

K5

- 1 a) $\frac{7}{11} \cdot \frac{2}{13} - \frac{4}{13} \cdot \frac{4}{11} = \frac{7 \cdot 2}{11 \cdot 13} - \frac{4 \cdot 4}{13 \cdot 11} = \frac{14}{143} - \frac{16}{143} = \frac{14-16}{143} = -\frac{2}{143}$
 b) $0,25 + 3,57 + 2,43 = 0,25 + (3,57 + 2,43) = 0,25 + 6 = 6,25$
 c) $-\frac{3}{5} : (-0,2) + \frac{9}{20} = -\frac{3}{5} : \left(-\frac{1}{5}\right) + \frac{9}{20} = -\frac{3}{5} \cdot (-5) + \frac{9}{20} = 3 + \frac{9}{20} = 3 + \frac{45}{100} = 3,45$
 d) $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} + 0,25 + 0,8 + \frac{1}{2} = 0,75 + 0,2 + 0,25 + 0,8 + 0,5 = 2,5$
 e) $\left(-\frac{1}{4} + 2,45\right) + \left(-0,75 + 1 \frac{55}{100}\right) = (-0,25 - 0,75) + (2,45 + 1,55) = -(0,25 + 0,75) + 2,45 + 1,55$
 $= -1 + 4 = 3$
 f) $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} + \frac{7}{3} \cdot 0,4 + \frac{10}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{15} + \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{15} + \frac{14}{15} + \frac{2}{3} = \frac{22}{15} + \frac{10}{15} = \frac{32}{15} = 2 \frac{2}{15}$
 g) $(0,5)^2 \cdot (-0,3) - 0,7 \cdot (0,5)^2 + 2 = (0,5)^2 \cdot (-0,3 - 0,7) + 2 = 0,25 \cdot (-1) + 2 = -0,25 + 2 = 1,75$
 h) $-4 \cdot \frac{1}{5} \cdot 0,25 - \frac{2}{5} \cdot 0,5 = -4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5} = -\frac{2}{5}$
 i) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{5}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5}{36} - \frac{8}{36} = -\frac{3}{36} = -\frac{1}{12}$

K2/5

- 2 a) $\frac{1}{4} = \frac{5}{20} = \frac{10}{40}; \frac{1}{5} = \frac{4}{20} = \frac{8}{40}$
 Beispiel: $\frac{9}{40}$ liegt zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{4}$.
 b) $-\frac{1}{7} = -\frac{2}{14}; -\frac{2}{7} = -\frac{4}{14}$
 Beispiel: $-\frac{3}{14}$ liegt zwischen $-\frac{2}{7}$ und $-\frac{1}{7}$.
 c) Beispiel: 0,702 liegt zwischen 0,7 und 0,71.
 d) Beispiel: -3,2004 liegt zwischen -3,201 und -3,2.

K3/5

- 3 a) Direkte Proportionalität mit Proportionalitätsfaktor $m = 33,4 : 20 = 1,67$ (Dicke einer Münze in mm)
 b) Keine Proportionalität. Beim Kauf von 2 Semmeln kostet eine Semmel 40 ct. 10 Semmeln kosten aber nicht $10 \cdot 40 \text{ ct} = 4 \text{ €}$, sondern nur 3,60 €.
 c) Indirekte Proportionalität zwischen Fahrzeit und Geschwindigkeit: $\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$ (Δt : Fahrzeit; Δx : zurückgelegte Strecke; v : Geschwindigkeit).

K5

- 4 a) $7 + 3(x - 2) = 5x - 3$
 $7 + 3x - 6 = 5x - 3 \quad | -3x$
 $1 = 2x - 3 \quad | +3$
 $4 = 2x \quad | :2$
 $2 = x$
 $2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow L = \{2\}$
 c) $(17 + x) \cdot 5 + x \cdot (x + 1) = (7 + x) \cdot x - 26$
 $85 + 5x + x^2 + x = 7x + x^2 - 26$
 $x^2 + 6x + 85 = x^2 + 7x - 26 \quad | -x^2 - 6x$
 $85 = x - 26 \quad | +26$
 $111 = x$
 $111 \in \mathbb{Q} \Rightarrow L = \{111\}$
 e) $x(17 + x) - x^2 > 34(0,5x + 1,5)$
 $17x + x^2 - x^2 > 17x + 51 \quad | -17x$
 $0 > 51 \text{ Widerspruch} \Rightarrow L = \{\}$
 b) $0,5(x + 4) - 3,5x = 5$
 $0,5x + 2 - 3,5x = 5$
 $-3x + 2 = 5 \quad | -2$
 $-3x = 3 \quad | :(-3)$
 $x = -1 \notin \mathbb{N} \Rightarrow L = \{\}$
 d) $\frac{1}{x^2 + 5} < 0$
 Zähler und Nenner sind stets positiv, also kann der Bruch nicht negativ werden. $L = \{\}$
 f) $\frac{4+x}{x} > \frac{2x-1}{2x} \quad | \cdot x \cdot 2x$
 $(4+x)2x > (2x-1)x$
 $8x + 2x^2 > 2x^2 - x \quad | -2x^2 + x$
 $9x > 0 \quad | :9$
 $x > 0 \Rightarrow L = \mathbb{N}$

g) $\frac{4+x}{3+2x} = \frac{3+2x}{4x+1} \quad | \cdot (3+2x)(4x+1)$ h) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{14}{2x(x+1)}$

$$(4+x)(4x+1) = (3+2x)^2$$

$$16x + 4 + 4x^2 + x = 9 + 12x + 4x^2$$

$$4x^2 + 17x + 4 = 4x^2 + 12x + 9 \quad | - 4x^2$$

$$17x + 4 = 12x + 9 \quad | - 12x - 4$$

$$5x = 5 \quad | : 5$$

$$x = 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow L = \{1\}$$

i) $\frac{x-2}{x+2} + 4x = \frac{2x(3+2x)}{x+2} \quad | \cdot (x+2)$ j) $(x+2,5)^2 = 11 + (x-3)^2$

$$x-2 + 4x(x+2) = 2x(3+2x)$$

$$x-2 + 4x^2 + 8x = 6x + 4x^2 \quad | - 4x^2 - 6x$$

$$3x-2 = 0 \quad | + 2; : 3$$

$$x = \frac{2}{3} \notin \mathbb{G} \Rightarrow L = \{\}$$

h) $\frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{7}{x(x+1)} \quad | \cdot x(x+1)$

$$2x+1 = 7 \quad | - 1$$

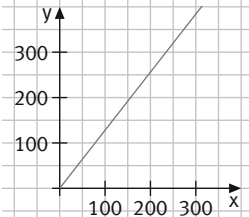
$$2x = 6 \quad | : 2$$

$$x = 3 \in \mathbb{G} \Rightarrow L = \{3\}$$

- K1/5 5 a) $T(x) = (x-1) + x + (x+1) = 3x$
Der Termwert ist für jeden Wert von $x \in \mathbb{N}$ ein Vielfaches von 3, also durch 3 teilbar.
- b) Der Termwert berechnet sich als Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen. Von diesen ist mindestens eine gerade, also durch 2 teilbar. Deshalb ist auch das Produkt durch 2 teilbar.
- c) Der Zähler ist das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen. Mindestens eine dieser Zahlen ist durch 2 und eine durch 3 teilbar. Somit ist der Zähler durch $2 \cdot 3 = 6$ teilbar und kann mit dem Nenner gekürzt werden.

K3/4 6 a)

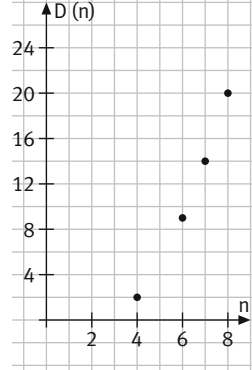
Fruchtjoghurt	
Menge	Nährwert
50 g	64 kcal
150 g	192 kcal
175 g	224 kcal
275 g	352 kcal



Direkte Proportionalität:
 $y = \frac{64}{50} \cdot x$ (x Menge in g, y Nährwert in kcal)

b)

Vieleck	Anzahl der Diagonalen
4-Eck	2
8-Eck	20
12-Eck	54
n-Eck	$\frac{n^2 - 3n}{2}$

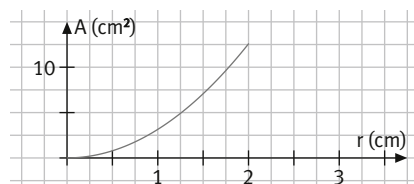


Keine direkte Proportionalität, da z. B.
 $20 = 2,5 \cdot 8$ und
 $54 = 4,5 \cdot 12$.

c)

Radius	Kreisflächeninhalt
7 cm	153,9 cm ²
10 m	314,2 m ²
6 cm	113,1 cm ²
12 cm	452,4 cm ²
2 mm	12,57 mm ²

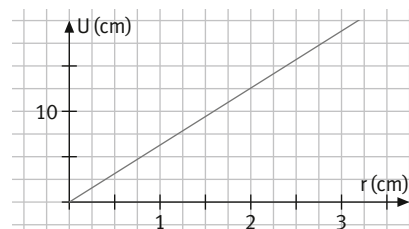
$A(r) = \pi r^2$ keine direkte Proportionalität



d)

Radius	Kreisumfang
7 cm	44,0 cm
10 m	62,8 m
65,9 dm	414 dm
12 cm	75,4 cm
100 mm	628 mm
2 mm	12,57 mm

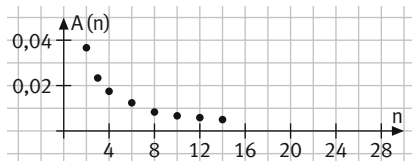
$U(r) = 2\pi r$ direkte Proportionalität



e)

Pizza: $A_{\text{pizza}} = 0,072 \text{ m}^2$	
Anzahl der gleich großen Stücke	Flächeninhalt eines Stücks
12	$0,006 \text{ m}^2$
8	$0,009 \text{ m}^2$
3	$0,024 \text{ dm}^2$
2	$0,036 \text{ m}^2$

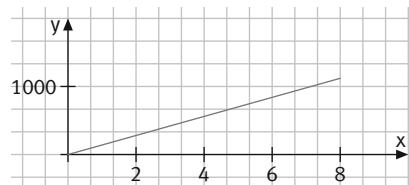
$A(n) = \frac{0,072}{n}$ (n Anzahl der Stücke, A(n) Flächeninhalt eines Stücks); indirekte Proportionalität



f)

Apfelernte	
Anzahl der Arbeiter	Äpfel in kg/h
1	140
4	560
9	1260
21	2940

$E(n) = 140n$ (Anzahl der Arbeiter, E n Erntemenge in $\frac{\text{kg}}{\text{h}}$); direkte Proportionalität mit Proportionalitätsfaktor $140 \frac{\text{kg}}{\text{h}}$.



K4/5

7 a) 1 $g_1: y = 2$ 2 Gleichung der Geraden $h_1: y = -0,5x - 2,5$

Gleichung der Geraden $g_2: y = mx + t$. Wegen $g_2 \perp h_1$ ist $m = -\frac{1}{-0,5} = 2$, also $y = 2x + t$.

Einsetzen der Koordinaten von P(1|2) in die Gleichung von g_2 ergibt $2 = 2 \cdot 1 + t$, also $t = 0$.
Damit ist $g_2: y = 2x$.

3 Gleichung der Geraden $g_3: y = mx + t$.

Steigung $m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{-3 - 2}{-4 - 1} = 1$, also $y = x + t$.

Einsetzen der Koordinaten von P(1|2) in die Gleichung von g_3 ergibt $2 = 1 + t$, also $t = 1$.
Damit ist $g_3: y = x + 1$.

4 Gleichung der Geraden $h_2: y = 3x + 1$.

Gleichung der Geraden $g_4: y = mx + t$. Da g_4 parallel zu h_2 ist, haben g_4 und h_2 dieselbe Steigung, also $m = 3$ und damit $g_4: y = 3x + t$.

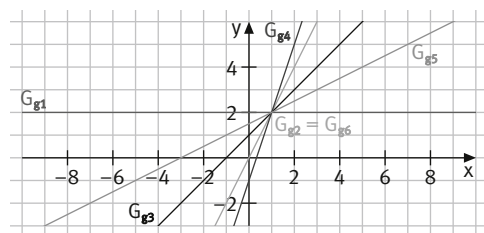
Einsetzen der Koordinaten von P(1|2) in die Gleichung von g_4 ergibt $2 = 3 \cdot 1 + t$, also $t = -1$.
Damit ist $g_4: y = 3x - 1$.

5 Gleichung der Geraden $g_5: y = mx + t$. Für $0 < m < 2$ geht die Gerade g_5 durch den I., II. und III.

Quadranten. Einsetzen der Koordinaten von P(1|2) in die Gleichung von g_5 ergibt $2 = m + t$ bzw. $t = 2 - m$. Damit ist $g_5: y = mx + (2 - m)$ mit $0 < m < 2$. Beispiel: $g_5: y = 0,5x + 1,5$

6 P liegt im I. Quadranten. g_6 muss den Ursprung O(0|0) enthalten, wenn g_6 nur durch den I. und III. Quadranten verläuft, also $g_6: y = mx$. Einsetzen der Koordinaten von P(1|2) in die Gleichung von g_6 ergibt $g_6: y = 2x$.

b)



In Teilaufgabe 5 erhält man unendlich viele Funktionsterme, da es für jeden Wert von m mit $0 < m < 2$ eine Gerade g_5 mit $g_5: y = mx + (2 - m)$ gibt, die die Bedingung erfüllt. In der Zeichnung ist die Gerade für $m = 0,5$, also $g_5: y = 0,5x + 1,5$ als Beispiel dargestellt.

K5

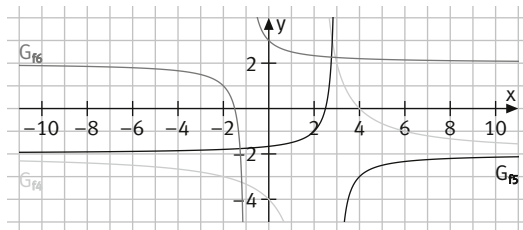
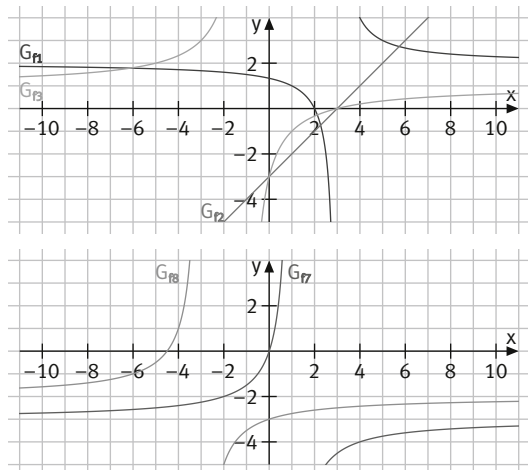
- 8 a) $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$
 b) $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$
 c) $-(2a-b)^2 = -(4a^2 - 4ab + b^2) = -4a^2 + 4ab - b^2$
 d) $(3x+y)^2 = 9x^2 + 6xy + y^2$
 e) $(0,25a^2 - y^0)^2 = (0,25a^2 - 1)^2 = 0,0625a^4 - 0,5a^2 + 1$
 f) $(0,5a^2 + b)^2 = 0,25a^4 + a^2b + b^2$
 g) $(a+c^3)(a-c^3) = a^2 - c^6$
 h) $(3v-z^2)(z^2+3v) = (3v-z^2)(3v+z^2) = 9v^2 - z^4$
 i) $(4x-y)^2 - (y-4x)^2 = (4x-y)^2 - [(-1) \cdot (4x-y)]^2 = (4x-y)^2 - (4x-y)^2 = 0$

K1/5

- 9 1 A, G 2 C, E 3 C, E, F, H 4 D
 5 A, D 6 G, H 7 B 8 D, E

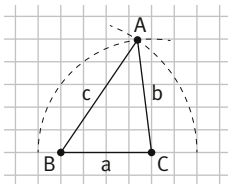
Maximale Definitionsmengen:

- 1 $D_f = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$ 2 $D_f = \mathbb{Q}$ 3 $D_f = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$
 4 $D_f = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ 5 $D_f = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$ 6 $D_f = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$
 7 $D_f = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ 8 $D_f = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$

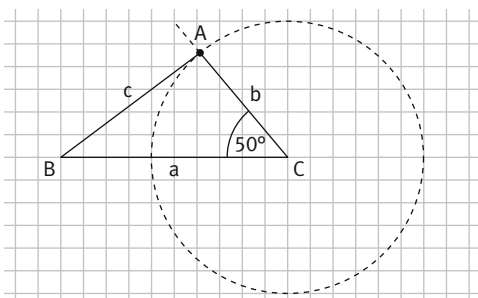


K1/4

10 a)

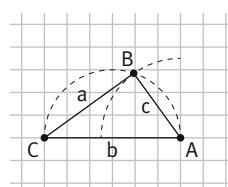


c)

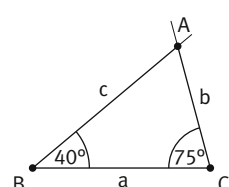


- b) Das Dreieck ist nicht konstruierbar, da die Dreiecksungleichung wegen $a + b = c$ nicht erfüllt ist.

d)



e)



- f) Das Dreieck ist aufgrund der Seiten-Winkel-Beziehung nicht konstruierbar. β ist wegen der Winkelsumme im Dreieck der größte Winkel, demnach müsste b die längste Seite sein. Es ist aber $b < a$.

