Selten ist Mathematik so brandaktuell wie gerade heute in Zeiten des Coronavirus Sars-CoV-2. Das Robert Koch-Institut in Berlin (www.rki.de) dient der Erkennung, Verhütung und Bekämpfung von Infektionskrankheiten (z. B. https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/nCoV_node.html) und berät dabei insbesondere das Bundeministerium für Gesundheit. Der Präsident des Instituts, Prof. Lothar H. Wieler, erklärte am Mittwoch, 18.03.2020 in der täglichen Pressekonferenz:

„Zu ihrer Frage mit den Todesraten: Auch hier noch mal ganz klar. Wir stehen am Anfang dieser Epidemie. Wir sind einfach nur ein bis zwei Wochen vor Italien, um mal hier ein Beispiel zu sagen. Das heißt also: **Wir haben einen exponentiellen Verlauf der Epidemie**. Die Zahlen werden weiter steigen. Und auch die Zahlen der Toten. Aber ich will auch nochmal sagen: Wir stehen am Anfang. Und darum können wir doch die ganzen Maßnahmen, die wir die ganze Zeit fordern, die können wir ja umsetzen. D. h. wir können dafür sorgen, dass wir noch mehr Menschen, schwer kranke Menschen versorgen können in Kliniken. Und ich möchte auch noch mal ganz deutlich sagen, dass eben vier von fünf Infizierten ja nur leichte Symptome haben, d. h. also schon sehr sehr viele Menschen gesundet sind und diese Menschen sind immun und können dann weiterhin ein sorgenloses Leben haben. D. h. also es wird sehr sehr viele Menschen geben, die diese Krankheit überstehen, aber wir müssen durch die Erhöhung der Kapazität im Gesundheitswesen und durch die Kontaktreduktion die Anzahl derjenigen, die schwer krank werden, auf ein Minimum reduzieren."

Das Robert-Koch-Institut veröffentlicht einen täglichen Situationsbericht mit den aktuellen Fallzahlen. Dabei handelt es sich um die Zahlen, die von den Gesundheitsämtern auf Grund des Infektionsschutzgesetzes an das RKI gemeldet werden. Es sind elektronisch übermittelte und validierte Daten. Zum Situationsbericht: https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/Situationsberichte/Gesamt.html
Zahlen anderer Einrichtungen können von diesen Zahlen teilweise deutlich abweichen, weil sie sich auf andere Quellen stützen, die gegebenenfalls nicht validiert sind.

Datum	12.03.	13.03.	14.03.	15.03.	16.03.	17.03.	18.03.	19.03.
Bestätigte Fälle	2369	3062	3795	4838	6012	7156	8198	10999

Quelle: https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/Situationsberichte/Archiv.html
bzw. https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/Fallzahlen.html?nn=13490888

Aufgaben

a) Berechnen Sie jeweils die Zunahme von Tag zu Tag.
Berechnen Sie den Wachstumsfaktor jeweils von einem Tag zum nächsten und bestimmen Sie daraus einen Mittelwert des Wachstumsfaktors.
Beurteilen Sie, ob ein exponentielles Wachstum vorliegt, wie Prof. Wieler behauptet.

Eine mögliche exponentielle Entwicklung soll mit einem Anfangswert von 2540 und einem Wachstumsfaktor von 1,23 modelliert werden.

b) Stellen Sie einen Funktionsterm für das exponentielle Wachstum des Modells auf – zunächst ohne und dann mit Hilfe der natürlichen Exponentialfunktion.
c) Vergleichen Sie die Werte, die sich aus dem Modell ergeben, mit den angegebenen Daten. Nehmen Sie dabei Bezug auf die Abweichungen zwischen realen und errechneten Werten.
d) Bestimmen Sie im Modell einen Funktionsterm für die (tägliche) Wachstumsgeschwindigkeit.
e) Berechnen Sie, in welcher Zeit sich nach dem Modell die Fallzahlen verdoppeln.

