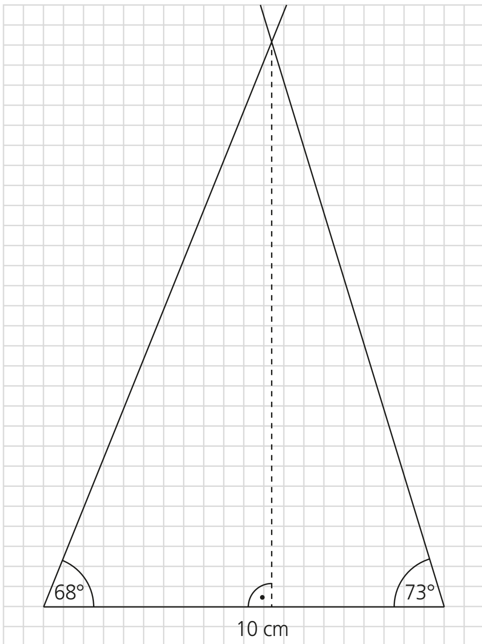
Kapitel 2: Trigonometrie

Erkläre, wie man mit dem Smartphone notwendige Größen ermitteln kann, um die Planfigur zeichnen zu können. Welche Größen kann man für die Zeichnung übernehmen, welche muss man maßstäblich verkleinern? Welcher Teil der Planfigur entspricht der Breite des Flusses? Konstruiere das Dreieck und bestimme die ungefähre Breite der Elbe an dieser Stelle.

- Um die Winkelgrößen bestimmen zu können, muss man sich frontal in Richtung Fluss hinstellen und das Smartphone so weit nach rechts oder links kippen, bis man den Baum anvisiert. Läuft man am Fluss entlang, so misst das Smartphone die zurückgelegte Distanz mittels GPS-Signal. Die Winkelgrößen können für eine Zeichnung übernommen werden, die Distanzen müssen maßstäblich verkleinert werden.
- Die Breite des Flusses entspricht in der Planfigur der gestrichelten Strecke in der Planfigur.
- Konstruktionsbeschreibung (Maßstab 1000:1):
  1. Zeichne eine Strecke von 10 cm.
  2. Trage an den Endpunkten die Winkel α und β an. Der Schnittpunkt der freien Schenkel ergibt Punkt C.
  3. Zeichne das Lot vom Punkt C auf die Strecke [AB].

  Die Senkrechte ist etwa 14,1 cm lang.
  Das entspricht einer Flussbreite von 141 m.

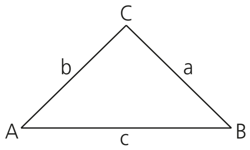


Mit der Entwicklung präziser Winkelmessgeräte im 18. Jahrhundert wurde es erst möglich, ganze Landschaften zu vermessen und damit genaue Landkarten zu erstellen.
Carl Friedrich Gauß bekam den Auftrag, das Königreich Hannover zu vermessen. Das Laufen durch unwegsames Gelände bei schlechtem Wetter verdarb ihm die Laune. Also berechnete er mithilfe der Trigonometrie Längen und Flächen. Recherchiere die Bedeutung des Begriffs Trigonometrie. Recherchiere die Funktion der Messgeräte Theodolit und Hodometer.
Wann wurden sie erfunden?

- Die Bedeutung des Wortes Trigonometrie kommt aus dem Griechischem: τρίγωνον trígonon „Dreieck“ und μέτρον métron „Maß“.
- Ein Theodolit ist ein Winkelmessinstrument. Beispielweise lassen sich die Winkel aus Aufgabe 1 mit einem Theodolit vermessen. Das Gerät wurde im 15. Jahrhundert erfunden.
  Ein Hodometer misst mechanische eine zurückgelegte Wegstrecke beispielsweise eines Fußgängers. Es wurde bereits in der Antike erfunden.

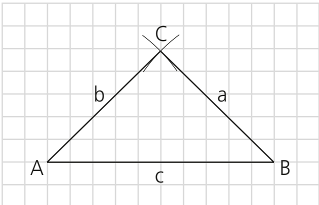
Zur Messung von Höhenwinkeln wurde früher ein Quadrant verwendet, ein einfach zu bauendes Gerät, das recht genaue Werte lieferte.
Baue mithilfe der mittleren Abbildung aus Karton einen Quadranten (Radiuslänge: 20 cm) mit Gradeinteilung und z. B. einem Stein als Senklot. Beschreibe, wie man mithilfe des Quadranten den Höhenwinkel bestimmen kann.
Bestimme nun mithilfe des Quadranten nach Messung geeigneter Streckenlängen und mit einer Konstruktion die Höhe deines Schulhauses oder anderer Gebäude.
Recherchiere zum Vergleich tatsächliche Höhen. Beurteile die Genauigkeit deiner Messung.
Es sind individuelle Lösungen möglich. Als Material sollte der Lehrer Pappkartons in ausreichender Größe (mindestens 25 cm x 25 cm) und Anzahl mitbringen.

1 a) Ⓐ Planfigur:

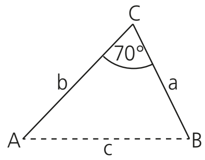


Konstruktionsbeschreibung:
1. Zeichne die Strecke c mit 5 cm.
2. Zeichne einen Kreis um A mit dem Radius 3,5 cm.
3. Zeichne einen Kreis um B mit dem Radius 3,5 cm.
4. Der Schnittpunkt der beiden Kreise ist C.
5. Zeichne die Strecke [CA] und [CB].

Konstruktion:

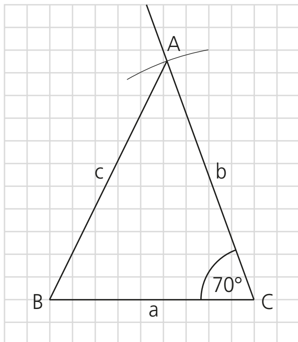


Ⓑ Planfigur:

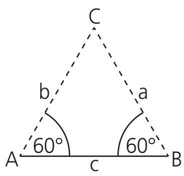


Konstruktionsbeschreibung:
1. Zeichne die Strecke a mit 4,5 cm.
2. Trage bei C den Winkel $\gamma = 70°$ an.
3. Zeichne einen Kreis um C mit dem Radius 5,6 cm.
4. Der Schnittpunkt aus Kreisbogen und Schenkel ist A.
5. Zeichne die Strecke $\overline{AB}$.

Konstruktion:

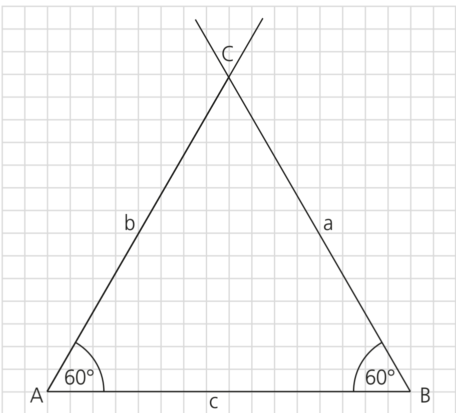


Ⓒ Planfigur:

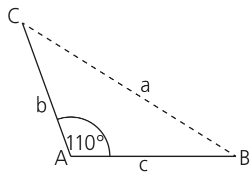


Konstruktionsbeschreibung:
1. Zeichne die Strecke c mit 8 cm.
2. Trage bei A den Winkel $\alpha = 60°$ und bei B den Winkel $\beta = 60°$ an.
3. Der Schnittpunkt der beiden freien Schenkel ist C.

Konstruktion:

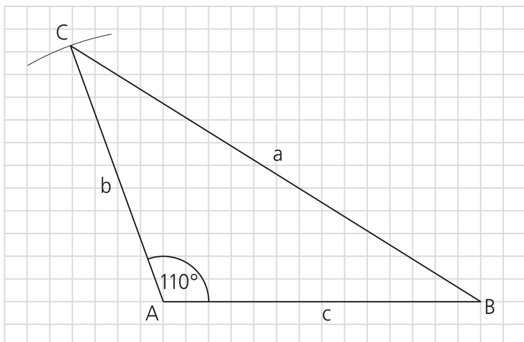


Ⓓ Planfigur:



Konstruktionsbeschreibung:
1. Zeichne die Strecke c mit 7 cm.
2. Trage bei A den Winkel $\alpha = 110°$ an.
3. Zeichne einen Kreis um A mit dem Radius 6 cm.
4. Der Schnittpunkt aus Kreisbogen und dem freien Schenkel ist C.
5. Zeichne die Strecke $\overline{BC}$.

Konstruktion:



b) Aus diesen Angaben kann kein Dreieck konstruiert werden, da die Summe aus den beiden kleinsten Seiten kleiner als die längste Seite ist.

2

	a)	b)	c)	d)	e)
α	50°	45°	70°	90°	60°
β	110°	75°	70°	45°	60°
γ	20°	60°	40°	45°	60°
Dreiecks-art	stumpfwinklig	spitzwinklig	spitzwinklig, gleichschenklig	rechtwinklig, gleichschenklig	spitzwinklig, gleichschenklig

	f)	g)	h)	i)
α	35°	71°	132°	73°
β	92°	19°	24°	73°
γ	53°	90°	24°	34°
Dreiecks-art	stumpfwinklig	rechtwinklig	stumpfwinklig, gleichschenklig	spitzwinklig, gleichschenklig

3 Es ist sinnvoll, zunächst alle Größen in cm umzuwandeln.

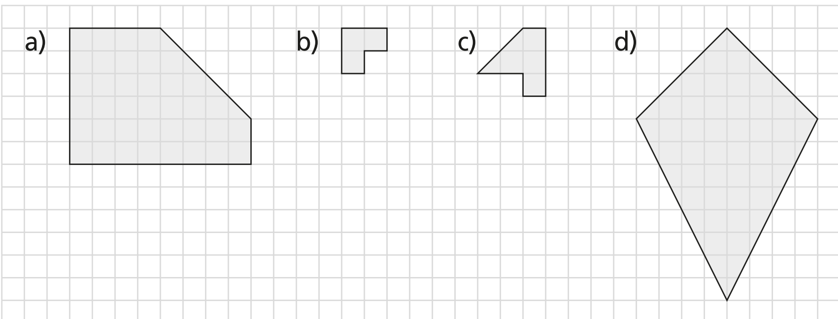
a) $a^2 = (4{,}7\text{ cm})^2 + (2{,}2\text{ cm})^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{26{,}93\text{ cm}^2} \approx 5{,}2\text{ cm}$

b) $b^2 = (6{,}5\text{ cm})^2 - (3{,}3\text{ cm})^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{31{,}36\text{ cm}^2} = 5{,}6\text{ cm}$

c) $d^2 = (7{,}1\text{ cm})^2 + (3{,}4\text{ cm})^2 \Leftrightarrow d = \sqrt{61{,}97\text{ cm}^2} \approx 7{,}9\text{ cm}$

d) $e^2 = (5{,}8\text{ cm})^2 - \left(\frac{4{,}4\text{ cm}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow e = \sqrt{28{,}8\text{ cm}^2} \approx 5{,}4\text{ cm}$

4



5 a)

	Original	A	B	C	D	E
		V_g	V_k	V_g	V_k	V_g
Länge	35 cm	70 cm	7 mm	8,75 m	1,4 cm	105 m
Maßstab	1 : 1	2 : 1	1 : 50	25 : 1	1 : 25	300 : 1

b)

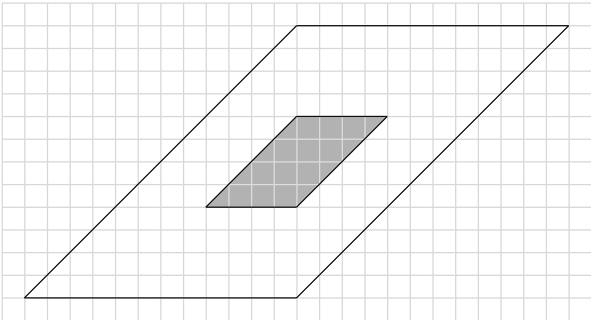
	Original	A	B	C	D	E
		V_k	V_g	V_k	V_g	V_g
Länge	15 dm	5 dm	15 m	75 cm	30 m	7,5 km
Maßstab	1 : 1	1 : 3	10 : 1	1 : 2	20 : 1	5 000 : 1

1 a) Das Foto ist verzerrt, da im Original die Seitenlängen im Verhältnis 3 : 2 und in der vergrößerten Variante im Verhältnis 1 : 1 sind.
b) Alle Seitenlängen des Bildes sollten mit demselben Faktor vergrößert werden.

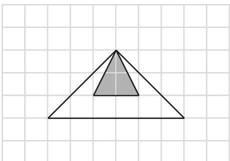
2 k = 2; Bildmaße: 30cm × 20 cm
k = 1,5; Bildmaße: 22,5 cm × 15 cm
k = 3; Bildmaße: 45 cm × 30 cm

3 a) Es sind nur 1 und 4 ähnlich. Der Ähnlickeitsfaktor beträgt k = 1,5.
b) Bashar hat recht.

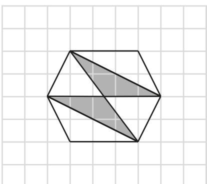
4 a) Ähnlichkeitsfaktor: k = 4



b) Ähnlichkeitsfaktor: k = $\frac{1}{3}$



c) Ähnlichkeitsfaktor: k = 0,5



5 a) Diese Aussage ist richtig, da Quadrate immer vier gleich lange Seiten haben.
b) Die Aussage trifft auch auf das gleichseitige Dreieck und andere regelmäßige Vielecke zu.

1 Es sind individuelle Lösungen möglich. Die Dreiecke sind zueinander ähnlich.

2 a) Die Winkel der beiden Dreiecke sind identisch. Jedes Dreieck enthält den Winkel α und einen rechten Winkel. Daraus folgt mit der Innenwinkelsumme eines Dreiecks, dass der Winkel β in beiden Dreiecken gleich groß ist.

b) 1 $a_1 = 2{,}4$ cm; $a_2 = 3{,}2$ cm; $b_1 = 1{,}8$ cm; $b_2 = 2{,}4$ cm; $c_1 = 3$ cm; $c_2 = 4$ cm

$\frac{2{,}4\text{ cm}}{3{,}2\text{ cm}} = 0{,}75$ $\quad \frac{1{,}8\text{ cm}}{2{,}4\text{ cm}} = 0{,}75$ $\quad \frac{3\text{ cm}}{4\text{ cm}} = 0{,}75$

Der Ähnlichkeitsfaktor ist also $k = 0{,}75$.