K4/5

11 a) rechnerische Lösung:

I: $y = 3x + 2$

II: $x + y = -4$

I in II: $x + 3x + 2 = -4$

$4x + 2 = -4 \quad | -2$

$4x = -6 \quad | :4$

$x = -1,5$

in I: $y = 3 \cdot (-1,5) + 2 = -4,5 + 2 = -2,5$

$L = \{(-1,5 | -2,5)\}$

b) I: $x = 5y - 27$

II: $3y = \frac{1}{2}(3x - 9)$

II': $y = \frac{1}{2}(x - 3)$

I in II': $y = \frac{1}{2}(5y - 27 - 3) = \frac{1}{2}(5y - 30)$

$y = 2,5y - 15$

$-1,5y = -15 \Rightarrow y = 10$

in I: $x = 5 \cdot 10 - 27 = 23$

$L = \{(23 | 10)\}$

c) I: $x + 1,5y = -19$

II: $8x - 1,5y = 10$

I + II: $9x = -9 \Rightarrow x = -1$

in I: $-1 + 1,5y = -19$

$1,5y = -18 \Rightarrow y = -12$

$L = \{(-1 | -12)\}$

d) I: $\frac{4}{7}x - 1 = -y$

II: $2x = \frac{7}{2}(1 - y)$

$7 \cdot I: 4x - 7 = -7y$

$2 \cdot II: 4x = 7 - 7y \Rightarrow 4x - 7 = -7y$

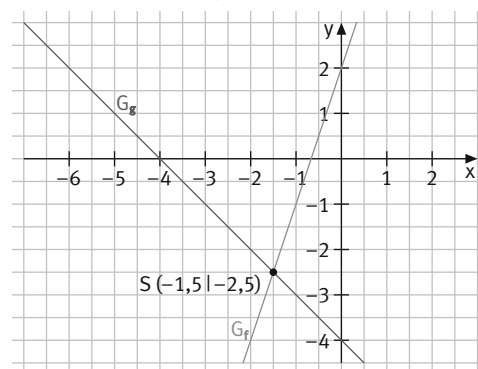
Die beiden Gleichungen sind identisch und äquivalent zu $y = -\frac{4}{7}x + 1$. Alle Paare $(x | y)$ mit $y = -\frac{4}{7}x + 1$ sind Lösungen des Gleichungssystems.

$L = \{(x | y) | y = -\frac{4}{7}x + 1\}.$

graphische Lösung:

f: $x \mapsto 3x + 2$

g: $x \mapsto -x - 4$



K2/4

12 x Anzahl der Dreier, y Anzahl der Fünfer. In der Klasse sind 28 Schülerinnen und Schüler, demnach ist $x + y = 14$ bzw. $y = 14 - x$.

Notendurchschnitt 3,25 bedeutet:

$$3,25 = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot x + 4 \cdot 7 + 5 \cdot y + 6 \cdot 0}{28} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot x + 4 \cdot 7 + 5 \cdot (14 - x) + 6 \cdot 0}{28}$$

$$\Leftrightarrow 91 = 1 + 12 + 3x + 28 + 70 - 5x \Leftrightarrow 91 = -2x + 111 \Leftrightarrow -20 = -2x \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = 4$$

Es gab zehn Dreier und vier Fünfer.

K4/6

13 a: $y = x + 2$

b: $y = 2$

c: $y = -2x$

d: $y = -x - 2$

Individuelle Beschreibung des Vorgehens. Beispiel zu a: $y = mx + t$: Lies den y-Achsenabschnitt $t = 2$ und den Schnittpunkt $N(-2 | 0)$ mit der x-Achse ab. Setze t und N in die Geradengleichung $y = mx + t$ ein und berechne m durch Lösen der Gleichung $0 = -2m + 2$. Es folgt $m = 1$.

K5/6

14 a) Bestimme m mithilfe der Formel $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$:

$$m = \frac{-3 - 1}{2 - (-2)} = -\frac{4}{4} = -1 \Rightarrow y = -x + t$$

Bestimmung von t . z.B. durch Einsetzen der Koordinaten des Punkts B in die Geradengleichung:

$$-3 = -1 \cdot 2 + t \Rightarrow t = -1; \text{ gesuchte Geradengleichung: } y = -x - 1$$

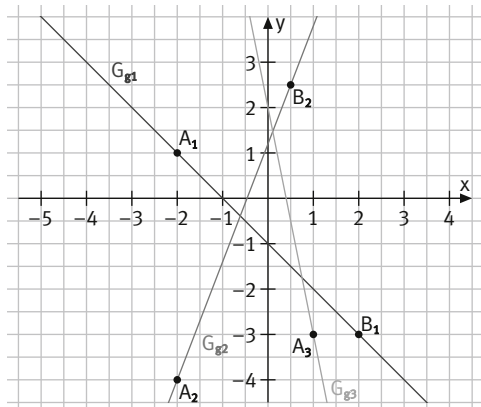
b) Bestimme m mithilfe der Formel $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$:

$$m = \frac{2,5 - (-4)}{0,5 - (-2)} = \frac{6,5}{2,5} = 2,6$$

Bestimmung von t z. B. durch Einsetzen der Koordinaten des Punkts B in die Geradengleichung:
 $2,5 = 2,6 \cdot 0,5 + t \Rightarrow t = 1,2$; gesuchte Geradengleichung: $y = 2,6x + 1,2$

c) Setze $t = 2$ in die Geradengleichung ein: $y = mx + 2$.

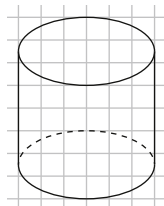
Bestimmung von m durch Einsetzen der Koordinaten des Punkts A in die Geradengleichung:
 $-3 = m \cdot 1 + 2 \Rightarrow m = -5$; gesuchte Geradengleichung: $y = -5x + 2$



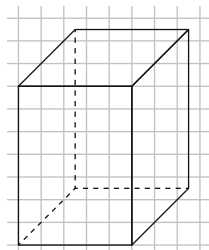
K4/5

15 a) $V = \pi r^2 h = \pi (3 \text{ cm})^2 \cdot 5 \text{ cm} = 45\pi \text{ cm}^3 \approx 141,37 \text{ cm}^3$

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi (3 \text{ cm})^2 + 2\pi \cdot 3 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 48\pi \text{ cm}^2 \approx 150,80 \text{ cm}^2$$



b) Länge einer Grundkante:



$$s = 20 \text{ cm} : 4 = 5 \text{ cm}$$

$$V = s^2 \cdot h = (5 \text{ cm})^2 \cdot 7 \text{ cm} = 175 \text{ cm}^3$$

$$O = 2 \cdot (5 \text{ cm})^2 + 4 \cdot 5 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 190 \text{ cm}^2$$

K2/4

16 a) $V = 30 \text{ cm} \cdot 35 \text{ cm} \cdot 22 \text{ cm} - 10 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} \cdot 22 \text{ cm} = 18700 \text{ cm}^3$

$$O = 2 \cdot (30 \text{ cm} \cdot 35 \text{ cm} - 10 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}) + 2 \cdot 35 \text{ cm} \cdot 22 \text{ cm} + 2 \cdot 30 \text{ cm} \cdot 22 \text{ cm} + 2 \cdot 20 \text{ cm} \cdot 22 \text{ cm} = 5440 \text{ cm}^2$$

b) $V = 40 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} \cdot 35 \text{ cm} - \pi \cdot (11 \text{ cm})^2 \cdot 35 \text{ cm} \approx 56695,36 \text{ cm}^3$

$$O = 2 \cdot (40 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} + 40 \text{ cm} \cdot 35 \text{ cm} + 50 \text{ cm} \cdot 35 \text{ cm}) - 2 \cdot \pi \cdot (11 \text{ cm})^2 + 2\pi \cdot 11 \text{ cm} \cdot 35 \text{ cm} \approx 11958,76 \text{ cm}^2$$

K1/4 17 Die Dreiecke $\triangle ABM_1$ und $\triangle ABM_2$ stimmen überein in:

- der Basis $\overline{AB}$
- den Seiten $\overline{AM_2}$ und $\overline{BM_1}$
- den Basiswinkeln α und β .

Nach dem SWS-Satz sind sie kongruent. Deshalb sind auch die Seiten $\overline{AM_1}$ und $\overline{BM_2}$ gleich lang.

K1/5 18 a) $a^3 + a^5$ kann nicht zusammengefasst werden, da die Summanden unterschiedliche Exponenten haben.

b) $2d^4 + 4d^2 = 2d^2(d^2 + 2)$

c) $b^4 \cdot b^2 = b^{4+2} = b^6$

d) $-5e^4 : 2e^2 = \frac{-5e^4}{2e^2} = -2,5e^2$

e) $z^4 + 5z^4 = 6z^4$

f) $2^4 - 2^3 = 2^3 \cdot (2 - 1) = 8$

1

Quadratwurzeln

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:

Zunächst werden die Schülerinnen und Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülerinnen und Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schülerinnen und Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K2/6

- $1,5 \text{ ha} = 150 \text{ a} = 15\,000 \text{ m}^2$

Gesucht ist diejenige Zahl, die mit sich selbst multipliziert 15 000 ergibt.

Lösungsmöglichkeit: Man kann in einem ersten Schritt das sogenannte Intervallhalbierungsverfahren durchführen; Intervallhalbierung ist ein Näherungsverfahren, das oft beim systematischen Probieren angewendet wird.

$$100^2 = 10\,000 \quad 110^2 = 12\,100 \quad 120^2 = 14\,400 \quad 130^2 = 16\,900$$

Die Zahl muss zwischen 120 und 130 liegen: $125^2 = 15\,625$

Die Zahl muss kleiner als 125, aber größer als 120 sein. $122,5^2 = 15\,006,25$

Der Wert 122,5 m ist als erste Näherung für die vorliegende Fragestellung bereits genügend genau.

Umfang des Pariser Platzes: $U = 4 \cdot 122,5 \text{ m} = 490 \text{ m}$

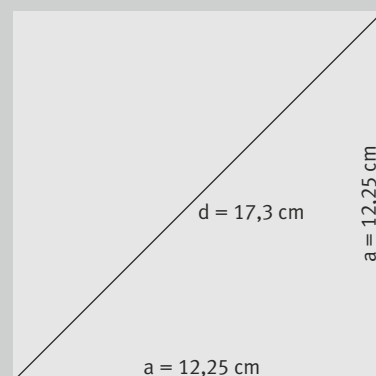
Die Streckenlänge beträgt ungefähr 490 m.

K3/4

- Für die Zeichnung bietet sich ein Maßstab 1 : 1000 an, die Seiten des Quadrats sind also 12,25 cm lang. Die Diagonale ist 17,3 cm lang, in Wirklichkeit also ungefähr 173 m.

K2/6

- Eine Schätzung kann ergeben, dass ca. ein Viertel der Fläche des Pariser Platzes durch beide Gartenanlagen bedeckt ist. Folglich haben die Gartenanlagen zusammen ungefähr eine Fläche von 3750 m^2 . Diese Fläche soll gedanklich durch ein Quadrat ersetzt werden. Man kann die Seitenlänge dieses Quadrats z. B. wieder durch Intervallhalbierung (vgl. oben) ermitteln. Eine einfachere Lösung ist aber folgende: Der Pariser Platz lässt sich in vier Quadrate mit je 3750 m^2 Flächeninhalt aufteilen. Daher hat jedes dieser Quadrate die halbe Seitenlänge des Pariser Platzes, also $122,5 \text{ m} : 2 = 61,25 \text{ m}$.



Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schülerinnen und Schüler sowie Lehrkräfte. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schülerinnen und Schüler sowie Lehrkräfte auf das Kommende einstellen. Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegsituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Kap. 1.1

Wer braucht schon einen Taschenrechner?

- K5** ■ $75 \text{ cm} \cdot 75 \text{ cm} = 5625 \text{ cm}^2$. Junas Ergebnis stimmt.
- K6** ■ Die Umkehrung des Potenzierens ist das Wurzelziehen (Radizieren).
- K2/6** ■ Juna betrachtet zunächst die Tausender- und die Hunderterstelle (hier 56). Sie sucht die nächstkleinere Quadratzahl dieser zweistelligen Zahl (hier 49). Die Zehnerziffer der gesuchten Seitenlänge ist die Zahl, die mit sich selbst multipliziert die zweistellige Zahl ergibt (hier 7). Dann wählt Juna diejenige Ziffer als Einerziffer der gesuchten Zahl, deren Quadrat auf die Einerziffer der gegebenen Zahl endet (hier 5).
- K2/5** ■ 2025: Die nächstkleinere Quadratzahl vor 20 ist 16, also ist die Zehnerziffer eine 4. Die einzige Ziffer zwischen 0 und 9, deren Quadratzahl auf 5 endet, ist die 5. Also lautet das Ergebnis 45.
3249: Die nächstkleinere Quadratzahl vor 32 ist 25, also ist die Zehnerziffer eine 5. Die einzigen Ziffern zwischen 0 und 9, deren Quadratzahl auf 9 endet, sind die 3 und die 7. Produkt der Zehnerziffer und ihres Nachfolgers: $4 \cdot 5 = 20 < 49$, also lautet das Ergebnis 57.
9604: Die nächstkleinere Quadratzahl vor 96 ist 81, also ist die Zehnerziffer eine 9. Die einzigen Ziffern zwischen 0 und 9, deren Quadratzahl auf 4 endet, sind die 2 und die 8. Produkt der Zehnerziffer und ihres Nachfolgers: $0 \cdot 1 = 0 < 4$, also lautet das Ergebnis 98.
- K2/6** ■ Um das Verfahren auf fünfstellige Zahlen anzuwenden, betrachtet man zuerst deren drei erste Stellen. 31 ist die größte natürliche Zahl, deren Quadratzahl dreistellig ist.
- K1/5** ■ 12 100 ist die Quadratzahl von 110, denn $11 \cdot 11 = 121$.
24 649: Die nächstkleinere Quadratzahl vor 246 ist $225 = 15^2$, also beginnt das Ergebnis mit 15. Die einzigen Ziffern zwischen 0 und 9, deren Quadratzahl auf 9 endet, sind die 3 und die 7. Produkt der Zehnerziffer und ihres Nachfolgers: $4 \cdot 5 = 20 < 49$, also lautet das Ergebnis 157.
41 616: Die nächstkleinere Quadratzahl von 416 ist $400 = 20^2$, also beginnt das Ergebnis mit 20. Die einzigen Ziffern zwischen 0 und 9, deren Quadratzahl auf 6 endet, sind die 4 und die 6. Produkt der Zehnerziffer und ihres Nachfolgers: $1 \cdot 2 = 2 < 16$, hiernach würde sich also 206 ergeben. Das Ergebnis lautet aber 204, die Entscheidungsmethode gilt also für fünfstellige Zahlen nicht mehr.

Kap. 1.2

Geometrie in der Kunst

- K2/4** ■ Individuelle Lösungen. Beispiel: Die Diagonalenlänge eines kleinen Quadrats entspricht ungefähr der Hälfte der Seitenlänge des großen Quadrats, also 0,5 m. Zeichnet man über einer 0,5 m langen Basis ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck, so ist die Länge eines Schenkels die gesuchte Seitenlänge des kleinen Quadrats.
- K2/4** ■ Individuelle Lösungen. Beispiel: Der Maßstab der Abbildung ist näherungsweise 1 : 18. In der Abbildung beträgt die Länge der Diagonale ungefähr 77 mm, also ist die Diagonale in Wirklichkeit näherungsweise $77 \text{ mm} \cdot 18 = 1386 \text{ mm} \approx 1,4 \text{ m}$ lang.
- K4/6** ■ Das graue Quadrat hat den doppelten Flächeninhalt des rosafarbenen Quadrats, also 2 m^2 . Die Seitenlänge d des grauen Quadrats ist also $\sqrt{2 \text{ m}^2} = \sqrt{2} \text{ m}$.
- K6** ■ $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl. Sie gehört zur Menge der reellen Zahlen. Der auf Euklid zurückgehende Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ findet sich im Schulbuch auf Seite 18 (Beweis).
- K6** ■ Individuelle Kurzpräsentationen.

