Mathematik immer wieder auftritt.

6 Überprüfen Sie, ob der Zusammenhang zwischen der Ableitung des Volumens und der Oberfläche auch für andere Körper wie Würfel, Quader, Pyramide und Kegel gilt.

Im Folgenden betrachten wir weitere Zusammenhänge geometrischer Überlegungen mit der Differentialrechnung.
Der **Satz des Archimedes über Kugel und Kreiszylinder** beschreibt den Zusammenhang zwischen Volumen und Oberfläche von Kugel und Kreiszylinder. Der Satz gilt als eines der großen Resultate der Mathematik. Er geht zurück auf Archimedes von Syrakus (etwa 287–212 v. Chr.) und dessen Werk *Über Kugel und Zylinder* zurück, in dem er mithilfe von Methoden arbeitete, die als Vorläufer der Methoden der modernen Integralrechnung angesehen werden können.
Der Satz lässt sich wie folgt angeben:

Für eine Kugel und einen Kreiszylinder, dessen Grundfläche einem größten Kugelkreis der Kugel und dessen Höhe dem Kugeldurchmesser entspricht, stehen die Oberflächeninhalte und die Volumina beider Körper jeweils in demselben Verhältnis. Dabei gilt: $\frac{O_{Zylinder}}{O_{Kugel}} = \frac{V_{Zylinder}}{V_{Kugel}}$.



7 Interpretieren Sie den von Archimedes gefundenen Satz, indem Sie die Formel nach $\frac{V_{Kugel}}{O_{Kugel}}$ umstellen und Volumen und Oberfläche einer Kugel vor dem Hintergrund der Differentialrechnung betrachten.

Im Folgenden betrachten wir den Zylinder. Ist ein Zylinder durch den Grundkreisradius r und die Höhe h gegeben, so gilt für das Volumen $V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h$ sowie für die Oberfläche $O = 2\pi \cdot r^2 \cdot h + 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot r \cdot (r + h)$.

8 Bilden Sie das Verhältnis $\frac{V_{Zylinder}}{O_{Zylinder}}$ und recherchieren Sie anschließend, was man unter dem **harmonischen Mittel** versteht. Stellen Sie dann einen Zusammenhang zwischen harmonischem Mittel einerseits und Volumen und Oberfläche eines Zylinders andererseits her.

Erweiterung der Differentialrechnung II:
Exponentialfunktion und Logarithmus

2

Einstieg

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit exponentiellem Wachstum. Zunächst werden wir es vom linearen Wachstum abgrenzen und seine Funktionsgleichung ermitteln. Wir lernen dabei die natürliche Exponentialfunktion kennen sowie die zugehörigen Exponentialgleichungen, für deren Lösung wir uns mit einem neuen Werkzeug vertraut machen.

Die natürliche Exponentialfunktion weist eine Besonderheit auf, die wir bei der mathematischen Modellierung von Realsituationen ausgiebig nutzen werden.

In einem **ersten Schritt** lernen wir die Euler'sche Zahl e und die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ kennen.

Am Ende des ersten Unterkapitels können Sie die Exponentialfunktion f mit $f(x) = b^x$ und die natürliche Exponentialfunktion g mit $g(x) = e^x$ ableiten sowie mit der Euler'schen Zahl e umgehen.

In einem **zweiten Schritt** betrachten wir die allgemeine Exponentialfunktion und die Wirkung von Parametern auf ihren Graphen.

Am Ende des zweiten Unterkapitels können Sie den Graphen die Terme von Exponentialfunktionen begründet zuordnen und umgekehrt.

In einem **dritten Schritt** lernen Sie, wie man Gleichungen löst, in denen der Term einer natürlichen Exponentialfunktion enthalten ist.

Am Ende des dritten Unterkapitels können Sie Exponentialgleichungen mit dem Logarithmus und auch graphisch lösen.

In einem **vierten Schritt** wenden wir uns den vielfältigen Anwendungen der natürlichen Exponentialfunktion zu.

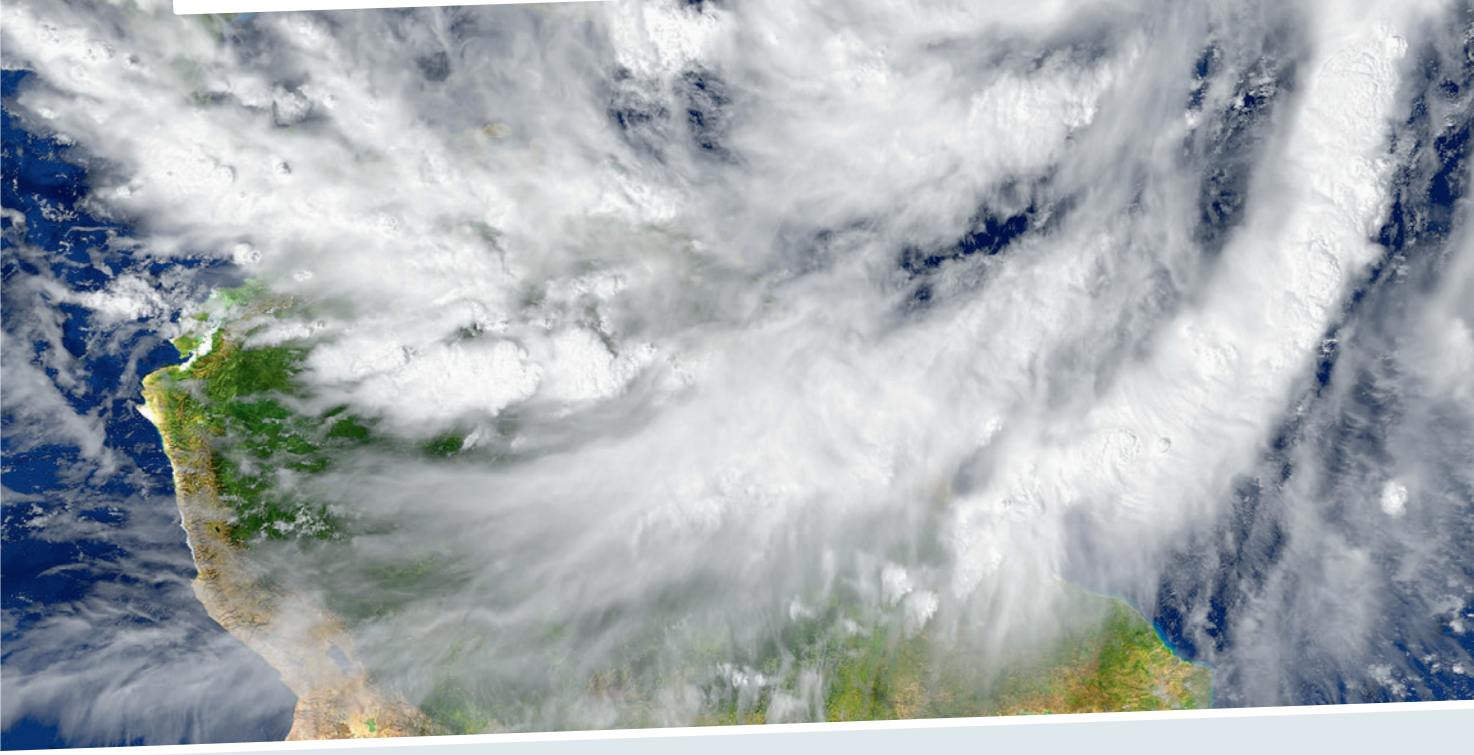
Am Ende des vierten Unterkapitels können Sie die Exponentialfunktion und ihre Ableitung nutzen, um Realsituationen zu modellieren.

„Da gibt es eine schöne Geschichte: In einem Teich wächst eine Seerose, deren Blättermenge sich jeden Tag verdoppelt. Drei Tage vor dem Ende ist erst ein Achtel des Teiches bedeckt. Der Frosch ist nicht beunruhigt: ‚Ach, es ist noch Zeit, sieben Achtel sind noch frei.'

Am nächsten Tag ist ein Viertel bedeckt, am zweiten Tag die Hälfte: ‚Ach, die Hälfte haben wir noch'. Aber am Tag darauf ist Feierabend.

Dieses Beispiel zeigt die Dramatik des exponentiellen Wachstums. Es soll sich keiner Illusionen machen, wir hätten noch viel Zeit."

Friedhelm Farthmann, ehemaliger Landesminister in Nordrhein-Westfalen, in seiner Dankesrede anlässlich der Entgegennahme eines Umweltpreises (2001)



Ausblick

Bei Exponentialfunktionen ist die Änderungsrate proportional zum Bestand, d. h. die Änderungsrate wird umso größer, je größer der Bestand wird. Dies ist das zentrale Merkmal von Exponentialfunktionen; sie schlägt sich sowohl in den Eigenschaften des Graphen als auch in Anwendungen nieder. Exponentielle Wachstumsvorgänge entwickeln eine Dynamik, wie sie durch keine anderen mathematischen Modelle beschrieben werden kann. Bereits kleine Anfangswerte führen oft schon nach kurzer Zeit zu einer explosionsartigen Entwicklung. Handelt es sich dabei um Vorgänge in Natur und Umwelt, so ist es wichtig, diese Wachstumsart rechtzeitig zu erkennen, um eventuell geeignete Maßnahmen ergreifen zu können.

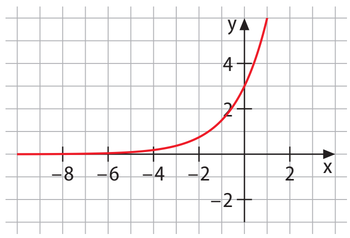
Ich kann schon …

Vorwissen 1

Die allgemeine Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ skizzieren und die Wirkung der Parameter a und b beschreiben

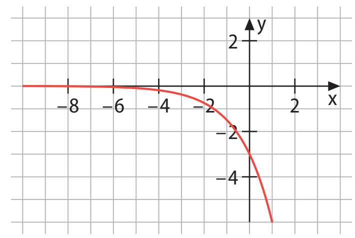
Eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ $(b > 0;\ b \neq 1)$ nennt man **Exponentialfunktion** zur Basis b mit Vorfaktor a. Ihr Schnittpunkt mit der y-Achse ist immer $(0\,|\,a)$.
Wir unterscheiden die Fälle $a > 0$ und $a < 0$ sowie $0 < b < 1$ und $b > 1$.

$a > 0$ $(b = 2)$



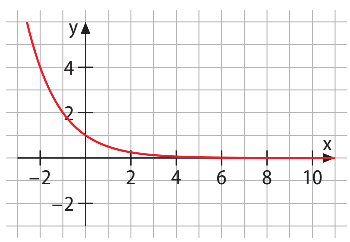
Für $x \to -\infty$:
x-Achse als Asymptote, Annäherung von oben
Für $x \to \infty$ geht $f(x) \to \infty$.

$a < 0$ $(b = 2)$



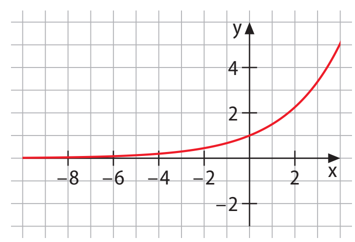
Für $x \to -\infty$:
x-Achse als Asymptote, Annäherung von unten
Für $x \to \infty$ geht $f(x) \to -\infty$.

$0 < b < 1$ $(a = 1)$



Für $x \to \infty$:
x-Achse als Asymptote, Annäherung von oben
Für $x \to -\infty$ geht $f(x) \to \infty$.

$b > 1$ $(a = 1)$



Für $x \to -\infty$:
x-Achse als Asymptote, Annäherung von oben
Für $x \to \infty$ geht $f(x) \to \infty$.

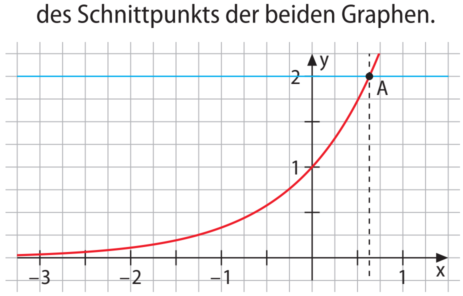
Vorwissen 2

Allgemeine Exponentialgleichungen graphisch und rechnerisch lösen

Eine **Exponentialgleichung** der Form $a \cdot b^x = c$ kann man graphisch und rechnerisch lösen.
Beispiel: Löse folgende Exponentialgleichung: $2 \cdot 3^x = 4 \Leftrightarrow 3^x = 2$.

Graphische Lösung

- Man interpretiert sowohl die linke als auch die rechte Seite der Gleichung als Funktion und zeichnet deren Graphen.
- Zu ermitteln ist dann die x-Koordinate des Schnittpunkts der beiden Graphen.



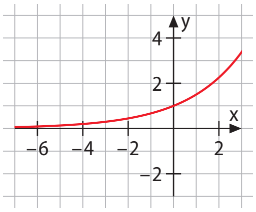
Rechnerische Lösung

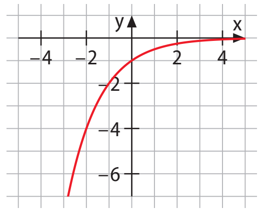
- Die Gleichung $b^x = d$ wird durch **Logarithmieren** gelöst.
- Der **Logarithmus der Zahl d zur Basis b** ist diejenige Zahl x, für die gilt: $b^x = d$.
  Man schreibt: $\mathbf{\log_b(d) = x\ (b, d > 0)}$.
- Zu lösende Gleichung: $3^x = 2$
  Abschätzen liefert:
  x muss kleiner als 1 sein, da $3^1 = 3 > 2$.
- Der Taschenrechner liefert $\log_3(2) = 0{,}63$.

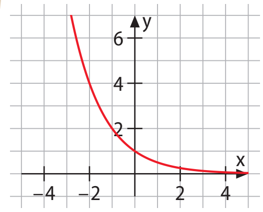
Aufgaben 1

1 Ordnen Sie den Graphen jeweils begründet einen passenden Funktionsterm zu.

A $f(x) = 0{,}5^x$ **B** $f(x) = 1{,}5^x$ **C** $f(x) = -0{,}5^x$

1


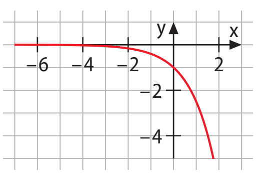
2


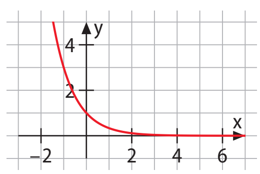
3


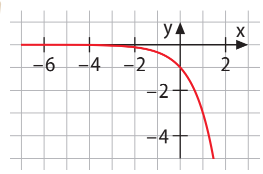
Lösung: *Bei* **A** *gilt für die Basis $0 < b < 1$, es muss sich also um eine fallende Funktion handeln: Graph* **3**. *Das negative Vorzeichen bei* **C** *bewirkt, dass der Graph an der x-Achse gespiegelt ist: Graph* **2**. *Bei* **B** *gilt für die Basis $b > 1$, es handelt sich also um einen steigenden Graphen: Graph* **1**.

1.1 Ordnen Sie die Graphen jeweils begründet einem passenden Funktionsterm zu.

A $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **B** $f(x) = -\left(\frac{5}{2}\right)^x$ **C** $f(x) = -3^x$

1


2


3


1.2 Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen, ohne eine Wertetabelle anzulegen.

a) $f(x) = -2^x$ **b)** $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot 0{,}5^x$ **c)** $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^x$

1.3 Welcher der folgenden Funktionsterme könnte die Größe (in cm) eines Hundewelpen in den ersten Monaten nach der Geburt darstellen? Begründen Sie. Welche Realsituationen könnten für die anderen Terme in Frage kommen?

a) $f(x) = -2^x$ **b)** $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot 0{,}5^x$ **c)** $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^x$

Aufgaben 2

2 Lösen Sie folgende Gleichungen: **a)** $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = x$ **b)** $2x \cdot 3^{x+1} = \frac{1}{2}$.

Lösung:

a) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$ *Exponentenvergleich liefert: $x = -3$.*

b) *rechnerisch:* $2^x \cdot 3^{x+1} = 2^x \cdot 3 \cdot 3^x = 3 \cdot 6^x = \frac{1}{2}$

$6^x = \frac{1}{6} = 6^{-1} \quad \Rightarrow \quad x = -1$

graphisch: $3 \cdot 6^x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -1$

2.1 Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $\log_5(125) = x$ **b)** $\log_7(\sqrt{343}) = x$ **c)** $\log_8(x) = \frac{1}{3}$

d) $\log_x(512) = 3$ **e)** $\log_3(3^5) = x$ **f)** $\log_{\sqrt{3}}(27) = x$

2.2 Lösen Sie folgende Gleichungen.

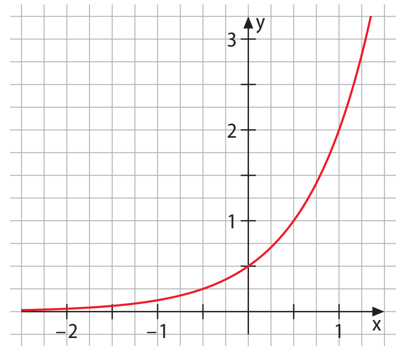
a) $3 \cdot 2^{x+1} - 48 = 0$ **b)** $5^{2x} - 4 \cdot 5^x = 0$ **c)** $3^{2x} - 3^x = 6$ **d)** $3^{x+2} - 4 \cdot 3^x = 10$

e) $3^x \cdot 2^{x+1} = \frac{1}{3}$ **f)** $7^{x-3} - 49^x = 0$ **g)** $32 \cdot 3^x = 6^x$ **h)** $2^{3x} - 0{,}125 = 2 \cdot 8^x$

Ich kann schon …

Vorwissen 3

Den Term einer allgemeinen Exponentialfunktion anhand gegebener Punkte oder Eigenschaften bestimmen



Da die die allgemeine Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ $(b > 0, b \neq 1)$ zwei Parameter a und b enthält, benötigt man zwei Eigenschaften des Graphen, um a und b zu bestimmen.
Diese beiden Eigenschaften können auch zwei konkrete Punkte, z. B. $P(1|2)$ und $Q(2|8)$, sein.
Diese beiden Punkte setzt man jeweils in $f(x) = a \cdot b^x$ ein und erhält zwei Gleichungen, mit deren Hilfe man die beiden Unbekannten a und b ermitteln kann:

$2 = a \cdot b^1 \Rightarrow a = \frac{2}{b}$ $\quad$ $8 = a \cdot b^2 \Rightarrow a = \frac{8}{b^2}$

$\Rightarrow \frac{2}{b} = \frac{8}{b^2} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot 4^x$

Vorwissen 4

Funktionen auf Monotonie und Extrempunkte untersuchen

Mit anhand ihrer Eigenschaften ermittelten Funktionstermen kann man anwendungsbezogene Fragestellungen beantworten. Dabei geht man schrittweise vor.
Beispiel: Eine Tierpopulation entwickelt sich wie folgt:

Zeit in Jahren	0	1	2	3	4	5
Anzahl	90	170	330	650	1250	2400

Es soll der für eine Prognose der weiteren Entwicklung benötigte Funktionsterm und die Größe der Tierpopulation nach 10 Jahren bestimmt werden.

1 Analyse der Daten, um den zugrunde liegenden Funktionstyp zu finden.
Die Daten lassen ein exponentielles Wachstum vermuten, da der absolute Zuwachs nicht konstant ist. Deshalb werden die Daten auf (annähernde) Quotientengleichheit geprüft:
$\frac{170}{90} \approx 1{,}89$; $\frac{330}{170} \approx 1{,}94$; $\frac{650}{330} \approx 1{,}97$; $\frac{1250}{650} \approx 1{,}92$; …
Da die Werte allesamt nahe an 1,9 liegen, darf ein exponentielles Wachstum mit $f(x) = a \cdot b^x$ angenommen werden; x ist dabei die Zeit in Jahren.

2 Für die Bestimmung der beiden unbekannten Parameter a und b gibt es zwei Möglichkeiten:
1. Möglichkeit: Anfangswert $f(0) = 90$ nehmen und einen weiteren Punkt, z. B. $(3|650)$.
Es folgt: $90 = a \cdot b^0 \Rightarrow a = 90$
$650 = a \cdot b^3 \Rightarrow b^3 = \frac{650}{90} = 7{,}2 \Rightarrow b = \sqrt[3]{7{,}2} \approx 1{,}93.$
Damit lautet der Funktionsterm der gesuchten Exponentialfunktion: $f(x) = 90 \cdot 1{,}93^x$.
2. Möglichkeit (näherungsweise): Anfangswert $f(0) = 90$ und vorher ermittelter Quotient 1,9 liefern näherungsweise $f(x) = 90 \cdot 1{,}9^x$.

3 Mit $x = 10$ ergibt der gefundene Funktionsterm:
$f(10) = 90 \cdot 1{,}93^{10} \approx 64\,538$
Nach 10 Jahren besteht die Population aus etwa 64 538 Tieren.

Aufgaben 3

3 Bestimmen Sie eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$, deren Graph durch die Punkte $P(0|2)$ und $Q(1|6)$ verläuft.

Lösung: *Einsetzen der Koordinaten der Punkte in die Funktionsgleichung liefert:*

$P(0|2)$: $2 = a \cdot b^0 \Rightarrow 2 = a \cdot 1 \Rightarrow a = 2$

$Q(1|6)$: $6 = a \cdot b^1$ *Mit* $a = 2$ *folgt* $b = 3$.

Der Funktionsterm lautet somit $f(x) = 2 \cdot 3^x$.

3.1 Bestimmen Sie jeweils eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$, deren Graph durch die angegebenen Punkte P und Q verläuft.

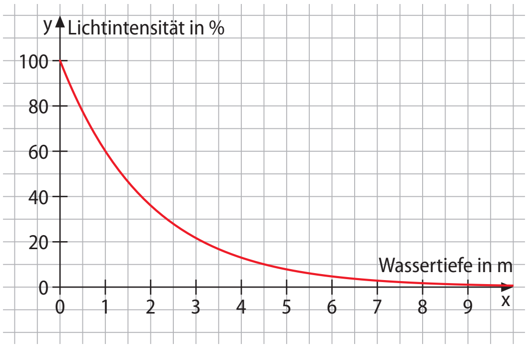
a) $P(-1|1{,}5)$, $Q(3|24)$ **b)** $P(-2|0{,}\overline{3})$, $Q(2|27)$

c) $P(-3|-0{,}5)$, $Q(1|-8)$ **d)** $P(-4|4)$, $Q(-1|0{,}5)$

3.2 Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ geht durch die Punkte $P\left(0\middle|\frac{2}{3}\right)$ und $Q\left(1\middle|\frac{2}{9}\right)$. Geht es auch durch den Punkt $R\left(2\middle|\frac{2}{81}\right)$?

Aufgaben 4

4 Die Intensität des Lichts in einem See nimmt mit steigender Wassertiefe ab. An der Wasseroberfläche beträgt die Lichtintensität 100 %. Pro Meter Tiefe wird das Licht jeweils um 40 % schwächer.
Geben Sie einen Funktionsterm an, der die Lichtintensität in Abhängigkeit von der Wassertiefe beschreibt, und zeichnen Sie den zugehörigen Funktionsgraphen.



Lösung: *In 1 m Tiefe beträgt die Lichtintensität noch* $60\,\% = 0{,}6$. *In 2 m Tiefe ist die Lichtintensität auf* $0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36 = 36\,\%$ *gesunken. Dies ergibt für die Lichtintensität I die Funktionsgleichung* $I(x) = 0{,}6^x$ *(x ist die Wassertiefe in m).*

4.1 **a)** Eine Kolonie von 1000 Bakterien verdoppelt sich unter Laborbedingungen jeweils in 36 Stunden. In welcher Zeit verzehnfacht sie sich?

b) Die Kolonie von 1000 Bakterien wächst zunächst 9 Tage lang unter den Laborbedingungen aus Teilaufgabe a). Danach werden die Bedingungen so verändert, dass sich die Anzahl der Bakterien täglich halbiert. Nach wie vielen Tagen (von Anfang an gerechnet) ist die ursprüngliche Anzahl von 1000 Bakterien wieder erreicht?

4.2 Radioaktive Stoffe senden Strahlen aus und zerfallen dabei. Die Masse eines radioaktiven Elements nimmt exponentiell in Abhängigkeit von der Zeit ab.
1986 wurden bei einem Reaktorunfall in Tschernobyl unter anderem radioaktives Jod 131 und Caesium 137 freigesetzt.

a) Die Masse des radioaktiven Jods 131 nimmt pro Tag um 8 % ab. Wie viel Milligramm sind nach 10 Tagen noch vorhanden, wenn es ursprünglich 100 mg waren?

b) Caesium 137 hat eine Halbwertszeit von 30 Jahren. Welcher Anteil (in Prozent) der anfangs vorhandenen Menge Caesium ist nach 13 Jahren noch vorhanden?

2.1 Die Euler'sche Zahl e und die natürliche Exponentialfunktion

Entdecken

1 Petaflop = 10^{15} (1 Billiarde) Rechenoperationen pro Sekunde

Forscher haben berechnet, wie viel Rechenleistung bei den größten KI-Projekten (KI: Künstliche Intelligenz) der vergangenen Jahre eingesetzt wurde. In den Jahren 2012 bis 2017 hat sich eine Steigerung um den Faktor 300 000 ergeben. Das bedeutet, dass sich die Rechenleistung – gemessen in Petaflops – alle dreieinhalb Monate verdoppelt.

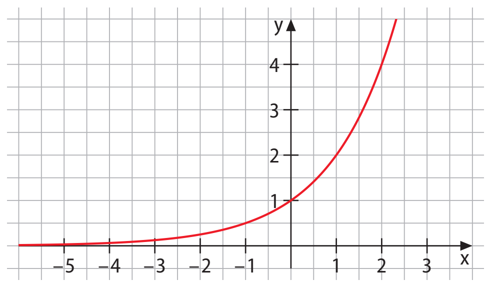
- Erstellen Sie einen Graphen, der die Zunahme der Rechenleistung in den Jahren 2012 bis 2017 verdeutlicht. Die Rechenleistung im Jahr 2012 lag bei 0,01 Petaflops.

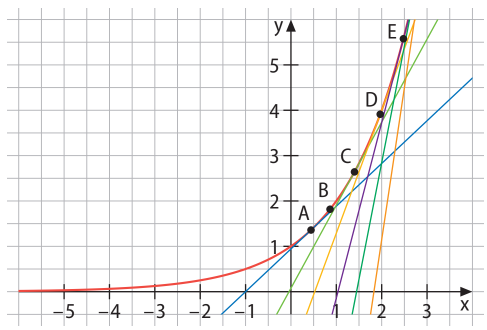
Verstehen

Wenn sich ein Bestand pro Zeiteinheit verdoppelt, handelt es sich um keine konstante Zuwachsrate, sondern um eine, die vom jeweiligen Bestand abhängig ist. Ein solches Wachstum nennt man **exponentielles Wachstum**. Der Bestand wächst in derselben Zeitspanne immer um denselben Faktor b (bei einer Verdoppelung um den Faktor 2). Es ergibt sich der abgebildete Graph, der zum Funktionsterm $f(x) = a \cdot b^x$ gehört.

a: Anfangsbestand (zum Zeitpunkt $t = 0$)

Oft ist die momentane Zuwachsrate von Interesse. Gesucht ist also die Ableitung.
Da wir noch keine Regel kennen, um eine Exponentialfunktion abzuleiten, betrachten wir die Tangentensteigungen. Diese werden mit wachsendem x immer größer; trägt man sie im Koordinatensystem auf, sieht der entstehende Graph wieder wie eine Exponentialfunktion aus, im Vergleich zur Ausgangsfunktion leicht gestreckt oder gestaucht.



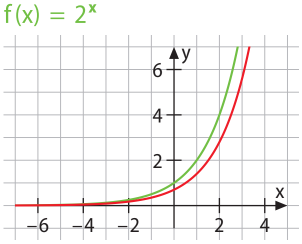


Merke

Die Ableitung der **Exponentialfunktion** f mit $\mathbf{f(x) = b^x}$ $(b > 0)$ ist wieder eine Exponentialfunktion, deren Graph in y-Richtung gestreckt oder gestaucht, mitunter auch an der x-Achse gespiegelt ist. Es gilt also: $\mathbf{f'(x) = k \cdot b^x\ (k \neq 0)}$. Dabei ist k ein konstanter Streckfaktor, der nur von b abhängt.

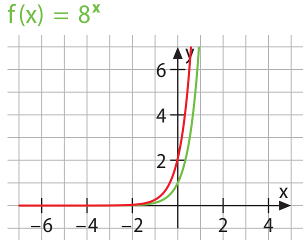
Für unterschiedliche Werte von b und k erhält man etwa folgende Funktionsgraphen:

$f(x) = 2^x$



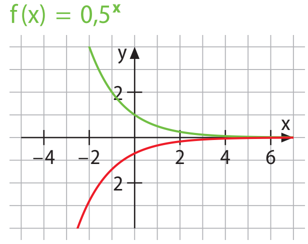
$k = 0{,}7$

$f(x) = 8^x$



$k = 2{,}08$

$f(x) = 0{,}5^x$



$k = -0{,}69$

h	$\frac{5^h - 1}{h}$
−0,1	1,49
0,1	1,746
−0,01	1,6
0,01	1,62
−0,001	1,61
0,001	1,61

Die Frage ist nun: Wie lässt sich k ermitteln?
An der Stelle 0 gilt: $f'(0) = k \cdot b^0 = k$. Der Streckfaktor k ist also die Ableitung an der Stelle 0, er gibt die Steigung von f im Schnittpunkt mit der y-Achse an: $f(x) = b^x \Rightarrow f'(x) = f'(0) \cdot b^x$.
Nun kann man den Differenzenquotienten $\frac{b^x - b^0}{h} = \frac{b^h - 1}{h}$ zu dem Schnittpunkt mit der y-Achse $(0|1)$ und zum Punkt $(h|b^h)$ für $h \to 0$ untersuchen. Dies sieht für die Funktion f mit $f(x) = 5^x$ wie in der Tabelle aus. Offensichtlich streben die Werte des Differenzenquotienten für $h \to 0$ gegen 1,61; für $f(x) = 5^x$ gilt also: $f'(x) = f'(0) \cdot 5^x = 1{,}61 \cdot 5^x$.

Es stellt sich nun folgende Frage:
Gibt es eine Basis b, für die der Faktor $k = 1$ ist, für die also gilt: $f(x) = f'(x)$?

Basis b	2	3	4	10	…
f′(0) = k	0,69	1,1	1,39	2,3	…

Wir versuchen, uns dem Ergebnis experimentell anzunähern, indem wir verschiedene Basen wählen und schauen, wie weit k von 1 entfernt ist.

Gemäß der oben angelegten Tabelle liegt die Vermutung nahe, dass diese Basis, für die $k = 1$ ist, zwischen 2 und 3 liegt. Wir probieren also Basen zwischen 2 und 3 aus (siehe Tabelle).

Basis b	2,6	2,7	2,8	2,9	…
f′(0) = k	0,955	0,993	1,029	1,065	…

Die gesuchte Basis muss also zwischen 2,7 und 2,8 liegen. Wir probieren weiter aus:

Basis b	2,71	2,72	2,718	2,719	2,7182	2,7183
f′(0) = k	0,997	1,0006	0,999897	1,000265	0,99997	1,000007

Durch fortgesetztes Einschachteln der gesuchten Zahl erhält man schließlich:
Für $e = 2{,}718281\ldots$ gilt: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$. Die Zahl e nennt man **Euler'sche Zahl**.

Leonhard Euler (1707–1783)

Merke

Die Exponentialfunktion f mit $\mathbf{f(x) = e^x}$ mit der Basis $\mathbf{e = 2{,}71828\ldots}$, der so genannten **Euler'schen Zahl**, heißt **natürliche Exponentialfunktion** oder **e-Funktion**. Ihre besondere Eigenschaft ist, dass sie mit ihrer Ableitung übereinstimmt: $\mathbf{f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x}$.

Kann man k auch ohne den Grenzwertprozess bestimmen? Hierbei hilft der Logarithmus.
Den Logarithmus zur Basis e nennt man **natürlichen Logarithmus ln** (logarithmus naturalis).
Es gilt: $\ln(e) = 1$.

Zur Erinnerung: *Der Logarithmus $\log_n(m)$ ist diejenige Zahl x, für die gilt: $n^x = m$. Beispiel: $\log_2(16) = 4$, weil $2^4 = 16$ ist.*

Wir überführen zunächst die allgemeine in eine natürliche Exponentialfunktion:
$b = e^r \Leftrightarrow \ln(b) = \ln(e^r)$. Mit den Rechenregeln für Logarithmen kann man die rechte Seite wie folgt schreiben: $\ln(b) = r \cdot \ln(e) = r$.
Mit $\ln(e) = 1$ und $r = \ln(b)$ folgt: $b = e^r = e^{\ln(b)}$ und damit $b^x = (e^{\ln(b)})^x = e^{x \cdot \ln(b)}$.

Wir leiten diesen Ausdruck mit der Kettenregel ab (innere Funktion: $x \cdot \ln(b)$; äußere Funktion: e^u): $f'(x) = \ln(b) \cdot e^{x \cdot \ln(b)} = \ln(b) \cdot b^x$. Somit gilt:

Merke

Für die allgemeine Exponentialfunktion f mit $\mathbf{f(x) = b^x}$, $b \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ gilt: $\mathbf{f'(x) = \ln(b) \cdot b^x}$.

Aufgaben

Beispiel
Basis e

1 Schreiben Sie den Funktionsterm von $f(x) = 2^x$ in einen mit Basis e um.
Lösung: *Mithilfe der Beziehung $x = e^{\ln(x)}$ und der Potenzgesetze lässt sich eine Exponentialfunktion a^x mit Basis a in eine mit Basis e umwandeln: $2 = e^{\ln(2)}$ und $2^x = (e^{\ln(2)})^x = e^{\ln(2)\cdot x}$.*

2 Schreiben Sie die jeweiligen Funktionsterme mit der Basis e.
a) $f(x) = 3^x$ **b)** $f(x) = 0{,}3^x$ **c)** $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **d)** $f(x) = (\sqrt{5})^x$

3 Leiten Sie mit der Kettenregel ab, nachdem Sie die jeweiligen Funktionsterme in solche mit der Basis e umgeschrieben haben.
a) $f(x) = 10^x$ **b)** $f(x) = 2{,}71^x$ **c)** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **d)** $f(x) = \frac{1}{7^{-x}}$

Beispiel
Ableitung

4 Leiten Sie die Funktion f mit $f(x) = 2^x$ ab, ohne den Funktionsterm vorher explizit mit der Basis e geschrieben zu haben.
Lösung: *Da die Ableitung von $f(x) = a^x$ die Funktion $f'(x) = \ln(a)\cdot a^x$ ist, ist die Ableitung von $f(x) = 2^x$ die Funktion $f'(x) = \ln(2)\cdot 2^x \approx 0{,}69\cdot 2^x$.*

5 Bestimmen Sie zur Funktion f die Ableitungsfunktion. Vereinfachen Sie das Ergebnis gegebenenfalls.
a) $f(x) = 3^x$ **b)** $f(x) = 0{,}3^x$ **c)** $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **d)** $f(x) = e^x$
e) $f(x) = 2^x + 2$ **f)** $f(x) = e^{x+2}$ **g)** $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ **h)** $f(x) = -e^{-x}$
i) $f(x) = x\cdot e^x$ **j)** $f(x) = (x+e^x)^2$ **k)** $f(x) = \sqrt{e^x}$ **l)** $f(x) = e^{\sqrt{x}}, x > 0$

6 Wie groß ist die Steigung der Funktion an der jeweils angegebenen Stelle x_0?
a) $f(x) = 2^x;\ x_0 = 2$ **b)** $f(x) = 5^x;\ x_0 = 1$ **c)** $f(x) = e^x;\ x_0 = 0$ **d)** $f(x) = e^{4x};\ x_0 = e$

7 **a)** Berechnen Sie den Wert der ersten Ableitung an der Stelle x_0.
1 $f(x) = 2{,}5^x;\ x_0 = 0{,}5$ **2** $f(x) = 0{,}25^x;\ x_0 = 2{,}5$ **3** $f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{e}\right)^x;\ x_0 = 0$
b) Welche Bedeutung hat der Wert f'(0) für den Graphen der Funktion f?

