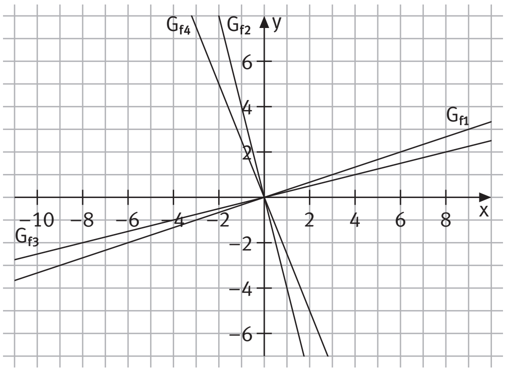
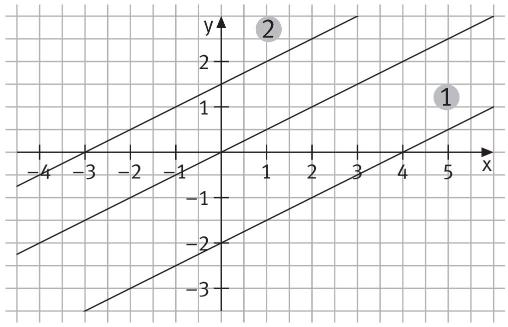
K 4/6 **1** **a)**



Alle vier Graphen verlaufen durch den Ursprung des Koordinatensystems („Ursprungsgeraden“). Der Faktor m gibt jeweils die Steigung der Geraden an.

b)



Auswirkung der Verschiebungen auf die Funktionsgleichung:

1 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 2 $y = \frac{1}{2}x + 1{,}5$

K 1/6 **2** **a)** Die Aussage ist falsch. Mögliche Begründung z. B.: Die Steigung von f ist 2, der abgebildete Graph hat aber eine negative Steigung und kann deshalb nicht der Graph der Funktion f sein.

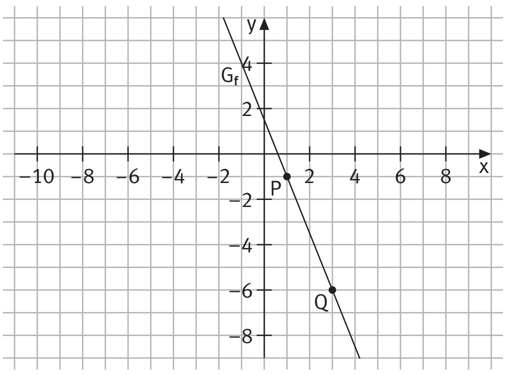
b) $f(x) = 0$: $2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$. Die Aussage ist falsch.

c) $g(x) = 2(4 - x) = 8 - 2x$. Die Steigung von G_g ist -2, und die Steigung von G_f ist 2. Die Steigungen sind nicht gleich, also sind die Geraden nicht parallel. Die Aussage ist richtig.

d) $f(0) = 4$, also schneidet der Graph die y-Achse im Punkt $(0|4)$. Die Aussage ist falsch.

e) $f(1) = 6$. Da $6 > -3$ ist, liegt der Punkt T unterhalb von G_f. Die Aussage ist falsch.

K 4/5 **3** **a)**



Funktionsgleichung $f(x) = mx + t$

Berechnung der Steigung:

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{-6 - (-1)}{3 - 1} = \frac{-5}{2} = -2{,}5$$

$f(x) = -2{,}5x + t$

Berechnung des y-Achsenabschnitts durch Einsetzen z. B. der Koordinaten von P:

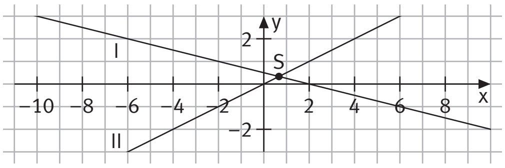
$-1 = -2{,}5 \cdot 1 + t \Rightarrow t = 1{,}5$

$f(x) = -2{,}5x + 1{,}5$

b) Schnittpunkt T mit der y-Achse:
$f(0) = 1{,}5$; $T(0|1{,}5)$

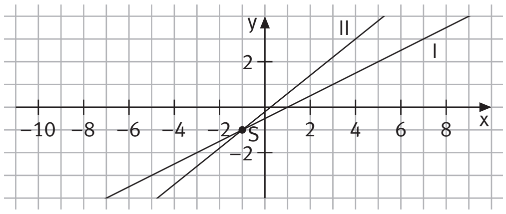
Schnittpunkt N mit der x-Achse:
$f(x) = 0$: $-2{,}5x + 1{,}5 = 0 \Rightarrow -2{,}5x = -1{,}5 \Rightarrow x = 0{,}6$; $N(0{,}6|0)$

K4/5 **4** **a)** I: $x + 4y = 2$
II: $-x + 2y = 0$
I + II: $6y = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$
$y = \frac{1}{3}$ in II eingesetzt: $x = 2y \Rightarrow x = \frac{2}{3}$
Lösungsmenge $L = \left\{\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{1}{3}\right)\right\}$
Zeichnerische Überprüfung:
I: $x + 4y = 2 \Rightarrow y = 0{,}5 - 0{,}25x$
II: $-x + 2y = 0 \Rightarrow y = 0{,}5x$



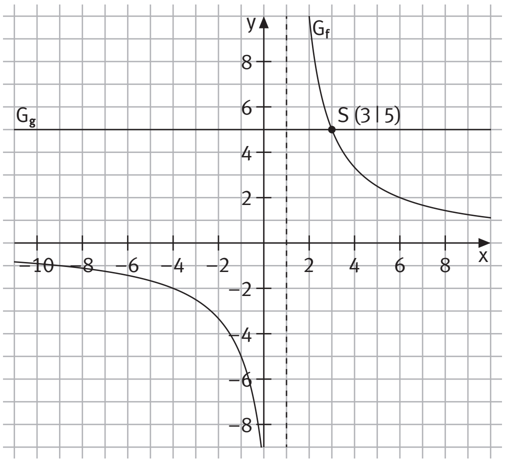
$S\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{1}{3}\right)$

b) I: $x - 1 = 2y \Rightarrow$ I': $x = 2y + 1$
II: $4x - 5y = 1$
I' in II einsetzen:
$4(2y + 1) - 5y = 1$
$8y + 4 - 5y = 1 \quad | -4$
$3y = -3 \quad | : 3$
$y = -1$
in I': $x = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$ $\qquad L = \{(-1|-1)\}$
Zeichnerische Überprüfung:
I: $x - 1 = 2y \Rightarrow y = 0{,}5x - 0{,}5$
II: $4x - 5y = 1 \Rightarrow 4x - 1 = 5y \Rightarrow y = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}$



$S(-1|-1)$

K4/5 **5** **a)** $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$; senkrechte Asymptote bei $x = 1$
b) $\frac{10}{x-1} = 5 \Rightarrow 10 = 5(x-1) \Rightarrow 10 = 5x - 5 \Rightarrow x = 3$
Da $x = 3$ in D_f liegt, ist $S(3|5)$ der Schnittpunkt von G_f und G_g.



K6 **6** Die erste binomische Formel lautet: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
Gegeben ist hier: $x^2 + 12x +$ ___ .
Durch Vergleich des zweiten Summanden folgt: $2xy = 12x \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6$
Die passende binomische Formel lautet also: $(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36$.

K2/5 **7** **a)** $(x - 4)(x + \mathbf{4}) = x^2 - 16$
b) $(x - 2)^2 = \mathbf{x^2 - 4x} + 4$
c) $(\mathbf{4x} + y)^2 = 16x^2 + \mathbf{8xy} + y^2$
d) $(5z - \mathbf{2x})^2 = \mathbf{25z^2} - 20xz + \mathbf{4x^2}$
e) $(\mathbf{x + 3})^2 = x^2 + \mathbf{6x} + 9$
f) $(\mathbf{x - 8y})^2 = x^2 - 16xy + \mathbf{64y^2}$

2 Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schülerinnen und Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülerinnen und Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schülerinnen und Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

- Individuelle Beschreibungen. Beispiele:
  Gemeinsamkeiten: gekrümmte Linien („Bögen“) mit ähnlichen Formen
  Unterschiede: drei Linien sind nach unten, eine ist nach oben geöffnet; unterschiedliche Breiten der Bögen
- Individuelle Versuche und Beschreibungen.
  Weitere Beispiele: dünner langer Zweig, Hochspannungsleitung, Hundeleine, Hüpfseil

Ausblick

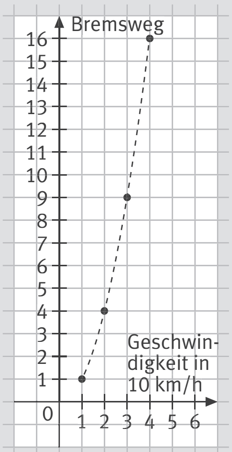
Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schülerinnen und Schüler sowie Lehrkräfte. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schülerinnen und Schüler sowie Lehrkräfte auf das Kommende einstellen. Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Kap. 2.1

Bremsweg im Straßenverkehr

K3/6
- Individuelle Schätzungen.

K3/6
- Individuelle Schätzungen.

K4/5
- 

  Möglicher Funktionsterm: Bremsweg = $\left(\frac{\text{Geschwindigkeit}}{10}\right)^2$

K6
- Individuelle Ergebnisse der Vergleiche.

K1/6
- Die Werte aus der Faustregel entsprechen der Realität nicht immer gleich gut, da Einflüsse wie Nässe, Straßenbeschaffenheit usw. unterschiedlich sind.

Kap. 2.3

Skyfall – im freien Fall auf dem Oktoberfest

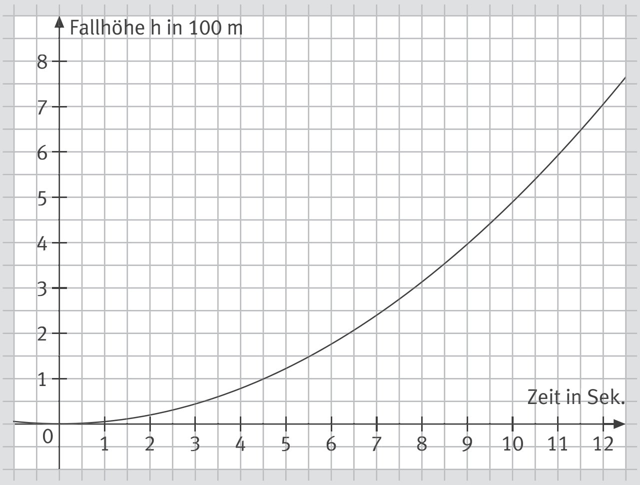
K6
- Formel für den freien Fall: $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$

  $x(t)$ ist die Fallhöhe in m in Abhängigkeit von der Zeit t in s; g ist die Erdbeschleunigung 9,81 m/s^2; t ist die Falldauer in s.

K3/5
- Der freie Fall beginnt in einer Höhe von 76 m und endet mit dem Beginn des Bremsvorgangs in einer Höhe von 30 m. Die im freien Fall zurückgelegte Strecke beträgt demnach x = 46 m.

  Berechnung der Falldauer: $t = \sqrt{\frac{2 \cdot x}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 46\text{ m}}{9{,}81\text{ m/s}^2}} \approx 3{,}1\text{ s}$

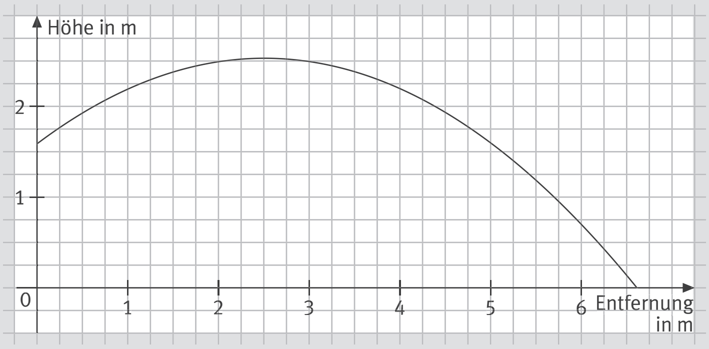
K3/5
- Falldauer vom Olympiaturm (x = 300 m): $t = \sqrt{\frac{2 \cdot x}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 300\text{ m}}{9{,}81\text{ m/s}^2}} \approx 7{,}8\text{ s}$

K4/5
- 

Kap. 2.4

Kugelstoßen

K 1/5
- $f(x) = -0{,}15x^2 + 0{,}75x + 1{,}6$
  Mit x: Entfernung in m und f(x): Höhe in m erhält man:
  $f(1) = 2{,}2$; $f(1{,}5) = 2{,}3875 \approx 2{,}39$; $f(2) = 2{,}5$.
  Die Funktionswerte stimmen mit den Messwerten in der Tabelle gut überein.

K 3/4
- 

  1 Die Kugelstoßweite ergibt sich aus dem Schnittpunkt des Graphen mit der Achse „Entfernung", da die Höhe der Kugel an dieser Stelle null ist (die Kugel berührt den Boden). Durch Ablesen aus der Zeichnung ergibt sich eine Weite von ungefähr 6,6 m.

  2 Ablesen aus der Zeichnung ergibt, dass die Kugel die Höhe von etwa 2,54 m nach etwa 2,5 m waagrechter Entfernung vom Abwurfpunkt erreicht hat.

K 1/5
- Ausmultiplizieren von Johannas Funktionsterm ergibt:
  $g(x) = -0{,}15(x - 2{,}5)^2 + 2{,}5375 = -0{,}15(x^2 - 5x + 6{,}25) + 2{,}5375 = -0{,}15x^2 + 0{,}75x + 1{,}6 = f(x)$.
  Johanna hat Recht.

Kap. 2.5

Starten auf der Rennstrecke

K 4
- Siehe Zeichnung im Schulbuch.

K 5
- Gleichung der Geraden AB: $g\colon y = mx + t$; $A(2|1)$ und $B(0|5)$
  $m = \frac{5-1}{0-2} = -2 \Rightarrow g\colon y = -2x + t$
  Einsetzen der Koordinaten von B ergibt: $5 = (-2) \cdot 0 + t \Rightarrow t = 5 \Rightarrow g\colon y = -2x + 5$.

K 5/6
- Der Punkt $A(2|1)$ liegt auf dem Graphen der Funktion f_2. Einsetzen der Koordinaten von A in die Funktionsgleichung der Funktion f_2 ergibt:
  $1 = a \cdot (2-4)^2 - 1 \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

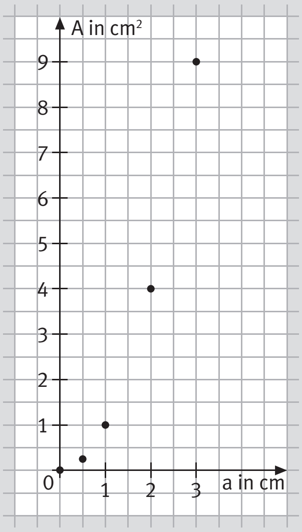
K 5
- $f_2(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(x-4)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = 2 \Rightarrow x - 4 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x_1 = 4 - \sqrt{2}$ und $x_2 = 4 + \sqrt{2}$
  Schnittpunkte von G_{f2} mit der x-Achse: $N_1(4 - \sqrt{2}|0)$ und $N_2(4 + \sqrt{2}|0)$

Alternativer Einstieg: Schulbuch Seite 40

Entdecken

K4/5

a	0 cm	0,5 cm	1 cm	2 cm	3 cm
$A = a^2$	$0\ cm^2$	$0{,}25\ cm^2$	$1\ cm^2$	$4\ cm^2$	$9\ cm^2$



K1/5

- Die Zuordnung $a \mapsto A$ ist nicht direkt proportional, weil z. B. der doppelten Seitenlänge nicht der doppelte, sondern der vierfache Flächeninhalt zugeordnet ist:
  Aus $a \mapsto A = a^2$ folgt $2a \mapsto (2a)^2 = 4a^2 = 4A$
  Allgemein: Der k-fachen Seitenlänge wird nicht der k-fache, sondern der k^2-fache Flächeninhalt zugeordnet:
  Aus $a \mapsto A = a^2$ folgt $ka \mapsto (ka)^2 = k^2a^2 = k^2A$.

Nachgefragt

K6

- f ist eine lineare Funktion, ihr Graph ist eine Gerade. g ist eine quadratische Funktion, ihr Graph ist die Normalparabel.

K5/6

- Individuelle Lösungen. Beispiele: $h: x \mapsto -3x$, $D_h = \mathbb{R}$; $k: x \mapsto x^2$, $D_k = \mathbb{R}^-$

Aufgaben

K5

1 **a)** $A(-2{,}8 \mid 7{,}84)$ $B(-1{,}4 \mid 1{,}96)$ $C\left(-\frac{1}{3} \middle| \frac{1}{9}\right)$ $D(0{,}8 \mid 0{,}64)$ $E\left(\frac{6}{5} \middle| \frac{36}{25}\right)$ $F(2{,}3 \mid 5{,}29)$

b) $A_1(10 \mid 100)$ $B_1(0{,}1 \mid 0{,}01)$ $C_1\left(\frac{8\sqrt{3}}{15} \middle| \frac{64}{75}\right)$ $D_1\left(\frac{2}{3} \middle| \frac{4}{9}\right)$ $E_1(1{,}3 \mid 1{,}69)$ $F_1(0{,}5 \mid 0{,}25)$ oder

$A_2(-10 \mid 100)$ $B_2(-0{,}1 \mid 0{,}01)$ $C_2\left(-\frac{8\sqrt{3}}{15} \middle| \frac{64}{75}\right)$ $D_2\left(-\frac{2}{3} \middle| \frac{4}{9}\right)$ $E_2(-1{,}3 \mid 1{,}69)$ $F_2(-0{,}5 \mid 0{,}25)$

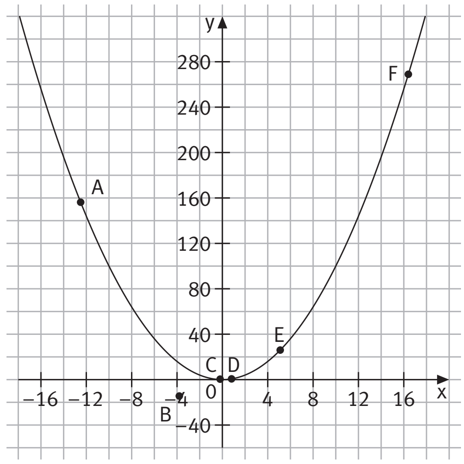
K1/5

2 **a)** Seien A', B', C' die jeweiligen Spiegelpunkte zu A, B und C. Dann gilt:
A' $(-1 \mid 1)$, B' $(4 \mid 16)$, C' $(-7 \mid 49)$

b) O besitzt keinen Spiegelpunkt bezüglich der y-Achse, denn $(0 \mid 0)$ liegt selbst auf der y-Achse (Fixpunkt).

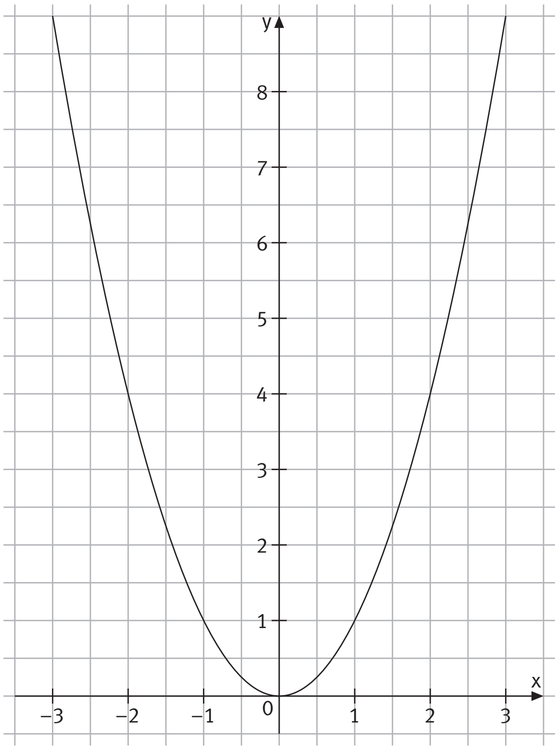
K 1/5 **3 a)**

Punkt	$f(x) = x^2$	Vergleich	Folgerung
A (–12,5 | 156,25)	$x_A^2 = 156,25$	$x_A^2 = y_A$	A auf NP
B (–3,8 | –14,44)	$x_B^2 = 14,44$	$x_B^2 > y_B$	B unterhalb der NP
C (–0,2 | 0,4)	$x_C^2 = 0,04$	$x_C^2 < y_C$	C oberhalb der NP
D (0,81 | 0,65)	$x_D^2 = 0,6561$	$x_D^2 > y_D$	D unterhalb der NP
E (5,1 | 26,01)	$x_E^2 = 26,01$	$x_E^2 = y_E$	E auf NP
F (16,4 | 268,96)	$x_F^2 = 268,96$	$x_F^2 = y_F$	F auf NP



b) Da die Punkte auf der Normalparabel keine negativen y-Koordinaten haben, muss B unterhalb der Normalparabel liegen.

K 4/6 **4 a)** Muster für eine Schablone:



b) Man muss bei der Erstellung der NP in der DGS darauf achten, auf beiden Achsen die Längeneinheit 1 cm zu verwenden und kontrollieren, ob die Maße nach dem Ausdruck stimmen.

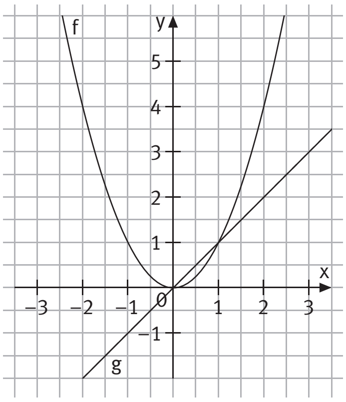
K 6 **5 a)**

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Sandra muss keine negativen x-Werte angeben, da zu x und –x wegen $x^2 = (-x)^2$ jeweils der gleiche y-Wert gehört (x^2).

b) Individuelle Lösungen. Begriffe wie z. B. Definitions- und Wertemenge, gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen, Monotonie, Verlauf in den Quadranten sollten vorkommen.

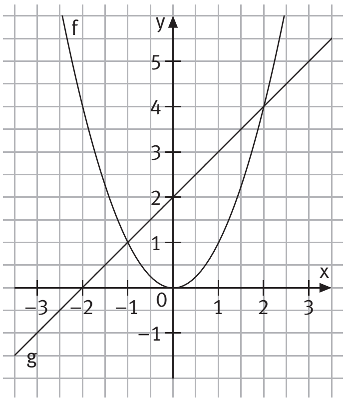
K4/5 **6** **a)** Normalparabel f: $x \mapsto x^2$ und Gerade g: $x \mapsto x$:



Die Ungleichung ist für alle x mit $0 < x < 1$ erfüllt, also für $x \in \,]0; 1[$.

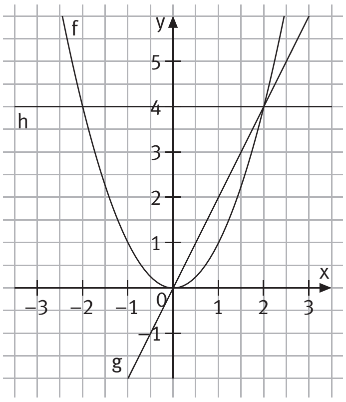
b) $x - 2 \geq x^2 - 4 \;\Leftrightarrow\; x + 2 \geq x^2$

Normalparabel f: $x \mapsto x^2$ und Gerade g: $x \mapsto x + 2$:



Die Ungleichung ist für alle x mit $-1 \leq x \leq 2$ erfüllt, also für $x \in [-1; 2]$.

c) Normalparabel f: $x \mapsto x^2$ und Geraden g_1: $x \mapsto 2x$ und g_2: $x \mapsto 4$:



Die Ungleichung ist für alle x mit $-2 < x < 0$ erfüllt, also für $x \in \,]-2; 0[$.

Entdecken

K2/4
- blauer Graph: $y = x^2 - 3$; grüner Graph: $y = (x-3)^2$

K6
- Beispiele für Beobachtungen:
  Wenn $d > 0$ ist, wird die NP in positive x-Richtung verschoben, wenn $d < 0$ ist, in negative x-Richtung.
  Wenn $e > 0$ ist, wird die NP in positive y-Richtung verschoben, wenn $e < 0$ ist, in negative y-Richtung.

Nachgefragt

K1/6
- Lucia hat nicht Recht: Für $e < 0$ hat die Funktion mit $f(x) = x^2 + e$ zwei Nullstellen $(\pm\sqrt{e})$, da der Graph von f in diesem Fall die um $|e|$ LE in negative y-Richtung verschobene Normalparabel ist.

K1/6
- Gabriel hat Recht, wenn $0 \in D$ ist: Der Parabelpunkt $P(0\,|\,f(0))$ liegt auf der y-Achse.