Kap. 1.2

Babylonisches Wurzelziehen

- K1/6** ■ Länge l des Rechtecks: $l = x_0 - 0 = x_0$ [LE]; Breite b des Rechtecks: $b = \frac{7}{x_0} - 0 = \frac{7}{x_0}$ [LE]
 $\Rightarrow$ Flächeninhalt A des Rechtecks: $A = l \cdot b = x_0 \cdot \frac{7}{x_0} = 7$ [FE]
- K2/4** ■ Zeichnung vgl. Lehrbuch S. 13
- 1 Zeichne zunächst die Graphen der Funktionen $f: x \mapsto \frac{7}{x}$ und $g: x \mapsto x$.
 - 2 Lege den Punkt P_0 als Punkt auf dem Graphen G_f fest.
 - 3 Konstruiere das Lot l_1 auf g durch P_0 .
 - 4 Markiere die Schnittpunkte P_0' (des Lots l_1 mit dem Graphen G_g) und A (des Lots l_1 mit der Gerade g).
 - 5 Konstruiere das Lot l_2 auf die x -Achse durch A .
 - 6 Markiere den Schnittpunkt P_1 des Lots l_2 mit dem Graphen G_f .
 - 7 Wiederhole die Schritte 3 und 4 für den Punkt P_1 .
- K1/4** ■ Der Schnittpunkt S der Geraden g und des Graphen G_f ist der gesuchte Punkt. Da der Punkt S auf G_f liegt, gilt $A = 7$. Es liegt ein Quadrat mit gleich langen Seiten vor, da $y_S = g(x_S) = x_S$ gilt.
- K5** ■ $\sqrt{5}: x_0 = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{2 + \frac{5}{2}}{2} = 2,25 \Rightarrow x_2 = \frac{2,25 + \frac{5}{2,25}}{2} \approx 2,24 \approx 2,2$
 $\sqrt{11}: x_0 = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{3 + \frac{11}{3}}{2} = 3,\bar{3} \Rightarrow x_2 = \frac{3,\bar{3} + \frac{11}{3,\bar{3}}}{2} \approx 3,32 \approx 3,3$
 $\sqrt{17}: x_0 = 4 \Rightarrow x_1 = \frac{4 + \frac{17}{4}}{2} = 4,125 \Rightarrow x_2 = \frac{4,125 + \frac{17}{4,125}}{2} \approx 4,12 \approx 4,1$

Kap. 1.3

Immer Ärger mit den Hausaufgaben

- K5/6** ■ a) Das erste Zwischenergebnis ist richtig. Will man die Terme unter einer Wurzel zusammenfassen, so gilt jedoch $\sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{80}$. Der Fehler besteht also darin, dass die 4 im letzten Schritt nicht einfach unter die Wurzel gezogen werden darf.
- b) Die Wurzel wurde bereits gezogen und darf im Ergebnis nicht erneut geschrieben werden. Korrekt lautet das Ergebnis $\frac{3}{4}$.
- c) Hier wurden die Summanden multipliziert statt wie gefordert addiert. Das korrekte Ergebnis lautet $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.
- K2/6** ■ Für die Addition und Subtraktion zweier Wurzelterme gibt es im Allgemeinen keine Vereinfachung. Bei der Multiplikation bzw. Division werden zuerst die Zahlen unter den Wurzeln (Radikanden) multipliziert bzw. dividiert und dann die Wurzel gezogen. Seite 24 des Lehrbuchs stellt alle Rechenregeln übersichtlich dar.

Entdecken

K5

K2/5

- Abgeholzte Fläche pro Minute: $214\,000 \text{ m}^2 = 0,214 \text{ km}^2 = 21,4 \text{ ha}$
- Mit dem Taschenrechner findet man für die Seitenlänge des Quadrats durch Probieren 462,6 m.

Nachgefragt

K1/6

K1/6

- Zu jeder positiven Zahl a gibt es zwei verschiedene Zahlen b , so dass $a = b^2$ ist, denn b und ihre Gegenzahl $-b$ erfüllen wegen $(-b)^2 = b^2 = a$ beide die Gleichung.
- Es gibt genau zwei solche Zahlen: 0, denn $0 = \sqrt{0}$, und 1, denn $1 = \sqrt{1}$.

Aufgaben

K5

- 1 a) 11 b) $\frac{2}{3}$ c) 15 d) 1,4 e) $\frac{7}{8}$ f) 0,08 g) 32 h) 17 i) $10^4 = 10\,000$
 j) $10^{-1} = 0,1$ k) $\frac{5}{2}$ l) 3 m) $5 - 4 = 1$ n) 10 o) $6 + 8 = 14$

K2/5

- 2 a) $9^2 = 81 < 87 < 100 = 10^2$, also liegt $\sqrt{87}$ zwischen 9 und 10.
 b) $14^2 = 196 < 205 < 225 = 15^2$, also liegt $\sqrt{205}$ zwischen 14 und 15.
 c) $17^2 = 289 < 308 < 324 = 18^2$, also liegt $\sqrt{308}$ zwischen 17 und 18.
 d) $4^2 = 16 < 23,7 < 25 = 5^2$, also liegt $\sqrt{23,7}$ zwischen 4 und 5.
 e) $2\pi \approx 6,3$; $2^2 = 4 < 6,3 < 9 = 3^2$, also liegt $\sqrt{2\pi}$ zwischen 2 und 3.
 f) $18^2 = 324 < 357 < 361 = 19^2$, also liegt $\sqrt{357}$ zwischen 18 und 19.
 g) $30^2 = 900 < 915 < 961 = 31^2$, also liegt $\sqrt{915}$ zwischen 30 und 31.
 h) $2^{19} < (2^{20} - 5) < 2^{20}$, also liegt $\sqrt{2^{20} - 5}$ zwischen $2^{19} = 524\,288$ und $2^{20} = 1\,048\,576$.

K5/6

- 3 Mithilfe des ersten Ergebnisses können alle weiteren Ergebnisse jeweils durch Verschiebung des Kommas ermittelt werden.

1 $\sqrt{62\,500} = 250$	$\sqrt{0,0625} = 0,25$	$\sqrt{6,25} = 2,5$	$\sqrt{625\,000\,000} = 25\,000$
2 $\sqrt{3\,610\,000} = 1900$	$\sqrt{0,000361} = 0,019$	$\sqrt{361} = 19$	$\sqrt{36\,100} = 190$
3 $\sqrt{4,84} = 2,2$	$\sqrt{0,0484} = 0,22$	$\sqrt{484\,000\,000} = 22\,000$	$\sqrt{484} = 22$

K5

- 4 1 $\sqrt{121} = 11$ 2 $\sqrt{100} = 10$ 3 $\sqrt{144} = 12$ 4 $\sqrt{625} = 25$ oder $\sqrt{225} = 15$
 5 $\sqrt{64} = 8$ 6 $\sqrt{400} = 20$ 7 $\sqrt{256} = 16$ 8 $\sqrt{576} = 24$ oder $\sqrt{676} = 26$

K5

- 5 a) $\sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = x$, da $x \in \mathbb{Q}^+$ b) $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = -(x-3) = 3-x$, da $x < 3$
 c) $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{für } x > 3 \\ 0 & \text{für } x = 3 \\ -(x-3) & \text{für } x < 3 \end{cases}$ d) $\sqrt{(2x-4)^2} = |2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & \text{für } x > 2 \\ 0 & \text{für } x = 2 \\ -(2x-4) & \text{für } x < 2 \end{cases}$
 e) $\sqrt{(12-4x)^2} = |12-4x| = \begin{cases} -(12-4x) & \text{für } x > 3 \\ 0 & \text{für } x = 3 \\ 12-4x & \text{für } x < 3 \end{cases}$ f) $\sqrt{(x^2+1)^2} = |x^2+1| = x^2+1$,
 da $x^2+1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{Q}$
 g) $\sqrt{(-4x)^2} = \sqrt{16x^2} = 4 \cdot |x| = -4x$, da $x \in \mathbb{Q}^-$

$$\text{h) } \sqrt{x^2 - 8x + 16} = \sqrt{(x-4)^2} = |x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{für } x > 4 \\ 0 & \text{für } x = 4 \\ -(x-4) & \text{für } 0 < x < 4 \end{cases}$$

$$\text{i) } \sqrt{4x^2 + 8x + 4} = \sqrt{(2x+2)^2} = |2x+2| = \begin{cases} 2x+2 & \text{für } x > -1 \\ 0 & \text{für } x = -1 \\ -(2x+2) & \text{für } x < -1 \end{cases}$$

- K4/5** 6 Die Einheiten der Seitenlängen und Flächeninhalte wurden passend vereinheitlicht.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
A	324 cm ²	576 m ²	1225 cm ²	134,56 cm ²	16 900 m ²	49 dm ²
a	18 cm	24 m	35 cm	11,6 cm	130 m	7 dm
b	27 cm	40 m	25 cm	2,9 cm	100 m	3,5 dm
c	12 cm	14,4 m	49 cm	46,4 cm	169 m	1,4 m

- K2/5** 7 a) $6 < \sqrt{4} < 7$ 4 = 40; 41; 42; 43; 44; 45; 46; 47; 48
 b) $9 < \sqrt{2} < 10$ 2 = 82; 92
 c) $7 < \sqrt{1} < 8$ 1 = 50; 51; 52; 53; 54; 55; 56; 57; 58; 59; 60; 61; 62; 63

- K4/5** 8 a) 1 a = 1,5 m
 2 $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2 = 9,61 \text{ m}^2$; a = 3,1 m
 3 $\frac{5a+a}{2} \cdot a = 3a^2 = 108 \text{ dm}^2$; a² = 36 dm²; a = 6 dm
 4 $6a^2 = 150 \text{ cm}^2$; a² = 25 cm²; a = 5 cm
 5 $2(3a \cdot 2,5a + 3a \cdot a + 2,5a \cdot a) = 26a^2 = 6,5 \text{ m}^2$; a² = 0,25 m²; a = 0,5 m

- K2/4** b) Beispiele:
 1 A = a² = 81 cm²; a = 9 cm 2 A = a² = 529 m²; a = 23 m
 3 A = 3a² = 75 dm²; a = 5 dm 4 A = 6a² = 216 cm²; a² = 36 cm²; a = 6 cm
 5 A = 26a² = 104 m²; a² = 4 m²; a = 2 m

K4/5 9

	Alaska	Baikalsee	Belgien	China	Deutschland	Frankreich	Ukraine
Flächeninhalt in km ²	1718 000	31 700	30 700	9 597 000	357 000	643 800	603 600
Seitenlänge des Quadrats in km	1300	180	180	3100	600	800	780

- K5/6** 10 a) $\sqrt{10^6} = 1000 = 10^3$ $\sqrt{10^{-4}} = \frac{1}{100} = 10^{-2}$ $\sqrt{10^{12}} = 1\,000\,000 = 10^6$
 b) Beim Radizieren einer Potenz halbiert sich der Exponent, die Basis bleibt gleich.

- K2/6** 11 Beispiele: $\sqrt{\sqrt{1}} = 1$; $\sqrt{\sqrt{16}} = 2$; $\sqrt{\sqrt{\sqrt{6561}}} = 3$; $\sqrt{\sqrt{625}} = 5$; $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10^8}}} = 10$
 $\sqrt{\sqrt{81}} = 3$; $\sqrt{\sqrt{625}} = 5$; $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}} = 2$; $\sqrt{\sqrt{1296}} = \sqrt{\sqrt{16 \cdot 81}} = \sqrt{4 \cdot 9} = 2 \cdot 3 = 6$

Man findet solche Zahlen als Radikanden, indem man eine natürliche Zahl zweimal oder öfter quadriert.

K2/5

- 12 a) $\sqrt{2x} = 7 \Rightarrow 2x = 49 \Rightarrow x = 24,5 \in G$
 Probe: $\sqrt{2 \cdot 24,5} = \sqrt{49} = 7 \checkmark \Rightarrow L = \{7\}$
- b) $\sqrt{x-2} = 6 \Rightarrow x-2 = 36 \Rightarrow x = 38 \in G$
 Probe: $\sqrt{38-2} = \sqrt{36} = 6 \checkmark \Rightarrow L = \{38\}$
- c) $\sqrt{(x-1)^2} = 3 \Rightarrow |x-1| = 3$
 1. Fall: $x-1 = 3 \Rightarrow x_1 = 4 \in G$ Probe: $\sqrt{(4-1)^2} = 3 \checkmark$
 2. Fall: $x-1 = -3 \Rightarrow x_2 = -2 \in G$ Probe: $\sqrt{(-2-1)^2} = 3 \checkmark$
 $\Rightarrow L = \{-2; 4\}$

K2/5

- 13 Durch gezieltes Probieren findet man z. B.:

Der Term nimmt den Wert -3 z. B. für $(-5; -2)$, den Wert -1 z. B. für $(-2; 5)$, den Wert 1 z. B. für $(2; -5)$ und den Wert 3 z. B. für $(5; 2)$ an.

Allgemeine Betrachtung:

$$x \neq 0, y \neq 0 \text{ mit } x \neq y \quad T(x; y) = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y} + \frac{|x-y|}{x-y}$$

1. Fall: $x > 0, y > 0 \Rightarrow$ ① $T(x; y) = 1 + 1 + 1 = 3$ falls $x > y$
 ② $T(x; y) = 1 + 1 - 1 = 1$ falls $x < y$
2. Fall: $x < 0, y < 0 \Rightarrow$ ① $T(x; y) = -1 - 1 + 1 = -1$ falls $x > y$
 ② $T(x; y) = -1 - 1 - 1 = -3$ falls $x < y$

Damit ist gezeigt, dass der Term $T(x; y)$ jeden der vier angegebenen Werte annehmen kann.

K1/2

- 14 a) $\sqrt{29}$ kann keine natürliche Zahl sein, denn $\sqrt{25} = 5$ und $\sqrt{36} = 6$, also muss $\sqrt{29}$ zwischen 5 und 6 liegen. Es gibt aber keine natürliche Zahl zwischen 5 und 6.
 Alternative Begründung: 29 ist keine Quadratzahl.
- b) Liv nimmt 5, die größte natürliche Zahl, die kleiner als $\sqrt{29}$ ist, als Ganze. Dann nimmt sie die Differenz aus 29 und der nächstkleineren Quadratzahl 25 als Zähler des Bruchs. Als Nenner nimmt sie die doppelte Anzahl der Ganzen, also $2 \cdot 5 = 10$. Falls möglich, kürzt Liv den Bruch.
 Vergleich: TR ergibt $\sqrt{29} = 5,385\dots$; Livs Verfahren ergibt $\sqrt{29} \approx 5\frac{4}{10} = 5,4$.
- c) Beispiele:
 $\sqrt{56}$: TR ergibt $\sqrt{56} = 7,4833\dots$; Livs Verfahren ergibt $\sqrt{56} \approx 7\frac{7}{14} = 7\frac{1}{2} = 7,5$.
 $\sqrt{89}$: TR ergibt $\sqrt{89} = 9,4339\dots$; Livs Verfahren ergibt $\sqrt{89} \approx 9\frac{8}{18} = 9\frac{4}{9} = 9,4444\dots$.
 $\sqrt{40}$: TR ergibt $\sqrt{40} = 6,3245\dots$; Livs Verfahren ergibt $\sqrt{40} \approx 6\frac{4}{12} = 6\frac{1}{3} = 6,3333\dots$.

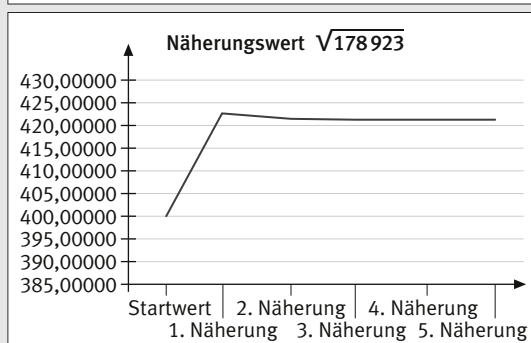
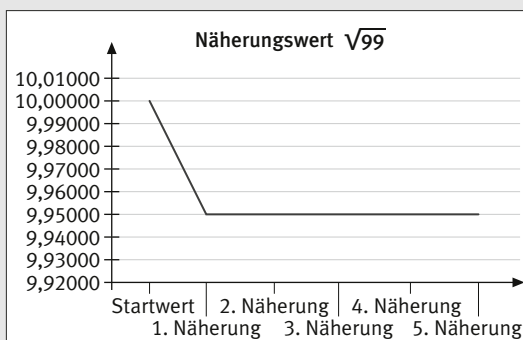
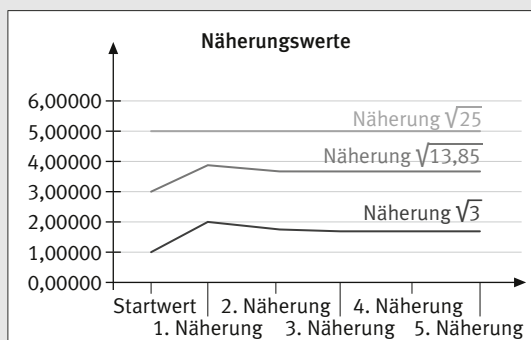
Das Heron'sche Näherungsverfahren zur Bestimmung von Quadratwurzelwerten

- K1/6** 1 Jeweils der folgende Wert a_{n+1} im Iterationsverfahren ergibt sich als arithmetisches Mittel aus den beiden Seitenlängen des vorherigen Rechtecks, nämlich a_n und $b_n = A : a_n$.
Damit werden nach Wahl eines Startwerts $a_1 > 0$ mit $a_1^2 \approx A$ nacheinander zunehmend bessere Näherungswerte $a_2 = \frac{a_1 + A : a_1}{2}$; $a_3 = \frac{a_2 + A : a_2}{2}$ usw. für $\sqrt{A}$ berechnet.