8 Geben Sie zur Funktion f eine Stammfunktion F an (zur Erinnerung: $F'(x) = f(x)$).
a) $f(x) = 4^x$ **b)** $f(x) = 5^x + 5$ **c)** $f(x) = 3^{x+1}$ **d)** $f(x) = e^{x+1}$

9 Berechnen Sie.
a) $e^{\ln(4)} - e^{\ln(2)}$ **b)** $e^{4-\ln(2)}$ **c)** $\frac{e^{\ln(e)}}{(\ln(e))^e}$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt{(\ln(e))^5}}$

Nachgefragt

- Ein Mitschüler schreibt Ihnen eine Nachricht: „Was ist e?"
  Welche knappe, aber möglichst gute Antwort würden Sie ihm geben?
- Beschreiben Sie, was das Besondere der Zahl e ist.
- Beschreiben Sie den Prozess, wie man herausfinden kann, dass die Ableitung der e-Funktion wieder die e-Funktion ist.
- Erklären Sie, wie man eine Exponentialfunktion mit allgemeiner Basis in eine mit Basis e umwandeln kann, und stellen Sie dar, warum dies eine zielführende Umformung ist.

10 Ordnen Sie jeder Funktion ihre jeweilige Ableitung zu. Ergänzen Sie diejenigen Funktionen bzw. Ableitungen, die keinen Partner haben.

1 $f(x) = 2^{x+1}$ **2** $f(x) = 2^{x+3}$ **3** $f(x) = x + 2^x$ **4** $f(x) = x \cdot 2^x$ **5** $f(x) = \sqrt{2^x}$

A $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^{\frac{x}{2}-1}$ **B** $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x + 1$ **C** $f'(x) = 2 \cdot \ln(2) \cdot 2^x$

D $f'(x) = 8 \cdot \ln(2) \cdot 2^x$ **E** $f'(x) = (\ln(2) \cdot x + 1) \cdot 2^x$

11 Bestimmen Sie die Extremstelle der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x$.

Lösung: *Mit der Produktregel erhält man: $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1 + x) \cdot e^x$. Das notwendige Kriterium $f'(x) = (1 + x) \cdot e^x = 0$ liefert $x = -1$. Als hinreichendes Kriterium kann man das Vorzeichenkriterium nehmen und in der Umgebung um $x = -1$ überprüfen: $f'(-1{,}5) = -0{,}11$ und $f'(0) = 1$. Es liegt also ein Vorzeichenwechsel von – nach + vor und damit ein Minimum.*

Beispiel
Extremstellen

12 Find the extrema of the following functions and determine for each the extremum type.

a) $f(x) = (x + 1) \cdot e^x$ **b)** $f(x) = x^2 \cdot e^x$ **c)** $f(x) = x \cdot e^{-x}$ **d)** $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

13 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 4^x$ an der Stelle $x = 2$.

Lösung: *Die Ableitungsfunktion lautet $f'(x) = \ln(4) \cdot 4^x$. An der Stelle $x = 2$ gilt: $f'(2) = \ln(4) \cdot 4^2 \approx 1{,}38 \cdot 16 = 22{,}18$. Tangentengleichung: $y = m \cdot x + c$; $m = f'(2) \approx 22{,}18$*
Mit $x = 2$: $4^2 = 22{,}18 \cdot 2 + c \Rightarrow c = 16 - 44{,}36 = -28{,}36 \Rightarrow y = 22{,}18 \cdot x - 28{,}36$

Beispiel
Tangentengleichung

14 **1** $f(x) = x \cdot e^x$ **2** $f(x) = x^2 \cdot e^x$ **3** $f(x) = x \cdot e^{-x}$ **4** $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an den Graphen von f an der Stelle $x = 3$.
b) Ermitteln Sie mithilfe der Ableitung f′ das Monotonieverhalten und Extremstellen.

15 **a)** Bilden Sie jeweils die erste und die zweite Ableitung der beiden Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})$ und g mit $g(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})$. Was fällt Ihnen auf?
b) Zeichnen Sie die Graphen beider Funktionen in ein Koordinatensystem. An welchen Funktionsgraphen erinnert Sie der Graph von f? Zeichnen Sie ihn ebenfalls ein.
c) Bilden Sie die Summe der beiden Funktionen f und g. Was stellen Sie fest?
d) Bilden Sie die Differenz $g^2(x) - f^2(x)$. Was stellen Sie fest?
e) Recherchieren Sie, was sich hinter den beiden hyperbolischen Funktionen sinh (x) und cosh (x) verbirgt, und was man unter einer „Katenoide“ versteht.

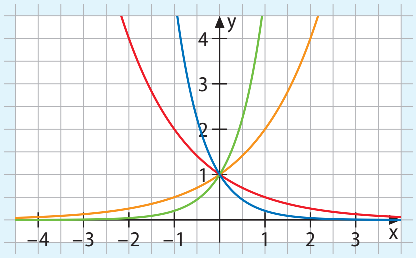
Nachgefragt

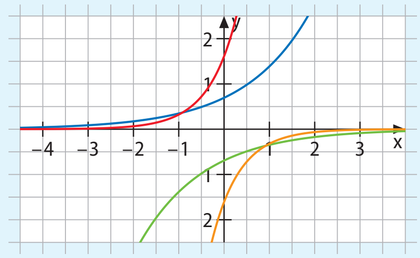
- e ist eine irrationale Zahl. Zudem ist sie eine transzendente Zahl. Recherchieren Sie, was dies bedeutet und welche anderen transzendenten Zahlen es noch gibt.
- Geben Sie eine Funktion an, bei der die Ableitung an jeder Stelle viermal (sechsmal, zehnmal) so groß ist wie der Funktionswert an der entsprechenden Stelle.
- Begründen Sie: Die zweite Ableitung einer Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ ist wieder eine Exponentialfunktion.
- Beschreiben Sie die Bedeutung der Zahl e als Basis von Exponentialfunktionen.
- Wie sieht die 1000. Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 2e^x$, der Funktion g mit $g(x) = e^{2x}$ und der Funktion h mit $h(x) = e^{-2x}$ aus? Begründen Sie.

2.2 Graphen von Exponentialfunktionen

Entdecken

Links sind Graphen verschiedener Exponentialfunktionen dargestellt sowie die zugehörigen Funktionsterme, zudem rechts die Graphen der Ableitungsfunktionen.





1 $f(x) = 2^x$ **2** $f(x) = 5^x$ **3** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **4** $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

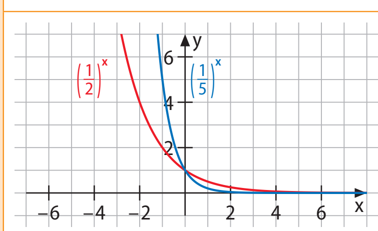
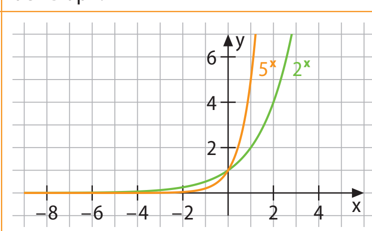
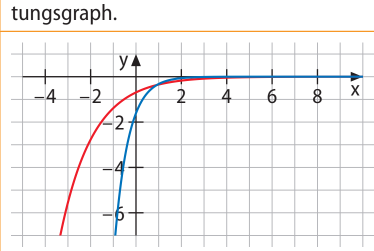
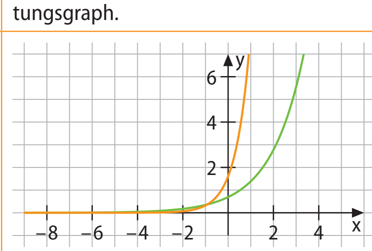
- Ordnen Sie die Funktionsgraphen ihren Termen sowie ihren Ableitungsgraphen zu.

Verstehen

Wir fassen die Auswirkungen des Parameters b im Term b^x auf den Funktionsgraphen und auf den Graphen der Ableitung zusammen.

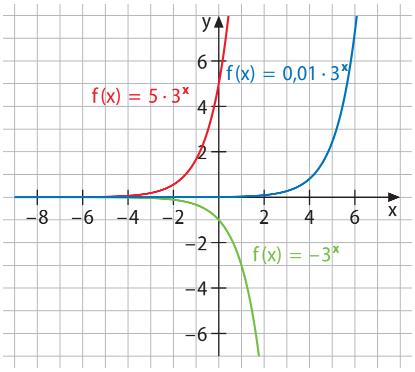
Merke

Für den Graphen der **Exponentialfunktion** f mit $\mathbf{f(x) = b^x}$ $(b > 0)$ gilt:

	$0 < b < 1$	**$b > 1$**
Graph von f	streng monoton fallend	streng monoton steigend
	Je kleiner b ist, desto steiler fällt der Graph.	Je größer b ist, desto stärker steigt der Graph.
		
	Die Graphen aller Exponentialfunktionen der Form $f(x) = b^x$ gehen durch den Punkt $(0 \mid 1)$ und haben die x-Achse als Asymptote.	
Graph von f'	verläuft unterhalb der x-Achse, welche Asymptote ist und nicht geschnitten wird.	verläuft oberhalb der x-Achse, welche Asymptote ist und nicht geschnitten wird.
	Je kleiner b ist, desto steiler ist der Ableitungsgraph.	Je größer b ist, desto steiler ist der Ableitungsgraph.
		

In einem nächsten Schritt verknüpfen wir den Term b^x multiplikativ mit einem Vorfaktor und beobachten die Auswirkungen auf den Graphen der Funktion sowie auf den der Ableitung.
Wir erkennen:

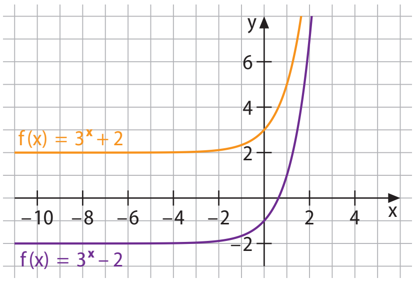
Ein Vorfaktor a hat Auswirkungen auf das Strebeverhalten für $x \to \pm\infty$ und auf die Monotonie des Graphen der Funktion. Unterscheiden müssen wir zwischen den beiden Fällen $a > 0$ und $a < 0$.



Nun verknüpfen wir den Term b^x additiv mit einer Zahl und beobachten wiederum die Auswirkungen auf den Graphen sowie auf den der Ableitung.

Wir stellen fest:

Der Summand d verschiebt den Graphen in y-Richtung (also nach oben oder nach unten). Dadurch wird auch die Asymptote nach oben oder nach unten verschoben, ebenso der Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse.



Merke

Beim Graphen der **Exponentialfunktion** f mit $\mathbf{f(x) = a \cdot b^x + d}$ $(b > 0)$ muss man folgende Fälle unterscheiden:

	Graph von f	Graph von f′
$a > 0$ für $f(x) = a \cdot b^x$	▪ streng monoton steigend ▪ x-Achse als Asymptote ▪ Schnittpunkt mit y-Achse bei $(0 \mid a)$	▪ streng monoton steigend ▪ x-Achse als Asymptote ▪ Schnittpunkt mit y-Achse bei $(0 \mid a \cdot \ln(b))$
$a < 0$ für $f(x) = a \cdot b^x$	▪ streng monoton fallend ▪ x-Achse als Asymptote ▪ Schnittpunkt mit y-Achse bei $(0 \mid a)$	▪ streng monoton fallend ▪ x-Achse als Asymptote ▪ Schnittpunkt mit y-Achse bei $(0 \mid a \cdot \ln(b))$
$d > 0$ für $f(x) = b^x + d$ $d < 0$ für $f(x) = b^x + d$	▪ streng monoton steigend ▪ Asymptote bei $x = d$ ▪ Schnittpunkt mit y-Achse bei $(0 \mid \ln(b) + c)$	▪ streng monoton steigend ▪ x-Achse als Asymptote ▪ Schnittpunkt mit y-Achse bei $(0 \mid \ln(b))$

Aufgaben

1 Zeigen Sie, dass nicht nur die Funktion f mit $f(x) = e^x$, sondern auch die Funktion g mit $g(x) = c \cdot e^x$ mit ihrer Ableitung übereinstimmt.

2 Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der Funktion.

a) $f(x) = 2e^x + 2$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2}e^x - 1$ **c)** $f(x) = 3x - 0{,}25 \cdot e^x$

3 Untersuchen Sie, ob – ähnlich wie die e-Funktion – auch die Funktionen h mit $h(x) = e^{k \cdot x}$ und k mit $k(x) = e^{x+c}$ mit ihrer Ableitung übereinstimmen.

Beispiel
Ableitung

4 Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (x-2)^2 \cdot e^{-2x}$.
Lösung: *Zunächst leiten wir mit der Kettenregel den Baustein $g(x) = (x-2)^2$ ab:*
$g'(x) = 2 \cdot (x-2)$; ebenso den Baustein $h(x) = e^{-2x}$: $h'(x) = -2 \cdot e^{-2x}$.
Nun folgt mit der Produktregel: $f'(x) = 2 \cdot (x-2) \cdot e^{-2x} + (x-2)^2 \cdot (-2) \cdot e^{-2x}$
$= 2 \cdot (x-2) \cdot e^{-2x} \cdot (1-(x-2)) = 2 \cdot (x-2) \cdot e^{-2x} \cdot (3-x)$.

5 Leiten Sie die folgenden zusammengesetzten Funktionen ab und geben Sie jeweils an, welche Ableitungsregeln Sie benutzt haben.

a) $f(x) = x \cdot e^x$ **b)** $f(x) = x \cdot e^{-x}$ **c)** $f(x) = x^3 \cdot e^{0{,}5x}$
d) $f(x) = (x^3 - 1) \cdot e^x$ **e)** $f(x) = (x-1) \cdot e^{x-1}$ **f)** $f(x) = (x+1)^3 \cdot e^{-0{,}5x}$

Nachgefragt

- Geben Sie an, wie man eine Funktion f mit $f(x) = e^x + d$ rechnerisch ableitet, und erklären Sie den Ableitungsterm anhand des Graphen.
- Erläutern Sie mithilfe der Potenzgesetze, dass die Auswirkungen des Parameters c in $f(x) = b^{x+c}$ in den Ausführungen mitbehandelt wurden und keinen eigenständigen Fall darstellen.
- Geben Sie an, wie man eine Funktion f mit $f(x) = e^{x+c}$ rechnerisch ableitet, und erklären Sie den Ableitungsterm anhand des Graphen. Gehen Sie auch auf den Zusammenhang zur Funktion g mit $g(x) = a \cdot e^x$ und zu deren Ableitung ein.
- Zählen Sie wesentliche Eigenschaften des Graphen der natürlichen Exponentialfunktion auf (Symmetrie, Nullstellen, Schnittpunkte mit den Achsen, Extremstellen, Monotonie, Definitions- und Wertemenge, Strebeverhalten).
- Erklären Sie den Begriff „Asymptote“ an einem konkreten Beispiel. Zählen Sie Funktionenklassen auf, die über eine Asymptote verfügen.

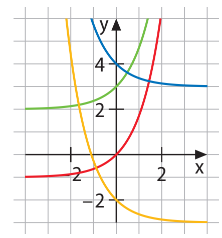
6 Zeichnen Sie den Graphen von f mit $f(x) = e^x$ und beschreiben Sie seinen Verlauf. Vergleichen Sie mit den Graphen der Funktionen g mit $g(x) = 0{,}5^x$ und h mit $h(x) = 4^x$ und schreiben Sie dazu einen kleinen Aufsatz.

7 Erläutern Sie, wie man den Graphen von f mit $f(x) = e^x$ verschieben, spiegeln, strecken oder stauchen muss, um den Graphen der angegebenen Funktion zu erzeugen.

a) $f(x) = e^x - 3$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2}e^{x+2}$ **c)** $f(x) = 3 + e^{-x}$
d) $f(x) = -e^{-x}$ **e)** $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x - e^2$ **f)** $f(x) = 3 - e^{-x}$

8 Beschreiben Sie jeweils, wie aus dem Graphen der Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ der Graph der Funktion g, h bzw. k hervorgeht.

a) g mit $g(x) = e^x - 1$ **b)** h mit $h(x) = e^{x-2}$ **c)** k mit $k(x) = 2 \cdot e^x$



9 In der Abbildung sehen Sie Graphen von Funktionen f der Form $f(x) = e^x + c$ bzw. $f(x) = e^{-x} + c$. Ermitteln Sie für jeden Graphen die zugehörige Funktionsgleichung.

10 **1** f: $f(x) = e^x(e^x + 1)$ **2** f: $f(x) = -xe^{x^2}$ **3** f: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ **4** f: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2-1}$.

Finden Sie heraus, welcher Steckbrief auf welche dieser Funktionen zutrifft (G_f ist der Graph von f).

Steckbrief A
- $D_f = \mathbb{R}$
- $f(1) = -e$
- G_f ist symmetrisch zum Ursprung
- G_f verläuft durch den 2. und den 4. Quadranten
- $f(0) = 0$

Steckbrief B
- $D_f = \mathbb{R}$
- $f(0) = 0$
- $f(-1) = -0{,}5$
- G_f ist symmetrisch zum Ursprung
- G_f verläuft durch den 3. und den 1. Quadranten
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Steckbrief C
- $f(0) = 0$
- $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$
- G_f ist symmetrisch zur y-Achse
- G_f verläuft durch alle vier Quadranten
- f besitzt mehr als eine Definitionslücke

Steckbrief D
- $D_f = \mathbb{R}$
- $f(0) \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
- G_f verläuft durch den 2. und den 1. Quadranten
- $f(1) \neq f(-1)$

11 Zeichnen Sie jeweils zunächst den Graphen G_f der Funktion f: $f(x) = e^x$ in Ihr Heft.

a) G_f wird in Richtung der y-Achse verschoben, sodass der neue Graph G_{f_1} durch den Punkt $T_1(0|3)$ verläuft. Zeichnen Sie G_{f_1} und geben Sie die Funktion f_1 an.

b) G_f wird in Richtung der x-Achse verschoben, sodass der neue Graph G_{f_2} durch den Punkt $T_2(0|e)$ verläuft. Zeichnen Sie G_{f_2} und geben Sie f_2 an.

c) G_f wird an der x-Achse gespiegelt. Zeichnen Sie den neuen Graphen G_{f_3} und geben Sie f_3 an.

d) G_f wird an der Geraden mit der Gleichung $y = 1$ gespiegelt. Zeichnen Sie den neuen Graphen G_{f_4} und geben Sie f_4 an.

e) G_f wird an der y-Achse gespiegelt. Zeichnen Sie den neuen Graphen G_{f_5} und geben Sie f_5 an.

f) G_f wird am Ursprung gespiegelt. Zeichnen Sie den neuen Graphen G_{f_6} und geben Sie f_6 an.

12 Geben Sie das Verhalten der Funktionsgraphen für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ an.

a) $f(x) = x \cdot e^x$ **b)** $f(x) = x \cdot e^{-x}$ **c)** $f(x) = x^2 \cdot e^x$

d) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ **e)** $f(x) = 10^6 - e^x$ **f)** $f(x) = 10^6 - e^{-x}$

13 Untersuchen die Graphen der Funktionen auf Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung.

a) $f(x) = 4 \cdot e^{x-1} - 3$ **b)** $f(x) = 2x \cdot e^{-x} - 1$ **c)** $f(x) = x^2 \cdot e^x$

d) $f(x) = 3 \cdot e^{x^2} + 2$ **e)** $f(x) = 5x \cdot e^{x^2}$ **f)** $f(x) = x^3 \cdot e^{-2x}$

Beispiel
Parameter bestimmen

14 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{x+c}$.

a) Für welchen Wert von c liegt der Punkt $P(1|e)$ auf dem Graphen von f?

b) Für welchen Wert von c hat die Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = 1$ den Wert e^2?

Lösung:

a) *Wir setzen die Koordinaten des Punkts P in die Funktionsgleichung ein und lösen nach c auf:* $e = e^{1+c} \Leftrightarrow e = e^1 \cdot e^c \Leftrightarrow \frac{e}{e} = e^c \Leftrightarrow e^c = 1 \Rightarrow c = 0.$

b) *Wir bilden die 1. Ableitung, da sie die Tangentensteigung liefert:* $f'(x) = e^{x+c}$*. Nun setzen wir ein, dass die 1. Ableitung an der Stelle* $x_0 = 1$ *den Wert* e^2 *hat:*
$e^2 = e^{1+c} \Leftrightarrow e^2 = e^1 \cdot e^c \Leftrightarrow e = e^c \Rightarrow c = 1.$

Erklärvideo

Mediencode 63021-04

15 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{k \cdot x}$.

a) Für welchen Wert von k liegt der Punkt $P(1|5{,}42)$ auf dem Graphen von f, für welchen Wert von k der Punkt $Q(2|109{,}19)$?

b) Für welchen Wert von k hat die Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = 3$ den Wert 0?

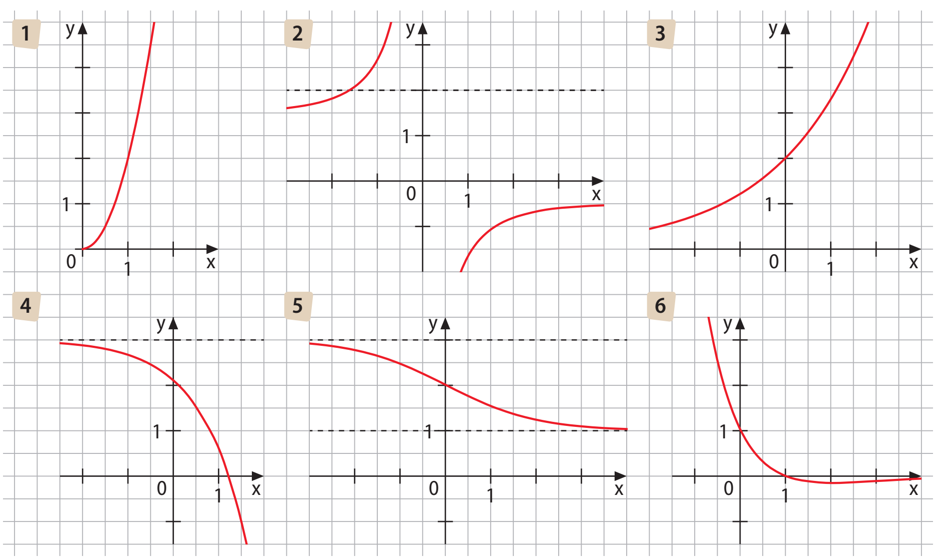
16 **a)** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 6x \cdot e^{-x^2}$ und beschreiben Sie Eigenschaften des Graphen.

b) Welche Auswirkungen hat eine Veränderung des Vorfaktors 6x, welche eine Veränderung des Exponenten von e^{-x^2}? Probieren Sie aus, eventuell mit Unterstützung eines Funktionenplotters.

17 Assign each of the functions to its corresponding graph.

A $a(x) = 2e^{0{,}5x}$ **B** $b(x) = 3 - e^x$ **C** $c(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} + 2$

D $d(x) = \frac{2}{1 - e^x}$ **E** $e(x) = (1 - x)e^{-x}$ **F** $f(x) = 2xe^{\ln x}$



Hinweis: $3^x = e^{x \ln 3}$ *für jeden Wert von* $x \in \mathbb{R}$

18 Gegeben ist die Funktion f: $f(x) = (x^2 - 3) \cdot 3^x$ ihr Graph ist G_f.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Achsenpunkte von G_f.

b) Untersuchen Sie G_f auf Steigen und Fallen sowie auf Lage und Art der Extrempunkte.

c) Zeichnen Sie G_f im Intervall $[-4; 2[$.

19 Ordnen Sie den Funktionstermen ihre zugehörigen Graphen zu. Skizzieren Sie für die Terme, die keinen Partner haben, einen Graphen, und geben Sie für die Graphen ohne Partner einen Term an.

$f_1(x) = 1 + 2 \cdot e^{x-3}$

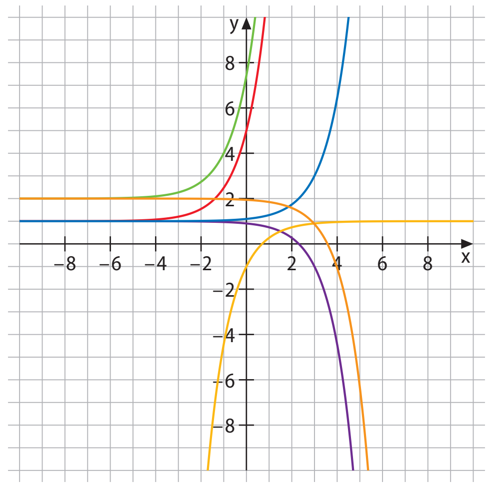
$f_2(x) = 2 + 2e^{x+1}$

$f_3(x) = 4e^x + 1$

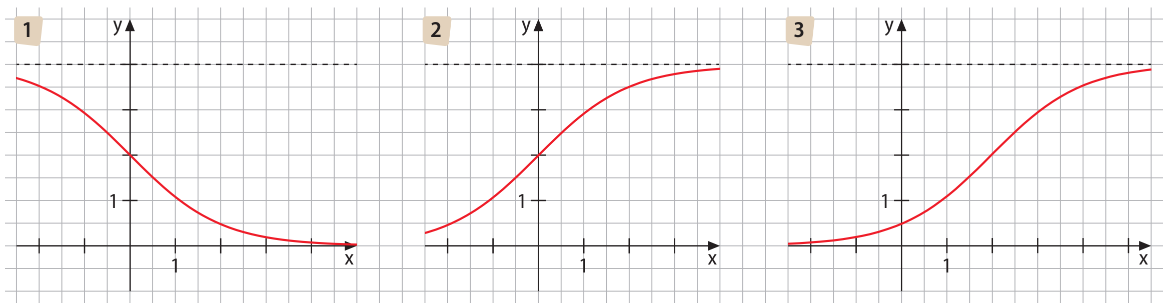
$f_4(x) = 1 - 2e^{-x}$

$f_5(x) = 1 - 2 \cdot e^{x-3}$

$f_6(x) = 2 - e^{x-3}$



20 Gegeben ist die Funktion f: $f(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$ ihr Graph ist G_f. Die drei abgebildeten Funktionsgraphen sind zueinander kongruent; einer von ihnen ist G_f. Finden Sie heraus, welcher von ihnen G_f ist, und geben Sie die Funktionsterme zu den beiden anderen Graphen an.



21 **a)** Wie lautet die n-te Ableitung der Funktion f mit $0{,}5 \cdot e^x$? Zeichnen Sie – eventuell mit einem Funktionenplotter – die ersten zehn Ableitungen in ein Koordinatensystem.

b) Leiten Sie aus a) eine Vermutung ab, wie die n-te Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x$ aussieht. Bestätigen Sie Ihre Vermutung durch Rechnen und Zeichnen.

Nachgefragt

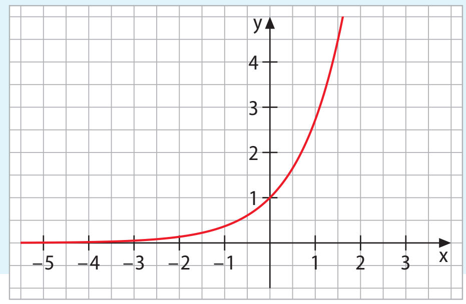
- „Die Funktion f mit $f(x) = 2^x$ gewinnt den Schnellwachswettbwerb gegen die Funktion g mit $g(x) = x^2$." Beurteilen Sie die Richtigkeit dieser Aussage.
- „Wer gewinnt? Wird die Funktion f mit $f(x) = e^x$ die Funktion g mit $g(x) = x^{10}$ irgendwann einholen?" Begründen Sie. Worin äußert sich dieses Einholen?
- Ändert sich etwas grundsätzlich am Ausgang des „Rennens" der Funktionen f mit $f(x) = e^x$ und g mit $g(x) = x^{10}$, wenn Sie bei g einen anderen Exponenten wählen?
- Geben Sie weitere Funktionen (neben $f(x) = e^x$) an, die mit ihrer Ableitung übereinstimmen.
- Vergleichen Sie den Einfluss der Parameter auf den Graphen bei Potenzfunktionen mit dem bei Exponentialfunktionen.

2.3 Exponentialgleichungen und natürlicher Logarithmus

Entdecken

„Zu welchem Zeitpunkt hat eine Population eine bestimmte Größe erreicht?"
„Wann ist die Hälfte eines radioaktiven Stoffes zerfallen?"
„Nach wie vielen Tagen hat eine Pflanze eine bestimmte Höhe erreicht?"
Das sind Fragen, die auf Exponentialgleichungen hinauslaufen. Zu ihrer Beantwortung wird – graphisch interpretiert – bei einer Exponentialfunktion die x-Koordinate zu einer bestimmten y-Koordinate gesucht.

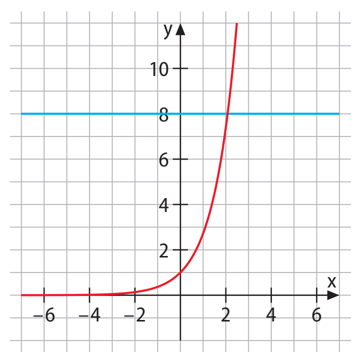
- Lösen Sie die folgenden Gleichungen …
  a) durch Abschätzen und Ausprobieren.
  b) graphisch anhand des abgebildeten Graphen.
  1 $e^x = 3$
  2 $e^x = 6$
  3 $e^x = 8$



Verstehen

Gleichungen der Form $e^x = c$ heißen **Exponentialgleichungen**. Für ihre Lösung stehen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung:

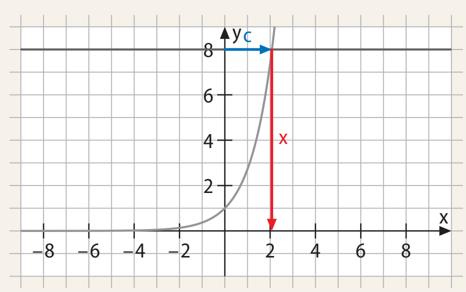
- Durch Abschätzen löst man die Gleichung $e^x = c$ näherungsweise, indem man den Wert c der rechten Seite in die Wertereihe $e^1 \approx 2{,}71$, $e^2 \approx 7{,}4$, $e^3 \approx 20{,}1$, $e^4 \approx \ldots$ einsortiert und so den gesuchten Exponenten x erhält. So muss z. B. die Lösung der Gleichung $e^x = 10$ gemäß obiger Werte zwischen 2 und 3 liegen (und näher an 2).
- Graphisch kann man die Gleichung $e^x = c$ lösen, indem man den Graphen der e-Funktion (also die linke Seite der Gleichung) zeichnet sowie den Graphen der rechten Seite und anschließend die x-Koordinate des Schnittpunkts abliest.
  Die Abbildung zeigt die graphische Lösung der Gleichung $e^x = 8$ $(x \approx 2{,}08)$.



- Rechnerisch löst man die Gleichung $e^x = c$ durch die Anwendung des Logarithmus, den Sie bereits zum Lösen der allgemeinen Exponentialgleichung kennen gelernt haben.

Merke

- Die **Exponentialgleichung** $\mathbf{e^x = c}$ $(c > 0)$ wird durch die Umkehroperation zum Potenzieren, das **Logarithmieren**, gelöst: $e^x = c \Leftrightarrow \log_e(c) = x$
- Den Logarithmus zur Basis e ($\log_e$) nennt man **natürlichen Logarithmus** (logarithmus naturalis) und kürzt ihn mit **ln** ab.



Wir machen uns den Unterschied zwischen den Operatoren **Logarithmieren**, **Radizieren** (Wurzelziehen) und **Potenzieren** nochmals anhand der Gleichung $a^b = c$ klar:

- Wenn a und b bekannt sind, erhält man c durch Potenzieren. Beispiel: $2^3 = c \quad \Rightarrow c = 8$
- Wenn b und c bekannt sind, erhält man a durch Radizieren.
  Beispiel: $a^3 = 27 \quad \Rightarrow a = \sqrt[3]{27} = 3$
- Wenn a und c bekannt sind, erhält man b durch Logarithmieren.
  Beispiel: $4^b = 64 \quad \Rightarrow b = \log_4(64) = 4$

Der Zusammenhang zwischen der e-Funktion und dem Operator des Logarithmierens wird auch durch die folgenden Beziehungen deutlich, die man zuweilen in Aufgaben benötigt.

Merke

1 Für eine beliebige reelle Zahl c gilt:
$\mathbf{\ln(e^c) = c}$

2 Für eine positive Zahl b gilt:
$\mathbf{e^{\ln(b)} = b}$

Zu **1**: $\ln(e^c) = \log_e(e^c)$ fragt nach der Zahl, mit der man e potenzieren muss, um e^c zu erhalten. Diese Zahl ist c.

Zu **2**: Algebraisch kann man diese Gleichheit zeigen, indem man beide Seiten logarithmiert: $\ln(e^{\ln(b)}) = \ln(b)$.
$\ln(e^{\ln(b)})$ ist diejenige Zahl, mit der man e potenzieren muss, um $e^{\ln(b)}$ zu erhalten – und das ist ln (b).

Da die Exponentialgleichung $e^x = c$ durch die Umkehroperation des Logarithmierens gelöst wird, ist die Logarithmusfunktion $L(x) = \ln(x)$ die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion $E(x) = e^x$. Dies muss sich auch im Graphen der Logarithmusfunktion widerspiegeln.
Hierzu vertauschen wir in der folgenden zur e-Funktion gehörenden Tabelle die x- und die y-Werte und skizzieren so den Graphen von ln (x).

Die **Umkehrfunktion** ist Ihnen bereits bei der Wurzelfunktion begegnet. Die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion zu der Funktion g mit $g(x) = x^2$ $(x > 0)$.