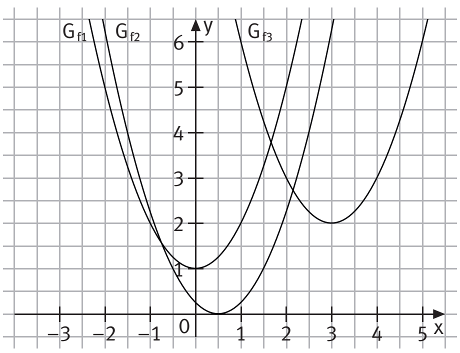
Aufgaben

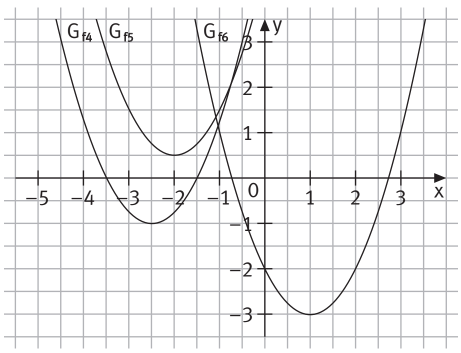
K1/6 **1** Ablesen der Scheitelpunkte der Funktionsgraphen an den Funktionstermen ergibt:
Der Graph von f_1 hat den Scheitelpunkt $S_1(1{,}5\,|\,0)$ $\Rightarrow$ roter Graph.
Der Graph von f_2 hat den Scheitelpunkt $S_2(0\,|\,1{,}5)$ $\Rightarrow$ blauer Graph.
Der Graph von f_3 hat den Scheitelpunkt $S_3(-1{,}5\,|\,-1{,}5)$ $\Rightarrow$ grüner Graph.
Der Graph von f_4 hat den Scheitelpunkt $S_4(1{,}5\,|\,1{,}5)$ $\Rightarrow$ violetter Graph.

K5/6 **2** S: Scheitelpunkt; T: Schnittpunkt mit der y-Achse

a) $S_1(0\,|\,-7)$; $T_1(0\,|\,-7)$ **b)** $S_2(2\,|\,3)$; $T_2(0\,|\,7)$ **c)** $S_3(-4\,|\,0)$; $T_3(0\,|\,16)$
d) $S_4(-6{,}5\,|\,-1)$; $T_4(0\,|\,41{,}25)$ **e)** $S_5\left(-\frac{1}{4}\,\middle|\,-\frac{3}{4}\right)$; $T_5\left(0\,\middle|\,-\frac{11}{16}\right)$ **f)** $S_6(0{,}6\,|\,-2)$; $T_6(0\,|\,-1{,}64)$

K4/6 **3** **a)**





a) und b)

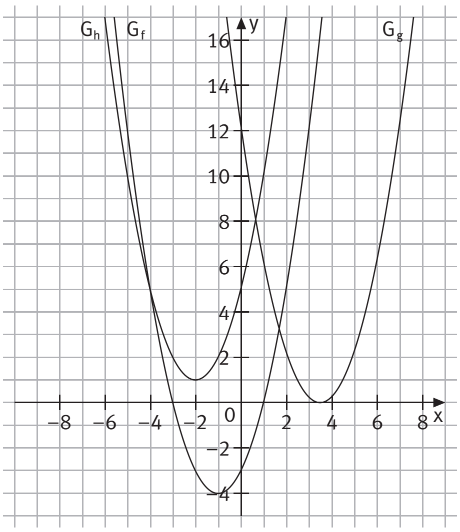
Funktion	Verschiebung um ...	Symmetrieachse	monoton fallend für ...	monoton steigend für ...
1 $f_1(x) = x^2 + 1$	1 LE in positive y-Richtung	$x = 0$	$]-\infty; 0[$	$]0; \infty[$
2 $f_2(x) = (x-0{,}5)^2$	0,5 LE in positive x-Richtung	$x = 0{,}5$	$]-\infty; 0{,}5[$	$]0{,}5; \infty[$
3 $f_3(x) = (x-3)^2 + 2$	3 LE in positive x-Richtung 2 LE in positive y-Richtung	$x = 3$	$]-\infty; 3[$	$]3; \infty[$
4 $f_4(x) = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 1$	2,5 LE in negative x-Richtung 1 LE in negative y-Richtung	$x = -2{,}5$	$]-\infty; 2{,}5[$	$]2{,}5; \infty[$
5 $f_5(x) = (x+2)^2 + \frac{1}{2}$	2 LE in negative x-Richtung 0,5 LE in positive y-Richtung	$x = -2$	$]-\infty; -2[$	$]-2; \infty[$
6 $f_6(x) = (x-1)^2 - 3$	1 LE in positive x-Richtung 3 LE in negative y-Richtung	$x = 1$	$]-\infty; 1[$	$]1; \infty[$

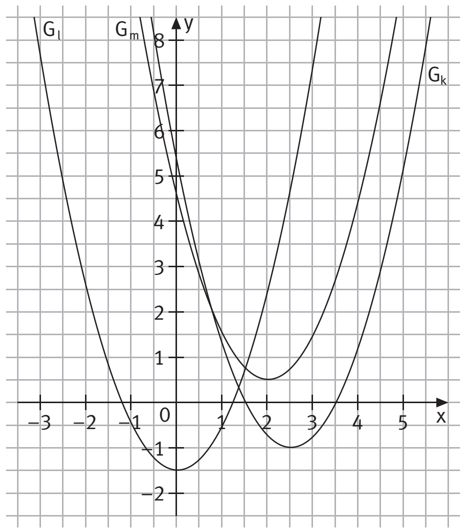
K 1/4 **4** $G_1 - F$ $G_2 - B$ $G_3 - C$ $G_4 - D$ $G_5 - H$ $G_6 - G$ $G_7 - A$ $G_8 - E$

K 4/6 **5** **a)**

Funktion	Scheitel	Wertemenge	monoton fallend für …	monoton steigend für …	Nullstellen
1 $f(x) = (x+2)^2 + 1$	$S(-2\|1)$	$[1; +\infty[$	$x \in]-\infty; -2[$	$x \in]-2; \infty[$	keine
2 $g(x) = (x-3{,}5)^2$	$S(3{,}5\|0)$	$[0; +\infty[$	$x \in]-\infty; 3{,}5[$	$x \in]3{,}5; \infty[$	3,5
3 $h(x) = (x+1)^2 - 4$	$S(-1\|-4)$	$[-4; +\infty[$	$x \in]-\infty; -1[$	$x \in]-1; \infty[$	–3; 1
4 $k(x) = (x-2{,}5)^2 - 1$	$S(2{,}5\|-1)$	$[-1; +\infty[$	$x \in]-\infty; 2{,}5[$	$x \in]2{,}5; \infty[$	1,5; 3,5
5 $l(x) = x^2 - 1{,}5$	$S(0\|-1{,}5)$	$[-1{,}5; +\infty[$	$x \in]-\infty; 0[$	$x \in]0; \infty[$	≈ –1,2; 1,2
6 $m(x) = (x-2)^2 + 0{,}5$	$S(2\|0{,}5)$	$[0{,}5; +\infty[$	$x \in]-\infty; 2[$	$x \in]2; \infty[$	keine

b)





K 5 **6** **a)** $f(x) = (x+5)^2 - 1$

$A(-2|5)$: $f(-2) = (-2+5)^2 - 1 = 8 > 5 = y_A \Rightarrow$ A liegt unterhalb von G_f.

$B(-3|3)$: $f(-3) = (-3+5)^2 - 1 = 3 = y_B \Rightarrow$ B liegt auf G_f.

$C(0{,}5|31{,}25)$: $f(0{,}5) = (0{,}5+5)^2 - 1 = 29{,}25 < 31{,}25 = y_C \Rightarrow$ C liegt oberhalb von G_f.

b) $f(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$

$A(1|2)$: $f(1) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = 2\frac{4}{9} > 2 = y_A \Rightarrow$ A liegt unterhalb von G_f.

$B\left(\frac{5}{3}\middle|4\frac{2}{3}\right)$: $f\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3} = y_B \Rightarrow$ B liegt auf G_f.

$C\left(-2\frac{2}{3}\middle|\frac{58}{9}\right)$: $f\left(-2\frac{2}{3}\right) = \left(-2\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = \frac{55}{9} < \frac{58}{9} = y_C \Rightarrow$ C liegt oberhalb von G_f.

K 5 **7** **a)** $f(x) = (x-2)^2 + 4$; $W_f = [4; +\infty[$; Symmetrieachse: $x = 2$

b) $f(5) = 13$, also $P(5|13)$

Parabelpunkt Q mit $y_Q = 13$:

$(x_Q - 2)^2 + 4 = 13 \Rightarrow x_Q - 2 = \pm 3 \Rightarrow x_{Q1} = 5;\ Q_1(5|13)$
$x_{Q2} = -1;\ Q_2(-1|13)$

K 5/6 **8** **a)**

1 $y = x^2 + 3$

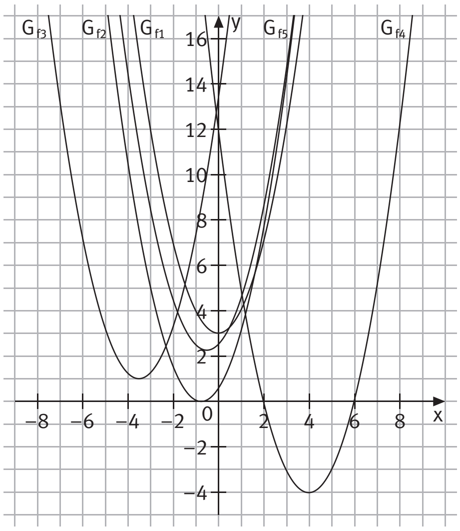
2 $y = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$

3 $y = (x + 3{,}5)^2 + 1 = x^2 + 7x + 13{,}25$

4 $y = (x - 4)^2 - 4 = x^2 - 8x + 12$

5 $y = (x + 0{,}5)^2 + 2{,}25 = x^2 + x + 2{,}5$

b)



c) ① monoton fallend für $x \in]-\infty; 0[$ monoton steigend für $x \in]0; \infty[$

② monoton fallend für $x \in \left]-\infty; -\frac{3}{4}\right[$ monoton steigend für $x \in \left]-\frac{3}{4}; \infty\right[$

③ monoton fallend für $x \in]-\infty; -3{,}5[$ monoton steigend für $x \in]-3{,}5; \infty[$

④ monoton fallend für $x \in]-\infty; 4[$ monoton steigend für $x \in]4; \infty[$

⑤ monoton fallend für $x \in]-\infty; -0{,}5[$ monoton steigend für $x \in]-0{,}5; \infty[$

d) Beispiele:

① Normalparabel um 3 LE in positive y-Richtung verschoben; Symmetrieachse $x = 0$; keine Nullstelle; Schnittpunkt mit der y-Achse $(0|3)$

② Normalparabel um 0,75 LE in negative x-Richtung verschoben; Symmetrieachse $x = -0{,}75$; Nullstelle $x = -0{,}75$; Schnittpunkt mit der y-Achse $\left(0\middle|\frac{9}{16}\right)$

③ Normalparabel um 3,5 LE in negative x-Richtung und um 1 LE in positive y-Richtung verschoben; Symmetrieachse $x = -3{,}5$; keine Nullstelle; Schnittpunkt mit der y-Achse $(0|13{,}25)$

④ Normalparabel jeweils um 4 LE in positive x-Richtung und negative y-Richtung verschoben; Symmetrieachse $x = 4$; zwei Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$; Schnittpunkt mit der y-Achse $(0|12)$

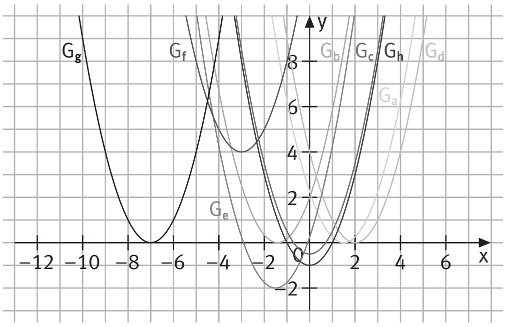
⑤ Normalparabel um 0,5 LE in negative x-Richtung und um 2,25 LE in positive y-Richtung verschoben; Symmetrieachse $x = -0{,}5$; keine Nullstelle; Schnittpunkt mit der y-Achse $(0|2{,}5)$

K2/6 **9**

	d < 0	**d = 0**	**d > 0**
e < 0	S liegt im III. Quadranten. Die Parabel hat zwei Nullstellen. Beispiel: $f: x \mapsto (x+1)^2 - 3$	S liegt auf der negativen y-Achse. Die Parabel hat zwei Nullstellen. Beispiel: $f: x \mapsto x^2 - 3$	S liegt im IV. Quadranten. Die Parabel hat zwei Nullstellen. Beispiel: $f: x \mapsto (x-1)^2 - 3$
e = 0	S liegt auf der negativen x-Achse. Die Parabel hat eine Nullstelle. Beispiel: $f: x \mapsto (x+1)^2$	S liegt im Ursprung. Die Parabel hat eine Nullstelle. Beispiel: $f: x \mapsto x^2$	S liegt auf der positiven x-Achse. Die Parabel hat eine Nullstelle. Beispiel: $f: x \mapsto (x-1)^2$
e > 0	S liegt im II. Quadranten. Die Parabel hat keine Nullstelle. Beispiel: $f: x \mapsto (x+1)^2 + 3$	S liegt auf der positiven y-Achse. Die Parabel hat keine Nullstelle. Beispiel: $f: x \mapsto x^2 + 3$	S liegt im I. Quadranten. Die Parabel hat keine Nullstelle. Beispiel: $f: x \mapsto (x-1)^2 + 3$

K5/6 **10** Beispiel:

a) $y = (x - 1{,}5)^2$ **b)** $y = (x + \sqrt{2})^2$
c) $y = x^2 - 0{,}5$ **d)** $y = (x - 2)^2$
e) $y = (x + 1{,}5)^2 - 2$ **f)** $y = (x + 3)^2 + 4$
g) $y = (x + 7)^2$ **h)** $y = x^2 - 1$



K5 **11** Die Funktionsgleichungen werden mit quadratischer Ergänzung in die Form $y = (x - d)^2 + e$ gebracht. An dieser Form lässt sich der Scheitelpunkt ablesen.

a) $y = (x + 1)^2 - 4$; $S(-1|-4)$ **b)** $y = (x - 2)^2 - 8$; $S(2|-8)$ **c)** $y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$; $S\left(-\frac{1}{2}\middle|-\frac{1}{4}\right)$
d) $y = (x - 0{,}5)^2$; $S(0{,}5|0)$ **e)** $y = (x - 1{,}5)^2 + 3$; $S(1{,}5|3)$ **f)** $y = (x + 3)^2 + 3$; $S(-3|3)$
g) $y = (x + 5)^2 - 25$; $S(-5|-25)$ **h)** $y = (x - 0{,}5)^2 + 1{,}5$; $S(0{,}5|1{,}5)$ **i)** $y = (x + 5)^2$; $S(-5|0)$

K2/6 **12** **a)** Scheitel S auf der x-Achse bedeutet, dass $e = 0$ sein muss, d. h. $c = d^2 = (0{,}5\,b)^2$.

1 $c = 16$ 2 $c = 9$ 3 $c = 1{,}44$

b) Scheitel S auf der positiven x-Achse bedeutet, dass $e = 0$ sein muss; zudem muss $b = 2\sqrt{c}$ sein und b bzw. $-b$ aus der Funktionsgleichung muss negativ sein.

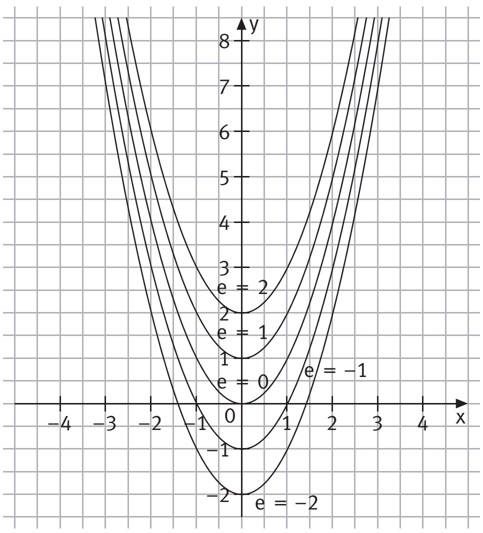
1 $b = -8$ 2 $-b = -14$, also $b = 14$ 3 $b = -2\sqrt{3}$

c) Wenn der Scheitel S der Parabeln aus b) jeweils auf der negativen x-Achse liegen soll, muss man das Vorzeichen von b ändern.

K2/6 **13** Fehler in der zweiten Zeile: In der Klammer muss $x - 8$ stehen, nicht $x + 8$, hinter der Klammer muss -64 stehen, nicht $+64$. Damit lautet die Berechnung: $y = (x - 8)^2 - 64 + 5 = (x - 8)^2 - 59 \Rightarrow S(8|-59)$

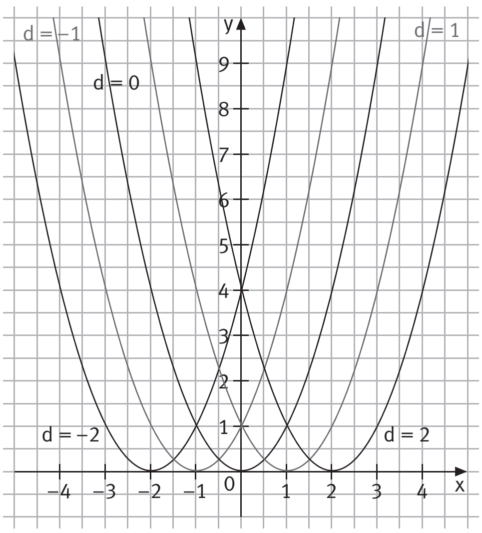
K2/5 **14** **a)** P_1: $y = x^2$; P_2: $y = x^2 + 5$; P_3: $y = x^2 - 2$ **b)** P_1: $y = (x - 4)^2$; P_2: $y = (x - 4)^2 + 5$; P_3: $y = (x - 4)^2 - 2$
c) P_1: $y = x^2 + 4$; P_2: $y = (x - 3)^2 + 4$; P_3: $y = (x + 6)^2 + 4$
d) P_1: $y = x^2 + 1$; P_2: $y = (x - 3)^2 - 11$; P_3: $y = (x + 6)^2 + 25$

K4/6 **15** 1 Beispiele für Graphen:



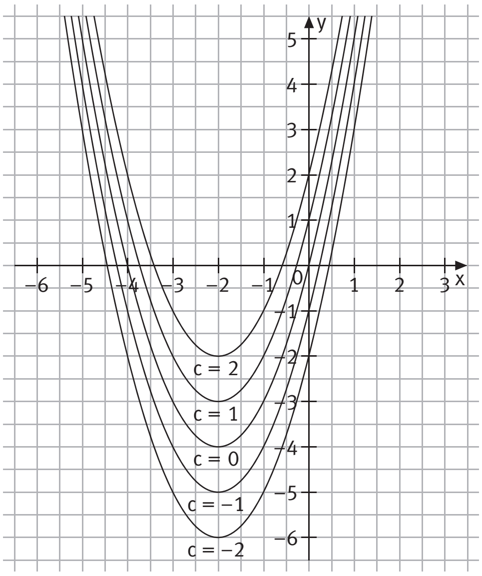
Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen:
Bei allen Graphen G_{fe} liegt der Scheitel $S(0|e)$ auf der y-Achse in unterschiedlichen „Höhen“ e.
Für $e > 0$ hat die Funktion keine Nullstelle, für $e = 0$ genau eine und für $e < 0$ zwei Nullstellen.

2 Beispiele für Graphen:



Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen:
Bei allen Graphen G_{hd} liegt der Scheitel $S(d|0)$ auf der x-Achse unterschiedlich weit vom Ursprung entfernt. Alle Parabeln der Schar haben genau eine Nullstelle.

3 Beispiele für Graphen:



Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen:
Bei allen Graphen G_{gc} liegt der Scheitel $S\,(-2\,|\,c-4)$ auf der Gerade $x = -2$. Für $c < 4$ haben die Parabeln zwei Nullstellen, für $c = 4$ genau eine Nullstelle, für $c > 4$ keine Nullstelle.

K 2/5

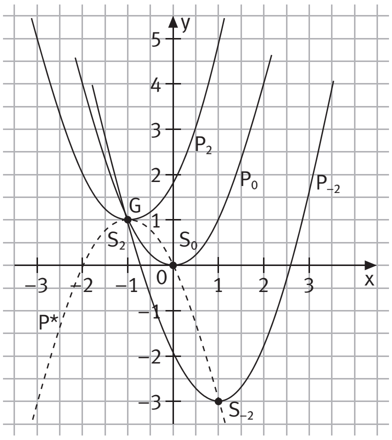
16 a) I $\quad 1^2 + b \cdot 1 + c = 2;$
II $\quad 0^2 + b \cdot 0 + c = 0;$ $\qquad$ $c = 0$ eingesetzt in I: $1 + b = 2 \Rightarrow b = 1$
$y = x^2 + 1 = (x + 0{,}5)^2 - 0{,}25$
Scheitelpunkt $S_a\,(-0{,}5\,|\,-0{,}25)$

b) I $\quad 1 + b + c = 3$
II $\quad 1 - b + c = 11$
I + II $\quad 2 + 2c = 14 \Rightarrow c = 6$ $\qquad$ $c = 6$ eingesetzt in I: $1 + b + 6 = 3 \Rightarrow b = -4$
$y = x^2 - 4x + 6 = (x - 2)^2 + 2$
Scheitelpunkt $S_b\,(2\,|\,2)$

c) I $\quad 1 + b + c = -1$
II $\quad 1 - b + c = 1$
I + II $\quad 2 + 2c = 0 \Rightarrow c = -1$ $\qquad$ $c = -1$ eingesetzt in I: $1 + b - 1 = -1 \Rightarrow b = -1$
$y = x^2 - x - 1 = (x - 0{,}5)^2 - 1{,}25$
Scheitelpunkt $S_c\,(0{,}5\,|\,-1{,}25)$

K 1/2

17 a)



b) $x_G = -1;$
$f(x_G) = (-1)^2 + b \cdot (-1) + b = 1 - b + b = 1 = y_G$
für jeden Wert von $b \in \mathbb{R}$.

c) $Q\,(1\,|\,9);\ x_Q = 1;$
$f(x_Q) = 1^2 + b \cdot 1 + b = 1 + 2b$
$f(x_Q) = y_Q \Leftrightarrow 1 + 2b = 9 \Leftrightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$

d) $y = x^2 + bx + b = (x + 0{,}5b)^2 - 0{,}25b^2 + b;$
$S\,(-0{,}5b\,|\,-0{,}25b^2 + b)$: Lucas hat also Recht.

e) $S_0\,(0\,|\,0)$: $\ y = -0^2 - 2 \cdot 0 = 0 = y_{S0}$ ✓
$S_2\,(-1\,|\,1)$: $\ y = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) = -1 + 2 = 1 = y_{S2}$ ✓
$S_{-2}\,(1\,|\,-3)$: $\ y = -1^2 - 2 \cdot 1 = -3 = y_{S-2}$ ✓
$S_b\left(-\frac{b}{2}\,\middle|\,b - \frac{b^2}{4}\right)$: $\ y = -\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) = -\frac{b^2}{4} + b = y_{Sb}$ ✓

K2/4 **18 a)** $d = -0{,}5;\ e \in \mathbb{R}$ **b)** $d = 0;\ e = -4$ **c)** $d = 0{,}5;\ e = -4$ **d)** $d = 2;\ e < -1$

K1/6

Methode

Bekannte Lerntechniken in Mathematik nutzen

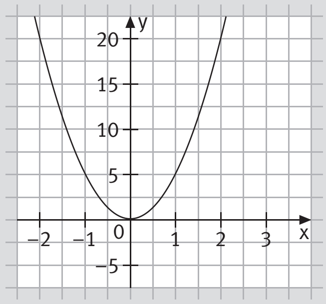
Individuelle Bearbeitungen. Die Schülerinnen und Schüler vertiefen ihre Kenntnisse über Mindmaps und entwickeln ein Gefühl für Zusammenhänge und Verknüpfungen der einzelnen Teilbereiche eines Themengebiets. Dies beinhaltet hier das Überblicken eines umfangreicheren Themengebiets und das Einsortieren der einzelnen Themen in Unterkategorien. Die Verknüpfungen in einer Mindmap helfen den Schülerinnen und Schülern, die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Lerninhalten zu visualisieren und dadurch besser zu verinnerlichen.

Alternativer Einstieg: Schulbuch Seite 40

Entdecken

K 4/5
- $f(x) = 5x^2$

x	f(x)
0	0
0,5	1,25
1	5
1,5	11,25
2	20



1 Für x = 1,5 wurde die Kugel aus einer Höhe von 11,25 m fallen gelassen.

2 Für x = 2,0 wurde die Kugel aus einer Höhe von 20 m fallen gelassen.

K 4/5
- Beispiele für einige Graphen:

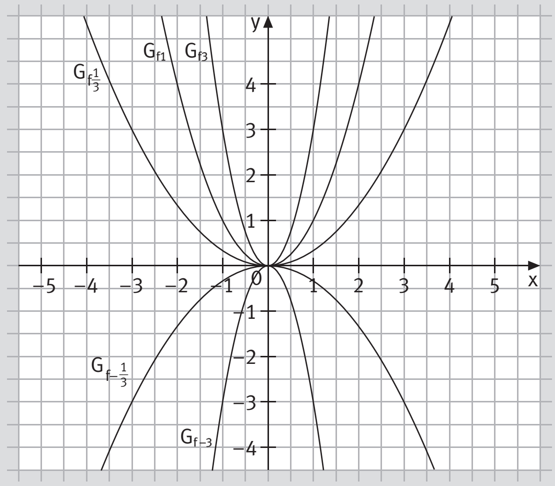
1 $f_{-3}(x) = -3x^2$

2 $f_{-\frac{1}{3}}(x) = -\frac{1}{3}x^2$

3 $f_{\frac{1}{3}}(x) = \frac{1}{3}x^2$

4 $f_3(x) = 3x^2$

5 $f_1(x) = x^2$



K 4/6
- Die Graphen haben alle den Ursprung als Scheitelpunkt.
  Die Graphen sind für a > 0 nach oben geöffnet, im II. Quadranten monoton fallend und im I. Quadranten monoton steigend.
  Für a < 0 sind die Graphen nach unten geöffnet, im III. Quadranten monoton steigend und im IV. Quadranten monoton fallend.
  Die Graphen sind enger als die Normalparabel, wenn $|a| > 1$ ist, und weiter als die Normalparabel, wenn $|a| < 1$ ist.
  Für a = 0 erhält man keine Parabel, sondern die konstante Funktion y = 0.