K4/5 2

Gesuchter Wert	Näherung $\sqrt{3}$	Näherung $\sqrt{25}$	Näherung $\sqrt{13,85}$
Startwert	1,00000	5,00000	3,00000
1. Näherung	2,00000	5,00000	3,80833
2. Näherung	1,75000	5,00000	3,72255
3. Näherung	1,73214	5,00000	3,72156
4. Näherung	1,73205	5,00000	3,72156
5. Näherung	1,73205	5,00000	3,72156

Gesuchter Wert	Näherung $\sqrt{99}$	Näherung $\sqrt{178923}$
Startwert	10,00000	400,00000
1. Näherung	9,95000	423,65375
2. Näherung	9,94987	422,99342
3. Näherung	9,94987	422,99291
4. Näherung	9,94987	422,99291
5. Näherung	9,94987	422,99291



- K5** 3 Mit $a_1 = 20$ als „abwegigem“ Startwert für $\sqrt{2}$ weicht zwar erst der Näherungswert a_6 um weniger als 10 % von $\sqrt{2}$ ab; auf fünf Dezimalen „steht“ jedoch die Iteration bereits ab dem Näherungswert a_8 :

$a_1 = 20$	$a_2 = 10,05$	$a_3 = 5,124502...$	$a_4 = 2,757392...$
$a_5 = 1,741357...$	$a_6 = 1,444943...$	$a_7 = 1,414540...$	$a_8 = 1,414213...$
$a_9 = 1,414213...$	$a_{10} = 1,414213...$		

Entdecken

- K6** ■ Individuelle Rechercheergebnisse.
K6 ■ Die Kreiszahl π hat unendlich viele Nachkommastellen, die keinerlei Periodizität aufweisen.

Nachgefragt

- K5** ■ Irrationale Zahlen x mit $2^2 < x < 3^2$ sind z. B. $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$.
K1/6 ■ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{b \cdot d}$ ist ebenfalls eine Bruchzahl mit ganzzahligem Zähler und Nenner, also rational.
K1/6 ■ $a > \sqrt{a}$ gilt nicht für alle $a \in \mathbb{R}_0^+$. Gegenbeispiel: $0,25 < \sqrt{0,25} = 0,5$

Aufgaben

K5 1

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	k)	l)	m)
$\mathbb{N}$								x				
$\mathbb{Z}$		x		x				x	x			
$\mathbb{Q}$	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
$\mathbb{R}$	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

	n)	o)	p)	q)	r)	s)	t)	u)	v)	w)	x)	y)	z)
$\mathbb{N}$												x	
$\mathbb{Z}$											x	x	
$\mathbb{Q}$			x			x	x	x	x	x	x	x	x
$\mathbb{R}$	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

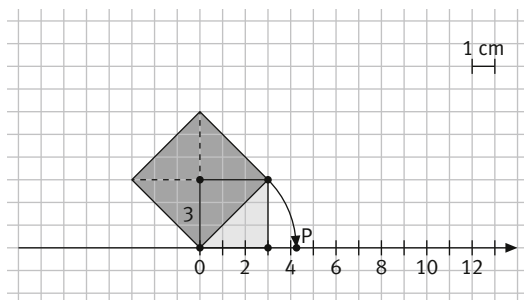
- K5** 2 a) $\sqrt{17} < 17$ b) $\sqrt{0,17} > 0,17$ c) $\frac{22}{7} > \pi$ d) $\sqrt{2} < 1,5$
 e) $\sqrt{\frac{12}{5}} > 1,5$ f) $\frac{2}{5} = \sqrt{0,16}$ g) $-\frac{1}{9} > -\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$ h) $\sqrt{\left(-\frac{25}{4}\right)^2} > 2,5$

- K1/6** 3 a) Herr Langfinger behauptet, das Juweliergeschäft nicht zu kennen. Seine DNA am Tatort scheint dazu in einem Widerspruch zu stehen. Allerdings kann auch jemand anderes Herrn Langfingers Handschuh zum Einbruch mitgenommen haben, um Herrn Langfinger dadurch zu belasten. Man muss also bei Kriminalfällen mit dieser Beweismethode vorsichtig umgehen.
 b) DNA-Beweise beruhen auf physikalisch-chemischen Untersuchungen, die z. B. Messfehler aufweisen können. Mathematische Beweise beruhen auf Voraussetzungen (z. B. Axiomen) und daraus logisch zwingend abgeleiteten Schlüssen.
- K1/6** 4 a) Beim indirekten Beweis (Widerspruchsbeweis) nimmt man zunächst das logische Gegenteil der Behauptung an und zeigt, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt. Daraus folgt, dass die ursprüngliche Behauptung wahr ist.
 b) $\sqrt{3}$ ist eine irrationale Zahl mit unendlich vielen Nachkommastellen, da 3 keine Quadratzahl ist. Der Taschenrechner gibt nur endlich viele Nachkommastellen an, deshalb kann sein Ergebnis nicht exakt sein.

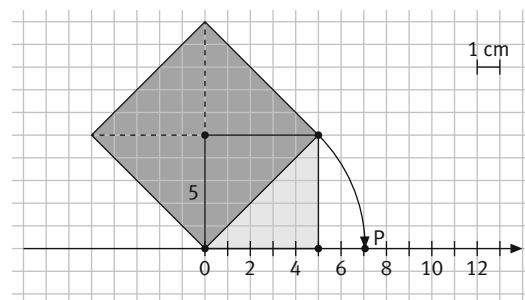
- K1/6** 5 a) Die Aussage ist wahr, denn es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.
 b) Die Aussage ist falsch, denn irrationale Zahlen (z. B. π , $\sqrt{2}$) sind zwar reelle Zahlen, aber keine rationalen Zahlen.
 c) Die Aussage ist wahr. Die reellen Zahlen liegen dicht auf der Zahlengeraden (vgl. Kasten S. 18 im Schulbuch).
 d) Die Aussage ist wahr. Zwischen zwei rationalen Zahlen liegen unendlich viele weitere rationale Zahlen.
 e) Die Aussage ist wahr. Zwischen zwei rationalen Zahlen liegen unendlich viele weitere reelle Zahlen.
 f) Die Aussage ist wahr. Beispiel: $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl, aber $(\sqrt{2})^2 = 2$ ist eine rationale Zahl.

- K4** 6 Vorgehen: siehe Beispiel II auf Seite 19 im Schulbuch.

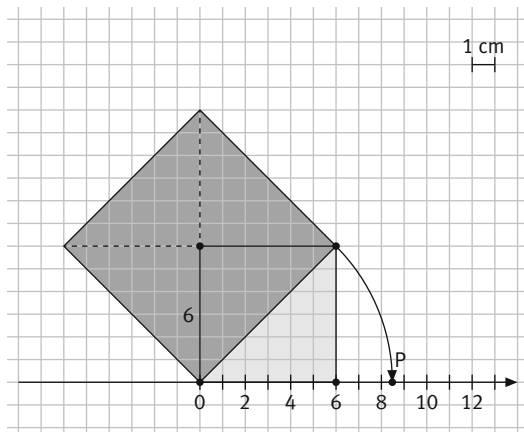
a) $x = \sqrt{18} \text{ cm} \approx 4,24 \text{ cm}$



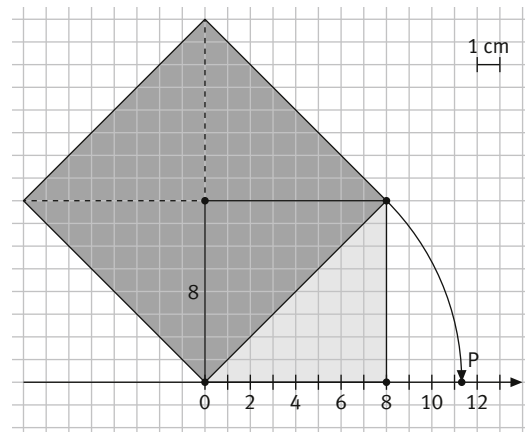
b) $x = \sqrt{50} \text{ cm} \approx 7,07 \text{ cm}$



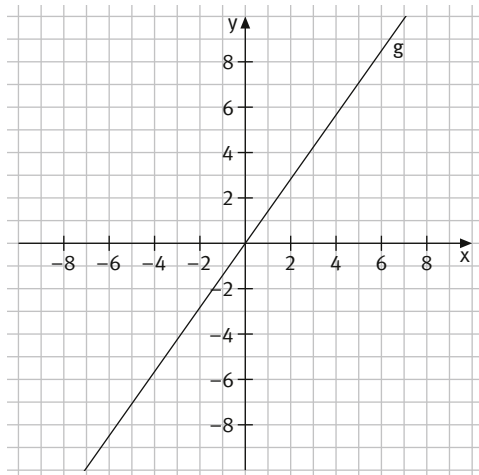
c) $x = \sqrt{72} \text{ cm} \approx 8,49 \text{ cm}$



d) $x = \sqrt{128} \text{ cm} \approx 11,31 \text{ cm}$



- K1/4** 7 a)



g verläuft durch keinen Gitterpunkt außer dem Ursprung, da alle Punkte P von g die Koordinaten $P(x | \sqrt{2} \cdot x)$ haben.

Für jede ganzzahlige x -Koordinate eines Punkts P ist die zugehörige y -Koordinate somit irrational, insbesondere also nicht ganzzahlig.

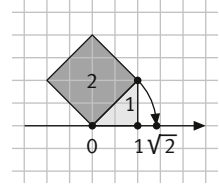
K5

b) Gerade $h: x \mapsto m_h \cdot x + t$
 $m_h = \frac{-1}{m_g} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \left(= \frac{-1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \right)$

Setze m_h und $P(\sqrt{2} | 2)$ in die Gleichung von h ein: $2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} + t \Rightarrow t = 3$. $h: x \mapsto -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot x + 3$

K1/4

- 8 Die Diagonale des Quadrats mit der Seitenlänge 1 bildet die Seite eines zweiten Quadrats, dessen Flächeninhalt doppelt so groß wie der des ersten Quadrats ist. Die neue Seitenlänge beträgt somit $\sqrt{2}$ LE.



K1/6

- 9 Die Primfaktorzerlegung einer Quadratzahl enthält von jedem vorkommenden Primfaktor eine gerade Anzahl, da $n^2 = n \cdot n$. Ist die Quadratzahl gerade, so enthält sie also eine gerade Anzahl des Faktors 2. Beim Radizieren von n^2 halbiert sich die Anzahl jedes vorkommenden Primfaktors. Deshalb bleibt beim Radizieren einer geraden Quadratzahl n^2 mindestens ein Faktor 2 übrig, also ist n gerade.

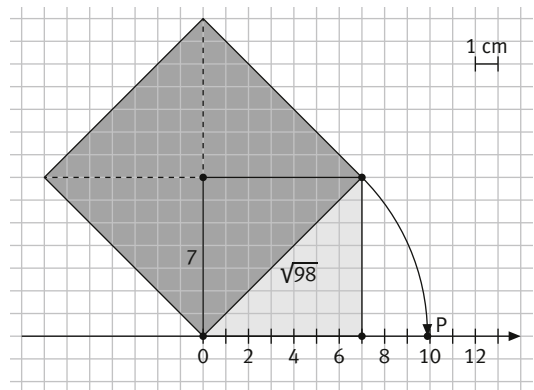
K4

10

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{8}$	3	4	$\sqrt{18}$	5	$\sqrt{32}$	6	7	$\sqrt{50}$

K1/4

- 11 Das Quadrat mit der Seitenlänge 7 hat die Diagonallänge $\sqrt{98}$. Man überträgt die Länge der Diagonale auf die Zahlengerade (siehe auch Aufgabe 8 und Beispiel II auf S. 19 im Schulbuch).



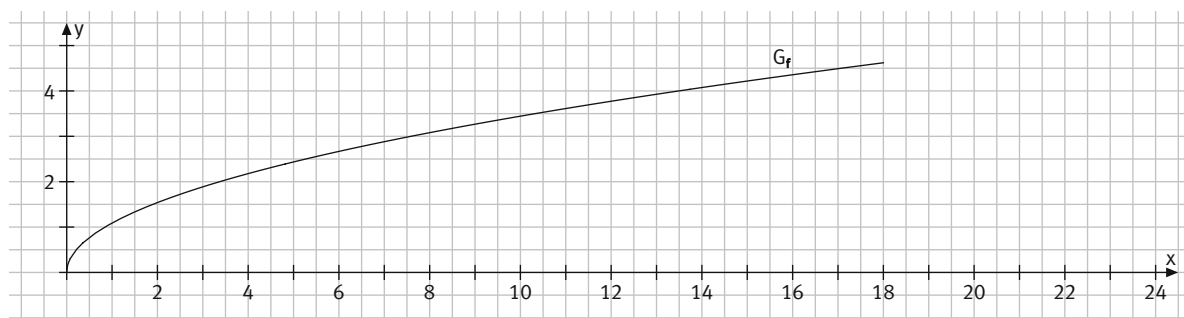
K4/5

- 12 a) $x^2 = 2 \cdot 9 = 18$; $x = \sqrt{18}$
 b) $x^2 = 2 \cdot 16 = 32$; $x = \sqrt{32}$
 c) $x^2 = (3 + 1)^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 6 = 10$; $x = \sqrt{10}$
 d) $x^2 = 24$; $x = \sqrt{24}$

K4/5

13

x	0	0,6	1,2	1,8	2,4	3
f(x)	0	0,77459667	1,09544512	1,34164079	1,54919334	1,73205081
x	3,6	4,2	4,8	5,4	6	6,6
f(x)	1,8973666	2,04939015	2,19089023	2,32379001	2,44948974	2,56904652
x	7,2	7,8	8,4	9	9,6	10,2
f(x)	2,68328157	2,79284801	2,89827535	3	3,09838668	3,19374388
x	10,8	11,4	12	12,6	13,2	13,8
f(x)	3,28633535	3,3763886	3,46410162	3,54964787	3,63318042	3,71483512
x	14,4	15	15,6	16,2	16,8	17,4
f(x)	3,79473319	3,87298335	3,94968353	4,02492236	4,09878031	4,17133072
x	18	18,6	19,2	19,8	20,4	21
f(x)	4,24264069	4,31418031	4,38383031	4,45158031	4,51743031	4,58138031



Geschichte

Irrationale Zahlen in der Geschichte der Mathematik

K5

- Taschenrechner-Wert von $\sqrt{2}$: 1,414213562

Näherung der Indier: $\frac{577}{408} \approx 1,414215686$

$$1,414213562 \cdot x = \frac{577}{408} \Rightarrow x \approx 1,00000150208891$$

Die Abweichung des indischen Wertes vom Taschenrechner-Wert beträgt 0,000150208891 %.

$$\text{Näherung der Babylonier: } 60^0 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3} = \frac{30547}{21000} = 1,41421\overline{296}$$

$$1,414213562 \cdot x = \frac{30547}{21000} \Rightarrow x \approx 0,999999576416849$$

$$1 - 0,999999576416849 = 0,000000423583151$$

Die Abweichung des babylonischen Wertes vom Taschenrechner-Wert beträgt 0,0000423583151 %.

Damit ist der babylonische Wert noch etwas genauer als der indische.

K5

$$14 \quad -\sqrt{3} < -\sqrt{2} < 2^0 < 1,4 < \frac{139}{99} < \sqrt{2} < \sqrt{5} < 3,1 < 3,1 < 3,14 < \pi < 3,15 < 2\pi - 1$$

Folgende Zahlen sind irrational: $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; π ; $2\pi - 1$.

K1/5

- 15 a) Radiziere:

$$x = \pm\sqrt{81} = \pm 9 \Rightarrow L = \{-9; 9\}$$

- c) Forme äquivalent um und radiziere:

$$2x^2 = 96 \Leftrightarrow x^2 = 48 \Rightarrow x = \pm\sqrt{48} \\ \Rightarrow L = \{-\sqrt{48}; \sqrt{48}\}$$

- e) Radiziere und forme äquivalent um:

$$x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow L = \{7\}$$

- g) Multipliziere aus, forme äquivalent um und radiziere:

$$x^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow L = \{0\}$$

- i) Forme äquivalent um:

$$\sqrt{3} - 2 = x \Rightarrow L = \{\sqrt{3} - 2\}$$

- b) Forme äquivalent um und radiziere:

$$x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm\sqrt{100} = \pm 10 \Rightarrow L = \{-10; 10\}$$

- d) Radiziere und forme äquivalent um:

$$x - 4 = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x = 4 \pm \frac{1}{2} \Rightarrow L = \{3,5; 4,5\}$$

- f) Radiziere: $x = \pm\frac{5}{3} \Rightarrow L = \{-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\}$

- h) Forme äquivalent um:

$$x^2 = -8 \quad \text{Widerspruch} \Rightarrow L = \{\}$$

K2/6

- 16 a) Die Buchstabenanzahl jedes Wortes ergibt modulo 10 genommen die Ziffer an der entsprechenden Dezimalstelle. Beispiel: Das 5. Wort „Menschenwort“ hat 12 Buchstaben, entspricht also der Ziffer 2 mod 10.