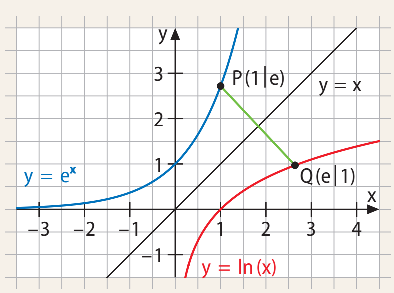
- Rechnerisch erhält man die Gleichung der Umkehrfunktion, indem man die Funktionsgleichung $y = x^2$ nach x auflöst und dann die Variablen x und y vertauscht.
- Zeichnerisch erhält man ihren Graphen, indem man den Graphen der Ausgangsfunktion an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten spiegelt.

x	−2	−1	0	1	2	3
$f(x) = e^x$	$\frac{1}{e^2} \approx 0{,}14$	$\frac{1}{e} \approx 0{,}37$	1	$e \approx 2{,}71$	$e^2 \approx 7{,}4$	$e^3 \approx 20{,}1$

Merke

Die natürliche Logarithmusfunktion $L(x) = \ln(x)$ ist die Umkehrfunktion von $E(x) = e^x$. Ihr Definitionsbereich sind alle positiven reellen Zahlen.
Ihr Wertebereich sind alle reellen Zahlen. Es gilt:

- für $0 < x < 1$: $\ln(x) < 0$
- für $x = 1$: $\ln(x) = 0$
- für $x > 1$: $\ln(x) > 0$



Aufgaben

1 Schreiben Sie den Term in der Form e^b.

a) $\sqrt{e}$ b) $\frac{1}{e}$ c) $\sqrt[5]{e^2}$ d) $\frac{1}{e^2}$

e) $\frac{e^2}{e^6}$ f) $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ g) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ h) 1

Beispiel
Vereinfachung

2 Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

a) $\ln(\sqrt{e})$ b) $e^{2\cdot\ln(3)}$

Lösung:

a) $\ln(\sqrt{e}) = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ *b)* $e^{2\cdot\ln(3)} = (e^{\ln(3)})^2 = 3^2 = 9$

3 Vereinfachen Sie.

a) $\ln(\sqrt[5]{e})$ b) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$ c) $\ln\left(\frac{1}{e^{-3}}\right)$ d) $\ln(e^{-1})$

e) $\ln(e^{-3})$ f) $\ln(\ln(e^e))$ g) $\ln(e^{-2}) + \ln(e^e) + e^{\ln(2)}$ h) $e^{\ln(e)}$

h) $e^{3\cdot\ln(2)}$ j) $e^{-2\cdot\ln(4)}$ k) $e^{0,5\cdot\ln(5)}$ l) $\sqrt[5]{e^{5\cdot\ln(e)}}$

4 Schätzen Sie größenmäßig ab.

a) e b) e^2 c) e^{-1} d) $\sqrt{e}$

e) $\ln(10)$ f) $\ln(30)$ g) $\ln(100)$ h) $\ln(1000)$

Beispiel
Gleichung lösen

5 Lösen Sie die Gleichung $e^{2x} = 5$.

Lösung: $e^{2x} = (e^x)^2 = 5 \quad \Rightarrow e^x = \sqrt{5} \quad \Rightarrow x = \ln(\sqrt{5}) \approx 0{,}8$

6 Lösen Sie die Gleichungen.

a) $e^x = 21$ b) $e^{-x} = 0{,}25$ c) $2e^x = 66$ d) $-e^{2x} = -16$

e) $e^{x+3} = 24$ f) $e^{2x} = 11$ g) $e^{-x} = e$ h) $e^{2x} = \frac{1}{e}$

i) $e^x(e^x - e) = 0$ j) $\sqrt{e^x} - \frac{e^3}{e^x} = 0$ k) $e^{2x} - 6e^x + 9 = 0$ l) $e^{2x} - 2 + e^{-2x} = 0$

Nachgefragt

- Begründen Sie, weshalb der natürliche Logarithmus ln nur für positive Zahlen definiert ist, d. h. weshalb bei $\ln(a)$ die Zahl $a > 0$ sein muss.
- Welche Ergebnisse sind beim Berechnen von Logarithmen möglich?
- Valentin meint: „Die Gleichung $e^x = e^2$ muss man durch Logarithmieren lösen, weil es sich um eine Exponentialgleichung handelt." Hat er Recht? Argumentieren Sie.
- Begründen Sie durch Anwenden der Logarithmusdefinition, dass folgendes Logarithmengesetz gilt: $\ln(e^n) = n\cdot\ln(e)$.

7 Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge.

a) $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0$ b) $\ln(2 - e^{-x}) = 0$ c) $\ln\frac{x^2 + k^2}{x} = 0$ d) $e^x - 3 + 2e^{-x} = 0$

8 Lösen Sie die Gleichungen zunächst graphisch bzw. – wenn möglich – näherungsweise im Kopf und dann rechnerisch, falls möglich.

a) $e^{2x} = 15$ b) $e^{x+2} = 18$ c) $2e^x - 2 = 0$ d) $0{,}1\cdot e^{0{,}1x} + 16 = 64$

e) $e^{-x} - 0{,}125 = 0$ f) $e^x - x^2 = 0$ g) $e^x + e - x = 1$ h) $3e^{2x} = 111$

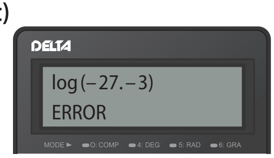
9 An welchen Stellen hat die Funktion f mit $f(x) = 3e^x - x$ die Steigung 2?
Lösung: *$f'(x) = 3e^x - 1$; $3e^x - 1 = 2 \Leftrightarrow 3e^x = 3 \Leftrightarrow e^x = 1 \quad \Rightarrow x = 0$*

Beispiel
Steigung

10 Find out the points where the slope of the function hast he given value m.
a) $f(x) = 2e^x$; $m = 8$ **b)** $f(x) = 0{,}5e^{2x}$; $m = 1$ **c)** $f(x) = -e^x$; $m = -3$
d) $f(x) = -0{,}5e^{-x}$; $m = 0{,}25$ **e)** $f(x) = -0{,}5e^{-2x}$; $m = 1$ **f)** $f(x) = 2 + e^{2x-1}$; $m = 0{,}5$

11 Bei folgenden Rechenausdrücken gibt der WTR stets „Error" an. Begründen Sie.
a)


b)


c)


12 In die folgenden „Lösungen" haben sich Fehler eingeschlichen. Beschreiben und korrigieren Sie sie.

a)
$$\begin{aligned} e^x - 4 &= 5 \\ \ln(e^x) - \ln(4) &= \ln(5) \\ x &= \ln(5) + \ln(4) \\ x &= \ln(9) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} e^{x-2} &= 8 \\ e^x &= 10 \\ x &= \ln(10) \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} e^x - 2 &= 3x \\ e^x &= 3x + 2 \\ \ln(e^x) &= \ln(3x + 2) \\ x &= \ln(3x + 2) \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cdot e^{5x} \\ f'(x) &= 2 \cdot 5x \cdot e^{5x-1} \end{aligned}$$

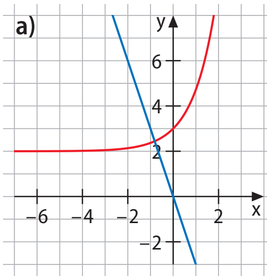
e)
$$\begin{aligned} f(x) &= 3x \cdot e^{4x} \\ f'(x) &= 3 \cdot 4 \cdot e^4 \end{aligned}$$

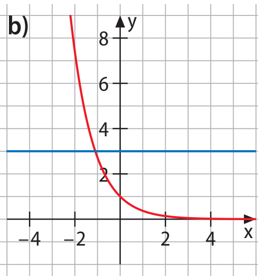
f)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \cdot e^{2x} \\ &= x^2 \cdot (e^x)^2 \\ f'(x) &= 2x \cdot e^{2x} + 2x \cdot 2 \cdot e^x \end{aligned}$$

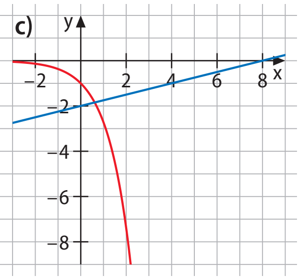
13 Bestimmen Sie die Punkte, in denen der Graph von f die Gerade $y = 2$ schneidet.
a) $f(x) = (2 - x) \cdot e^x$ **b)** $f(x) = 0{,}5x^2 \cdot e^{2x}$ **c)** $f(x) = -x \cdot e^x$
d) $f(x) = -x^4 \cdot e^{-x}$ **e)** $f(x) = -1 + e^x$ **f)** $f(x) = xe^x$

14 Vergleichen Sie jeweils die Ergebnisse und finden Sie eine Gesetzmäßigkeit.
a) ln (4) ln (40) ln (400) ln (4000) ln (40 000) ln (0,4)
b) ln (9) ln (0,9) ln (0,009) ln (0,0009) $\ln(9 \cdot 10^{-4})$ $\ln(9 \cdot 10^4)$

15 Im Folgenden sehen Sie Exponentialgleichungen graphisch dargestellt. Übersetzen Sie sie jeweils in eine algebraische Gleichung und lösen Sie diese. Vergleichen Sie anschließend diese Lösung mit der graphischen.







16 Der Bestand der Kudu-Antilopen im Etosha-Nationalpark in Namibia beträgt derzeit rund 350 000 Tiere, womit diese Antilopenart als nicht gefährdet angesehen werden kann. Der Bestand kann durch die Funktion $B(t) = 350\,000 \cdot e^{-0{,}2t}$ (t in Jahren) beschrieben werden.

a) Beschreiben Sie die weitere Entwicklung des Bestands in Worten.
b) Wann umfasst die Kudu-Population nur noch 10 % des aktuellen Bestands?
c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die Bestandsabnahme innerhalb eines Jahres erstmals weniger als 10 000 Tiere beträgt.

17 Auf Seite 53 steht ein Zitat von Friedhelm Farthmann, in dem er sich auf eine Seerosenpopulation bezieht. Dieses Beispiel wollen wir uns nun genauer anschauen.
Wir nehmen an, dass der Teich eine Fläche von 20 m² hat und dass die Blätter der Seerose am Anfang 0,1 m² des Teichs bedecken. Täglich verdoppelt sich die von den Blättern bedeckte Fläche. Drei Tage „vor dem Ende“ ist erst ein Achtel des Teichs bedeckt, zwei Tage „vor dem Ende“ ein Viertel, wieder einen Tag später die Hälfte.
a) Ermitteln Sie die dem Wachstum zugrunde liegende Funktion.
b) Nach wie vielen Tagen ist der Teich vollständig zugewachsen?
c) Beschreiben Sie den Gesamtverlauf des Wachstums und erläutern Sie, weshalb das Wachstum zu Beginn trügerisch ist.
d) Was wollte Friedhelm Farthmann mit dem Beispiel ausdrücken? Nehmen Sie Stellung dazu.

18 Das Logarithmengesetz $\ln(e^n) = n \cdot \ln(e)$ haben Sie auf Seite 70 kennen gelernt. Es gibt noch zwei weitere Logarithmengesetze (die nicht nur für den natürlichen Logarithmus ln gelten):

Merke

1 $\log_c(a \cdot b) = \log_c(a) + \log_c(b), \quad a,\ b > 0,\ c > 0.$

2 $\log_c(a : b) = \log_c(a) - \log_c(b), \quad a,\ b > 0,\ c > 0.$

Machen Sie sich die Gültigkeit dieser beiden Gesetze anhand geeigneter Zahlenbeispiele klar. Sie könnten z. B. als Basis $c = 2$ wählen und für die Zahlen a und b Potenzen von 2.

Beispiel Logarithmengesetze

19 Vereinfachen Sie: $\log(6) - \log(3) - \log(4)$.
Lösung: $\log(2 \cdot 3) - \log(3) - \log(2^2) = \log(2) + \log(3) - \log(3) - 2\log(2) = -\log(2)$

20 Vereinfachen Sie.
a) $\log(x^3) - \log(x^2) - \log(x)$
b) $\log(a \cdot b) - \log(a^2 \cdot b) - \log\left(\frac{1}{b}\right)$
c) $\log(x^3) - 2\log\left(\frac{1}{x}\right)$
d) $\log(a + b)^2 - \log(a^2 - b^2)$
e) $\log(a^2b - b) - \log(a - 1)^2 - \log(a + 1)$
f) $\log(\sqrt{x + 1}) - 0{,}5\log(x + 1) + \log\left(\frac{1}{x}\right) + \log(x^2)$

21 **a)** Beschreiben Sie, was in der abgebildeten Grafik dargestellt wird.

b) Was fällt Ihnen an der x-Achsenskalierung auf? Beschreiben Sie.

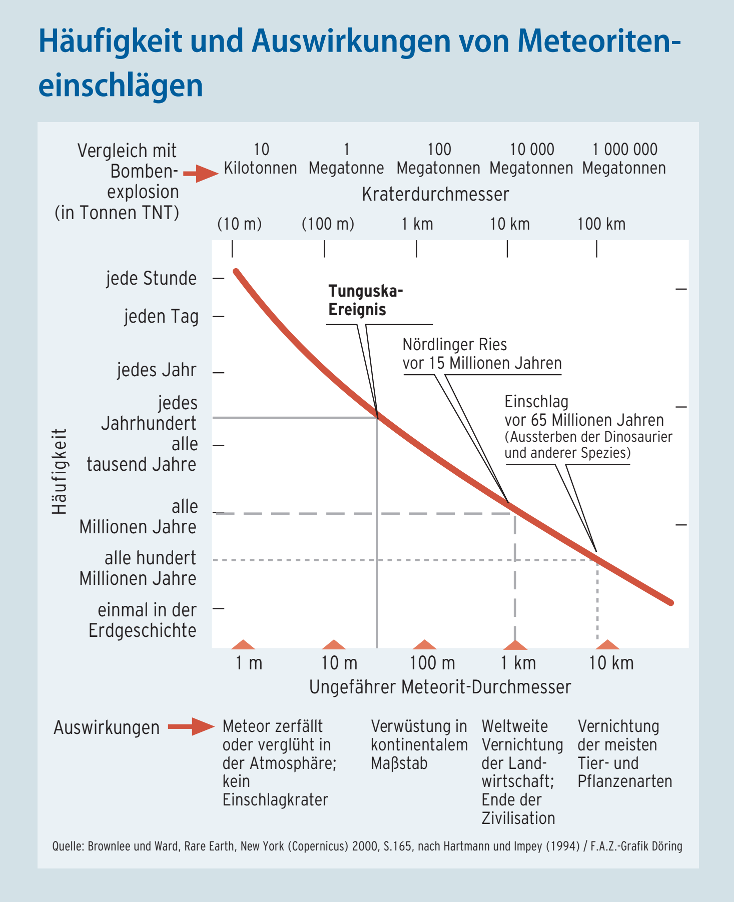
c) **Logarithmische Skalen** ermöglichen eine übersichtlichere Darstellung von Kurvenverläufen vor allem dann, wenn sie sich über sehr große Zahlenbereiche erstrecken. Mit anderen Worten: Die logarithmische Skalierung hilft dabei, Daten mit starken Größenunterschieden der Werte darzustellen. Berechnen Sie hierzu als Vorübung folgende Logarithmenwerte:

- $\log_{10}(13{,}5)$
- $\log_{10}(213{,}57)$
- $\log_{10}(0{,}17)$
- $\log_{10}(3845{,}91)$

d) Warum können logarithmische Skalen nicht bei 0 beginnen? Warum sind die Teilstriche nicht äquidistant, d. h. warum werden die Abstände bei größeren Werten immer kleiner?

e) Erklären Sie, warum der Graph einer Exponentialfunktion bei einer logarithmischskalierten x-Achse eine Gerade ergibt. Gehen Sie dabei von einer Exponentialfunktion der Form $y = a \cdot e^{bx}$ aus und logarithmieren Sie beide Seiten. Welche Steigung hat dann die Gerade?

f) Recherchieren Sie, in welchem Zusammenhang die Richter-Skala bzw. die Dezibel-Skala mit dieser Thematik steht und wofür man sie braucht.



Nachgefragt

- Es gibt zwar keine Logarithmen von null oder von negativen Zahlern, jedoch können Logarithmen negativ sein. Geben Sie hierfür mehrere Beispiele an. Wie kann man an $\log_a(b)$ erkennen, dass der Wert negativ ist?
- Für welche Werte von a ist die Gleichung $3^x = a$ lösbar? Verallgemeinern Sie: Für welche Werte von a ist die Gleichung $b^x = a$ lösbar? Begründen Sie (eventuell auch graphisch).
- Zählen Sie unterschiedliche Möglichkeiten auf, wie Sie Exponentialgleichungen lösen können. Geben Sie zu jeder Möglichkeit auch ein Beispiel an.
- Führen Sie eine Exponentialgleichung an, bei der man auf den Logarithmus zur Lösung der Gleichung verzichten kann.
- Diskutieren Sie, wie viele Schnittpunkte eine Exponentialfunktion mit einer Normalparabel haben kann. Finden Sie für alle gefundenen Fälle ein Beispiel.

Entdecken

Meldungen wie diese standen 2018 nach dem Ausbruch einer Ebola-Epidemie in Teilen Afrikas in den Zeitungen. Das Ebolafieber ist eine Infektionskrankheit. Ihr Name geht auf den Fluss Ebola in der Demokratischen Republik Kongo zurück.

KONGO – Ebola in Westafrika

Am 1. August 2018 meldete die Demokratische Republik Kongo den Ausbruch einer Ebola-Epidemie. Seitdem sind mindestens 2764 Menschen an Ebola erkrankt und 1820 daran gestorben. Nach der Ebola-Epidemie in Westafrika 2014 mit fast 12 000 Toten ist dies der schwerste Ebola-Ausbruch.

- Was versteht man unter einer Epidemie? Gehen Sie auch darauf ein, weshalb die angegebene Zahl von „nur" 1820 Toten trügerisch und gefährlich ist.

Verstehen

Viele Populationen entwickeln sich ohne Eingriff von außen exponentiell. Wachstumsprozesse sind deshalb ein typisches Anwendungsfeld für Exponentialfunktionen.
Das exponentielle Wachstum ist stets abhängig vom jeweiligen Bestand, insbesondere auch vom Anfangsbestand. Deshalb geht der Anfangsbestand in die Zuordnungsvorschrift der Funktionsgleichung ein.

Die Tabelle gibt die Zahlen für den Epidemieverlauf in Sierra Leone (2014) wieder:

3. 7.	17. 7.	31. 7.	14. 8.	28. 8.	11. 9.	25. 9.	9. 10.	23. 10.	6. 11.
260	370	550	750	1050	1500	2000	2800	3900	5200

Für diesen Verlauf wollen wir nun die zugrunde liegende Exponentialfunktion finden. Dass es sich um kein lineares Wachstum handelt, erkennt man daran, dass die Differenz zwischen benachbarten Daten nicht konstant ist, sondern ansteigt. Beim exponentiellen Wachstum ist jedoch der Quotient aus benachbarten Daten ungefähr konstant, deshalb berechnen wir ihn:

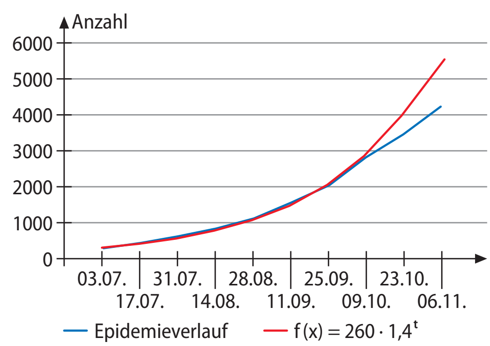
3. 7.	17. 7.	31. 7.	14. 8.	28. 8.	11. 9.	25. 9.	9. 10.	23. 10.	6. 11.
260	370	550	750	1050	1500	2000	2800	3900	5200
	· 1,42	· 1,49	· 1,36	· 1,4	· 1,43	· 1,33	· 1,4	· 1,39	· 1,33

Gemittelt erhalten wir rund 1,4 als Wachstumsfaktor. Der Bestand zum Zeitpunkt 0 betrug 260 Infizierte. Daraus ergibt sich die Funktionsvorschrift $f(t) = 260 \cdot 1{,}4^t$.

Zum Vergleich berechnen wir die Werte, die sich aus dieser Zuordnungsvorschrift ergeben:

260	364	509,6	713	999	1398	1958	2741	3837	5372

Vergleicht man beide Datenreihen graphisch, ergibt sich eine gute Übereinstimmung.



Möchte man die Änderungsrate berechnen, ist es sinnvoll, die Funktionsgleichung in eine Exponentialfunktion umzuwandeln.
Mit $b^x = (e^{\ln(b)})^x = e^{x \cdot \ln(b)}$ ergibt sich:
$f(t) = 260 \cdot 1{,}4^t = 260 \cdot e^{t \cdot \ln(1{,}4)} \approx 260 \cdot e^{0{,}34 \cdot t}$.

Merke

Exponentielles Wachstum zeichnet sich dadurch aus, dass die Quotienten benachbarter Daten stets gleich sind. Es lässt sich mithilfe der Exponentialfunktion $\mathbf{B(t) = B(0) \cdot e^{k \cdot t}}$ beschreiben. B (0) ist der Anfangsbestand und $k = \ln(b)$ mit dem Wachstumsfaktor b.

Mit dieser Funktionsgleichung können wir nun konkrete Fragen beantworten wie z. B. die nach der Anzahl der Infizierten ein Jahr nach Ausbruch. Ein Jahr hat 52 Wochen; da alle drei Wochen Daten erhoben wurden, müssen wir 52 durch 3 dividieren, das ergibt ungefähr 17. Gesucht ist also der Bestand zum Zeitpunkt 17: $f(17) = 260 \cdot e^{0,34 \cdot 17} \approx 79\,275$ Infizierte.

Zu dieser mathematischen Modellierung passt auch folgendes Zitat aus der damaligen Zeit:

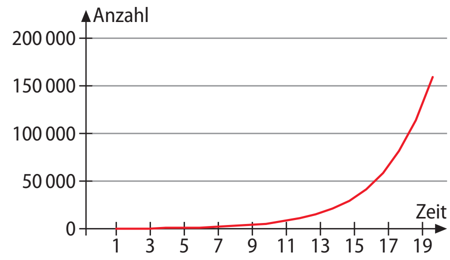
> „Am Anfang war die Zahl der Infizierten lange Zeit verhältnismäßig gering. Die Krankheit schien beherrschbar zu sein. Doch dies war trügerisch. Ab einem bestimmten Zeitpunkt führte das exponentielle Wachstum dazu, dass die Zahl der Erkrankten in kurzer Zeit geradezu explodierte. Die Epidemie war kaum noch zu kontrollieren."

Was ist damit genau gemeint? Am Graphen erkennt man zwar deutlich das exponentielle Wachstum, wenn man sich jedoch die absoluten Zahlen der Infizierten anschaut, so liegen sie über einen längeren Zeitraum z. B. unter 5000, also noch in einem Bereich, der nicht beunruhigend sein muss. Kurze Zeit später nimmt das Wachstum aber richtig „Fahrt" auf, dann sind auch die absoluten Zuwächse enorm, wie die folgende Tabelle zeigt:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
260	364	510	713	999	1398	1958	2741	3837	5372

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
7521	10 529	14 741	20 637	28 891	40 449	56 628	79 279	110 991	155 387

Schauen wir zur Bestätigung dieses Befundes zwei Steigungen zu unterschiedlichen Erhebungszeiten an. Hierzu bilden wir die Ableitung:
$f'(t) = 260 \cdot 0,34 \cdot e^{0,34 \cdot t}$.



- Die Steigung beträgt nach 3 Monaten (12 Wochen, d. h. zum Zeitpunkt 4): $f'(4) = 260 \cdot 0,34 \cdot e^{0,34 \cdot 4} \approx 344$
- Die Steigung beträgt nach 12 Monaten (52 Wochen, d. h. zum Zeitpunkt 17): $f'(4) = 260 \cdot 0,34 \cdot e^{0,34 \cdot 17} \approx 28\,620$

Merke

- Betrachtet man ein exponentielles Wachstum, ist es von entscheidender Bedeutung, welchen Zeitraum man sich anschaut.
- Exponentielles Wachstum braucht eine gewisse Zeit, bis es sich signifikant auf die absoluten Zahlen auswirkt. Die absoluten Zahlen steigen am Anfang eher langsam an.
- Ab einem bestimmten Zeitpunkt sind enorme Zuwächse der absoluten Zahlen zu verzeichnen. Der Graph wächst sehr schnell.
- Ist k negativ, so handelt es sich um eine exponentielle Abnahme.

Aufgaben

1 Untersuchen Sie jeweils die Daten in Hinblick auf die Frage, ob ein exponentielles Wachstum vorliegt.

a)

x	0	1	2	3	5	10
f(x)	3	7	11	15	23	43

b)

x	0	1	3	5	10	100
f(x)	2	6	54	486	118 098	$1{,}03 \cdot 10^{48}$

c)

x	0	1	2	6	10	15
f(x)	3	1,5	0,75	0,047	0,003	$9{,}1 \cdot 10^{-5}$

2 Vervollständigen Sie jeweils die Tabelle unter der Maßgabe, dass es sich um ein exponentielles Wachstum handelt.

a)

x	0	1	2	3	5	8
f(x)	2	3		6,75		

b)

x	0	10	20	40	100	250
f(x)		12	6			

3 Berechnen Sie f(0) und f(5).

a) $f(x) = 3 \cdot 2^x$ **b)** $f(x) = 10 \cdot 0{,}5^x$ **c)** $f(x) = 4 \cdot e^{2x}$

4 Ermitteln Sie den Anfangsbestand sowie den Bestand nach 10 Tagen (t in Tagen).

a) $B(t) = 1{,}2 \cdot 3^t$ **b)** $B(t) = 10 \cdot e^{1{,}2t}$ **c)** $B(t) = 100 \cdot e^{-0{,}1t}$

5 Berechnen Sie die momentane Wachstumsrate am 7. Tag des Wachstumsvorgangs.

a) $B(t) = 1{,}2 \cdot 3^t$ **b)** $B(t) = 10 \cdot e^{1{,}2t}$ **c)** $B(t) = 100 \cdot e^{-0{,}1t}$

6 Für welches x ist $f(x) = 50$?

a) $f(x) = 0{,}5 \cdot 5{,}5^x$ **b)** $f(x) = 2{,}7 \cdot e^{2x}$ **c)** $f(x) = 300 \cdot e^{-3x}$

Nachgefragt

- Zählen Sie typische Fragestellungen auf, die bei exponentiellen Wachstumsvorgängen auftreten können.
- Zählen Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen linearem und exponentiellem Wachstum auf.
- „Exponentielles Wachstum verläuft stets schneller als lineares Wachstum.“ Stimmt das? Nehmen Sie Stellung.
- Beschreiben Sie, wie man aus einer Wertetabelle die Funktionsgleichung eines exponentiellen Wachstumsvorgangs ermitteln kann und woran man in einer Wertetabelle lineares Wachstum erkennt.
- Zählen Sie typische Eigenschaften eines exponentiellen Wachstumsvorgangs auf.

Beispiel
Wachstum berechnen

7 Im Folgenden ist die zahlenmäßige Entwicklung der Weltbevölkerung (in Milliarden) dargestellt.

1960	1970	1980	1990	2000	2010
3,00	3,58	4,38	5,23	6,12	6,90

a) Mit welcher Weltbevölkerungszahl ist im Jahr 2030 zu rechnen?
b) Wann sind 12 Milliarden Menschen auf der Erde zu erwarten?

Lösung:

1. Schritt: Festlegen eines Funktionstyps durch Analyse der Messwerte

Da die Zahlen von Einheit zu Einheit nicht stets um denselben Betrag zunehmen, kann kein lineares Wachstum zugrunde gelegt werden. Zur Überprüfung, ob ein exponentielles Wachstum vorliegt, bilden wir jeweils den Quotienten benachbarter Daten:

$\frac{3,58}{3,00} \approx 1,19; \frac{4,38}{3,58} \approx 1,22; \frac{5,23}{4,38} \approx 1,19; \frac{6,12}{5,23} \approx 1,17; \frac{6,90}{6,12} \approx 1,13.$

Die Quotienten liegen im Schnitt bei etwa 1,2, was ein exponentielles Wachstum vermuten lässt.

2. Schritt: Bestimmen der notwendigen Parameter der Funktionsgleichung

Mit dem Ansatz $B(t) = B(0) \cdot b^t$ bestimmen wir durch Ablesen bzw. Einsetzen von Werten die Parameter B (0), d. h. den Anfangsbestand, und b, d. h. den Wachstumsfaktor. b haben wir oben mit 1,2 ermittelt. Als B (0) nehmen wir die Bevölkerungszahl zu Beginn des Messzeitraums, also 3,00. Wir erhalten: $B(t) = 3,00 \cdot 1,2^t$.
Damit können wir die Teilaufgaben a) und b) bearbeiten.

a) *Gesucht ist die Bevölkerungszahl im Jahr 2030, d. h. B (7), da wir in Schritten von 10 Jahren rechnen: $B(7) = 3,00 \cdot 1,2^7 \approx 10,75$. Für das Jahr 2030 muss mit einer Weltbevölkerung von etwa 10,75 Milliarden Menschen gerechnet werden.*

b) *Mit dem Ansatz $12 = 3,00 \cdot 1,2^t$ bestimmen wir t.*

$1,2^t = 4 \Rightarrow t = \frac{\ln(4)}{\ln(1,2)} \approx 7,6.$ *Da in Schritten von 10 Jahren gerechnet wird, entspricht dies 76 Jahren. Im Jahr 2036 sind demnach 12 Milliarden Menschen zu erwarten.*

8 Für das Wachstum von Kresse wurden folgende Daten ermittelt:

Zeit (Tage)	0	1	2	3	4	7
Höhe (cm)	0,2	0,3	0,48	0,8	1,2	4,2

a) Mit welcher Wuchshöhe ist nach zwei Wochen zu rechnen?
b) Wann erreicht die Kresse eine Höhe von 10 cm?
c) Bestimmen Sie die mittlere Wachstumsrate in der ersten Woche.
d) Wann ist die momentane Wachstumsrate größer als 6 cm/ Tag?

9 Man schätzt, dass sich der Bestand einer Nutria-Population in einem Jahr verdoppelt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wurden in Niedersachsen im Jahr 2016/17 landesweit etwa 22 000 Nutrias gezählt.

a) Finden Sie ein exponentielles Modell $B(t) = B(0) \cdot e^{k \cdot t}$ für die Bestandsentwicklung.
b) Wie viele Nutrias sind nach fünf, nach zehn, nach zwanzig Jahren zu erwarten?
c) Wie lange wird es nach diesem Modell dauern, bis die Population in Niedersachsen eine Million Nutrias zählt? Für wie realistisch halten Sie diese Hochrechnung?

10 In einem Labor wird 30 Wochen lang das Wachstum von Liebstöckelsetzlingen untersucht. Die Tabelle zeigt einen Teil des Messprotokolls für die (mittlere) Höhe der Pflanzen in Abhängigkeit von der Zeit.

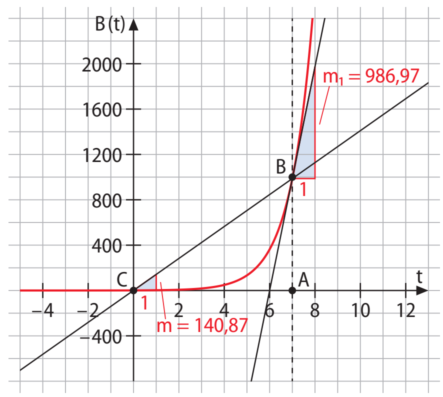
x (in Wochen)	0	5	10	12	15	20	25	30
Höhe h (in cm)	3,0	20,0						

Die (mittlere) Höhe der Pflanzen (in cm) wird durch folgende Funktion h beschrieben:
$h(x) = \frac{180}{1 + ke^{-ax}}$; $D_h = [0; 30]$. x bedeutet die Beobachtungszeit (in Wochen).

a) Ermitteln Sie die Werte der Parameter k und a.
b) Ergänzen Sie die Tabelle.
c) Beschreiben Sie anschaulich, was $h'(x) = 0$ bedeutet.

Beispiel
Wachstumsraten berechnen

11 Das Wachstum einer Bakterienkultur kann durch die Funktionsgleichung $B(t) = 0{,}9 \cdot e^t$ modelliert werden (t in Tagen).
Wie groß ist die mittlere Wachstumsrate in der ersten Woche, wie groß die momentane Wachstumsrate am 7. Tag? Veranschaulichen Sie beide Wachstumsraten graphisch.



Lösung: *Für die mittlere Änderungsrate m ziehen wir den Differenzenquotienten für $t_1 = 0$ und $t_2 = 7$ heran:*

$$m = \frac{B(7) - B(0)}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}9 \cdot e^7 - 0{,}9 \cdot e^0}{7 - 0} = \frac{0{,}9 \cdot e^7 - 0{,}9}{7} \approx 140{,}87.$$

Für die momentane Änderungsrate am 7. Tag ziehen wir die Ableitung heran:
$B'(t) = 0{,}9 \cdot e^t \Rightarrow B'(7) = 0{,}9 \cdot e^7 \approx 986{,}97$

12 Wie groß ist bei dem jeweiligen Wachstum die mittlere Wachstumsrate in den ersten zehn Tagen, wie groß die momentane Wachstumsrate nach zwei Wochen? Veranschaulichen Sie die beiden Wachstumsraten graphisch.

a) $B(t) = 12 + 50 \cdot e^{-0{,}1t}$ **b)** $B(t) = 1{,}2 \cdot e^{1{,}2t}$ **c)** $B(t) = 1{,}2 \cdot e^{0{,}2t}$

13 Die Höhe (in m) einer Sonnenblume x Wochen nach dem Pflanzen wird durch die Funktion f: $f(x) = 0{,}015 \cdot 3^{kx}$ beschrieben. Geben Sie an, wie hoch die Pflanze zu Beginn der Beobachtung war. Innerhalb von 5 Wochen ist die Pflanze dann um 22 cm gewachsen. Finden Sie heraus, wie hoch sie nach weiteren drei Wochen sein müsste. Tatsächlich wird sie bis dahin aber nur 1,08 m hoch. Deshalb soll ihre Wuchshöhe für $x \geq 5$ durch den Term $g(x) = a + b \cdot 3^{0{,}5x}$ modelliert werden. Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b aus den Messwerten nach 5 und nach 8 Wochen.

14 Dagobert consigns the amount of 100 000 € in a bank. The bank pays $\frac{6}{360}\%$ interest per day on his savings.

a) Find the amount of interest Dagobert receives on his savings within one year.
b) Find out after how many years Dagobert's original amount of money will have doubled by the daily interest return.

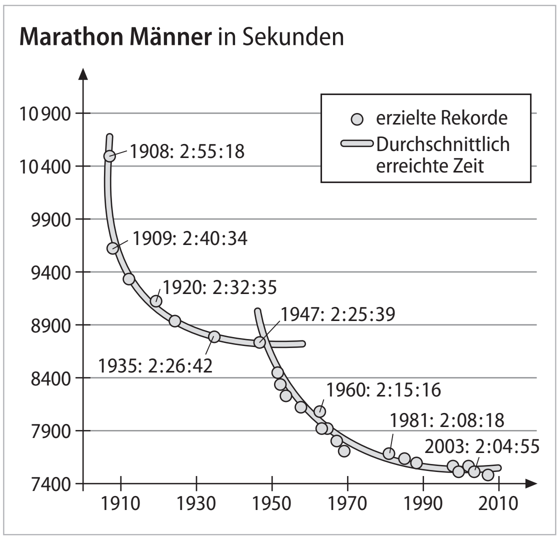
15 Die mit der Zeit t (in Jahren) zunehmende Durchmesserlänge d (in Metern) einer Fichte wird durch den Funktionsterm $d(t) = \frac{1}{1 + e^{-0{,}05\,(t-60)}}$ beschrieben. Finden Sie heraus, wann die Fichte 90 % ihrer maximalen Durchmesserlänge erreicht.

16 Die Individuenanzahl (in Tausend) einer Bakterienpopulation wird in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) durch die Funktion f: $f(t) = 10 + t^2 \cdot e^{4-t}$; $D_f = [0;\ 10]$, beschrieben.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(t)	10										

a) Übertragen Sie die Tabelle in Ihr Heft und ergänzen Sie sie dann dort.
b) Finden Sie heraus, zu welchem Zeitpunkt der Bestand am größten ist.
c) Geben Sie an, in welchem Zeitintervall die Population wächst und in welchem Zeitintervall sie abnimmt, und ermitteln Sie die Zeitpunkte, zu denen die Zunahme bzw. die Abnahme der Population am stärksten ist.