Nachgefragt

K 6
- Der Graph von $f: x \mapsto ax^2$ mit a = 0 ist die x-Achse mit der Gleichung f(x) = 0.

K 1/6
- Spiegelung an der x-Achse: Die neue Funktionsgleichung lautet $f_1(x) = -2x^2$. Der Graph von f_1 ist kongruent zum Graphen von f, aber nach unten geöffnet.
  Spiegelung an der y-Achse: Der gespiegelte Graph stimmt mit dem ursprünglichen Graphen G_f überein, da G_f achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Die neue Funktionsgleichung lautet $f_2(x) = f(x) = 2x^2$.

Aufgaben

K4/5 **1** **a)** $f(x) = 1{,}2x^2$ Die Parabel ist enger als die Normalparabel und nach oben geöffnet.

x	±3	±2	±1	0
f(x)	10,8	4,8	1,2	0

b) $f(x) = -2x^2$ Die Parabel ist enger als die Normalparabel und nach unten geöffnet.

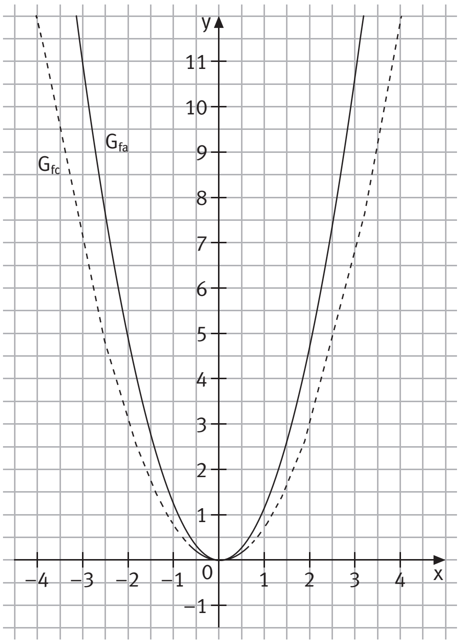
x	±2	±1,5	±1	±0,5	0
f(x)	−8	−4,5	−2	−0,5	0

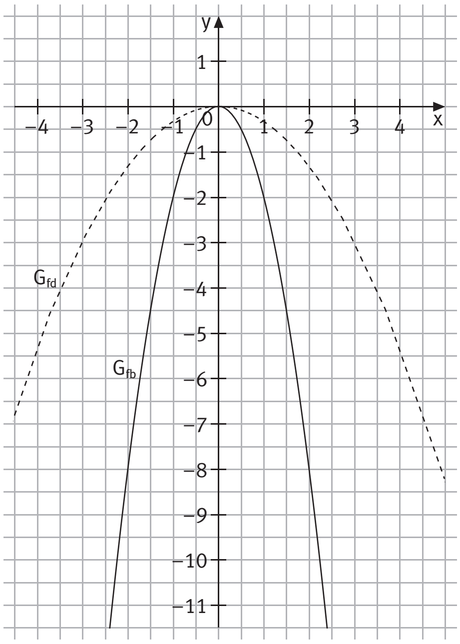
c) $f(x) = 0{,}75x^2$ Die Parabel ist weiter als die Normalparabel und nach oben geöffnet.

x	±3	±2	±1	0
f(x)	6,75	3	0,75	0

d) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2$ Die Parabel ist weiter als die Normalparabel und nach unten geöffnet.

x	±4	±3,5	±3	±2,5	±2	±1,5	±1	±0,5	0
f(x)	−5,33	−4,08	−3,00	−2,08	−1,33	−0,75	−0,33	−0,08	0,00





K4 **2** A – G_3 B – G_5 C – G_4 D – G_1 E – G_2

K5 **3** Es werden jeweils die Punktkoordinaten in die Gleichung der Parabel P eingesetzt; aus der dadurch entstehenden Gleichung wird der Wert von a berechnet.

a) $5 = a \cdot 1^2 \Rightarrow a = \frac{5}{1} = 5$

b) $-3 = a \cdot 3^2 \Rightarrow a = \frac{-3}{3^2} = -\frac{1}{3}$

c) $0{,}5 = a \cdot 0{,}5^2 \Rightarrow a = \frac{0{,}5}{0{,}5^2} = 2$

d) $-2 = a \cdot (-4)^2 \Rightarrow a = \frac{-2}{(-4)^2} = -\frac{1}{8}$

K1/5 **4** **a)** Einsetzen des x-Wertes von $P(-1{,}5 \mid 1{,}25)$ in die Funktionsgleichung ergibt:
$f(-1{,}5) = 0{,}5 \cdot (-1{,}5)^2 = 1{,}125$
Für $x = -1{,}5$ erhält man den Parabelpunkt $Q(-1{,}5 \mid 1{,}125)$.
Der Vergleich der y-Werte von P und Q ergibt:
$y_P = 1{,}25 > 1{,}125 = y_Q$
Damit liegt P oberhalb von Q und oberhalb der nach oben geöffneten Parabel.

b) Der x-Wert von P wird in die Funktionsgleichung eingesetzt und der erhaltene Wert mit dem y-Wert von P verglichen.

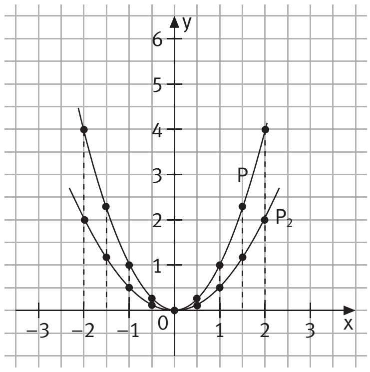
1 $f(4{,}4) = -\frac{3}{8}(4{,}4)^2 = -7{,}26 < 7{,}26 = y_P$ $\Rightarrow$ P liegt oberhalb des Graphen.

2 $f(-4{,}8) = -2{,}5 \cdot (-4{,}8)^2 = -57{,}6 > -57{,}8 = y_P$ $\Rightarrow$ P liegt unterhalb des Graphen.

3 $f(-1{,}5) = 0{,}2 \cdot (-1{,}5)^2 = 0{,}45 = y_P$ $\Rightarrow$ P liegt auf dem Graphen.

4 $f(0{,}5) = 3{,}2 \cdot (0{,}5)^2 = 0{,}8 > -0{,}8 = y_P$ $\Rightarrow$ P liegt unterhalb des Graphen.

K2/4 **5** Liam zeichnet Parallelen zur y-Achse bzw. verwendet die entsprechenden Karolinien.
Er verdoppelt die Ordinaten (y-Werte) der Punkte der Parabel P mit den Abszissen (x-Werte) … −2; −1,5; −1; −0,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2 …. und erhält so die Ordinaten der entsprechender Punkte der Parabel P_1.
Um Punkte der Parabel P_2: $y = 0{,}5x^2$ zu erhalten, halbiert man die Ordinaten der Punkte der Parabel P mit den Abszissen … −2; −1,5; −1; −0,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2 … .



K3/5 **6** **a)** Der Verlauf des Skatingbodens wird durch einen Parabelast beschrieben. Der Scheitelpunkt der Parabel liegt im Ursprung. Um die Funktionsgleichung zu bestimmen, benötigt man einen Punkt, der auf der Parabel liegt: (500 | 400). Eingesetzt in $f(x) = ax^2$ ergibt sich: $400 = a \cdot 500^2 \Rightarrow a = 0{,}0016$.

$f(x) = 0{,}0016x^2$

b) Die Träger sind im Abstand von 100 cm befestigt. Der erste Träger hat also die x-Koordinate 100. Die Höhe h der Träger ergibt sich jeweils aus den zugehörigen Funktionswerten:

1. Träger: x = 100	$f(100) = 0{,}0016 \cdot (100)^2 = 16$	h = 16 cm
2. Träger: x = 200	$f(200) = 0{,}0016 \cdot (200)^2 = 64$	h = 64 cm
3. Träger: x = 300	$f(300) = 0{,}0016 \cdot (300)^2 = 144$	h = 144 cm
4. Träger: x = 400	$f(400) = 0{,}0016 \cdot (400)^2 = 256$	h = 256 cm
5. Träger: x = 500	$f(500) = 0{,}0016 \cdot (500)^2 = 400$	h = 400 cm

Alternativer Einstieg: Schulbuch Seite 41

Entdecken

K4
- Alle drei haben die Aufgabe richtig gelöst, denn jede der drei Gleichungen beschreibt den abgebildeten Graphen.

K5/6
- Wilmas Lösung ist die allgemeine Form eines quadratischen Terms. Der konstante Summand c = 1,5 gibt die Schnittstelle der Parabel mit der y-Achse an.
  Daniels Lösung ist die Nullstellenform eines quadratischen Terms. Sie existiert nur für Funktionen, deren Graphen gemeinsame Punkte mit der x-Achse besitzen. Die x-Werte x_1 und x_2 dieser Punkte kann man an den Klammertermen $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ ablesen.
  Felis Lösung ist die Scheitelpunktform eines quadratischen Terms, aus der man analog zu der in Kapitel 2.2 behandelten Form $f(x) = (x - d)^2 + e$ die Koordinaten d und e des Scheitels ablesen kann.

Nachgefragt

K1/6
- Die Nullstellenform existiert nur, wenn die Parabel mindestens eine Nullstelle hat. Die beiden anderen Formen existieren für jede Parabel.

K1/6
- Wegen der achsensymmetrischen Form (Symmetrieachse a: $x = x_S$ für den Scheitel $S(x_S | y_S)$) der Parabel liegt die x-Koordinate des Scheitels in der Mitte zwischen ihren Nullstellen.

Aufgaben

K5 **1**

	Scheitelpunktform	Schnittpunkt mit der y-Achse	allgemeine Form
a)	$y = (x-1)^2 + 2$	$T(0\|3)$	$y = x^2 - 2x + 3$
b)	$y = 2(x-3)^2 - 4$	$T(0\|14)$	$y = 2x^2 - 12x + 14$
c)	$y = 0{,}5(x-4)^2 + 0$	$T(0\|8)$	$y = 0{,}5x^2 - 4x + 8$
d)	$y = (x+3)^2 + 3$	$T(0\|12)$	$y = x^2 + 6x + 12$
e)	$y = -(x+3{,}5)^2 - 4$	$T(0\|-16{,}25)$	$y = -x^2 - 7x - 16{,}25$
f)	$y = (x-7)^2$	$T(0\|49)$	$y = x^2 - 14x + 49$
g)	$y = -2(x-1)^2$	$T(0\|-2)$	$y = -2x^2 + 4x - 2$
h)	$y = -2x^2$	$T(0\|0)$	$y = -2x^2$
i)	$y = 0{,}2(x-2{,}5)^2 - 3$	$T(0\|-1{,}75)$	$y = 0{,}2x^2 - x - 1{,}75$

K5 **2**

	Nullstellen	allgemeine Form	Scheitelpunktform
a)	−5; 1	$y = x^2 + 4x - 5$	$y = (x+2)^2 - 9$
b)	−9; 3,5	$y = -2x^2 - 11x + 63$	$y = -2(x+2{,}75)^2 + 78{,}125$
c)	0; 1	$y = x^2 - x$	$y = (x-0{,}5)^2 - 0{,}25$
d)	−2; 2	$y = 9x^2 - 36$	$y = 9x^2 - 36$
e)	−5	$y = x^2 + 10x + 25$	$y = (x+5)^2$
f)	7	$y = x^2 - 14x + 49$	$y = (x-7)^2$
g)	1	$y = 2x^2 - 4x + 2$	$y = 2(x-1)^2$
h)	0	$y = 3x^2$	$y = 3x^2$
i)	−3; 0	$y = 0{,}5x^2 + 1{,}5x$	$y = 0{,}5(x+1{,}5)^2 - 1{,}125$

K 5 **3**

	Scheitelpunktform	Scheitelpunkt	Schnittpunkt mit der y-Achse
a)	$y = (x + 1{,}2)^2$	$S(-1{,}2 \mid 0)$	$T(0 \mid 1{,}44)$
b)	$y = 2(x + 1{,}5)^2 + 2{,}5$	$S(-1{,}5 \mid 2{,}5)$	$T(0 \mid 7)$
c)	$y = -(x - 1)^2 + 3$	$S(1 \mid 3)$	$T(0 \mid 2)$
d)	$y = 3(x + 2)^2 + 1$	$S(-2 \mid 1)$	$T(0 \mid 13)$
e)	$y = -0{,}5(x - 2)^2 + 6$	$S(2 \mid 6)$	$T(0 \mid 4)$
f)	$y = -2(x - 2)^2 - 2$	$S(2 \mid -2)$	$T(0 \mid -10)$

K 1/5 **4** allgemeine Funktionsgleichung einer Parabel: $y = ax^2 + bx + c$

a) $a = -1$, da die Parabel zur Normalparabel kongruent und nach unten geöffnet ist.
Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$, also ist die Nullstellenform besonders geeignet:
$y = -(x - 1)(x + 2)$.
Ausmultiplizieren ergibt die allgemeine Form $y = -x^2 - x + 2$.

b) $a = 1$, da die Parabel eine verschobene Normalparabel ist. Aufgrund der gegebenen Punkte ist der allgemeine Funktionsterm besonders geeignet.
Einsetzen der Koordinaten von A in die allgemeine Form ergibt $c = 3$.
Einsetzen der Koordinaten von B ergibt: $4 = 1 + b + 3 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow y = x^2 + 3$.
Der Punkt A ist der Scheitelpunkt. Die allgemeine Form ist gleichzeitig die Scheitelpunktform. Da die Parabel keine Nullstellen hat, existiert keine Nullstellenform.

c) $a = 1$, da die Parabel eine verschobene nach oben geöffnete Normalparabel ist.
Da die Parabel nach oben geöffnet ist, nimmt die Funktion ihren kleinsten Funktionswert im Scheitelpunkt an. Somit ist $S(3 \mid -10)$ der Scheitelpunkt. Daraus ergibt sich die Scheitelpunktform $y = (x - 3)^2 - 10$.
Ausmultiplizieren ergibt die allgemeine Form $y = x^2 - 6x - 1$.

K 1/4 **5** Mögliche Begründungen:

A – G_4: Die Parabel hat den Scheitelpunkt $S(2 \mid 0)$.
B – G_2: Die Funktionsgleichung ist die einzige lineare Gleichung.
C – G_3: Die Parabel hat den Scheitelpunkt $S(0 \mid 1{,}5)$.
D – G_1: Die Parabel hat den Scheitelpunkt $S(-2 \mid -3)$.
E – G_5: Dies ist die einzige Funktionsgleichung mit einem negativen Vorzeichen von x^2. Es handelt sich also um eine nach unten geöffnete Parabel.
F – G_4: Dies ist die ausmultiplizierte Form von 1.

K 5/6 **6** **a)** 1. Schritt: Max hat 0,5 ausgeklammert, aber in der Klammer müsste zweimal die Ziffer 8 stehen anstelle der beiden Ziffern 2. Die korrekte Umformung mit quadratischer Ergänzung lautet:

$$f(x) = 0{,}5x^2 + 4x - 4 = 0{,}5(x^2 + 8x - 8) = 0{,}5(x^2 + 8x + 4^2 - 4^2 - 8) = 0{,}5[(x + 4)^2 - 24]$$
$$= 0{,}5(x + 4)^2 - 12.$$

Der Scheitel ist $S(-4 \mid -12)$.

b) Im 2. Schritt soll quadratisch ergänzt werden, der Wert muss aber 4 sein, nicht 2. Die korrekte Umformung mit quadratischer Ergänzung lautet:

$$f(x) = -x^2 - 4x + 3 = -(x^2 + 4x) + 3 = -(x^2 + 4x + 4 - 4) + 3 = -[(x + 2)^2 - 4] + 3$$
$$= -(x + 2)^2 + 4 + 3 = -(x + 2)^2 + 7.$$

Der Scheitel ist $S(-2 \mid 7)$.

c) In der Klammer des 3. Schrittes muss $x - 2$ stehen, nicht $x - 4$. Die korrekte Umformung mit quadratischer Ergänzung lautet:

$$f(x) = -0{,}5x^2 + 2x = -0{,}5(x^2 - 4x) = -0{,}5(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) = -0{,}5[(x - 2)^2 - 4]$$
$$= -0{,}5(x - 2)^2 + 2.$$

Der Scheitel ist $S(2 \mid 2)$.

K 1/5 **7** **a)** Scheitelpunkt S (8|50); zwei Nullstellen, denn die Parabel ist nach unten geöffnet und der Scheitelpunkt liegt oberhalb der x-Achse.

b) Scheitelpunkt S (–1|12); zwei Nullstellen, denn die Parabel ist nach unten geöffnet und der Scheitelpunkt liegt oberhalb der x-Achse.

c) Scheitelpunkt S (–3|–6); zwei Nullstellen, denn die Parabel ist nach oben geöffnet und der Scheitelpunkt liegt unterhalb der x-Achse.

d) Scheitelpunkt S (2|0); genau eine Nullstelle, da der Scheitelpunkt auf der x-Achse liegt.

e) Scheitelpunkt S (–1,5|1); zwei Nullstellen, denn die Parabel ist nach unten geöffnet und der Scheitelpunkt liegt oberhalb der x-Achse.

f) Scheitelpunkt S (0|–10); zwei Nullstellen, denn die Parabel ist nach oben geöffnet und der Scheitelpunkt liegt unterhalb der x-Achse.

K 5/6 **8** **a)** nach unten geöffnete Parabel; größter Funktionswert: 3
Beispiele für weitere Eigenschaften der Parabel:
Scheitelpunkt S (0|3)
monoton steigend für $x \in \,]-\infty; 0[$, monoton fallend für $x \in \,]0; +\infty[$
zwei Nullstellen
enger als die Normalparabel
Symmetrieachse a: x = 0

b) nach unten geöffnete Parabel; größter Funktionswert: 2
Beispiele für weitere Eigenschaften der Parabel:
Scheitelpunkt S (2|2)
monoton steigend für $x \in \,]-\infty; 2[$, monoton fallend für $x \in \,]2; +\infty[$
zwei Nullstellen
Symmetrieachse a: x = 2

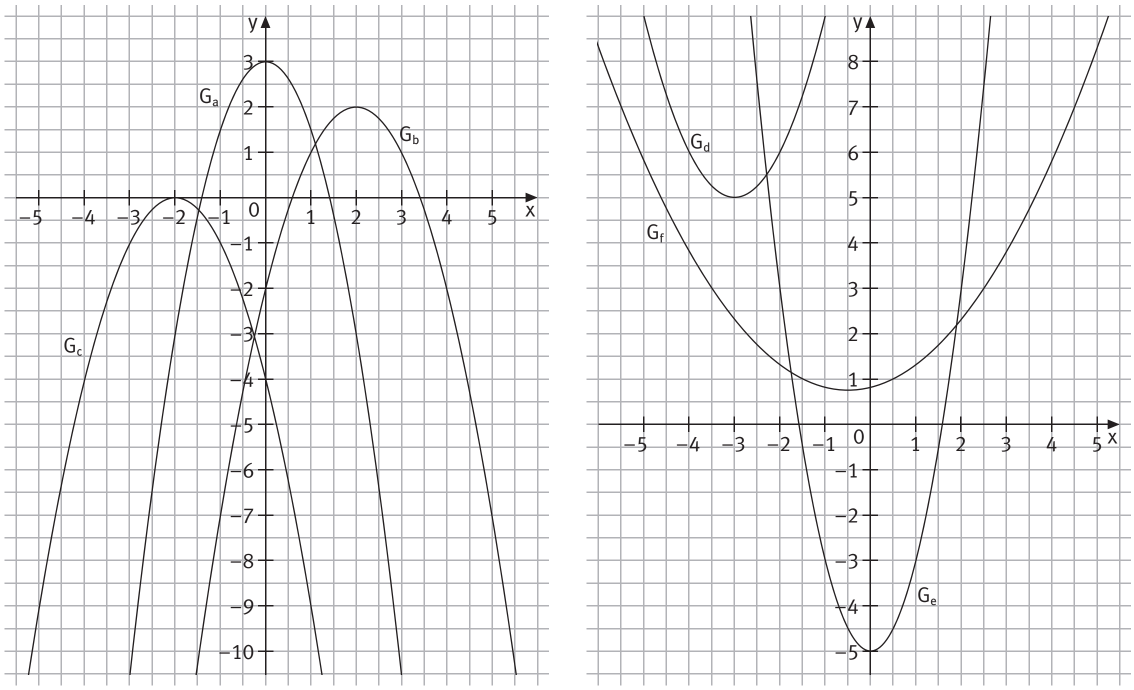
c) nach unten geöffnete Parabel; größter Funktionswert: 0
Beispiele für weitere Eigenschaften der Parabel:
Scheitelpunkt S (–2|0)
monoton steigend für $x \in \,]-\infty; -2[$, monoton fallend für $x \in \,]-2; +\infty[$
eine Nullstelle
Symmetrieachse a: x = –2

d) nach oben geöffnete Parabel; kleinster Funktionswert: 5
Beispiele für weitere Eigenschaften der Parabel:
Scheitelpunkt S (–3|5)
monoton fallend für $x \in \,]-\infty; -3[$, monoton steigend für $x \in \,]-3; +\infty[$
keine Nullstelle
Symmetrieachse a: x = –3

e) nach oben geöffnete Parabel; kleinster Funktionswert: –5
Beispiele für weitere Eigenschaften der Parabel:
Scheitelpunkt S (0|–5)
monoton fallend für $x \in \,]-\infty; 0[$, monoton steigend für $x \in \,]0; +\infty[$
zwei Nullstellen
Symmetrieachse a: x = 0

f) nach oben geöffnete Parabel; kleinster Funktionswert: 0,75
Beispiele für weitere Eigenschaften der Parabel:
Scheitelpunkt S (–0,5|0,75)
monoton fallend für $x \in \,]-\infty; -0{,}5[$, monoton steigend für $x \in \,]-0{,}5; +\infty[$
keine Nullstelle
Symmetrieachse a: x = –0,5

Funktionsgraphen:



K2/6 **9** **a)** Der Funktionsgraph hat …

- genau eine Nullstelle, wenn der Parabelscheitel auf der x-Achse liegt.
- zwei Nullstellen, wenn entweder der Scheitel oberhalb der x-Achse liegt und die Parabel nach unten geöffnet ist oder der Scheitel unterhalb der x-Achse liegt und die Parabel nach oben geöffnet ist.
- keine Nullstelle, wenn entweder der Scheitel oberhalb der x-Achse liegt und die Parabel nach oben geöffnet ist oder der Scheitel unterhalb der x-Achse liegt und die Parabel nach unten geöffnet ist.

b) Die Anzahl der Nullstellen hängt nicht von d ab.
Anzahl der Nullstellen:

	e > 0	**e = 0**	**e < 0**
a > 0	0	1	2
a < 0	2	1	0

K5/6 **10** A: 2, 3, 4, 5, 6 B: 2, 6, 7
C: 1, 5, 6, 7 D: 4, 5, 6, 7
E: 3, 4, 6 F: 2, 5, 6, 7

K1/2 **11** Bei verschobenen Normalparabeln besteht die Wertemenge aus allen $y \in \mathbb{R}$, die größer oder gleich dem y-Wert des Scheitels sind.
Die Gleichung der Symmetrieachse ist $x = d$ $(S\,(d\,|\,e))$. Für $x < d$ ist die Funktion monoton fallend, für $x > d$ monoton steigend.
Wenn der Scheitelpunkt bekannt ist, erhält man die Nullstellen der Funktion aus der Scheitelpunktform $y = (x - d)^2 + e$ der verschobenen Normalparabel (für $e > 0$ existieren keine Nullstellen):
$(x - d)^2 + e = 0 \;\Leftrightarrow\; (x - d)^2 = -e \;\Leftrightarrow\; x - d = \pm\sqrt{-e} \;\Leftrightarrow\; x = d \pm \sqrt{-e}$.