2 $\frac{a_1}{c_1} = \frac{2{,}4\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 0{,}8$ $\quad \frac{a_2}{c_2} = \frac{3{,}2\text{ cm}}{4\text{ cm}} = 0{,}8$

Die Quotienten sind gleich groß.

c) $\frac{b_1}{c_1} = \frac{1{,}8\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 0{,}6$ $\quad \frac{b_2}{c_2} = \frac{2{,}4\text{ cm}}{4\text{ cm}} = 0{,}6$

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{2{,}4\text{ cm}}{1{,}8\text{ cm}} = \frac{4}{3}$ $\quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{3{,}2\text{ cm}}{2{,}4\text{ cm}} = \frac{4}{3}$

Die Quotienten stimmen ebenfalls jeweils überein.

3 a) Es sind die Dreiecke 1, 3 und 4 zueinander ähnlich, da alle Winkel gleich groß sind.

b) Dreieck 1 und 3 sind ähnlich. Der Ähnlichkeitsfaktor ist $k = 2$ bzw. $k = 0{,}5$.

Dreieck 4 und 5 sind ähnlich, der Ähnlichkeitsfaktor ist $k = 1{,}5$ bzw. $k = \frac{2}{3}$.

Dreieck 2 und 6 sind ähnlich, der Ähnlichkeitsfaktor ist $k = \frac{4}{3}$ bzw. $k = \frac{3}{4}$.

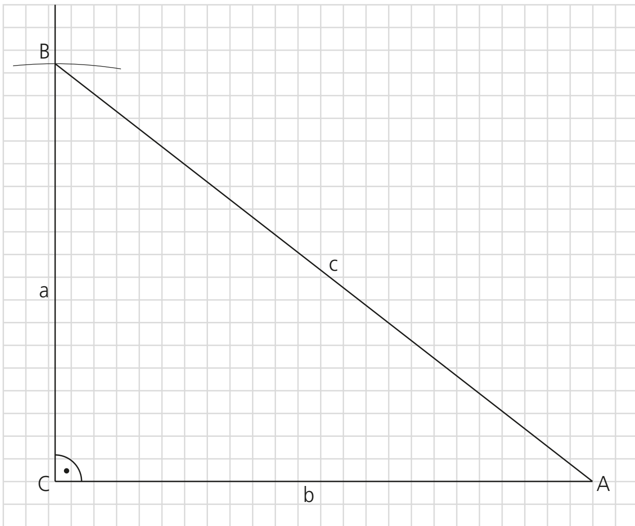
4

1 $k = \frac{7{,}5}{5} = 1{,}5$	$b = 3\text{ cm} \cdot 1{,}5 = 4{,}5\text{ cm}$	$c = 6\text{ cm} \cdot 1{,}5 = 9\text{ cm}$
2 $k = \frac{22{,}5}{3} = 7{,}5$	$a = 5\text{ cm} \cdot 7{,}5 = 37{,}5\text{ cm}$	$c = 6\text{ cm} \cdot 7{,}5 = 45\text{ cm}$
3 $k = \frac{1{,}2}{6} = 0{,}2$	$a = 5\text{ cm} \cdot 0{,}2 = 1\text{ cm}$	$b = 3\text{ cm} \cdot 0{,}2 = 0{,}6\text{ cm}$
4 $k = \frac{62{,}5}{5} = 12{,}5$	$b = 3\text{ cm} \cdot 12{,}5 = 37{,}5\text{ cm}$	$c = 6\text{ cm} \cdot 12{,}5 = 75\text{ cm}$

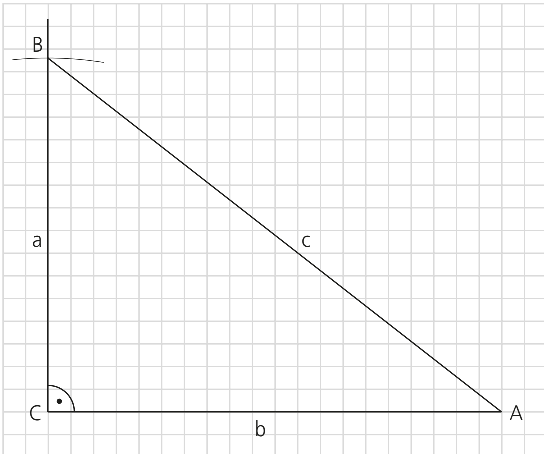
1 a) $b^2 = 150^2 - 92^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{14\,036} \approx 118{,}5$ m

b) Konstruktionsbeschreibung:

1. Zeichne die Strecke b mit der Länge 11,85 cm.
2. Trage bei C den Winkel $\gamma = 90°$ an.
3. Zeichne einen Kreis um C mit Radius 9,2 cm.
4. Der Schnittpunkt des freien Schenkels und des Kreises ist B.
5. Verbinde die Punkte A und C sowie B und C.



2 a) Konstruktionsbeschreibung analog zu Aufgabe 1.



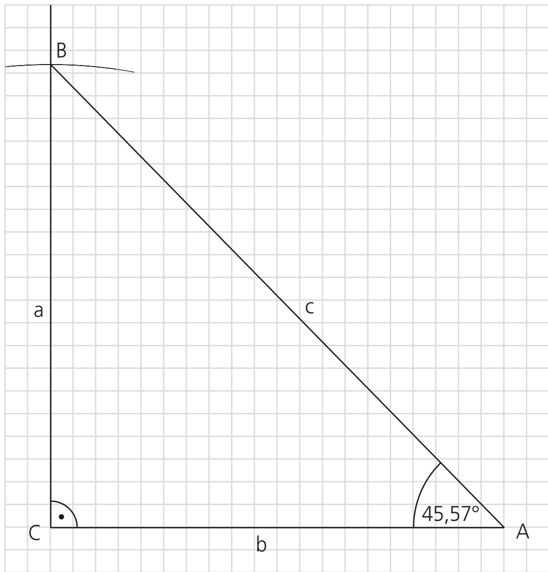
b) und c) Diese Aussage ist richtig, denn die Steigung in Aufgabe 1 ist $\frac{92\text{ m}}{118{,}5\text{ m}} \approx 0{,}78 = 78$ %.

3 a) Für 102 %: Gegenkathete 102 m und Ankathete 100 m
Gegenkathete 10,2 cm und Ankathete 10 cm
Für 85 % Gegenkathete 85 m und Ankathete 100 m
Gegenkathete 8,5 cm und Ankathete 10 cm
Für 95 %: Gegenkathete 95 m und Ankathete 100 m
Gegenkathete 9,5 cm und Ankathete 10 cm

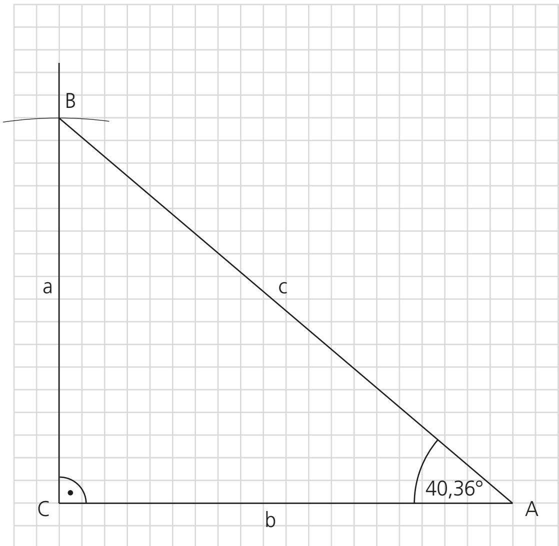
b) Konstruktionsbeschreibung für die drei Steigungsdreiecke:

1. Zeichne b mit der Länge 10 cm.
2. Trage bei C den Winkel $\gamma = 90°$ an.
3. Zeichne einen Kreis um C mit Radius 10,2 cm (8,5 cm bzw. 9,5 cm).
4. Der Schnittpunkt des freien Schenkels und des Kreises ist B.
5. Verbinde die Punkte A und B sowie B und C

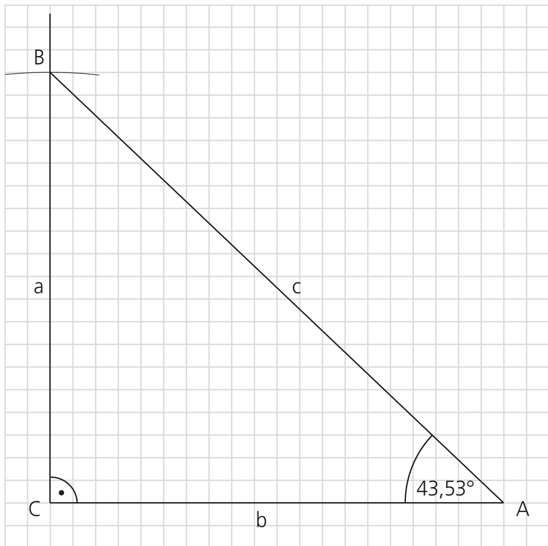
Für 102 %: Steigungswinkel $\alpha = 45{,}57°$



Für 85 %: Steigungswinkel $\alpha = 40{,}36°$



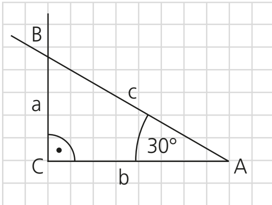
Für 95 %: Steigungswinkel $\alpha = 43{,}53°$



4 a) Konstruktionsbeschreibung:

1. Zeichne b mit der Länge 4 cm.
2. Trage bei C den Winkel $\gamma = 90°$ an.
3. Trage bei A den entsprechenden Winkel an.
4. Der Schnittpunkt der beiden freien Schenkel ist C
5. Verbinde die Punkte A und C sowie B und C.

Exemplarisch wird lediglich das Dreieck zum Steigungswinkel 30° abgebildet.

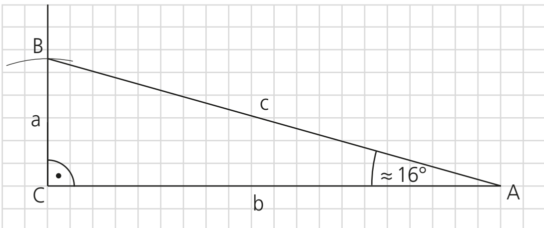


Steigungswinkel	5°	10°	15°	20°	30°
GK	0,9 cm	1,8 cm	2,7 cm	3,6 cm	5,8 cm
Verhältnis $\frac{GK}{AK}$	$\frac{0,9}{10} = 0,09$	$\frac{1,8}{10} = 0,18$	$\frac{2,7}{10} = 0,27$	$\frac{3,6}{10} = 0,36$	$\frac{5,8}{10} = 0,58$

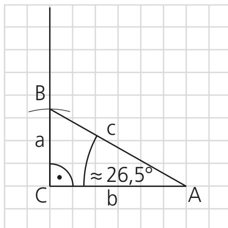
Steigungswinkel	40°	50°	60°	70°
GK	8,4 cm	11,9 cm	17,3 cm	27,5 cm
Verhältnis $\frac{GK}{AK}$	$\frac{8,4}{10} = 0,84$	$\frac{11,9}{10} = 1,19$	$\frac{17,3}{10} = 1,73$	$\frac{27,5}{10} = 2,75$

b) Elvisa hat recht, denn durch diese Tabelle können Näherungswerte für die Winkelgrößen abgeschätzt werden.

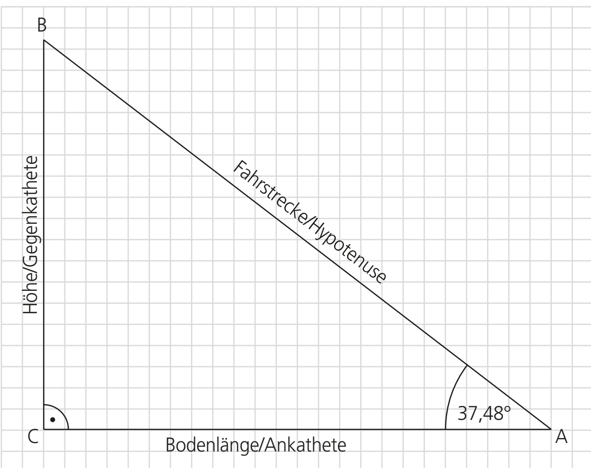
$\frac{2,8}{10} = 0,28 \Rightarrow \alpha \approx 16°$

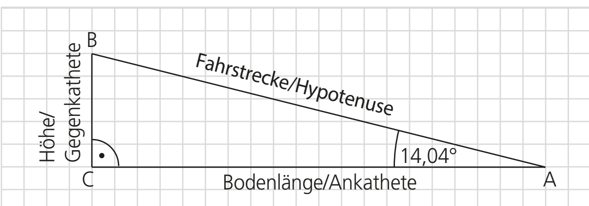


$\frac{1,7}{3} = 0,57 \Rightarrow \alpha \approx 29°$



1 1, 2 und 4



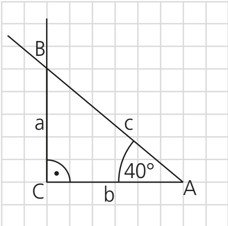


3

Höhe/ Bodenlänge	Höhe/ Fahrstrecke	Bodenlänge/ Fahrstrecke
$\frac{9,2}{11,85} = 0,78$	$\frac{9,2}{15} = 0,61$	$\frac{11,85}{15} = 0,79$

Höhe/ Bodenlänge	Höhe/ Fahrstrecke	Bodenlänge/ Fahrstrecke
$\frac{2,5}{10} = 0,25$	$\frac{2,5}{10,3} = 0,24$	$\frac{10}{10,3} = 0,97$

2 **a)** Exemplarisch wird auch hier nur ein Dreieck, zum Winkel 40°, gezeichnet.