17 **a)** Die Entwicklung der Weltbestzeiten im Marathonlauf entspricht in den vergangenen hundert Jahren zwei exponentiellen Zerfallskurven. Da sich das genetische Potential der Menschheit in dieser Zeit nicht verändert hat, schließen die Forscher auf äußere Faktoren, die zu den Leistungsschüben geführt haben. Diskutieren Sie die beiden Diagrammteile und modellieren Sie ihre Verläufe, indem Sie auf Basis gegebener Daten die Funktionsgleichungen aufstellen.



b) Recherchieren Sie die aktuelle Weltrekordzeit und überprüfen Sie, ob Sie zu der vorgenommenen Modellierung passt.
c) Bei welcher Zeit würde der Weltrekord nach Ihrem Modell im Jahr 2030 liegen? Halten Sie den ermittelten Wert für realistisch? Argumentieren Sie.

Nachgefragt

- Beschreiben Sie typische Realsituationen, die mit einer Exponentialfunktion modelliert werden können.
- Erklären Sie anhand eines Realbeispiels und des zugehörigen Graphen, warum es bei exponentiellem Wachstum von entscheidender Bedeutung ist, welchen Zeitraum im Wachstumsvorgang man sich anschaut.
- Beschreiben Sie, wie man in der Funktionsgleichung $B(t) = B(0) \cdot e^{k \cdot t}$ den Parameter k sowie B (0) ermitteln kann.

Im Folgenden finden Sie keine vollständigen Klausuren, wohl aber Aufgaben, die zu diesem Kapitel passen und Teil einer Klausur sein könnten.

Aufgabe 1

Warm up

A Leiten Sie ab.

a) $f(x) = -3\left(e^{-3x}\right)^3$ **b)** $f(x) = \sqrt{x + e^x}$ **c)** $f(x) = (x-1)^2 \cdot e^x$

B Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktionen.

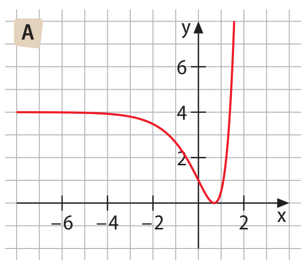
a) $f(x) = -3\left(x^2 - 2\right)^3$ **b)** $f(x) = \sin(x) \cdot x^2;\ [-\pi;\ \pi]$

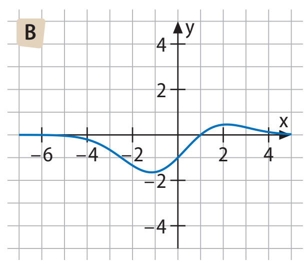
C Lösen Sie folgende Gleichungen.

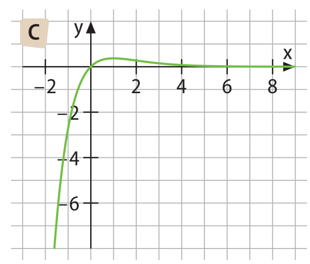
a) $(x+2)^2 \cdot e^{-x} = 0$ **b)** $e^x - 4 = 0$ **c)** $x - 1 = \sqrt{x-1}$

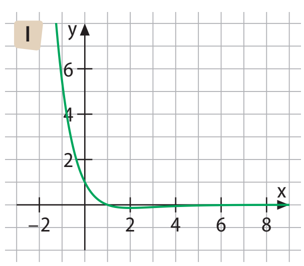
1 **a)** Ordnen Sie begründet jedem Funktionsterm (1, 2, 3) den passenden Graphen (A, B, C) und den Graphen der passenden Ableitung (I, II, III) zu. Überprüfen Sie Ihre Entscheidungen rechnerisch.

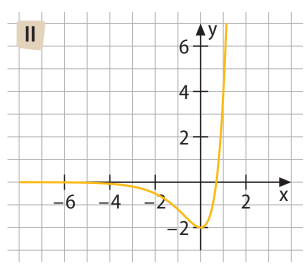
1 $f_1(x) = (x-1) \cdot e^{-0{,}2x^2}$ **2** $f_2(x) = x \cdot e^{-x}$ **3** $f_3(x) = \left(e^x - 2\right)^2$

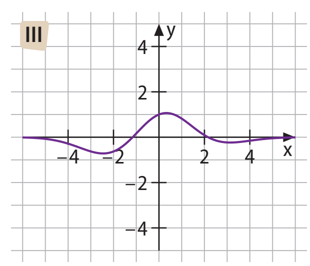












b) Bestimmen Sie die Stellen, an denen der Graph von f_1 eine Tangente parallel zur x-Achse hat, sowie die Stellen, an denen seine Tangente parallel zur Geraden $y = 4x + 1$ verläuft.

c) Beschreiben Sie, wie Sie die Stellen bestimmen würden, an denen der Graph von f_1 den Funktionswert -1 hat.

d) Beschreiben Sie die Vorgehensweise, wie man die Funktionen f_1, f_2 und f_3 graphisch ableiten kann.

e) Erläutern Sie, welche Realsituation die Funktion $f_2(x)$ beschreiben könnte.

f) Der Funktionsterm von $f_2(x)$ wird abgeändert in $f_4(x) = x^2 \cdot e^{-x}$. Was bedeutet dies für den zugehörigen Graphen? Beschreiben Sie dessen Aussehen anhand charakteristischer Eigenschaften und unter Verwendung der entsprechenden Fachsprache.

Aufgabe 2

Warm up

A Vereinfachen Sie die Terme mithilfe der Potenzgesetze.

a) $5^{-2} : 5^{-4}$ **b)** $6^{-3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-4}$ **c)** $\frac{6^3 \cdot 14^5}{12^4 \cdot 7^4}$

d) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{a^5}$; $a > 0$ **e)** $\frac{a^{-5} b^2}{c^{-2} a^3} : \frac{c^4 b^3}{b a^8}$; $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$

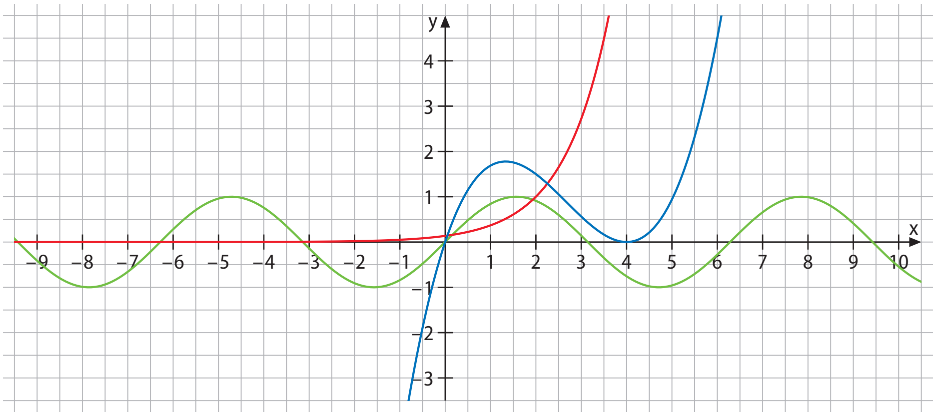
B Welche Auswirkungen haben die Parameter- und Termveränderungen auf den Graphen der Funktion?

a) $f_1(x) = 2(x-3)^2 + 4$ im Vergleich zu $f(x) = x^2$
b) $g_1(x) = -x^{-5}$ im Vergleich zu $g(x) = x^5$
c) $h_1(x) = -(x-2)^2 \cdot (x+1)$ im Vergleich zu $h(x) = x^3$
d) $k_1(x) = 0{,}5 \cdot \sin(x + \pi) - 1$ im Vergleich zu $k(x) = \sin(x)$

C Untersuchen Sie auf das Verhalten der Funktionen für $x \to \pm\infty$.

a) $f(x) = (x+1)^3 \cdot (x-2)^2$ **b)** $f(x) = x^{-3}$ **c)** $f(x) = e^{-x}$

2 Die Abbildung zeigt Ausschnitte aus den Graphen einer ganzrationalen Funktion f, einer trigonometrischen Funktion g und einer Exponentialfunktion h.



a) Ordnen Sie die Funktionen f, g und h den abgebildeten Graphen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

b) Geben Sie für den Graphen der Exponentialfunktion einen möglichen Funktionsterm an. Erklären Sie, wie Sie dabei vorgegangen sind.

c) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen der Exponentialfunktion unter Verwendung der Fachsprache.

d) Eine Exponentialfunktion k mit k (x) hat den Funktionsterm $k(x) = (x-2)^2 \cdot e^x$. Untersuchen Sie die Funktion auf ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$ sowie für $x \to 0$ und skizzieren Sie anschließend den zugehörigen Graphen.

e) Untersuchen Sie die Funktion k (x) auf Extrema.

f) Beschreiben Sie, wie Sie vorgehen würden, um die Schnittpunkte des Graphen von k mit der Geraden $y = 0{,}5x + 3$ zu bestimmen.

Aufgabe 3

Warm up

A Lösen Sie die Gleichungen.

a) $5^{2x} - 4 \cdot 5^x = 0$ **b)** $3^{x+2} - 4 \cdot 3^x = 10$ **c)** $7^{x-3} - 49^x = 0$

B Untersuchen Sie die Funktionen auf Null- und auf Extremstellen im Intervall $[-8;\ 8]$.

a) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^x$ **b)** $f(x) = x^3 (x-2)^2$ **c)** $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

3 Sebastian Vettel testet seinen Ferrari. Seine Geschwindigkeit kann durch die Funktion f mit $f(t) = 100 + 160e^{-30t}$ beschrieben werden ($f(t)$ in km/h, $0 \le t \le 0{,}05$, t in h).

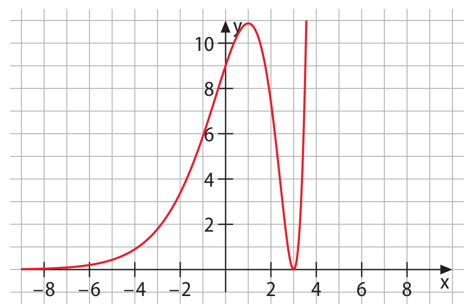
a) Berechnen Sie $f(0)$ und $f'(0)$ und interpretieren Sie beide Ergebnisse im Sachzusammenhang.

b) Skizzieren Sie den Graphen von $f(t)$ im Intervall $[0;\ 0{,}05]$ mit geeigneter Skalierung.

c) Wie könnte die zum Geschwindigkeitsverlauf passende Strecke aussehen? Beschreiben Sie. Wie könnte danach der weitere Streckenverlauf aussehen und welche Auswirkungen hätte dies auf den Graphen?

d) Nun legen wir die Funktion $g(x) = (3-x)^2 \cdot e^x$ zugrunde, die den abgebildeten Graphen hat. Bestimmen Sie rechnerisch die Nullstellen des Graphen und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

e) Bestimmen Sie rechnerisch die Extremstellen des Graphen.



Reflexion

Wie sehen typische Klausuraufgaben aus?

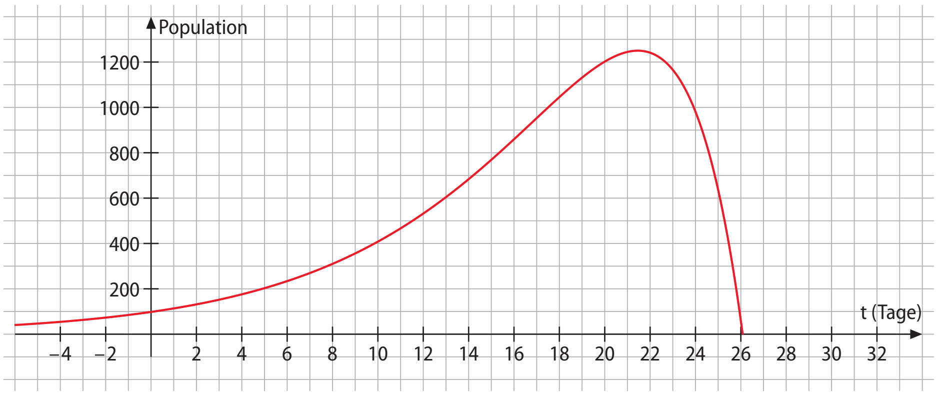
- Den Einfluss von Parametern bei der Funktion $f(x) = a \cdot b^x + d$ beschreiben und bei Zuordnungsaufgaben Graph – Term anwenden können
- Aufstellen eines Terms zu einer gegebenen Sachsituation, Sachsituationen modellieren
- Graphen im Sachzusammenhang interpretieren und umgekehrt
- Ableitungen im Sachzusammenhang interpretieren und Ableitungen berechnen
- Signifikante Punkte eines Graphen (Nullstellen, Extremstellen) berechnen und diese jeweils in Beziehung zur Sachsituation setzen
- Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitung erkennen, diese begründen und Graphen als Ableitungsgraphen identifizieren
- Exponentialgleichungen lösen und im Sachzusammenhang interpretieren

Typische Aufgabenteile für das Warm up:

- Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen sowie von Bruch-, Wurzel- und Potenzgleichungen
- Extrema von Funktionen bestimmen
- Aussagen treffen über den Einfluss von Parametervariationen auf Funktionsgraphen
- Anwenden der Potenzgesetze
- Berechnen bzw. Abschätzen von Logarithmen
- Vereinfachen von Ausdrücken, die die Euler'sche Zahl e enthalten

Im Folgenden finden Sie Aufgaben, wie sie zu diesem Kapitel passend in einer mündlichen Abiturprüfung gestellt werden können.

1 In der Landwirtschaft werden zur Schädlingsbekämpfung häufig Pestizide eingesetzt. Die Abbildung zeigt die zeitliche Entwicklung des Bestands einer Schädlingspopulation, die man mit Pestiziden einzudämmen versuchte.



a) Beschreiben Sie den Graphen und was er über die zugrunde liegende Realsituation aussagt. Wann wurde ungefähr mit dem Einsatz des Schädlingsbekämpfungsmittels begonnen?

b) Bestimmen Sie anhand der Abbildung $f'(6)$. Was besagt dieser Wert im Sachzusammenhang?

c) Begründen Sie, dass von den angegebenen Termen $f_3(t)$ die Realsituation am besten beschreibt:
$f_1(t) = t^2 \cdot (0{,}2t - 4)^2 + 100$ $\quad$ $f_2(t) = 100 \cdot e^{0{,}1t}$ $\quad$ $f_3(t) = 100 \cdot e^{-0{,}15t} - 2e^{0{,}3t}$.
Skizzieren Sie die zu den beiden anderen Funktionstermen gehörenden Graphen in einem Koordinatensystem wie dem oben abgebildeten.

d) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f_3 an und begründen Sie Ihre Entscheidung.

e) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Schädlingsbestand ein Maximum erreichte. Welche maximale Population wurde erreicht?

f) Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Population ungefähr 550 Schädlinge betrug. Zeichnen Sie den zugehörigen Punkt in die Abbildung ein. Welche Bedeutung hat dieser Punkt?

g) Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem kein Schädling mehr vorhanden war. Verwenden Sie dafür die Darstellung $f_3(t) = 100 \cdot e^{-0{,}15t} - 2e^{0{,}3t} = 2e^{0{,}3t}(50e^{-0{,}45t} - 1)$ für f_3. Erklären Sie, warum diese Darstellung hilfreich ist und welchen Satz Sie damit (eventuell) benutzen können.

h) Welchen Vorteil hat es, das vorliegende Wachstum mittels einer e-Funktion zu beschreiben?

i) Reflektieren Sie kritisch über den Einsatz von Schädlingsbekämpfungsmitteln in der Umwelt.

2 Landflucht ist ein globales Phänomen unserer Zeit. Derzeit leben in Deutschland 77 Prozent der Menschen in Städten oder Ballungsgebieten und nur 15 Prozent in Dörfern mit weniger als 5000 Einwohnern. So wächst auch München mit derzeit rund 1 500 000 Einwohnern jährlich um 0,75 %.

a) Skizzieren Sie den Graphen der diesem Bevölkerungswachstum zugrunde liegenden Funktion.

b) Erklären Sie, weshalb es sich um kein lineares Wachstum handeln kann. Wie müsste die Bevölkerung wachsen, wenn ihr ein lineares Wachstum zugrunde liegen würde?

c) Geben Sie einen Funktionsterm f (x) an, der das Bevölkerungswachstum beschreibt.

d) Erläutern Sie die Bedeutung der Ableitung an einer bestimmten Stelle für die zugrunde liegende Realsituation.

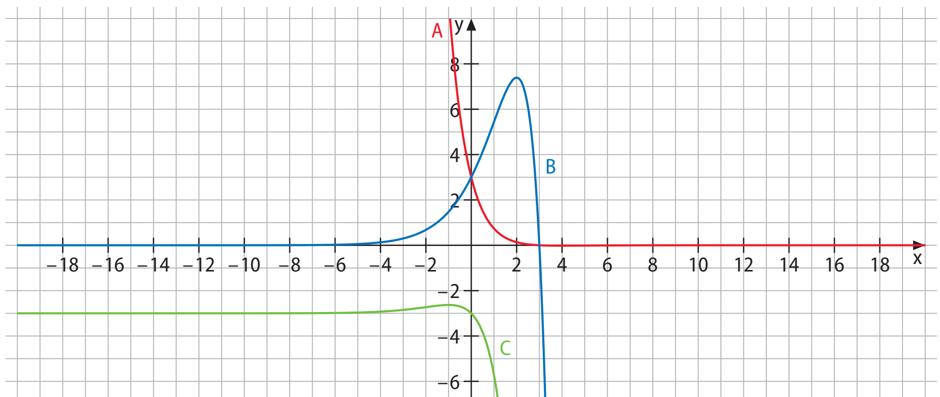
e) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f.

f) Von „Megacities" spricht man ab einer Bevölkerungszahl von 10 000 000 Einwohnern. Wann wäre München nach dem zugrunde liegenden Modell eine Megacity?

g) Diskutieren Sie die Grenzen des vorgegebenen Wachstumsmodells.

3 Gegeben sind drei Funktionen und ihre Graphen:

$f_1(x) = -(x-3) \cdot e^{-x}$ $\quad$ $f_2(x) = -(x-3) \cdot e^{x}$ $\quad$ $f_3(x) = -x \cdot e^{x} - 3$



a) Entscheiden Sie begründet, welcher der Funktionsterme zu welchem der abgebildeten Graphen passt. Gehen Sie insbesondere darauf ein, weshalb der Graph B zu $f_2(x)$ gehört.

b) Erläutern Sie, wie man auf Basis des Funktionsterms $f_2(x) = -(x-3) \cdot e^{x}$ durch Betrachten großer und kleiner Werte für x den Kurvenverlauf erschließen kann. Gehen Sie dabei auch auf den Verlauf des Graphen zwischen $-1 < x < 2$ ein.

c) Berechnen Sie den Hochpunkt von $f_2(x)$ sowie seine Nullstelle und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

d) Beschreiben Sie die Bedeutung der x-Achse für den Graphen von $f_2(x)$.

e) Ermitteln Sie die Steigung des Graphen von $f_2(x)$ zeichnerisch und rechnerisch.

f) Ermitteln Sie zeichnerisch die Stelle, an der der Graph von $f_2(x)$ die Gerade $y = -3x + 3$ schneidet. Erläutern Sie, warum die rechnerische Bestimmung dieser Stelle schwierig ist.

g) Finden Sie eine Realsituation, die vom Graphen von $f_2(x)$ beschrieben wird. Gehen Sie dabei auch auf die wesentlichen Abschnitte und Eigenschaften des Graphen ein.

h) Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage:
„Wachstum kann stets gut durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden."

Reflexion

Fragen, die im Laufe eines mündlichen Abiturs gestellt werden könnten	Hilfe
Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen der natürlichen Exponentialfunktion unter Verwendung mathematischer Fachbegriffe.	S. 62
Erläutern Sie am Beispiel der Exponentialfunktion, was man unter einer Asymptote versteht.	S. 54/1
Beschreiben Sie Anwendungskontexte, in denen Exponentialfunktionen eine Rolle spielen.	S. 57/4, 74
Beschreiben Sie an einem Beispiel, was man unter einer verketteten Exponentialfunktion versteht und wofür Sie die Kettenregel gebrauchen können.	S. 64/4
Führen Sie ein Beispiel für eine zusammengesetzte Exponentialfunktion an, die man mit der Produktregel ableiten kann.	S. 64/4
Beschreiben Sie (möglichst mehrere) Verfahren, mit denen Sie Exponentialgleichungen lösen können.	S. 54/2, 68
Erläutern Sie am konkreten Beispiel, was man unter dem „ln“ versteht.	S. 59, 68
Warum ist der natürliche Logarithmus ln nur für positive Zahlen definiert?	S. 59
Was versteht man unter der Euler´schen Zahl e? Wie kann man sie berechnen, welche Eigenschaften besitzt sie? Gehen Sie dabei auch auf die Zahl e als Grenzwert ein.	S. 59
Zu welchem Zahlbereich gehört die Zahl e? Welche andere bekannte Zahl weist ähnliche Eigenschaften auf? Kontextualisieren Sie Ihre Antwort, indem Sie allgemein auf Zahlbereiche und ihre Eigenschaften eingehen.	S. 59
Grenzen Sie am konkreten Beispiel die Operationen Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren gegeneinander ab.	S. 69
Erläutern Sie folgenden Satz: „Wurzelfunktionen verhalten sich zu quadratischen Funktionen wie die Logarithmus- zur Exponentialfunktion.“	S. 69
Erläutern Sie (möglichst an einem Beispiel), weshalb man die Exponentialfunktion einem Wachstum nur für einen bestimmten Zeitraum zugrunde legen kann.	S. 75
Beschreiben Sie, welche Veränderungen Parametervariationen am Graphen der Exponentialfunktion bewirken. Gehen Sie dabei auf die Parameter a, b und d in $f(x) = a \cdot b^x + d$ ein.	S. 62, 63
Diskutieren Sie das Steigungsverhalten von Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen im Vergleich.	S. 67/ Nachgefragt
Warum ist die Ableitung von $f(x) = e^{-x}$ nicht $f'(x) = e^{-x}$? Begründen Sie graphisch-geometrisch, indem Sie den Graphen von $f(x) = e^{-x}$ zeichnen.	S. 62, 63
Finden Sie (möglichst mehrere) Begründungen, weshalb die Ableitung von $f(x) = e^x$ nicht $f'(x) = x \cdot e^{x-1}$ ist.	S. 59
Wie können Sie auf Basis einer Wertetabelle entscheiden, ob ein exponentielles Wachstum vorliegt? Erklären Sie, wie Sie dann den Anfangsbestand und den Wachstumsfaktor bestimmen.	S. 74

2 Alles im Blick

In diesem Kapitel haben Sie gelernt, …

… dass man mit der natürlichen Exponentialfunktion viele Wachstumsvorgänge in Natur und Umwelt beschreiben kann und dass diese Modellierung auf der mathematischen Seite deshalb sinnvoll ist, weil die natürliche Exponentialfunktion mit ihrer Ableitung übereinstimmt.

Im Detail haben Sie gelernt, …

Kap. 2.1

Die Euler'sche Zahl und die natürliche Exponentialfunktion

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… die besondere Bedeutung der Basis e bei Exponentialfunktionen zu beschreiben und erläutern. … die Euler'sche Zahl e näherungsweise zu bestimmen. … die Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x) = e^x$ anzugeben und einen Weg zu beschreiben, wie man diese ermitteln kann. … die Kettenregel zum Ableiten von Funktionstermen verwenden, bei denen die äußere Funktion eine Exponentialfunktion ist.	Wir haben bei einem Wachstumsvorgang anhand der Zuwachsraten erkannt, dass es sich um ein **exponentielles Wachstum** handelt, da sich der neue Bestand aus dem alten berechnet, indem man mit stets derselben Zahl multipliziert. Wir haben den Graphen der Ableitung der allgemeinen **Exponentialfunktion** $\mathbf{f(x) = b^x}$ ermittelt und festgestellt, dass es sich wieder um eine Exponentialfunktion handelt, dass also gilt: $\mathbf{f'(x) = k \cdot b^x}$. Wir haben k für ein konkretes b mithilfe des Differenzenquotienten bestimmt und uns gefragt, ob es ein b gibt, sodass gilt: $f(x) = f'(x)$. Durch Ausprobieren und Einschachteln haben wir die **Euler'sche Zahl** $\mathbf{e = 2{,}71828\ldots}$ gefunden, für die gilt: $\mathbf{f(x) = e^x = f'(x)}$. Wir haben dies genutzt, um den Vorfaktor k in der Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion rechnerisch zu ermitteln. So erhielten wir für f mit $f(x) = b^x$: $\mathbf{f'(x) = \ln(b) \cdot b^x}$.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… die Ableitungen von (natürlichen) Exponentialfunktionen, auch von zusammengesetzten, zu berechnen.	S. 60/4, 64/4	S. 59
… die Ableitungen der (natürlichen) Exponentialfunktionen zu nutzen, um Eigenschaften des Graphen zu ermitteln: Extremstellen, Monotonie.	S. 64/6	S. 62, 63
… Termen von Exponentialfunktionen die zugehörigen Graphen und diesen wiederum die zugehörigen Ableitungsgraphen zuzuordnen.	S. 65/10, 67/19	S. 62, 63

Kap. 2.2

Die Graphen von Exponentialfunktionen und die Wirkung von Parametern

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… charakteristische Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ zu beschreiben und den Graphen unter Verwendung charakteristischer Eigenschaften (z. B. waagerechte Tangente, Strebeverhalten) zu skizzieren. … den Einfluss von Veränderungen am Funktionsterm der Funktion f mit $f(x) = a \cdot b^x + d$ auf den Graphen zu beschreiben (Verschiebung, Streckung, Spiegelung) und aus gegebenen Graphen Aussagen über die Parameter abzuleiten.	Ausgangspunkt waren die Eigenschaften des Graphen der allgemeinen Exponentialfunktion f mit $\mathbf{f(x) = b^x}$: x-Achse als Asymptote, $f(0) = b$, streng monotones Wachsen. Darauf aufbauend haben wir die Parameter verändert und die Auswirkungen auf den Graphen der Funktion und auf den der Ableitungsfunktion beobachtet: Ist $0 < b < 1$, fällt der Graph; für $b > 0$ ist der Graph monoton steigend. Der Graph der Ableitungsfunktion verläuft oberhalb der x-Achse, die für beide Fälle die Asymptote ist. Für $\mathbf{f(x) = a \cdot b^x + d}$ haben wir für die Parameter a, c und d Folgendes herausgefunden: a bestimmt das Steigen $(a > 0)$ bzw. Fallen $(a < 0)$ des Graphen; c lässt die Funktion stärker oder langsamer steigen; d bewirkt eine Verschiebung nach oben oder unten, wodurch auch die Asymptote verschoben wird.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… die Auswirkung von Parameterveränderungen auf den Graphen zu beschreiben und umgekehrt.	S. 65/11, 66/17	S. 62, 63
… Termen von Exponentialfunktionen mit Parametern die zugehörigen Graphen und diesen wiederum die zugehörigen Ableitungsgraphen zuzuordnen.	S. 66/17, 67/19	S. 62, 63

Kap. 2.3

Exponentialgleichungen und natürlicher Logarithmus

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… den (natürlichen) Logarithmus einer Zahl als Lösung einer Exponentialgleichung zu verwenden. … Exponentialgleichungen graphisch zu lösen. … Anwendungskontexte anzugeben und zu erkennen, die auf das Lösen einer Exponentialgleichung hinauslaufen.	Ausgangspunkt unserer Überlegungen waren Fragen wie „Wann hat eine Population eine bestimmte Größe erreicht?", „Wann ist die Hälfte eines radioaktiven Stoffes zerfallen?" – Fragen also, die auf **Exponentialgleichungen** hinauslaufen. In ihnen wird – graphisch interpretiert – bei einer Exponentialfunktion die x-Koordinate zu einer bestimmten y-Koordinate gesucht. Lösen kann man solche Exponentialgleichungen … ■ durch Ausprobieren (systematisches Einsetzen von Zahlen) ■ graphisch durch Schnittstellenbestimmung ■ rechnerisch durch den **natürlichen Logarithmus ln**: Es gilt: $e^x = c \Leftrightarrow \log_e(c) = x$

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… algebraische Ausdrücke mit ln und e zu vereinfachen.	S. 70/1–3	S. 68, 69
… Exponentialgleichungen rechnerisch und graphisch zu lösen, einmal mit dem Logarithmus, zum anderen über Umformungen mithilfe der Potenzgesetze.	S. 70/5–8	S. 68, 69

Kap. 2.4

Exponentialfunktion und Logarithmus in Anwendungen

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… Kenntnisse um die Exponentialfunktion zur Modellierung außermathematischer Sachverhalte und zur Funktionsbestimmung zu verwenden.	Ausgehend von den Daten eines Epidemieverlaufs haben wir uns das zugrunde liegende Wachstum angeschaut. Wir haben den Wachstumsfaktor aus den Daten bestimmt, indem wir die Quotienten benachbarter Zahlen berechnet und deren Mittelwert gebildet haben. Über die Beziehung $b^x = (e^{\ln(b)})^x = e^{x \cdot \ln(b)}$ haben wir die Funktion in eine natürliche Exponentialfunktion umgewandelt. So kann man leicht die Wachstumsraten der Funktion bestimmen.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… Daten zu vervollständigen, die sich aus der Funktionsgleichung des zugrunde liegenden exponentiellen Wachstums ergeben und aus Daten die Funktionsgleichung des exponentiellen Wachstums zu ermitteln.	S. 76/1, 2	S. 74, 75
… Daten dahingehend zu untersuchen, ob ihnen ein exponentielles Wachstum zugrunde liegt.	S. 76/1, 2	S. 74, 75
… die Parameter B(0) und k von der dem Wachstum zugrunde liegenden Exponentialfunktion $B(t) = B(0) \cdot e^{k \cdot t}$ zu bestimmen.	S. 77/7–9	S. 74, 75
…. Fragen (mathematisch) zu beantworten, die für das einer Realsituation zugrunde liegende exponentielle Wachstum relevant sind.	S. 78/10–14	S. 74, 75

Wie Archäologen Exponentialfunktionen zur Altersbestimmung nutzen – und wie der Klimawandel dies bald verhindern könnte

Wurde im „Turiner Grabtuch" tatsächlich der Leichnam Jesu eingewickelt? Die wissenschaftliche Antwort auf diese viel diskutierte Frage ist eindeutig: Eine 1988 durchgeführte C14-Datierung ergab, dass das Leinengewebe aus dem 14. Jahrhundert stammt.

Doch was verbirgt sich hinter der **Altersbestimmung per C14-Datierung**?

Radioaktivität

Radioaktive Substanzen haben instabile Atomkerne, die sich spontan unter Aussendung von Teilchen und Abgabe von Energie in einen anderen Kern umwandeln.
Das radioaktive Kohlenstoff-Isotop C14 entsteht in der oberen Atmosphäre der Erde, wenn dort Neutronen der kosmischen Strahlung mit Stickstoff reagieren. Der Stickstoff verliert dabei ein Proton, und es entsteht das Isotop C14. Neben C14 gibt es auf der Erde die stabilen Kohlenstoff-Isotope C12 und C13.

Die Konzentration des radioaktiven Kohlenstoffs C14 in der Atmosphäre ist äußerst gering, sein Verhältnis zu den beiden stabilen Kohlenstoff-Isotopen beträgt ungefähr eins zu einer Billion.
Trotz seines geringen Vorkommens ist C14 in der Natur nachweisbar. In Form von CO_2 nutzen es Pflanzen für die Photosynthese, Tiere und Menschen nehmen es mit der Nahrung auf. Durch den Kohlenstoffkreislauf kann die C14-Konzentration bis etwa 60 000 v. Chr. zurückreichend als stabil angesehen werden.
Die Altersbestimmung mithilfe der **Radiocarbonmethode** nutzt Folgendes aus: Wenn ein Organismus stirbt, kann er kein neues C14 mehr aufnehmen. Da C14 radioaktiv zerfällt, reduziert sich die Zahl seiner Atome im Organismus. Gelingt es z. B., die in Knochen verbliebene Menge C14 zu bestimmen, lässt sich über die Halbwertszeit des C14-Isotops berechnen, wann ein Organismus gestorben ist.

Radioaktivität, Altersbestimmung und exponentielles Wachstum

Der radioaktive Zerfall ist ein exponentieller Prozess, dessen Zerfallsgesetz lautet:
$\mathbf{N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}}$, wobei N_0 die Ausgangsmenge ist, N (t) die Menge der radioaktiven Substanz zum Zeitpunkt t und k eine **stoffspezifische Zerfallskonstante** mit $k > 0$.

Für C14 ist $k = 0{,}00012$.

Merke

Verläuft ein radioaktiver Zerfallsprozess exponentiell nach dem Gesetz $\mathbf{N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}}$, dann gilt für die **Halbwertszeit** $t_{½} = \frac{\ln(2)}{k}$.

Halbwertszeit

C14 hat wie alle radioaktiven Stoffe eine **Halbwertszeit**; das ist die Zeit, nach der von einer bestimmten Menge nur noch die Hälfte vorhanden ist (unabhängig von der Ausgangsmenge). Für C14 beträgt die Halbwertszeit etwa 5730 Jahre.

Wie kann man die **Zerfallskonstante** von C14 aus der Halbwertszeit bestimmen?
C14 hat eine Halbwertszeit von 5730 Jahren, d. h. nach dieser Zeitspanne $t = 5730$ ist von der Ausgangsmenge N_0 noch $N(t) = \frac{1}{2}N_0$ vorhanden. Aus dem Ansatz $\mathbf{N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}}$ ergibt sich:

$\frac{1}{2}N_0 = N_0 \cdot e^{-5730k}$ $\qquad \frac{1}{2} = e^{-5730k}$

Logarithmieren liefert: $-5730k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$. Daraus folgt: $k = 0{,}00012$.

1 Am 19. September 1991 machten Wanderer am Tisenjoch in den Ötztaler Alpen eine sensationelle Entdeckung: Sie fanden eine mumifizierte Leiche, die die Gletscherschmelze gerade erst freigelegt hatte. Nach dem Fundort wurde die Leiche „Ötzi" genannt. In der Kleidung Ötzis fanden sich Gräser und Halme, die noch etwa 53 % der ursprünglichen C14-Menge aufwiesen. Erschließen Sie sich daraus, wann Ötzi ungefähr gelebt hat.

2 Das radioaktive Plutonium-Isotop Pu240 hat die Halbwertszeit $t_{½} = 6600$ Jahre.

a) Berechnen Sie die Zerfallskonstante.

b) Zeichnen Sie das Schaubild der Zerfallsfunktion für $N_0 = 100$ g. Wählen Sie eine geeignete Skalierung der x-Achse.

c) Berechnen Sie, wann nur noch 1 %, d. h. 1 g, der Ausgangsmenge vorhanden ist.

d) Die Zerfallsgeschwindigkeit wird durch die Ableitung $N'(t)$ angegeben. Wie groß ist sie nach 100 (1000) Jahren?

3 Das radioaktive Strontium-Isotop Sr90, das bei nuklearen Katastrophen wie der von Tschernobyl in größeren Mengen freigesetzt wird, hat die Zerfallskonstante $k = 0{,}024$.

a) Geben Sie die Zerfallsfunktion an.

b) Wann hat sich ein Anfangsbestand von 10 g (1 kg) halbiert?