Berichtigte Tabelle:

	Scheitelpunkt	Wertemenge	Symmetrieachse	monoton fallend	monoton steigend	Nullstellen
1	S(0|–9)	[–9; +∞[	x = 0	x ∈]–∞; 0[	x ∈]0; ∞[	–3; 3
2	S(5|–1)	[–1; +∞[	x = 5	x ∈]–∞; 5[	x ∈]5; ∞[	4; 6
3	S(1|1)	[1; +∞[	x = 1	x ∈]–∞; 1[	x ∈]1; ∞[	keine
4	S(2|–16)	[–16; +∞[	x = 2	x ∈]–∞; 2[	x ∈]2; ∞[	–2; 6
5	S(–4|–4)	[–4; +∞[	x = –4	x ∈]–∞; –4[	x ∈]–4; ∞[	–6; –2
6	S(3|0)	[0; +∞[	x = 3	x ∈]–∞; 3[	x ∈]3; ∞[	3
7	S(1,5|–2,25)	[–2,25; +∞[	x = 1,5	x ∈]–∞; 1,5[	x ∈]1,5; ∞[	0; 3

K5/6 **12** 1 **a)** Nullstellen: $x_1 = -2$, $x_2 = 2 \Rightarrow$ Schnittpunkte mit der x-Achse $N_1(-2|0)$, $N_2(2|0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $T(0|f(0)) \Rightarrow T(0|-4)$
Scheitelpunkt $S(x_S|f(x_S))$: $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0 \Rightarrow S(0|-4)$
Scheitelpunktform: $f(x) = x^2 - 4$

b) Da die Parabel nach oben geöffnet ist und zwei Nullstellen besitzt, sind die Funktionswerte für x-Werte zwischen den Nullstellen negativ, also für x ∈]–2; 2[.

c) Die Funktion f ist monoton fallend im Intervall]–∞; 0[und monoton steigend im Intervall]0; ∞[.

Die Bearbeitung der Funktionen 2 bis 6 erfolgt analog zu 1. Insgesamt erhält man:

		1	2	3
a)	Schnittpunkte mit der x-Achse	$N_1(-2\|0)$; $N_2(2\|0)$	$N_1(-3\|0)$; $N_2(1\|0)$	$N_1(3\|0)$; $N_2(-9\|0)$
	Schnittpunkt mit der y-Achse	T(0|–4)	T(0|–6)	T(0|13,5)
	Scheitelpunkt	S(0|–4)	S(–1|–8)	S(–3|18)
	Scheitelpunktform	$f(x) = x^2 - 4$	$f(x) = 2(x+1)^2 - 8$	$f(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 18$
b)	f(x) < 0 für x ∈ …	]–2; 2[	]–3;3[	]–∞; –9 [∪] 3; ∞[
c)	Monotonie	mf für x ∈]–∞; 0[ms für x ∈]0; ∞[	mf für x ∈]–∞; –1[ms für x ∈]–1; ∞[	ms für x ∈]–∞; –3[mf für x ∈]–3; ∞[

		4	5	6
a)	Schnittpunkte mit der x-Achse	$N_1(0\|0)$; $N_2(4\|0)$	$N_1(-7\|0)$; $N_2(-1\|0)$	$N_1(-0{,}5\|0)$; $N_2(2{,}7\|0)$
	Schnittpunkt mit der y-Achse	T(0|0)	T(0|21)	T(0|–0,135)
	Scheitelpunkt	S(2|4)	S(–4|–27)	S(1,1|–0,256)
	Scheitelpunktform	$f(x) = -(x-2)^2 + 4$	$f(x) = 3(x+4)^2 - 27$	$f(x) = 0{,}1(x-1{,}1)^2 - 0{,}256$
b)	f(x) < 0 für x ∈ …	]–∞ ; 0 [∪] 0; +∞[	]–7 ; –1[	]–0,5; 2,7[
c)	Monotonie	ms für x ∈]–∞; 2[mf für x ∈]2; ∞[	mf für x ∈]–∞; –4[ms für x ∈]–4; ∞[	mf für x ∈]–∞; 1,1[ms für x ∈]1,1; ∞[

K2/5 **13**

a)	$b_1 = 10$;	$y = x^2 + 10x + 25$;	$y = (x+5)^2$; S(–5|0)
	$b_2 = -10$;	$y = x^2 - 10x + 25$;	$y = (x-5)^2$; S(5|0)
b)	$b_1 = 1{,}8$;	$y = x^2 - 1{,}8x + 0{,}81$;	$y = (x-0{,}9)^2$; S(0,9|0)
	$b_2 = -1{,}8$;	$y = x^2 + 1{,}8x + 0{,}81$;	$y = (x+0{,}9)^2$; S(–0,9|0)
c)	$b_1 = 2\sqrt{5}$;	$y = x^2 - 2\sqrt{5}x + 5$;	$y = (x-\sqrt{5})^2$; $S(\sqrt{5}\|0)$
	$b_2 = -2\sqrt{5}$;	$y = x^2 + 2\sqrt{5}x + 5$;	$y = (x+\sqrt{5})^2$; $S(-\sqrt{5}\|0)$
d)	$c = 9$;	$y = x^2 + 6x + 9$;	$y = (x+3)^2$; S(–3|0)
e)	$c = 2$;	$y = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$;	$y = (x-\sqrt{2})^2$; $S(\sqrt{2}\|0)$
f)	$c = -8$;	$y = -2x^2 - 8x - 8$;	$y = -2(x+2)^2$; S(–2|0)

K 5/6 **14**

	allgemeine Form $y = ax^2 + bx + c$	Scheitelpunktform $y = a(x - d)^2 + e$	Nullstellenform $y = a(x - x_1)(x - x_2)$
a)	-----	$a > 0$ und $e < 0$ oder $a < 0$ und $e > 0$	zwei verschiedene Klammern ($x_1 \neq x_2$)
b)	-----	$e = 0$	zweimal dieselbe Klammer ($x_1 = x_2$)
c)	$-1 < a < 1$	$-1 < a < 1$	$-1 < a < 1$
d)	$c < 0$	-----	drei Möglichkeiten: • $a < 0$ und genau eine Nullstelle, die nicht null ist • $a < 0$ und zwei Nullstellen mit gleichen Vorzeichen • $a > 0$ und zwei Nullstellen mit verschiedenen Vorzeichen

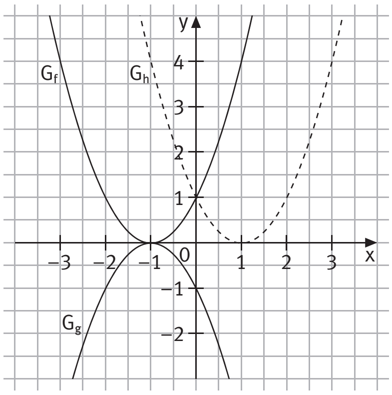
K 1/5 **15** Sid hat nicht Recht: $f(x) = 0{,}5 \cdot (x^2 - 9) + 2 = 0{,}5x^2 - 2{,}5$

Der Scheitelpunkt der Parabel ist $S(0\,|\,-2{,}5)$.

Auch Mike hat nicht Recht: Besitzt eine quadratische Funktion genau eine Nullstelle x_1, dann hat ihre Nullstellenform zwei gleiche Klammern $(x - x_1)$, die multipliziert in der Nullstellenform als $(x - x_1)^2$ erscheinen.

Beispiel: Die Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 1$ besitzt die (doppelte) Nullstelle $x_1 = 1$. Die Nullstellenform von f lautet $f(x) = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2$.

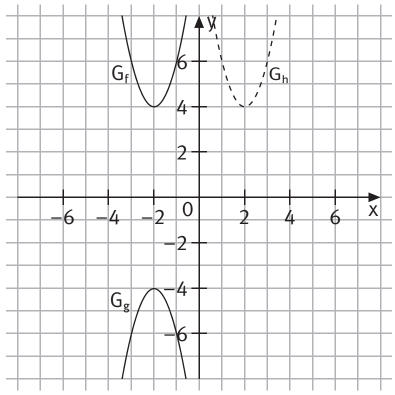
K 2/4 **16** ① **a) – c)**



$g(x) = -(x + 1)^2 = -x^2 - 2x - 1$

$h(x) = (-x + 1)^2 = (x - 1)^2$

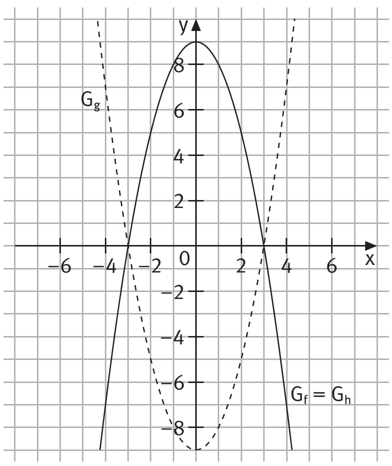
② **a) – c)**



$g(x) = -2(x + 2)^2 - 4 = -2x^2 - 8x - 12$

$h(x) = 2(x - 2)^2 + 4$

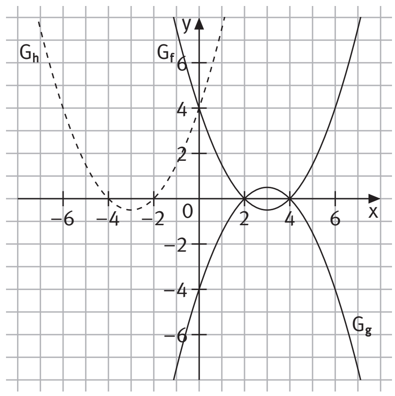
③ **a) – c)**



$g(x) = (x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$

$h(x) = f(x) = -x^2 + 9$

④ **a) – c)**



$g(x) = -0{,}5(x - 2)(x - 4) = -0{,}5x^2 + 3x - 4$

$h(x) = 0{,}5(-x - 2)(-x - 4) = 0{,}5(x^2 + 6x + 8)$
$= 0{,}5(x^2 + 6x + 9 - 9 + 8) = 0{,}5\left[(x + 3)^2 - 1\right]$
$= 0{,}5(x + 3)^2 - 0{,}5$

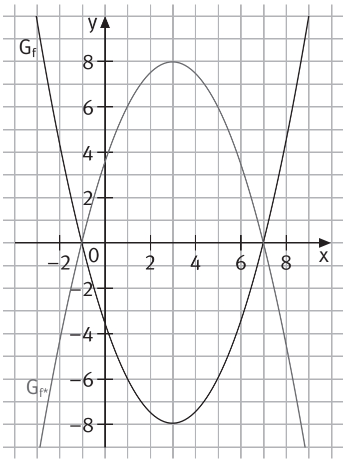
K2/5 **17 a)** $f(x) = 0{,}5\,(x^2 - 6x) - 3{,}5 = 0{,}5\,(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) - 3{,}5$
$= 0{,}5\,[(x-3)^2 - 9] - 3{,}5 = 0{,}5\,(x-3)^2 - 4{,}5 - 3{,}5$
$= 0{,}5\,(x-3)^2 - 8$

$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 0{,}5\,(x-3)^2 = 8 \;\Leftrightarrow\; (x-3)^2 = 16 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{16} \;\Rightarrow\; x_1 = -1;\; x_2 = 7$

$f(x) = 0{,}5\,(x+1)\,(x-7)$

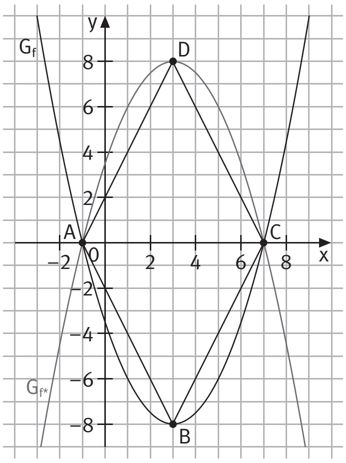
b) Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1\,(-1|0)$ und $N_2\,(7|0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $T\,(0|-3{,}5)$

c) G_f monoton fallend im Intervall $]-\infty; 3[$ und monoton steigend im Intervall $]3; \infty[$;
$f(x) < 0$ für $x \in\,]-1; 7[$.

d)


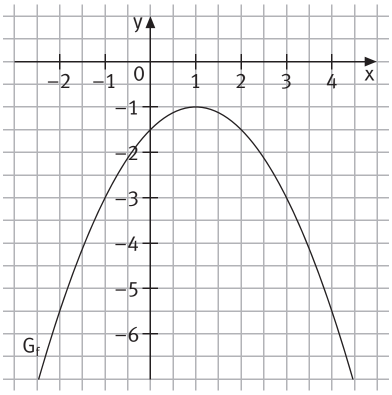
An der x-Achse gespiegelte Funktion $f^*(x) = -0{,}5x^2 + 3x + 3{,}5$

e) Die Monotoniebereiche werden vertauscht. Wenn G_f monoton steigend ist, ist G_{f^*} monoton fallend und umgekehrt.

f)


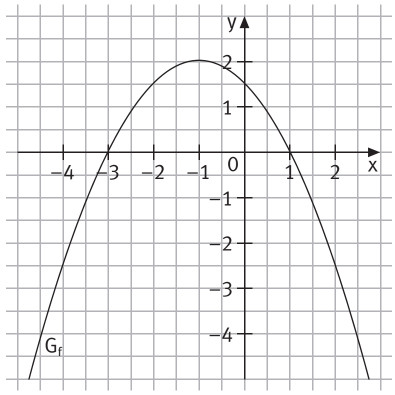
Wegen der Symmetrie der Parabeln bezüglich der Achse a: x = 3 und der Spiegelung sind alle vier Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ gleich lang. Das Viereck ABCD ist somit eine Raute.
Der Flächeninhalt A_{ABCD} der Raute ABCD ist der doppelte Flächeninhalt z. B. des Dreiecks ACD mit Grundlinie $\overline{AC}$ der Länge 8 und Höhe der Länge 8:
$A_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 64.$

K2/4 **18 a)**



$f(x) = -0{,}5(x-1)^2 - 1 = -0{,}5x^2 + x - 1{,}5$

b)



$f(x) = -0{,}5(x+3)(x-1) = -0{,}5(x-1)^2 + 2$
$= -0{,}5x^2 - x + 1{,}5$

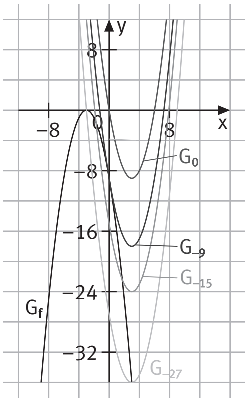
K2/5 **19 a)** Für gemeinsame Punkte von G_f und G_{ga} muss die Gleichung $f(x) = g_a(x)$ erfüllt sein.
$-x^2 - 6x - 9 = x^2 - 6x + a \;\Leftrightarrow\; 2x^2 + a + 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = -\frac{1}{2}a - 4{,}5 \quad (\mathrm{I})$

1 Bedingung: Berührung von G_f und G_{ga} im Scheitelpunkt von G_f, also in $S(-3|0)$
$x = -3$ eingesetzt: $2 \cdot (-3)^2 + a + 9 = 0 \;\Rightarrow\; a = -27$
Andererseits hat die Gleichung (I) nur für $a = -9$ genau eine Lösung.
Dies ist ein Widerspruch, also ist die Bedingung nicht erfüllbar.

2 Bedingung: kein Schnittpunkt. Dies trifft zu, wenn $a > -9$ ist.

3 Bedingung: zwei Schnittpunkte. Dies trifft zu, wenn $a < -9$ ist.

b) Es zeigt sich u. a., dass der Scheitel S von G_f für $a = -27$ ein gemeinsamer Punkt, aber kein Berührpunkt ist (vgl. Teilaufgabe a), Bedingung 1).
Für $a = -9$ berühren sich die Graphen G_f und G_{ga} im Punkt $B(0|-9)$.



Vertiefung

Scheitelpunkte von Funktionsscharen

K6 ■ Leander hat in der allgemeinen Form der quadratischen Funktionsgleichung die Methode der quadratischen Ergänzung angewandt, um die allgemeinen Koordinaten des Scheitelpunkts zu finden.

K5 ■ 1 $x_S = -\frac{-8}{2 \cdot 1} = 4;\; y_S = 7 - \frac{(-8)^2}{4 \cdot 1} = -9 \;\Rightarrow\; S(4|-9)$

2 $x_S = -\frac{-16}{2 \cdot 2} = 4;\; y_S = 5 - \frac{(-16)^2}{4 \cdot 2} = -27 \;\Rightarrow\; S(4|-27)$

3 $x_S = -\frac{10}{2 \cdot (-2)} = 2{,}5;\; y_S = -20 - \frac{(+10)^2}{4 \cdot (-2)} = -7{,}5 \;\Rightarrow\; S(2{,}5|-7{,}5)$

4 $x_S = -\frac{-6}{2 \cdot 5} = 0{,}6;\; y_S = 4 - \frac{(-6)^2}{4 \cdot 5} = 2{,}2 \;\Rightarrow\; S(0{,}6|2{,}2)$

K4/6 ■ Individuelle Beschreibungen (je nach verwendeter DGS). Prinzipielles Vorgehen: Den Scheitelpunkt einer der Parabeln (z. B. für a = 1) markieren und im Kontextmenü den Befehl „Spur" oder „Spur anzeigen" wählen. Bei Betätigung des Schiebereglers (also bei Veränderung des Parameters a) wird dann die Spurgerade der Scheitelpunkte angezeigt.

K2/4 ■ 1 $f_a(x) = 0{,}5ax^2 + ax;\; S_a\left(-1\middle|-\frac{a}{2}\right)$
Da alle Scheitelpunkte den x-Wert −1 haben, liegen die Scheitelpunkte auf der Geraden mit der Gleichung $x = -1$ (Parallele zur y-Achse).

2 $f_a(x) = x^2 + ax + 1;\; S_a\left(-\frac{a}{2}\middle|1 - \frac{a^2}{4}\right)$
Aus den Koordinaten von S eliminiert man a: $x_S = -\frac{a}{2} \;\Leftrightarrow\; a = -2x_S \;\Leftrightarrow\; y_S = 1 - \frac{(-2x_S)^2}{4} = 1 - x_S^2$
Alle Scheitel liegen auf der Parabel mit der Gleichung $y = -x^2 + 1$.

3 $f_a(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - 1;\; S_a(a|a^2 - 1)$; a eliminiert: $y = x^2 - 1$
Alle Scheitel liegen auf der Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 1$.

Alternativer Einstieg: Schulbuch Seite 41

Entdecken

K2/5
- 1 $x^2 - 4x + 3 = 0$ löst man wie Mara mit der DGS oder durch gezieltes Probieren: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
  2 $x^2 - 169 = 0$ löst man wie Phil (3. binomische Formel): $(x + 13)(x - 13) = 0 \Rightarrow x_1 = 13, x_2 = -13$.
  3 $2x^2 - 4x = 0$: Janina erkennt, dass $x_1 = 0$ eine Lösung ist. Nach Ausklammern von $2x$ $(2x(x - 2) = 0)$ sieht man die andere Lösung $x_2 = 2$ auch schnell.
  4 $x^2 + 6x + 9 = 0$: Phil nutzt die 1. binomische Formel und erhält $(x + 3)^2 = 0$. Die Gleichung hat genau eine Lösung: $x = -3$.

Nachgefragt

K1/5
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ hat der Term $x^2 + 1$ nur Werte größer oder gleich 1, da x^2 für alle $x \in \mathbb{R}$ nicht negativ ist. Somit kann der Term $x^2 + 1$ den Wert null nicht annehmen.

K1/5
- Peter hat Recht, denn …
  1 wenn $a > 0$ und $c < 0$ ist, dann ist die zugehörige Parabel nach oben geöffnet und ihr Scheitel liegt unter der x-Achse. Somit hat die Parabel zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Deren Abszissen (x-Werte) sind die beiden Lösungen der Gleichung.
  2 wenn $a < 0$ und $c > 0$ ist, dann ist die zugehörige Parabel nach unten geöffnet und ihr Scheitel liegt über der x-Achse. Somit hat die Parabel zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Deren Abszissen (x-Werte) sind die beiden Lösungen der Gleichung.

Aufgaben

K5/6
1 **a)** Die linke Seite der Gleichung wurde durch Ausklammern von x als Produkt geschrieben. Ein Produkt ist 0, wenn mindestens einer der Faktoren 0 ist. Damit lassen sich die Lösungen am Produktterm ablesen.
b) Die linke Seite der Gleichung wurde nach Division der Gleichung durch 2 mithilfe der 2. binomischen Formel als Quadrat geschrieben. Damit lässt sich die Lösung ablesen.
c) Die Gleichung wurde nach x^2 aufgelöst und dann die Wurzel gezogen.

K4/5
2 **a)** $2x^2 - 32 = 0; \quad | + 32$
$2x^2 = 32; \quad | : 2$
$x^2 = 16;$
$x_1 = -4; x_2 = 4$
$L = \{-4; 4\}$

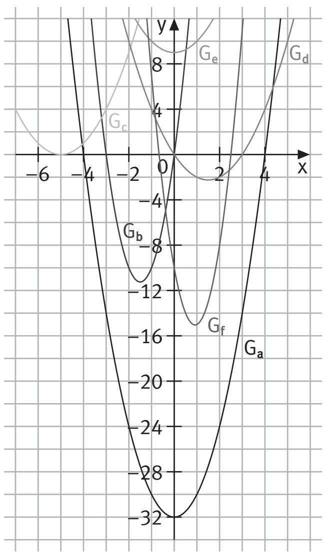
b) $5x^2 + 15x = 0;$
$5x(x + 3) = 0;$
$x_1 = 0;$
$x_2 = -3$
$L = \{-3; 0\}$

c) $x^2 + 10x + 25 = 0;$
$(x + 5)^2 = 0;$
$x + 5 = 0; \quad | -5$
$x = -5$
$L = \{-5\}$

d) $x^2 - 3x = 0;$
$x(x - 3) = 0;$
$x_1 = 0; x_2 = 3$
$L = \{0; 3\}$

e) $x^2 + 9 = 0; \quad | -9$
$x^2 = -9$
$L = \{\}$

f) $6x^2 - 11x - 10 = 0$
Mithilfe der Lösungsformel ergibt sich für $a = 6$; $b = -11$; $c = -10$:
$$x_{1/2} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-10)}}{2 \cdot 6} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 240}}{12} = \frac{11 \pm \sqrt{361}}{12} = \frac{11 \pm 19}{12};$$
$$x_1 = \frac{11 + 19}{12} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2{,}5; \; x_2 = \frac{11 - 19}{12} = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3}$$
$$L = \left\{-\frac{2}{3}; 2{,}5\right\}$$



K 5 **3** **a)** $L = \{-8; -6\}$ **b)** $L = \{1; 15\}$ **c)** $L = \{-11; 8\}$
d) $L = \{-5; 0\}$ **e)** $L = \{-1; 8{,}5\}$ **f)** $L = \left\{\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right\}$
g) $x^2 + 4x - 5 = 0$; $L = \{-5; 1\}$
h) $x^2 - 10x - 11 = 0$; $L = \{-1; 11\}$
i) $x^2 - x - 0{,}75 = 0$; $L = \{-0{,}5; 1{,}5\}$
j) $x^2 - x - 6 = 0$; $L = \{-2; 3\}$
k) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0$; $L = \left\{\frac{1}{4}\right\}$
l) $x^2 + 5{,}625 = 0$; $L = \{\,\}$

K 5 **4**
a) $x^2 - 2{,}4x + 1{,}43 = 0$ $\quad x_{1/2} = \frac{2{,}4 \pm \sqrt{5{,}76 - 5{,}72}}{2} = 1{,}2 \pm 0{,}1$ $\quad L = \{1{,}1; 1{,}3\}$
b) $1{,}5x^2 + 0{,}75x - 1{,}26 = 0$ $\quad x_{1/2} = \frac{-0{,}75 \pm \sqrt{0{,}5625 + 7{,}56}}{3} = -0{,}25 \pm 0{,}95$ $\quad L = \{-1{,}2; 0{,}7\}$
c) $x^2 - 7x - 2{,}75 = 0$ $\quad x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 11}}{2} \approx \frac{7 \pm 2\sqrt{15}}{2}$ $\quad L = \{-3{,}5 - \sqrt{15}; 3{,}5 + \sqrt{15}\}$
d) $2x^2 - 0{,}4x - 0{,}48 = 0$ $\quad x_{1/2} = \frac{0{,}4 \pm \sqrt{0{,}16 + 3{,}84}}{4} = 0{,}1 \pm 0{,}5$ $\quad L = \{-0{,}4; 0{,}6\}$
e) $x^2 - 4x + 4 = 0$ $\quad x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$ $\quad L = \{2\}$
f) $-3x^2 + 9x + 15 = 0$ $\quad x_{1/2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 180}}{-6} \approx \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$ $\quad L = \left\{\frac{3 - \sqrt{29}}{2}; \frac{3 + \sqrt{29}}{2}\right\}$

K 1/5 **5** $x^2 - 2x + 7 = 0$ $\quad D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -24 < 0$
Die Gleichung hat keine Lösung, da ihre Diskriminante negativ ist.
Die Gleichung hat genau eine Lösung, wenn $D = 0$ ist, also muss statt 7 die Zahl 1 stehen:
$x^2 - 2x + 1 = 0$. Diese Gleichung besitzt als einzige Lösung $x = 1$.