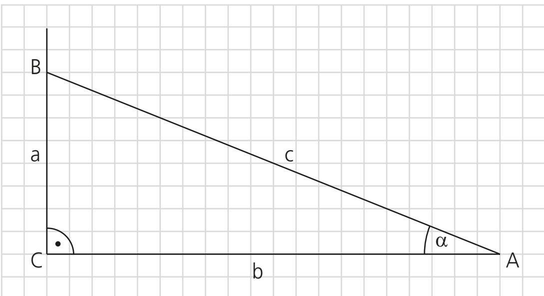
Steigungswinkel	5°	10°	15°	20°	30°
GK	0,3 cm	0,5 cm	0,8 cm	1,1 cm	1,7 cm
HY	3,0 cm	3,0 cm	3,1 cm	3,2 cm	3,5cm
Verhältnis $\frac{GK}{HY}$	$\frac{0,3}{3,0} = 0,09$	$\frac{0,5}{3,0} = 0,17$	$\frac{0,8}{3,1} = 0,26$	$\frac{1,1}{3,2} = 0,34$	$\frac{1,7}{3,5} = 0,49$
Verhältnis $\frac{AK}{HY}$	$\frac{3,0}{3,0} = 1$	$\frac{3,0}{3,0} = 1$	$\frac{3}{3,1} = 0,97$	$\frac{3}{3,2} = 0,94$	$\frac{3}{3,5} = 0,86$

Steigungswinkel	40°	50°	60°	70°
GK	2,5 cm	3,6 cm	5,2 cm	8,2 cm
HY	3,9 cm	4,7 cm	6 cm	8,8 cm
Verhältnis $\frac{GK}{HY}$	$\frac{2,5}{3,9} = 0,64$	$\frac{3,6}{4,7} = 0,77$	$\frac{5,2}{6} = 0,87$	$\frac{8,2}{8,8} = 0,93$
Verhältnis $\frac{AK}{HY}$	$\frac{3}{3,9} = 0,77$	$\frac{3}{4,7} = 0,64$	$\frac{3}{6} = 0,5$	$\frac{3}{8,8} = 0,34$

b) 1 $\frac{10,5}{16,5} \approx 0,64 \rightarrow \alpha \approx 40°$

2 $\frac{9,5}{19} = 0,5 \rightarrow \alpha \approx 60°$

3 **a)** Zeichnung im geeigneten Maßstab



Die Größe des Steigungswinkels α beträgt ungefähr 22°.

b) Aus dem maximalen Wert 0,4 für das Verhältnis von Höhe und Bodenlänge erhält man die Höhe:

$\frac{h}{800\text{ m}} = 0,4 \Leftrightarrow h = 0,4 \cdot 800\text{ m} = 320\text{ m}$

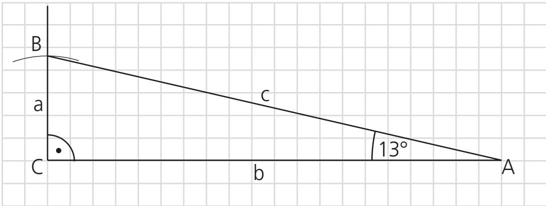
Das ergibt für die Fahrstrecke mittels Satz des Pythagoras:

$c^2 = (800\text{ m})^2 + (320\text{ m})^2 \Rightarrow c \approx 862\text{ m}$.

Die Fahrstrecke muss also mindestens 862 m lang sein.

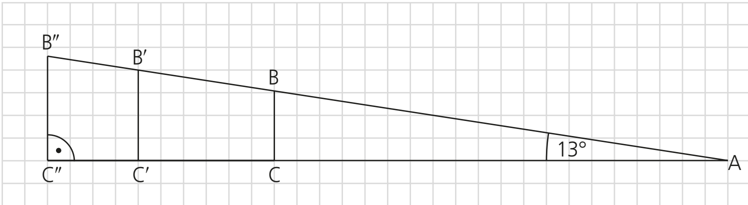
1 a) Dieses Schild bedeutet, dass die Straße eine Steigung von 23 % hat.

b)



Das Straßenschild ist etwas missverständlich dargestellt, da die gegenüber der Bodenlänge senkrechte Höhe nicht abgebildet ist.

c) Die Skizze in Aufgabe a) wird hier erweitert und steht verglichen mit der Realität im Maßstab 1000 : 1.



Höhe bei Bodenlänge 130 m: 30 m
Höhe bei Bodenlänge 150 m: etwa 35 m.

d) Nein, das Straßenschild muss nicht geändert werden, da der Steigungswinkel in allen drei Dreiecken identisch ist und die Steigung sich somit nicht verändert hat.

2 $\frac{GK}{AK} = \frac{23}{100} = 0{,}23$ $\frac{GK'}{AK'} = \frac{30}{130} \approx 0{,}23$ $\frac{GK''}{AK''} = \frac{35}{130} \approx 0{,}23$

$\Rightarrow \tan 13° = \frac{GK}{AK} = \frac{GK'}{AK'} = \frac{GK''}{AK}$

3 a) 1 $\tan 35° = 0{,}7$ 2 $\tan 16{,}7° = 0{,}3$ 3 $\tan 21{,}8° = 0{,}4$ 4 $\tan 58° = 1{,}6$

b) Es sind individuelle Lösungen möglich. Lösungsvorschlag:

1 Gegenkathete: 7 cm	Ankathete: 10 cm	Steigung: 70 %
2 Gegenkathete: 3 cm	Ankathete: 10 cm	Steigung: 30 %
3 Gegenkathete: 4 cm	Ankathete: 10 cm	Steigung: 40 %
4 Gegenkathete: 16 cm	Ankathete: 10 cm	Steigung: 160 %

4 a)
1 Für α: $\frac{6{,}8}{9{,}4} = 0{,}7234$ Für β: $\frac{9{,}4}{6{,}8} = 1{,}3824$
2 Für α: $\frac{4{,}1}{9{,}2} = 0{,}4457$ Für β: $\frac{9{,}2}{4{,}1} = 2{,}2439$
3 Für α: $\frac{16{,}6}{13} = 1{,}2769$ Für β: $\frac{13}{16{,}6} = 0{,}7831$
4 Für α: $\frac{4{,}6}{3{,}2} = 1{,}4375$ Für β: $\frac{3{,}2}{4{,}6} = 0{,}6957$

Die Werte der Quotienten für α und β sind zueinander die jeweiligen Kehrwerte.

b)
1 $\tan\alpha = 0{,}7234 \Leftrightarrow \alpha \approx 36°$ $\tan\beta = 1{,}3824 \Leftrightarrow \beta \approx 54°$
2 $\tan\alpha = 2{,}2439 \Leftrightarrow \alpha \approx 66°$ $\tan\beta = 0{,}4457 \Leftrightarrow \beta \approx 24°$
3 $\tan\alpha = 1{,}2769 \Leftrightarrow \alpha \approx 52°$ $\tan\beta = 0{,}7831 \Leftrightarrow \beta \approx 38°$
4 $\tan\alpha = 1{,}4375 \Leftrightarrow \alpha \approx 55°$ $\tan\beta = 0{,}6957 \Leftrightarrow \beta \approx 35°$

5 Die Innenwinkelsumme für Dreiecke ist eine Möglichkeit, um zu überprüfen, ob die Lösung richtig sein kann.

a) $\tan\alpha = \frac{8{,}3}{6{,}7} = 1{,}2388 \Rightarrow \alpha \approx 51°$ $\tan\beta = \frac{6{,}7}{8{,}3} = 0{,}8072 \Rightarrow \beta \approx 39°$

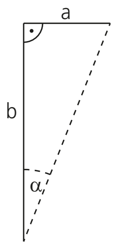
b) $\tan\alpha = \frac{73}{113} = 0{,}6460 \Rightarrow \alpha \approx 33°$ $\tan\beta = \frac{113}{73} = 1{,}5479 \Rightarrow \beta \approx 57°$

c) $\tan\alpha = \frac{12{,}4}{19{,}8} = 0{,}6263 \Rightarrow \alpha \approx 32°$ $\tan\beta = \frac{19{,}8}{12{,}4} = 1{,}5968 \Rightarrow \beta \approx 58°$

6 $\tan\alpha = \frac{27}{150} = 0{,}18 \Rightarrow \alpha \approx 10°$

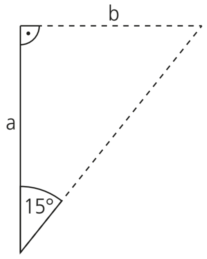
Auf dem Straßenschild steht 18 %.

1 a)

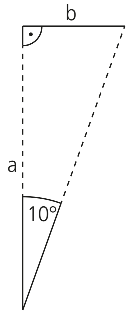


b) $\tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{19}{48} = 0{,}3958 \Rightarrow \alpha \approx 22°$

2 a)



b)



3 a)

der Länge der GK	der Länge der AK
geg.: AK = 22,4 m $\alpha = 18°$ ges.: GK	geg.: GK = 8,2 cm $\alpha = 35°$ ges.: AK
1 $\tan 18° = \frac{GK}{AK}$	1 $\tan 35° = \frac{8{,}2}{AK}$
2 GK = AK · tan 18°	2 $AK = \frac{8{,}2\text{ m}}{\tan 35°}$
3 GK = 7,278201… m	3 AK = 11,71081… cm
4 GK ≈ 7,28 m	4 AK ≈ 11,71 cm

b) Abweichung vom Zielpunkt:

$\tan 15° = \frac{b}{48} \Rightarrow 48\text{ m} \cdot \tan 15° \Rightarrow b \approx 13\text{ m}$

Breite des Flusses:

$\tan 10° = \frac{9\text{ m}}{a} \Rightarrow a = \frac{9\text{ m}}{\tan 10°} \Rightarrow a \approx 51\text{ m}$

4 a) $\tan 44° = \frac{3{,}5}{b} \quad \Rightarrow b = \frac{3{,}5}{\tan 44°} \quad \Rightarrow b \approx 3{,}6$

b) $\tan 39° = \frac{a}{7} \quad \Rightarrow a = 7 \cdot \tan 39° \quad \Rightarrow a \approx 5{,}7$

c) $\tan 61° = \frac{b}{5} \quad \Rightarrow b = 5 \cdot \tan 61° \quad \Rightarrow b \approx 9$

d) $\tan 37° = \frac{2{,}9}{c} \quad \Rightarrow c = \frac{2{,}9}{\tan 37°} \quad \Rightarrow c \approx 3{,}8$

1 a) $\tan\alpha = \frac{420\text{ m}}{500\text{ m}} = 0{,}84 \Rightarrow \alpha \approx 40°$

Andererseits gilt auch $\tan 40° = \frac{\overline{B_2C_2}}{500\text{ m} + 200\text{ m}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{700\text{ m}} \Rightarrow \overline{B_2C_2} = 700\text{ m} \cdot \tan 40° \approx 587\text{ m}$

b) $\overline{AB_1}^2 = (500\text{ m})^2 + (420\text{ m})^2 \Rightarrow \overline{AB_1} = \sqrt{426\,400}\text{ m} \approx 653\text{ m}$

$\overline{AB_2}^2 = (700\text{ m})^2 + (587\text{ m})^2 \Rightarrow \overline{AB_2} = \sqrt{835\,744}\text{ m} \approx 914\text{ m}$

c) Dreieck AB_1C_1: $\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{420\text{ m}}{653\text{ m}} = 0{,}64$ $\quad\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{500}{653} = 0{,}77$

Dreieck AB_2C_2: $\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{587\text{ m}}{914\text{ m}} = 0{,}64$ $\quad\frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{700\text{ m}}{914\text{ m}} = 0{,}77$

2 $\sin\alpha = 0{,}64 \Rightarrow \alpha \approx 40°$ $\quad\cos\alpha = 0{,}77 \Rightarrow \alpha \approx 40°$

3 a)

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\sin\alpha$	0,17	0,34	0,5	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98
$\cos\alpha$	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,5	0,34	0,17

b) Die Kosinuswerte sind absteigend identisch mit den aufsteigenden Sinuswerten.

4 a) 1 $\sin\alpha = \frac{15\text{ m}}{17\text{ m}} \approx 0{,}8824 \Rightarrow \alpha \approx 62°$ $\quad\cos\alpha = \frac{8\text{ m}}{17\text{ m}} = 0{,}4706 \Rightarrow \alpha \approx 62°$

2 $\sin\alpha = \frac{5\text{ m}}{13\text{ m}} \approx 0{,}3846 \Rightarrow \alpha \approx 23°$ $\quad\cos\alpha = \frac{12\text{ m}}{13\text{ m}} = 0{,}9231 \Rightarrow \alpha \approx 23°$

3 $\sin\alpha = \frac{6\text{ m}}{8{,}5\text{ m}} = 0{,}7059 \Rightarrow \alpha \approx 45°$ $\quad\cos\alpha = \frac{6\text{ m}}{8{,}5\text{ m}} = 0{,}7059 \Rightarrow \alpha \approx 45°$

b) Der Winkel β muss nicht entsprechend zu α berechnet werden, da der rechte Winkel und α bekannt sind. Es muss lediglich $\beta = 180° - 90° - \alpha$ berechnet werden.

1 **a)** Berechnung der Länge der Seite a:

$\sin 30° = \frac{a}{5{,}3} \quad | \cdot 5{,}3$

$5{,}3 \cdot \sin 30° = a$

$a \approx 2{,}7$ (cm)

Berechnung der Länge der Seite c:

$\cos 20° = \frac{4{,}2}{c} \quad | \cdot c$

$c \cdot \cos 20° = 4{,}2 \quad | : \cos 20°$

$c = \frac{4{,}2}{\cos 20°}$

$c \approx 4{,}5$ (cm)

b) ① $\sin 43° = \frac{a}{7}$

$7 \cdot \sin 43° = a$

$a \approx 4{,}8$ (cm)

② $\cos 57° = \frac{b}{9{,}3}$

$9{,}3 \cdot \cos 57° = b$

$b \approx 5{,}1$ (cm)

③ $\cos 41° = \frac{6}{c}$

$c \cdot \cos 41° = 6$

$c = \frac{6}{\cos 41°}$

$c \approx 8$ (cm)

④ $\cos 39° = \frac{b}{4{,}5}$

$4{,}5 \cdot \cos 39° = b$

$b \approx 3{,}5$ (cm)

⑤ $\sin 60° = \frac{3{,}5}{c}$

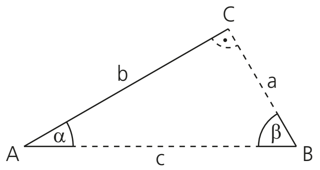
$c \cdot \sin 60° = 3{,}5$

$c = \frac{3{,}5}{\sin 60°}$

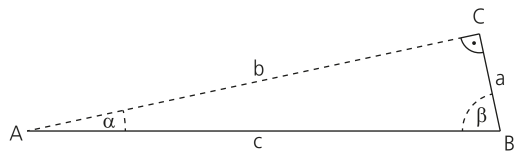
$c \approx 4$ (cm)

2 Skizze:

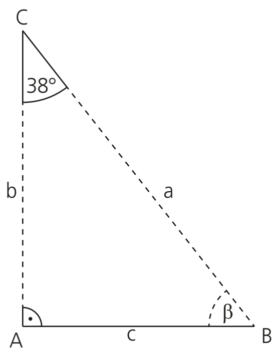
a)



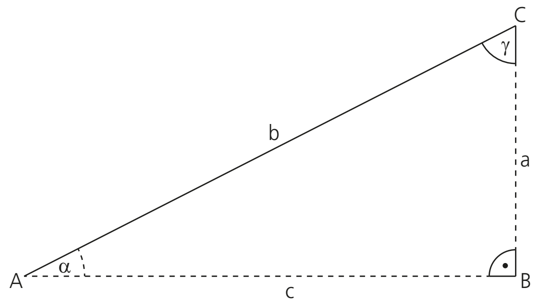
b)



c)



d)



	a	b	c	α	β	γ
a)	3 cm	5,2 cm	6 cm	30°	60°	90°
b)	1,9 cm	18 cm	18,1 cm	6°	84°	90°
c)	16,6 cm	13,1 cm	10,2 cm	90°	52°	38°
d)	12,3 cm	27,1 cm	24,1 cm	27°	90°	63°

1 Mit Hilfe der Innenwinkelsumme für Dreiecke erhält man:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
α	47°	52°	80°	47°	52°	47°
β	52°	81°	48°	52°	48°	80°
γ	81°	47°	52°	81°	80°	53°

Es sind a), b) und d) sowie c) und e) zueinander ähnlich, da die Dreiecke jeweils in allen Winkeln übereinstimmen.