Sr90 ähnelt in seiner chemischen Zusammensetzung dem Calcium. Der Körper lagert es deshalb in den Knochen ein. Dies erhöht die Gefahr, Tumore oder eine Leukämieerkrankung zu entwickeln.

Klimawandel und die Radiocarbonmethode

Noch ist die Radiocarbonmethode zuverlässig. Infolge der stark zunehmenden CO_2-Konzentration in der Atmosphäre könnte das aber bald Geschichte sein.
Das Problem besteht darin, dass in dem aus fossilen Brennstoffen wie Kohle, Öl und Erdgas freigesetzten CO_2 kein C14 enthalten ist. Dadurch sinkt der C14-Gehalt im Kohlenstoffkreislauf. Modellstudien zeigen, dass bei einem unveränderten CO_2-Ausstoß spätestens in 50 Jahren der C14-Wert in der Atmosphäre identisch sein wird mit Werten aus dem Mittelalter – und das würde eine exakte Datierung zukünftig unmöglich machen.

BNE – Bildung für nachhaltige Entwicklung

Nachgefragt

- Skizzieren Sie eine Argumentation, wie man begründen könnte, dass die Halbwertszeit umgekehrt proportional zur Zerfallskonstanten ist.
- Skizzieren Sie einen Weg, wie man die Halbwertszeit aus dem Zerfallsgesetz ermitteln kann. Erläutern Sie in diesem Kontext auch, warum die Halbwertszeit von der Ausgangsmenge der radioaktiven Substanz unabhängig ist.
- Erläutern Sie, woran man am Zerfallsgesetz erkennen kann, dass es eine exponentielle Abnahme beschreibt.
- Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage: „Eine radioaktive Substanz ist am Anfang am gefährlichsten, die Bedrohung, die von ihr ausgeht, verschwindet aber nie ganz."

Anwenden der Differentialrechnung:

Extremwertprobleme und Modellieren mit Funktionen

3

Einstieg

In diesem Kapitel wollen wir uns anschauen, welche Fragen sich einem Bau-Unternehmen, das Straßen und Brücken baut, in der Praxis stellen.

Wir werden feststellen, dass diese Fragen oft nur mithilfe der Mathematik beantwortet werden können.

In einem **ersten Schritt** wenden wir uns dem Straßenbau zu und untersuchen eine Kurve in Bezug auf deren Krümmung.

Am Ende des ersten Unterkapitels können Sie die **Krümmung einer Kurve** durch Zahlen exakt beschreiben und haben so neben der Steigung ein weiteres Werkzeug zur Untersuchung von Graphen.

In einem **zweiten Schritt** fragen wir uns, ob und wie man von den Gesamtkosten auf die Stundenlöhne der Arbeiter schließen kann.

Am Ende des zweiten Unterkapitels haben Sie mit der **Matrixschreibweise** eine Möglichkeit kennen gelernt, Daten übersichtlich aufzuschreiben. Mit dem **Gauß-Algorithmus** werden Sie über ein starkes Werkzeug verfügen, um Probleme lösen zu können.

In einem **dritten Schritt** begleiten wir die Brückenbauer. Es geht darum, die Brücke durch einen Funktionsterm zu beschreiben, um weitere Berechnungen anstellen zu können.

Im dritten Unterkapitel nutzen Sie die erworbenen Werkzeuge, um zu gegebenen Daten einen **passenden Funktionsterm aufzustellen**.

Im **vierten Schritt** beschäftigen wir uns mit der Kalkulation für unterschiedliche Abläufe und damit , für funktionale Zusammenhänge das Optimum zu finden.

Im vierten Unterkapitel nutzen Sie die erworbenen mathematischen Werkzeuge, um zu gegebenen Realsituationen den **bestmöglichen, d. h. optimalen Wert zu berechnen**.

„Ich behaupte aber, dass in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist."

Immanuel Kant (1786)

Ausblick

Bei der mathematischen Modellierung von Realsituationen geht es zum einen darum, über einen Fundus geeigneter mathematischer Werkzeuge zu verfügen sowie sie zielgerichtet auswählen und einsetzen zu können.

Zum anderen müssen hierbei in der Regel funktionale Zusammenhänge hergestellt und somit Funktionsterme aufgestellt werden, die man anschließend untersucht, insbesondere im Hinblick auf gewisse Optimalwerte.

Ich kann schon …

Vorwissen 1

Zwei Gleichungen mit zwei Variablen lösen

Zwei Gleichungen mit x und y wie z. B. **1** $\begin{aligned} y &= -5x + 21 \\ y &= 4x - 6 \end{aligned}$ oder **2** $\begin{aligned} y &= -5x + 21 \\ 2y &= 8x - 12 \end{aligned}$

nennt man ein **lineares Gleichungssystem (LGS)**. Wenn ein eindeutiges Zahlenpaar $(x|y)$ existiert, welches die Lösung beider Gleichungen ist, erhält man dieses mit einem der folgenden Lösungsverfahren.

Gleichsetzungsverfahren

Im LGS **1** die Terme $-5x + 21$ und $4x - 6$ **gleichsetzen**: $4x - 6 = -5x + 21$
Diese Gleichung löst man nach x auf:

$$\begin{aligned} 4x - 6 &= -5x + 21 && |\ -(4x-6) \\ 0 &= -5x + 21 - 4x + 6 \\ 0 &= -9x + 27 && |\ :(-9) \\ 0 &= x - 3 \end{aligned}$$

$x = 3$ und damit $y = 4 \cdot 3 - 6 = 6$ Lösung: $(3|6)$
Geometrisch interpretiert bestimmt man so den **Schnittpunkt der Graphen zweier linearer Funktionen**.

Einsetzungsverfahren

Im LGS **2** den Term $-5x + 21$, der ja gleich y ist, an die Stelle des y des anderen Terms **einsetzen**:
$y = -5x + 21$
$\Rightarrow 2 \cdot (-5x + 21) = 8x - 12$
Diese Gleichung löst man nach x auf:

$$\begin{aligned} -10x + 42 &= 8x - 12 && |\ -8x - 42 \\ -18x &= -54 && |\ :(-18) \end{aligned}$$

$x = 3$ und damit $y = 4 \cdot 3 - 6 = 6$ Lösung: $(3|6)$
Algebraisch interpretiert ersetzt man **im Waagemodell** ein Element der einen Waagschale durch Elemente der anderen Waagschale.

Vorwissen 2

Die Steigung als Veränderung der y-Werte interpretieren

- Eine positive (negative) Steigung bedeutet, dass die y-Werte größer (kleiner) werden. Eine Steigung von null bedeutet, dass sich die y-Werte dort nicht ändern.
- Da die Steigung durch die 1. Ableitung wiedergegeben wird, geben die Werte der 1. Ableitung Auskunft darüber, wie sich die Funktionswerte ändern. Allerdings ist eine Veränderung immer ein Prozess über mehrere x-Werte hinweg. Die 1. Ableitung gibt aber nur die momentane Änderung (Veränderungstendenz) an einer bestimmten Stelle x an.
- Beim graphischen Ableiten wird der Ableitungswert nur so genau, wie genau man die Tangente zeichnen kann. Beim umgekehrten Ableiten (vom Graphen der Ableitungsfunktion zum Graphen der Ausgangsfunktion, siehe Kapitel 1) kann deshalb der y-Wert nur näherungsweise skizziert werden.

Graph der Ableitungsfunktion f'

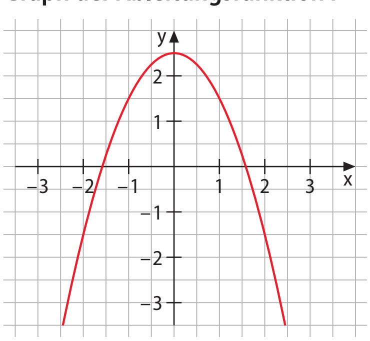


Abb. 1

Beispiele für mögliche Graphen der Ausgangsfunktion f

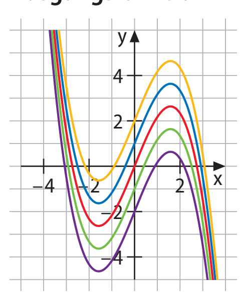


Abb. 2

Am Graphen von f' (Abb. 1) erkennt man z. B., dass die Steigung von f bei $x \approx -1{,}6$ von – nach + wechselt, der Graph der Ausgangsfunktion f dort also ein lokales Minimum haben muss.

Aufgaben 1

1 Lösen Sie das Gleichungssystem **1** durch Gleichsetzen und **2** durch Einsetzen.
I $4x + 2y = 8$ II $-9x + 15 = 3y$

Lösung:

1 *Beide Gleichungen nach y auflösen:*

$4x + 2y = 8 \quad | :2$
$-9x + 15 = 3y \quad | :3$

$2x + y = 4 \quad | -2x$
$-3x + 5 = y$

$y = -2x + 4$
$y = -3x + 5$
Gleichsetzen:
$-2x + 4 = -3x + 5 \quad | +3x - 4$
$x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$ ***Lösung (1|2)***

2 *Eine Gleichung nach y auflösen:*

$4x + 2y = 8$
$-9x + 15 = 3y \quad | :3$

$4x + 2y = 8$
$-3x + 5 = y$

y in Gleichung I einsetzen:
$4x + 2(-3x + 5) = 8$
$4x - 6x + 10 = 8$
$-2x = -2 \Rightarrow x = 1$
$y = -3 \cdot 1 + 5 = 2 \Rightarrow$ ***Lösung (1|2)***

1.1 Lösen Sie die Gleichungssysteme **1** durch Gleichsetzen und **2** durch Einsetzen.

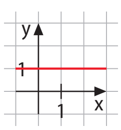
a) I $y = 4x - 1$
II $y = 2x + 5$

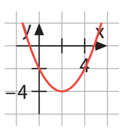
b) I $2x + y = 4$
II $-3x + 5 = y$

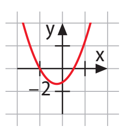
c) I $2x - 3y = 0$
II $-x + y = -1$

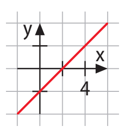
Aufgaben 2

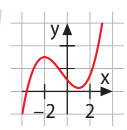
2 Finden Sie unter den abgebildeten Graphen möglichst viele Paare aus Funktionsgraph und zugehörigem Ableitungsgraph. Begründen Sie Ihre Zuordnungen.

1


2


3


4


5


Lösung:

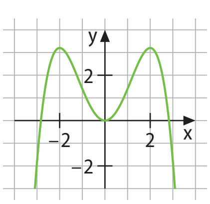
4 *hat konstante Steigung* $1 \Rightarrow$ **1** *ist Ableitungsgraph von* **4**.
4 *hat negative Werte links von* $x = 2$, *rechts davon positive.* **2** *hat links von* $x = 2$ *negative Steigung, rechts davon positive.* $\Rightarrow$ **4** *kann der Ableitungsgraph von* **2** *sein.*
Bei **3** *wechseln die Werte bei* $x = -2$ *von + nach – und bei* $x = 1$ *umgekehrt. Bei* **5** *wechselt die Steigung dort entsprechend.* $\Rightarrow$ **3** *kann der Ableitungsgraph von* **5** *sein.*

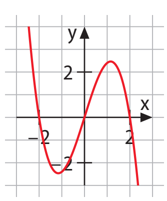
2.1 Ordnen Sie zu und skizzieren Sie zu jeder der Eigenschaften einen möglichen Graphen.

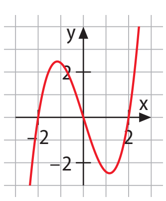
A $f'(x) > 0$
B $f'(x) < 0$
C $f'(x)$ wechselt von – nach +
D $f'(x)$ ist positiv und wird immer größer

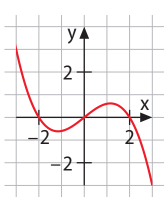
1 Tiefpunkt
2 y-Werte werden größer
3 y-Werte steigen schneller
4 y-Werte werden kleiner

2.2 Ordnen Sie dem grünen Graphen den richtigen Graphen der Ableitungsfunktion zu.



1


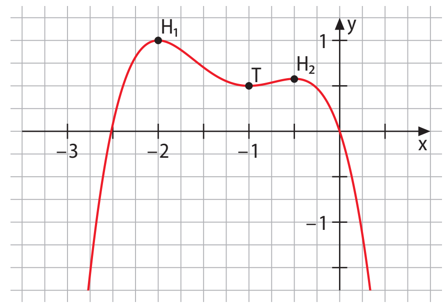
2


3


Vorwissen 3

Zwischen lokalem und globalem Extremum unterscheiden

Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -0{,}75x^4 - 3{,}5x^3 - 5{,}25x^2 - 3x$ besitzt die Extrempunkte $H_1(-2|1)$, $T(-1|0{,}5)$ und $H_2(-0{,}5|0{,}58)$ (siehe Abbildung).



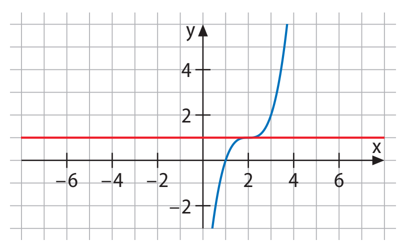
- Das **globale Maximum** der Funktion ist 1 (der y-Wert des Hochpunkts H_1), weil kein anderer y-Wert höher liegt. Der Wert 0,58 ist nur ein **lokales Maximum** bei $x = -0{,}5$.
- Der Wert 0,5 ist nur ein **lokales Minimum**; es gibt andere Funktionswerte, die kleiner sind.
- Auf dem Intervall [–2,5; 0] ist das **absolute Minimum** 0.
- Im abgebildeten Bereich ist das absolute Minimum –1,75 und wird an den Stellen $x \approx -2{,}75$ bzw. $x \approx 0{,}7$ angenommen.
- Betrachtet man aber alle reellen Zahlen für x, so gibt es **gar kein absolutes Minimum**, weil es keinen tiefsten Funktionswert gibt. Es gilt ja $f(x) \to -\infty$ für $x \to \pm\infty$.

Vorwissen 4

Notwendige und hinreichende Bedingungen für Extrema anwenden

Wenn es an einer Stelle x_0 ein Extremum geben soll, ist es **notwendig**, dass dort eine waagerechte Tangente vorliegt, d. h. dass die Steigung $\mathbf{f'(x_0) = 0}$ ist. Dies ist die **notwendige Bedingung für ein Extremum**.

Die Tatsache $f'(x_0) = 0$ ist aber nicht ausreichend („nicht hinreichend"), um sicher zu sein, dass es ein Extremum ist. Bei dem abgebildeten Graphen hat der Punkt (2 | 1) eine waagerechte Tangente, also $f'(2) = 0$, dieser Punkt ist aber kein Extremum.



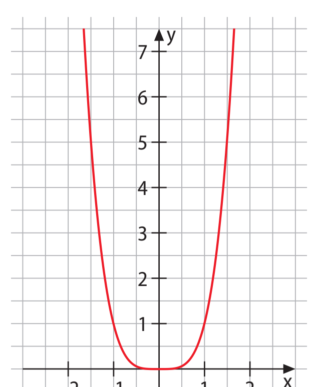
Für die **hinreichende Bedingung** haben wir zwei Möglichkeiten gelernt:

1. **Kriterium der höheren Ableitung:** $f''(x_0)$ berechnen. Wenn dies ungleich null ist, liegt ein Extremum vor.
2. **Vorzeichenwechselkriterium (VZW):** Man prüft $f'(x)$ für ein x kurz vor und kurz nach x_0. Ist die Steigung von f (x) unterschiedlich, so liegt ein Extremum vor.

Erklärvideo

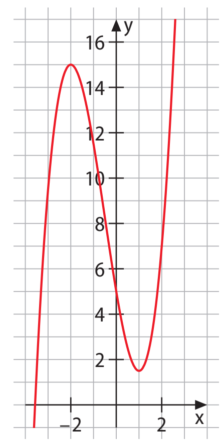
Mediencode 63021-05

Das 2. Kriterium ist das stärkere von beiden, wie das Beispiel $f(x) = x^4$ verdeutlicht. Offensichtlich liegt bei $x_0 = 0$ ein Extremum (Minimum) vor. Wegen $f'(x) = 4x^3$ ist mit $f'(0) = 0$ das notwendige Kriterium erfüllt, es gilt jedoch $f''(x) = 12x^2$ und $f''(x_0 = 0) = 0$, d. h. das 1. hinreichende Kriterium ist trotz Vorliegens einer Extremstelle nicht erfüllt. Das 2. hinreichende Kriterium ist aber erfüllt, denn z. B. $f'(-1) < 0$ und $f'(1) > 0$, womit ein Vorzeichenwechsel von f′ an der Stelle $x_0 = 0$ vorliegt.



Aufgaben 3

3 Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion f mit $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2 - 6x + 5$ und geben Sie die Art des Maximums bzw. des Minimums an.



Lösung:

$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6$

Bedingung für Extremstellen: $f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{-3 \pm 9}{6}$ $\qquad x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

Überprüfung mit der 2. Ableitung:

$f''(x) = 6x + 3 \Rightarrow f''(-2) = -9 < 0$ und $f''(1) = 9 > 0$.

Bei $x_1 = -2$ liegt somit ein Maximum und bei $x_2 = 1$ ein Minimum vor.

Berechnung der y-Koordinaten der Extrempunkte durch Einsetzen von $x_1 = -2$ bzw. $x_2 = 1$ in f(x): $f(-2) = 15$ und $f(1) = 1{,}5$.

Die Extrempunkte sind damit $H(-2\,|\,15)$ und $T(1\,|\,1{,}5)$.

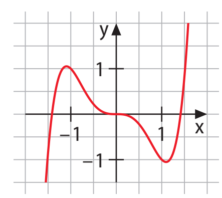
Bestimmung der Art der Extremstellen:

15 ist lokales Maximum, und 1,5 ist lokales Minimum. Beide sind nicht global. Globale Maxima bzw. Minima existieren nicht, da $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ gilt.

3.1 Bestimmen Sie jeweils die Extrempunkte der Funktion f und geben Sie die Art des Maximums bzw. Minimums an.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ **b)** $f(x) = 6x \cdot e^{-2x+1}$

c) $f(x) = 3\sin(x)$ für $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ **d)** $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$



3.2 Bestimmen Sie bei dem abgebildeten Graphen das absolute Maximum und das absolute Minimum für den dargestellten Ausschnitt.

Aufgaben 4

4 Ermitteln Sie rechnerisch die mögliche Extremstelle der Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ auf $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ und weisen Sie hinreichend nach, dass es sich tatsächlich um eine Extremstelle handelt.

Lösung:

$f'(x) = -\sin(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$\Rightarrow$ Stelle mit waagerechter Tangente $\Rightarrow$ mögliche Extremstelle.

$f''(x_1) = f''(0) = -\cos(0) = -1 \neq 0 \Rightarrow$ 1. hinreichende Bedingung erfüllt. Oder:

$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -(-1) = 1 > 0$ und $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$

$\Rightarrow$ VZW liegt vor $\Rightarrow$ 2. hinreichende Bedingung erfüllt.

4.1 Ermitteln Sie jeweils die mögliche Extremstelle von f und weisen Sie nach, dass es sich um eine Extremstelle handelt.

a) $f(x) = 2x^2 - x + 5$ **b)** $f(x) = \sin(x)$ auf $[0; \pi]$ **c)** $f(x) = x \cdot e^x$

4.2 Kombinieren Sie möglichst viele Paare von Kärtchen zu einer korrekten Wenn-Dann-Aussage.

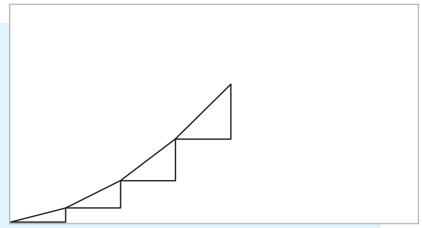
- $f'(x_0) = 0$
- bei x_0 liegt ein Extremum
- bei x_0 ist die Tangente waagerecht
- $f''(x_0) \neq 0$
- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$

3

3.1 Krümmung und Wendepunkte

Entdecken

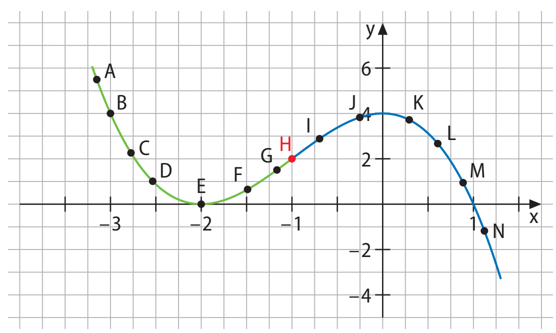
Wie entsteht die Krümmung der Straße?
Nehmen Sie ein DIN-A4-Blatt im Querformat und zeichnen Sie von der unteren linken Ecke ein Steigungsdreieck mit $\Delta x = 4$ und $\Delta y = 1$, also mit der Steigung $m_1 = \frac{1}{4}$, ein.
Zeichnen Sie von der oberen Ecke des Steigungsdreiecks ein weiteres mit $\Delta x = 4$ und Steigung $m_2 = \frac{2}{4}$.
Ergänzen Sie jeweils an der oberen Ecke ein weiteres Steigunsdreieck mit Breite $\Delta x = 4$ und $m_3 = \frac{3}{4}$, $m_4 = \frac{4}{4}$ usw.



- Wie viele Steigungsdreiecke müssen Sie zeichnen, bis Sie an den Blattrand stoßen?
- Was hätten Sie erhalten, wenn Sie die Steigung nicht verändert hätten?
- Wie muss sich die Steigung verändern, damit Sie genau in der gegenüberliegenden Blattecke ankommen?
- Was erhalten Sie, wenn Sie die Steigung bei jedem Abschnitt kleiner werden lassen?

Verstehen

Krümmung bedeutet offensichtlich, dass sich in einem Graphen kontinuierlich die Steigung ändert.
Wir sehen: Bei einer **Linkskurve** werden die Steigungen kontinuierlich größer bis zu einem gewissen **Punkt**; in diesem Punkt ist die Steigung maximal, danach geht der Graph in eine **Rechtskurve** über und die Steigungen werden kontinuierlich kleiner.

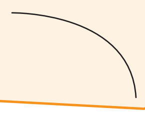


Was bedeutet es, wenn etwas kontinuierlich steigt oder fällt? Nach dem **Monotoniesatz** gilt: Eine Funktion heißt streng monoton steigend, wenn $f' > 0$ ist; sie heißt streng monoton fallend, wenn $f' < 0$ ist.
Da wir die Monotonie der Steigungen betrachten und die Steigungen durch die 1. Ableitung wiedergegeben werden, können wir folgern:

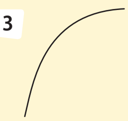
Merke

- Ist **$f''(x) > 0$ (positiv)**, so wachsen die Steigungswerte $f'(x)$ des Funktionsgraphen von f. Dadurch entsteht eine **Linkskurve**.
- Ist **$f''(x) < 0$ (negativ)**, so sinken die Steigungswerte $f'(x)$ des Funktionsgraphen von f. Dadurch entsteht eine **Rechtskurve**.
- Die Stelle x, an der der Graph einer Funktion von einer Rechtskurve in eine Linkskurve übergeht oder umgekehrt, heißt **Wendestelle** von f. Der zugehörige Punkt heißt **Wendepunkt**.
- Im **Wendepunkt** hat der Graph einer Funktion beim Übergang von einer Links- in eine Rechtskurve die maximale und beim Übergang von einer Rechts- in eine Linkskurve die minimale Steigung

Ist die zweite Ableitung negativ, so ist das nicht nur ein Hinweis auf eine Rechtskrümmung. Eine negative zweite Ableitung ist eine mathematische Beschreibung (Modell) von folgenden zehn Sachverhalten:

1


2 Die Steigung ist streng monoton fallend.

3


4 Rechtskurve

5

x	1	2	3	4
Steigung	–0,3	–0,4	–0,5	–0,6

6 Das Wachstum verlangsamt sich.

7 Der Differenzenquotient der Steigung ist negativ.

8 Die Ableitung der Ableitung ist negativ.

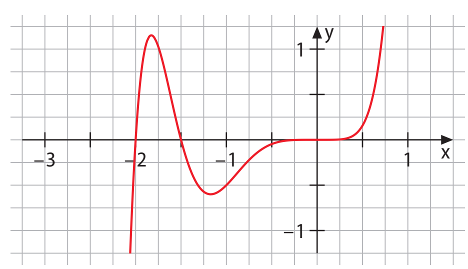
9 Der Abwärtstrend wird immer schneller.

10 Die 1. Ableitung wird immer kleiner.

Nun suchen wir noch nach einem Kriterium für die Wendestellen. Gibt es auch für Wendestellen ein **notwendiges** und zwei **hinreichende** Kriterien, und ist eines der beiden hinreichenden Kriterien (wie bei den Extremstellen) stärker als das andere?

Da der Wendepunkt ein Extremum der 1. Ableitung ist, können wir als **notwendiges Kriterium** für Wendestellen folgern: $\mathbf{f''(x_W) = 0}$.
Ein Extremum in der 1. Ableitung liegt aber nur dann vor, wenn auch das hinreichende Kriterium erfüllt ist. Analog zu den Extremstellen können wir folgern:
1. hinreichendes Kriterium: $f'''(x_W) \neq 0$.
2. hinreichendes Kriterium: Vorzeichenwechsel in $f''(x_W)$.
Bei den Extremstellen war das 2. hinreichende Kriterium das stärkere, denn es gab Fälle, in denen trotz des Nichterfülltseins des 1. Kriteriums dennoch eine Extremstelle vorlag.

Betrachten wir zur Untersuchung auf Wendestellen die Funktion f mit
$f(x) = (x+2) \cdot (x+1{,}5) \cdot x^5 = x7 + 3{,}5x^6 + 3x^5$.
Im Graphen erkennen wir: Die Funktion besitzt drei Wendestellen; eine davon ist $x_W = 0$. Wir überprüfen dies rechnerisch:
$f'(x) = 7x^6 + 21x^5 + 15x^4$
$f''(x) = 42x^5 + 105x^4 + 60x^3 = x^3(42x^2 + 105x + 60)$
$f'''(x) = 210x^4 + 420x^3 + 180x^2$



Es gilt: $f''(-1{,}62) = 0$; $f''(-0{,}88) = 0$; $f''(0) = 0$.
Es gilt aber auch: $f'''(-1{,}62) \neq 0$; $f'''(-0{,}88) \neq 0$; $f'''(0) = 0$.
Das Vorzeichenwechselkriterium in der 2. Ableitung ist aber bei allen drei Wendestellen erfüllt.

Merke

Das **notwendige Kriterium für Wendestellen** lautet: $\mathbf{f''(x_W) = 0}$.
Von den beiden hinreichenden Kriterien …
1. hinreichendes Kriterium: $\mathbf{f'''(x_W) \neq 0}$
2. hinreichendes Kriterium: Vorzeichenwechsel in $\mathbf{f''(x_W)}$
ist das 2. Kriterium das stärkere, während man bei dem ersten aus der Tatsache, dass $f'''(x_W) = 0$ ist, nicht schließen kann, dass keine Wendestelle vorliegt.

Erklärvideo
Mediencode 63021-06

Aufgaben

1 Berechnen Sie $f''(3)$ und entscheiden Sie ohne zu zeichnen, ob an der Stelle $x = 3$ der Graph von f eine Links- oder eine Rechtskurve ist.

a) $f(x) = x^3 - 10x^2 + 4$ **b)** $f(x) = 4 \cdot \cos(\pi x)$

Beispiel Wendepunkt berechnen

2 Berechnen Sie den Wendepunkt W der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

Lösung:

- *An einem Wendepunkt ist die 2. Ableitung weder positiv noch negativ. Es kommen also als Wendestellen nur solche x in Frage, für die* $\boldsymbol{f''(x) = 0}$ *gilt (**notwendiges Kriterium**). Also wird zunächst diese Gleichung gelöst:*
  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; $f''(x) = 6x - 12$. *Zu lösen ist also die Gleichung* $6x - 12 = 0$.
  Daraus folgt: Nur $x = 2$ *kann überhaupt eine Wendestelle sein.*
- *Mit dem **ersten hinreichendem Kriterium über die 3. Ableitung** überprüfen wir, ob auch tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt:* $f'''(2) = 6$. *Dies können wir so interpretieren: Die Veränderung ist positiv. Die Werte der 2. Ableitung werden hier also größer. Da f'' bei* $x = 2$ *null ist, kann „größer werden" nur bedeuten, dass die Werte von f'' von negativ zu positiv wechseln. Also wechselt der Graph von f von einer Rechts- in eine Linkskurve. Insgesamt können wir festhalten: Die 3. Ableitung an der potentiellen Wendestelle* $x = 2$ *ist ungleich null, d. h. es liegt tatsächlich eine Wendestelle vor.*
- *Mit dem **Vorzeichenwechsel-Kriterium** als **zweitem (und stärkerem) hinreichendem Kriterium** hätten wir dasselbe erhalten:*
  $f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow$ *Rechtkrümmung und* $f''(3) = +6 > 0 \Rightarrow$ *Linkskrümmung.*
  Der Graph geht also von einer Rechts- in eine Linkskurve über; es handelt sich um einen Wendepunkt.

3 Berechnen Sie die Wendepunkte der Graphen folgender Funktionen **1** mithilfe des Vorzeichenwechsel-Kriteriums und **2** mithilfe der 3. Ableitung.

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$ **b)** $f(x) = (x + 2) \cdot e^{-x}$

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$ **d)** $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

e) $f(x) = -\cos(2x) + 2$ für $x \in [0; \pi]$ **f)** $f(x) = (x - 1)^5 - 3x$

4 Untersuchen Sie die Graphen der folgenden Funktionen auf Wendepunkte.

a) $f(x) = 3e^{-2x+5} - 2$ **b)** $f(x) = 3\sin(\pi x - 5) + 7$ auf $[0; 2]$

c) $f(x) = 23x^2 - 47x + \sqrt{7}$ **d)** $f(x) = \frac{1}{x}$

5 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion f mithilfe der Ableitungen.

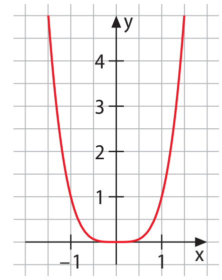
a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ **b)** $f(x) = 2x^2 + 2x + 2$

c) $f(x) = (x - 2) \cdot e^x$ **d)** $f(x) = -2x \cdot e^x$

Nachgefragt

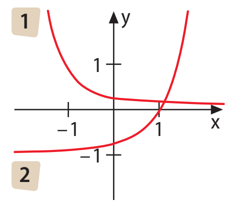
- Erläutern Sie den Zusammenhang von Steigung und Krümmung.
- Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen einem Wendepunkt des Graphen einer Funktion f und dem zugehörigen Punkt im Graphen der Ableitungsfunktion f'.
- Diana meint: „Bei ganzrationalen Funktionen liegt zwischen zwei Extremstellen stets eine Wendestelle." Hat sie Recht? Argumentieren Sie.

6 Der Graph der Funktion $f(x) = x^4$ (siehe Abbildung) hat offenbar keinen Wendepunkt im Ursprung, obwohl $f''(x) = 12x^2$ und damit $f''(0) = 0$ ist.
Überprüfen Sie diese Stelle mithilfe der beiden Wendestellenkriterien und bewerten Sie daraufhin die beiden Kriterien in Bezug auf ihre Stärke.



7 Beschreiben Sie das Krümmungsverhalten des Graphen der Funktion f:
Zunächst wächst die Steigung des Graphen von f kontinuierlich an. Ab $x = 2$ wird die Steigung immer kleiner. Ab $x = 4$ wir die Steigung dann wieder größer.

8 Zeichnen Sie einen Graphen, der linksgekrümmt ist und bei dem die y-Werte mit zunehmenden x-Werten kleiner werden.
Lösung: *Linkskrümmung bedeutet, dass die Steigungswerte f′(x) des Funktionsgraphen von f steigen. Es kommen also zwei prinzipielle Kurvenverläufe in Frage (siehe Abbildung). Da die y-Werte immer kleiner werden sollen, ist* **1** *ein möglicher Graph.*

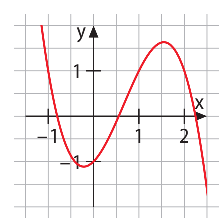


Beispiel
Krümmung und Graph

9 Zeichnen Sie einen Graphen, …
a) der linksgekrümmt ist und bei dem die y-Werte größer werden.
b) der rechtsgekrümmt ist und bei dem die y-Werte kleiner werden.
c) der rechtsgekrümmt ist und bei dem die y-Werte größer werden.

10 Formulieren Sie die zehn Sachverhalte auf Seite 97 für eine positive 2. Ableitung.

11 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 1$.
a) Beschreiben Sie die Veränderung der Steigung in diesem Ausschnitt.
b) Beschreiben Sie das Krümmungsverhalten.
c) An welcher Stelle befindet sich die größte Steigung?
d) Berechnen Sie die Werte der 2. Ableitung an den charakteristischen Punkten.



12 Skizzieren Sie einen Graphen mit einem Wendepunkt und jeweils der folgenden Eigenschaft.
a) Vor und nach dem Wendepunkt ist die Steigung negativ.
b) Vor und nach dem Wendepunkt ist die Steigung positiv.
c) Der gesamte Graph hat nur positive Steigung.
d) Der gesamte Graph hat nur negative Steigung und geht am Wendpunkt von einer Links- in eine Rechtskurve über.

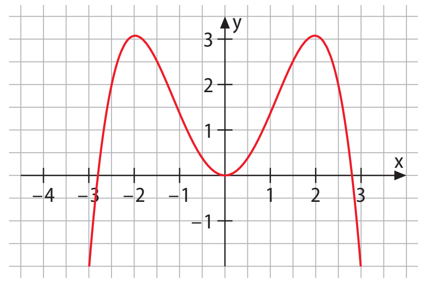
13 Skizzieren Sie jeweils den Graphen mit Ihrem Wissen über Funktionen und berechnen Sie dann den Punkt mit der stärksten Steigung.
a) $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ mit $x \in [0; \pi]$ **b)** $f(x) = -(x+2)(x-1)(x-3)$ **c)** $f(x) = e^{-x^2}$

14 Welche der folgenden Gleichungen folgen aus der Aussage, dass $S(3\,|\,-7)$ ein Sattelpunkt des Graphen von f ist?
1 $f(-7) = 3$ **2** $f'(3) = -7$ **3** $f''(3) = 0$ **4** $f'(3) = 0$ **5** $f(3) = -7$

concavity: Wölbung

15 In mathematics an inflection point is a point of a curve at which the curve changes concavity. Talk to your German and/or English teacher about how the German term is used differently in mathematics and literary studies. Find out what a turning point of a curve is in mathematics.
Evaluate how useful it was to draw a mathematical curve in the discussion with your teachers.