Prof. Lothar H. Wieler erklärte weiterhin:

"Ich will das ganz deutlich machen. **Wenn wir es nicht schaffen, das Programm, was wir entworfen haben, die Maßnahmen, die wir empfehlen, und die auch die Bundesregierung erlassen hat vor wenigen Tagen, wenn wir es nicht schaffen, die Kontakte unter den Menschen wirksam und über einige Wochen nachhaltig zu reduzieren, dann ist es möglich, dass wir <u>in zwei bis drei Monaten bis zu zehn Millionen Infizierte</u> in Deutschland haben mit einer entsprechenden erheblichen Überlastung des Gesundheitswesens.** Wir alle können dazu beitragen, dass dieses Zahlszenario nicht wahr wird. Aber unsere Berechnungen zeigen eben auch, dass es möglich ist, die Erkrankungswelle durch die Minimierung der Kontakte deutlich zu drücken. Je konsequenter uns das gelingt desto besser. Also, nochmals: Bitte unterstützen sie die eingeleiteten Maßnahmen. Halten sie Abstand möglichst mindestens 1,5 Meter. Versammeln sie sich nicht. Bleiben sie zu Hause, wann immer es geht. Und vor allem auch, wenn sie krank sind, halten sie die Hygieneregeln ein, die sie auch alle kennen. Kümmern sie sich um ihre Nachbarn, wenn diese Unterstützung brauchen. Wir brauchen jetzt Vernunft und Solidarität! Und wenn wir das haben und das umsetzen, dann können wir die Erkrankungszahlen drücken! Herzlichen Dank."

f) Berechnen Sie, wie viele Tage es nach dem Modell dauert, bis die Fallzahl auf 10 Millionen gestiegen ist, und vergleichen Sie mit dem genannten Zeitraum. Erklären Sie, wieso Prof. Wieler den Zeitraum mit zwei bis drei Monaten nur sehr grob angibt.

<u>Lösungen</u>

a) Wachstumsfaktor von einem Tag zum nächsten jeweils in der Spalte des folgenden Tages:

Datum	12.03.	13.03.	14.03.	15.03.	16.03.	17.03.	18.03.	19.03.
Bestätigte Fälle	2369	3062	3795	4838	6012	7156	8198	10999
Tägliche Zunahme		693	733	1043	1174	1144	1042	2801
Wachstumsfaktor		1,2925	1,2394	1,2748	1,2426	1,1903	1,1456	1,3417

Mittelwert der täglichen Wachstumsfaktoren: 1,2467

Die täglichen Wachstumsfaktoren unterliegen verständlicherweise Schwankungen. Dabei zeigt sich zwischenzeitlich (17./18.03.) ein Rückgang des Wachstumsfaktors. Die Zahlen der täglichen Zunahme der Infizierten deuten an diesen Tagen eher ein lineares Wachstum an. Die letzten Zahlen widerlegen aber ein lineares Wachstum. Sofern ist von einem exponentiellen Wachstum auszugehen, auch wenn von Tag zu Tag der Wachstumsfaktor schwankt. Letzteres kann seine Ursache eventuell darin haben, dass die Daten der Gesundheitsämter nicht immer auf den Tag genau übermittelt werden. Eventuell wurde auch am Wochenende zuvor weniger getestet, was sich wegen der Zeit für Test und Meldung erst wenige Tage später zeigt.

