Startklar

Terme vereinfachen

K5/6

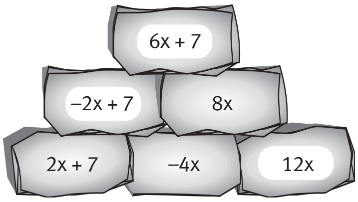
1 Die Terme 3 und 4 sind zu $8x - 10$ äquivalent.

3 $-(-5) + 5x - (-5) + 4x - 2^2 \cdot 5 - 2^0x = 5 + 5x + 5 + 4x - 20 - x = 8x - 10$

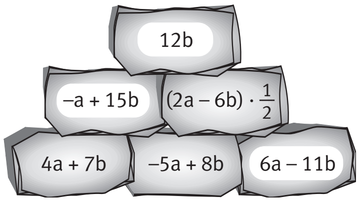
4 $-2^0 + 2^3 - (-2^3)x - 2^4 - 2^0 = -1 + 8 + 8x - 16 - 1 = 8x - 10$

K5

2 **a)**



b)



Lineare Gleichungen lösen

K5

3

	$G = \mathbb{Q}$	$G = \mathbb{N}$	$G = \mathbb{Z}$
a)	$L = \{11\}$	$L = \{11\}$	$L = \{11\}$
b)	$L = \{-13\}$	$L = \{\,\}$	$L = \{-13\}$
c)	$L = \left\{\frac{22}{23}\right\}$	$L = \{\,\}$	$L = \{\,\}$
d)	$L = \left\{-5\frac{1}{3}\right\}$	$L = \{\,\}$	$L = \{\,\}$

K5

4 Die Äquivalenzumformung der Gleichung ergibt für den gesuchten Koeffizienten k: $k = \frac{20}{x} - 8$

a) $k = 2$ **b)** $k = -4$ **c)** $k = -8$ **d)** $k = -18$

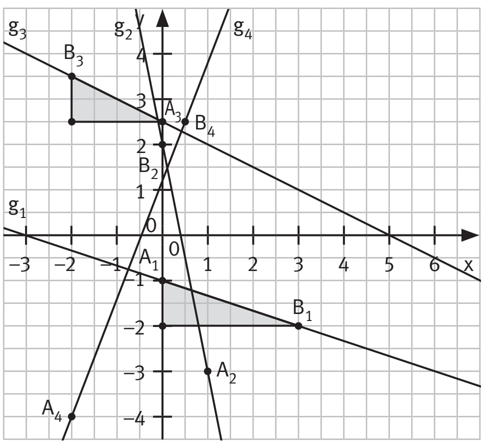
Lineare Funktionen

K4/5

5 **a)** f_1: $y = x + 2$ f_2: $y = 2$ f_3: $y = -2x$ f_4: $y = -x - 2$

b) $y = -2x + t$, wobei für t jede beliebige rationale Zahl eingesetzt werden kann.

c)



1 g_1: $y = -\frac{1}{3}x - 1$

2 $-3 = m_2 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad m_2 = -5$

g_2: $y = -5x + 2$

3 $3{,}5 = -0{,}5 \cdot (-2) + t_3 \quad \Leftrightarrow \quad t_3 = 2{,}5$

g_3: $y = -0{,}5x + 2{,}5$

4 $m_4 = \frac{2{,}5 + 4}{0{,}5 + 2} = 2{,}6$

$-4 = 2{,}6 \cdot (-2) + t_4 \quad \Leftrightarrow \quad t_4 = 1{,}2$

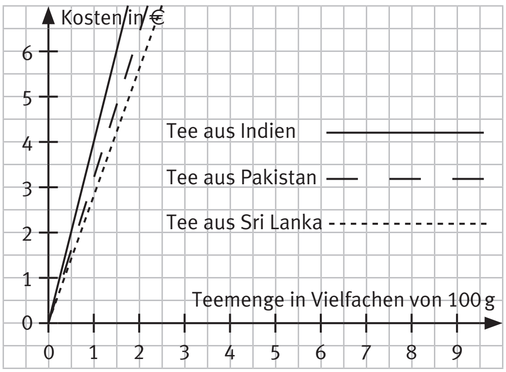
g_4: $y = 2{,}6x + 1{,}2$

2 Lineare Gleichungssysteme

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K 4/1

- 

  Es liegt eine Zuordnung der direkten Proportionalität vor: Teemenge $\mapsto$ Preis.