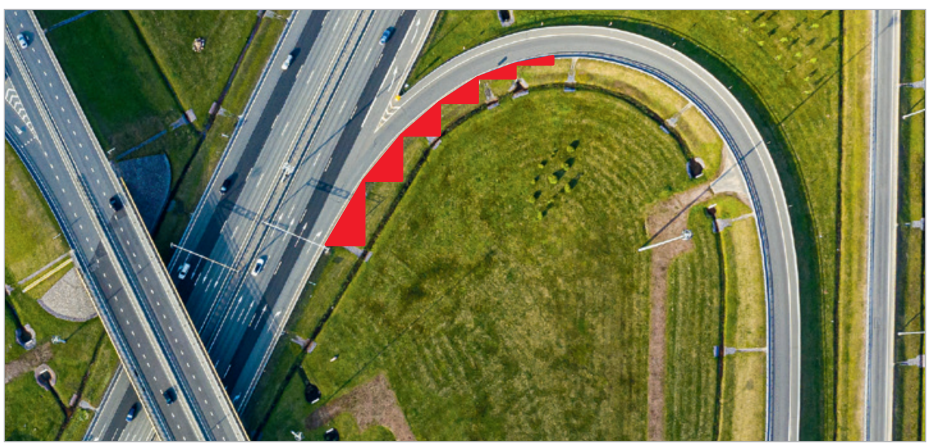
16 Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f.



a) Welche Aussagen können Sie bezüglich des Graphen von f treffen, insbesondere bezüglich der Stellen $x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm 2$ und $x_{4/5} = \pm 2{,}8$?

b) Welche Aussagen können Sie bezüglich des Graphen von f″ machen?

17 Der Bildausschnitt zeigt eine „scharfe“ Autobahnausfahrt.



Setzt man die angedeuteten Steigungsdreiecke (Fahrtrichtungsdreiecke) fort und misst sie ab, erhält man näherungsweise folgende Tabelle:

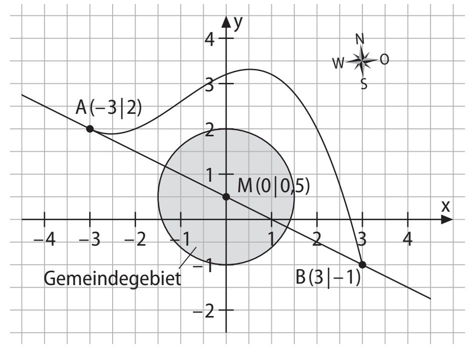
Dreieck-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Steigung	1,50	1,15	0,67	0,39	0,11	0,05	−0,33	−0,34	−0,67	−1
Veränderung der Steigung	–	−0,35								

a) Berechnen Sie die neun Veränderungen der „Fahrtrichtungsdreiecke“ (Differenzenquotienten). Was bedeutet das Vorzeichen?

b) In welchem Bereich ist die Krümmung am stärksten?

c) Ein Warnschild weist bereits vor der Abfahrt auf die „scharfe Kurve“ hin. Warum sind die meisten Autofahrer dann im zweiten Teil der Ausfahrt doch überrascht, wie eng die Kurve ist?

18 Die Zeichnung zeigt ein Gemeindegebiet mit einer Durchgangsstraße und einer Umgehungsstraße. Die Umgehungsstraße wird beschrieben durch eine Funktion f mit $f(x) = -0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}4x + 3{,}2$ (1 LE = 1 km).
Ein aus Nordwesten kommendes selbstfahrendes Auto soll im Punkt A von der Durchfahrtsstraße auf die Umgehungstraße abbiegen.



a) Der Ingenieur sagt: „Das Auto muss zunächst an der Stelle $x = -3$ um 1,2 von seiner Fahrtrichtung abweichen.“ Das heißt, wenn das Auto diese Veränderung der Fahrtrichtung beibehalten würde, wäre es nach 1 km dann 1,2 km weiter nördlich als auf der Durchgangsstraße. Begründen Sie, wie der Ingenieur auf den Wert 1,2 kommt.

b) Das Auto behält diese Veränderung der Fahrtrichtung aber nicht bei, sondern schwächt sie kontinuierlich ab. Berechnen Sie den Wert für die Veränderung der Fahrtrichtung, wenn es sich 500 m weiter östlich befindet.

c) Berechnen Sie den Punkt, an dem das Auto die Fahrtrichtungsänderung ganz zurückgefahren haben soll.

d) Beschreiben Sie, was das Auto direkt nach diesem Punkt tun soll.

19 Sabrina untersucht eine Funktion f und findet einen Sattelpunkt bei $S(x_0|0)$ mit $x_0 \neq 0$. Dabei hat sie $f'''(x_0) \neq 0$ festgestellt.
Susanne untersucht stattdessen die Funktion g mit $g(x) = x \cdot f(x)$ mit Sabrinas Funktion f. Begründen oder widerlegen Sie, ob Susanne ebenfalls den gleichen Punkt als Sattelpunkt finden wird.

20 **a)** Für die Funktion $f(x) = x^5$ sind an der Stelle $x = 0$ alle Ableitungen null bis auf die fünfte Ableitung $f^{(5)}(x) = 120$. Hat der Graph einen Wendepunkt? Nutzen Sie einen Funktionsplotter.

b) Formulieren Sie eine Regel für den Fall, dass bei einer Potenzfunktion alle Ableitungen null sind bis auf eine. Woran erkennt man dann, ob ein Wendepunkt vorliegt?

Nachgefragt

- Erläutern Sie, wie Sie einen Wendepunkt berechnen.
- Begründen Sie: Der Satz „An der zweiten Ableitung kann man das Krümmungsverhalten erkennen.“ ist besser als der Satz „Die zweite Ableitung ist die Krümmung.“
- Nehmen Sie Stellung zu der Aussage: „Ist in einem Wendepunkt die Steigung positiv, so ist dies der Punkt mit der stärksten Steigung des Graphen.“
- Der Beifahrer sagt zum Autofahrer: „Kannst du bitte etwas langsamer beschleunigen?“ Diskutieren Sie mithilfe der Begriffe in diesem Kapitel, was damit gemeint ist.
- Erläutern Sie den Begriff „Trendwende beim Wirtschaftswachstum“ mithilfe der in diesem Kapitel behandelten Begriffe.

Entdecken

Ein Straßenbau-Unternehmen verlegt einen neuen Straßenbelag. Asphaltbauer, Baugeräteführer und Chef-Straßenbauer arbeiten zusammen auf der Baustelle, werden aber unterschiedlich bezahlt. Die kaufmännische Angestellte, die die Lohnabrechnung erstellt, sieht nur die Zuordnung zu sogenannten Lohngruppen (LG) und keine Stundenlöhne. In ihrer Tabelle sieht sie folgende Einträge:

Zeile	Tag	Asphaltbauer (A)	Baugeräteführer (B)	Chef (C)	insges.
I	Mo	3 Std. (LG3)	1 Std. (LG4)	2 Std. (LG5)	**84 €**
II	Di	7 Std. (LG3)	3 Std. (LG4)	0 Std. (LG5)	**123 €**
III	Mi	4 Std. (LG3)	2 Std. (LG4)	4 Std. (LG5)	**144 €**

- Überlegen Sie, welche Stundenlöhne Sie einem Arbeiter im Baugewerbe zahlen würden. Ist Ihr Unternehmen günstiger oder teurer?

Verstehen

Beim Betrachten der Zahlen kann die Angestellte die Frage stellen, ob die Arbeiter nicht am Montag doppelt so lange hätten arbeiten können. Das hätte am Montag doppelt so viel gekostet. Die Tabelle sähe dann so aus:

Zeile	Tag	A	B	C	insges.	
I · 2	Mo	6 Std.	2 Std.	4 Std.	**168 €**	Zeile I mit 2 multipliziert
II	Di	7 Std.	3 Std.	0 Std.	**123 €**	
III	Mi	4 Std.	2 Std.	4 Std.	**144 €**	

Multiplizieren einer gesamten Zeile mit einer Zahl ändert also die Löhne nicht.

Der Vergleich der Zeilen für Montag und Mittwoch zeigt nun, dass die Differenz in den Gesamtlohnkosten der zwei Tage nur durch den Asphaltbauer A entsteht, und zwar durch zwei Stunden Differenz. Die Differenz zwischen Montag und Mittwoch bei B und C ist jeweils null.

Diese Differenzen können übersichtlich in einer Differenzzeile dargestellt werden:

Zeile	Tag	A	B	C	insges.	
I · 2	Mo	6	2	4	**168 €**	Zeile I mit 2 multipliziert
II	Di	7	3	0	**123 €**	
I · 2 – III	Differenzzeile	2	0	0	**24 €**	Differenz: Zeile I · 2 minus III

Die Differenzbildung von zwei Zeilen ändert also die Löhne nicht.
Hieraus lässt sich nun der Stundenlohn für A berechnen:
$2 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C = 2A = 24$. Also gilt $\mathbf{A = 12}$. Der Asphaltbauer erhält 12 € pro Stunde.
Auf diese Weise können die Stundenlöhne berechnet werden. Denn die Zeile für den Dienstag liefert nun den Stundenlohn für B:
$7A + 3B + 0C = 7 \cdot 12 + 3B = 84 + 3B = 123$. Also gilt $\mathbf{B = 13}$.
Die Original-Zeile für Montag liefert den Stundenlohn für C:
$3A + 1B + 2C = 3 \cdot 12 + 13 + 2C = 49 + 2C = 84$. Also gilt $\mathbf{C = 17{,}50}$.

Im Beispiel wurde die Tabelle immer weiter vereinfacht. Die Spalte mit den Wochentagen ist für die Bestimmung der Lösung (Löhne) nicht relevant. Auch die Bezeichnung der Arbeiter mit A, B, C hätte auch mit anderen Buchstaben erfolgen können. In der Mathematik reduziert man obiges Problem deshalb auf die vorkommenden Zahlen und schreibt sie übersichtlich als **Matrix** auf:

Matrix: $$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 84 \\ 7 & 3 & 0 & 123 \\ 4 & 2 & 4 & 144 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 4 & 168 \\ 7 & 3 & 0 & 123 \\ 4 & 2 & 4 & 144 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}-\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 4 & 168 \\ 7 & 3 & 0 & 123 \\ 2 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right)$$

Diese letzte Form der Matrix heißt **Stufenform**. Hier stehen unterhalb der Stufen nur noch Nullen (außer in der Ergebnisspalte). In einer solchen Stufenform lässt sich mit der letzten Zeile eine der Variablen berechnen. Mit der 2. Zeile lässt sich danach die zweite Variable und dann mit der 1. Zeile die letzte Variable. Diese Stufenform kann immer erreicht werden. Dieses Verfahren nennt man **Gauß-Algorithmus**.

Algorithmus: systematisches Vorgehen, bei dem eine feste Abfolge mehrfach wiederholt wird.

Es kann allerdings länger dauern, bis die Stufenform erreicht wird. Meistens reicht es nicht aus, nur eine Zeile zu multiplizieren, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\begin{array}{rl} \mathrm{I} & a + 2b + 3c = 11 \\ \mathrm{II} & 4a + 5b + 2c = 55 \\ \mathrm{III} & 4a - b + 4c = 33 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 4 & 5 & 2 & 55 \\ 4 & -1 & 4 & 33 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 8 & 10 & 4 & 110 \\ 4 & -1 & 4 & 33 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{III}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 8 & 10 & 4 & 110 \\ 4 & 11 & 0 & 77 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 4} \\ \xrightarrow{\cdot 3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & 12 & 44 \\ 24 & 30 & 12 & 330 \\ 4 & 11 & 0 & 77 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{I}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & 12 & 44 \\ 20 & 22 & 0 & 286 \\ 4 & 11 & 0 & 77 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & 12 & 44 \\ 20 & 22 & 0 & 286 \\ 8 & 22 & 0 & 154 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & 12 & 44 \\ 20 & 22 & 0 & 286 \\ 12 & 0 & 0 & 132 \end{array}\right)$$

Dabei ergibt sich in der letzten Matrix aus der 3. Zeile mit $12a = 132$ der Wert $a = 11$, damit aus der zweiten Zeile $b = 3$ und aus der ersten Zeile $c = -2$.
Diese Zahlen sind die **Lösungen** des linearen Gleichungssystems (LGS). Sie werden als **Zahlentripel** $(11|3|-2)$ angegeben.

Merke

Der **Gauß-Algorithmus** ist ein Verfahren zum systematischen Lösen von linearen Gleichungssystemen. Hierzu schreibt man die Gleichungen untereinander und versucht, über folgende **Äquivalenzumformungen** die **Stufenform** zu erhalten:

- eine ganze Zeile (mit einer Zahl $\neq 0$) multiplizieren
- eine Zeile durch die Differenz dieser Zeile mit einer anderen ersetzen
- zwei Zeilen miteinander vertauschen.

Carl Friedrich Gauß (1777–1855) war ein deutscher Mathematiker, Statistiker, Astronom und Physiker. Wegen seiner überragenden wissenschaftlichen Leistungen galt er bereits zu Lebzeiten als *Princeps Mathematicorum* („Fürst der Mathematiker"). Nach Gauß sind viele mathematische und physikalische Entdeckungen, Schulen, Forschungszentren und wissenschaftliche Ehrungen benannt.

Carl Friedrich Gauß

Aufgaben

1 Schreiben Sie folgende lineare Gleichungssysteme in Matrix-Schreibweise um.

a) $\begin{array}{lrcl} \text{I} & a-b+c & = & 6 \\ \text{II} & 4a+2b+c & = & 3 \\ \text{III} & 9a+3b+c & = & 6 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2a+b+c & = & 12 \\ \text{II} & 11a+5c & = & 29 \\ \text{III} & 26a & = & 104 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{lrcl} \text{I} & -3x-6y+2z & = & 4 \\ \text{II} & -4y+3z & = & 4 \\ \text{III} & -4y+8z & = & 14 \end{array}$

2 Schreiben Sie folgende Matrizen jeweils in ein lineares Gleichungssystem um.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 4 & -19 \\ 4 & 0 & 3 & -5 \end{array}\right)$ **b)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 10 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)$ **c)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$

3 Geben Sie an, welche Umformungen vorgenommen wurden. Achten Sie auf die richtige Notation.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{?} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -12 & 6 & 6 & -12 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{?} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -12 & 6 & 6 & -12 \\ -16 & 6 & 0 & -14 \end{array}\right)$$

4 Vervollständigen Sie den Gauß-Algorithmus und geben Sie die Lösung als Zahlentripel an.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \xrightarrow{\square} \\ \xrightarrow{\cdot\,\square} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -7 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & \square & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot\,\square} \\ \\ \xrightarrow{\text{II}-\text{III}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -14 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & \square & 8 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}-\text{II}}$$

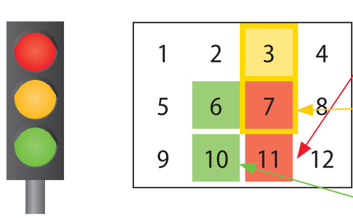
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -14 & 2 & 8 \\ \square & -16 & 0 & \square \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot\,\square} \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -14 & 2 & 8 \\ \square & -16 & 0 & \square \\ \square & -16 & 0 & -48 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -14 & 2 & 8 \\ -8 & -16 & 0 & 0 \\ -24 & 0 & 0 & 48 \end{array}\right)$$

5 Ermitteln Sie die Lösungen der linearen Gleichungssysteme in den Aufgaben 1 bis 3.

Nachgefragt

- Erläutern Sie, warum das Multiplizieren einer Matrix-Zeile die Lösungen nicht ändert.
- Erkan sagt: „Statt eine Zeile zu multiplizieren, kann ich auch die andere dividieren." Nehmen Sie Stellung zu dieser Aussage.

6 Erstellen Sie eine Merkregel, in welcher Reihenfolge die Nullen konstruiert werden müssen.



1 muss diese Zahl null werden. Dafür muss sie gleich der darüber sein.

2 muss diese Zahl null werden. Dafür muss sie gleich der darüber sein.

3 muss diese Zahl null werden. Dafür muss sie gleich der darüber sein.

7 Lösen Sie das zur Matrix gehörende lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Lösung: $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{I-2\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 0 & -5 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$

Danach rechnet man wie in den Beispielen auf Seite 103 weiter und erhält als Lösung (1 | 2 | 3).

Beispiel
LGS lösen mit Gauß-Algorithmus

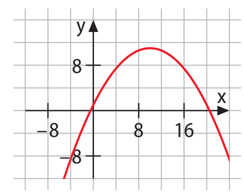
- *Mitunter spart man Schritte, indem man zwei Zeilen vertauscht.*
- *Das Multiplizieren einer Zeile und die Subtraktion kann man in einem Schritt zusammenfassen.*

8 Lösen Sie jeweils das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 6 \end{array}\right)$ **b)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right)$ **c)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right)$

9 Ein Brückenbogen ähnelt dem Graphen einer quadratischen Funktion (siehe Abbildung). Diese wird allgemein durch die Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ beschrieben. Wenn die Punkte P, Q und R auf dem Graphen der Funktion liegen, entstehen dadurch drei Bedingungen. Geben Sie diese Bedingungen jeweils als Gleichungen an und lösen Sie das entstehende lineare Gleichungssystem.

a) $P(0|1)$, $Q(5|-19)$, $R(10|11)$ **b)** $P(-1|-6)$, $Q(1|0)$, $R(3|-2)$



10 Welche Fehler wurden bei der Umformung des linearen Gleichungssystems gemacht?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{I-II} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

11 **a)** Carina fragt sich, ob sie bei diesem Gleichungssystem noch multiplizieren muss, oder ob sie vielleicht auch die Zeilen addieren darf (II + III). Probieren Sie Carinas Idee aus und prüfen Sie hinterher, ob ihre Lösungstripel alle drei Gleichungen erfüllen.

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & -4a + 6b + 3c & = & -2 \\ \text{II} & a - 2b & = & 3 \\ \text{III} & 3a + 2b & = & 2 \end{array}$$

b) Beschreiben Sie das Addieren von zwei Zeilen durch zwei Operationen aus dem Gauß-Algorithmus (siehe Seite 103).

12 Der Gauß-Algorithmus lässt sich auch auf lineare Gleichungssysteme mit zwei oder vier Zeilen übertragen. Führen Sie das an folgenden Beispielen durch.

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 16 \end{array}\right)$ **b)** $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 6 \\ 5 & 6 & -7 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$

13 My trainer recommended me to take 800 mg of taurine and 12 mg of zinc per day. I bought two products: *PowerBoost*, containing 220 mg of taurine and 2 mg of zinc per tablet, and *MuscleFeed*, containing 145 mg taurine and 3 mg of zinc per tablet. How many of each tablet should I take per day in order to reach the recommended dosage as good as possible?

Beispiel
LGS lösen (Stufenform)

14 Lösen Sie das lineare Gleichungssystem, indem Sie es auf Stufenform bringen. Interpretieren Sie diese in Bezug auf die Lösung des Gleichungssystems.

a) $\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$

Lösung:

a) *Hier ergibt sich in der letzten Zeile ein Widerspruch:*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{I-III} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow 0a + 0b + 0c = 2$$

*Diese Gleichung ist von keinem Tripel $(a\,|\,b\,|\,c)$ erfüllt. Dieses Gleichungssystem hat **keine Lösung**.*

b) *Hier ergibt die letzte Zeile keine echte Bedingung an $(a\,|\,b\,|\,c)$:*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{I-III} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow 0a + 0b + 0c = 0$$

Diese Gleichung ist von jedem Tripel $(a\,|\,b\,|\,c)$ erfüllt. Wir können also keine konkrete Zahl für a einsetzen. Rechnet man mit allgemeinem a weiter, so ergibt sich aus der zweiten Zeile: $1a + 1b = 6$ und somit $b = 6 - a$.

Setzen wir dies in die erste Zeile ein, errechnet man dann: $-1a + 3(6 - a) + 2c = 2$. Auflösen nach c ergibt $2c = 2 + a - 18 + 3a = 4a - 16$ und somit $c = 2a - 8$.

*Als Lösung gibt man $\mathbf{(a\,|\,6-a\,|\,2a-8)}$ an. Da dies aber für alle Zahlen a ein Lösungstripel ergibt, hat dieses Gleichungssystem **unendlich viele Lösungen**.*

*Ein LGS kann – je nach Aussehen der Stufenform – **eine**, **keine** oder **unendlich viele Lösungen** haben.*

15 Ermitteln Sie jeweils, ob das lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat.

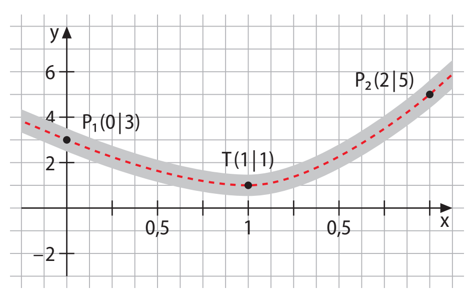
a)
$$\begin{array}{rl} \text{I} & a + 2b + 3c = 1 \\ \text{II} & 2a - 3b - c = 4 \\ \text{III} & 3a - 8b - 5c = 5 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rl} \text{I} & 2x + 5y + 3z = 12 \\ \text{II} & x + 2y + z = 5 \\ \text{III} & x + 3y + 2z = 7 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rl} \text{I} & -a + b - 2c = 1 \\ \text{II} & a - b = 4 \\ \text{III} & -4c = 10 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rl} \text{I} & 3m + 3n + 3k = 3 \\ \text{II} & 0m + 0n + 0k = 2 \\ \text{III} & m + n + k = 1 \end{array}$$

16 Zeigen Sie, dass der Versuch, die abgebildete Straßenkurve mit einer quadratischen Funktion zu modellieren, zu keiner Lösung führt.
Die Punkte $P_1(0\,|\,3)$ und $P_2(2\,|\,5)$ liegen auf der Kurve; ihr Tiefpunkt T liegt bei $x = 1$.



17 Zeigen Sie, dass es unendlich viele quadratische Funktionen gibt, deren Graphen durch $P(1\,|\,4)$ und $Q(3\,|\,4)$ verlaufen und an der Stelle $x = 2$ die Steigung $f'(2) = 0$ besitzen.

18 Sophie sagt: „In der Stufenform muss die Treppe nicht unbedingt von unten links nach oben rechts verlaufen. Sie könnte auch von oben links, nach unten rechts verlaufen."
Führen Sie bei folgendem linearem Gleichungssystem die Äquivalenzumformungen des Gauß-Algorithmus durch, sodass die angegebene Stufenform entsteht. Ermitteln Sie dann daraus das Lösungstripel.

$$\begin{array}{rl} \text{I} & a - 3b + 3c = -3 \\ \text{II} & 5a - 3b + c = 5 \\ \text{III} & 2a - 2b + 2c = 2 \end{array} \qquad \text{Stufenform: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 12 & -14 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

19 Hannes hat neun Kupfermünzen in seinem Geldbeutel. Damit hat er insgesamt 27 Cent. Dabei sind die 2-Cent-Münzen zusammen insgesamt einen Cent mehr wert als die 1-Cent-Münzen zusammen.

a) Versuchen Sie, durch Kombinieren von Münzen herauszufinden, welche Münzen Hannes hat.

b) Stellen Sie aus den Angaben ein lineares Gleichungssystem für die Anzahlen der einzelnen Münzen auf.

c) Wenn die Zusatzinformation zu den 1-Cent- und 2-Cent-Münzen fehlen würde, gäbe es mehrere Möglichkeiten. Welches Ergebnis liefert dann der Gauß-Algorithmus? Warum gibt es trotzdem nicht unendlich viele Lösungen? Wie viele gibt es dann?

20 Lukas findet das Vertauschen von Zeilen sehr praktisch und fragt sich, ob er auch Spalten vertauschen darf. Untersuchen Sie dies an einem der LGS aus diesem Unterkapitel.

21 Bei einem linearen Gleichungssystem führte der Gauß-Algorithmus jeweils zu der angegebenen Matrix. Was gilt für die Lösungsmenge?

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ **b)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ **c)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$

22 Halten Sie einen Kurzvortrag, in dem Sie folgende Inhalte mit Beispielen erläutern:

1 Sachverhalte, bei denen mehrere Bedingungen an mehrere Unbekannte gestellt wurden, können durch Gleichungssysteme modelliert werden.

2 Lineare Gleichungssysteme können durch die Matrizenschreibweise vereinfacht werden.

3 In Matrizenschreibweise kann mittels Gauß-Algorithmus die Stufenform erreicht werden, sodass die Lösungen einfach ermittelt werden können.

Nachgefragt

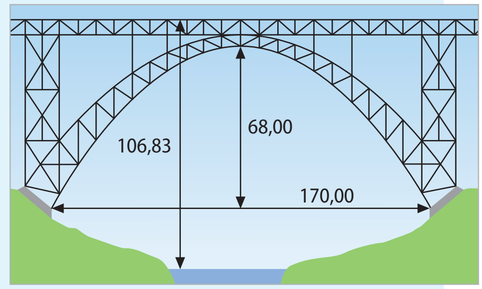
- Fabia meint: „Wenn eine Matrix-Zeile nur Nullen enthält, hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen".
Stimmt das? Argumentieren Sie, wenn möglich anhand eines konkreten Beispiels.
- Diskutieren Sie: Wenn eine Zeile nur Nullen enthält und nur in der Ergebnisspalte eine Zahl ungleich null, dann hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.
- Begründen Sie: Die Addition von zwei Zeilen ändert die Lösungsmenge nicht.

3.3 Funktionsterme aufstellen – mathematisches Modellieren

Entdecken

Die Müngstener Brücke wurde 1897 als Stahlbau fertiggestellt. Sie ist auch heute noch die höchste Eisenbahnbrücke Deutschlands.

- Die technische Zeichnung enthält Maße, aber kein Koordinatensystem. Wo würden Sie den Koordinatenursprung hinlegen?
- Welche Punkte im Koordinatensystem charakterisieren dann den parabelförmigen Bogen?
- Welche Gleichungen entstehen, wenn Sie die Punkte in eine allgemeine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ einsetzen?



Verstehen

*1. **Entscheidung** für die modellierende Funktionsart*

Bei der Mathematisierung von Realsituationen, einem Teilaspekt des Modellierens, sind oftmals nur bestimmte Punkte der aufzustellenden Funktion bekannt. Zuweilen ist auch nur eine Zeichnung vorhanden – dann legt man selbst ein Koordinatensystem fest. Vor allem aber muss entschieden werden, mit welcher Funktionsart modelliert werden soll. Im obigen Fall deutet das Bild darauf hin, dass eine Parabel (ganzrationale Funktion 2. Grades) verwendet werden sollte: $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$.

*2. **Festlegen** eines Koordinatensystems*

Legt man den Koordinatenursprung in die untere linke Ecke des Brückenbogens, erhält man den **Hochpunkt (85 | 68)**, und der **Graph verläuft durch (0 | 0)**. Diese Bedingungen können in mathematischer Schreibweise notiert werden.

*3. **Übersetzen** der Angaben in mathematische Bedingungsgleichungen, Aufstellen eines LGS*

Im nächsten Schritt werden die vorgelegten Angaben in mathematische Bedingungsgleichungen übersetzt und das zugehörige LGS aufgestellt:

Bedingungen: $\Rightarrow$ **LGS:**

$$\begin{array}{lll} f(85) = 68 & \Rightarrow & a \cdot 85^2 + b \cdot 85 + c = 68 \\ f'(85) = 0 & \Rightarrow & 2a \cdot 85 + b = 0 \\ f(0) = 0 & \Rightarrow & a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0 \end{array}$$

*4. **Lösen** des LGS, Angabe der gesuchten Funktion*

Das LGS wird mit dem Gauß-Algorithmus gelöst:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7225 & 85 & 1 & 68 \\ 170 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I} - \mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 7225 & 85 & 1 & 68 \\ 170 & 1 & 0 & 0 \\ 7225 & 85 & 0 & 68 \end{array}\right) \xrightarrow{85 \cdot \mathrm{II} - \mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 7225 & 85 & 1 & 68 \\ 170 & 1 & 0 & 0 \\ 7225 & 0 & 0 & -68 \end{array}\right)$$

Dies liefert $a = -\frac{68}{7225} = -\frac{4}{425}$ und $b = -170 \cdot \left(-\frac{4}{425}\right) = \frac{8}{5}$ sowie $c = 0$, also das Lösungstripel $\left(-\frac{4}{425} \middle| \frac{8}{5} \middle| 0\right)$. Somit führt diese Modellierung auf die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{4}{425}x^2 + \frac{8}{5}x$.

*5. **Vergleich** der im Modell gefundenen Lösung mit der Realität*

Die Funktionsgleichung ist plausibel, da $a < 0$ auf eine nach unten geöffnete Parabel hinweist. Die gegebenen Punkte mit den Koordinaten (85 | 68) und (0 | 0) erfüllen die Funktionsgleichung.

Dennoch kann man sich fragen, ob der Weg, auf dem die Lösung gefunden wurde, auch anders hätte gestaltet werden können. Hätte man z. B. den Koordinatenursprung in den Hochpunkt gelegt, wäre der Graph der Parabel symmetrisch zur y-Achse. Die Funktionsgleichung enthält somit nur gerade Potenzen. Der Modellierungskreislauf sieht dann wie folgt aus:

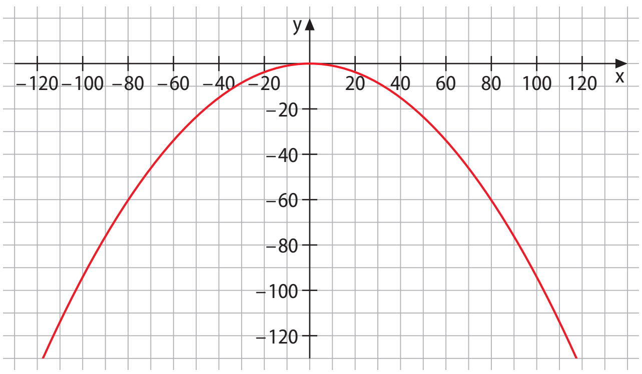
1 $f(x) = ax^2 + c$.

2 **und** 3 $f(0) = 0$ liefert $a \cdot 0^2 + c = 0$, also $c = 0$, was die Funktionsgleichung zu $f(x) = ax^2$ reduziert.

4 Der Punkt $(85\,|\,-68)$ liefert dann die Gleichung $a \cdot 85^2 = -68$ und daraus $a = -\frac{4}{425}$. Wir erhalten die (einfachere) Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{4}{425}x^2$.

5 Auch hier ist die Funktionsgleichung plausibel, da $a < 0$ auf eine nach unten geöffnete Parabel hinweist.

Der zugehörige Funktionsgraph hat folgendes Aussehen:



Merke

Das Lösen von Problemen aus der Realwelt läuft oft auf deren Mathematisierung hinaus. Man spricht dann vom **mathematischen Modellieren**.

Die Visualisierung der Realsituation erfolgt in der Regel in Form einer gekrümmten Linie. Diese kann durch einen Funktionsgraphen angenähert werden. Die zugehörige Funktionsgleichung erhält man mit folgenden Schritten:

Mathematisierung des Problems (Modellbildung):

1 Festlegen einer zur Realsituation passenden Funktionsart und Aufstellen einer allgemeinen Funktionsgleichung (ggf. auch von deren Ableitungen)

2 Festlegen des Koordinatensystems und Ermitteln von charakteristischen Eigenschaften (z. B. Punkten)

Rechnen im mathematischen Modell:

3 Aufstellen des zugehörigen linearen Gleichungssystems aus den Bedingungsgleichungen

4 Lösen des linearen Gleichungssystems und Angabe der gesuchten Funktion

Vergleich von Modell und Wirklichkeit:

5 Überprüfen der Plausibilität der Lösung

Zu beachten ist: Sind Symmetrie-Eigenschaften bekannt, so können diese den Funktionsterm und damit die Rechnung erheblich vereinfachen.

Aufgaben

1 Stellen Sie die allgemeine Gleichung sowie deren erste und zweite Ableitung für die folgenden Funktionen bzw. ihren Graphen auf.

a) Der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades
b) Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades
c) Der zum Ursprung punktsymmetrische Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades
d) Der zur y-Achse symmetrische Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades
e) Der Graph einer um 2 nach unten verschobenen Sinusfunktion mit Amplitude 3 und Periode 2π
f) Der Graph einer linearen Funktion

2 Formulieren Sie für folgende charakteristische Punkte jeweils die Bedingungen.

a) Der Graph verläuft durch $P(3|-2)$. (eine Bedingung)
b) Der Graph besitzt in $W(1|4)$ einen Wendepunkt. (zwei Bedingungen)
c) Der Graph besitzt an der Stelle $x = 2$ einen Tiefpunkt. (eine Bedingung)
d) $S(6|1)$ ist ein Sattelpunkt. (drei Bedingungen)
e) An der Stelle $x = 3$ besitzt der Graph die Tangente mit der Gleichung $y = 2x - 5$.

3 Bestimmen Sie mit dem Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$ jeweils eine ganzrationale Funktion zweiten Grades, deren Graph durch die angegebenen Punkte geht. Stellen Sie hierzu zunächst das zugehörige lineare Gleichungssystem auf und lösen Sie es.

a) $A(1|0)$, $B(-2|15)$, $C(3|10)$
b) $A(0|-3)$, $B(2|11)$, $C(-2|-3)$

4 Bestimmen Sie jeweils eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph durch folgende Punkte geht.

a) $A(0|-4)$, $B(1|-2)$, $C(-2|-26)$, $D(3|14)$
b) $A(-2|15)$, $B(0|1)$, $C(2|-5)$, $D(1|0)$
c) Ursprung und Sattelpunkt $S(2|3)$
d) Hochpunkt $H(-1|1)$ und Tiefpunkt $T(1|-1)$

5 Eine ganzrationale Funktion zweiten Grades besitzt bei $T(2|-3)$ einen Tiefpunkt und verläuft durch den Punkt $P(1|1)$. Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung.

6 Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung und besitzt bei $x = 2$ eine Tangente mit der Gleichung $y = 16x - 24$. Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung.

Nachgefragt

- Beschreiben Sie die Schritte eines Modellierungsvorgangs. Geben Sie auch Beispiele für das Umsetzen von Informationen in mathematische Schreibweise an.
- Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bedingungen, Variablen und Gleichungen, wenn keine Information über die Symmetrie bekannt ist.
- Bei welchen der Aufgaben 2 bis 6 benötigen Sie keine 2. Ableitung, bei welchen auch keine 1. Ableitung?

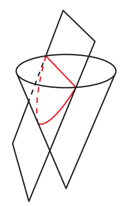
7 Ordnen Sie den Abbildungen jeweils eine Funktionsart zu, die sich zur Modellierung eignen könnte, und erstellen Sie eine zugehörige allgemeine Funktionsgleichung.

a) Flussverlauf

b) Snowboardsprung

c) Dinosaurierrücken

d) Wasserfontänen



e) Kegelschnitt

8 Gibt es eine ganzrationale Funktion dritten Grades, die durch $A(2|2)$ und $B(3|9)$ verläuft und bei $T(1|1)$ einen Tiefpunkt besitzt?

Beispiel
Funktion bestimmen – Probe machen

Lösung: *Der Ansatz* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *mit* $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ *führt auf die Bedingungen* $f(2) = 2$, $f(3) = 9$, $f(1) = 1$ *und* $f'(1) = 0$. *Diese ergeben folgendes Gleichungssystem:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{II-I} \\ \xrightarrow{I-III} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{II-III} \\ \xrightarrow{II-IV} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 19 & 5 & 1 & 0 & 7 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 16 & 3 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{3III-2IV} \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 19 & 5 & 1 & 0 & 7 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Daraus folgt: $a = 1$; $12 + 2b = 6 \Rightarrow b = -3$; $19 + 5(-3) + c = 7 \Rightarrow c = 3$;
$8 + 4(-3) + 2(+3) + d = 2 \Rightarrow d = 0$.
Somit sieht es so aus, als sei $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ *die Lösung. Diese ist aber nur so konstruiert, dass bei* $x = 1$ *die Steigung null ist. Ob die Steigung dort auch von – nach + wechselt, ist nicht sicher. Tatsächlich gilt* $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ *und damit* $f'(0) = +3 > 0$ *und* $f'(2) = +3 > 0$. *Die Steigung ist also vor und nach* $x = 1$ *positiv. Es handelt sich bei* $T(1|1)$ *um einen Sattelpunkt, nicht um einen Tiefpunkt.*
Es gibt somit keine ganzrationale Funktion 3. Grades mit den angegebenen Eigenschaften.