- b) Individuelle Rechercheergebnisse. Beispiele: Goldener Schnitt, Berechnungen am Kreis, periodische Vorgänge (Kreiszahl π), Wachstumsvorgänge (Euler'sche Zahl e).

K1/6

- 17 Laurin hat nicht Recht. Aus $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ folgt $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Damit wäre $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl, was nicht der Fall ist (vgl. Beweis auf Seite 18 im Schulbuch). Die Annahme, dass es zwei natürliche Zahlen p und q mit $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ gibt, ist somit falsch.

K5/6

- 18 a) $U = 2\pi \cdot r = \tau \cdot r$; $A = r^2 \cdot \pi = \frac{1}{2}\tau \cdot r^2$

- b) π ist irrational. Wäre τ rational, also in der Form $\tau = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ darstellbar, dann wäre

$$\pi = \frac{\tau}{2} = \frac{p}{2q} \text{ ebenfalls rational, was ein Widerspruch ist. } \tau \text{ ist also irrational.}$$

- c) Individuelle Antworten. Die Teilaufgabe a) zeigt, dass sich die Formel für den Kreisumfang bei Verwendung von τ vereinfacht, während die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises dadurch komplizierter wird. Insgesamt ergibt die Verwendung von τ bei diesen Beispielen somit keinen Vorteil.

- K1/6** 19 Die Wurzel aus einer Primzahl kann nicht rational sein.
Begründung: Damit eine Wurzel aus einer natürlichen Zahl n einen rationalen Wert hat, muss die Zahl n eine Quadratzahl, also in der Form $n = p \cdot p$ mit $p \in \mathbb{N} \setminus \{1; n\}$ darstellbar sein. Dann ist aber p neben 1 und n ein weiterer Teiler von n . Die Zahl n kann also keine Primzahl sein.
Also kann die Wurzel aus einer Primzahl nicht rational sein.
- K1/2** 20 a) Die Zahl 0,10100100010000100000... ist eine unendliche, nicht periodische Dezimalzahl, also irrational.
b) Beispiele: 0,20200200020000... ; 0,10200300040000500000...
c) Auch diese Dezimalzahl hat unendlich viele Nachkommastellen (die Nachkommastellen sind die natürlichen Zahlen) und ist nicht periodisch.
d) Irrationale Zahlen sind unendliche, nicht periodische Dezimalzahlen.
- K6** 21 Individuelle Lösungen. Die Euler'sche Zahl $e = 2,718281828459...$ spielt z. B. bei Wachstumsvorgängen eine wichtige Rolle.
- K1/6** 22 Individuelle Entwürfe. Es können z. B. die einzelnen Schritte des Beweises (siehe Seite 18 im Schulbuch) auf Kärtchen geschrieben werden. Diese Kärtchen müssen dann in die richtige Reihenfolge gebracht werden.

Die Intervallschachtelung**K5/6**

- 1 a) Bei der Intervallschachtelung wird eine bestimmte (gesuchte) Zahl durch immer kürzere Intervalle eingegrenzt, wobei jedes folgende Intervall im vorherigen Intervall enthalten ist.

b) $\sqrt{3} \in [1; 2]$, da $1^2 < 3 < 2^2$

$\sqrt{3} \in [1,7; 1,8]$, da $1,7^2 < 3 < 1,8^2$

$\sqrt{3} \in [1,73; 1,74]$, da $1,73^2 < 3 < 1,74^2$

$\sqrt{3} \in [1,732; 1,733]$, da $1,732^2 < 3 < 1,733^2$, also $\sqrt{3} \approx 1,73$

$\sqrt{5} \in [2; 3]$, da $2^2 < 5 < 3^2$

$\sqrt{5} \in [2,2; 2,3]$, da $2,2^2 < 5 < 2,4^2$

$\sqrt{5} \in [2,23; 2,24]$, da $2,23^2 < 5 < 2,24^2$

$\sqrt{5} \in [2,236; 2,237]$, da $2,236^2 < 5 < 2,237^2$, also $\sqrt{5} \approx 2,24$

$\sqrt{21} \in [4; 5]$, da $4^2 < 21 < 5^2$

$\sqrt{21} \in [4,5; 4,6]$, da $4,5^2 < 21 < 4,6^2$

$\sqrt{21} \in [4,58; 4,59]$, da $4,58^2 < 21 < 4,59^2$

$\sqrt{21} \in [4,582; 4,583]$, da $4,582^2 < 21 < 4,583^2$, also $\sqrt{21} \approx 4,58$

- c) Verfahren der Intervallhalbierung: Man ermittelt, in welcher Hälfte des Intervalls die gesuchte Zahl liegt, und arbeitet mit dieser Hälfte im nächsten Schritt weiter.

$\sqrt{3}$: $[1; 2]$ $[1,5; 2]$ $[1,5; 1,75]$ $[1,625; 1,75] \dots$

$\sqrt{5}$: $[2; 3]$ $[2; 2,5]$ $[2; 2,25]$ $[2,125; 2,25] \dots$

$\sqrt{21}$: $[4; 5]$ $[4,5; 5]$ $[4,5; 4,75]$ $[4,5; 4,625] \dots$

Das Verfahren der Intervallhalbierung erfordert weniger Rechenaufwand, aber die Intervallschachtelung liefert bei derselben Anzahl von Schritten ein genaueres Ergebnis.

K1/6

- 2 a) Die Intervalle bilden keine Intervallschachtelung, da ein Teil des vierten Intervalls nicht im dritten Intervall liegt.
- b) Die Intervalle bilden eine Intervallschachtelung, denn alle vier Kriterien sind erfüllt. Die Intervallschachtelung könnte z. B. für die Zahl $\sqrt{5}$ gelten.
- c) Die Intervalle bilden eine Intervallschachtelung, denn alle vier Kriterien sind erfüllt. Die Intervallschachtelung könnte z. B. für die Zahl $4\frac{81}{100}$ (oder auch für die Zahl 5) gelten.

K2/5

- 3 Die ersten fünf Schritte möglicher Intervallschachtelungen:

	1. Schritt	2. Schritt	3. Schritt	4. Schritt	5. Schritt
a)	[0,3; 0,4]	[0,33; 0,34]	[0,333; 0,334]	[0,3333; 0,3334]	[0,33333; 0,33334]
b)	[3; 4]	[3,1; 3,2]	[3,14; 3,15]	[3,141; 3,142]	[3,1415; 3,1416]
c)	[9; 10]	[9,9; 10,0]	[9,94; 9,95]	[9,949; 9,950]	[9,9498; 9,9499]

Entdecken

K1/5

- $\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{9 \cdot 4}$, denn $\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$; $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6$.
 $\sqrt{16} \cdot \sqrt{100} = \sqrt{16 \cdot 100}$, denn $\sqrt{16} \cdot \sqrt{100} = 4 \cdot 10 = 40$; $\sqrt{16 \cdot 100} = \sqrt{1600} = 40$.
 $\sqrt{81} + \sqrt{16} \neq \sqrt{81 + 16}$, denn $\sqrt{81} + \sqrt{16} = 9 + 4 = 13 \neq \sqrt{97}$.
 $\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}} = \sqrt{\frac{225}{100}}$, denn $\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = 1,5$; $\sqrt{\frac{225}{100}} = \sqrt{2,25} = 1,5$.
 $\sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$, denn $\sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}} = \frac{12}{13}$.
 $(\sqrt{9} + \sqrt{16})^2 \neq 9 + 16$, denn $(\sqrt{9} + \sqrt{16})^2 = 9 + 2\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} + 16 = 9 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 16 = 49$;
 $9 + 16 = 25$.
 $7 + \sqrt{9} \neq \sqrt{49} + 9$, denn $7 + \sqrt{9} = 7 + 3 = 10$; $\sqrt{49} + 9 = 7 + 9 = 16$.
 $\sqrt{16 - 9} \neq \sqrt{16} - \sqrt{9}$, denn $\sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$; $\sqrt{16} - \sqrt{9} = 4 - 3 = 1$.
 $\sqrt{25 - 16} \neq \sqrt{25} - \sqrt{16}$, denn $\sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$.
 ■ Gesetzmäßigkeiten: Bei Wurzeln mit Punktrechnungen ändert sich der Wert des Terms nicht, wenn man die Faktoren bzw. Dividend und Divisor unter einer Wurzel zusammenzieht.
 Bei Strichrechnungen, also Summen und Differenzen, ändert sich jedoch der Termwert.
 Beispiele: $\sqrt{64} \cdot \sqrt{36} = 8 \cdot 6 = 48$; $\sqrt{64 \cdot 36} = \sqrt{2304} = 48$ gleiches Ergebnis
 $\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$; $\sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ verschiedene Ergebnisse

K2/6

Nachgefragt

K1/6

- $\sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|$ Falls $x < 0$ ist, gilt $|x| = -x$, falls $x \geq 0$ ist, gilt $|x| = x$.

K2/5

- Der Term $T(x) = \sqrt{2x - 7}$ ist nur definiert, wenn der Radikand $2x - 7 \geq 0$ ist.
 $2x - 7 \geq 0$ für $x \geq 3,5$, also ist $D_{\max} = [3,5; +\infty]$.

Ermittlung von x_0 :

$$T(x_0) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{2x_0 - 7} = 5 \Leftrightarrow 2x_0 - 7 = 25 \Leftrightarrow x_0 = 16$$

Aufgaben

K5

- | | | | |
|-------------------|------------------|------------------|---------------------------|
| 1 a) 2 | b) $2\sqrt{2}$ | c) 4 | d) 18 |
| e) $\frac{1}{11}$ | f) $\frac{1}{7}$ | g) 0,75 | h) 72 |
| i) 0,24 | k) 1 | l) $\frac{1}{7}$ | m) 5 |
| n) 4 | o) 4 | p) 4 | q) $-\frac{7}{6}\sqrt{3}$ |
| r) 1000 | s) 3 | t) 8 | u) 49 |
| v) 15 | w) 2 | x) 8 | y) 15 |

K6

- 2 Individuell gestaltete Mindmaps.

K1/5

- 3
- | | | | | | |
|------------------|-----------------|-----------------|---------------------------|--------------------------|-----------------|
| a) $3\sqrt{2}$ | b) $2\sqrt{3}$ | c) $2\sqrt{10}$ | d) $5\sqrt{3}$ | e) $5\sqrt{5}$ | f) $10\sqrt{3}$ |
| g) $6\sqrt{2}$ | h) $7\sqrt{3}$ | i) $4\sqrt{5}$ | j) $8\sqrt{5}$ | k) $3\sqrt{11}$ | l) $10\sqrt{5}$ |
| m) $10\sqrt{10}$ | n) $15\sqrt{2}$ | o) $2\sqrt{17}$ | p) $\frac{9}{17}\sqrt{2}$ | q) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ | r) $2\sqrt{6}$ |

Die Ergebnisse des Taschenrechners sind in der Dezimaldarstellung nicht exakt, da sie nur endlich viele Nachkommastellen angeben.

K5 4 a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{50}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{147}$ f) $\sqrt{363}$ g) $\sqrt{99}$ h) $\sqrt{6}$
 i) $\sqrt{3}$ j) $\sqrt{12}$ k) $\sqrt{3}$ l) $\sqrt{3}$ m) $\sqrt{5}$ n) $\sqrt{6}$ o) $\sqrt{0,05}$ p) $\sqrt{0,8}$
 q) $\sqrt{10}$ r) $\sqrt{12,5}$ s) $\sqrt{2}$ t) $\sqrt{8}$ u) $\sqrt{32}$ v) $\sqrt{20}$ w) $\sqrt{1000}$

K2/5 5 a) $\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{25}$ b) $\sqrt{121} + \sqrt{144} = \sqrt{529}$ c) $\sqrt{9} + \sqrt{36} = \sqrt{81}$
 d) $\sqrt{18} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ e) z. B. $\sqrt{27} + 3\sqrt{3} = \sqrt{108}$ f) $\sqrt{10} + \sqrt{40} = \sqrt{90}$
 g) $\sqrt{169} - \sqrt{25} = \sqrt{64}$ h) z. B. $\sqrt{4} + \sqrt{1} = \sqrt{9}$ i) z. B. $\sqrt{9} + \sqrt{1} = \sqrt{16}$; $\sqrt{4} + \sqrt{4} = \sqrt{16}$

K5 6 a) $a\sqrt{a}$ b) $3\sqrt{a}$ c) $6\sqrt{6a}$ d) $7x\sqrt{7x}$ e) $19\sqrt{a}$
 f) $\sqrt{15a}$ g) $0,1x\sqrt{x}$ h) $2x^2\sqrt{6x}$ i) $16\sqrt{x}$ j) $4ax^2\sqrt{2ax}$
 k) Für negative Werte von a bzw. x wären die Radikanden negativ, und die Wurzeln wären damit nicht definiert.

K5/6 7 a) $-5\sqrt{2} \approx -7,07$ b) $8\sqrt{3} \approx 13,86$ c) 0 d) $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0$
 e) $5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 0$ f) $0,5\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 1,5\sqrt{2} + 1 \approx 3,12$
 g) $3\sqrt{5} + 9\sqrt{2} \approx 19,44$ h) $5\sqrt{3} + 9\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 10\sqrt{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 0,32$
 i) $15\sqrt{2} - 14\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 13\sqrt{2} - 14\sqrt{3} \approx -5,86$
 j) $24\sqrt{2} - 12\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 18\sqrt{2} = 20\sqrt{2} \approx 28,28$
 k) $3\sqrt{x}$ l) 0 m) 0 n) $|ab| = ab$ o) $|ab| = -ab$ p) $|a^2b^2| = a^2b^2$

Individuelle Erläuterungen der Rechenschritte mithilfe der Rechenregeln für Wurzelterme und des teilweisen Radizierens.

K5/6 8 a) 12 b) $10 - 2\sqrt{5}$ c) $6\sqrt{3} + 6$ d) $(3\sqrt{6})^2 = 54$ e) 1 f) $(-2\sqrt{6}) \cdot (-\sqrt{2}) = 4\sqrt{3}$
 g) $(\sqrt{12} + 4)(2 - \sqrt{3}) = (2\sqrt{3} + 4)(2 - \sqrt{3}) = 2(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2(4 - 3) = 2$
 h) $(3\sqrt{5} + 5\sqrt{3})(5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}) = 30$ i) $(3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = -3$

Individuelle Erläuterungen der Rechenschritte mithilfe der Rechenregeln für Wurzelterme und des teilweisen Radizierens.

K1/5 9 a) Dreieck ist nicht konstruierbar, da $a + b < c$ (Dreiecksungleichung nicht erfüllt).
 b) Dreieck ist konstruierbar, da $a + b > c$, $a + c > b$ und $b + c > a$ (Dreiecksungleichung erfüllt).
 $U = a + b + c = 2\sqrt{7} \text{ cm} + \sqrt{3} \text{ cm} + 5 \text{ cm} \approx 12,0 \text{ cm}$
 c) Dreieck ist konstruierbar, da $a + b > c$, $a + c > b$ und $b + c > a$ (Dreiecksungleichung erfüllt).
 $U = a + b + c = 24 \text{ cm} + 2\sqrt{5} \text{ cm} + 21 \text{ cm} \approx 49,5 \text{ cm}$
 d) Dreieck ist konstruierbar, da $a + b > c$, $a + c > b$ und $b + c > a$ (Dreiecksungleichung erfüllt).
 $U = a + b + c = 3\sqrt{5} \text{ cm} + 2\sqrt{7} \text{ cm} + \sqrt{73} \text{ cm} \approx 20,5 \text{ cm}$

K5 10 a) x b) 9x c) $0,2xy$ d) $4x^4$ e) $12yz$ f) $\frac{x^2}{z^2}$ g) $3,75x$ h) $8x^3$ i) $1,5xy$

K5 11 a) $\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})$ b) $\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)$ c) $\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)$
 d) $\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)$ e) $\sqrt{3}(x - y + z)$ f) $\sqrt{6}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$

K2/5 12 $\sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$; $\sqrt{3^2} = 3$; $(\sqrt{3^3})^2 = 27$; $\sqrt{\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3^2}} = 1$; $\sqrt{\frac{3}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\sqrt{3}}$

Ungleichungskette: $\sqrt{\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3^2}} < \sqrt{\frac{3}{\sqrt{3}}} < \sqrt{3^2} < \sqrt{3^3} < (\sqrt{3^3})^2$

Prozentsatz: $\frac{27-1}{1} = 26 = 2600\%$

Der größte Wert ist um 2600 % größer als der kleinste.