K 2/5 **6**
a) $x^2 - 14x + 33 = 0$; $\quad (x - 3)(x - 11) = 0$;
$x_1 = 3$; $x_2 = 11$; $\quad L = \{3; 11\}$

b) $x^2 + 14x = 207$; $\,| -207 \quad x^2 + 14x - 207 = 0$;
$(x + 23)(x - 9) = 0$;
$x_1 = -23$; $x_2 = 9$; $\quad L = \{-23; 9\}$

c) $x^2 - 12x = 64$; $\,| -64 \quad x^2 - 12x - 64 = 0$;
$(x - 16)(x + 4) = 0$;
$x_1 = 16$; $x_2 = -4$; $\quad L = \{-4; 16\}$

d) $x^2 - 10x = 56$; $\,| -56 \quad x^2 - 10x - 56 = 0$;
$(x + 4)(x - 14) = 0$;
$x_1 = -4$; $x_2 = 14$; $\quad L = \{-4; 14\}$

e) $y^2 + 11y = 50{,}75$; $\,| -50{,}75$
$y^2 + 11y - 50{,}75 = 0$;
$$y_{1/2} = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-50{,}75)}}{2 \cdot 1} = \frac{-11 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{-11 \pm 18}{2}$$
$y_1 = 3{,}5$; $y_2 = -14{,}5$; $\quad L = \{-14{,}5; 3{,}5\}$

f) $-y^2 - 13y = 0$; $-y(y + 13) = 0$;
$y_1 = 0$; $y_2 = -13$; $\quad L = \{-13; 0\}$

g) $7y + 14 = 21$; $\,| -14$
$7y = 7$; $\,| : 7$
$y = 1$; $\quad L = \{1\}$

h) $2y^2 + 98 = 28y$; $\,| -28y$; $\,2y^2 - 28y + 98 = 0$; $\,| : 2$
$y^2 - 14y + 49 = 0$
$(y - 7)^2 = 0$; $y = 7$; $\quad L = \{7\}$

i) $4z^2 + 9 = 12z$; $\,| -12z$
$4z^2 - 12z + 9 = 0$;
$$z_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2};$$
$L = \{1{,}5\}$

j) $120z - 5z^2 = 640$; $\,| -640$
$-5z^2 + 120z - 640 = 0$; $\,| : (-5)$
$z^2 - 24z + 128 = 0$;
$(z - 8)(z - 16) = 0$;
$z_1 = 8$; $z_2 = 16$; $\quad L = \{8; 16\}$

k) $2z^2 - 5 = -3z$; $\,| +3z$; $\quad 2z^2 + 3z - 5 = 0$;
$$z_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4};$$
$z_1 = 1$; $z_2 = -2{,}5$; $\,L = \{-2{,}5; 1\}$

l) $z + 2 - 3z^2 = 0$; $\,| \cdot (-1)$
$3z^2 - z - 2 = 0$;
$$z_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6}$$
$z_1 = 1$; $z_2 = -\frac{2}{3}$; $\quad L = \left\{-\frac{2}{3}; 1\right\}$

m) $u^2 - 6u + 5 = 0$;
$(u-1)(u-5) = 0$;
$u_1 = 1$; $u_2 = 5$; $L = \{1; 5\}$

n) $u^2 - 2 = 0$; $\mid +2$
$u^2 = 2$;
$u_1 = \sqrt{2}$; $u_2 = -\sqrt{2}$; $L = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

o) $0{,}5u = u$; $\mid -u$
$-0{,}5u = 0$;
$u = 0$; $L = \{0\}$

p) $u^2 + u - 2 = 0$;
$(u+2)(u-1) = 0$;
$u_1 = -2$; $u_2 = 1$; $L = \{-2; 1\}$

K2/5 **7** **a)** $x^2 + 9x - 52 = 0$
$L = \{-13; 4\}$

b) $x^2 - 3x - 70 = 0$
$L = \{-7; 10\}$

c) $x^2 - \frac{1}{2}x - 5 = 0$
$L = \{-2; 2{,}5\}$

d) $x^2 - 10x + 21 = 0$
$L = \{3; 7\}$

K2/5 **8** **a)** $x^2 + 8x - c = 0$ $\quad D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-c) = 64 + 4c > 0 \Rightarrow c > -16$
Setzt man also beispielsweise $c = 0$, so hat die Gleichung zwei Lösungen.

b) $x^2 + 8x - c = 0$ $\quad -2$ ist Lösung: $(-2)^2 + 8 \cdot (-2) - c = 0 \Rightarrow c = -12$
Somit lautet die Gleichung $x^2 + 8x + 12 = 0$. Diese Gleichung besitzt noch eine weitere Lösung, da ihre Diskriminante $D = 64 - 48 = 16$ positiv ist.

c) nicht möglich, denn $f(x) = x^2 + 8x = x(x+8)$ ist eine Normalparabel mit den Nullstellen $x_1 = -8$ und $x_2 = 0$, also liegt der Scheitelpunkt bei $S(-4 \mid -16)$. Beim Schneiden mit $g(x) = c$ ist deshalb mindestens eine Lösung negativ.

d) Da der Scheitelpunkt der Parabel $f(x) = x^2 + 8x$ bei $S(-4 \mid -16)$ liegt (vgl. c), muss für c gelten: $-16 < c < 0$.
Setzt man also beispielsweise $c = -1$, so hat die Gleichung zwei negative Lösungen.

e) $D = 64 + 4c = 0 \Rightarrow c = -16$ (vgl. a))

f) Für $c > 0$ liegt eine positive und eine negative Lösung vor.

K1/5 **9** **a)** $D = \left(-\frac{7}{10}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = -0{,}01 < 0$ keine Lösung

b) $D = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{2}{9} < 0$ keine Lösung

c) $D = \left(\frac{1}{12}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{24} \cdot 1{,}5 = -\frac{35}{144} < 0$ keine Lösung

d) $D = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{17}{18} = -\frac{127}{36}$ keine Lösung

e) $D = \left(\frac{26}{5}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{576}{25} > 0$ zwei Lösungen

f) $x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$ eine Lösung

K5 **10**

	a) Nullstellen	**b) Nullstellenform**	**c) Scheitelpunktform**
1	$3{,}5; -6{,}5$	$y = (x - 3{,}5)(x + 6{,}5)$	$y = (x + 1{,}5)^2 - 25$
2	-6	–	–
3	$\frac{5}{3}; -3$	$y = 1{,}5\left(x - \frac{5}{3}\right)(x + 3)$	$y = 1{,}5\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 8\frac{1}{6}$
4	$1 \pm \sqrt{7}$	$y = -\frac{1}{6}(1 + \sqrt{7})(1 - \sqrt{7})$	$y = -\frac{1}{6}(x - 1)^2 + \frac{7}{6}$

Anmerkung zu a): Bei 1, 3 und 4 werden die Nullstellen mit der Lösungsformel ermittelt.
Anmerkung zu c): x_S ist der Mittelwert zwischen den Nullstellen; $y_S = f(x_S)$.

K2/5 **11** **a)** $x^2 + 6x + \blacksquare = 0$
$x_{1/2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \blacksquare} = -3 \pm \sqrt{9 - \blacksquare}$
$-3 \pm \sqrt{9 - \blacksquare} = -2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{9 - \blacksquare} = 1 \Leftrightarrow 9 - \blacksquare = 1 \Leftrightarrow \blacksquare = 8$
Die Gleichung lautet: $x^2 + 6x + 8 = 0$.

b) $b^2 - 10b - \blacksquare = 0$
$b_{1/2} = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10}{2}\right)^2 + \blacksquare} = 5 \pm \sqrt{25 + \blacksquare}$

$5 \pm \sqrt{25 + \blacksquare} = 2 \;\Leftrightarrow\; \pm\sqrt{25 + \blacksquare} = -3 \;\Leftrightarrow\; 25 + \blacksquare = 9 \;\Leftrightarrow\; \blacksquare = -16$

Die Gleichung lautet: $b^2 - 10b + 16 = 0$.

c) $a^2 + 8a - \blacksquare = 0$

$a_{1/2} = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + \blacksquare} = -4 \pm \sqrt{16 + \blacksquare}$

$-4 \pm \sqrt{16 + \blacksquare} = -6 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{16 + \blacksquare} = -2 \;\Leftrightarrow\; 16 + \blacksquare = 4 \;\Leftrightarrow\; \blacksquare = -12$

Die Gleichung lautet: $a^2 + 8a + 12 = 0$.

d) $3g^2 - 4g + \blacksquare = 2g^2 \;\Leftrightarrow\; g^2 - 4g + \blacksquare = 0$

$g_{1/2} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - \blacksquare} = 2 \pm \sqrt{4 - \blacksquare}$

$2 \pm \sqrt{4 - \blacksquare} = -1 \;\Leftrightarrow\; \pm\sqrt{4 - \blacksquare} = -3 \;\Leftrightarrow\; 4 - \blacksquare = 9 \;\Leftrightarrow\; \blacksquare = -5$

Die Gleichung lautet: $3g^2 - 4g - 5 = 2g^2$.

K 5/6 **12** Jana wählt das Vorzeichen von c falsch. Verbesserung:

$x^2 - 6x = 7 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 6x - 7 = 0 \;\Rightarrow\; a = 1;\ b = -6;\ c = -7$

Mit der Lösungsformel erhält man die Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 7$.

Irini setzt in die Lösungsformel im Zähler $b = -6$ statt $-b = 6$ ein. Verbesserung:

$x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = -1$ und $x_2 = 7$

Cem klammert auf der linken Seite x aus und löst die Gleichung dann so, als würde auf der rechten Seite 0 statt 7 stehen. Verbesserung: Da auf der rechten Seite nicht 0 steht, ist das Ausklammern von x auf der linken Seite keine sinnvolle Lösungsstrategie. Mit der Lösungsformel erhält man die Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 7$.

K 1/2 **13 a)** Die Aussage ist falsch. Die Diskriminante D der Gleichung $f(x) = 0$ ist $D = 56{,}25 + 16 = 72{,}25 > 0$. Somit hat die Gleichung $f(x) = 0$ zwei Lösungen und f zwei Nullstellen.

b) Die Aussage ist falsch. Die Diskriminante D der Gleichung $f(x) = 0$ ist $D = 0 - 4 \cdot (-3) \cdot (-0{,}5) = -6 < 0$. Somit hat die Gleichung $f(x) = 0$ keine Lösung, und f hat keine Nullstelle. Damit gibt es auch keine Nullstellenform für f.

c) Die Aussage ist wahr. Der Scheitelpunkt $S(2\,|\,-12)$ liegt unterhalb der x-Achse und die Parabel ist nach oben geöffnet $(a = 4)$. Somit hat $f(x)$ zwei Nullstellen.

d) Die Aussage ist wahr, da die Nullstellen -3 und 3 symmetrisch zur y-Achse liegen.

e) Die Aussage ist wahr. Die Diskriminante D der Gleichung $f(x) = 0$ ist $D = 0 - 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot 7 = -5{,}6 < 0$. Somit hat die Gleichung $f(x) = 0$ keine Lösung, und f hat keine Nullstelle.

Alternative Begründung: Der Scheitelpunkt $S(0\,|\,7)$ liegt oberhalb der x-Achse und die Parabel ist nach oben geöffnet $\left(a = \frac{1}{5}\right)$. Somit hat $f(x)$ keine Nullstelle.

f) Die Aussage ist falsch. Man kann an der Funktionsgleichung die Nullstelle $x = 4$ ablesen.

K 2/5 **14** a) Die gesuchte Zahl sei x; $G = \mathbb{R}^+$.

$x = x^2 - 1; \quad | -x^2 + 1$

$-x^2 + x + 1 = 0; \quad | \cdot (-1)$

$x^2 - x - 1 = 0;$

$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};\quad x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \in G;\ x_1 \approx 1{,}62;\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \notin G.$

b) Die gesuchte Zahl sei x; $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$x = 1 + \frac{1}{x}; \quad | \cdot x$

$x^2 = x + 1; \quad | -x - 1$

$x^2 - x - 1 = 0$; vgl. a:

$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \in G;\ x_1 \approx 1{,}62;\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \in G;\ x_2 \approx -0{,}62.$

K2/5 **15** Beispiele:

a) $x^2 - 1 = 0$; $\quad 0{,}5x^2 = 0{,}5$; $\quad 0{,}4x^2 + x - 0{,}4 = x$

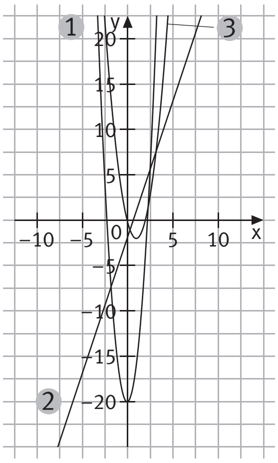
b) $4x^2 + 8 = 8$; $\quad 2x^2 = 0$; $\quad x^2 + x = x$

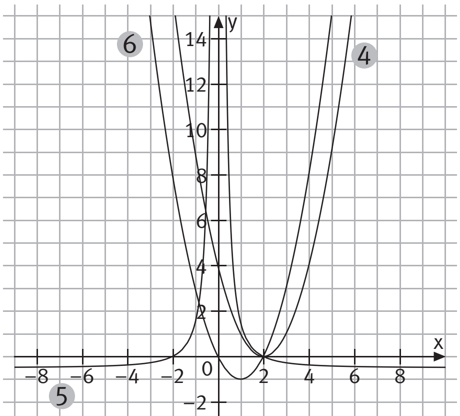
c) $x^2 + x + 1 = 0$; $\quad 2x^2 + 4 = 0$; $\quad 5x^2 + x = x - 10$

d) $x^2 = 3$; $\quad 9x^2 - 27 = 0$; $\quad 0{,}3x^2 + 0{,}1 = 1$

e) $x^2 - 8x + 16 = 0$; $\quad 0{,}5x^2 = 4x - 23$; $\quad x(x-4) = 4(x-4)$

K1/4 **16** **a)**





Nullstellen: ① $\pm\sqrt{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 0; 2 ④ 2 ⑤ ±2 ⑥ 0; 2

b) Die Nullstellen werden in der DGS-Grafik so genau wie möglich angegeben. Liegen sie auf Gitterlinien, wie bei ③ bis ⑥, so kann man sie (im Rahmen der Genauigkeit der Darstellung in der DGS) gut ablesen. Haben sie aber nicht ganzzahlige Werte, ist das Ablesen ungenau und liefert im Allgemeinen nur Näherungswerte.

K2/6 **17** Ermittle die Diskriminante der quadratischen Gleichung $2x^2 - 2x + 3 = 0$ und begründe dann, dass die Lösungsmenge dieser Gleichung leer ist.

K2/5 **18** **a)** Mögliche Vermutung: p-q-Lösungsformel $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

b) allgemeine Lösunsformel:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{4 \cdot \left(\frac{b^2}{4} - ac\right)} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}$$

In der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ist $a = 1$, $b = p$, $c = q \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

c) ① $p = -16;\ q = 15 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{-16}{2} \pm \sqrt{(-8)^2 - 15} \Rightarrow x_1 = 15;\ x_2 = 1$

② $p = -7{,}5;\ q = -8{,}5 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{-7{,}5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-7{,}5}{2}\right)^2 - (-8{,}5)} \Rightarrow x_1 = 8{,}5;\ x_2 = -1$

③ $p = 3;\ q = -88 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (-88)} \Rightarrow x_1 = 8;\ x_2 = -11$

④ $p = -\frac{2}{3};\ q = \frac{1}{12} \Rightarrow x_{1/2} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = \frac{1}{6}$

d) Wenn man die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ durch $a\ (\neq 0)$ dividiert, erhält man die äquivalente Gleichung $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, die man mit der p-q-Formel lösen kann (mit $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$).
Dies kann sinnvoll sein, wenn b und c durch a teilbar sind (denn dann sind p und q ganze Zahlen) oder wenn man für p und q sehr einfache Dezimalzahlen erhält.

K6 **19** ① Eine quadratische Gleichung ist nicht lösbar, wenn ihre Diskriminante negativ ist. Die Diskriminante D wird durch Einsetzen von a, b und c berechnet: $D = 56 + 4m$. Da die Gleichung für $D < 0$ keine Lösung besitzt, betrachtet man die Ungleichung $56 + 4m < 0$. Ihre Lösung lautet $m < -14$.
Für $m < -14$ ist die gegebene Gleichung somit nicht lösbar.

2 Eine quadratische Gleichung hat zwei Lösungen, wenn ihre Diskriminante positiv ist. Die Diskriminante D wird durch Einsetzen von a, b und c berechnet: $D = 4s^2 + 32$. Da die Gleichung für $D > 0$ zwei Lösungen besitzt, betrachtet man die Ungleichung $4s^2 + 32 > 0$ bzw. nach Umformen $s^2 > -8$. Diese Ungleichung ist für jeden Wert von s erfüllt. Die gegebene Gleichung hat somit für jeden Wert von s zwei Lösungen.

K 2/5

20 a) Für $x \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$x + x^2 = 132$
$x^2 + x - 132 = 0$
$x_1 = -12 \notin \mathbb{N}$; $x_2 = 11 \in \mathbb{N}$
$x = 11$

Die gesuchte Zahl ist 11.

b) Für $x \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$x \cdot (x + 1) = 812$
$x^2 + x - 812 = 0$
$x_1 = -29 \notin \mathbb{N}$; $x_2 = 28$
$x = 28$

Die Zahlen lauten 28 und 29.

c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ soll gelten:

I $x - y = 7 \Rightarrow x = 7 + y$
II $x \cdot y = 450$

I in II einsetzen:

$y^2 + 7y - 450 = 0$
$y_1 = -25$; $y_2 = 18$

Die Zahlenpaare sind $(-18 \mid -25)$ und $(25 \mid 18)$.

d) Für $x \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$(2x)^2 + (2x + 2)^2 + (2x + 4)^2 + (2x + 6)^2 = 1176$
$16x^2 + 48x - 1120 = 0$
$x^2 + 3x - 70 = 0$
$x_1 = -10 \notin \mathbb{N}$; $x_2 = 7 \in \mathbb{N}$
$x = 7$

Die Zahlen lauten 14, 16, 18 und 20.

e) Für $x, y \in \mathbb{R}$ soll gelten:

I $x + 12 = y$
II $x \cdot y = 864$

I in II einsetzen:

$x \cdot (x + 12) = 864$
$x^2 + 12x - 864 = 0$
$x_1 = -36$; $x_2 = 24$.

Die Zahlenpaare sind $(-36 \mid -24)$ und $(24 \mid 36)$.

K 1/6

21 Theos Lösungsweg ist richtig, es gibt aber einen einfacheren Weg: Aus der gegebenen Nullstellenform können die beiden Nullstellen der Funktion abgelesen werden (1 und –5). Ihr Mittelwert x_S ist die x-Koordinate des Scheitelpunkts. Mit $y_S = f(x_S)$ erhält man die y-Koordinate des Scheitelpunkts $S(x_S \mid y_S)$:

$x_S = \frac{1 + (-5)}{2} = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{1}{4}(-2 - 1)(-2 + 5) = -\frac{9}{4} = -2{,}25 \Rightarrow S(-2 \mid -2{,}25)$.

Strategiewissen

Concept Map

K4/6

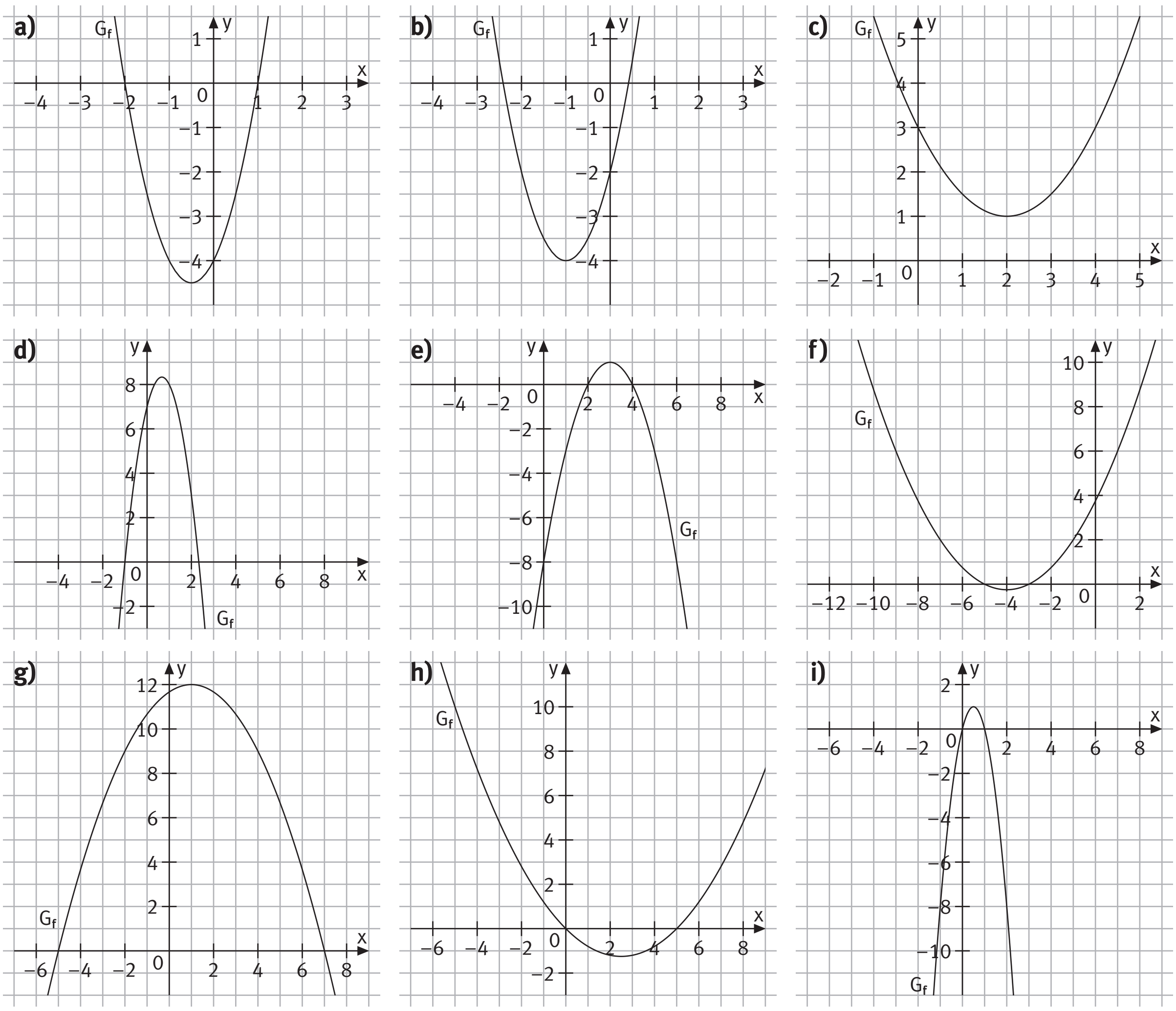
- Vorteile der Darstellungsformen:
  - allgemeine Form: Die Schnittstelle mit der y-Achse ist direkt ablesbar; die Nullstellen kann man daraus mit der Lösungsformel berechnen.
  - Scheitelpunktform: Man kann die Koordinaten des Scheitels unmittelbar ablesen.
  - Nullstellenform: Man kann die Nullstellen direkt ablesen.

  Den Wert des Parameters a kann man aus allen Darstellungsformen direkt ablesen.