K 3/5

- Es sind individuelle Lösungsansätze möglich, z. B. mittels systematischen Probierens.
  Es müssen 750 g der Teesorte aus Indien und 1250 g der Teesorte aus Sri Lanka gemischt werden, um 2 kg zum Preis von 3,25 € pro 100 g zu erhalten.

Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.
Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

2.1 Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Entdecken

K6/1
- Beispiele für mögliche Vorschläge:
  1. Eintritt pro Person (außer ein Kind): 10,11 €
  2. Eintritt für Erwachsene: 15 €, Eintritt für Kinder (außer eins): 6,20 €
  3. Eintritt für Erwachsene: 14 €, Eintritt für Kinder (außer eins): 7 €
  4. Eintritt für Erwachsene: 6,50 €, Eintritt für Kinder (außer eins): 13 €

K6/1
- Von den oben genannten ist Lösung 3 am sinnvollsten, da die Eintrittspreise glatt sind und Kinder weniger bezahlen als Erwachsene.

Nachgefragt

K1/6
- Durch Umformung gilt:
  $b \cdot y = -ax + c$
  $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$
  $y = mx + n$ mit $m = -\frac{a}{b}$ und $n = \frac{c}{b}$ $(b \neq 0)$
  Da $y = mx + n$ eine lineare Gleichung ist, ist auch $ax + by = c$ eine lineare Gleichung.

K6/1
- Löst man die Gleichung nach einer Variablen auf, dann ist diese in Abhängigkeit von der zweiten definiert. Da man dann letztere aus der unendlichen Anzahl von Elementen aus der Grundmenge wählen kann, gibt es auch unendlich viele Zahlenpaare, die die Gleichung lösen.

Aufgaben

K5 **1** (1|–4); (–9|–44); (15|52)

K5 **2** **a)** (2|–1) **b)** (–5|–15) **c)** (0|–5) **d)** (–7,5|–20) **e)** (7,5|10)