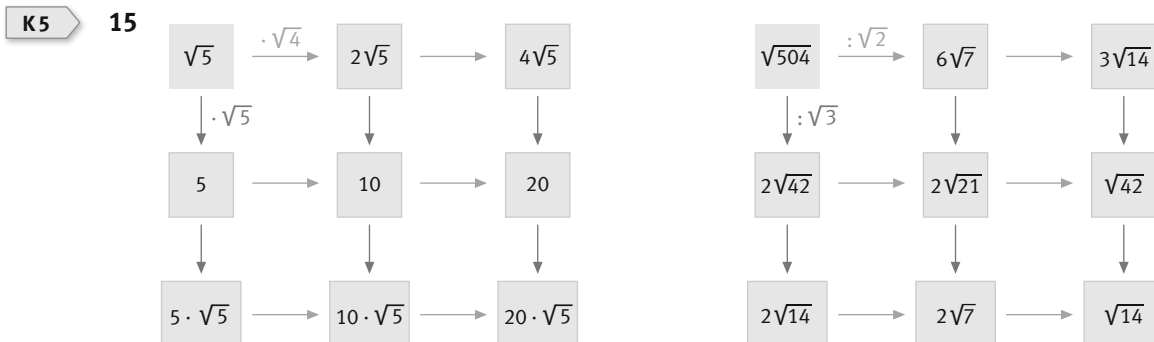
K5/6 13 $\sqrt{2\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \sqrt{4 \cdot \frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$; $3\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{9 \cdot \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{27}{8}} = \sqrt{3\frac{3}{8}}$: Alexis hat Recht.

Individuelle Erläuterungen.

Weitere Beispiele: $\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}$; $\sqrt{7\frac{7}{48}} = 7\sqrt{\frac{7}{48}}$; $\sqrt{9\frac{9}{80}} = 9\sqrt{\frac{9}{80}}$

- K2/5** 14 a) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ b) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ c) $\frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$ d) $\frac{14\sqrt{196}}{98} = \frac{14 \cdot 14}{98} = 2$
 e) $\frac{3\sqrt{6}}{2 \cdot 6} = \frac{1}{4}\sqrt{6}$ f) $\frac{4\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{1} (= \sqrt{10})$
 g) $\frac{15 \cdot \sqrt{3}}{10 \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{15 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{10 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{\sqrt{15}}{10}$ h) $\frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{1} (= 3)$
 i) $\frac{2\sqrt{15} - 3\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = -\frac{1}{1} (= -1)$ j) $\frac{4\sqrt{6} + 5\sqrt{6}}{6\sqrt{2} - 10\sqrt{2}} = -\frac{9\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = -\frac{18\sqrt{3}}{8} = -\frac{9\sqrt{3}}{4}$

Individuelle Erläuterungen mithilfe des Rationalmache des Nenners und einem vorteilhaften Einsatzes der Rechenregeln sowie dem teilweisen Radizieren. So können die Teilaufgaben d) und j) ohne Erweitern gelöst werden.



- K1/5** 16 a) richtig, denn: $\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$
 b) falsch, der Term kann nicht weiter vereinfacht werden.
 c) falsch, richtig ist: $\sqrt{\frac{5}{20}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0,5$

K4/5 17

Start	$\sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$	$\longrightarrow$	$a\sqrt{5}$	$\sqrt{27a^3} = 3a\sqrt{3a}$	$\longrightarrow$
$3a\sqrt{3a}$	$\sqrt{175a^5b^2c^3} = 5a^2bc\sqrt{7ac}$	$\longrightarrow$	$5a^2bc\sqrt{7ac}$	$\frac{\sqrt{18a^3b}}{\sqrt{27}} = a \cdot \sqrt{\frac{2ab}{3}}$	$\longrightarrow$
$a\sqrt{\frac{2ab}{3}}$	$\sqrt{21a^7 + 29a^7} = 5a^3\sqrt{2a}$	$\longrightarrow$	$5a^3\sqrt{2a}$	$\frac{\sqrt{80a^4 + a^4}}{\sqrt{2b^2}} = \frac{9a^2}{b} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\longrightarrow$
$\frac{9a^2}{b} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{3a^3 \cdot 2b^4}}{\sqrt{4a^3 \cdot 3b^4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	Ziel	

- K1/2** 18 a) $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{1}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; $5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{144}}{2\sqrt{2}} = \frac{12}{2\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$;
 $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{4}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{30}} = \sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{0}}$ nicht definiert; $3\sqrt{2}$
 Die Terme 1–4 und 7 sind äquivalent zu $\sqrt{18}$.
 b) Individuelle Lösungen möglich.

- K2/5** 19 a) $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ b) $\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{1} = \sqrt{x}$ c) $\frac{(2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x^3}} = \frac{8(\sqrt{x})^3}{(\sqrt{x})^3} = 8$ d) $\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{x+3x}} = \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{4x}} = \frac{2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{x}{1} = x$
 e) $\frac{\sqrt{10x} - \sqrt{40x}}{\sqrt{10x}} = \frac{\sqrt{10x} - 2\sqrt{10x}}{\sqrt{10x}} = \frac{-\sqrt{10x}}{\sqrt{10x}} = -\frac{1}{1} = -1$ f) $\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

- K1/6** 20 a) Der Term $T(x; y) = \sqrt{x \cdot y}$ ist auch definiert, wenn x und y beide negativ sind, da dann $x \cdot y > 0$ ist.
 b) ① 6 ② $\frac{2}{5}\sqrt{3}$ ③ 99 ④ 70

- K2/5** 21 a) $D_{1\max} = [-5; 5]$ $D_{2\max} = \mathbb{R}$
 b) ① $T_1(x)$ ist rational z. B. für $x \in \{0; 4; \sqrt{21}; 2\sqrt{6}; 5\}$
 $T_2(x)$ ist rational z. B. für $x \in \{0; \sqrt{11}; 2\sqrt{6}; \sqrt{39}; 12\}$
 ② $T_1(x)$ ist irrational z. B. für $x \in \{1; \sqrt{2}; 2; \sqrt{10}; 2\sqrt{3}\}$
 $T_2(x)$ ist irrational z. B. für $x \in \{1; \sqrt{2}; 3; 2\sqrt{5}; 10\}$

K5 22

Kreis	a)	b)	c)	d)	e)
Radius	2 cm	$\approx 0,56$ m	$\approx 2,82$ cm	$\approx 4,47$ dm	$\approx 56,4$ m
Umfang	$\approx 12,6$ cm	$\approx 3,5$ m	$\approx 17,7$ cm	$\approx 28,1$ dm	$\approx 354,5$ m
Flächeninhalt	4π cm ²	1,0 m ²	25 cm ²	62,8 dm ²	1,0 ha

- K5** 23 a) richtig, $D = [5; \infty[$. b) falsch; richtig ist: $D =]-\infty; 5]$.
 c) Der Term ist definiert für die angegebene Zahlenmenge, aber die maximale Definitionsmenge lautet: $D = \mathbb{R}$.
 d) falsch; richtig ist: $D = [10; \infty[$. e) falsch; richtig ist: $D =]0; \infty[$.
 f) richtig, $D =]-\infty; 1[$.

- K5** 24 $\sqrt{75} \text{ mm} : \sqrt{3} \text{ mm} = \sqrt{75 : 3} = \sqrt{25} = 5$
 Die Strecke der Länge $\sqrt{3}$ mm passt genau fünfmal in die Strecke der Länge $\sqrt{75}$ mm.

- K2/5** 25 a) $\sqrt{(2x+y)^2} = |2x+y|$ b) $\sqrt{\left(a + \frac{b}{2}\right)^2} = \left|a + \frac{b}{2}\right|$
 c) $\sqrt{(x^2+y^2)^2} = |x^2+y^2| = x^2+y^2$ d) $\sqrt{8(x^2-6x+9)} = \sqrt{8(x-3)^2} = 2\sqrt{2} \cdot |x-3|$

- K1/5** 26 a) $A_1 = 5 \text{ dm}^2 \Rightarrow r_1^2 \cdot \pi = 5 \text{ dm}^2 \Rightarrow r_1 \approx 1,26 \text{ dm} = 12,6 \text{ cm}$
 b) $A_2 = 3 \cdot A_1 = 15 \text{ dm}^2 \Rightarrow r_2^2 \cdot \pi = 15 \text{ dm}^2 \Rightarrow r_2 \approx 2,19 \text{ dm} = 21,9 \text{ cm}$
 prozentualer Unterschied: $\frac{r_2 - r_1}{r_1} \approx 0,4246 \approx 42,5\%$
 Der Radius des ersten Kreises ist um 42 % kleiner als der des zweiten Kreises.
 c) Aus $A_2 = 3 \cdot A_1$ folgt $r_2 = \sqrt{3} \cdot r_1$. Für den prozentualen Unterschied gilt damit:
 $\frac{r_2 - r_1}{r_1} = \frac{\sqrt{3} \cdot r_1 - r_1}{r_1} = \frac{r_1(\sqrt{3} - 1)}{r_1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} \approx 0,4246 \approx 42,5\%$
 Der prozentuale Unterschied ist somit unabhängig vom Radius konstant, wenn $A_2 = 3 \cdot A_1$ gilt.

- K2/5** 27 a) $\left(\frac{\sqrt{7}+1}{2} : \frac{3}{\sqrt{7}-1}\right)^{1000} = \left[\frac{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)}{2 \cdot 3}\right]^{1000} = \left[\frac{6}{6}\right]^{1000} = 1^{1000} = 1$
 $\left(\frac{\sqrt{18}+\sqrt{3}}{3} : \frac{5}{\sqrt{18}+\sqrt{3}}\right)^{2000} = \left[\frac{(\sqrt{18}+\sqrt{3})(\sqrt{18}-\sqrt{3})}{3 \cdot 5}\right]^{2000} = \left[\frac{18-3}{15}\right]^{2000} = \left[\frac{15}{15}\right]^{2000} = 1^{2000} = 1$
 Das Ergebnis ist in beiden Fällen gleich 1.

b) Beispiele:

① $\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} = \dots = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$
 ② $\left(\frac{\sqrt{27}-\sqrt{15}}{4} : \frac{3}{\sqrt{27}+\sqrt{15}}\right)^{2021} = \dots = 1$

- K2/6** 28 a) $\frac{2}{3-\sqrt{5x}} = \frac{2(3+\sqrt{5x})}{(3-\sqrt{5x})(3+\sqrt{5x})} = \frac{2(3+\sqrt{5x})}{3^2 - (\sqrt{5x})^2} = \frac{2(3+\sqrt{5x})}{9-5x}$
 Der Bruch wurde unter Beachtung der 3. binomischen Formel so erweitert, dass im Nenner keine Wurzel mehr vorkommt.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{-3}{-2-\sqrt{5}-\sqrt{6}} &= \frac{3}{2+\sqrt{5}-\sqrt{6}} = \frac{3(2-\sqrt{5}-\sqrt{6})}{(2+\sqrt{5}-\sqrt{6})(2-\sqrt{5}-\sqrt{6})} = \frac{3(2-\sqrt{5}-\sqrt{6})}{4-(5-\sqrt{6})} = \frac{3(2-\sqrt{5}-\sqrt{6})}{\sqrt{6}-1} \\ &= \frac{3(2-\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)} = \frac{3(2-\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{6}+1)}{(6-1)} = \frac{3(2-\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{6}+1)}{5} \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung kann der Bruch zuerst mit -1 gekürzt werden. Dann wurde der Bruch unter Beachtung der 3. binomischen Formel zweimal so erweitert, dass im Nenner keine Wurzel mehr vorkommt.

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1}{1+\sqrt{x}-\sqrt{2}} &= \frac{1-\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{x}-\sqrt{2})(1-\sqrt{x}-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{x}-\sqrt{2}}{1-(x-2)} = \frac{1-\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+(1-x)} = \frac{(1-\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-(1-x))}{(\sqrt{2}+(1-x))(\sqrt{2}-(1-x))} \\ &= \frac{(1-\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-(1-x))}{2-(1-x)^2} = \frac{(1-\sqrt{x}-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}-1)}{2-(1-2x+x^2)} = \frac{(1-\sqrt{x}-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}-1)}{-x^2+2x+1} \\ &= \frac{(1-\sqrt{x}-\sqrt{2})(1-\sqrt{2}-x)}{x^2-2x-1} \end{aligned}$$

Der Bruch wurde unter Beachtung der 3. binomischen Formel zweimal so erweitert, dass im Nenner keine Wurzel mehr vorkommt. Zur Vereinfachung wurde im letzten Schritt mit -1 gekürzt.

K1/5 29 Mikas vier Behauptungen sind alle falsch. Gegenbeispiele:

Summe:	$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$	Die Summe zweier irrationaler Zahlen kann rational sein.
Differenz:	$\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$	Die Differenz zweier irrationaler Zahlen kann rational sein.
Produkt:	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$	Das Produkt zweier irrationaler Zahlen kann rational sein.
Quotient:	$\sqrt{27} : \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$	Der Quotient zweier irrationaler Zahlen kann rational sein.

K1/5 30 $2z^2 = 5x \Rightarrow z = \sqrt{2,5x}$ ($x, z > 0$)

- a) z nimmt auf das $\sqrt{2}$ -fache zu: Wenn x zu $2x$ wird, ist $z_a = \sqrt{2,5 \cdot 2x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2,5x} = \sqrt{2} \cdot z$.
b) z nimmt auf das 2,5-fache zu: Wenn x zu $6,25x$ wird, ist $z_b = \sqrt{2,5 \cdot 6,25x} = 2,5 \cdot \sqrt{2,5x} = 2,5 \cdot z$.
c) z nimmt auf das $\sqrt{r}$ -fache zu: Wenn x zu $r \cdot x$ wird, ist $z_c = \sqrt{2,5 \cdot r \cdot x} = \sqrt{r} \cdot \sqrt{2,5x} = \sqrt{r} \cdot z$.

Erweiterung der reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen

Vertiefung

K6 ■ Für $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a = x + iy$, $b = u + iv$, $c = w + iz$ ($x, y, z, u, v, w \in \mathbb{R}$) gilt:

Kommutativgesetz: $a + b = b + a$ bzw. $(x + iy) + (u + iv) = (u + iv) + (x + iy)$.

Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c)$ bzw.

$$[(x + iy) + (u + iv)] + (w + iz) = (x + iy) + [(u + iv) + (w + iz)]$$

K5/6 ■ Multiplikation: $a \cdot b = (x + iy) \cdot (u + iv) = ux + ivx + iuy + i^2vy = ux - vy + i(vx + uy)$

Division:

$$a : b = (x + iy) : (u + iv) = \frac{x + iy}{u + iv} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{ux + vy + i(uy - vx)}{u^2 + v^2} = [ux + vy + i(uy - vx)] : (u^2 + v^2)$$

- K5** 1 a) 15 b) 1000 c) 250
d) 1,2 e) 13 f) $\frac{2}{3}$

- K2/5** 2 a) $\sqrt{25} = 5$ b) $\sqrt{10\,000} = 100$
c) $\sqrt{169} = 13$ d) $\sqrt{324} = 18$

- K2/5** 3 a) $10 \leq x \leq 22$
b) $18 \leq x \leq 26$
c) $30 < x \leq 32$

Bestimme jeweils zunächst die zu den gegebenen Zahlen nächstgelegenen Quadratzahlen im angegebenen Intervall. Radiziere und gib die gesuchten Zahlen an.

- K3/5** 4 a) Quadratische Schokoladentafeln können 16 oder 169 Stücke haben, da dies die Quadratzahlen unter den vorgeschlagenen Zahlen sind.
b) 46: 3 Stückchen ergänzen: $46 + 3 = 49$
87: 13 Stückchen ergänzen: $87 + 13 = 100$
115: 6 Stückchen ergänzen: $115 + 6 = 121$

	1	2	3	4	5	6	max. Bereich
a)	–	0	$\sqrt{0,5}$	$\sqrt{5}$	0,5	$3\sqrt{2}$	$x \in \mathbb{R}_0^+$
b)	–	–	–	$2\sqrt{2}$	–	$\sqrt{34}$	$[2; \infty[$
c)	2	0	–	–	–	–	$x \in \mathbb{R}_0^-$

- K5** 6 Beispiele:

	rationale Zahlen	irrationale Zahl
a)	2,55; 2,9	$\sqrt{6}$
b)	10,03; $10,\bar{3}$	$\sqrt{101}$

- K1/6** 7 a) Die Aussage ist wahr. Die Menge der rationalen Zahlen ist eine Teilmenge der Menge der reellen Zahlen ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$).
b) Die Aussage ist wahr. Zwischen zwei rationalen Zahlen liegen unendlich viele rationale Zahlen.

- a) 1,1 b) 9 c) 0,01
d) $\frac{4}{3}$ e) 60

- a) $\sqrt{900} = 30$ b) $\sqrt{289} = 17$
c) $\sqrt{\frac{1}{144}} = \frac{1}{12}$ d) $\sqrt{\frac{64}{1024}} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

- a) $31 \leq x \leq 36$
b) $25 < x \leq 32$
c) $110 \leq x \leq 114$

Bestimme jeweils zunächst die zu den gegebenen Zahlen nächstgelegenen Quadratzahlen im angegebenen Intervall. Radiziere und gib die gesuchten Zahlen an.

- a) 16: 4 Stücke in einer Reihe
169: 13 Stücke in einer Reihe
b) Individuelle Antworten.