2 a) $\sin\alpha = \frac{3,2}{4} \Rightarrow \alpha \approx 53°$ $\quad\sin\beta = \frac{2,4}{4} \Rightarrow \beta \approx 37°$

$\cos\alpha = \frac{2,4}{4} \Rightarrow \alpha \approx 53°$ $\quad\cos\beta = \frac{3,2}{4} \Rightarrow \beta \approx 37°$

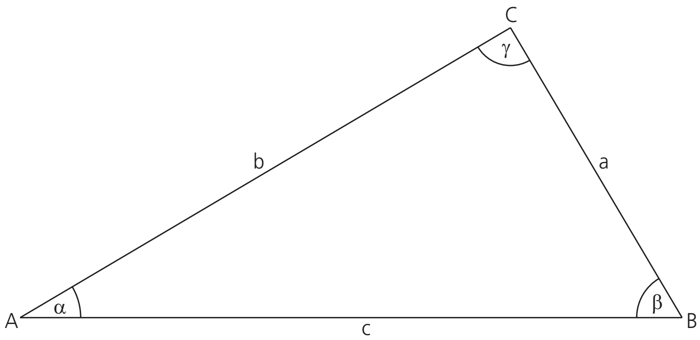
b) $\sin\alpha = \frac{1,8}{3} \Rightarrow \alpha \approx 37°$ $\quad\sin\beta = \frac{2,4}{3} \Rightarrow \beta \approx 53°$

$\cos\alpha = \frac{2,4}{3} \Rightarrow \alpha \approx 37°$ $\quad\cos\beta = \frac{1,8}{3} \Rightarrow \beta \approx 53°$

c) $\sin\alpha = \frac{1,4}{5} \Rightarrow \alpha \approx 16°$ $\quad\sin\beta = \frac{4,8}{5} \Rightarrow \beta \approx 74°$

$\cos\alpha = \frac{4,8}{5} \Rightarrow \alpha \approx 16°$ $\quad\cos\beta = \frac{1,4}{5} \Rightarrow \beta \approx 74°$

3 Anmerkung: Es gibt verschiedene Lösungswege.



a) $\tan 30° = \frac{5,6\text{ cm}}{c} \Rightarrow c \approx 9,7\text{ cm}$

$b^2 = c^2 - a^2 = 9,8^2 - 6,5^2 \Rightarrow c \approx \sqrt{51,84} \approx 7,2\text{ (cm)}$

b) $\sin 59° = \frac{b}{7,6\text{ cm}} \Rightarrow b \approx 6,5\text{ cm}$

$\cos 59° = \frac{a}{7,6\text{ cm}} \Rightarrow a \approx 3,9\text{ cm}$

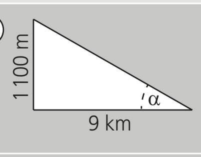
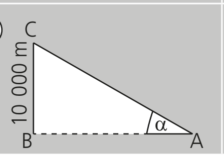
c) $\sin 74° = \frac{9,2\text{ cm}}{c} \Rightarrow c \approx 9,6\text{ cm}$

$\tan 74° = \frac{9,2\text{ cm}}{a} \Rightarrow a \approx 2,6\text{ cm}$

d) $\tan 35° = \frac{b}{18\text{ cm}} \Rightarrow b \approx 12,6\text{ cm}$

$c^2 = 18^2 + 12,6^2 \Rightarrow c = \sqrt{482,76} \approx 22,0\text{ (cm)}$

1

Skizze anfertigen	Winkelbeziehung auswählen	Gesuchte Größe berechnen	Antwortsatz formulieren
② 	Sinus/Kosinus $\sin\alpha = \frac{GK}{HY}$	$\sin 7° = \frac{1\,100\text{ m}}{HY}$ $HY \approx 9\,026{,}1$ m	Die Flugstrecke bis zum Müggelturm beträgt 9026,1 m.
③ 	Tangens $\tan\alpha = \frac{GK}{AK}$	$\tan 7° = \frac{10\,000}{AK}$ $AK \approx 81\,444$ m $\approx 81{,}4$ km	In einer Entfernung von 81,4 km erreicht das Flugzeug seine Reiseflughöhe.

2 a) $\sin 60° = \frac{12{,}5}{x} \Rightarrow x \approx 14{,}4$ m b) $\cos 52° = \frac{22}{x} \Rightarrow x \approx 35{,}7$ m

c) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1{,}9}{2}}{2{,}4} = \frac{19}{48} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 21{,}6° \Rightarrow \alpha \approx 43°$

3 a) $\cos 35° = \frac{15}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{BD} \approx 18{,}3\text{ km} \Rightarrow \overline{AB} = 18{,}3\text{ km} - 4\text{ km} = 14{,}3\text{ km}$

$\tan 35° = \frac{\overline{BC}}{15} \Rightarrow \overline{BC} \approx 10{,}5$ km

Insgesamt zurückgelegte Strecke: $2 \cdot (\overline{AB} + \overline{BC}) = 2 \cdot (14{,}3\text{ km} + 10{,}5\text{ km}) = 49{,}6$ km

b)

km	h
30	1
1	$\frac{1}{30}$
49,6	1,65

Das Schiff braucht 1,65 Stunden, d.h. 1 Stunde und 39 Minuten.

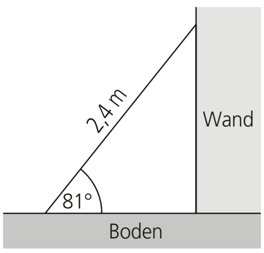
4 $\tan\left(\frac{36°}{2}\right) = \frac{GK}{2{,}56} \Rightarrow GK \approx 0{,}83\text{ (m)} \Rightarrow$ Durchmesser: $0{,}83\text{ m} \cdot 2 = 1{,}66$ m

$A = 0{,}8^2 \cdot \pi \approx 2{,}17\text{ m}^2$

$\tan\left(\frac{12°}{2}\right) = \frac{GK}{2{,}56} \Rightarrow GK \approx 0{,}27\text{ (m)} \Rightarrow$ Durchmesser: $0{,}27\text{ m} \cdot 2 = 0{,}54$ m

$A = 0{,}27^2 \cdot \pi \approx 0{,}229\text{ m}^2 = 22{,}9\text{ dm}^2$

5



a) $\cos 81° = \frac{AK}{2{,}4} \Rightarrow AK \approx 0{,}38$ m

b) $\sin 81° = \frac{GK}{2{,}4} \Rightarrow GK \approx 2{,}37$ m

c) Eine Seitenlänge muss mit Hilfe des Sinus, Kosinus oder Tangens berechnet werden. Die andere Seite kann danach jedoch über den Satz des Pythagoras berechnet werden.
$GK^2 + 0{,}38^2 = 2{,}4^2 \Rightarrow GK = \sqrt{2{,}4^2 - 0{,}38^2} = 2{,}37\text{ (m)}$

1 a) $\tan 47° = \frac{310\text{ m}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AC} \approx 289\text{ m}$

Der Schulweg entlang des Gehwegs ist 289 m + 310 m = 599 m lang.

b) $\sin 47° = \frac{310\text{ m}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB} \approx 424\text{ m}$

Einsparung: 599 m – 424 m = 175 m

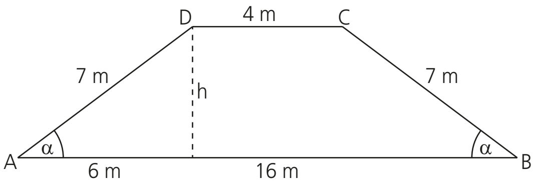
c) $4{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{4{,}5\text{ km}}{1\text{ h}} = \frac{4\,500\text{ m}}{3\,600\text{ s}} = 1{,}25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

m	s
1,25	1
1	0,8
175	140

Die Zeitersparnis beträgt 140 s.

d) Bei schlechtem Wetter kann der Weg durch die Grünanlage unangenehm matschig sein. Darüber hinaus wird die hiesige Flora und Fauna eventuell gestört und beschädigt.

2 a)



b) $\cos\alpha = \frac{6}{7} \Rightarrow \alpha \approx 31°$

$\sin 31° = \frac{h}{7} \Rightarrow h \approx 3{,}6\text{ m}$

c) $V = \frac{(16\text{ m} + 4\text{ m})}{2} \cdot 3{,}6\text{ m} \cdot 500\text{ m} = 18\,000\text{ m}^3$

d) Es werden 18 000 : 24 = 750 LKW-Fahrten benötigt.

3 a) $\sin 56° = \frac{h}{6} \Rightarrow h \approx 5{,}0\text{ m}$

$\cos 56° = \frac{\frac{b}{2}}{6} \Rightarrow \frac{b}{2} \approx 3{,}4 \Rightarrow b = 6{,}8\text{ m}$

b) Flächeninhalt der Tür:

$2\text{ m} \cdot 0{,}9\text{ m} \approx 1{,}8\text{ m}^2$

Flächeninhalt des Fensters:

Die Diagonale des Quadrats mit der Kantenlänge a ist: $1{,}5\text{ m} = \sqrt{2}\,a \Rightarrow a \approx 1{,}1\text{ m}$.

Damit ist der Flächeninhalt $(1{,}1\text{ m})^2 \approx 1{,}2\text{ m}^2$

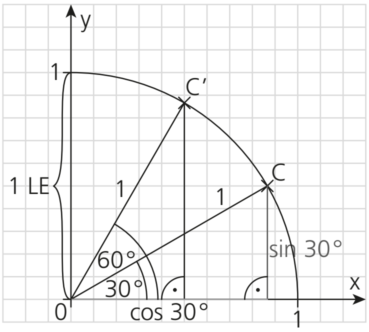
c) Flächeninhalt einer Vorderseite: $A = \frac{6{,}8\text{ m} \cdot 5{,}0\text{ m}}{2} - 1{,}8\text{ m} - 2{,}25\text{ m} \approx 13{,}0\text{ m}^2$

Es wird Farbe für $6 \cdot 13{,}0\text{ m}^2 = 78\text{ m}^2$ Fläche benötigt.

	Benötigte Anzahl Eimer	Preis
A	16	16 · 19,99 € = 319,84 €
B	8	8 · 37,99 € = 303,92 €
C	6	6 · 49,99 € = 299,94 €

Kauft man lediglich 5 Eimer der Sorte C und einen Eimer der Sorte A, so kostet das 5 · 49,99 € + 19,99 € = 269,40 €. Dabei handelt es sich um die preiswerteste Variante.

1 a)



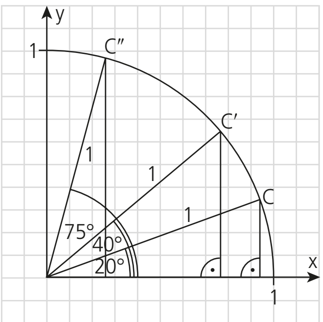
b) Im Ursprung wird der Winkel mit 30° gezeichnet. Der Schnittpunkt des Schenkels mit dem Einheitskreis ist der Punkt C. Der Sinuswert entspricht der Länge der Senkrechten von Punkt C zur x-Achse. Der Kosinuswert entspricht der Länge vom Ursprung zum Schnittpunkt der Senkrechten und der x-Achse.

$C(0{,}87|0{,}5) \Rightarrow C(\cos 30°|\sin 30°)$

$C'(0{,}5|0{,}87) \Rightarrow C'(\cos 60°|\sin 60°)$

c) Wenn α verkleinert wird, dann wird der Wert für $\sin\alpha$ auch kleiner und der für $\cos\alpha$ größer. Wenn α vergrößert wird dann wird der Sinuswert auch größer und der Kosinuswert kleiner.