Das Beispiel zeigt die Unabdingbarkeit der Überprüfung der Lösung.

9 Untersuchen Sie, ob es eine ganzrationale Funktion 3. Grades gibt, deren Graph durch die Punkte $A(1|4)$, $B(-1|6)$ und $C(-2|4)$ verläuft und die einen Tiefpunkt auf der y-Achse hat.

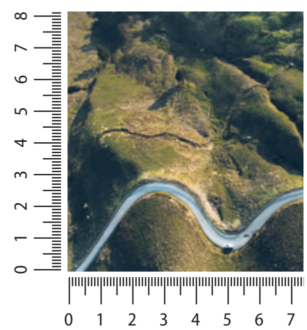
10 **a)** Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades verläuft durch den Punkt $A(0|-12)$, hat an der Stelle $x = 4$ einen lokalen Extremwert und in $P(3|6)$ einen Wendepunkt. Ermitteln Sie den Funktionsterm.

b) Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist symmetrisch zur y-Achse, verläuft durch $(1|1)$ und berührt bei $x = 2$ die x-Achse. Ermitteln Sie den Funktionsterm.

11 *Polizeilich gesucht:* Der Herr Graph wurde das letzte Mal gesehen, wie er bei $x = 2$ die x-Achse schnitt. Dabei fiel seine Symmetrie zur y-Achse auf, welche er bei 4 kreuzte. Als er auf dem Flughafen durch den Punkt $(-3|6{,}25)$ lief und kontrolliert wurde, stellte sich heraus, dass er zu nichts Höherem als dem 5. Grade fähig ist.

12 *Wanted:* Mrs. Graph has been accused of driving very symmetrically with respect to the origin of the coordinates. She was last seen at the petrol station in $(2|14)$ before she ran through the radar control at $x = 1.5$ where she crossed the horizontal axis. As she is a member of the 3rd order, any hints towards her function will be rewarded lavishly.

13 Die Abbildung zeigt eine Passstraße in den Bergen. Ihr Verlauf soll durch eine ganzrationale Funktion möglichst niedrigen Grades angenähert beschrieben werden.



a) Stellen Sie Bedingungen und ein lineares Gleichungssystem auf.

b) Sabrina hat mit ihrem Gleichungssystem die Zahlen 0,1143; −2,0571; 10,2857 und −8,3429 gefunden. Bewerten Sie ihre Lösung.

Beispiel
Exponentialfunktion bestimmen

14 Ermitteln Sie die Parameter (d. h. die fehlenden Koeffizienten) a und b in der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot e^{-bx}$, sodass der Graph durch $P(0|3)$ und $Q(2|6)$ verläuft.

Lösung: *Ansatz jeweils mit einem der Punkte:*

$P(0|3) \Rightarrow 3 = a \cdot e^{-b \cdot 0} = a \cdot e^{0} = a \cdot 1 = a \Rightarrow a = 3$

$Q(2|6) \Rightarrow 6 = a \cdot e^{-b \cdot 2} = a \cdot e^{-2b} = 3 \cdot e^{-2b}$

$6 = 3 \cdot e^{-b \cdot 2} = 3 \cdot e^{-2b} \Rightarrow 2 = e^{-2b} \Rightarrow \ln(2) = -2b \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln(2) = b$

$\Rightarrow b \approx -0{,}3466 \Rightarrow f(x) = 3 \cdot e^{0{,}3466x}$

15 Eine hängende Kette sieht auf den ersten Blick wie eine Parabel aus, wird aber besser mit Exponentialfunktionen modelliert (nur wenn die Kette belastet wird, wie z. B. bei Brücken, ist die Parabelform physikalisch die richtige):

$f(x) = \frac{a}{2}(e^{x} + e^{-x}) + b$ (sogenannte *Kettenlinie*).

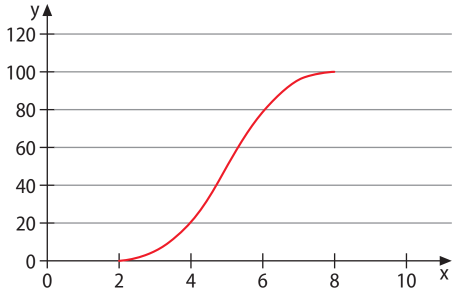
Ermitteln Sie die Parameter a und b für die abgebildete Kette, bei der die Pfosten einen Abstand von 1,5 m und eine Höhe von 1 m haben. Die Kette hängt an ihrem niedrigsten Punkt 50 cm über dem Gehweg.

16 Für das abgebildete Dach passt keine ganzrationale Funktion.

a) Begründen Sie, dass hier eine trigonometrische Funktion besser zur Modellierung geeignet ist.

b) Legen Sie ein Koordinatensystem fest, sodass Sie die Symmetrie ausnutzen. Setzen Sie dann eine allgemeine trigonometrische Funktionsgleichung wie in Kapitel 1.4 an und ermitteln Sie eine Funktion, deren Graph die Linie des Hausdachs beschreibt.

17 Modellieren Sie die abgebildete Kurve der Entwicklung eines Unternehmens mit …



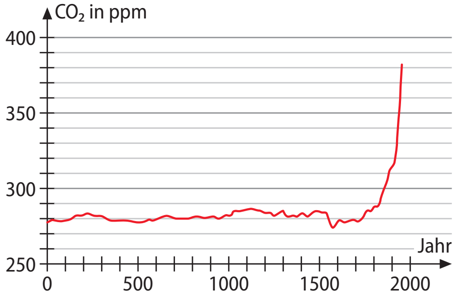
a) einer trigonometrischen Funktion. Nutzen Sie Ihr Wissen über Verschiebung, Amplitude und Periode.

b) einer ganzrationalen Funktion 3. Grades.

c) zwei Exponentialfunktionen g und h mit $g(x) = a \cdot e^{k(x-5)}$ und $D_g = [2;\ 5]$ bzw. $h(x) = b \cdot e^{m(x-5)} + 100$ und $D_h = [5;\ 8]$.

d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus a) bis c).

18 In Gesteins- und Eisschichten werden Moleküle aus der Luft aufgenommen und bleiben über Jahrtausende dort gelagert. Durch Untersuchungen von Gesteinsschichten kann deshalb die Luftzusammensetzung auch nach tausenden von Jahren rekonstruiert werden. Der Graph zeigt die Entwicklung der Kohlendioxidkonzentration in der Luft in ppm (parts per million) etwa bis zum Jahr 2000.



a) Jan möchte den Zeitraum bis 1500 mit einer konstanten Funktion modellieren. Nehmen Sie Stellung dazu.

b) Ermitteln Sie die Gleichung einer Funktion, die den Graphen zwischen 1700 und 2000 annähernd beschreibt.

Nachgefragt

- Jakob meint: „Zur Bestimmung der Gleichung einer ganzrationalen Funktion vierten Grades benötigt man vier Bedingungen." Hat er recht? Argumentieren Sie.
- Lässt sich durch drei Punkte stets eine Parabel legen? Begründen Sie.
- Kilian behauptet, dass Funktionen mit drei Extrempunkten mindestens vom Grad 4 sind. Hat er recht? Argumentieren Sie.
- Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage: „Wenn man fehlerlos rechnet, ist der letzte (Validierungs-)Schritt bei der Modellierung überflüssig."

Entdecken

Ein Unternehmen asphaltiert Straßen. Dabei beträgt der Materialaufwand 25 € je Quadratmeter Asphalt. Pro Tag fallen für Unternehmensführung, Verwaltung und Anfahrt der Arbeiter Fixkosten von 500 € an (zusätzlich zu den Materialkosten).

- Erstellen Sie aus den ersten beiden genannten Zahlen die sogenannte Kostenfunktion $K(x) = \text{Fixkosten} + \text{variable Kosten}$.

Der Preis soll nicht über 60 €/m² liegen; er darf pro 4 m² Asphalt um 1 € sinken, weil dann die Fixkosten auf mehr Umsatz verteilt werden (d. h. bei einer Produktionsmenge von 4 m² beträgt der Preis nur noch 59 €/m²).

- Ermitteln Sie aus den Angaben den Preis pro Quadratmeter, wenn 4 m², 8 m², 12 m², 40 m², 64 m² bzw. 80 m² asphaltiert werden.
- Ermitteln Sie den Gewinn des Unternehmens, wenn 64 m² bzw. 80 m² (zu dem dafür kalkulierten Preis) asphaltiert werden.
- Wie viele Quadratmeter soll das Unternehmen pro Auftrag asphaltieren, um den maximalen Gewinn zu erwirtschaften? Versuchen Sie durch systematisches Probieren herauszufinden, bei welchem Preis der Gewinn maximal wird.

Verstehen

Betriebswirtschaftlich gilt als oberstes Gebot: Der Gewinn soll möglichst groß, d. h. maximal werden. Dabei spielt die Kostenfunktion eine wichtige Rolle:

Kosten (gesamt) = Fixkosten + variable Kosten

Wenn also x Quadratmeter asphaltiert werden, betragen die Kosten (in €) $K(x) = 500 + 25x$.
Die sogenannte Preis-Absatz-Funktion (PAF) setzt sich wie folgt zusammen:
Preis = Maximalpreis – mögliche Preissenkung bei hohem Absatz.

Im Beispiel gilt: $p(x) = 60 - \frac{x}{4}$.

Der Gewinn beträgt nun $G(x) = x \cdot p(x) - K(x)$.
Diese Funktion nennt man **Zielfunktion**, weil sie beschreibt, was extremal werden soll.

Es gilt also: $G(x) = x\left(60 - \frac{x}{4}\right) - (500 + 25x) = -\frac{x^2}{4} + 35x - 500$.

Das Maximum dieser Zielfunktion wird am Hochpunkt angenommen:

$G'(x) = -\frac{x}{2} + 35 = 0 \Rightarrow$ Lösung $x = 70$ und $G''(50) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ Hochpunkt.

Da es sich beim Graphen von G um eine nach unten geöffnete Parabel handelt, liegen alle anderen Werte niedriger. Also ist das berechnete Maximum nicht nur ein **lokales**, sondern auch ein **globales** Maximum.

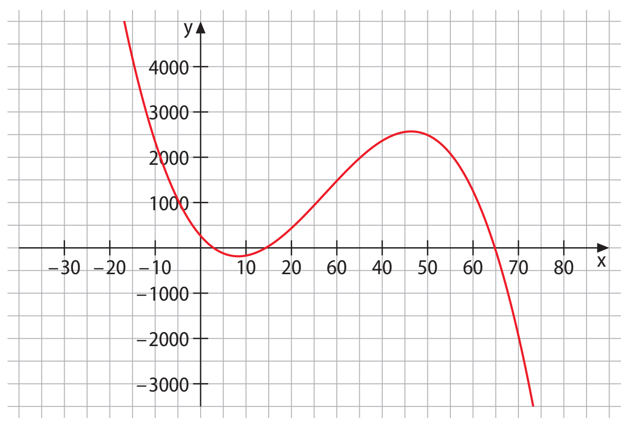
Bei einer Menge von 70 m² (pro Auftrag) und einem Einzelpreis von $p(70) = 42{,}50$ €/m² Asphalt erwirtschaftet das Unternehmen den maximalen Gewinn von $G(70) = 625$ € (pro Auftrag). Das Unternehmen sollte also versuchen, möglichst Aufträge für 70 m² zu erlangen und den Preis auf 42,50 €/m² festsetzen.

Diesem Modell liegt die Annahme zugrunde, dass bei einem Auftrag mit mehr als 70 m² ein geringerer Marktpreis gilt. Will das Unternehmen also den größeren Auftrag bekommen, müsste es den Preis senken. Dies führt aber nicht zu mehr Gewinn.

Sind wir damit fertig? Schauen wir uns die Realsituation nochmals genauer an:
Die Gewinnfunktion ist nur für ein Teilintervall der reellen Zahlen definiert. So wäre es z. B. sinnlos, wenn die Anzahl der verkauften Meter x negativ oder null wäre. Auch ein negativer Preis wäre im Sachzusammenhang sinnlos.
Aus $p(x) = 60 - \frac{x}{4} > 0$ folgt durch Umformen, dass $x < 240$ sein muss. Es gilt also die Einschränkung $x \in\,]0; 240[$; die **Ränder** der Definitionsmenge sind somit $x_l = 0$ und $x_r = 240$.
Nun berechnen wir noch die zugehörigen **Randwerte** (das sind die y-Werte an den Rändern).
$G(x_l) = G(0) = -600$ (linker Randwert) und $G(x_r) = G(240) = -6500$ (rechter Randwert).
Beide Randwerte liegen (deutlich) unter dem (einzigen) Extremalwert 1125. Deshalb handelt es sich um das globale Maximum.
Die Ränder hängen von der Festlegung der Definitionsmenge ab; so kann z. B. durch die Verlängerung des Definitionsbereichs ein globales Maximum zu einem lokalen werden.

Betrachten wir nun noch ein Beispiel, bei dem ein Extremum kein globales Extremum ist. Berechnet man für die Gewinnfunktion $G(x) = -0{,}1x^3 + 8{,}2x^2 - 115{,}5x + 264{,}6$ näherungsweise die Extrema, erhält man als Hochpunkt $(54\,|\,2223)$ und als Tiefpunkt $(8\,|\,-186)$.

Man könnte folgern, dass Gewinn bzw. Verlust nicht unter −186 fallen können, weil dies das Minimum ist. Tatsächlich gibt es aber ab $x = 65{,}4$ noch niedrigere Punkte (siehe Abbildung). Deshalb ist die Randwertbetrachtung unabdingbar.



Wir können also bezüglich der Lösung von Extremwertproblemen festhalten:

Merke

Extremwertaufgaben erkennt man daran, dass etwas maximal oder minimal, am größten oder kleinsten, am weitesten oder kürzesten sein soll.
Diese Größe, die extremal werden soll, muss der y-Wert einer Funktion sein. Aus den Sachinformationen wird diese Funktion, die sogenannte **Zielfunktion**, aufgestellt.

Von dieser Zielfunktion werden die Extremstellen und deren zugehörige Extremwerte berechnet. Die y-Werte der Extrempunkte sind dann mögliche Kandidaten für das Maximum oder Minimum der Zielfunktion.

- Liegen mehrere Extrema vor, so muss man zunächst dasjenige ermitteln, das am höchsten bzw. am niedrigsten liegt.
- Dann muss noch untersucht werden, ob es sich um ein **globales Extremum** oder nur um ein lokales Extremum handelt. Hierzu wird eine **Randwertbetrachtung** durchgeführt, indem die y-Werte an den Rändern der Definitionsmenge (Randwerte) berechnet werden. Ist das berechnete Extremum auch danach noch der höchste bzw. niedrigste Wert, handelt es sich tatsächlich um ein **globales** Extremum.

Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Extrempunkte folgender quadratischer Funktionen mithilfe der Nullstellen oder der Scheitelpunktbestimmung (Scheitelform).

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ **b)** $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ **c)** $f(x) = 4x^2 - 9$
d) $f(x) = x \cdot (x - 2)$ **e)** $f(x) = 2x^2 + 4x$ **f)** $f(x) = -x^2 + 3x - 3$

2 Bestimmen Sie die Extrempunkte folgender Funktionen.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$ **b)** $f(x) = 2x^4 - 4x^2$ **c)** $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$
d) $f(x) = -2x^4 + 2x^2 - 1$ **e)** $f(x) = \sin(4x) + 1;\ [0;\ 4]$ **f)** $f(x) = \sqrt{2 + \cos(x - 1)};\ [0;\ \pi]$
g) $f(x) = e^{1 - x^2}$ **h)** $f(x) = 0{,}5 \cdot (1 + x) \cdot e^{-2x}$ **i)** $f(x) = (x - 2) \cdot e^{0{,}5x}$

Zur Erinnerung: $[a;\ b]$ bedeutet geschlossenes Intervall, d. h. $\{a \le x \le b\}$. $]a;\ b[$ bedeutet offenes Intervall, d. h. $\{a < x < b\}$.

3 Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ auf den angegebenen Intervallen.

a) $[-1;\ 1]$ **b)** $]-2;\ 2]$ **c)** $[-2;\ 2[$ **d)** $]0;\ 1]$ **e)** $[0;\ 1]$ **f)** $\mathbb{R}$

Nachgefragt

- Erklären Sie, wofür der x-Wert und der y-Wert in der Zielfunktion stehen.
- Erläutern Sie – wenn möglich an einem Beispiel – die Begriffe „Zielfunktion“ und „Randwerte“ sowie den Unterschied zwischen einem lokalen und einem globalen Extremum.
- Liam meint: „Die Überprüfung der 2. Ableitung kann weggelassen werden, wenn man die y-Werte der Extrempunkte hat und die Randwertbetrachtung durchführt.“
  Hat er recht? Argumentieren Sie.

4 Ordnen Sie zu, welche Zielfunktion zu der jeweiligen Aufgabe passt.

A Zylinder mit Volumen = 1 Liter mit möglichst geringem Material
B Aus einem Draht mit Länge $l = 50$ cm soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt gebogen werden.
C Eine quaderförmige Paketschachtel soll eine quadratische Grundfläche haben und möglichst großen Inhalt. Die Gesamtlänge aller Kanten darf 3 m nicht überschreiten. Wie sind die Kantenlängen zu wählen?

1 $V(x) = x^2 \cdot 2x$

2 $O(r) = 2\pi r \cdot h = 2\pi r \cdot \frac{1\ \text{Liter}}{\pi r^2}$

3 $V(x) = \pi r^2 \cdot h$

4 $V(x) = x^2 \cdot (3 - 8x) : 4$

5 $A(x) = x\,(25 - x)$

6 $A(x) = x\,(50 - x)$

5 Ein Pharmaunternehmen stellt ein Medikament her. Untersuchungen haben gezeigt, dass sich die Produktionskosten durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades beschreiben lassen: $f(x) = x^3 - 10x^2 + 35x + 18$. Dabei gibt x die Menge der produzierten Medikamente in 1000 Mengeneinheiten an.

a) Bei welchen Mengeneinheiten macht das Unternehmen Gewinn, wenn es die Medikamente für 20 € pro Stück verkauft?
b) Bei welcher Stückzahl ist der Gewinn am höchsten?

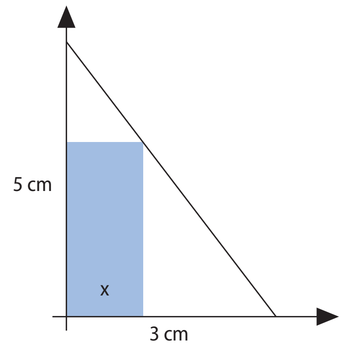
6 In einem rechtwinkligen Dreieck (senkrechte Kathete 5 cm, waagerechte Kathete 3 cm) befindet sich ein Rechteck mit der Breite x (in cm).

a) Stellen Sie die Geradengleichung für die Hypotenuse auf.

b) Begründen Sie, warum für die Fläche A des Rechtecks $A(x) = (5 - \frac{5}{3}x) \cdot x$ gilt.

c) Wie lang muss die Grundseite des Rechtecks sein, damit die Fläche maximal ist?

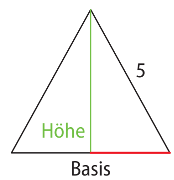
d) Bestimmen Sie die Ränder des Definitionsbereichs und führen Sie eine Randwertbetrachtung durch.



7 Ein gleichschenkliges Dreieck mit einer Schenkellänge von 5 cm soll einen möglichst großen Flächeninhalt haben. Wie sind die Maße des Dreiecks zu wählen?

Beispiel
Dreieck mit maximalem Flächeninhalt

Lösung: *Der Flächeninhalt A (x) soll extremal werden. Als Variable x kann die Höhe* ***oder*** *die Basis* ***oder*** *nur ein Teil der Basis (rot) gewählt werden (vgl. Skizze). Je nachdem, wie man sich entscheidet, können die anderen Teile damit ausgedrückt werden:*



rote Strecke $= x \Rightarrow$ *Basis* $= 2x$ *und Höhe* $= \sqrt{5^2 - x^2}$ *(Pythagoras)*

Basis $= x \Rightarrow$ *rote Strecke* $= 0{,}5x$ *und Höhe* $= \sqrt{5^2 - (0{,}5x)^2}$

Höhe $= x \Rightarrow$ *rote Strecke* $= \sqrt{5^2 - x^2}$ *und Basis* $= 2 \cdot \sqrt{5^2 - x^2}$

In Abhängigkeit von der Wahl des x führt die Flächenformel für Dreiecke dann zu:

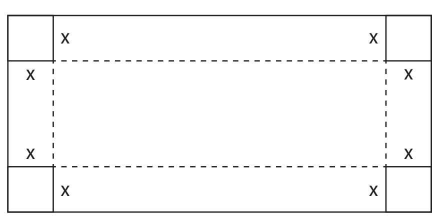
$$A(x) = \frac{\text{Basis} \cdot \text{Höhe}}{2} = \frac{2x\sqrt{5^2 - x^2}}{2} = x\sqrt{25 - x^2} \Rightarrow \textbf{Maximum 12,5} \text{ (bei } x = 3{,}54)$$

$$A(x) = \frac{\text{Basis} \cdot \text{Höhe}}{2} = \frac{x\sqrt{5^2 - (0{,}5x)^2}}{2} = 0{,}5x\sqrt{25 - 0{,}25x^2} \Rightarrow \textbf{Maximum 12,5} \text{ (bei } x = 7{,}07)$$

$$A(x) = \frac{\text{Basis} \cdot \text{Höhe}}{2} = \frac{2\sqrt{5^2 - x^2} \cdot x}{2} = x\sqrt{25 - x^2} \Rightarrow \text{Maximum } \textbf{12,5} \text{ (bei } x = 3{,}54)$$

Es ist also nicht wichtig, wie man die Variable x wählt – das Ergebnis ist stets dasselbe.

8 Von einem rechteckigen Stück Blech mit den Seiten 10 cm und 6 cm werden die Ecken quadratisch mit Seitenlänge x (in cm) abgeschnitten. Die überstehenden Teile werden an den gestrichelten Linien hochgebogen. Dadurch entsteht eine offene Dose.



a) Geben Sie für die Längen der gestrichelten Linien Terme an.

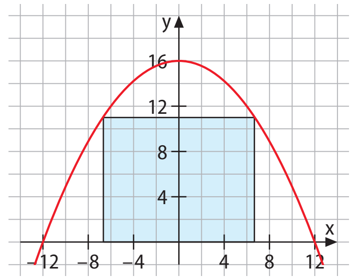
b) Stellen Sie eine Zielfunktion für das Volumen der Schachtel auf.

c) Wie groß muss man die quadratischen Ecken abschneiden, damit die Dose ein möglichst großes Volumen hat?

d) Wie verhält sich Ihre Zielfunktion für $x \to \infty$?

e) Welche Ränder der Definitionsmenge ergeben sich aus dem Sachverhalt?

9 In einer Stadt ist der Bau einer 12 m hohen Schwimmhalle geplant. Die Stirnseite soll ein parabelförmiges Profil $\left(y = -\frac{1}{9}x^2 + 16\right)$ erhalten. Der Architekt hat für diese Seite der Halle ein rechteckiges Fenster vorgesehen.



a) Für den Fensterrahmen stehen 36 m Material zur Verfügung. Ermitteln Sie, ob dies Einfluss auf die möglichen Fenstermaße hat.

b) Ermitteln Sie, welchen Flächeninhalt das Fenster maximal haben kann.

10 Isosceles triangles of side length 5 inches rotate around their line of symmetry. Describe the volume of the resulting cone with a function and find out if there is one cone with the greatest volume.

Bei einer Geschwindigkeit von 3 m/s braucht man für die Strecke x eine Zeit von $\frac{x}{3}$ Sekunden.

11 Am Bodensee ereignet sich im Wasser 50 m vom (geradlinigen) Strand entfernt ein Badeunfall. Der nächste Wasserwacht-Stützpunkt befindet sich direkt am Strand und ist 130 m Luftlinie vom Unfallort entfernt.

a) An welcher Stelle des Strands sollte der Rettungsschwimmer, der mit einer Geschwindigkeit von 8 m/s läuft und mit 1,6 m/s schwimmt, ins Wasser gehen, um möglichst schnell helfen zu können?

b) Wie lange braucht er bis zum Unfallort mindestens?

12 Finden Sie heraus, welche Punkte der Parabel $y = x^2$ vom Punkt $P(1\,|\,0)$ den kleinsten Abstand haben, und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

13 Die Außentemperatur in Grad Celsius (°C) an einem sonnigen Junitag wird durch die Funktion f mit $f(x) = 8\sin\left(\frac{\pi}{12}x - 2{,}2\right) + 21;\ 0 \le x \le 24,$ beschrieben (Zeit x in Stunden nach Mitternacht).

a) Ermitteln Sie, wann die Außentemperatur am Vormittag maximal war.

b) Die Innentemperatur im Haus wird mit der Funktion g mit $g(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{12}x - 3{,}1\right) + 18$ modelliert. Berechnen Sie, wann der Temperaturunterschied am größten war.

14 Eine der großen Attraktionen auf Volksfesten sind Free Fall Tower, bei denen Passagiere auf einer Plattform an einem Turm hochfahren. Dann wird die Verankerung der Plattform plötzlich gelöst, und sie fällt im freien Fall nach unten. Im Anschluss daran wird sie mit einer Wirbelstrombremse abgebremst, sodass die Passagiere weich landen. Diese Bremsart hat den Vorteil, dass praktisch reibungslos und damit sehr verschleißarm abgebremst wird. Für die Bremskraft B gilt:
$B(v) = \frac{v}{4 + v^2}$ (v = Geschwindigkeit der Plattform).
Bei welcher Geschwindigkeit ist die Bremskraft maximal?

15 Soll man sein Handy beim Ladevorgang nutzen? Die folgende Funktion beschreibt den Akkustand L (in Prozent) eines Handys in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) am Ladekabel: $L(t) = 100\,(1 - e^{-1{,}92t})$.
Die Entladung hängt davon ab, wie stark das Handy genutzt wird. Ein Handy mit leerem Akku wird mit dem Ladekabel verbunden. Gleichzeitig öffnet der Nutzer eine App, die pro Minute 0,2 % der Akkuladung verbraucht.

a) Wie stark kann der Akku höchstens geladen werden? Zu welchem Zeitpunkt ist das in diesem Modell der Fall?
b) Wie lang kann der Nutzer so weiter machen?
c) Eine komplette Entladung (0 %) ist unrealistisch. Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich an.

16 Der Benzinverbrauch eines Autos wird pro 100 km angegeben. Er hängt in erster Linie von der Geschwindigkeit ab. Die Funktion f beschreibt den Benzinverbrauch eines Testfahrzeugs mit 60-Liter-Tank. Es gilt:

$$f(x) = \frac{x^3 + 192\,000}{1600x} \text{ mit } 0 < x < 160.$$

(Geschwindigkeit x in km/h, Benzinverbrauch f (x) in ℓ/100 km). Analysieren Sie den Verlauf der Verbrauchskurve und untersuchen Sie die maximal mögliche Reichweite des Fahrzeugs bei vollem Tank.

17 Die Geschwindigkeit eines Schwimmers schwankt periodisch um einen Wert. Messungen beim Training haben ergeben, dass sich die Bewegung näherungsweise durch den Geschwindigkeits-Zeit-Funktionsterm $v(t) = 0{,}4 \sin(12t) + 1{,}5$ beschreiben lässt (Zeit t in s; Geschwindigkeit v in m/s).

a) Bestimmen Sie die Periodendauer.
b) Zwischen welchen Werten schwankt die Geschwindigkeit des Schwimmers?
c) Skizzieren Sie den Geschwindigkeits-Zeit-Funktionsgraphen.
d) Zu welchen Zeiten nimmt die Geschwindigkeit am stärksten ab?

Nachgefragt

- Philipp sagt: „Bei Geschwindigkeits-Aufgaben ist die Zielfunktion immer $v = \frac{s}{t}$.“ Nehmen Sie Stellung zu dieser Aussage.
- Stellen Sie den inneren Zusammenhang zwischen der Anwendung des Gauß-Algorithmus und dem Lösen von Extremwertaufgaben dar. Ein selbstgewähltes Beispiel kann Ihre Darstellung unterstützen.
- Beschreiben Sie in eigenen Worten, was man unter einer Modellierung versteht. Ist jede Aufgabe, die einen lebensweltlichen Bezug aufweist, automatisch eine Modellierungsaufgabe? Gehen Sie bei Ihrer Antwort insbesondere auf die Relevanz der Fragestellung ein.
- Diskutieren Sie: Wenn man ein lokales Maximum kennt und weiß, dass beide Randwerte kleiner sind, dann ist es das globale Maximum.
- Recherchieren Sie, was man unter dem „isoperimetrischen Problem“ versteht, und stellen Sie den Zusammenhang zu diesem Kapitel her. Skizzieren Sie einen möglichen Weg, wie man die Aussage des Problems beweisen könnte.

3 Klausurvorbereitung

Im Folgenden finden Sie keine vollständigen Klausuren, wohl aber Aufgaben, die zu diesem Kapitel passen und Teil einer Klausur sein könnten.

Aufgabe 1

Warm up

A Ermitteln Sie die ersten drei Ableitungen folgender Funktionen.
a) $f(x) = \sin(2x)$ **b)** $f(x) = \sqrt{x}$ **c)** $f(x) = (0{,}1x - 1)^{10}$

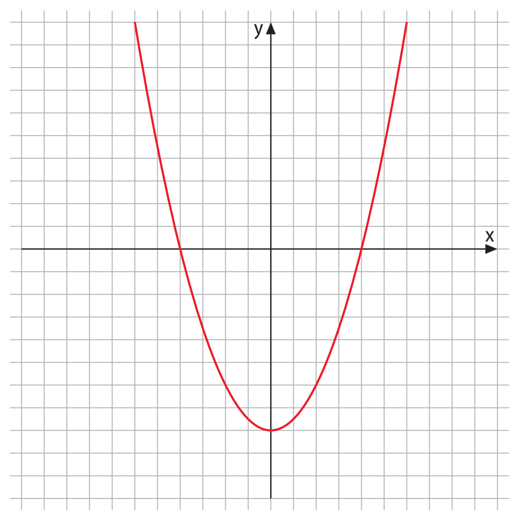
B Bestimmen Sie die Extrem- und Wendestellen folgender Funktionen.
a) $f(x) = x \cdot e^x$ **b)** $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$; $[-\pi; \pi]$

C Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

a)
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & a - b + c & = & 3 \\ \text{II} & 4a + 2b + c & = & 15 \\ \text{III} & 9a - 3b - c & = & -3 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2a + b + c & = & 3 \\ \text{II} & 4a + 2b + c & = & 15 \\ \text{III} & 9a - 3b - c & = & -3 \end{array}$$

1 Ein Schiffsrumpf hat im Querschnitt annähernd die Form einer Parabel. Die Wasseroberfläche wird durch die x-Achse dargestellt. Der Querschnitt des Schiffsrumpfs unter Wasser wird durch den Teil des Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8$ beschrieben, der unterhalb der x-Achse verläuft.



a) Übertragen Sie die Zeichnung ins Heft und tragen Sie die Zahlen an den Koordinatenachsen ein.
b) In den Rumpf soll ein Raum mit möglichst großem rechteckigem Querschnitt gebaut werden. Ermitteln Sie die optimale Breite des Raums.

Durch einen Bruch im Schiffsrumpf dringt Wasser ein. Das Loch wird schnell entdeckt, kann jedoch nicht sofort repariert werden. Deshalb wird damit begonnen, das eingeflossene Wasser abzupumpen, jedoch kommt die Pumpe nur langsam in Gang. Erst eine Stunde nach Beginn des Wassereintritts wird mehr Wasser abgepumpt als zufließt. Zu diesem Zeitpunkt befinden sich schon 2943 Liter Wasser im Schiffsrumpf.
Die Wassermenge im Schiff wird durch die Funktion g mit $g(t) = a \cdot t \cdot e^{bt}$ (t in Stunden, g(t) in m^3 Wasser; $a, b \neq 0$) beschrieben.
c) Bestimmen Sie aus den Angaben im Text die Parameter a und b. Runden Sie auf eine ganze Einheit. Skizzieren Sie anschließend den Graphen.
d) Wann geht die Wassermenge am stärksten zurück?
e) Geben Sie Gründe an, warum der Schiffsrumpf mit einer Pumpe nicht zu 100 % trocken werden kann. Bei welcher Wassermenge würden Sie daher von „Trockenheit“ sprechen? Wann ist dies in Ihrem Modell der Fall?

Aufgabe 2

Warm up

A Untersuchen Sie jeweils das Krümmungsverhalten des Graphen der Funktion an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x-1}$

B Stellen Sie eine Zielfunktion auf und berechnen Sie das gesuchte Extremum.

a) Ein Rechteck mit Umfang 30 cm soll möglichst großen Flächeninhalt haben.

b) Ein Rechteck mit Flächeninhalt 25 cm^2 soll möglichst kleinen Umfang haben.

C Ermitteln Sie jeweils die Stelle x der Funktion f mit der angegebenen Eigenschaft.

a) $f(x) = -(x+1)^3$ hat den stärksten Anstieg.

b) $f(x) = 2x \cdot e^{x-1}$ hat das stärkste Gefälle.

2 Eine ganzrationale Funktion 5. Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung und berührt bei $x = 2$ die x-Achse. Die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = -1$ ist parallel zur Geraden $y = -3x$.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion. Zwischenlösung: $f(x) = x^5 - 8x^3 + 16x$

b) Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen von f in einem geeigneten Koordinatensystem.

c) Ab jetzt wird nur noch die Definitionsmenge $D_f = [0;\ 2]$ betrachtet. Auf diesem Intervall soll der Graph durch eine quadratische Funktion g angenähert werden, die mindestens in den Nullstellen mit f übereinstimmt. Ermitteln Sie einen Funktionsterm von g.

d) An welcher Stelle unterscheiden sich die Funktionswerte von g und f auf dem Intervall $]1;\ 2]$ am stärksten? Wie groß ist diese Abweichung?

e) Beurteilen Sie die Qualität der Annäherung der Funktion f durch die Funktion g.

Aufgabe 3

Warm up

A Untersuchen Sie die Funktionen jeweils auf Wendepunkte.

a) $f(x) = x \cdot (x+2)^2$ **b)** $f(x) = (2x-3)^2$ **c)** $f(x) = 2x^4 - 6x^3$

B Untersuchen Sie, ob eine Gerade durch die Punkte $P(3|7)$, $Q(-1|0)$ und $R(1|4)$ geben kann. Wie sehen das zugehörige LGS und die Lösungsmatrix aus?

3 **a)** Eine ganzrationale Funktion 3. Grades soll in $(1|1)$ einen Wendepunkt, an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 2$ einen Tiefpunkt haben. Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion.

b) Eine ganzrationale Funktion 3. Grades soll in $(0|1)$ einen Wendepunkt, an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 2$ einen Tiefpunkt haben. Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion.

c) Kann man durch die die drei Punkte $(1|1)$, $(-2|?)$ und $(2|?)$ aus Teil a) auch eine Parabel legen?

d) Begründen Sie, dass $n + 1$ Punkte ein Polynom n-ten Grades eindeutig bestimmen.

e) Zeigen Sie am Beispiel der Punkte $P(0|0)$ und $Q(2|0)$, dass es zu zwei Punkten unendlich viele quadratische Funktionen geben kann.