	1	2	3	4	5	6	max. Bereich
a)	2	$\sqrt{2}$	1	–	$\sqrt{1,5}$	–	$] -\infty; 2]$
b)	$\sqrt{5}$	1	–	–	0	–	$] -\infty; 0,5]$
c)	–	–	–	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	–	$0,25\sqrt{2,5}$	$]4; \infty[$

- Beispiele:

	rationale Zahlen	irrationale Zahl
a)	4,177; 4,1705	$\sqrt{17,45}$
b)	5,2345; 5,23477	$\sqrt{27,4}$

- a) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiele: 0,5 und $\sqrt{2}$ sind reelle, aber nicht ganze Zahlen.
b) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiele: $(\sqrt{\sqrt{2}})^2 = \sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.
 $0^2 = 0$ ist keine positive Zahl.

K1/5 8 a) siehe Seite 17 im Schulbuch

b) Beispiel:

	Länge a	Länge b
Startwert	2	
1. Näherung	2	3,5
2. Näherung	2,75	2,545454545
3. Näherung	2,647727273	2,643776824
4. Näherung	2,645752048	2,645750574

Auf Tausendstel gerundet erhält man den Näherungswert $\sqrt{7} \approx 2,646$.

a) Annahme: $\sqrt{7}$ ist eine rationale Zahl. Dann gibt es teilerfremde Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt{7} = \frac{p}{q}$.

$$\text{Quadrieren ergibt } 7 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 7q^2 = p^2$$

p^2 ist damit durch 7 teilbar, und da 7 eine Primzahl ist, ist damit auch p durch 7 teilbar. Es gibt also eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, so dass $p = 7k$.

Einsetzen in $7q^2 = p^2$ ergibt

$$7q^2 = (7k)^2 = 49k^2 \Leftrightarrow q^2 = 7k^2.$$

Damit ist q^2 durch 7 teilbar, und da 7 eine Primzahl ist, ist somit auch q durch 7 teilbar. Sowohl p als auch q sind also durch 7 teilbar im Widerspruch dazu, dass sie teilerfremd sind. Damit ist die Annahme, dass $\sqrt{7}$ eine rationale Zahl ist, falsch. $\sqrt{7}$ ist eine irrationale Zahl.

b) Beim Heronverfahren werden nacheinander immer wieder die gleichen Rechenschritte ausgeführt. Dies kommt im Begriff „Iteration“ (von lateinisch „iterare“ für „wiederholen“) zum Ausdruck.

K1/5 9 a) Irrational b) Irrational

c) Irrational d) Rational

e) Rational f) Rational

a) Rational b) Rational

c) Irrational d) Irrational

e) Irrational f) Irrational

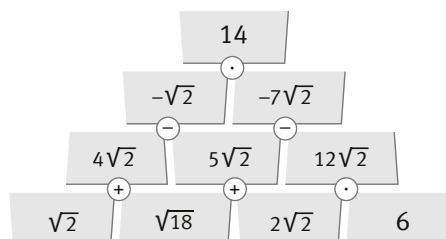
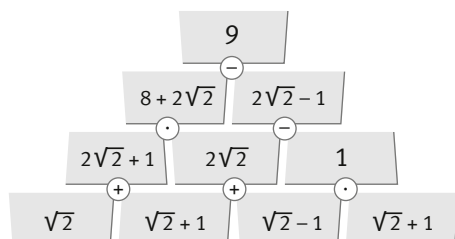
K5 10 a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10}$ b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{21}$
 c) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{4}} = \sqrt{3}$ d) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2,5} = \sqrt{20}$
 e) $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{1}} = \sqrt{30}$ f) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$

a) $\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$ b) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{48} = \sqrt{576}$
 c) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{36} = 18$ d) $\sqrt{336} : \sqrt{21} = 4$
 e) $\sqrt{121} \cdot \sqrt{0} = 0$ f) $\sqrt{169} : \sqrt{13} = \sqrt{13}$

K5 11 a) $7\sqrt{5}$ b) $-11\sqrt{b}$ c) $17\sqrt{2x}$ d) 0

a) $10\sqrt{5}$ b) 0 c) $5x\sqrt{y}$ d) $27\sqrt{x}$

K5 12



K2/5 13 a) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$

a) $\frac{2\sqrt{3}}{45}$ b) $\frac{\sqrt{10}+1}{3}$ c) $\frac{27\sqrt{2}+6\sqrt{6}}{23}$

K2/5 14 a) $\frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$; $D = \mathbb{R}^+$

a) $\frac{2\sqrt{x^2}}{\sqrt{12x+4x}} = \frac{2x}{\sqrt{16x}} = \frac{2x}{4\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2}$; $D = \mathbb{R}^+$

b) $\frac{4x}{\sqrt{2x}} = \frac{4x\sqrt{2x}}{2x} = 2\sqrt{2x}$; $D = \mathbb{R}^+$

b) $\frac{\sqrt{2x}+1}{\sqrt{2x}-1} = \frac{(\sqrt{2x}+1)(\sqrt{2x}+1)}{(\sqrt{2x}-1)(\sqrt{2x}+1)} = \frac{2x+2\sqrt{2x}+1}{2x-1}$; $D = \mathbb{R}^+ \setminus \{0,5\}$

c) $\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5}} = \frac{\sqrt{x-5} \cdot \sqrt{x+5}}{\sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x+5}} = \frac{\sqrt{x^2-25}}{x+5}$; $D =]-5; \infty[$

c) $\frac{\sqrt{8x}-\sqrt{32x}}{2\sqrt{2x}} = \frac{2\sqrt{2x}-4\sqrt{2x}}{2\sqrt{2x}} = \frac{-2\sqrt{2x}}{2\sqrt{2x}} = -1$; $D = \mathbb{R}^+$

K5

- 15 a) Da $25 < 33 < 36$ ist, gilt $5 < \sqrt{33} < 6$.
 b) Da $256 < 287 < 289$ ist, gilt $16 < \sqrt{287} < 17$.
 c) Da $1\,000\,000 < 1\,000\,007 < 1\,002\,001$ ist, gilt $1000 < \sqrt{1\,000\,007} < 1001$.
 d) $8^3 = 512$. Da $484 < 512 < 529$ ist, gilt $22 < \sqrt{8^3} < 23$.
 e) Da $324 < 326,7 < 361$ ist, gilt $18 < \sqrt{326,7} < 19$.

K3/4

16

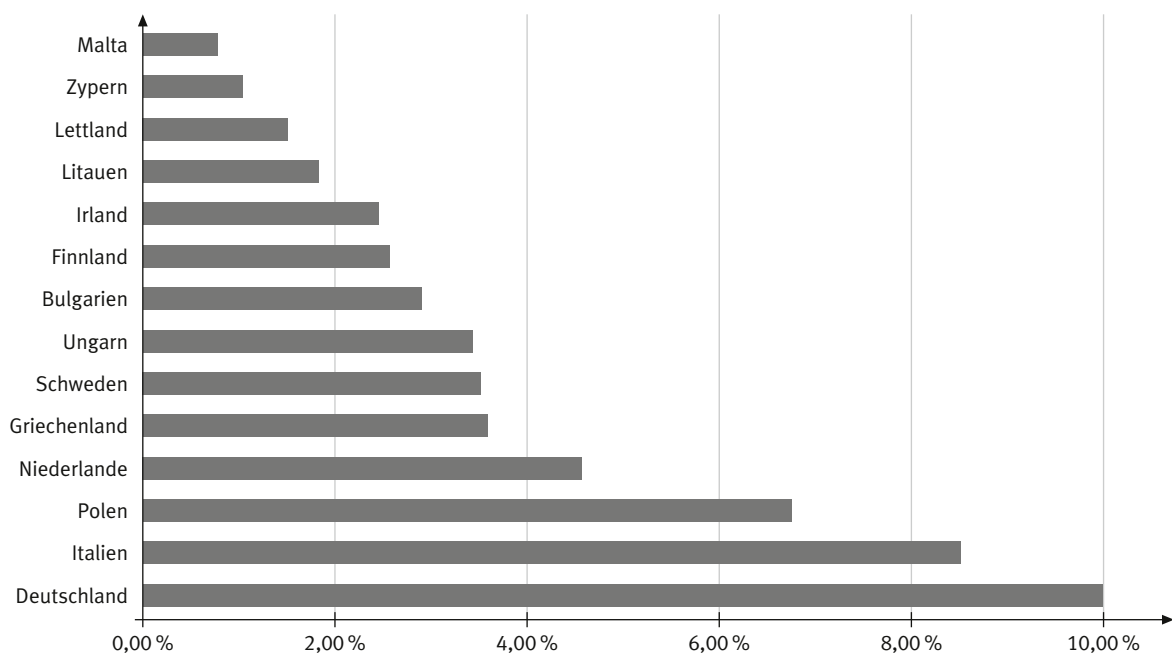
Land	Deutschland	Frankreich	Italien	Spanien	Polen	Rumänien
Bevölkerung 2020 (in Mio.)	83,1	67,2	60,3	47,3	37,9	19,3
Stimmenanzahl	9116	8198	7765	6877	6156	4393
Anteil	9,99 %	8,99 %	8,51 %	7,54 %	6,75 %	4,82 %

Land	Niederlande	Belgien	Griechenland	Tschechien	Schweden	Portugal
Bevölkerung 2020 (in Mio.)	17,4	11,5	10,7	10,7	10,3	10,3
Stimmenanzahl	4171	3391	3271	3271	3209	3209
Anteil	4,57 %	3,72 %	3,59 %	3,59 %	3,52 %	3,52 %

Land	Ungarn	Österreich	Bulgarien	Dänemark	Finnland	Slowakei
Bevölkerung 2020 (in Mio.)	9,8	8,9	7,0	5,8	5,5	5,5
Stimmenanzahl	3130	2983	2646	2408	2345	2345
Anteil	3,43 %	3,27 %	2,90 %	2,64 %	2,57 %	2,57 %

Land	Irland	Kroatien	Litauen	Slowenien	Lettland	Estland
Bevölkerung 2020 (in Mio.)	5,0	4,1	2,8	2,1	1,9	1,3
Stimmenanzahl	2236	2025	1673	1449	1378	1140
Anteil	2,45 %	2,22 %	1,83 %	1,59 %	1,51 %	1,25 %

Land	Zypern	Luxemburg	Malta
Bevölkerung 2020 (in Mio.)	0,9	0,6	0,5
Stimmenanzahl	949	775	707
Anteil	1,04 %	0,85 %	0,78 %



- c) Individuelle Einschätzungen. Für die Umsetzbarkeit des Vorschlags ist die hohe Gesamtstimmzahl (über 90 000) problematisch. Grundsätzlich erhalten bei diesem Vorschlag außerdem kleinere Staaten im Verhältnis zu ihrer Bevölkerungszahl gegenüber größeren Staaten ein höheres Stimmgewicht.

- K5/6** 17 ① 3,14285714 ② 3,14159292 ③ 3,16227766 ④ 3,14164079
 ⑤ 3,14158642 ⑥ 3,14159273 ⑦ 3,14159274 ⑧ 3,41319882
 ⑨ 3,14159265 ⑩ 3,14159259

Im Alltag genügt in der Regel die Genauigkeit des Näherungswerts ① $\frac{22}{7}$.

K2/5 18

$$\begin{array}{lcl} \sqrt{100+44} & = & 12 \\ 2^2 \cdot \sqrt{2} & = & \sqrt{32} \end{array} \quad \begin{array}{lcl} (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2} & = & \sqrt{8} \\ 2^2 & = & \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} \end{array}$$

Übrig bleibt:

$$\sqrt{100} + \sqrt{44}$$

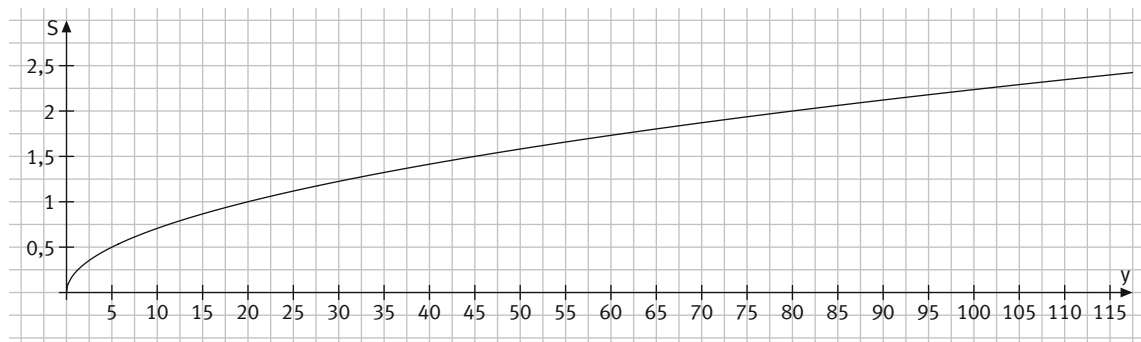
Zu $\sqrt{100} + \sqrt{44}$ äquivalenter Term: $\sqrt{100} + \sqrt{44} = 10 + 2\sqrt{11} = 2(5 + \sqrt{11})$

K3/4 19 a) Flächeninhalt der Körperoberfläche: S m²

	x	y	S
Gregor	183	65	1,8
Laura	164	55	1,6
Lucas	167	56	1,6
Sophie	168	51	1,5
Simon	144	33	1,1

- b) Für $x = 180$ ist $S = \frac{\sqrt{180y}}{60} = \frac{\sqrt{5 \cdot 36 \cdot y}}{60} = \frac{6\sqrt{5y}}{60} = \frac{\sqrt{5}}{10} \cdot \sqrt{y} \approx 0,2236 \cdot \sqrt{y}$

Darstellung der Zuordnung $y \mapsto S$:



Bei konstanter Körpergröße gilt: Mit zunehmender Masse y wird auch die Körperoberfläche S größer. Der Zusammenhang ist aber nicht linear. Je größer die Masse y ist, umso weniger wirkt sich eine weitere Massenzunahme auf die Körperoberfläche aus.

K2/5 20 Mit $\sqrt{2} \approx 1,4$; $\sqrt{3} \approx 1,7$; $\sqrt{5} \approx 2,2$; $\sqrt{6} \approx 2,4$ ergibt sich

- a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{2 \cdot 3}$
 b) $\sqrt{100} - \sqrt{50} < \sqrt{50}$, da $10 < 10\sqrt{2}$
 c) $\sqrt{45} - \sqrt{5} > \sqrt{45 : 5 + 1}$, da $3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5} = \sqrt{20} > \sqrt{9 + 1}$

- K2/6** 21 a) $\sqrt{36+36} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{36} = 6\sqrt{2}$ Passt nicht, da der Termwert irrational ist; alle anderen Termwerte sind ganze, also rationale, Zahlen.

$$(\sqrt{36} - \sqrt{12} \cdot \sqrt{3}) = 0$$

$$36\sqrt{36} = 216$$

$$\sqrt{36} + \sqrt{72} : \sqrt{2} = 6 + 6 = 12$$

$$\sqrt{36} = 6$$

b) $\sqrt{\frac{64}{4}} = 4$

$$\frac{\sqrt{64} + \sqrt{16} + \sqrt{4}}{\sqrt{64} - \sqrt{4} : 2} = \frac{8 + 4 + 2}{8 - 1} = \frac{14}{7} = 2$$

$$\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16} + \sqrt{16}} = \frac{8}{4 + 4} = 1$$

$$\frac{(\sqrt{64} - \sqrt{8} + \sqrt{4})}{\sqrt{2}} = \frac{8 - \sqrt{8} + 2}{\sqrt{2}} = \frac{10 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} - 2 = 5\sqrt{2} - 2$$

Passt nicht, da der Termwert irrational ist; alle anderen Termwerte sind ganze, also rationale, Zahlen.

$$\sqrt{128} : \sqrt{8} = \sqrt{128 : 8} = 16 = 4$$

K5 22

re	wir	sa	Das,	nen	gen	rech	Be	un
$2000\sqrt{87}$	$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{10}$	$4\sqrt{6}$	$5\sqrt{5}$	$25\sqrt{2}$	$35\sqrt{2}$	$45\sqrt{2}$	0,0025
m)	c)	g)	r)	e)	i)	k)	l)	o)

fall.	dem	Zu	nun	ver	nen	se	bei	gen,
$2\sqrt{6}$	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{3}$	$20\sqrt{5}$	$11\sqrt{3}$	$7\sqrt{2}$	$50000\sqrt{14}$	$2\sqrt{3}$	$12\sqrt{2}$
a)	p)	b)	j)	h)	d)	n)	q)	f)

Lösung: Das, bei dem unsere Berechnungen versagen, nennen wir Zufall.

- K1/5** 23 1 a) 7 b) 6 c) 9 d) 70 e) 25 f) 28 g) 1,8 h) 20 i) 12 j) 0 k) 0 l) 0
 2 Yaras Behauptung ist richtig: Als Termwert ergibt sich sofort $(1000 \cdot 0 - \sqrt{7})^2 = 7$.