K2/5

- Die gegebene Form der Funktionsgleichung ist jeweils fett markiert.

	allgemeine Form	Scheitelform	Nullstellenform	Nullstellen	Scheitel
a)	$2x^2+2x-4$	$2(x+0{,}5)^2-4{,}5$	$\mathbf{2(x-1)(x+2)}$	$1; -2$	$S(-0{,}5\mid -4{,}5)$
b)	$2x^2+4x-2$	$\mathbf{2(x+1)^2-4}$	$2(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$	$-1\pm\sqrt{2}$	$S(-1\mid -4)$
c)	$\mathbf{0{,}5x^2-2x+3}$	$0{,}5(x-2)^2+1$	keine	keine	$S(2\mid 1)$
d)	$\mathbf{-3x^2+4x+7}$	$-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{25}{3}$	$-3(x+1)\left(x-\frac{7}{3}\right)$	$-1; \frac{7}{3}$	$S\left(\frac{2}{3}\mid\frac{25}{3}\right)$
e)	$-x^2+6x-8$	$-(x-3)^2+1$	$\mathbf{-(x-4)(x-2)}$	$2; 4$	$S(3\mid 1)$
f)	$\frac{1}{4}x^2+2x+3\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}(x+4)^2-\frac{1}{4}$	$\mathbf{\frac{1}{4}(x+3)(x+5)}$	$-3; -5$	$S\left(-4\mid -\frac{1}{4}\right)$
g)	$-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+11\frac{2}{3}$	$\mathbf{-\frac{1}{3}(x-1)^2+12}$	$-\frac{1}{3}(x-7)(x+5)$	$7; -5$	$S(1\mid 12)$
h)	$\mathbf{0{,}2x^2-x}$	$0{,}2(x-2{,}5)^2-1{,}25$	$0{,}2x(x-5)$	$0; 5$	$S(2{,}5\mid -1{,}25)$
i)	$-4x^2+4x$	$-4(x-0{,}5)^2+1$	$\mathbf{-4x(x-1)}$	$0; 1$	$S(0{,}5\mid 1)$



K2/4 **22 a)** $D = 16t^2 - 4 = 0 \Rightarrow t^2 = 0{,}25$
eine Lösung für $t = \pm 0{,}5$
zwei Lösungen für $t < -0{,}5$ bzw. $t > 0{,}5$
keine Lösung für $-0{,}5 < t < 0{,}5$

b) $D = 36k^2 + 24 > 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$
Die Gleichung hat stets zwei Lösungen.

c) $4x^2 - 4x - 4m - 2 = 0$
$x^2 - x - m - 0{,}5 = 0$
$x^2 - x - (m + 0{,}5) = 0$
$D = 1 + 4(m + 0{,}5) = 4m + 3 = 0 \Rightarrow m = -0{,}75$
eine Lösung für $m = -0{,}75$
zwei Lösungen für $m > -0{,}75$
keine Lösung für $m < -0{,}75$

K2/5 **23 a)** $x \cdot (4 \cdot x) = 100$
$4x^2 = 100$
$x^2 = 25$
$x_1 = -5$; $x_2 = 5$
$L = \{-5; 5\}$

b) I $\quad x \cdot y = -124 \Leftrightarrow x = -\frac{124}{y}$
II $\quad x - 3 = \frac{1}{5}y$
I in II einsetzen:
$-\frac{124}{y} - 3 = \frac{1}{5}y \Leftrightarrow \frac{1}{5}y^2 + 3y + 124 = 0$
$y^2 + 15y + 620 = 0$
$y_{1/2} = -7{,}5 \pm \sqrt{7{,}5^2 - 620}$
$L = \{\ \}$
Es existieren keine Zahlen mit solchen Eigenschaften.

c) Lösungsmöglichkeit: Der vierte Teil einer Zahl ist um 1,25 kleiner als das Quadrat der Zahl.
$\frac{x}{4} + 1{,}25 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{4}x - 1{,}25 = 0$
$x_{1/2} = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{5}{4}} = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8} \pm \frac{9}{8}$
$L = \{-1; 1{,}25\}$

K5 **24 a)** $\frac{x}{3} + \frac{3}{x} = 2$; $\mid \cdot 3x \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x^2 + 9 = 6x$; $\mid -6x$
$x^2 - 6x + 9 = 0$; $(x - 3)^2 = 0$; $x = 3 \in D$; $\quad L = \{3\}$
Probe: L. S.: $1 + 1 = 2$; R. S.: 2 ✓

b) $\frac{x}{n} + \frac{n}{x} = 2$; $\mid \cdot nx \quad n \in \mathbb{N}$; $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x^2 + n^2 = 2nx$; $\mid -2nx$
$x^2 - 2nx + n^2 = 0$; $(x - n)^2 = 0$; $x = n$; $\quad L = \{n\}$
Probe: L. S.: $1 + 1 = 2$; R. S.: 2 ✓

c) $\frac{x}{2x - 1} - \frac{2x}{x - 0{,}5} = 0$; $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{0{,}5\}$
$\frac{x}{2(x - 0{,}5)} - \frac{2x}{x - 0{,}5} = 0$; $\mid \cdot 2(x - 0{,}5)$
$x - 4x = 0$; $-3x = 0$; $x = 0$; $\quad L = \{0\}$
Probe: L. S.: $0 - 0 = 0$; R. S.: 0 ✓

d) $\frac{x}{1 + x} = \frac{4 - x}{1 - x^2}$; $\mid \cdot (1 + x)(1 - x) \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
$x(1 - x) = 4 - x$; $\mid -4 + x$
$x - x^2 - 4 + x = 0$;
$-x^2 + 2x - 4 = 0$; $\mid \cdot (-1)$
$x^2 - 2x + 4 = 0$: die Lösungsmenge L ist die leere Menge, da die Diskriminante
$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12 < 0$ ist: $L = \{\ \}$

e) $\frac{\sqrt{x}}{n} = \frac{n}{\sqrt{x}}$; $\mid \cdot n \cdot \sqrt{x} \quad n \in \mathbb{N}$; $\quad D = \mathbb{R}^+$
$x = n^2$; $L = \{n^2\}$
Probe: L. S.: $\frac{n}{n} = 1$; R. S.: $\frac{n}{n} = 1$ ✓

f) $\frac{6}{3x - 1} - 1 = \frac{8}{3 + x}$; $\mid \cdot (3x - 1) \cdot (3 + x) \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{-3; \frac{1}{3}\right\}$
$6(3 + x) - (3x - 1)(3 + x) = 8(3x - 1)$;
$18 + 6x - 9x - 3x^2 + 3 + x = 24x - 8$; $\mid -24x + 8$
$-3x^2 - 26x + 29 = 0$; $\mid \cdot (-1)$
$3x^2 + 26x - 29 = 0$;
$x_{1/2} = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-29)}}{2 \cdot 3} = \frac{-26 \pm \sqrt{1024}}{6} = \frac{-26 \pm 32}{6}$;
$x_1 = 1$; $x_2 = -9\frac{2}{3}$
Probe für $x_1 = 1$:
L. S.: $\frac{6}{3 - 1} - 1 = \frac{6}{2} - 1 = 3 - 1 = 2$;
R. S.: $\frac{8}{3 + 1} = \frac{8}{4} = 2$ ✓
Probe für $x_2 = -9\frac{2}{3}$:
L. S.: $\frac{6}{-29 - 1} - 1 = -\frac{6}{30} - 1 = -\frac{1}{5} - 1 = -1\frac{1}{5}$;
R. S.: $\frac{8}{3 - 9\frac{2}{3}} = \frac{8}{-\frac{20}{3}} = -\frac{24}{20} = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5}$ ✓

K2/5 **25 a)** Anzahl der Diagonalen eines n-Ecks: $z(n) = \frac{n(n-3)}{2}$; $D_z = \mathbb{N} \setminus \{1; 2; 3\}$

b) $z(12) = (12 \cdot 9) : 2 = 54$; $z(17) = (17 \cdot 14) : 2 = 119$; $z(100) = (100 \cdot 97) : 2 = 4\,850$

c) ① $\frac{n(n-3)}{2} = 35$; $| \cdot 2$
$n^2 - 3n = 70$; $| -70$
$n^2 - 3n - 70 = 0$;
$(n - 10)(n + 7) = 0$;
$n_1 = 10$: Zehneck; $n_2 = -7 \notin D_z$

② $\frac{n(n-3)}{2} = 65$; $| \cdot 2$
$n^2 - 3n = 130$; $| -130$
$n^2 - 3n - 130 = 0$;
$(n - 13)(n + 10) = 0$;
$n_1 = 13$: Dreizehneck; $n_2 = -10 \notin D_z$

③ $\frac{n(n-3)}{2} = 135$; $| \cdot 2$
$n^2 - 3n = 270$; $| -270$
$n^2 - 3n - 270 = 0$;
$(n - 18)(n + 15) = 0$;
$n_1 = 18$: Achtzehneck; $n_2 = -15 \notin D_z$

④ $\frac{n(n-3)}{2} = 5\,150$; $| \cdot 2$
$n^2 - 3n = 10\,300$; $| -10\,300$
$n^2 - 3n - 10\,300 = 0$;
$(n - 103)(n + 100) = 0$;
$n_1 = 103$: Einhundertdreieck; $n_2 = -100 \notin D_z$

K2/5 **26 a)** $x^2 - 2{,}5x + 1 = 0$; $x_{1/2} = \frac{2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-2{,}5 \pm \sqrt{2{,}25}}{2} = \frac{-2{,}5 \pm 1{,}5}{2}$;
$x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = -2$: Eulers Aussage ist bestätigt.
$3y^2 + 10y + 3 = 0$; $y_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{6} = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-10 \pm 8}{6}$;
$y_1 = -\frac{1}{3}$; $y_2 = -3$: Eulers Aussage ist bestätigt.

b) Durch gezieltes Probieren findet man heraus, dass es sich um die Zahlen $\frac{4}{15}$ und $\frac{15}{4}$ handelt.
Probe:
Summe dieser beiden Zahlen: $\frac{4}{15} + \frac{15}{4} = 4\frac{1}{60}$ ✓
Produkt dieser beiden Zahlen: 1 ✓
Man kann aber auch (nach Euler und Vieta; vgl. S. 65 im Schulbuch) wegen $x_1 + x_2 = 4\frac{1}{60}$ und $x_1 \cdot x_2 = 1$ vom Ansatz $1 \cdot x^2 - 4\frac{1}{60}x + 1 = 0$ ausgehen:
$x^2 - 4\frac{1}{60}x + 1 = 0$; $| \cdot 60$
$60x^2 - 241x + 60 = 0$; $D = 241^2 - 4 \cdot 60 \cdot 60 = 43\,681 = 209^2$
$x_{1/2} = \frac{241 \pm 209}{120}$; $x_1 = \frac{450}{120} = \frac{15}{4}$; $x_2 = \frac{32}{100} = \frac{4}{15}$; $x_1 \cdot x_2 = 1$

K2/6 **27 a)** Luis ersetzt (substituiert) in der gegebenen Gleichung x^2 durch u, also auch x^4 durch u^2.
Die erhaltene Gleichung für u löst Luis mit der Lösungsformel und erhält die beiden Lösungen u_1 und u_2. Jeder dieser beiden u-Werte steht für x^2, Luis erhält also wegen $x_{1/2} = \pm\sqrt{u_1}$ und $x_{3/4} = \pm\sqrt{u_2}$ vier Lösungen der ursprünglichen Gleichung.

b) ① Substitution $u = x^2$, Lösungsformel $\Rightarrow$ $L = \{-2; -1; 1; 2\}$
② Ein Produkt hat den Wert null, wenn mindestens einer der Faktoren den Wert null hat. Die erste Klammer ist immer $\neq 0$, die zweite hat für $y = \pm 8$ den Wert null: $L = \{-8; 8\}$
③ Substitution $u = \sqrt{x}$ ergibt $u_1 = 4$; $u_2 = 1$ $\Rightarrow$ $L = \{1; 16\}$
④ Substitution $u = x^2$ ergibt $u_1 = 1$; $u_2 = -0{,}5$. $u < 0$ ist unmöglich, also $L = \{-1; 1\}$.
⑤ Substitution $u = x^2$ ergibt
$u_1 = 4 + \sqrt{2}$; $x_{1/2} = \pm\sqrt{4 + \sqrt{2}}$; $u_2 = 4 - \sqrt{2}$; $x_{3/4} = \pm\sqrt{4 - \sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ $L = \{\pm 2{,}33; \pm 1{,}61\}$
⑥ $L = \{\,\}$, denn der Termwert ist immer positiv (≥ 7).
⑦ Substitution $u = x^2$ ergibt $u_1 = 1$; $x_{1/2} = \pm 1$; $u_2 = -\frac{2}{3} < 0$ ist nicht möglich $\Rightarrow$ $L = \{-1; 1\}$
⑧ Substitution $u = y^2$ ergibt $u_1 = 5$; $y_{1/2} = \pm\sqrt{5}$; $u_2 = -2 < 0$ ist nicht möglich $\Rightarrow$ $L = \{\pm\sqrt{5}\}$
⑨ Ausklammern liefert $x^2(16 - x^2) = 0$. Wie in ② folgt $x_{1/2} = 0$; $x_3 = -4$ und $x_4 = 4$: $L = \{-4; 0; 4\}$

K2/3 **28** Anzahl der (ursprünglich) angemeldeten Personen: $x \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Fahrpreis pro Person in €: $\frac{450}{x}$

Anzahl der Mitfahrer: $x - 5$

Fahrpreis pro Mitfahrer in €: $\frac{450}{x-5}$

$\frac{450}{x-5} = \frac{450}{x} + 1; \quad | \cdot (x-5) \cdot x$

$450x = 450(x-5) + x(x-5);$

$450x = 450x - 2\,250 + x^2 - 5x; \quad | -450x + 2\,250 - x^2 + 5x$

$-x^2 + 5x + 2\,250 = 0; \quad | \cdot (-1)$

$x^2 - 5x - 2\,250 = 0;$

$(x - 50)(x + 45) = 0;$

$x_1 = 50; \; x_2 = -45 \notin G$

Es hatten sich zunächst 50 Personen angemeldet; der Fahrpreis pro Person betrug somit zunächst (450 € : 50 =) 9 €. Da aber nur (50 – 5 =) 45 Personen mitfuhren, betrug der Fahrpreis pro Person (450 € : 45 =) 10 €.

Der Fahrpreis verteuerte sich somit für jede Person um $\left(\frac{1\,€}{9\,€} = \frac{1}{9} \approx\right)$ 11 %.

Quadratische Gleichungen mit dem Satz von Vieta lösen Strategiewissen

K4/6
- Individuelle Präsentationen. Informationen über François Viète findet man in einem Lexikon oder im Internet.

K4/6
- Bedeutende mathematische Verdienste des Francois Viète sind z. B. die Einführung der Schreibweise mit Buchstaben als Symbolen in Berechnungen. Er veröffentlichte wichtige Arbeiten zur Trigonometrie, zum Beginn der Infinitesimalrechnung, zur Kreiszahl π, zum Gregorianischen Kalender und zu dem nach ihm benannten Satz von Vieta.

K2/5
- Das Vorgehen ergibt sich aus den Spalten der Tabelle

	Term	zerlegt in Linearfaktoren	quadratische Gleichung	Lösung x_1	Lösung x_2	Lösungsmenge über $G = \mathbb{R}$
a)	$x^2 - 4x - 21$	$(x-7)(x+3)$	$x^2 - 4x - 21 = 0$	7	−3	{−3; 7}
b)	$x^2 + 3x - 10$	$(x+5)(x-2)$	$x^2 + 3x - 10 = 0$	−5	2	{−5; 2}
c)	$x^2 + 3x - 4$	$(x+4)(x-1)$	$x^2 + 3x - 4 = 0$	−4	1	{−4; 1}
d)	$x^2 + x - 6$	$(x+3)(x-2)$	$x^2 + x - 6 = 0$	−3	2	{−3; 2}
e)	$x^2 + 8x + 7$	$(x+7)(x+1)$	$x^2 + 8x + 7 = 0$	−7	−1	{−7; −1}
f)	$x^2 - 15x + 26$	$(x-13)(x-2)$	$x^2 - 15x + 26 = 0$	13	2	{2; 13}
g)	$x^2 + 5x + 6$	$(x+2)(x+3)$	$x^2 + 5x + 6 = 0$	−2	−3	{−3; −2}
h)	$x^2 - 5x - 6$	$(x-6)(x+1)$	$x^2 - 5x - 6 = 0$	6	−1	{−1; 6}
i)	$x^2 - 5x + 6$	$(x-2)(x-3)$	$x^2 - 5x + 6 = 0$	2	3	{2; 3}
j)	$x^2 + 5x - 6$	$(x+6)(x-1)$	$x^2 + 5x - 6 = 0$	−6	1	{−6; 1}
k)	$x^2 + x - 2$	$(x+2)(x-1)$	$x^2 + x - 2 = 0$	−2	1	{−2; 1}
l)	$x^2 - 3x + 2$	$(x-1)(x-2)$	$x^2 - 3x + 2 = 0$	1	2	{1; 2}

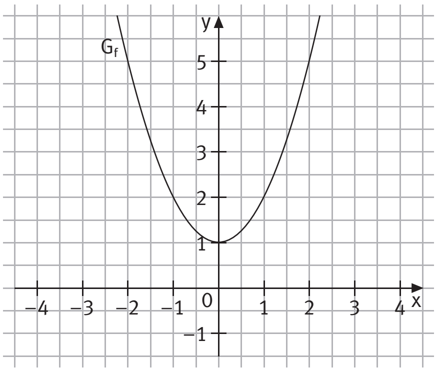
K1/2
- 1 Da $c = x_1 \cdot x_2$ gilt, weiß man: Ist $c > 0$, so haben die beiden Lösungen das gleiche Vorzeichen, ist $c < 0$, so sind ihre Vorzeichen verschieden.

  2 Auf diese Gleichung ist der Satz von Vieta nicht anwendbar, da $a \neq 1$ ist. Wegen $D = -103 < 0$ hat die Gleichung keine Lösung.

K 1/5 **1** $x_A^2 = (-5{,}5)^2 = 30{,}25 = y_A$
$\Rightarrow$ A liegt auf der Normalparabel.
$x_B^2 = 1{,}2^2 = 1{,}44 \neq y_B$
$\Rightarrow$ B liegt nicht auf der Normalparabel.
$x_C^2 = (-1{,}5)^2 = 2{,}25 \neq y_C$
$\Rightarrow$ C liegt nicht auf der Normalparabel.

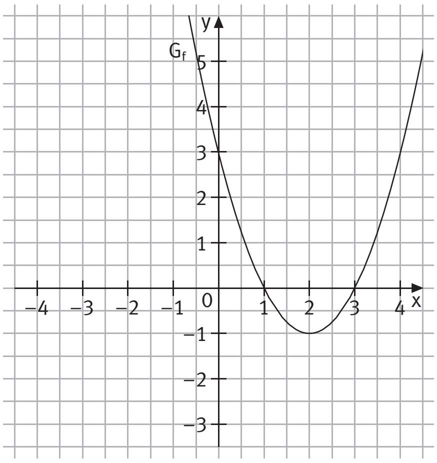
A liegt auf der Normalparabel, da $y_A = x_A^2$ ist.
B liegt unterhalb der Normalparabel, da $y_B < x_B^2$ ist.
C liegt oberhalb der Normalparabel, da $y_C > x_C^2$ ist.

K 4/6 **2** **a)** $f(x) = x^2 + 1$



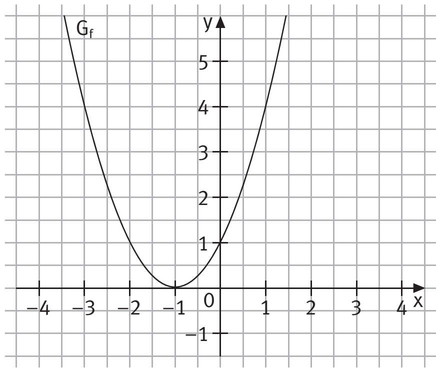
Der Graph ist eine um eine Einheit in positive y-Richtung verschobene Normalparabel.

b)



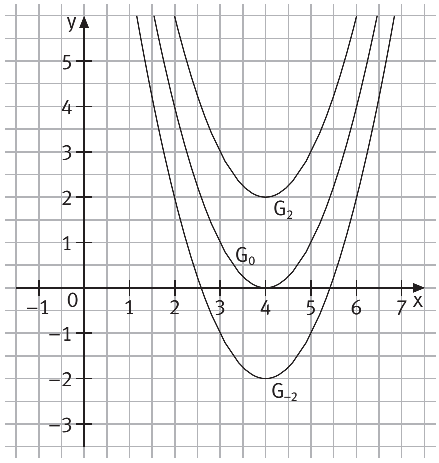
Der Graph ist eine um zwei Einheiten in positive x-Richtung und um eine Einheit in negative y-Richtung verschobene Normalparabel.

a) $f(x) = (x + 1)^2$



Der Graph ist eine um eine Einheit in negative x-Richtung verschobene Normalparabel.

b) Beispiele für $e \in \{-2; 0; 2\}$:

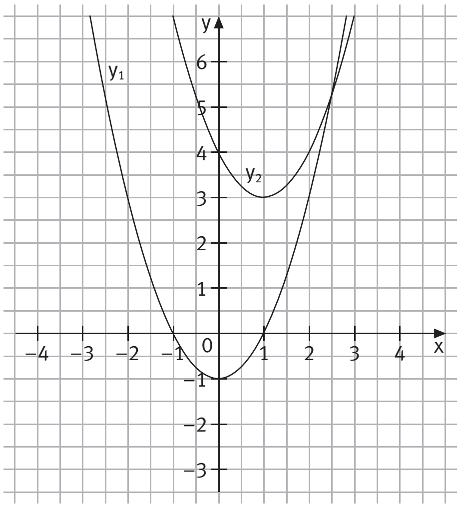


Die Graphen sind um vier Einheiten in positive x-Richtung und um e Einheiten in positive y-Richtung (für $e > 0$) bzw. in negative y-Richtung (für $e < 0$) verschobene Normalparabeln.

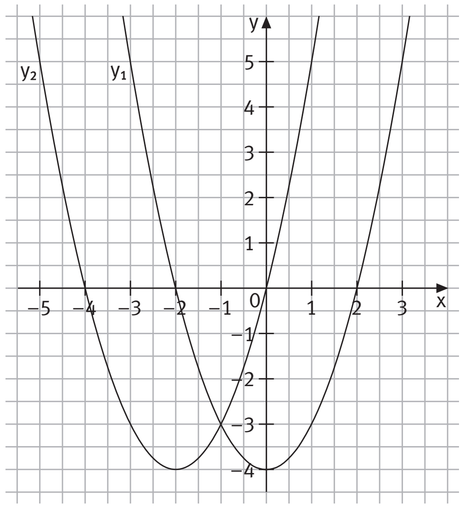
K 4/5 **3** $f(x) = x^2 - 2$; $S_f(0|-2)$
$g(x) = (x + 2)^2 + 2$; $S_g(-2|2)$
$h(x) = (x - 3)^2$; $S_h(3|0)$

$f(x) = (x - 1)^2$; $S_f(1|0)$
$g(x) = (x + 2)^2 + 0{,}5$; $S_g(-2|0{,}5)$
$h(x) = (x - 3)^2 - 2$; $S_h(3|-2)$

K4/5 **4** **a)** $y_1 = x^2 - 1$
b) $y_2 = (x-1)^2 + 3$



a) $y_1 = x^2 - 4$
b) $y_2 = (x+2)^2 - 4$



K5 **5** **a)** $f(x) = x^2 + c$
P eingesetzt in f ergibt:
$1 = 0^2 + c \;\Rightarrow\; c = 1$

b) $f(x) = (x+2)^2 + c$
P eingesetzt in f ergibt:
$1 = (1+2)^2 + c \;\Rightarrow\; c = -8$

a) $f(x) = x^2 + c$
P eingesetzt in f ergibt:
$6 = 2^2 + c \;\Rightarrow\; c = 2$

b) $f(x) = (x+c)^2 + 4$
P eingesetzt in f ergibt:
$4 = (1+c)^2 + 4 \;\Leftrightarrow\; 0 = (1+c)^2 \;\Rightarrow\; c = -1$

K1/6 **6**
1. Die Aussage ist wahr.
2. Die Aussage ist i. Allg. falsch; sie stimmt nur, wenn $c > 0$ ist.
3. Die Aussage ist im Sinne der Verschiebung der Parabel $y = ax^2$ wahr.
4. Die Aussage ist wahr. Für $|a| > 1$ ist G_f enger als die Normalparabel, für $|a| < 1$ ist sie weiter als die Normalparabel.
5. Die Aussage ist wahr. Für $a = 1$ ist G_f die um c Einheiten in y-Richtung verschobene Normalparabel.
6. Die Aussage ist falsch. Für $a = 0$ ist G_f die Gerade $y = c$ (Parallele zur x-Achse).

1. Die Aussage ist wahr.
2. Die Aussage ist i. Allg. falsch. Sie stimmt nur, wenn die y-Koordinate des Scheitelpunkts positiv ist.
3. Die Aussage ist falsch, denn $y_S = c - \frac{b^2}{4a}$.
4. Die Aussage ist wahr. Für $|a| > 1$ ist G_f enger als die Normalparabel, für $|a| < 1$ ist sie weiter als die Normalparabel.
5. Die Aussage ist wahr. Für $a = 1$ lässt sich $f(x)$ mit quadratischer Ergänzung schreiben als
$f(x) = x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4} + c\right)$.
G_f ist damit eine um $\frac{b}{2}$ in negative x-Richtung und um $-\frac{b^2}{4} + c$ in y-Richtung verschobene Normalparabel.
6. Die Aussage ist falsch. Für $a = 0$ ist G_f die Gerade $y = bx + c$.