Aufgabe 4

Warm up

A Bestimmen Sie jeweils die Lösungen folgender Gleichungen.

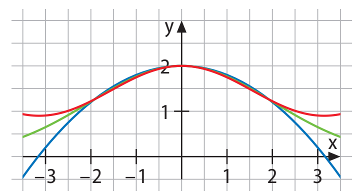
a) $5^{2x} - 4 \cdot 5^x = 0$ **b)** $3^{x+2} - 4 \cdot 3^x = 10$ **c)** $7^{x-3} - 49^x = 0$

B Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

a)
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 4a - b + c & = & 3 \\ \text{II} & 4a + 2b & = & 14 \\ \text{III} & 12a + 3b + c & = & 31 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & -a + 5b - 6c & = & 7 \\ \text{II} & 6a + 2b + c & = & 19 \\ \text{III} & a - b + c & = & 0 \end{array}$$

4 Im Koordinatensystem sind drei Bögen dargestellt.



a) Der schwarze Bogen beschreibt eine parabelförmige Brücke. Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion f, die diesen Brückenteil beschreibt. Wie lang ist die Straße zwischen den Endpunkten des Bogens, wenn die x-Achse (1 LE = 10 m) die Straße darstellt?

b) Der rote Bogen beschreibt eine Welle mit Periode 2π, die ein Physiker aufgezeichnet hat. Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion g, die diesen Bogen beschreibt. Wie nahe kommt dieser Graph der x-Achse (auf ganz $\mathbb{R}$)?

c) Der grüne Bogen beschreibt eine Dachgaube, die ein Architekt plant. Ermitteln Sie eine Gleichung der Form $h(x) = a \cdot e^{bx^2}$, welche diesen Bogen beschreibt. Berechnen Sie die Wendepunkte des Graphen von h und beschreiben Sie das Krümmungsverhalten sowie das Verhalten für $x \to \pm\infty$.

d) Beschreiben Sie, wie sich für $x \in [2;\ 4]$ die y-Werte und die Steigung bei allen drei Graphen verändern.

Reflexion

Wie sehen typische Klausuraufgaben aus?

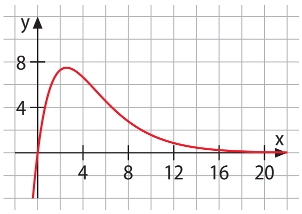
- Auf Rechts- bzw. Linkskrümmung von Funktionsgraphen aufgrund der 2. Ableitung schließen können
- Wendepunkte (Punkte mit stärkstem Anstieg bzw. Gefälle) berechnen
- ein lineares Gleichungssystem aufstellen und es mit dem Gauß-Algorithmus lösen
- Funktionsterme aus vorgegebenen Eigenschaften des Graphen aufstellen
- Sachaufgaben, bei denen eine Größe extremal werden soll, als Extremwertaufgabe verstehen, eine Zielfunktion aufstellen und das Problem lösen
- Zusammenhänge zwischen der 1. Ableitung und der 2. Ableitung erkennen, diese begründen und Graphen als zu einer Funktion gehörende Ableitungsgraphen identifizieren

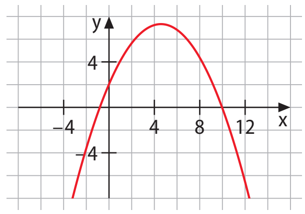
Typische Aufgabenteile für das Warm up:

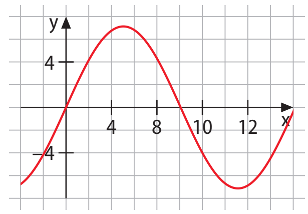
- höhere Ableitungen
- Extrem- und Wendepunkte von Funktionsgraphen bestimmen
- lineare Gleichungssysteme lösen

Im Folgenden finden Sie Aufgaben, wie sie zu diesem Kapitel passend in einer mündlichen Abiturprüfung gestellt werden können.

1 Die Funktion f mit $f(x) = 8xe^{-bx}$ beschreibt für $x > 0$ die Wachstumsrate eines Baums (x in Wochen, f(x) in cm). Eine der Abbildungen zeigt den Graphen von f.

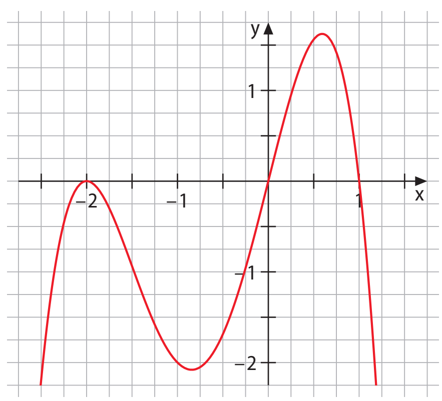






a) Begründen Sie, welcher Graph die Funktion f darstellt.
b) Erläutern Sie, was $f(9) = 2$ im Sachzusammenhang bedeutet.
c) Ermitteln Sie einen Wert für den Parameter b.
d) Für die Ableitungsfunktion f′ von f gilt: $f'(x) = e^{-0{,}4x} \cdot (8 - 3{,}2x)$. Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsrate am stärksten abnimmt.
e) Ein Botaniker beobachtet den Baum über den gesamten Zeitraum und sagt: „Ab heute wächst der Baum immer langsamer."
Erläutern Sie, welche Stelle im Graphen diesen Zeitpunkt charakterisiert.

2 Gegeben ist ein Ausschnitt aus dem Graphen der Ableitungsfunktion f′ einer ganzrationalen Funktion f.

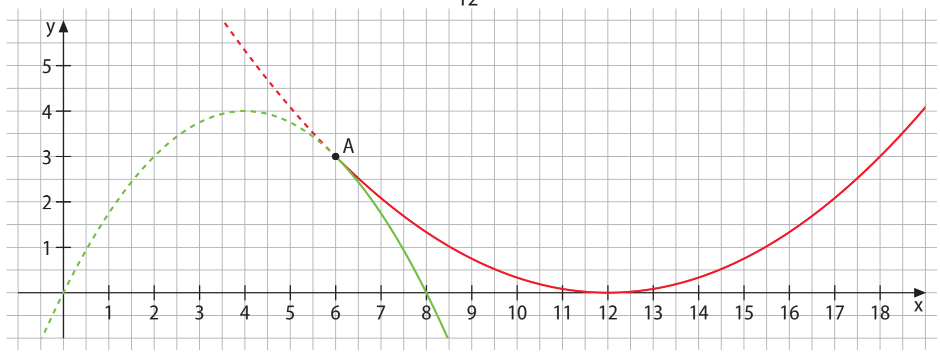


a) Nennen Sie die Nullstellen von f′ und erläutern Sie jeweils ihre Bedeutung für den Graphen von f.
b) Bestimmen Sie näherungsweise $f''(-1)$ und erläutern Sie, was dieser Wert für die Steigung des Graphen von f bedeutet.
c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f.
d) Der abgebildete Ausschnitt zeigt alle Nullstellen und Extrema des Graphen von f′. Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung für f′ mit allgemeinen Koeffizienten sowie hinreichend viele mathematische Bedingungen, die diese Gleichung aufgrund des abgebildeten Graphen erfüllt, an.
e) Der Versuch, eine mögliche Funktionsgleichung für f′ aufzustellen, führt auf ein LGS, welches mit dem Gauß-Algorithmus auf Stufenform gebracht wird. Hier sind die letzten zwei Darstellungen angegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

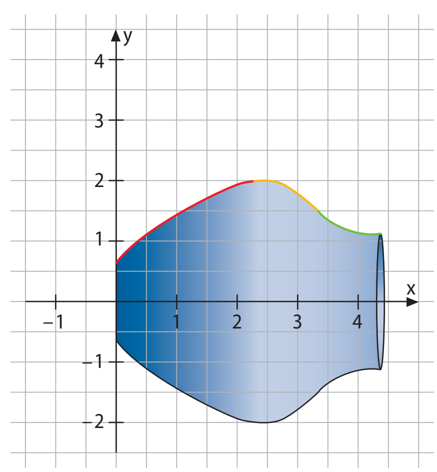
Erläutern Sie die Umformungsschritte zwischen diesen zwei letzten Matrizen.
f) Ermitteln Sie aus der letzten Matrix die Lösung des Gleichungssystems und geben Sie die daraus resultierende Gleichung für f′ an.

3 Die abgebildeten Funktionsgraphen der Funktionen f und g zeigen abschnittsweise zwei Teile einer Straße, die am Punkt A (6|3) ineinander übergehen. Der rote Graph gehört zu einer Funktion g mit der Gleichung $g(x) = \frac{1}{12}x^2 - 2x + 12$ (1 LE = 100 m).



a) Lesen Sie den Hochpunkt des Graphen von f aus der Abbildung ab.
b) Berechnen Sie $g'(6)$.
c) Erläutern Sie die Bedeutung der Gleichung $f'(6) = g'(6)$ im Sachzusammenhang.
d) Erläutern Sie, warum die Gleichung von f die Gestalt $f(x) = ax^2 + bx + c$ haben muss, und geben Sie die Bedingungen für diese Gleichung an, die sich aus dem Hochpunkt und den Koordinaten des Punkts A ergeben.
e) Erläutern Sie, welche Schritte beim Ermitteln der Funktionsgleichung auf folgende Matrix führen:
$$\begin{pmatrix} 36 & 6 & 1 & 3 \\ 16 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
f) Ermitteln Sie die Stufenform der Matrix aus Teilaufgabe e).
g) Jürgen macht beim Umformen der Matrix einen Rechenfehler und bekommt als letzte Zeile der Matrix $(4 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1)$. Erläutern Sie, was diese Zeile für die Funktionsgleichung von f bedeuten würde und warum diese Lösung nicht plausibel ist.

4 Wenn man die abgebildete Vase mit mehreren, abschnittsweise definierten Funktionen modelliert, erhält man ein besseres Ergebnis, als wenn man das mit nur einer Funktion tun würde.



a) Lesen Sie für jeden der drei Abschnitte jeweils zwei Punkte ab.
b) Welche mathematischen Bedingungen müssen Sie an die Übergänge zwischen den Funktionen stellen, damit keine Knicke entstehen und sie möglichst glatt sind?
c) Wenn jeder Abschnitt durch eine Funktion 2. Grades modelliert werden soll, benötigt man jeweils drei Bedingungsgleichungen. Wie kommen Sie zu diesen drei Bedingungsgleichungen, wenn pro Abschnitt jeweils nur zwei Punkte abgelesen werden sollen?
d) Erläutern Sie, inwiefern solche Aufgaben auf das Lösen eines LGS hinauslaufen.
e) Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise bei Lösen eines LGS.

Reflexion

Fragen, die im Laufe eines mündlichen Abiturs gestellt werden könnten	Hilfe
Beschreiben Sie das Verhalten von Steigung und Krümmung in der Nähe eines Wendepunkts.	S. 97
Erläutern Sie die Bedeutung der 2. Ableitung einer Funktion an einem konkreten Beispiel.	S. 99/7
Erläutern Sie den Unterschied zwischen notwendigem und hinreichendem Kriterium im Kontext der Bestimmung des Wendepunkts einer Funktion an einem konkreten Beispiel.	S. 94/4
Erläutern Sie, warum eine negative zweite Ableitung f″ Rechtskrümmung im Graphen von f bedeutet.	S. 96
Erläutern Sie den Zusammenhang von Extrempunkten des Graphen von f′ und Wendepunkten des Graphen von f.	S. 100/16
Erläutern Sie den Zusammenhang von Nullstellen des Graphen von f″ und Wendepunkten des Graphen von f.	S. 100/16
Begründen Sie, dass eine ganzrationale Funktion 2. Grades keinen Wendepunkt haben kann.	S. 106/14
Erläutern Sie, wie der Begriff „Trendwende“ bei fallenden Verkaufszahlen mithilfe mathematischer Begriffe präzise formuliert werden kann.	S. 97
Erläutern Sie den Begriff *Zielfunktion* bei der Gewinn-Optimierung.	S. 114
Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion f, die nur auf [0; 5] definiert ist und bei der die Randwerte höher liegen als das Maximum.	S. 115
Ein Fußball wird über den Torwart hinüber ins Tor geschossen. Die Flugbahn wird mathematisch modelliert. Erläutern Sie, warum dabei Ränder mit Randwerten festgelegt werden müssen.	S. 115
Erläutern Sie, welche Umformungsschritte beim Gauß-Algorithmus erlaubt sind und wie sie zur Stufenform führen.	S. 103, 105/11
Erläutern Sie, wie von der Stufenform einer Matrix auf die Lösungsvielfalt des zugrunde liegenden LGS geschlossen werden kann.	S. 106
Beschreiben Sie, wie eine Matrix schrittweise mit dem Gauß-Algorithmus zur Stufenform umgeformt wird.	S. 103
Erläutern Sie die Schritte bei einer mathematischen Modellierung.	S. 109
Welche Bedeutung hat die Plausibilitätsprüfung beim mathematischen Modellieren?	S. 111/8
Erläutern Sie, mit welchen Funktionstypen Sie a) eine Wurfkurve, b) eine Wellenlinie und c) einen Zerfallsprozess modellieren würden.	S. 111/7
Geben Sie ein Beispiel für eine Matrix in Stufenform, dessen zugrundeliegendes LGS keine Lösung hat. Erläutern Sie, welches LGS sich aus dieser Stufenform ergibt und warum es keine Lösung hat.	S. 106

In diesem Kapitel haben Sie gelernt, …
… dass viele Vorgänge sich mit Funktionen bzw. deren Ableitungen modellieren lassen und dass das Lösen linearer Gleichungssysteme dabei oft ein wichtiges Werkzeug darstellt.

Im Detail haben Sie gelernt, …

Kap. 3.1

Krümmung und Wendepunkte

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… höhere Ableitungen bei unterschiedlichen Funktionsklassen zu bestimmen. … das Krümmungsverhalten von Kurven zu untersuchen. … Wendepunkte zu bestimmen.	Wir haben die Krümmung als Veränderung der Steigung und damit als Ableitung der 1. Ableitungsfunktion zu deuten gelernt. Damit haben wir festgestellt, dass das Vorzeichen der **2. Ableitung der Ausgangsfunktion** Aufschluss über Links- oder Rechtskrümmung gibt. ▪ $f''(x) > 0 \Rightarrow$ Linkskrümmung ▪ $f''(x) < 0 \Rightarrow$ Rechtskrümmung Wir haben den **Wendepunkt** als weiteren charakteristischen Punkt kennengelernt, bei dem f'' das Vorzeichen wechselt. Also müssen die Lösungen von $\mathbf{f''(x) = 0}$ gefunden und dort ein Vorzeichenwechsel festgestellt oder $f'''(x) \neq 0$ nachgewiesen werden. Schließlich haben wir erfahren, dass ein Wendepunkt, an dem die Steigung null ist $(f'(x) = 0)$, **Sattelpunkt** heißt.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… das Krümmungsverhalten einer Funktion rechnerisch zu bestimmen.	S. 98/1, 5	S. 96
… Wendepunkte eines Graphen aus der Funktionsgleichung zu berechnen.	S. 98/2 – 4	S. 97/98
… von den Extrempunkten im Graphen der Ableitungsfunktion auf die Wendepunkte im Graphen der Ausgangsfunktion zu schließen.	S. 99/13, 100/16	S. 93/2

Kap. 3.2

Matrix-Schreibweise und Gauß-Algorithmus

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… das Gaußverfahren, auch in Matrixschreibweise, auf lineare Gleichungssysteme ohne Parameter bis zur Stufenform anzuwenden. … die Lösungsvielfalt linearer Gleichungssysteme ohne Parameter anzugeben und im Falle eindeutiger Lösbarkeit deren Lösung zu bestimmen.	Ein **lineares Gleichungssystem (LGS)** besteht aus mehreren Gleichungen, in denen mehrere Variable (mit dem Exponenten 1) vorkommen. Ausschlaggebend für die Lösung sind nur die Koeffizienten, deshalb reicht es, diese in eine Matrix zu schreiben und sämtliche Rechnungen nur in dieser **Matrix-Schreibweise** durchzuführen. Dabei können Zeilen vertauscht oder mit einer Zahl $\neq 0$ multipliziert werden. Außerdem darf zu einer Zeile eine andere addiert oder von ihr subtrahiert werden. Durch diese **Zeilenoperationen** kommt man stets zu einer **Stufenform**, aus der man die Lösungen des LGS leicht bestimmen kann **(Gauß-Algorithmus)**. Die Lösung kann **eindeutig** sein; ein LGS kann aber auch gar **keine Lösung** oder **unendlich viele Lösungen** besitzen. Diese **Lösungsvielfalt** ist an der Stufenform erkennbar.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… ein LGS in Matrix-Schreibweise umzuschreiben und es mit dem Gauß-Algorithmus zu lösen.	S. 104/1 – 5	S. 103
… Sachaufgaben, die auf ein LGS führen, zu lösen oder deren Unlösbarkeit nachzuweisen.	S. 105/9, 13	S. 102

Funktionsterme aufstellen – mathematisches Modellieren

Kap. 3.3

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… einen Funktionsterm zu ermitteln, falls dieser durch die Eigenschaften eines Graphen eindeutig festgelegt ist. … Sinus- und Kosinusfunktionen im Sachzusammenhang zu bestimmen. … Exponentialfunktionen im Sachzusammenhang zu bestimmen.	Der **Modellierungskreislauf** beginnt mit dem Umsetzen von Sachinformationen in mathematische Schreibweise. Ein Parabelbogen wird z. B. durch $f(x) = ax^2 + bx + c$ modelliert, ein Sattelpunkt durch $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ mathematisch beschrieben. Mithilfe mathematischer Werkzeuge können Unbekannte berechnet und eine Modellfunktion angegeben werden, mit deren Hilfe Fragen mathematisch beantwortet werden können. Dabei muss immer wieder überprüft werden, inwieweit die Modellfunktion plausibel bzw. sinnvoll ist. Ist sie es nicht, sollte man seine Schritte nachbessern und den modifizierten Modellierungskreislauf nochmals durchlaufen.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… bei ganzrationalen Funktionen aus charakteristischen Punkten ein LGS aufzustellen, mit dessen Lösung ein Funktionsterm aufgestellt werden kann.	S. 110/3 – 6	S. 108, 109
… den aufgestellten Funktionsterm auf Plausibilität zu überprüfen und daraus eine sinnvolle Antwort für die Aufgabe abzuleiten.	S. 111/9	S. 109
… Informationen für die Bestimmung der Parameter in Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen zu nutzen.	S. 112/15, 113/17	S. 112/14

Extremwertaufgaben

Kap. 3.4

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… Extremwerte bei quadratischen Funktionen zu bestimmen. … Extremwerte bei unterschiedlichen Funktionsklassen in außermathematischen Sachzusammenhängen zu bestimmen.	Ausgehend vom Beispiel der **Gewinnmaximierung** bei einem Unternehmen haben wir festgestellt, dass die Suche nach einer möglichst großen bzw. möglichst kleinen Größe auf Fragen nach dem Maximum bzw. Minimum einer **Zielfunktion** führt, die mathematisch untersucht werden können. So sind z. B. Fragen nach der kürzesten Zeit (Minimum) oder dem optimalen Benzinverbrauch (maximale Strecke) **Optimierungsfragen**, zu deren Lösung man sich der Mathematik bedienen kann. Die quadratischen Funktionen sind dabei die einfachsten, die einen Hoch- oder Tiefpunkt haben. Aber auch viele ganzrationale Funktionen höheren Grades oder trigonometrische Funktionen weisen Maxima und Minima auf, die bestimmt werden können. In diesem Kontext haben wir auch erfahren, dass das **absolute Maximum nicht immer am Hochpunkt** liegt und dass eine **Randwertbetrachtung** unabdingbar ist.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… eine Zielfunktion aufzustellen.	S. 116/4	S. 114
… sich sinnvolle Ränder zu einer Sachaufgabe zu überlegen und eine Randwertbetrachtung durchzuführen.	S. 117/6, 8	S. 115
…mithilfe einer Zielfunktion ein Optimum zu berechnen.	S. 116/5, 118/9	S. 114, 115

Teil 1: Ein Maß für die Krümmung einer Kurve

In diesem Kapitel haben Sie sich unter anderem mit der Krümmung beschäftigt und ein Kriterium entwickelt, mit dem man die Art der Krümmung (rechts- oder linksgekrümmt) bestimmen kann. Damit ist aber noch nichts darüber ausgesagt, wie stark eine Kurve gekrümmt ist.
Wir suchen also noch ein **Krümmungsmaß**.

Bei der Recherche im Internet stößt man in diesem Kontext auf Forumsbeiträge wie diese:

1 Eintrag in einem Modelleisenbahnforum:

„Tach zusammen,
wer hat Erfahrung mit Übergangsbögen bzw. mit dem Kriterium für einen einwandfreien, d. h. ruckfreien Lauf von Vorlaufradsätzen (z. B. bei Dampfloks)?
Ich komme also per Flexgleis aus der Geraden in die ganz langsam beginnende Kurve (ein Teil der Geraden muss noch im Flexgleis mitlaufen).
Wie stark darf die Krümmung zunehmen, ohne dass ein Ruck im Vorläufer bemerkbar wird?“

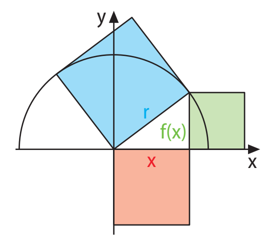
2 Eintrag in einem Mathematikforum:

…
„Bei der quadratischen Funktion f mit $f(x) = x^2$ ist die 2. Ableitung überall positiv und man sieht auch, dass der Graph linksgekrümmt ist – das passt ja zusammen. Eines verstehe ich aber nicht: Man sieht doch am Graphen, dass die Krümmung immer weniger wird, je größer man x macht – aber die 2. Ableitung ist überall gleich. Wie passt denn das zusammen?“

1 Welche Kriterien werden in Beitrag 1 formuliert, die für ein Krümmungsmaß z. B. beim Bau von Straßen und Eisenbahnschienen gelten müssen?

2 Arbeiten Sie die Argumentation aus Beitrag 2 heraus, mit der aufgezeigt wird, dass die 2. Ableitung keine Aussage über das Krümmungsmaß macht.

3 Prüfen Sie anknüpfend an Beitrag 2, ob auch für den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ eine ähnlich schlechte Übereinstimmung zwischen der Stärke der Krümmung und dem Betrag des Wertes der 2. Ableitung vorliegt.



Sie wissen bereits, dass die Ableitungen f′ und f″ einer Funktion f qualitative Aussagen über Eigenschaften des Graphen von f machen (f′ über das Steigungs-, f″ über das Krümmungsverhalten). Sie wissen auch, dass die Ableitung f′ eine quantitative Aussage macht, indem sie die Steigung an einer Stelle angibt, demnach ein Maß für diese Steigung ist. Aufgrund des Analogieprinzips könnte man nun vermuten, dass auch f″ eine quantitative Interpretation besitzt und ein Maß für die Krümmung einer Kurve darstellt. Betrachten wir hierzu folgendes Beispiel:
Für einen Punkt $(x\,|\,y)$ eines Kreises gilt nach dem Satz des Pythagoras:
$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Als Ableitungen erhält man $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ und $f''(x) = \frac{-r^2}{\sqrt{(r^2 - x^2)^3}}$.

Offensichtlich hat der Kreis überall die gleiche Krümmung, aber die 2. Ableitung nicht überall den gleichen Wert. Die zweite Ableitung allein kann also kein Maß für die Krümmung sein.

Dennoch liefert uns dieses Beispiel einen Impuls: Beim Steigungsbegriff haben wir zuerst Kurven betrachtet, die überall dieselbe Steigung haben, nämlich Geraden. Analog liegt es nahe, für den Krümmungsbegriff zunächst solche Kurven zu betrachten, die überall gleich gekrümmt sind, also Kreise. Ebenso kann man berücksichtigen, dass Geraden keine Krümmung besitzen; wir weisen Geraden also das Krümmungsmaß $k = 0$ zu.

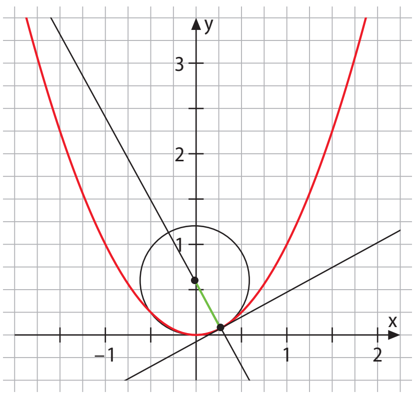
Merke

Während als Maß für die Steigung in einem Kurvenpunkt die Steigung der möglichst gut (d. h. linear) approximierenden Gerade durch diesen Punkt herangezogen wird, wird als **Maß für die Krümmung** in einem Kurvenpunkt die **Krümmung eines lokal möglichst gut approximierenden Kreises** genommen.

Doch wovon ist die Krümmung eines Kreises abhängig? Es ist naheliegend, dass der Radius in diesem Kontext eine Rolle spielen muss.

4 Untersuchen Sie den Einfluss des Radius' auf die Krümmung. Betrachten Sie hierzu Kreise mit kleinem Radius und solche mit großem Radius und versuchen Sie, ein Maß für die Krümmung eines Kreises festzulegen.

Wir haben die Krümmung einer Kurve als die Krümmung eines lokal möglichst gut approximierenden Kreises definiert. Um Erfahrungen mit dem „Gekrümmtsein" zu sammeln, sollen Sie nun eine Kurve auf deren Krümmungsmaße untersuchen, indem Sie die Kurve in ausgewählten Punkten durch Kreise approximieren und deren Krümmungsmaß durch $k = \frac{1}{r}$ ermitteln.



5 Geben Sie sich dazu irgendeine Funktion vor, zeichnen Sie deren Graphen und nähern Sie die Kurve in ausgewählten Punkten durch Kreise an, deren Krümmung in etwa der der Kurve entspricht. Ermitteln Sie anschließend das jeweilige Krümmungsmaß.

6 Entwickeln Sie Ideen, wie man den Krümmungskreismittelpunkt exakt bestimmen kann. Auf welcher Geraden liegt der Mittelpunkt? Versuchen Sie, sich daran zu erinnern, wie Sie die Tangente an einen Kreis durch einen Kreispunkt konstruiert haben.

7 Verbinden Sie die Mittelpunkte aller Krümmungskreise Ihres Graphen. Sie erhalten eine Kurve. Recherchieren Sie, was man unter einer **Evolute** versteht und in welchem Zusammenhang sie zum Erarbeiteten steht.

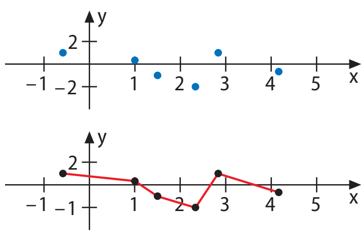
Abschließend betrachten wir eine wichtige Anwendung des Krümmungsmaßes: den Straßen- oder Schienenbau. Betrachten wir einen Kurvenpunkt $P(x_0|f(x_0))$ z. B. einer Bahnstecke, so können die beiden Kurventeile links und rechts von P als Graphen von Funktionen f und g betrachtet werden. Die Verbindung bei P soll „nahtlos" sein, d. h. es soll gelten: $f(x_0) = g(x_0)$. In P müssen beide Kurventeile dieselbe Tangente haben, d. h. $f'(x_0) = g'(x_0)$. Schließlich darf kein Krümmungsruck auftreten, d. h. alle Tangenten müssen bei P die gleichen lokalen Änderungsraten haben: $f''(x_0) = g''(x_0)$. Lässt man ganzrationale Funktionen maximal 3. Grades zu, ergibt dies ein umfangreiches lineares Gleichungssystem.
Ein Polynom, für das die eben genannten Bedingungen gelten, nennt man einen **kubischen Spline**, der zu den **Interpolationspolynomen** gehört. Mit diesen werden wir uns in Teil 2 beschäftigen.

Teil 2: Interpolation

Manchmal sind von einer Funktion nur diskrete Punkte bekannt, z. B. dann, wenn die Punkte das Resultat einer physikalischen Messung sind. Es fehlt also die analytische Beschreibung der Funktion für beliebige Stellen. Könnte man die Punkte durch eine (eventuell glatte) Kurve verbinden, so wäre es möglich, die unbekannte Funktion an den dazwischen liegenden Stellen auszuwerten. Zudem ist es zuweilen auch sinnvoll, eine schwierig handhabbare Funktion näherungsweise durch eine einfachere zu ersetzen.

lat. inter: dazwischen und polire: glätten, schleifen

Diese beiden Probleme werden durch eine **Interpolationsfunktion** gelöst.
Interpolationsprobleme sind ein Teilgebiet der numerischen Mathematik, die zu ermittelnde Funktion, die möglichst einfach sein sollte, wird *Interpolante* oder *Interpolierende* genannt.
Die Interpolation ist eine Art der Approximation:
Die betrachtete Funktion wird durch die Interpolationsfunktion in den **Stützstellen** $x_0, x_1, \ldots, x_n$ exakt wiedergegeben. Dies unterscheidet die Interpolation von der **Regression**, bei der die gegebenen Punkte nur bestmöglich angenähert werden.



Lineare Interpolation

Die einfachste Interpolationsart stellt die **lineare Interpolation** dar, bei der die einzelnen Datenpunkte durch Geradenstücke (also Strecken) wie in der Abbildung miteinander verbunden werden.

1 Verbinden Sie die Datenpunkte durch lineare Funktionen und ermitteln Sie für jedes Teilintervall die Interpolierende. Skizzieren Sie Ihre Interpolierende in einem geeigneten Koordinatensystem.

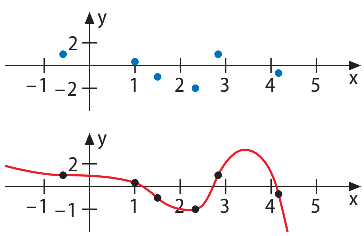
x_i	−1	0	1	2
$f(x_i)$	−11	−2	3	22

Der Vorteil der linearen Interpolation liegt im geringen Rechenaufwand; ihr Nachteil ist die fehlende Glätte durch die Knickstellen in den Intervallübergängen.

n Stützstellen ergeben n Bestimmungsgleichungen für eine ganzrationale Funktion vom Grad $n - 1$, die n unbekannte Koeffizienten hat.
Beispiel: Vier Stützstellen ergeben vier Bestimmungsgleichungen für die vier zu ermittelnden Koeffizienten a, b, c und d der Interpolante 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Kubische Interpolation

Eine harmonischere Anpassung erhält man, wenn man eine Funktion z. B. 3. Grads zur Anpassung nimmt. Dies ist möglich, da vier Stützstellen vorgelegt sind.



2 **a)** Bestimmen Sie zu den in der Wertetabelle gegebenen vier Stützstellen eine ganzrationale Funktion 3. Grads. Stellen Sie zunächst die Bestimmungsgleichungen für die vier Parameter a, b, c und d in $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ auf, und lassen Sie sich das lineare Gleichungssystem anschließend von einer Software lösen.
(Lösung: $f(x) = -7x^3 + 9x^2 + 9x - 2$)

x_i	−1	0	1	2
$f(x_i)$	5	−2	9	−4

b) Lassen Sie sich den Graphen des Interpolationspolynoms zeichnen.

3 In einem Mathematikforum kann man über einen solchen Graphen lesen:
„n Punkte lassen sich durch ein Polynom (n – 1)-ten Grads interpolieren. Meist entstehen dabei aber unrealistische Überschwinger."
In einem Online-Lexikon ist zu lesen, dass „das Ergebnis einer Polynominterpolation durch unvorteilhaft festgelegte Stützstellen oft bis zur Unkenntlichkeit oszilliert." Was ist damit gemeint, welcher Nachteil dieses Interpolationsverfahrens wird angesprochen?

Aufgrund der eben angesprochenen Nachteile probieren wir einen alternativen Ansatz aus.

Newton'sche Interpolation
Der Ansatz für das Newton-Interpolationspolynom für n + 1 Stützstellen lautet:

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - xn - 1).$$

Die Forderung $p_n(x_i) = y_i\ (0 \le i \le n)$ ergibt ein Gleichungssystem. Mit den vier angegebenen Stützstellen ergibt sich also wieder der Ansatz für eine ganzrationale Funktion 3. Grads:

x_i	–1	0	1	2
$f(x_i)$	5	–2	9	–4

$$N_4(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

4 Ermitteln Sie mit dem Ansatz von Newton ein Interpolationspolynom und lassen Sie sich dessen Graphen zeichnen. Was stellen Sie fest?

Spline-Interpolation
Die für den Straßen- oder Schienenbau erforderliche Glätte hat man durch die bisherigen Verfahren noch nicht erreicht; man würde sie auch nicht dadurch erreichen, dass man den Grad des Interpolationspolynoms erhöht. Vielmehr muss das Interpolationspolynom P zusätzlich folgende Bedingungen erfüllen:

1. $P(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ 2. $P'(x_i) = f'(x_i)$ 3. $P''(x_i) = f''(x_i)$

Derartige Eigenschaften haben **kubische Splines**.

Vorlage für die Splineinterpolation (3. Grads) ist das biegsame Lineal der Schiffbauer, die *Straklatte* (englisch „spline"). Diese wird an vorgegebenen Punkten fixiert und verbindet die Punkte dann durch eine glatte Biegelinie.

5 Was wird durch die drei Bedingungen jeweils sichergestellt? Interpretieren Sie deren Bedeutung.

Wie man an der Vielzahl der Bedingungen, die man an einen kubischen Spline stellt, sehen kann, resultiert stets ein großes LGS, das sich oft nur mit einem digitalen Rechner lösen lässt.

Reflexion

Eine Liege soll nach einer Fotovorlage gestaltet werden. Da sie recht wellig ist, bestimmt der Designer 10 Punkte, die auf deren Umrandung liegen, und interpoliert diese so, dass alle Punkte auf dem Graphen liegen.

- Geben Sie eine mathematische Begründung dafür an, dass dieser Ansatz wenig zielführend ist.
- Die Spline-Interpolation stellt ein besseres Werkzeug dar, um ein solches Problem zu lösen. Erläutern Sie die Idee dieses Ansatzes.

Bildnachweis

AdobeStock / DyMax – S. 112; - / Erick – S. 100; Alamy Stock Photo / Hans Blossey – S. 111; - / Tomas Griger– S. 53; - / Heritage Image Partnership Ltd. – S. 91; - / Joan Panaite – S. 114; - / Graeme Peacock – S. 91; - / David Pearson – S. 111; - / Maurice Savage – S. 111; - / Steve Allen Travel Photography – S. 72; David Blazek, Prag – S. 111; Benjamin Castillo-Schulz, Ravensburg – S. 113; dpa Picture-Alliance – S. 53; - / akg-images – S. 88; - / imageBROKER, Jochen Tack – S. 102; - / © MP_Leemage – S. 59; F.A.Z.-Grafik / Karl-Heinz Döring – S. 73; Fotolia / wion – S. 108; Getty Images / MarioGuti – S. 112; Getty Images Plus / Ingram Publishing – S. 20, 27, 33, 39, 61, 66, 71, 78, 100, 105, 118; - / iStockphoto, DmyTo – S. 30; - / iStockphoto, upixa – S. 96; - / Edwin van Nuil – S. 9; Mauritius Images / Alamy Stock Photo, GL Archive – S. 103; shutterstock / FAG – S. 118; - / Gargantiopa – S. 100; - / Photographer RM – Cover; Südtiroler Archäologiemuseum, Bozen – S. 89; www.wikimedia.org / Richard Ressman, CC BY-SA 3.0 – S. 9

C.C.BUCHNER T63021