2 a)



b)

Winkel	Sinus (Messwert)	Sinus (TR)	Kosinus (Messwert)	Kosinus (TR)	Punkt
20°	0,3	0,34	0,9	0,94	C (0,9|0,3)
40°	0,6	0,64	0,8	0,77	C' (0,8|0,6)
75°	1	0,97	0,3	0,26	C'' (0,3|1)

3 Wähle $\alpha = 10°$:

$0{,}98 = \cos 10° = \sin(90° - 10°) = \sin 80° = 0{,}98$

$0{,}17 = \sin 10° = \cos(90° - 10°) = \cos 80° = 0{,}17$

Wähle $\alpha = 60°$:

$0{,}5 = \cos 60° = \sin(90° - 60°) = \sin 30° = 0{,}5$

$0{,}87 = \sin 60° = \cos(90° - 60°) = \cos 30° = 0{,}87$

Wähle $\alpha = 20°$:

$0{,}94 = \cos 20° = \sin(90° - 20°) = \sin 70° = 0{,}94$

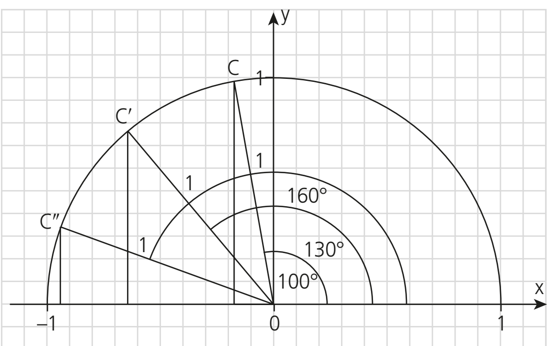
$0{,}34 = \sin 20° = \cos(90° - 20°) = \cos 70° = 0{,}34$

4 a) $\sin 45° = \cos 45°$ b) $\cos 20° = \sin 70°$ c) $\sin 75° = \cos 15°$

d) $\cos 80° = \sin 10°$ e) $\sin 20° < \sin 70°$ f) $\cos 40° > \cos 60°$

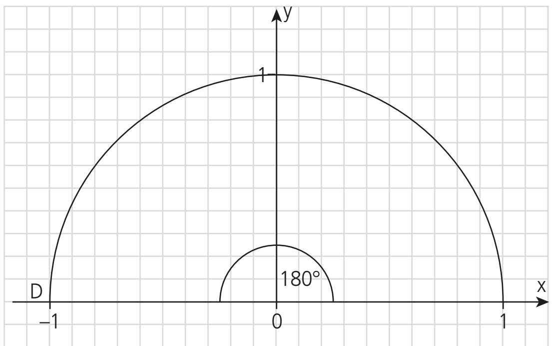
5 a) Der Kosinus nimmt für $\alpha > 90°$ negative Werte an.

b)



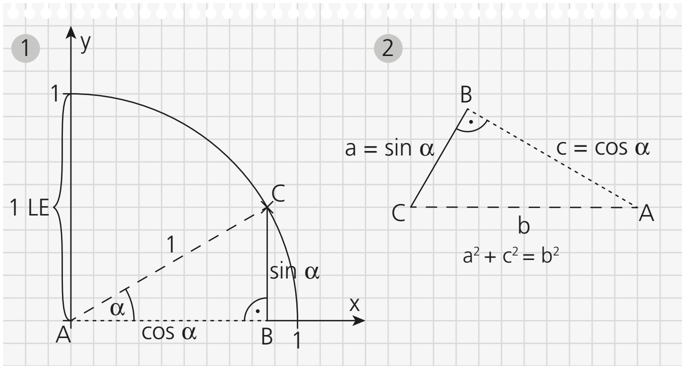
c) $\sin 100° \approx 1$ $\cos 100° = -0{,}2$ C (1|–0,2)
$\sin 130° = 0{,}8$ $\cos 130° = -0{,}7$ C′ (0,8|–0,7)
$\sin 160° = 0{,}3$ $\cos 160° = -0{,}9$ C″ (0,3|–0,9)

d)



Es gilt $\sin 180° = 0$ und $\cos 180° = -1$, da die y-Koordinate des Punktes D Null und die x-Koordinate –1 ist.

1 a) und b)



Sie hat die Formel $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ entdeckt.

2 a)

Hubert:
Im rechtwinkligen Dreieck mit $\beta = 90°$ gilt $\tan\alpha = \frac{a}{c}$.
Ich erweitere den Buch $\frac{a}{c}$ mit $\frac{1}{b}$,
dann folgt daraus:
$\tan\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a \cdot \frac{1}{b}}{c \cdot \frac{1}{b}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Adnan:
Für ein Dreieck im Einheitskreis mit $\beta = 90°$ und der Hypotenuse $b = 1$ gilt:
$\sin\alpha = \frac{a}{b} = a$ *und* $\cos\alpha = \frac{c}{b} = c$
Daraus folgt:
$\tan\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

b) 1 $\tan 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \frac{\sin 45°}{\sin(90° - 45°)} = \frac{\sin 45°}{\sin(45°)} = 1$

2 $\tan 90° = \frac{\sin 90°}{\cos 90°} = \frac{1}{0}$

Die Division mit 0 ist nicht erlaubt.

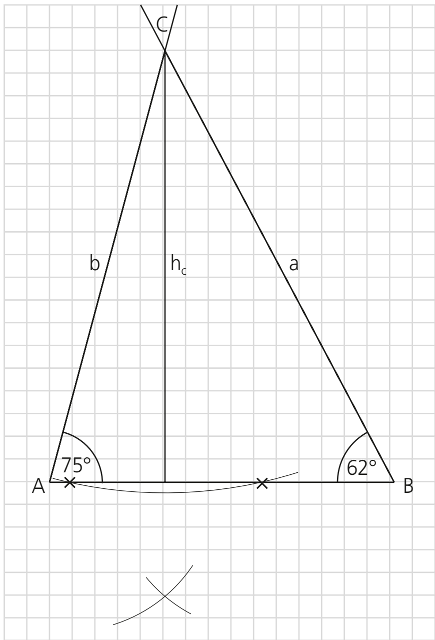
3 a) 1 Selma verwendet die Formel $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$. Da $\sin\alpha = 0{,}6$ bekannt ist, setzt sie den Wert ein, löst die Gleichung nach $\cos\alpha$ auf und erhält somit $\cos\alpha = 0{,}8$.

2 Selma verwendet die Formel $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Da $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ bereits bekannt sind, kann sie die Werte einsetzen und das Ergebnis vereinfachen. Sie erhält dann $\tan\alpha = 0{,}75$.

b) Die Vorgehensweise ist wie in a) nur, dass bei 2 und 3 nach $\sin\alpha$ aufgelöst werden muss, da $\cos\alpha$ bekannt ist. Der Winkel muss abschließend per Taschenrechner bestimmt werden.

	①	②	③	④
$\sin\alpha$	0,2588	0,6947	0,8660	0,5
$\cos\alpha$	0,9659	0,7193	0,5	0,8660
$\tan\alpha$	0,2679	0,9657	1,7321	0,5774
α	15°	44°	60°	30°

1 a) Maßstab 10 000:1



Konstruktionsbeschreibung:
1. Zeichne die Seite c = 7,6 cm.
2. Trage bei A den Winkel $\alpha = 75°$ und bei B den Winkel $\beta = 62°$ an.
3. Der Schnittpunkt der beiden freien Schenkel ist C.

b) $\tan 75° = \frac{h_c}{255\text{ m}} \Rightarrow h_c \approx 952\text{ m}$

c) $\cos 75° = \frac{255\text{ m}}{b} \Rightarrow b \approx 985\text{ m}$

$\cos 62° = \frac{505\text{ m}}{a} \Rightarrow a \approx 1\,076\text{ m}$

2 1 $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha$

2 $\sin\beta = \frac{h_c}{a} \Leftrightarrow h_c = a \cdot \sin\beta$

3 Gleichsetzen der Terme liefert: $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$ bzw. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

3 Mit Hilfe der Innenwinkelsumme lässt sich $\gamma = 180° - 75° - 62° = 43°$ bestimmen

$\frac{b}{\sin 62°} = \frac{760\text{ m}}{\sin 43°} \Leftrightarrow b = \sin 62° \cdot \frac{760\text{ m}}{\sin 43°} \Leftrightarrow b \approx 984\text{ m}$

$\frac{a}{\sin 75°} = \frac{760\text{ m}}{\sin 43°} \Leftrightarrow a = \sin 75° \cdot \frac{760\text{ m}}{\sin 43°} \Leftrightarrow a \approx 1\,076\text{ m}$

4 a) $\alpha = 180° - 78° - 56° = 46°$

$\frac{c}{\sin 56°} = \frac{10{,}8\text{ cm}}{\sin 78°} \Leftrightarrow c = \sin 56° \cdot \frac{10{,}8\text{ cm}}{\sin 78°} \Rightarrow c \approx 9{,}2\text{ cm}$

$\frac{a}{\sin 46°} = \frac{10{,}8\text{ cm}}{\sin 78°} \Leftrightarrow a = \sin 46° \cdot \frac{10{,}8\text{ cm}}{\sin 78°} \Rightarrow a \approx 7{,}9\text{ cm}$

b) $\alpha = 180° - 65° - 23° = 92°$

$\frac{c}{\sin 23°} = \frac{3{,}5\text{ cm}}{\sin 92°} \Leftrightarrow c = \sin 23° \cdot \frac{3{,}5\text{ cm}}{\sin 92°} \Rightarrow c \approx 1{,}4\text{ cm}$

$\frac{b}{\sin 65°} = \frac{3{,}5\text{ cm}}{\sin 92°} \Leftrightarrow b = \sin 65° \cdot \frac{3{,}5\text{ cm}}{\sin 92°} \Rightarrow b \approx 3{,}2\text{ cm}$

c) $\frac{\sin\beta}{4{,}6\text{ dm}} = \frac{\sin 38°}{5{,}8\text{ dm}} \Leftrightarrow \sin\beta = 4{,}6\text{ dm} \cdot \frac{\sin 38°}{5{,}8\text{ dm}} \Rightarrow \beta \approx 29°$

$\gamma = 180° - 38° - 29° = 113°$

$\frac{c}{\sin 113°} = \frac{5{,}8\text{ dm}}{\sin 38°} \Leftrightarrow c = \sin 113° \cdot \frac{5{,}8\text{ dm}}{\sin 38°} \Rightarrow c \approx 8{,}7\text{ dm}$

d) $\frac{\sin\alpha}{12\text{ m}} = \frac{\sin 45°}{16{,}4\text{ m}} \Leftrightarrow \sin\alpha = 12\text{ m} \cdot \frac{\sin 45°}{16{,}4\text{ m}} \Rightarrow \alpha \approx 31°$

$\beta = 180° - 45° - 31° = 104°$

$\frac{b}{\sin 104°} = \frac{16{,}4\text{ m}}{\sin 45°} \Leftrightarrow b = \sin 104° \cdot \frac{16{,}4\text{ m}}{\sin 45°} \Rightarrow b \approx 22{,}5\text{ m}$

5 Der Sinussatz gilt auch in rechtwinkligen Dreiecken, da das rechtwinklige Dreieck eine besondere Form des allgemeinen Dreiecks ist. Liegt der rechte Winkel beispielsweise bei C, so folgt aus dem Sinussatz $\frac{c}{\sin 90°} = \frac{b}{\sin\beta} \Leftrightarrow \frac{c}{1} = \frac{b}{\sin\beta}$ die trigonometrische Beziehung $\sin\beta = \frac{b}{c}$ für rechtwinklige Dreiecke.

1 Der fehlende Winkel ist 180° – 79,4° – 55,5° = 45,1°.
$\frac{\overline{KM}}{\sin 79{,}4°} = \frac{200\text{ m}}{\sin 45{,}1°} \Leftrightarrow \overline{KM} = \sin 79{,}4° \cdot \frac{200\text{ m}}{\sin 45{,}1°} \Rightarrow \overline{KM} \approx 277{,}5\text{ m}$

2 Der fehlende Winkel ist 180° – 67° – 28° = 85°.
$\frac{\overline{BC}}{\sin 67°} = \frac{60\text{ m}°}{\sin 85} \Leftrightarrow \overline{BC} = \sin 67° \cdot \frac{60\text{ m}}{\sin 85°} \Rightarrow \overline{BC} \approx 55{,}4\text{ m} \cdot \sin 28° = \frac{h}{55{,}4\text{ m}}$
$\Rightarrow h = 55{,}4\text{ m} \cdot \sin 28° \approx 26\text{ m}$

3 **a)** **Ausgangspunkt – Turm:** $\cos 30° = \frac{1\,400\text{ m}}{x} \Rightarrow x = \frac{1\,400\text{ m}}{\cos 30°} \Rightarrow x \approx 1\,617\text{ m}$

Berg – Turm: $\tan 30° = \frac{x}{1\,400\text{ m}} \Rightarrow x = 1\,400\text{ m} \cdot \tan 30° \Rightarrow x \approx 808\text{ m}$

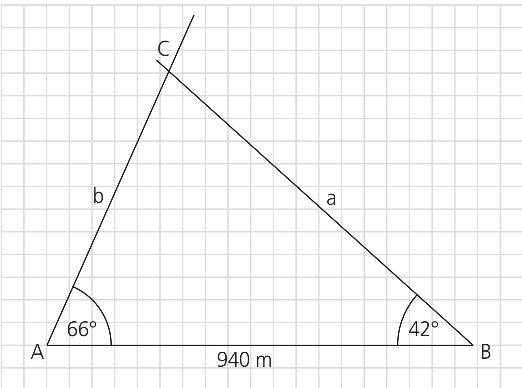
Ausgangspunkt – Kirche: $\frac{x}{\sin 80°} = \frac{1\,617\text{ m}}{\sin 56°} \Rightarrow x = \sin 80° \cdot \frac{1\,617\text{ m}}{\sin 56°} \Rightarrow x \approx 1\,921\text{ m}$

Turm – Kirche: $\frac{x}{\sin 44°} = \frac{1\,617\text{ m}}{\sin 56°} \Rightarrow x = \sin 44° \cdot \frac{1\,617\text{ m}}{\sin 56°} \Rightarrow x \approx 1\,355\text{ m}$

b) $\frac{\sin\delta}{1\,355\text{ m}} = \frac{\sin 78°}{2\,310\text{ m}} \Leftrightarrow \sin\delta = 1\,355\text{ m} \cdot \frac{\sin 78°}{2\,310\text{ m}} \Leftrightarrow \delta \approx 35°$
$\varepsilon = 180° - 78° - 35° = 67°$

Turm – Felsen: $\frac{x}{\sin 67°} = \frac{2\,310\text{ m}}{\sin 78°} \Leftrightarrow x = \sin 67° \cdot \frac{2\,310\text{ m}}{\sin 78°} \Leftrightarrow x \approx 2\,174\text{ m}$

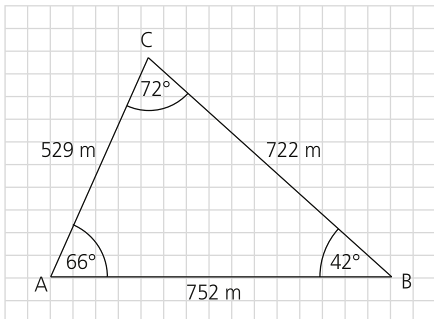
4 **a)** Maßstab 10 000 : 1



c) Die Strecke muss 7,5 km : 2,5 km = 3 mal durchfahren werden.

b) $\gamma = 180° - 66° - 42° = 72°$
$\Rightarrow \frac{b}{\sin 42°} = \frac{940\text{ m}}{\sin 72°} \Leftrightarrow b = \frac{\sin 42° \cdot 940\text{ m}}{\sin 72°}$
$\Rightarrow b \approx 661\text{ m}\ \frac{a}{\sin 66°} = \frac{940\text{ m}}{\sin 72°} \Leftrightarrow a = \sin 66° \cdot \frac{940\text{ m}}{\sin 72°}$
$\Rightarrow a \approx 903\text{ m}$
Gesamtstrecke:
940 m + 661 m + 903 m = 2 504 m ≈ 2,5 km

d) Die Strecke wurde mit dem Faktor
$k = \frac{2{,}5\text{ km}}{2\text{ km}} = 1{,}25$ verkleinert.