K5/6 **7**

$f(x) =$	$(x-5)^2+2$	$-2x^2+x$
D	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
W	$[2; \infty[$	$\left]-\infty; \frac{1}{8}\right]$
Scheitelpunkt	$S(5\|2)$	$S\left(\frac{1}{4}\middle\|\frac{1}{8}\right)$
Anzahl Nullstellen	0	2
monoton fallend	für $x < 5$	für $x > \frac{1}{4}$
monoton steigend	für $x > 5$	für $x < \frac{1}{4}$
Symmetrieachse	$x = 5$	$x = \frac{1}{4}$

$f(x) =$	x^2+2x-8	$-2x^2+2x-4$
D	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
W	$[9; \infty[$	$]-\infty; 3{,}5]$
Scheitelpunkt	$S(-1\|-9)$	$S\left(\frac{1}{2}\middle\|-\frac{7}{2}\right)$
Anzahl Nullstellen	2	0
monoton fallend	$x < -1$	für $x > \frac{1}{2}$
monoton steigend	$x > -1$	für $x < \frac{1}{2}$
Symmetrieachse	$x = -1$	$x = \frac{1}{2}$

K5 **8**
a) $f(x) = (x-3)^2$ $S(3|0)$
b) $f(x) = 2x^2 + 2x$ $S\left(-\frac{1}{2}\middle|-\frac{1}{2}\right)$

a) $f(x) = (x-3)^2 + 1$ $S(3|1)$
b) $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$ $S(-1|4)$

K5 **9**
a) z. B. $f(x) = (x-2)^2$
b) $f(x) = 3 \cdot (x+1)^2 - 6$
c) z. B. $f(x) = x^2$

a) z. B. $f(x) = -x^2 - 1$
b) $f(x) = -0{,}5 \cdot (x-1)^2 + 1$
c) z. B. $f(x) = (x-2)(x-4)$

K2/5 **10**
$x^2 - 16x + 2$
$= x^2 - 16x + 8^2 - 8^2 + 2$
$= (x-8)^2 - 64 + 2$
$= (x-8)^2 - 62$

$\frac{1}{4}x^2 - 9x + \frac{4}{5}$
$= \frac{1}{4}x^2 - 9x + 9^2 - 9^2 + \frac{4}{5}$
$= \left(\frac{1}{2}x - 9\right)^2 - \frac{405}{5} + \frac{4}{5}$
$= \left(\frac{1}{2}x - 9\right)^2 - \frac{401}{5}$

K5/6 **11**
a) Ausklammern:
$x(x - 9{,}5) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 9{,}5$
$L = \{0; 9{,}5\}$
b) Ausklammern:
$x(7 - x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 7$
$L = \{0; 7\}$
c) Lösungsformel:
$x^2 - 5x + 6{,}25 = 0$
$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6{,}25}$
$\Rightarrow x = 2{,}5$
$L = \{2{,}5\}$
d) Lösungsformel:
$x^2 + 12x - 108 = 0$
$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{12}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + 108}$
$\Rightarrow x_1 = 6,\ x_2 = -18$
$L = \{-18; 6\}$

a) Ausklammern:
$x(2x + 5) = 0$
$\Rightarrow x = 0$ oder $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2{,}5$
$L = \{-2{,}5; 0\}$
b) Termumformung:
$9x^2 + 6x + 1 = 49 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{16}{3} = 0$
Lösungsformel:
$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}}$
$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{8}{3}$
$L = \left\{-\frac{8}{3}; 2\right\}$
c) Termumformung:
$\frac{2}{3}x^2 - 9 = 3 \cdot (x^2 - 3) + x \Leftrightarrow -\frac{7}{3}x^2 - x = 0$
Ausklammern:
$x\left(-\frac{7}{3}x - 1\right) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0 \vee -\frac{7}{3}x - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{7}$
$L = \left\{-\frac{3}{7}; 0\right\}$

d) Termumformung:

$x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} = \frac{25}{121} \Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{121}$

Radizieren: $x - \frac{4}{3} = \pm\frac{5}{11}$

$x_1 = \frac{4}{3} + \frac{5}{11} = \frac{59}{33}$

$x_2 = \frac{4}{3} - \frac{5}{11} = \frac{29}{33}$

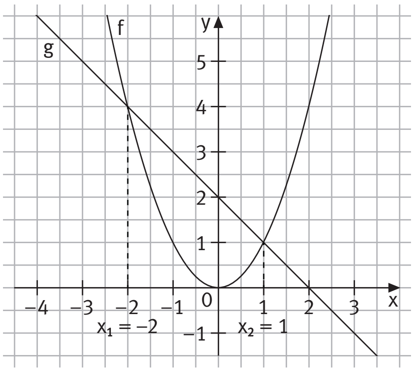
$L = \left\{\frac{29}{33}; \frac{59}{33}\right\}$

K4/6 **12** $x^2 = -x + 2$

Zeiche die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x + 2$, betrachte die x-Werte der Schnittpunkte: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

Dies sind die Lösungen der Gleichung, d. h.

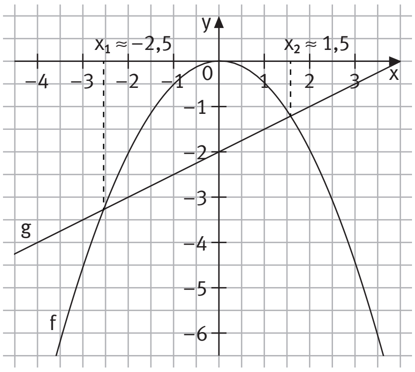
$L = \{-2; 1\}$



$-0{,}5x^2 = 0{,}5x - 2$

Zeiche die Funktionen $f(x) = -0{,}5x^2$ und $g(x) = 0{,}5x - 2$, betrachte die x-Werte der Schnittpunkte: $x_1 \approx -2{,}5$; $x_2 \approx 1{,}5$. Dies sind die Lösungen der Gleichung, d. h.

$L = \{-2{,}5; 1{,}5\}$



K5 **13** **a)** $x_1 = -1{,}5$; $x_2 = 3{,}5$

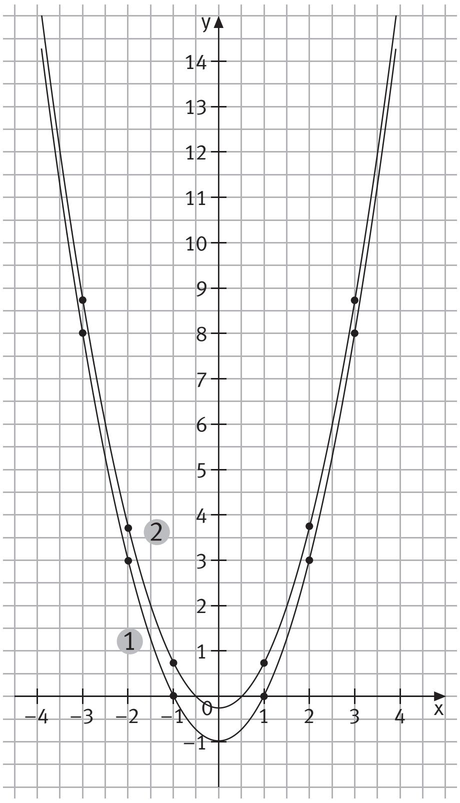
b) $x_1 = -1$; $x_2 = 4$

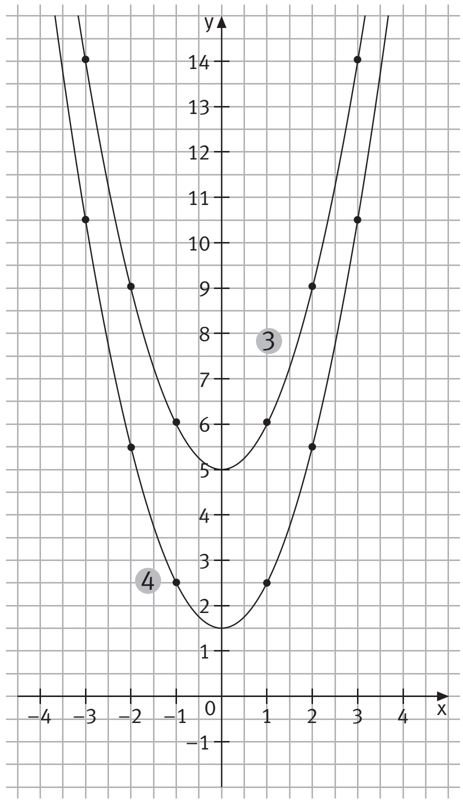
a) $x_1 = -4$; $x_2 = -1$

b) $x_1 = -3$; $x_2 = 5$

K4/5 **14 a)**

	x	−3	−2	−1	0	1	2	3
1	$f(x) = x^2 - 1$	8	3	0	−1	0	3	8
2	$f(x) = x^2 - 0{,}25$	8,75	3,75	0,75	−0,25	0,75	3,75	8,75
3	$f(x) = x^2 + 5$	14	9	6	5	6	9	14
4	$f(x) = x^2 + 1{,}5$	10,5	5,5	2,5	1,5	2,5	5,5	10,5





b) 1 $S(0|-1)$; $x_1 = -1$; $x_2 = 1$
2 $S(0|-0{,}25)$; $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = 0{,}5$
3 $S(0|5)$; keine Nullstellen
4 $S(0|1{,}5)$; keine Nullstellen

K5 **15 a)** x_A eingesetzt ergibt: $x^2 = 1{,}9^2 = 3{,}61 < 3{,}9$ A liegt oberhalb der Parabel.
b) x_A eingesetzt ergibt: $x^2 - 3{,}25 = 1{,}5^2 - 3{,}25 = -1 = y_A$ A liegt auf G_f.
c) x_A eingesetzt ergibt: $x^2 - 12 = 3^2 - 12 = -3 < 3$ A liegt oberhalb der Parabel.
d) x_A eingesetzt ergibt: $x^2 + 20 = (-\sqrt{5})^2 + 20 = 25 = y_A$ A liegt auf G_f.

K1/6 **16 a)** Die Aussage ist wahr. Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet und für $a < 0$ nach unten.
b) Die Aussage ist wahr. Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet, der Scheitelpunkt ist somit der tiefste Punkt der Parabel.
c) Die Aussage ist wahr. Der Parameter e gibt die Verschiebung der Parabel in y-Richtung an. Für $e = 0$ ergibt sich der Ursprung.
d) Für $e \in \mathbb{R}$ ist die Aussage falsch, denn für negatives e ist die Parabel nach unten verschoben. Die Aussage ist für $e \in \mathbb{R}_0^+$ wahr.
e) Die Aussage ist falsch. Wenn $a = 0$ und $e = 0$ sind, ergibt sich die Gleichung $f(x) = 0x + 0$, also $y = 0$. Man erhält die x-Achse.
f) Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Aussage falsch, Gegenbeispiel: verkleinert man a von 10 auf 0,5, so wird dabei die Parabelöffnung breiter, nicht schmaler. Die Aussage wäre wahr, wenn man nur $a \in \mathbb{R}^-$ zuließe.
g) Die Aussage ist wahr. Für $e < 0$ ist die Parabel längs der y-Achse in negative y-Richtung verschoben und für $a > 0$ nach oben geöffnet. Der Scheitelpunkt ist also der Tiefpunkt der Parabel, und da diese symmetrisch bezüglich der y-Achse ist, schneidet sie die x-Achse in genau zwei Punkten.

h) Die Aussage ist wahr. Für $a = 0$ ergibt sich $f(x) = e$. Dies ist die Gleichung einer Geraden, die parallel zur x-Achse verläuft.

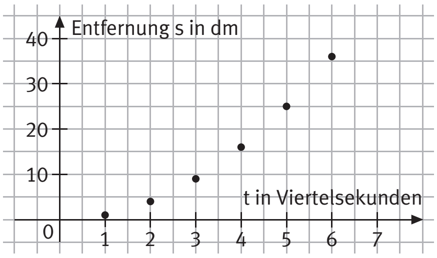
i) Die Aussage ist falsch. Der Koeffizient a gibt an, um welchen Faktor die Parabel im Vergleich zur Normalparabel gestaucht (weiter) oder gestreckt (enger) ist. Der Summand e gibt an, um wie viele Einheiten die Parabel in y-Richtung verschoben wird.

K 3/6 **17 a)** Die Tropfen fallen nach einer Strecke von 1 dm, 4 dm, 9 dm, 16 dm usw. Die Maßzahlen dieser Strecken sind die Quadratzahlen.

b)

Fahrtzeit t (in Viertelsekunden)	0	1	2	3	4	5
Entfernung s des Tropfens vom Startpunkt (in dm)	0	1	4	9	16	25

c)

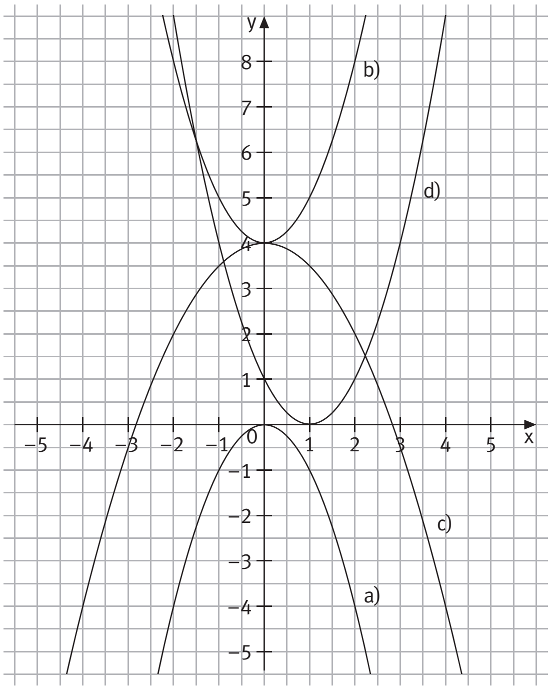


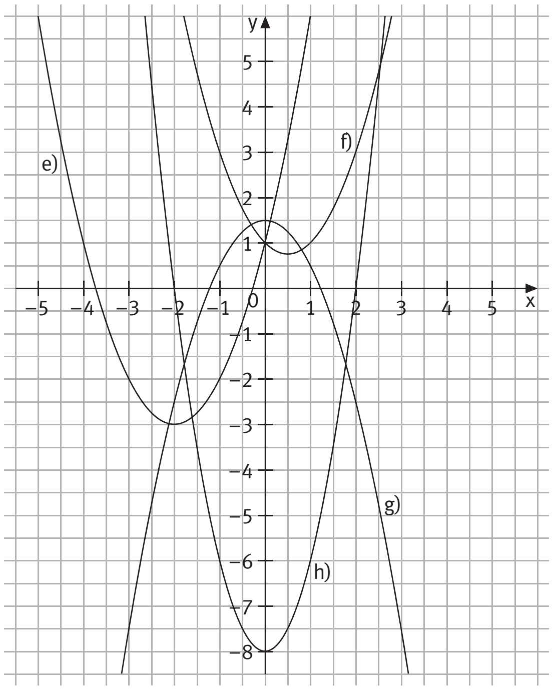
d) $f(x) = x^2$ mit $D = \mathbb{R}_0^+$, x in Viertelsekunden und f(x) in dm bzw.
$f(x) = (4x)^2 = 16x^2$ mit $D = \mathbb{R}_0^+$, x in Sekunden und f(x) in dm.

K 4/5 **18**

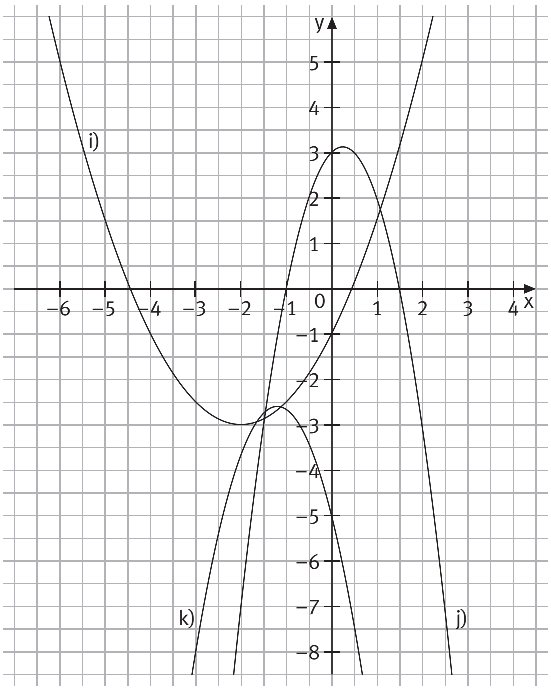
	a)	b)	c)	d)
Funktion	$f(x) = -x^2$	$f(x) = x^2 + 4$	$f(x) = -0{,}5x^2 + 4$	$f(x) = (x-1)^2$
Scheitelpunkt	$S(0\mid 0)$	$S(0\mid 4)$	$S(0\mid 4)$	$S(1\mid 0)$
Wertemenge	$\mathbb{R}_0^-$	$[4; \infty[$	$]-\infty; 4]$	$[0; \infty[$
Schnittpunkt mit der y-Achse	$P(0\mid 0)$	$P(0\mid 4)$	$P(0\mid 4)$	$P(0\mid 1)$
Symmetrieachse	$x = 0$	$x = 0$	$x = 0$	$x = 1$
monoton fallend	$]0; \infty[$	$]-\infty; 0[$	$]0; \infty[$	$]-\infty; 1[$
monoton steigend	$]-\infty; 0[$	$]0; \infty[$	$]-\infty; 0[$	$]1; \infty[$
Nullstellen	$x = 0$	keine	$x_1 = -\sqrt{8}$; $x_2 = \sqrt{8}$	$x = 1$

	e)	f)	g)	h)
Funktion	$f(x) = x^2 + 4x + 1$	$f(x) = x^2 - x + 1$	$f(x) = -x^2 + 1{,}5$	$f(x) = 2x^2 - 8$
Scheitelpunkt	$S(-2\mid -3)$	$S(0{,}5\mid 0{,}75)$	$S(0\mid 1{,}5)$	$S(0\mid -8)$
Wertemenge	$[-3; \infty[$	$[0{,}75; \infty[$	$]-\infty; 1{,}5]$	$[8; \infty[$
Schnittpunkt mit der y-Achse	$P(0\mid 1)$	$P(0\mid 1)$	$P(0\mid 1{,}5)$	$P(0\mid -8)$
Symmetrieachse	$x = -2$	$x = 0{,}5$	$x = 0$	$x = 0$
monoton fallend	$]-\infty; -2[$	$]-\infty; 0{,}5[$	$]0; \infty[$	$]-\infty; 0[$
monoton steigend	$]-2; \infty[$	$]0{,}5; \infty[$	$]-\infty; 0[$	$]0; \infty[$
Nullstellen	$x_1 = -\sqrt{3} - 2$; $x_2 = \sqrt{3} - 2$	keine	$x_1 = -\sqrt{1{,}5}$; $x_2 = \sqrt{1{,}5}$	$x_1 = -2$; $x_2 = 2$





	i)	j)	k)
Funktion	$f(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 1$	$f(x) = -2x^2 + x + 3$	$f(x) = -\frac{5}{3}x^2 - 4x - 5$
Scheitelpunkt	$S(-2 \mid -3)$	$S(0{,}25 \mid 3{,}125)$	$S(-1{,}2 \mid -2{,}6)$
Wertemenge	$[-3; \infty[$	$]-\infty; 3{,}125]$	$]-\infty; -2{,}6]$
Schnittpunkt mit der y-Achse	$P(0 \mid -1)$	$P(0 \mid 3)$	$P(0 \mid -5)$
Symmetrieachse	$x = -2$	$x = 0{,}25$	$x = -1{,}2$
monoton fallend	$]-\infty; -2[$	$]0{,}25; \infty[$	$]-1{,}2; \infty[$
monoton steigend	$]-2; \infty[$	$]-\infty; 0{,}25[$	$]-\infty; 1{,}2[$
Nullstellen	$x_1 \approx 0{,}45$; $x_2 \approx -4{,}45$	$x_1 = -1$; $x_2 = 1{,}5$	keine



K2/5 **19** **a)** $f(x) = (x+4)^2 - 2 = x^2 + 8x + 14$

b) $f(x) = ax^2 + c$ mit $a > 1$ und $c > 0$, also beispielsweise $f(x) = 3x^2 + 2$ oder
$f(x) = ax^2 + c$ mit $a < -1$ und $c < 0$, also beispielsweise $f(x) = -3x^2 - 2$

c) $f(x) = a \cdot (x-3)^2 + e = ax^2 - 6ax + (9a + e)$ mit $-1 < a < 0$ und e beliebig, also beispielsweise
$f(x) = -0{,}5x^2 + 3x + 5$

d) $f(x) = (x+2) \cdot (x-5) = x^2 - 3x - 10$

e) $f(x) = ax(x-5) = ax^2 - 5ax$ mit $a < 0$, also beispielsweise $f(x) = -x(x-5)$

K5 **20** **a)** $D = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 9 + 16 = 25 > 0$
$4x^2 + 3x - 1 = 0;\ x_{1/2} = \frac{-3 \pm 5}{2 \cdot 4};\ x_1 = 0{,}25;\ x_2 = -1;\ L = \{-1; 0{,}25\}$

b) $D = (-18)^2 - 4 \cdot 81 \cdot 1 = 324 - 324 = 0$

c) $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$

d) $D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 15 = 16 - 120 = -104 < 0$

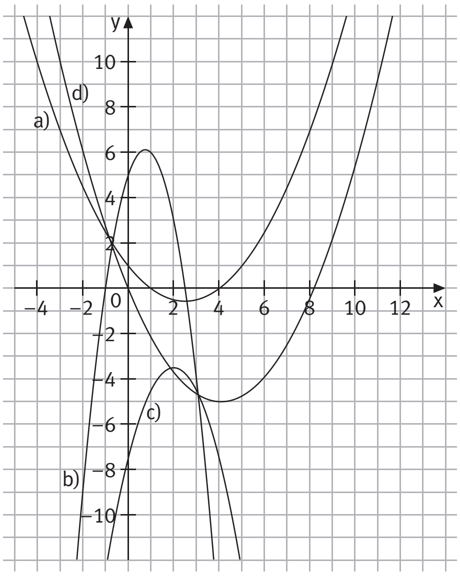
e) $D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-30) = 16 + 240 = 256 > 0$
$2x^2 - 4x - 30 = 0;\ | : 2$
$x^2 - 2x - 15 = 0;\ (x+3)(x-5) = 0;\ x_1 = -3;\ x_2 = 5;\ L = \{-3; 5\}$

f) $D = (-53)^2 - 4 \cdot 14 \cdot 1 = 2\,809 - 56 = 2\,753 > 0$
$14x^2 - 53x + 1 = 0;\ x_{1/2} = \frac{53 \pm \sqrt{2\,753}}{2 \cdot 14};\ x_1 \approx 3{,}77;\ x_2 \approx 0{,}02;\ L = \{0{,}02; 3{,}77\}$

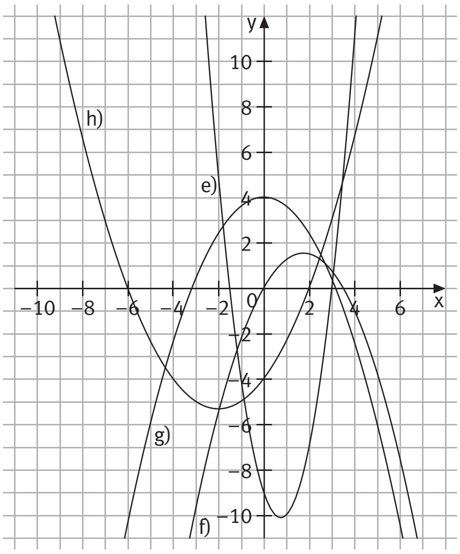
K2/5 **21** Folgende Funktionsterme besitzen jeweils denselben Graphen: 3 und 4; 5 und 8.
Begründungen:
- Nur wenn der Koeffizient a übereinstimmt, ist es möglich, dass Funktionsterme denselben Graphen besitzen. Deshalb kann G_{f1} mit keinem anderen Graphen übereinstimmen.
- Wandelt man f_4 aus der Scheitelform durch Auflösen der Klammer in die allgemeine Form um, so erhält man f_3. f_6 hat zwar denselben a-Wert, hat aber einen anderen Scheitelpunkt.
- Wandelt man f_8 aus der Scheitelform durch Auflösen der Klammer in die allgemeine Form um, so erhält man f_5.
- Wandelt man f_2 ebenso um, so erhält man nicht f_7, die Vorzeichen des linearen Terms 16x sind verschieden.

K4/5 **22**

	a)	b)	c)	d)
allgemeine Form	$\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + 1$	$-2x^2 + 3x + 5$	$-x^2 + 4x - 7{,}5$	$0{,}3x^2 - \sqrt{6}\,x$
Scheitelpunktform	$\frac{1}{4}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{16}$	$-2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 6\frac{1}{8}$	$-(x-2)^2 - 3{,}5$	$0{,}3\left(x - \frac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2 - 5$
Nullstellenform	$\frac{1}{4}(x-4)(x-1)$	$-2(x-2{,}5)(x+1)$	–	$0{,}3x\left(x - \frac{10\sqrt{6}}{3}\right)$
Scheitelpunkt	$S(2{,}5 \mid -0{,}5625)$	$S(0{,}75 \mid 6{,}125)$	$S(2 \mid -3{,}5)$	$S\left(\frac{5\sqrt{6}}{3} \mid -5\right)$
Nullstellen	$x_1 = 1;\ x_2 = 4$	$x_1 = -1;\ x_2 = 2{,}5$	–	$x_1 = 0;\ x_2 = \frac{10\sqrt{6}}{3}$
monoton fallend	$]-\infty; 2{,}5[$	$]0{,}75; \infty[$	$]2; \infty[$	$\left]-\infty; \frac{5\sqrt{6}}{3}\right[$
monoton steigend	$]2{,}5; \infty[$	$]-\infty; 0{,}75[$	$]-\infty; 2[$	$\left]\frac{5\sqrt{6}}{3}; \infty\right[$



	e)	f)	g)	h)
allgemeine Form	$2x^2 - 3x - 9$	$-0{,}5x^2 + 1{,}75x$	$-0{,}4x^2 + 4$	$\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 4$
Scheitelpunktform	$2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - 10\frac{1}{8}$	$-0{,}5\,(x - 1{,}75)^2 + 1{,}53125$	$-0{,}4\,(x - 0)^2 + 4$	$\frac{1}{3}(x + 2)^2 - 5\frac{1}{3}$
Nullstellenform	$2\,(x + 1{,}5)\,(x - 3)$	$-0{,}5x\,(x - 3{,}5)$	$-0{,}4\,(x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10})$	$\frac{1}{3}(x - 2)\,(x + 6)$
Scheitelpunkt	$S\,(0{,}75 \mid -10{,}125)$	$S\,(1{,}75 \mid 1{,}53125)$	$S\,(0 \mid 4)$	$S\left(-2 \mid -\frac{16}{3}\right)$
Nullstellen	$x_1 = -1{,}5;\ x_2 = 3$	$x_1 = 0;\ x_2 = 3{,}5$	$x_1 = \sqrt{10};\ x_2 = -\sqrt{10}$	$x_1 = 2;\ x_2 = -6$
monoton fallend	$]-\infty; -0{,}75[$	$]1{,}75; \infty[$	$]0; \infty[$	$]-\infty; -2[$
monoton steigend	$]0{,}75; \infty[$	$]-\infty; 1{,}75[$	$]-\infty; 0[$	$]-2; \infty[$



K2/5 **23 a)**

1	$f(x) = (x + 1)^2 + 2$	$S\,(-1 \mid 2)$	a: $x = -1$	$W = [2; \infty[$
2	$f(x) = -0{,}5 \cdot (x - 8)^2 + 50$	$S\,(8 \mid 50)$	a: $x = 8$	$W =]-\infty; 50]$
3	$f(x) = -3 \cdot (x + 1)^2 + 12$	$S\,(-1 \mid 12)$	a: $x = -1$	$W =]-\infty; 12]$
4	$f(x) = \frac{2}{3} \cdot (x + 3)^2 - 6$	$S\,(-3 \mid -6)$	a: $x = -3$	$W = [-6; \infty[$
5	$f(x) = 3 \cdot (x - 5)^2 - 5$	$S\,(5 \mid -5)$	a: $x = 5$	$W = [-5; \infty[$
6	$f(x) = -4 \cdot (x - 2)^2$	$S\,(2 \mid 0)$	a: $x = 2$	$W =]-\infty; 0]$

7 $f(x) = -(x + 1{,}5)^2 + 1$ S(−1,5|1) a: x = −1,5 W =]−∞; 1]
8 $f(x) = 5 \cdot x^2 - 10$ S(0|−10) a: x = 0 W = [−10; ∞[
9 $f(x) = -2 \cdot (x - 3)^2 + 37$ S(3|37) a: x = 3 W =]−∞; 37]

b) 1 keine Nullstelle, da Parabel nach oben geöffnet und $y_S > 0$.
2 zwei Nullstellen, da Parabel nach unten geöffnet und $y_S > 0$.
3 zwei Nullstellen, da Parabel nach unten geöffnet und $y_S > 0$.
4 zwei Nullstellen, da Parabel nach oben geöffnet und $y_S < 0$.
5 zwei Nullstellen, da Parabel nach oben geöffnet und $y_S < 0$.
6 eine Nullstelle $(x = 2)$, da $y_S = 0$.
7 zwei Nullstellen, da Parabel nach unten geöffnet und $y_S > 0$.
8 zwei Nullstellen, da Parabel nach oben geöffnet und $y_S < 0$.
9 zwei Nullstellen, da Parabel nach unten geöffnet und $y_S > 0$.