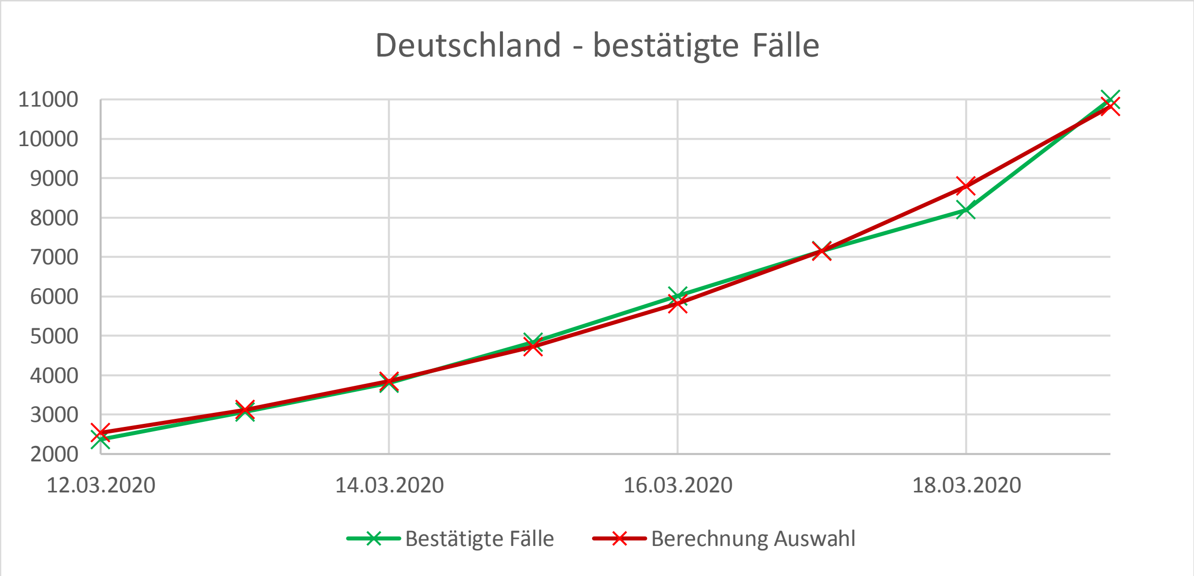
b) Die Exponentialfunktion lautet: $f(t) = c \cdot a^t$, hier mit c = 2540 und a = 1,23.
Folglich lautet der Funktionsterm: $f(t) = 2540 \cdot 1{,}23^t$
Mit der natürlichen Exponentialfunktion hat der Funktionsterm die Form: $f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$
Dabei gilt: $k = \ln a$, d. h. hier $k = \ln 1{,}23 \approx 0{,}2070$
Damit erhalten wir: $f(t) = 2540 \cdot e^{0{,}2070 \cdot t}$

c) Vergleich Modell – Fallzahlen:

Datum	12.03.	13.03.	14.03.	15.03.	16.03.	17.03.	18.03.	19.03.
Bestätigte Fälle	2369	3062	3795	4838	6012	7156	8198	10999
Modell	2540	3124	3843	4727	5814	7151	8796	10819
Abweichungen	171	62	48	-111	-198	-5	598	-180

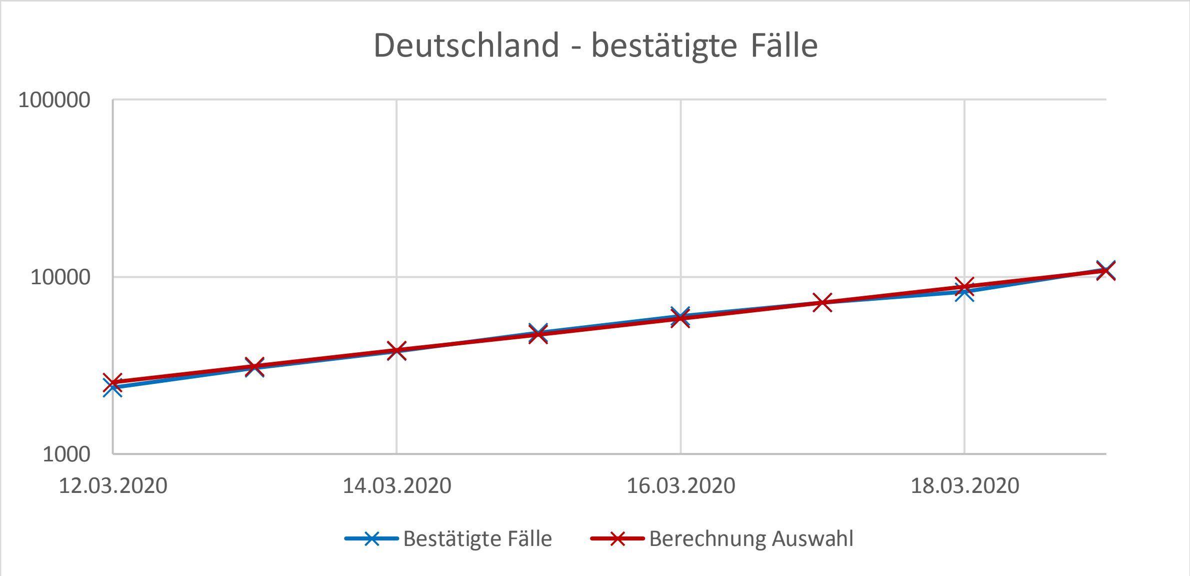
Das Modell zeigt gegenüber den realen Fallzahlen am Anfang und zwischenzeitlich (18.03.) zu hohe Werte, während es dazwischen und am Ende die Werte zu gering sind. Im Gesamtbild der Abweichungen ist das Modell für die gegebenen Tage aber sehr gut, wie insbesondere eine grafische Darstellung zeigt.