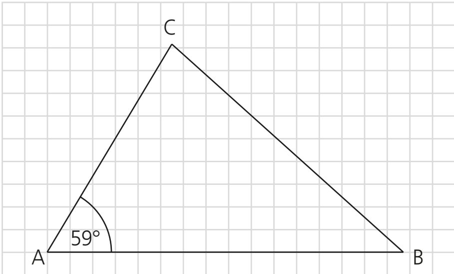
5 **a)** Bestimme zunächst $\overline{AC}$: $\frac{\overline{AC}}{\sin 100°} = \frac{57\text{ m}}{\sin 45°} \Leftrightarrow \overline{AC} = \sin 100° \cdot \frac{57\text{ m}}{\sin 45°} \Rightarrow x \approx 79{,}4\text{ m}$

Länge des Grundstücks zur Straßenseite: $\sin 22° = \frac{\overline{AD}}{79{,}4\text{ m}} \Rightarrow \overline{AD} = 79{,}4\text{ m} \cdot \sin 22° \approx 29{,}7\text{ m}$

b) $\overline{CD}^2 = (79{,}4\text{ m})^2 - (29{,}7\text{ m})^2 \Rightarrow \overline{CD} \approx 73{,}6\text{ m}$
Philips Grundstück ist in der Form eines rechtwinkligen Dreiecks, weshalb sich folgende Flächenformel ergibt: $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot 29{,}7\text{ m} \cdot 73{,}6\text{ m} \approx 1\,093\text{ m}^2$
Julianes Grundstück: $A = 2\,387\text{ m}^2 - 1\,093\text{ m}^2 = 1\,294\text{ m}^2$
Philips Grundstück hat eine Fläche von 1 093 m² wohingegen Julianes Grundstück 1294 m² groß ist.

1 a) Die Streckenlänge kann mit dem Sinussatz nicht berechnet werden, da lediglich eine Winkelgröße bekannt ist.

b) Maßstab 10 000 : 1.



Länge der Strecke $\overline{BC}$ = 6,86 cm. Die Entfernung zwischen B und C beträgt 686 m.

2 $a^2 = (534\text{ m})^2 + (786\text{ m})^2 - 2 \cdot 534\text{ m} \cdot 786\text{ m} \cdot \cos 59° \Rightarrow a \approx 686\text{ m}$

3 a) $a^2 = (4{,}3\text{ cm})^2 + (6{,}3\text{ cm})^2 - 2 \cdot 4{,}3\text{ cm} \cdot 6{,}3\text{ cm} \cdot \cos 36{,}4° \Rightarrow a \approx 3{,}8\text{ cm}$

b) $b^2 = (71\text{ mm})^2 + (48\text{ mm})^2 - 2 \cdot 71\text{ mm} \cdot 48\text{ mm} \cdot \cos 121{,}4° \Rightarrow b \approx 104\text{ mm}$

c) $c^2 = (5{,}8\text{ cm})^2 + (8{,}1\text{ cm})^2 - 2 \cdot 5{,}8\text{ cm} \cdot 8{,}1\text{ cm} \cdot \cos 63° \Rightarrow c \approx 7{,}5\text{ cm}$

4 a) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$

$2ac \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$

$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

$2ab \cdot \cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$

$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

b) 1 $\cos\beta = \frac{4{,}5^2 + 3{,}5^2 - 5{,}5^2}{2 \cdot 4{,}5 \cdot 3{,}5} \Rightarrow \beta \approx 86°$

$\cos\gamma = \frac{4{,}5^2 + 5{,}5^2 - 3{,}5^2}{2 \cdot 4{,}5 \cdot 5{,}5} \Rightarrow \gamma \approx 39°$

$\alpha = 180° - 86° - 39° = 55°$

2 $\cos\beta = \frac{6{,}7^2 + 8{,}9^2 - 3{,}2^2}{2 \cdot 6{,}7 \cdot 8{,}9} \Rightarrow \beta \approx 17°$

$\cos\gamma = \frac{6{,}7^2 + 3{,}2^2 - 8{,}9^2}{2 \cdot 6{,}7 \cdot 3{,}2} \Rightarrow \gamma \approx 124°$

$\alpha = 180° - 17° - 124° = 39°$

3 $\cos\beta = \frac{9{,}4^2 + 4{,}1^2 - 7{,}7^2}{2 \cdot 9{,}4 \cdot 4{,}1} \Rightarrow \beta \approx 53°$

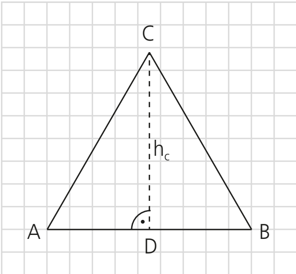
$\cos\gamma = \frac{9{,}4^2 + 7{,}7^2 - 4{,}1^2}{2 \cdot 9{,}4 \cdot 7{,}7} \Rightarrow \gamma \approx 25°$

$\alpha = 180° - 53° - 25° = 102°$

5 Die Aussage ist richtig, denn beispielsweise für $\gamma = 90°$ gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 90° \overset{\cos 90° = 0}{=} a^2 + b^2$$

1 a)



b) Da es sich um ein gleichseitiges Dreieck handelt, sind alle Innenwinkel gleich 60°.

1 $\sin 60° = \frac{h_c}{4{,}5\text{ m}} \Leftrightarrow h_c = 4{,}5\text{ m} \cdot \sin 60°$
$\Rightarrow h_c \approx 3{,}9\text{ m}$

2 $h_c^2 = (4{,}5\text{ m})^2 - (2{,}25\text{ m})^2 \Rightarrow h_c \approx 3{,}9\text{ m}$

In Beiden Fällen ergibt sich der Flächeninhalt zu
$A = \frac{1}{2} \cdot 4{,}5\text{ m} \cdot 3{,}9\text{ m} = 8{,}8\text{ m}^2$.

2 1 Jedes Dreieck lässt sich durch das Einzeichnen einer Senkrechten der Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen.

2 Im nebenstehenden Dreieck gilt für den Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$.

3 Im Dreieck ADC gilt $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow h_c = \sin\alpha \cdot b$

4 Nun kann man in der Flächeninhaltsformel für h_c diese Umformung einsetzten: $A = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha$.

3 Grundvoraussetzung für die Formel ist, dass zwei Seiten und der dazwischenliegende Winkel gegeben sind. Je nachdem, um welchen Winkel es sich handelt, erhält man die passende Formel (vergleiche Merktipp), indem man das Dreieck zunächst in zwei rechtwinklige Teildrecke, mit Hilfe derjenigen Höhe, die nicht durch Punkt beim gegebenen Winkel verläuft, teilt. Zum grünen Kasten analoge Rechnungen führen zu den Formeln:
$A = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin\beta$ und $A = \frac{1}{2} b \cdot a \cdot \sin\gamma$.

4 a) $A = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5\text{ cm} \cdot 6{,}9\text{ cm} \cdot \sin 32° \approx 4{,}6\text{ cm}^2$

b) $\gamma = 180° - 77° - 37° = 66° \;\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot 42\text{ mm} \cdot 26\text{ mm} \cdot \sin 66° \approx 499\text{ mm}^2$

c) $A = \frac{1}{2} \cdot 21\text{ cm} \cdot 29\text{ cm} \cdot \sin 90° = \frac{1}{2} \cdot 21\text{ cm} \cdot 29\text{ cm} \approx 305\text{ cm}^2$

d) $\gamma = 180° - 54° - 46° = 80°$
$\frac{a}{\sin 54°} = \frac{7{,}2}{\sin 80°} \Leftrightarrow a = \sin 54° \cdot \frac{7{,}2}{\sin 80°} \;\Rightarrow a \approx 5{,}9\text{ cm}$
$A = \frac{1}{2} \cdot 5{,}9\text{ cm} \cdot 7{,}2\text{ cm} \cdot \sin 46° \approx 15{,}3\text{ cm}^2$

e) $\frac{\sin\beta}{4{,}5\text{ cm}} = \frac{\sin 40°}{6{,}3\text{ cm}} \Rightarrow \beta \approx 27°$
$\gamma = 180° - 40° - 27° = 113°$
$A = \frac{1}{2} \cdot 6{,}3\text{ cm} \cdot 4{,}5\text{ cm} \cdot \sin 113° \approx 13{,}0\text{ cm}^2$

f) $\cos\alpha = \frac{8{,}4^2 + 6{,}5^2 - 12{,}3^2}{2 \cdot 8{,}4 \cdot 6{,}5} \Leftrightarrow \alpha \approx 111°$
$A = \frac{1}{2} \cdot 8{,}4\text{ cm} \cdot 6{,}5\text{ cm} \cdot \sin 111° \approx 25{,}5\text{ cm}^2$

5 a) $\sin(180° - \alpha) = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow h_c = b \cdot \sin(180° - \alpha)$
Es gilt $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ und damit $h_c = b \cdot \sin(\alpha)$
Einsetzen in die Flächeninhaltsformel liefert: $A = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha$ und damit gilt die besagte Formel auch für stumpfwinklige Dreiecke.

b) Da $\sin(90°) = 1$ ist, gilt im rechtwinkligen Dreieck $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin 90° = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.

1 Basis-Aufgabe

a) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\tan\alpha = \frac{a}{b}$; $\sin\beta = \frac{b}{c}$; $\cos\beta = \frac{a}{c}$; $\tan\beta = \frac{b}{a}$

b) $\sin\alpha = \frac{d}{f}$; $\cos\alpha = \frac{e}{f}$; $\tan\alpha = \frac{d}{e}$; $\sin\beta = \frac{e}{f}$; $\cos\beta = \frac{d}{f}$; $\tan\beta = \frac{e}{d}$

c) $\sin\alpha = \frac{r}{t}$; $\cos\alpha = \frac{s}{t}$; $\tan\alpha = \frac{r}{s}$; $\sin\beta = \frac{s}{t}$; $\cos\beta = \frac{r}{t}$; $\tan\beta = \frac{s}{r}$

Vertiefende Aufgabe

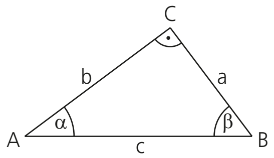
a) $\sin\alpha = \frac{b}{e}$; $\cos\alpha = \frac{a}{e}$; $\tan\alpha = \frac{b}{a}$; $\sin\beta = \frac{a}{e}$; $\cos\beta = \frac{b}{e}$; $\tan\beta = \frac{a}{b}$

b) $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} = \frac{a}{c}$; $\cos\alpha = \frac{q}{b} = \frac{b}{c}$; $\tan\alpha = \frac{h_c}{q} = \frac{a}{b}$; $\sin\beta = \frac{h_c}{a} = \frac{b}{c}$; $\cos\beta = \frac{p}{a} = \frac{a}{c}$; $\tan\beta = \frac{h_c}{p} = \frac{b}{a}$

2 Basis-Aufgabe

a) Diese Aussage ist falsch. Beispielsweise ist $\tan 60° \approx 1{,}7$ und damit größer als 1.

b) Diese Aussage ist richtig.

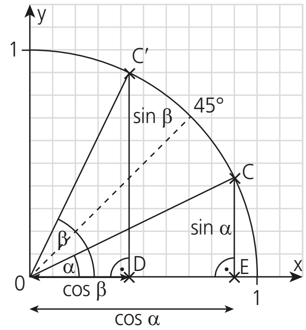


$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\beta$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ und $\sin\beta = \frac{b}{c} \Rightarrow \cos\alpha = \sin\beta$

Vertiefende Aufgabe

a) Diese Aussage ist richtig, denn am Einheitskreis erkennt man, dass für Winkel, die größer als 45° sind, der Sinuswert größer als der Kosinuswert ist. Da $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, folgt daraus die Behauptung.



b) Diese Aussage ist falsch, siehe a).

3 Basis-Aufgabe

a) $\cos\beta = \frac{4{,}8}{7{,}6} \Rightarrow \beta \approx 51°$

$\alpha = 180° - 51° - 90° = 39°$

$\sin 51° = \frac{b}{7{,}6} \Rightarrow b \approx 5{,}9\text{ cm}$

b) $\sin 59° = \frac{a}{4} \Rightarrow a \approx 3{,}4\text{ cm}$

$\beta = 180° - 59° - 90° = 31°$

$\sin 31° = \frac{b}{4} \Rightarrow b \approx 2{,}1\text{ cm}$

Vertiefende Aufgabe

a) $\tan\alpha = \frac{2{,}5}{2} \Rightarrow \alpha \approx 51°$

$\sin 51° = \frac{2{,}5}{b} \Rightarrow b \approx 3{,}2\text{ cm}$

Da das Dreieck ABC gleichschenklig ist, gilt $\beta = 51°$ und $a = 3{,}2\text{ cm}$.

$\gamma = 180° - 2 \cdot 51° = 78°$

b) $\sin 35° = \frac{2{,}8}{b} \Rightarrow b \approx 4{,}9\text{ cm}$

$\beta = 180° - 90° - 35° = 55°$

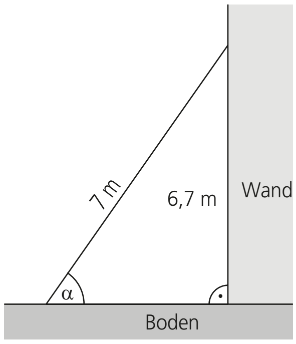
$\sin 55° = \frac{2{,}8}{a} \Rightarrow a \approx 3{,}4\text{ cm}$

$\cos 35° = \frac{q}{4{,}9} \Rightarrow q \approx 4{,}0\text{ cm}$

$\cos 55° = \frac{p}{3{,}4} \Rightarrow p \approx 2{,}0\text{ cm}$

$c = 4{,}0\text{ cm} + 2{,}0\text{ cm} = 6{,}0\text{ cm}$

4 Basis-Aufgabe

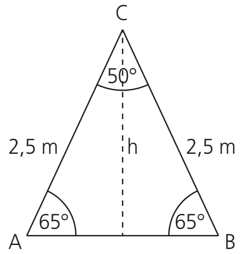


$\sin\alpha = \frac{6{,}7}{7} \Rightarrow \alpha \approx 73°$

Die Vorgabe wurde eingehalten.