K2/5 **24** Diskriminante: $D = 4 - 4k$
a) $D = 0$; wenn $k = 1$ ist, hat die Gleichung über $G = \mathbb{R}$ genau eine Lösung.
b) $D > 0$; wenn $k < 1$ ist, hat die Gleichung über $G = \mathbb{R}$ zwei Lösungen.
c) $D < 0$; wenn $k > 1$ ist, hat die Gleichung über $G = \mathbb{R}$ keine Lösung.

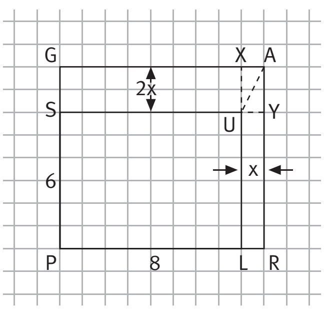
K2/6 **25** Durch Weglassen des konstanten Summanden $c = 7$ verschiebt Ida die Parabel G_f (in der Zeichnung blau) um 7 LE nach unten (grüne Pfeile); damit erhält sie den roten Graphen G_{f^*} mit dem Funktionsterm $f^*(x) = 3x^2 - 6x$. Die x-Koordinate des Scheitelpunkts von f* stimmt mit der x-Koordinate des Scheitelpunkts von f überein.

Um die x-Koordinate des Scheitelpunkts von f* zu ermitteln, bestimmt Ida zunächst die Nullstellen x_1^* und x_2^* von f*. Diese lassen sich durch Ausklammern von 3x schnell ermitteln. Der Mittelwert von x_1^* und x_2^* ist die x-Koordinate x_S des Scheitelpunkts von f* und damit auch die x-Koordinate des Scheitelpunkts von f. Die y-Koordinate y_S des Scheitelpunkts von f ist damit $y_S = f(x_S)$.

Gleiches Verfahren für $g(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 3$:
$g^*(x) = -0{,}5x^2 + 2x = -0{,}5x(x - 4)$
$g^*(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}5x(x - 4) \Rightarrow x_1^* = 0;\ x_2^* = 4 \Rightarrow x_S = \frac{0 + 4}{2} = 2 \Rightarrow y_S = g(x_S) = 5 \Rightarrow$
Scheitelpunkt S_g der Funktion g: $S_g(2|5)$

K2/6 **26** $12x^2 - 11x + 2 = 0$; Beispiel für eine Vorgehensweise:
Berechne die Nullstellen der Gleichung $12x^2 - 11x + 2 = 0$:
$x_{1/2} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 2}}{2 \cdot 12} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{24} = \frac{11 \pm 5}{24};\ x_1 = \frac{2}{3};\ x_2 = \frac{1}{4};$
Bestimme die Kehrwerte: $\frac{1}{x_1} = \frac{3}{2};\ \frac{1}{x_2} = 4;$
Notiere die zugehörige faktorisierte („Nullstellen-")Form und multipliziere aus:
$\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 4) = 0;\ x^2 - 4x - \frac{3}{2}x + 6 = 0;\ x^2 - \frac{11}{2}x + 6 = 0;\ \mid \cdot 2$
$2x^2 - 11x + 12 = 0$; dies ist die Gleichung 3 der Angabe.

K2/4 **27** **a)** 1 $A^* + A_{PLUS} = A_{PRAG}$
2 $A^* = A_{LRAX} + A_{SUXG}$
3 $A^* = A_{SYAG} + A_{LRYU}$
4 $A^* = A_{Trapez\ LRAU} + A_{Trapez\ SUAG}$



b) $2x(8 + x) + x \cdot 6 = (6 \cdot 8) : 2;\ \mid -24$
$16x + 2x^2 + 6x - 24 = 0;$
$2x^2 + 22x - 24 = 0;\ \mid : 2$
$x^2 + 11x - 12 = 0;$
$(x + 12)(x - 1) = 0;$
$x_1 = -12 < 0$ (keine Lösung)
$x_2 = 1$
Für x = 1 ist der Flächeninhalt des Sechsecks $1 \cdot 8 + 8 \cdot 2 = 8 + 16 = 24 = (6 \cdot 8) : 2$.

K2/5 **28** $(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; z^2 - 5z + 4 = 0$
Lösungsformel: $z_{1/2} = \frac{1}{2}\left(5 \pm \sqrt{25-16}\right)$
$z_1 = 4 \;\Rightarrow\; x_1 = 2;\; x_2 = -2;\;\; z_2 = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = 1;\; x_2 = -1 \;\Rightarrow\; L = \{-2; -1; 1; 2\}$

K5/6 **29** Man nutzt die Nullstellenform einer quadratischen Funktion, setzt den Funktionsterm gleich null und multipliziert die linke Seite der Gleichung aus.
Falls nötig (Teilaufgabe c) multipliziert man die Gleichung noch mit einem konstanten Faktor.

a) $2(x+2)\cdot(x-3) = 0$
$\Leftrightarrow\; 2x^2 - 2x - 12 = 0$

b) $(x+7)(x-3) = 0$
$\Leftrightarrow\; x^2 + 4x - 21 = 0$

c) $(x+3{,}5)\cdot(x-1{,}5) = 0$
$\Leftrightarrow\; x^2 + 2x - 5{,}25 = 0$
$\Leftrightarrow\; \frac{8}{21}x^2 + \frac{16}{21}x - 2 = 0$

d) $5(x+0{,}1)\cdot(x-0{,}5) = 0$
$\Leftrightarrow\; 5(x^2 - 0{,}4x - 0{,}05) = 0$
$\Leftrightarrow\; 5x^2 - 2x - 0{,}25 = 0$

K1/6 **30** Lina hat Recht: Die über $\mathbb{R}$ unlösbare Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat zwei Lösungen, wenn man eine neue nicht reelle Zahl definiert, deren Quadrat den Wert -1 hat. Diese Zahl wird i genannt („imaginäre Einheit“). Es gilt also $i^2 = -1$.
Die Lösungsmenge der vorher unlösbaren Gleichung lautet dann $L = \{-i; i\}$.
Alle Zahlen ci, $c \in \mathbb{R}$, sind imaginäre Zahlen. Die Vereinigung der Menge der reellen und der Menge der imaginären Zahlen, d. h. alle Zahlen der Form $z = a + bi$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, bildet die Menge $\mathbb{C}$ der sogenannten komplexen Zahlen.

K2/5 **31** Wurzelgleichungen werden durch Quadrieren gelöst, was keine Äquivalenzumformung ist. Deshalb ist eine Probe mit der ursprünglichen Wurzelgleichung immer nötig.

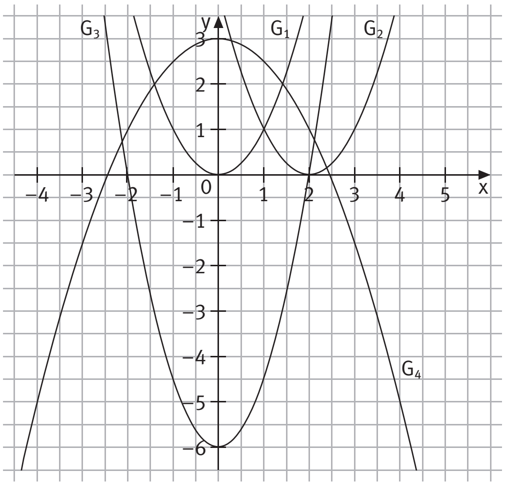
a) $\sqrt{x-2} = 4 - x;\;\; D_{max} = [2; +\infty[$
Quadrieren der Gleichung ergibt $x^2 - 9x + 18 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 3 \in D_{max}$ und $x_2 = 6 \in D_{max}$
Probe für $x_1 = 3$: LS = 1, RS = 1, also ist 3 Lösung.
Probe für $x_2 = 6$: LS = 2, RS = -2, also ist 6 keine Lösung.
$\Rightarrow\; L = \{3\}$

b) $2x - 5 = -\sqrt{x-1};\;\; D_{max} = [1; +\infty[$
Quadrieren der Gleichung ergibt $4x^2 - 21x + 26 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 2 \in D_{max}$ und $x_2 = 3{,}25 \in D_{max}$
Probe für $x_1 = 2$: LS = -1; RS = -1, also ist 2 Lösung.
Probe für $x_2 = 3{,}25$: LS = 1,5; RS = $-1{,}5$, also ist 3,25 keine Lösung.
$\Rightarrow\; L = \{2\}$

c) $7 - \sqrt{4x+1} = 2x;\;\; D_{max} = [-0{,}25; +\infty[$
$7 - \sqrt{4x+1} = 2x \;\Leftrightarrow\; 7 - 2x = \sqrt{4x+1}$
Quadrieren der Gleichung ergibt $4x^2 - 32x + 48 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 2 \in D_{max}$ und $x_2 = 6 \in D_{max}$
Probe für $x_1 = 2$: LS = 4, RS = 4, also ist 2 Lösung.
Probe für $x_2 = 6$: LS = 2, RS = 12, also ist 6 keine Lösung.
$\Rightarrow\; L = \{2\}$

K5 **1** A (–1,2 | 1,44) B (3,1 | 9,61) C (1,8 | 3,24) D (2,4 | 5,76)

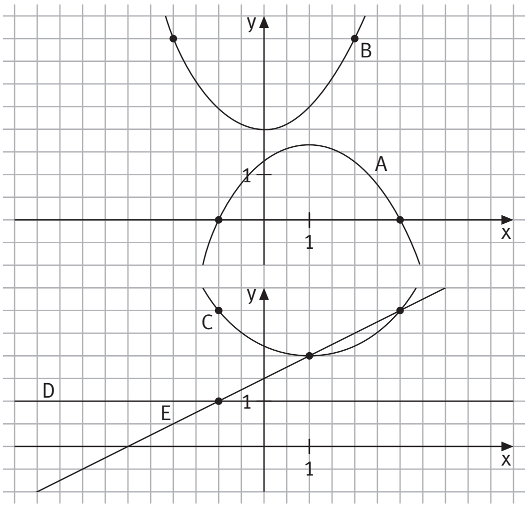
K4/6 **2** **a)**



b) Die Normalparabel 1 wurde …
2 um 2 LE nach rechts verschoben.
3 um 6 LE nach unten verschoben; die Parabel ist enger als die Normalparabel (Faktor a = 1,5).
4 an der x-Achse gespiegelt und um 3 LE nach oben verschoben; die Parabel ist weiter als die Normalparabel (Faktor a = –0,5).

K4/6 **3** **a)** Scheitel: S (2 | 0); Funktionsgleichung: $f(x) = (x-2)^2$; Nullstelle: S (2 | 0)
Schnittpunkt mit der y-Achse: T (0 | 4); um 2 LE nach rechts verschobene Normalparabel
b) Scheitel: S (0 | –3); Funktionsgleichung: $f(x) = x^2 - 3$; Nullstellen: $N_1(-\sqrt{3} \mid 0)$ und $N_2(\sqrt{3} \mid 0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: S (0 | –3); um 3 LE nach unten verschobene Normalparabel
c) Scheitel: S (0 | 1); Funktionsgleichung: $f(x) = -x^2 + 1$; Nullstellen: $N_1(-1 \mid 0)$ und $N_2(1 \mid 0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: S (0 | 1); an der x-Achse gespiegelte und um 1 LE nach oben verschobene Normalparabel
d) Scheitel: S (2 | 2); Funktionsgleichung: $f(x) = (x-2)^2 + 2$
keine Nullstellen
Schnittpunkt mit der y-Achse: T (0 | 6); um 2 LE nach rechts und um 2 LE nach oben verschobene Normalparabel

K2/4 **4**



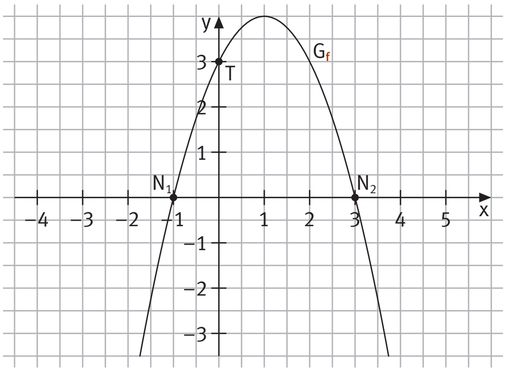
Hinweis:
Bei der Parabel 1 kann man die Nullstellen der Abbildung entnehmen und den Ansatz
P: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ wählen, bei den Parabeln 2 und 3 kann man die Scheitelkoordinaten x_s und y_s der Abbildung entnehmen und den Ansatz
P: $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ wählen; setzt man dann die Koordinaten eines weiteren Parabelpunkts (geeignete Gitterpunkte sind in der Abbildung hervorgehoben) in die Gleichung von P ein, so ergibt sich der Wert des Parameters a. Bei jeder der Geraden können der Abbildung die Koordinaten zweier Punkte entnommen werden.

Gleichungen:

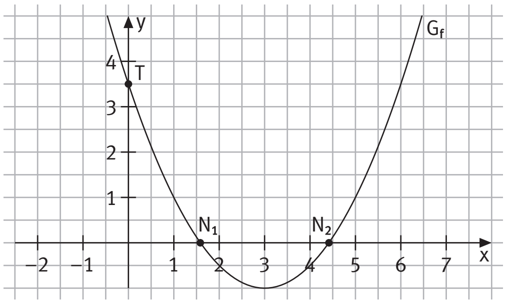
a) $y = 0{,}25(x-1)^2 + 2$: 3 **b)** $y = 1$: 4
c) $y = 0{,}5x + 1{,}5$: 5 **d)** $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$: 2
e) $y = -0{,}4(x-3)(x+1)$: 1

K5/6 **5** **a)** Mögliche Lösung: $f\colon x \mapsto -x^2 + 4$ (allgemein: $f_a\colon x \mapsto ax^2 + 4$ mit $a < 0$)
b) Mögliche Lösungen: $f\colon x \mapsto x^2 - 9$ oder $f\colon x \mapsto -x^2 + 9$ oder $f\colon x \mapsto \frac{1}{9}x^2 - 1$ usw.
c) Mögliche Lösung: $f\colon x \mapsto \frac{1}{2}(x+2)^2$ (allgemein: $f_a\colon x \mapsto a(x+2)^2$ mit $0 < a < 1$)

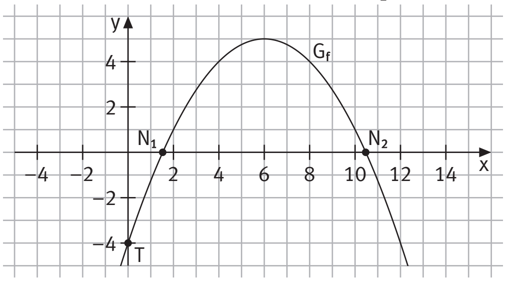
K2/5 **6** **a)** $f(x) = -(x+1)(x-3) = -(x^2 - 2x - 3)$
$= -x^2 + 2x + 3 = -[(x-1)^2 - 4]$
$= -(x-1)^2 + 4$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $T(0|3)$
Schnittpunkte mit der x-Achse:
$N_1(-1|0)$, $N_2(3|0)$



b) $f(x) = 0{,}5(x-3)^2 - 1 = 0{,}5(x^2 - 6x + 9) - 1$
$= 0{,}5(x^2 - 6x + 7) = 0{,}5x^2 - 3x + 3{,}5$
$f(x) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 3{,}5}}{2 \cdot 0{,}5}$
$= 3 \pm \sqrt{9-7} = 3 \pm \sqrt{2}$
$f(x) = 0{,}5\,[x - (3-\sqrt{2})]\,[x - (3+\sqrt{2})]$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $T(0|3{,}5)$
Schnittpunkte mit der x-Achse:
$N_1(1{,}58|0)$, $N_2(4{,}41|0)$



c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 4 = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 16) = -\frac{1}{4}[(x-6)^2 - 20] = -\frac{1}{4}(x-6)^2 + 5$
$f(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}(x-6)^2 = -5 \Rightarrow (x-6)^2 = 20 \Rightarrow x - 6 = \pm\sqrt{20} \Rightarrow x_{1/2} = 6 \pm 2\sqrt{5}$
$f(x) = -\frac{1}{4}[x - (6 - 2\sqrt{5})]\,[x - (6 + 2\sqrt{5})]$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $T(0|-4)$
Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(1{,}53|0)$, $N_2(10{,}47|0)$



K1/6 **7** **a)** $D = (-7)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 49 + 48 = 97 > 0$
Da die Diskriminante $D > 0$ ist, besitzt die Funktion zwei Nullstellen.
b) Eine Nullstelle, da der Graph eine Gerade mit negativer Steigung ist (f ist eine lineare Funktion).
c) Keine Nullstelle, da der Graph parallel zur x-Achse verläuft (f ist eine konstante Funktion.)
d) Eine (doppelte) Nullstelle, da der Graph eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitel $S(1|0)$ ist.
e) $D = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 64 - 96 = -32 < 0$
Da die Diskriminante $D < 0$ ist, besitzt die Funktion keine Nullstelle.
f) Zwei Nullstellen, da der Graph eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitel $S(0|4)$ ist.

K5 **8** **a)** $4x^2 + 12x - 91 = 0$;
$x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 4 \cdot (-91)}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm \sqrt{1600}}{8} = \frac{-12 \pm 40}{8}$;
$x_1 = 3{,}5$; $x_2 = -6{,}5$; $L = \{-6{,}5; 3{,}5\}$
b) $6x^2 - 12x = 0$; $6x(x-2) = 0$;
$x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $L = \{0; 2\}$
c) $x^2 + 10x + 16 = 0$;
$x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-10 \pm 6}{2}$
$x_1 = -8$; $x_2 = -2$; $L = \{-8; -2\}$

d) $-3\sqrt{7}y + 42 - 3y^2 = 0;\ \mid :(-3)$

$y^2 + \sqrt{7}y - 14 = 0;$

$y_{1/2} = \frac{-\sqrt{7} \pm \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14)}}{2} = \frac{-\sqrt{7} \pm \sqrt{63}}{2} = \frac{-\sqrt{7} \pm 3\sqrt{7}}{2};$

$y_1 = \sqrt{7};\quad y_2 = -2\sqrt{7};\quad L = \{-2\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$

K4/6 **9** Der Graph gehört zu einer quadratischen Funktion mit den Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt $(0|2)$.
Julius hat die Lösung der Gleichung $(x-1)(x-2) = 0$ bzw. der Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$ graphisch ermittelt. Hierzu hat er den Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto x^2 - 3x + 2$ gezeichnet und die Nullstellen abgelesen. Diese Gleichung besitzt daher die Lösungsmenge $L = \{1; 2\}$.

K6 **10** Die Lösungsformel für eine allgemeine quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ lautet $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Der Radikand $D = b^2 - 4ac$ ist die Diskriminante der Gleichung. Der Wert bzw. das Vorzeichen der Diskriminante entscheidet über die Anzahl der Lösungen der Gleichung:
$D < 0$: keine Lösung
$D = 0$: genau eine Lösung
$D > 0$: zwei Lösungen.

Aufgaben für Lernpartner

K1/6 **A** Die Aussage ist falsch. Die Parabel hat den Scheitel $S(3|1)$.

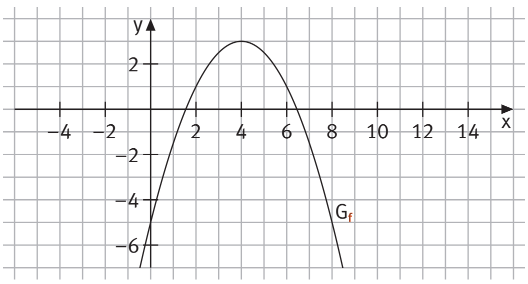
K1/5 **B** Die Aussage ist richtig.

K1/5 **C** Die Aussage ist richtig, da $a = 5 > 1$.

K1/5 **D** Die Aussage ist richtig, da $f(0) = -5$.

K1/5 **E** **a)** Die Aussage ist falsch, da x nur in der ersten Potenz vorkommt (lineare Funktion).
b) Die Aussage ist richtig. Die Gleichung lässt sich in der Form $y = x^2 + 1$ schreiben.
c) Die Aussage ist richtig. Die Gleichung lässt sich in der Form $y = \frac{1}{2}x^2$ schreiben.

K1/2 **F** Die Aussage ist falsch. Der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitel $S(4|3)$, und es gilt $f(0) = -5$. Demnach liegen beide Nullstellen auf der positiven x-Achse. Somit verläuft der Graph nicht durch den 2. Quadranten.



K1/5 **G** Die Aussage ist falsch. f besitzt die Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = -4$.

K1/5 **H** Die Aussage ist falsch. Der Graph zur Gleichung $y = x(x+5)$ verläuft durch den Punkt $P(0|0)$. Eine mögliche Gleichung zu einer verschobenen Normalparabel, die durch den Punkt $T(0|-5)$ verläuft, lautet z. B. $y = x^2 - 5$.

K1/2 **I** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = (x-1)^2$. Die Aussage gilt nur für quadratische Funktionen, deren Scheitel auf der y-Achse liegt z. B. (f mit $f(x) = x^2 + 4$).

K 1/5 **J** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Folgende Funktionen haben alle den Scheitel $S(0|0)$: $f(x) = x^2$; $g(x) = 0{,}5x^2$; $h(x) = -3x^2$. Es gibt unendlich viele verschiedene Parabeln mit dem gleichen Scheitel.

K 1/6 **K** Die Aussage ist richtig. Die x-Koordinate des Scheitels ist das arithmetische Mittel der x-Koordinaten der beiden Nullstellen.

K 1/5 **L** Die Aussage ist richtig. Der Graph von f hat den Scheitel $S(2|1)$ und ist nach unten geöffnet. Daher ist f im Intervall $]2; \infty[$ monoton fallend.

K 1/5 **M** Die Aussage ist richtig. Dies ergibt sich aus der Lösungsformel für quadratische Gleichungen (siehe auch Aufgabe 10).

K 1/5 **N** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Die Gleichung $x^2 = 5$ hat die Lösungen $x_1 = \sqrt{5}$ und $x_2 = -\sqrt{5}$, obwohl 5 keine Quadratzahl ist.

K 1/2 **O** Die Aussage ist falsch. Die Diskriminante zu dieser Gleichung lautet $D = g^2 - 4 \cdot 0 = g^2$. Falls $g = 0$ ist, hat die Gleichung nur eine Lösung $(x = 0)$. Falls $g \neq 0$ ist, hat die Gleichung stets zwei verschiedene Lösungen ($x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{g}{3}$). Es ist nicht möglich, dass die Gleichung keine Lösung hat.

K 1/5 **P** Die Aussage ist richtig. $x^2 + 12x - 13 = (x + 13)(x - 1)$. Die Gleichung kann somit in der Form $(x + 13)(x - 1) = 0$ geschrieben werden. Daran lassen sich die Lösungen $x_1 = -13$ und $x_2 = 1$ direkt ablesen.