- K5/6** 24 a) $\frac{\sqrt{a}}{8a}$ b) a c) $-6\sqrt{a}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{a}{b}$
 f) b g) $6a\sqrt{a}$ h) a^2 i) a^2 j) $\frac{\sqrt{2}}{5b^2}$
 k) $16b^3$ l) $8b$ m) $\frac{9}{16a}$ n) $21a\sqrt{2b}$ o) $\frac{4b}{5a}\sqrt{5}$
 Individuelle Erläuterung der Rechenschritte mithilfe der Rechenregeln des teilweisen Radizierens und Rationalmachen des Nenners.

- K1/5** 25 a) Heronverfahren: $A = 47$, Startwert $a_1 = 7$, $b_n = \frac{A}{a_n}$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$

	a_i genau	a_i gerundet	b_i genau	b_i gerundet	$a_i - b_i$
1. Schritt	7	7	$\frac{47}{7}$	6,71428	0,286
2. Schritt	$\frac{48}{7}$	6,857	$\frac{329}{48}$	6,854	0,003
3. Schritt	$\frac{4607}{672}$	6,855654762	$\frac{31584}{4607}$	6,855654439	0,0000003
4. Schritt		6,8556546		6,8556546	0,0000000

Intervallschachtelung: [6; 7]; [6,8; 6,9]; [6,85; 6,86]; [6,855; 6,856]
 Intervalllänge jeweils: 1 0,1 0,01 0,001

- b) An den Differenzen der Intervallränder erkennt man, dass das Heronverfahren sehr viel schneller zu genaueren Näherungen führt.
 c) Beim Heronverfahren ist der rechnerische Aufwand deutlich größer, man kann es aber einfacher in einem Tabellenkalkulationsprogramm umsetzen.

K2/5

26 $\sqrt{144} \cdot z + \sqrt{144 \cdot z^2} = 12z + 12 \cdot |z|$

Für $z > 0$ hat dieser Term den Wert $24z$, für $z = 0$ und für $z < 0$ ist der Termwert 0.

K5

- 27 a) $\sqrt{36x^4y^2} = 6x^2|y|$ $D_{\max} = \mathbb{R}$ für x und für y
 b) $\sqrt{(-a)^2} = |a|$ $D_{\max} = \mathbb{R}$
 c) $\sqrt{(1-2z)^2} = |1-2z|$ $D_{\max} = \mathbb{R}$
 d) $\sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$ $D_{\max} = \mathbb{R}$ für a und für b
 e) $\sqrt{a^2 + b^2}$ $D_{\max} = \mathbb{R}$ für a und für b
 f) $\sqrt{a^2 \cdot b^2} = |a| \cdot |b|$ $D_{\max} = \mathbb{R}$ für a und für b
 g) $\sqrt{(-a) \cdot b^2} = |b| \cdot \sqrt{(-a)}$ $D_{\max} = \mathbb{R}$ für b , $D_{\max} = \mathbb{R}_0^-$ für a
 h) $\sqrt{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{|x|}$ $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

K5

28 $2\sqrt{3} = \sqrt{12} < \sqrt{13}$ $2\sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{3} > \sqrt{3} + 1$ $1 < \sqrt{3} < 2$
 $\sqrt{3} - 1 < \sqrt{3} < 2\sqrt{3} - 1 < \sqrt{3} + 1 < 2\sqrt{3} < \sqrt{13}$

K1/6

- 29 a) Rechnerisch: Da $b_1 = A : a_1$ ist, darf a_1 nicht gleich null sein.
 Geometrisch: Mit Startwert null hätte das anfängliche „Rechteck“ keinen Flächeninhalt.
 b) Würde man mit einem Startwert $a_1 < 0$ beginnen, so wäre auch $b_1 < 0$, ebenso alle weiteren Näherungswerte. Da man einen Wurzelwert, also eine positive Zahl, sucht, wäre das nicht sinnvoll.

K1/5

- 30 a) $A_{\text{Grundstück}} = \frac{333,3 + 243,3}{2} \cdot 120 \text{ m}^2 = 34\,596 \text{ m}^2$
 b) $a_{\text{Quadrat}} = \sqrt{34\,596} \text{ m} = 186 \text{ m}$; $U_{\text{Quadrat}} = 4 \cdot 186 \text{ m} = 744 \text{ m}$
 $U_{\text{Trapez}} = 333,3 \text{ m} + 150 \text{ m} + 243,3 \text{ m} + 120 \text{ m} = 846,6 \text{ m}$; $U_{\text{Quadrat}} < U_{\text{Trapez}}$
 Das flächengleiche Quadrat hat eine Seitenlänge von 186 m und einen Umfang von 744 m.
 Der Umfang des Trapezes ist mit 846,6 m länger als der Umfang des Quadrats.
 c) Jassin hat Recht. Von allen flächengleichen Vierecken hat das Quadrat den kleinsten Umfang.

K1/2

- 31 Die erste Zeile ist wahr. Das folgende Radizieren ist jedoch keine Äquivalenzumformung (es gehen z. B. die Lösungen -1 und 0 dabei verloren).
 Aus der ersten Zeile folgt $|x-1| = |1-x|$. Die Gleichung besitzt (wie die Gleichung in der ersten Zeile) die Lösungsmenge $L = \mathbb{R}$.

K1/3

- 32 a) Mittelwert $d_{\text{Laura}} = (4,50 \text{ m} + 3,93 \text{ m} + 3,62 \text{ m} + 4,05 \text{ m} + 4,65 \text{ m}) : 5 = 4,15 \text{ m}$
 Mittelwert $d_{\text{Carolyn}} = (4,01 \text{ m} + 4,28 \text{ m} + 4,22 \text{ m} + 4,15 \text{ m} + 4,09 \text{ m}) : 5 = 4,15 \text{ m}$
 b) Lauras Werte:

Sprung Nummer	Weite	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung vom Mittelwert
i	x_i	$x_i - d$	$(x_i - d)^2$
1	4,50 m	0,35 m	0,1225 m ²
2	3,93 m	-0,22 m	0,0484 m ²
3	3,62 m	-0,53 m	0,2809 m ²
4	4,05 m	-0,10 m	0,01 m ²
5	4,65 m	0,50 m	0,25 m ²

Summenwert der Abweichungen vom Mittelwert:

$$0,35 \text{ m} - 0,22 \text{ m} - 0,53 \text{ m} - 0,10 \text{ m} + 0,50 \text{ m} = 0 \text{ m}$$

$$\text{Standardabweichung } \sigma_{\text{Laura}} = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot (0,1225 + 0,0484 + 0,2809 + 0,01 + 0,25)} \text{ m} \approx 0,38 \text{ m}$$

Carolins Werte:

Sprung Nummer	Weite	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung vom Mittelwert
i	x_i	$x_i - d$	$(x_i - d)^2$
1	4,01 m	-0,14 m	0,0196 m ²
2	4,28 m	0,13 m	0,0169 m ²
3	4,22 m	0,07 m	0,0049 m ²
4	4,15 m	0,00 m	0,0000 m ²
5	4,09 m	-0,06 m	0,0036 m ²

Summenwert der Abweichungen vom Mittelwert:

$$-0,14 \text{ m} + 0,13 \text{ m} + 0,07 \text{ m} + 0,00 \text{ m} - 0,06 \text{ m} = 0 \text{ m}$$

$$\text{Standardabweichung } \sigma_{\text{Carolyn}} = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot (0,0196 + 0,0169 + 0,0049 + 0,0000 + 0,0036)} \text{ m} \approx 0,09 \text{ m}$$

Beide Springerinnen haben die gleiche durchschnittliche Sprungweite 4,15 m.

Carolyn ist aber die „zuverlässigere“ Springerin; ihre Sprungweiten „streuen“ weniger als die von Laura: die Standardabweichung von Carolyn ist kleiner als die von Laura.

c) Individuelle Lösungen.

K5 1 a) $\sqrt{49} = 7$ b) $\sqrt{128} = \sqrt{2 \cdot 64} = 8\sqrt{2}$ c) $\sqrt{363} = \sqrt{3 \cdot 121} = 11\sqrt{3}$ d) $\sqrt{450} = \sqrt{2 \cdot 225} = 15\sqrt{2}$

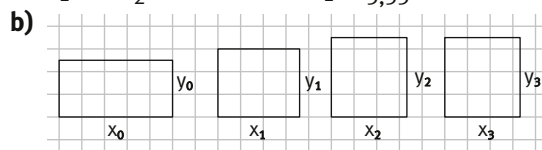
K1/5 2 a) $0,\overline{7} \in \mathbb{R}$ b) $0,\overline{7} = \frac{7}{9} \in \mathbb{Q}$ c) $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ d) $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ e) $0 \in \mathbb{Z}$ f) $\pi \notin \mathbb{Q}$

K5/6 3 a) Gesucht ist die Seitenlänge eines Quadrats mit dem Flächeninhalt $A = 11$ FE. Man wählt als Startwert z.B. $x_0 = 5$ und berechnet die zugehörige Seitenlänge $y_0 = \frac{11}{5} = 2,2$ des Rechtecks. Nun wählt man als Länge x_1 das arithmetische Mittel von x_0 und y_0 :

$$x_1 = \frac{5 + 2,2}{2} = 3,6 \Rightarrow y_1 = \frac{11}{3,6} = \frac{55}{18}$$

Das wiederholt man noch zweimal:

$$x_2 = \frac{3,6 + \frac{55}{18}}{2} \approx 3,33 \Rightarrow y_2 = \frac{11}{3,33} \approx 3,30 \Rightarrow x_3 = \frac{3,33 + 3,30}{2} \approx 3,32 \Rightarrow y_3 = \frac{11}{3,32} \approx 3,31$$



K2/5 4 a) $5^2 = 25; 6^2 = 36 \Rightarrow 5 < \sqrt{28} < 6$ b) $7^2 = 49; 8^2 = 64 \Rightarrow 7 < \sqrt{55} < 8$
c) $1^2 = 1; 1,1^2 = 1,21 \Rightarrow 1 < \sqrt{1,1} < 1,1$ d) $0,2^2 = 0,04; 0,3^2 = 0,09 \Rightarrow 0,2 < \sqrt{0,05} < 0,3$

K5 5 a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$
c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81} = 9$ d) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24} = \sqrt{6 \cdot 24} = \sqrt{144} = 12$
e) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 75} = \sqrt{225} = 15$ f) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{8 \cdot 50} = \sqrt{400} = 20$
g) $\sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ h) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{72}{50}} = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5}$
i) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{54}} = \sqrt{\frac{24}{54}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ j) $\frac{\sqrt{192}}{\sqrt{147}} = \sqrt{\frac{192}{147}} = \sqrt{\frac{64}{49}} = \frac{8}{7}$

K5 6 a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{50}$ b) $\sqrt{49} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{196}$ c) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{100}; \sqrt{30} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{150}$
d) $\sqrt{432} : \sqrt{12} = 6$ e) $\frac{\sqrt{1083}}{\sqrt{3}} = 19$ f) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{57,8} = 17$

K5 7 $\sqrt{(x-6)^2} = |x-6| = \begin{cases} x-6 & \text{für } x > 6 \\ 0 & \text{für } x = 6 \\ -x+6 & \text{für } x < 6 \end{cases}$

K5 8 a) $x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow D = [4; \infty[$
b) $-9x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow D =]-\infty; 0] = \mathbb{R}_0^-$
c) Der quadratische Term unter der Wurzel kann nicht negativ werden. Es gilt also $D = \mathbb{R}$.

K2/5 9 a) $\frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$
b) $\frac{\sqrt{360}}{\sqrt{240}} = \sqrt{\frac{360}{240}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$
c) $\frac{50}{2\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}}{2\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 25}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{25}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{9-15}{\sqrt{9+15}} = -\frac{6}{\sqrt{24}} = -\frac{6 \cdot \sqrt{24}}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{24}} = -\frac{6\sqrt{24}}{24} = -\frac{\sqrt{24}}{4} = -\frac{\sqrt{4 \cdot 6}}{4} = -\frac{2\sqrt{6}}{4} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{50+40}}{\sqrt{50-40}} = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{90}{10}} = \sqrt{9} = 3$
f) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9}-\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

- K2/5** 10 a) $4x\sqrt{y} - 2y\sqrt{x}$ b) $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{2x}} = \frac{x}{2}\sqrt{2}$
- c) $\frac{8x}{(2\sqrt{4x})^3} = \frac{8x}{2^3 \cdot (\sqrt{4x})^3} = \frac{8x}{8 \cdot 4x\sqrt{4x}} = \frac{1}{4\sqrt{4x}} = \frac{\sqrt{4x}}{4 \cdot 4x} = \frac{2\sqrt{x}}{16x} = \frac{\sqrt{x}}{8x}$
- d) $\frac{7x+7y}{\sqrt{x+y}} = \frac{7(x+y)(\sqrt{x+y})}{x+y} = 7\sqrt{x+y}$ e) $|x| + x = 2x$ f) $x - |x| = 0$
- g) $4x\sqrt{y} - 2y\sqrt{x} + 2\sqrt{xy} - y - 2x\sqrt{y} - 2y\sqrt{x} = 2x\sqrt{y} - 4y\sqrt{x} + 2\sqrt{xy} - y$

- K2/6** 11 Die Seitenlänge des schraffierten Quadrats ist die halbe Diagonalenlänge des großen Quadrats mit der Seitenlänge x (in cm). Diese Diagonalenlänge des großen Quadrats ist $x\sqrt{2}$, die Seitenlänge des schraffierten Quadrats ist demnach $\frac{1}{2}x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$. Für den Flächeninhalt des schraffierten Quadrats gilt damit: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 = 6 \Leftrightarrow \frac{2}{4}x^2 = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$
Die Seitenlänge x beträgt $2\sqrt{3}$ cm.

- K3/5** 12 a) 1 $T \approx -0,66^\circ\text{C}$
2 $T \approx -10,42^\circ\text{C}$
b) Zunächst nimmt mit steigender Geschwindigkeit die gefühlte Temperatur ab, für hohe Geschwindigkeiten ist nach der Formel eine höhere gefühlte Temperatur zu erwarten.

Aufgaben für Lernpartner

- K1/5** A Die Aussage ist falsch, da $4^2 = 16 > 13$. Die Quadratwurzel aus 13 liegt z. B. zwischen 3 und 4, da $9 < 13 < 16$.
- K1/5** B Die Aussage ist falsch. Für den Startwert 0 ist die Division $\frac{A}{x_0}$ nicht möglich. Das Heron-Verfahren kann mit jedem positiven Wert gestartet werden.
- K1/5** C Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: 2 ist rational und lässt sich in der Form $2 = \sqrt{4}$ als Wurzel schreiben.
- K1/5** D Die Aussage ist falsch, da sich $\sqrt{\pi}$ nicht als Bruch schreiben lässt und deshalb irrational ist.
- K1/5** E Die Aussage ist falsch. Beträge von reellen Zahlen sind aufgrund der Definition des Betrags nicht negativ.
- K1/5** F Die Aussage ist richtig. Mit dem Heron-Verfahren vollzieht man z. B. schrittweise diese Veränderung.
- K1/5** G Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiele: $-\pi$ und $-\sqrt{2}$ sind negativ und irrational.
- K1/5** H Die Aussage ist richtig. Die natürlichen Zahlen sind eine Teilmenge der reellen Zahlen.
- K1/5** I Die Aussage ist richtig. Eine durch 4 teilbare Zahl lässt sich als $4 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{N}$ schreiben. Damit gilt: $\sqrt{4 \cdot k} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{k} = 2\sqrt{k}$.
- K1/5** J Die Aussage ist falsch. Irrationale Zahlen sind als genau die Zahlen definiert, die sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lassen.

- K1/5** **K** Die Aussage ist falsch. Der Wert einer Quadratwurzel ist stets nicht-negativ. Damit ist jede Quadratwurzel größer als jede negative Zahl. Beispiel: $\sqrt{-(-9)} = \sqrt{9} = 3 > -9$.
- K1/5** **L** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $\sqrt{0,16} = 0,4 > 0,16$.
- K1/5** **M** Die Aussage ist richtig, da gilt: $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$.
- K1/5** **N** Die Aussage ist richtig: $\sqrt{100} : \sqrt{36} = 10 : 6 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.
- K1/5** **O** Die Aussage ist richtig, da man aus positiven Zahlen a stets die Quadratwurzel ziehen kann und diese eine Lösung ist.
- K1/5** **P** Die Aussage ist richtig, da beim Heron-Verfahren gleiche Schritte immer wieder wiederholt werden.
- K1/5** **Q** Die Aussage ist richtig: $3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = (3 + 2)\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$.
- K1/5** **R** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $(-4)^2 = 16$, aber $\sqrt{16} = 4 \neq -4$.
- K1/5** **S** Die Aussage ist richtig. Beispiel: $\sqrt{2}$ ist irrational, aber $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ ist rational.
- K1/5** **T** Die Aussage ist richtig, wenn der Taschenrechner den exakten Wert $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ angibt. Die Aussage ist falsch, wenn der Taschenrechner eine gerundete Dezimalzahl angibt, denn $\sqrt{8}$ ist eine irrationale Zahl.