Vertiefende Aufgabe

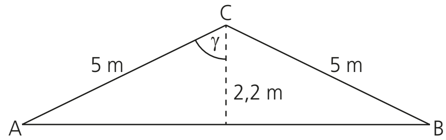
a) Die Leiter bildet mit dem Boden jeweils einen Winkel von (180° – 50°) : 2 = 65°, da die Leiter ein gleichschenkliges Dreieck darstellt.



$\frac{\overline{AB}}{\sin 50°} = \frac{2{,}5\text{ m}}{\sin 65°} \Rightarrow \overline{AB} = \sin 50° \cdot \frac{2{,}5\text{ m}}{\sin 65°} \approx 2{,}1\text{ m}$

Die Fußpunkte der Leiter stehen 2,1 m auseinander.

b)



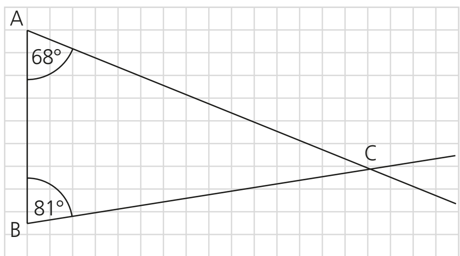
$\cos\gamma = \frac{2{,}2\text{ m}}{5\text{ m}} \Rightarrow \gamma \approx 60°$

Der Winkel an der Spitze ist

$2 \cdot \gamma = 2 \cdot 60° = 120°$.

5 Basis-Aufgabe

a) Maßstab 20 000 : 1



b) Entfernung vom Punkt A zum Leuchtturm:

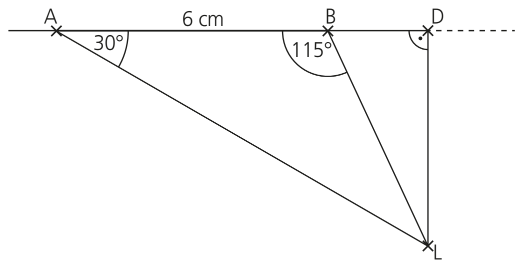
$\frac{\overline{AC}}{\sin 81°} = \frac{850\text{ m}}{\sin 31°} \Rightarrow \overline{AC} \approx 1\,630\text{ m}$

Entfernung vom Punkt B zum Leuchtturm:

$\frac{\overline{BC}}{\sin 68°} = \frac{850\text{ m}}{\sin 31°} \Rightarrow \overline{BC} \approx 1\,530\text{ m}$

Vertiefende Aufgabe

c)



$\frac{\overline{BL}}{\overline{AB}} = \frac{\sin 30°}{\sin(180° - 30° - 115°)}$

$\Rightarrow \overline{BL} = \frac{\overline{AB} \cdot \sin 30°}{\sin 35°} = \frac{6\text{ cm} \cdot \sin 30°}{\sin 35°} \approx 5{,}2\text{ cm}$

$\sin(180° - 115°) = \frac{\overline{DL}}{\overline{BL}}$

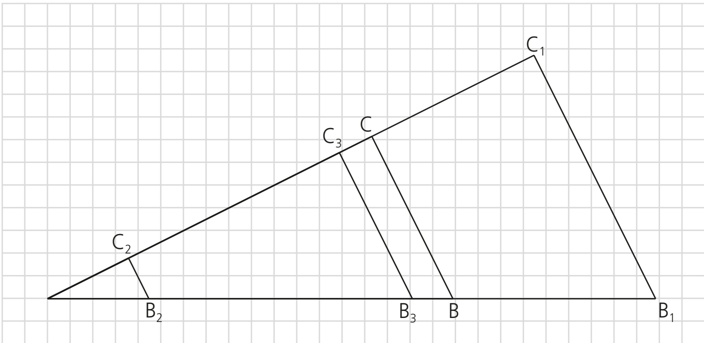
$\Rightarrow \overline{DL} = \overline{BL} \cdot \sin 65° = 5{,}2\text{ cm} \cdot \sin 65° = 4{,}7\text{ cm}$

1 ① Ähnlichkeitsfaktor $k = \frac{6\text{ cm}}{4\text{ cm}} = 1{,}5$ Seitenlänge $b_1 = 8\text{ cm} \cdot 1{,}5 = 12\text{ cm}$

② Ähnlichkeitsfaktor $k = \frac{2\text{ cm}}{8\text{ cm}} = 0{,}25$ Seitenlänge $a_2 = 4\text{ cm} \cdot 0{,}25 = 1\text{ cm}$

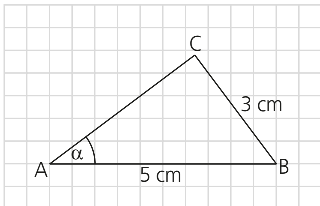
③ Ähnlichkeitsfaktor $k = \frac{3{,}6\text{ cm}}{4\text{ cm}} = 0{,}9$ Seitenlänge $b_3 = 8\text{ cm} \cdot 0{,}9 = 7{,}2\text{ cm}$

Zeichnung:

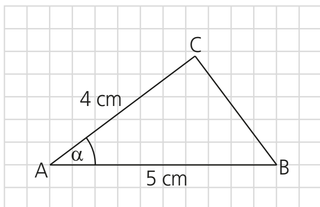


2 Es sind nur ① und ② zueinander ähnlich, da beide Dreiecke gleichseitig und damit alle Innenwinkel 60° sind. Der Ähnlichkeitsfaktor beträgt $k = \frac{2}{1{,}5} = \frac{4}{3}$.

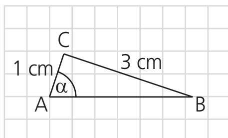
3 a) $\sin\alpha = 0{,}6 = \frac{3}{5}$. Man kann den Winkel α also beispielsweise in einem rechtwinkligen Dreieck, mit einer Gegenkathete der Länge 3 cm und einer Hypotenuse der Länge 5 cm, messen.
Man erhält: $\alpha \approx 37°$.



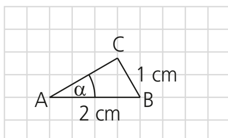
b) $\cos\alpha = 0{,}8 = \frac{4}{5}$. Man kann den Winkel α also beispielsweise in einem rechtwinkligen Dreieck, mit einer Ankathete der Länge 3 cm und einer Hypotenuse der Länge 5 cm, messen.
Man erhält: $\alpha \approx 37°$.



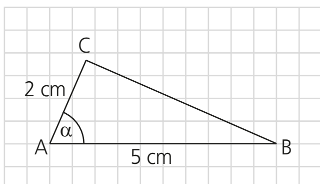
c) $\tan\alpha = 3{,}0 = \frac{3}{1}$. Man kann den Winkel α also beispielsweise in einem rechtwinkligen Dreieck, mit einer Gegenkathete der Länge 3 cm und einer Ankathete der Länge 1 cm, messen.
Man erhält: $\alpha \approx 72°$.



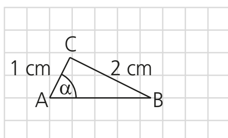
d) $\sin\alpha = 0{,}5 = \frac{1}{2}$. Man kann den Winkel α also beispielsweise in einem rechtwinkligen Dreieck, mit einer Gegenkathete der Länge 1 cm und einer Hypotenuse der Länge 2 cm, messen.
Man erhält: $\alpha \approx 30°$.



e) $\cos\alpha = 0{,}4 = \frac{2}{5}$. Man kann den Winkel α also beispielsweise in einem rechtwinkligen Dreieck, mit einer Ankathete der Länge 2 cm und einer Hypotenuse der Länge 5 cm, messen.
Man erhält: $\alpha \approx 66°$.



f) $\tan\alpha = 2{,}0 = \frac{2}{1}$. Man kann den Winkel α also beispielsweise in einem rechtwinkligen Dreieck, mit einer Gegenkathete der Länge 2 cm und einer Ankathete der Länge 1 cm, messen.
Man erhält: $\alpha \approx 63°$.



4 a) $\tan\alpha = \frac{5{,}1}{3{,}8} \Rightarrow \alpha \approx 53{,}3°$ $\quad \beta = 180° - 90° - 53{,}3° = 36{,}7°$

b) $\cos\beta = \frac{5{,}7}{8{,}4} \Rightarrow \beta \approx 47{,}3°$ $\quad \alpha = 180° - 90° - 47{,}3° = 42{,}7°$

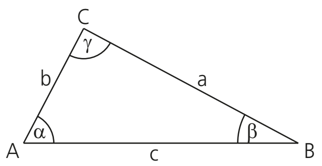
c) $\sin\gamma = \frac{1{,}8}{2{,}6} \Rightarrow \gamma \approx 43{,}8°$ $\quad \alpha = 180° - 90° - 43{,}8° = 46{,}2°$

5 a) $\cos 42° = \frac{5}{c} \Rightarrow c \approx 6{,}7\text{ cm}$ $\quad \sin 42° = \frac{a}{6{,}7} \Rightarrow a \approx 4{,}5\text{ cm}$ $\quad \beta = 180° - 90° - 42° = 48°$

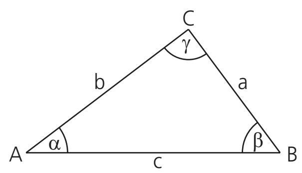
b) $\sin 31° = \frac{a}{11{,}7} \Rightarrow a \approx 6\text{ cm}$ $\quad \cos 31° = \frac{b}{11{,}7} \Rightarrow b \approx 10\text{ cm}$ $\quad \beta = 180° - 90° - 31° = 59°$

c) $\tan 48° = \frac{6{,}6}{a} \Rightarrow a \approx 5{,}9\text{ cm}$ $\quad \sin 48° = \frac{6{,}6}{d} \Rightarrow c \approx 8{,}9\text{ cm}$ $\quad \beta = 180° - 90° - 48° = 42°$

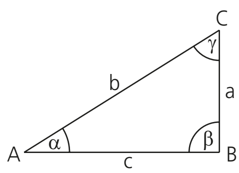
6 a)



b)



c)

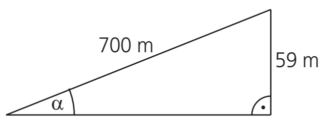


	a)	b)	c)
a	12,4 cm	5,5 cm	12,2 cm
b	6,6 cm	7,3 cm	23 cm
c	14 cm	9,1	19,5
α	62°	37°	32°
β	28°	53°	90°
γ	90°	90°	58°

7 a) $\tan 3° = \frac{h}{5{,}6\text{ m}} \Rightarrow h \approx 0{,}293\text{ m} = 29{,}3\text{ cm}$

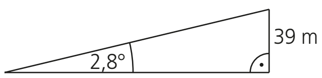
b) Das Volumen der Rampe ist $V = \frac{1}{2} \cdot 5{,}6\text{ m} \cdot 0{,}293\text{ m} \cdot 1{,}2\text{ m} \approx 0{,}984\text{ m}^3 = 984\text{ dm}^3$.
Die Kosten belaufen sich auf 0,984 · 95 € = 93,48 €.

8 a)



$\sin\alpha = \frac{59\text{ m}}{700\text{ m}} \Rightarrow \alpha \approx 4{,}8°$

b)



$\sin 2{,}8° = \frac{39\text{ m}}{c} \Rightarrow c \approx 798\text{ m}$
Die Gondeln legen einen Weg von 798 m zurück.

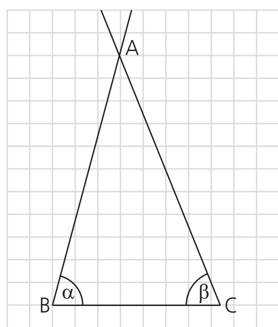
c) Die Steigung von a) ist $\frac{59}{700} \approx 0{,}084 = 8{,}4\,\%$.
Die Steigung von b) ist $\tan 2{,}8° \approx 0{,}049 = 4{,}9\,\%$.

9 a) $\alpha = 180° - 75° - 68° = 37°$

$\frac{c}{\sin 68°} = \frac{74\text{ m}}{\sin 37°} \Rightarrow c \approx 114\text{ m}$

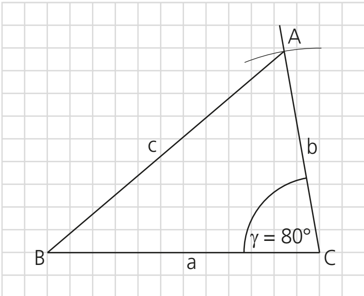
$\frac{b}{\sin 75°} = \frac{74\text{ m}}{\sin 37°} \Rightarrow b \approx 119\text{ m}$

b) Maßstab 2 000 : 1

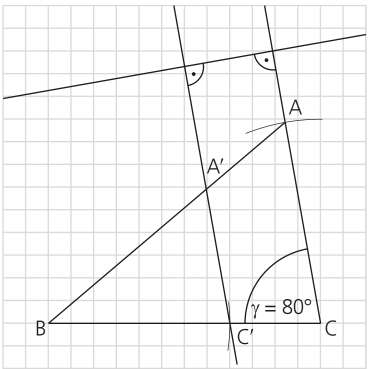


c) Die Strecke $\overline{BA}$ ist 114 m = 0,114 km lang. Wenn die Fähre in einer Stunde 5 km zurücklegt, schafft sie von 10 bis 18 Uhr 40 km.
Die Fähre schafft dann also $\frac{40\text{ km}}{0{,}114\text{ km}} \approx 350{,}8$, also höchstens 350 Einzelfahrten. Da sie immer hin und zurück fährt, schafft sie es in dieser Zeit 175 mal.

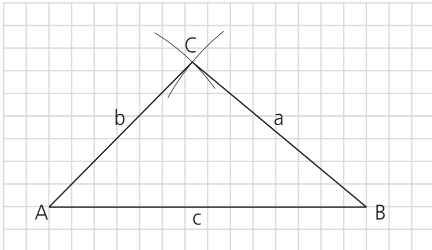
10 a) Konstruktionsbeschreibung:
1. Zeichne die Strecke a = 6 cm.
2. Zeichne im Punkt C den Winkel $\gamma = 80°$.
3. Ziehe um Punkt C einen Kreisbogen mit b = 4,5 cm.
4. Der Schnittpunkt von freiem Schenkel und Kreisbogen ist A.
5. Verbinde Punkt A und Punkt B.