Das Diagramm zeigt eine lineare Auftragung auf der y-Achse startend bei 2000, um eine höhere Auflösung zu erhalten!



<u>Zur Vertiefung:</u>

Das zweite Diagramm zeigt eine sogenannte logarithmische Auftragung, wo die Schrittweite auf der y-Achse der Zehnerpotenz entspricht (10^3, 10^4, 10^5 entspricht sozusagen 3, 4, 5).



Ist eine Kurve darin eine Gerade, so bedeutet das einen exponentiellen Anstieg.

Mit der Steigung m der Geraden und dem y-Achsenabschnitt t ergibt sich dann:

$\log y = m \cdot x + t$

$\Rightarrow \quad y = 10^{m \cdot x + t} = 10^t \cdot 10^{m \cdot x} = c \cdot (10^m)^x = c \cdot a^x$ mit $c = 10^t$ und $a = 10^m$

d) Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit wird durch die Ableitung der Exponentialfunktion bestimmt. Es gilt: $f(t) = 2570 \cdot e^{0{,}2070 \cdot t}$

$\Rightarrow \quad f'^{(t)} = 2540 \cdot 0{,}2070 \cdot e^{0{,}2070 \cdot t} = 525{,}8 \cdot e^{0{,}2070 \cdot t}$

e) Berechnung der Verdoppelungszeit nach dem Modell:

Startwert zum Zeitpunkt t = 0: $f(0) = 2540$

Wert zum Zeitpunkt der Verdoppelung t = T_D: $f(T_D) = 5080$

Damit gilt die Gleichung: $5080 = 2540 \cdot e^{0{,}2070 \cdot T_D}$

Wir formen die Gleichung um: $e^{0{,}2070 \cdot T_D} = 2$

Logarithmieren ergibt: $0{,}2070 \cdot T_D = \ln 2$

Und damit: $T_D = \frac{\ln 2}{0{,}2070} = 3{,}3485 \approx 3{,}3$

Nach dem Modell würde sich die Zahl der Infizierten also innerhalb von 3,3 Tagen verdoppeln.

f) Anstieg der Infizierten auf 10 Millionen: Die Rechnung erfolgt völlig analog.

Startwert zum Zeitpunkt t = 0: $f(0) = 2540$

Zum Zeitpunkt t mit 10 Millionen Infizierten: $f(t) = 10.000.000$

Damit gilt die Gleichung: $10.000.000 = 2540 \cdot e^{0{,}2070 \cdot T_D}$

Wir formen die Gleichung um: $e^{0{,}2070 \cdot T_D} = \frac{10.000.000}{2540}$

Logarithmieren ergibt: $0{,}2070 \cdot t = \ln \frac{10.000.000}{2540}$

Und damit: $t = \frac{\ln \frac{10.000.000}{2540}}{0{,}2070} = 39{,}9911898 \approx 40$

Nach dem Modell würde die Zahl der Infizierten innerhalb von 40 Tagen auf 10 Millionen Infizierte steigen. Das sind grob 1,3 Monate und entspricht somit genau dem von Prof. Wieler genannten Zeitfenster von ein bis zwei Monaten.

Unserem Modell liegen bisher nur wenige Tage zugrunde, so dass sich über mehr Tage hinweg noch eine Anpassung des Wachstumsfaktors ergeben kann. Eine derartige Anpassung ist vermutlich der Grund, wieso Prof. Wieler den Zeitraum nur sehr grob angibt.