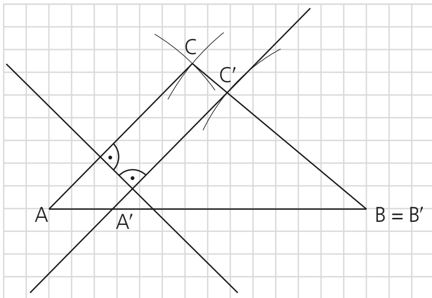
Konstruktionsbeschreibung für das Dreieck A′B′C′:
1. Trage in B die Strecke a′ = 4 cm auf der Strecke $\overline{BC}$ an. Der Schnittpunkt ist C′.
2. Konstruiere eine Parallele zu $\overline{AC}$ durch C′. Der Schnittpunkt mit $\overline{AB}$ ist A′.



b) Konstruktionsbeschreibung (Für das ähnliche Dreieck läuft diese analog ab):
1. Zeichne die Strecke c mit 7 cm.
2. Zeichne einen Kreis um A mit dem Radius 4,5 cm.
3. Zeichne einen Kreis um B mit dem Radius 6 cm.
4. Der Schnittpunkt der beiden Kreise ist C.
5. Zeichne die Strecke $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$.



Konstruktionsbeschreibung für das Dreieck A′B′C′ analog zu a).



11 Die Fotos sind 13 cm $\cdot \frac{4}{3} \approx 17{,}3$ cm.

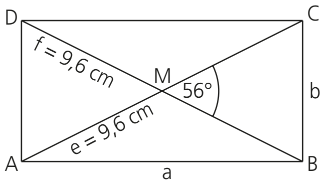
12 a) $\tan\alpha = \frac{7}{12} \Rightarrow \alpha \approx 30°$ $\qquad \tan\beta = \frac{12}{7} \Rightarrow \beta \approx 60°$

b) $\sin\alpha = \frac{5{,}5}{6{,}4} \Rightarrow \alpha \approx 59°$

Die Innenwinkelsumme im Parallelogramm beträgt 360°, daraus folgt:

$2 \cdot 59° + 2 \cdot \beta = 360° \Rightarrow \beta = 121°$.

13



Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck gilt:

$\sphericalangle BCM = (180° - 56°) : 2 = 62°$.

$\frac{b}{\sin 56°} = \frac{\frac{9{,}6\text{ cm}}{2}}{\sin 62°} \Rightarrow b \approx 4{,}5$ cm

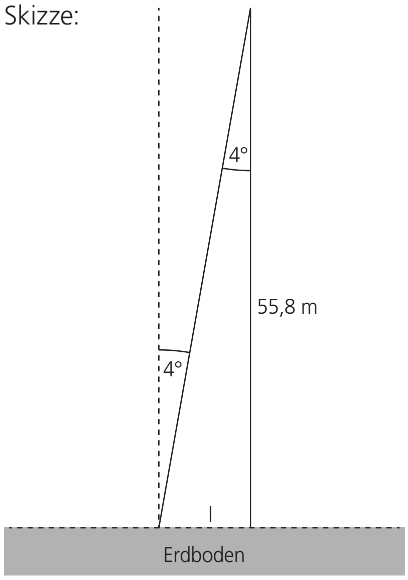
$a^2 = (9{,}6\text{ cm})^2 - (4{,}5\text{ cm})^2 \Rightarrow a \approx 8{,}5$ cm

14 a) $a = 5{,}2$ cm; $\beta = 62{,}3°$; $\gamma = 180° - 2 \cdot 62{,}3° = 55{,}4°$; $\frac{c}{\sin 55{,}4°} = \frac{5{,}2\text{ cm}}{\sin 62{,}3°} \Rightarrow c \approx 4{,}8$ cm

b) $\alpha = \beta = (180° - 42°) : 2 = 69°$; $\frac{a}{\sin 69°} = \frac{4{,}5}{\sin 42°} \Rightarrow a = 6{,}3\text{ cm} = b$

c) $a = b = 1{,}8$ dm; $\cos\alpha = \frac{1{,}8^2 + 2{,}9^2 - 1{,}8^2}{2 \cdot 1{,}8 \cdot 2{,}9} \approx 0{,}806 \Rightarrow \alpha = \beta \approx 36°$; $\gamma = 180° - 2 \cdot 36° = 108°$

15 a) Skizze:

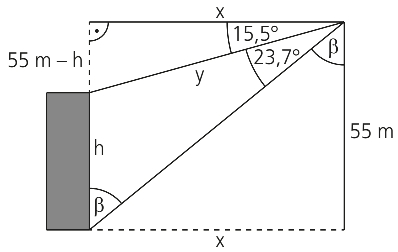


$\tan 4° = \frac{l}{55{,}8} \Rightarrow l \approx 3{,}9$ m

Er ragt 3,9 m über seine Standfläche hinaus.

b) $\tan\alpha = \frac{60}{160} \Rightarrow \alpha \approx 21°$

16 a) Skizze:



$\beta = 180° - 90° - 15{,}5° - 23{,}7° = 50{,}8°$

$\tan 50{,}8° = \frac{x}{55} \Rightarrow x \approx 67{,}4$ m

$\cos 15{,}5° = \frac{67{,}4}{y} \Rightarrow c \approx 70{,}0$ m

Der Ballon ist 70,0 m von der Turmspitze entfernt.

b) $\tan 15{,}5° = \frac{55\text{ m} - h}{67{,}4\text{ m}} \Rightarrow 55\text{ m} - h \approx 18{,}7$ m

$\Rightarrow h = 36{,}3$ m

Der Turm ist 36,3m hoch.

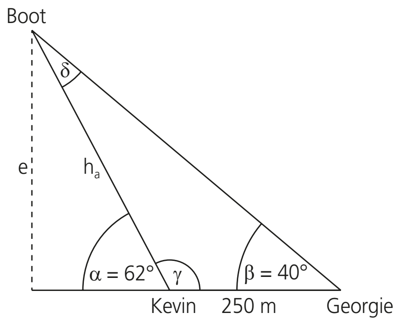
17 a) $\gamma = 180° - 62° = 118°$

$\delta = 180° - 118° - 40° = 22°$

$\frac{a}{\sin 40°} = \frac{250\text{ m}}{\sin 22°} \Rightarrow a \approx 429$ m

$\sin 62° = \frac{e}{429\text{ m}} \Rightarrow e \approx 379$ m

Das Boot ist etwa 379 m vom Ufer entfernt.



b) Zu Beginn ist das Boot vom Ufer aus gesehen $\tan 40° = \frac{379\text{ m}}{x} \Rightarrow x = 452$ m entfernt.

Das Boot wird in einer Stunde, also 60 Minuten, 3 km abgetrieben. Also wird es in 10 Minuten ($\frac{1}{6}$ einer Stunde) dementsprechend $3\text{ km} \cdot \frac{1}{6} = 0{,}5\text{ km} = 500$ m abgetrieben.

Georgie muss also 452 m + 500 m = 952 m am Ufer entlang laufen, um das Boot einzuholen.

18 a) $a^2 = 7{,}4^2 + 5{,}6^2 - 2 \cdot 7{,}4 \cdot 5{,}6 \cdot \cos 30{,}1° = 14{,}4 \Rightarrow a \approx 3{,}8$ (cm)

$\cos\beta = \frac{3{,}8^2 + 5{,}6^2 - 7{,}4^2}{2 \cdot 3{,}8 \cdot 5{,}6} \Rightarrow \beta \approx 102{,}2°$

$\gamma = 180° - 30{,}1° - 102{,}2° = 47{,}7°$

b) $b^2 = 18{,}1^2 + 34{,}5^2 - 2 \cdot 18{,}1 \cdot 34{,}5 \cdot \cos 31{,}2° = 449{,}6 \Rightarrow b \approx 21{,}2$ (cm)

$\frac{\sin\alpha}{18{,}1\text{ cm}} = \frac{\sin 31{,}2°}{21{,}2\text{ cm}} \Rightarrow \alpha \approx 26{,}2°$

$\gamma = 180° - 26{,}2° - 31{,}2° = 122{,}6°$

c) $\cos\alpha = \frac{7{,}1^2 + 5{,}8^2 - 8{,}1^2}{2 \cdot 7{,}1 \cdot 5{,}8} \Rightarrow \alpha \approx 77{,}1°$ $\quad \cos\beta = \frac{8{,}1^2 + 5{,}8^2 - 7{,}1^2}{2 \cdot 8{,}1 \cdot 5{,}8} \Rightarrow \beta \approx 58{,}7°$

$\gamma = 180° - 77{,}1° - 58{,}7° = 44{,}2°$

19 a) Die Fläche des Grundstücks beträgt $A = \frac{1}{2} \cdot 23\text{ m} \cdot 19{,}5\text{ m} \cdot \sin 72° \approx 213{,}3\text{ m}^2$.

Damit hat es einen Preis von $213{,}3\text{ m}^2 \cdot 75$ € = 15 998 €, also kann die Familie es sich leisten.

b) Berechne zunächst die Länge der dritten Grundstücksseite: $a^2 = 23^2 + 19{,}5^2 - 2 \cdot 23 \cdot 19{,}5 \cdot \cos 72°$

$\Rightarrow a \approx 25{,}1$ m.

Die Kosten für die Umzäunung belaufen sich auf $(23\text{ m} + 19{,}5\text{ m} + 25{,}1\text{ m}) \cdot 22{,}5\,\frac{€}{\text{m}} = 1\,521$ €.

1 ① $\frac{15\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 3$ $\frac{9\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 3$ $\frac{18\text{ cm}}{6\text{ cm}} = 3$ $\Rightarrow k = 3$

② $\frac{7{,}5\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 1{,}5$ $\frac{4{,}5\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 1{,}5$ $\frac{9\text{ cm}}{6\text{ cm}} = 1{,}5$ $\Rightarrow k = 1{,}5$

③ $\frac{10\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 2$ $\frac{6\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 2$ $\frac{12\text{ cm}}{6\text{ cm}} = 2$ $\Rightarrow k = 2$

④ $\frac{6{,}25\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 1{,}25$ $\frac{3{,}75\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 1{,}25$ $\frac{7{,}25\text{ cm}}{6\text{ cm}} = 1{,}21$ $\Rightarrow$ Die Dreiecke sind nicht ähnlich.

2 a) $\tan\alpha = \frac{54}{100} \Rightarrow \alpha \approx 28{,}4°$

$\tan\alpha = \frac{60}{100} \Rightarrow \alpha \approx 31{,}0°$

$\tan\alpha = \frac{90}{100} \Rightarrow \alpha \approx 42{,}0°$

b) $\tan 30° \approx 0{,}58 = 58\,\%$

$\tan 35° \approx 0{,}70 = 70\,\%$

$\tan 58° \approx 1{,}60 = 160\,\%$

3 a) und b)

	Zu β	Zu γ	Zu ε	Zu δ
Hypotenuse	n	n	f	f
Ankathete	p	o	d	e
Gegenkathete	o	p	e	d
Sinus	$\frac{o}{n}$	$\frac{p}{n}$	$\frac{e}{f}$	$\frac{d}{f}$
Kosinus	$\frac{p}{n}$	$\frac{o}{n}$	$\frac{d}{f}$	$\frac{e}{f}$
Tangens	$\frac{o}{p}$	$\frac{p}{o}$	$\frac{e}{d}$	$\frac{d}{e}$

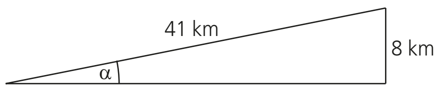
c) $\sin\beta = \frac{3{,}6}{4{,}5} \Rightarrow \beta \approx 53{,}1°$

$\sin\gamma = \frac{2{,}7}{4{,}5} \Rightarrow \gamma \approx 36{,}9°$

$\sin\delta = \frac{3}{3{,}2} \Rightarrow \delta \approx 69{,}6°$

$\sin\varepsilon = \frac{1{,}1}{3{,}2} \Rightarrow \varepsilon \approx 20{,}1$

4 a)



$\sin\alpha = \frac{8}{41} \Rightarrow \alpha \approx 11{,}3°$

b) $\sin 3{,}5° = \frac{9{,}5\text{ km}}{x} \Rightarrow x \approx 155{,}6\text{ km}$

5 a) $\frac{\sin\gamma}{5{,}5\text{ cm}} = \frac{\sin 42°}{6{,}2\text{ cm}} \Rightarrow \gamma \approx 36{,}4°$

$\alpha = 180° - 36{,}4° - 42° = 101{,}6°$

$\frac{a}{\sin 101{,}6°} = \frac{6{,}2\text{ cm}}{\sin 42°} \Rightarrow a \approx 9{,}1\text{ cm}$

Konstruktion nach dem SsW-Satz.

b) $\alpha = 180° - 45° - 106° = 29°$

$\frac{b}{\sin 45°} = \frac{6{,}5\text{ cm}}{\sin 29°} \Rightarrow b \approx 9{,}5\text{ cm}$

$\frac{c}{\sin 106°} = \frac{6{,}5\text{ cm}}{\sin 29°} \Rightarrow c \approx 12{,}9\text{ cm}$

c) $\frac{\sin\gamma}{3{,}6\text{ cm}} = \frac{\sin 74°}{4{,}4\text{ cm}} \Rightarrow \gamma \approx 51{,}9°$

$\beta = 180° - 74° - 51{,}9° = 54{,}1°$

$\frac{b}{\sin 54{,}1°} = \frac{4{,}4\text{ cm}}{\sin 74°} \Rightarrow b \approx 3{,}7\text{ cm}$

d) $\beta = \gamma = (180° - 80°) : 2 = 50°$

$\frac{b}{\sin 50°} = \frac{6\text{ cm}}{\sin 80°} \Rightarrow b = c \approx 4{,}7\text{ cm}$

6 $\beta = 180° - 52° = 128°$

$\frac{a}{\sin 29°} = \frac{5\text{ km}}{\sin 23°} \Rightarrow a \approx 6{,}2\text{ km}$

$\gamma = 180° - 29° - 128° = 23°$

$\sin 52° = \frac{h_c}{6{,}2\text{ km}} \Rightarrow h_c \approx 4{,}9\text{ km}$

7 a) Die Fläche des Grundstücks beträgt $A = \frac{1}{2} \cdot 5\text{ m} \cdot 12\text{ m} \cdot \sin 50° \approx 23\text{ m}^3$.

Damit werden $23\text{ m}^3 \cdot 40\text{ g} = 920\text{ g}$ Samen gebraucht $\Rightarrow \frac{920\text{ g}}{500\text{ g}} \cdot 3{,}99\text{ €} = 7{,}34\text{ €}$

b) Die fehlende Länge des Grundstücks ist: $a^2 = 5^2 + 12^2 - 2 \cdot 5 \cdot 12 \cdot \cos 50° \Rightarrow a \approx 9{,}6\text{ m}$

Damit benötigt man 5 m + 12 m + 9,6 m = 26,6 m Absperrband.