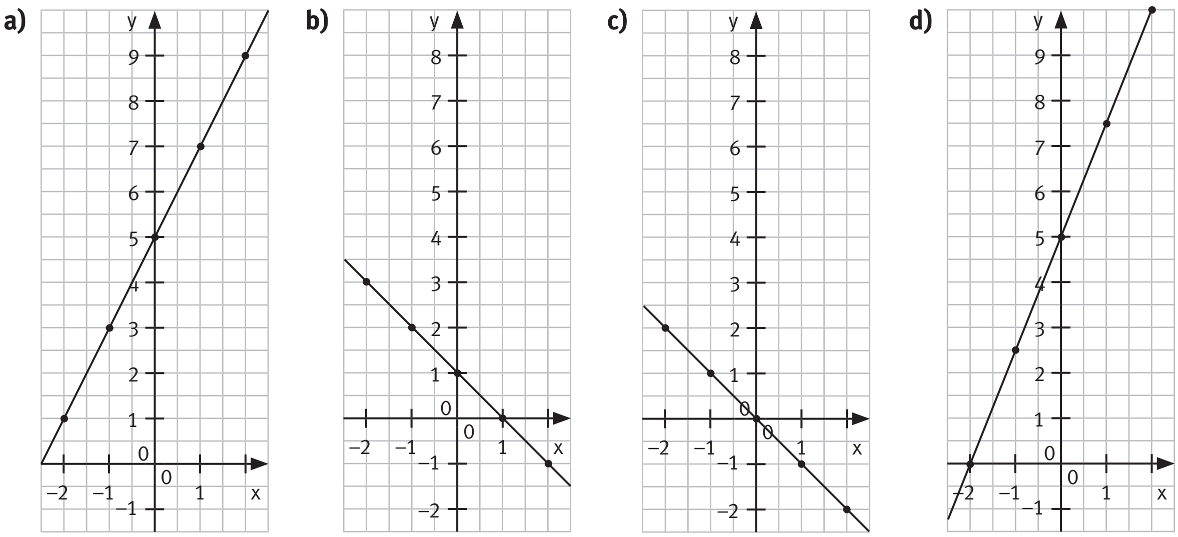
K5/4 **3**

a) $y = 2x + 5$ mögliche Lösungspaare: (–2|1); (–1|3); (0|5); (1|7); (2|9)

b) $3x + 3y = 3$, also $y = -x + 1$ mögliche Lösungspaare: (–2|3); (–1|2); (0|1); (1|0); (2|–1)

c) $7x + y = 6x$, also $y = -x$ mögliche Lösungspaare: (–2|2); (–1|1); (0|0); (1|–1); (2|–2)

d) $5x - 2y + 10 = 0$, also $y = 2{,}5x + 5$ mögliche Lösungspaare: (–2|0); (–1|2,5); (0|5); (1|7,5); (2|10)



K5/4 **4** **a)** Lösungsmöglichkeiten:

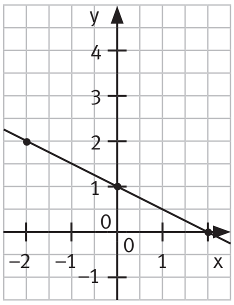
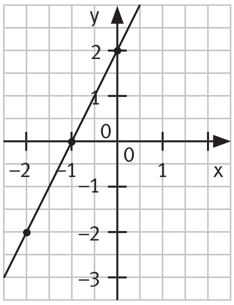
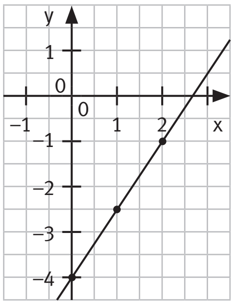
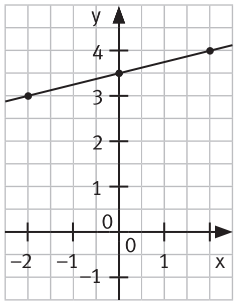
1 $(-2|2)$; $(0|1)$; $(2|0)$ 2 $(-2|-2)$; $(-1|0)$; $(0|2)$ 3 $(0|-4)$; $\left(1\middle|-\frac{5}{2}\right)$; $(2|-1)$ 4 $(-2|3)$; $(0|3{,}5)$; $(2|4)$

b) 1 $y = -0{,}5x + 1$
$m = -0{,}5$; $n = 1$

2 $y = 2x + 2$
$m = 2$; $n = 2$

3 $y = 1{,}5x - 4$
$m = 1{,}5$; $n = -4$

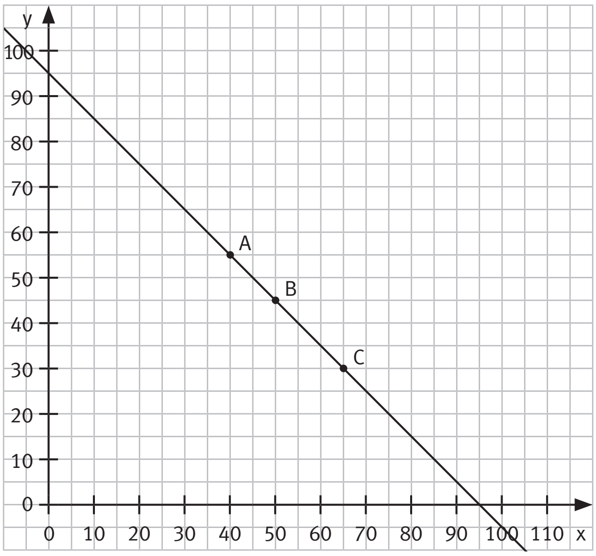
4 $y = 0{,}25x + 3{,}5$
$m = 0{,}25$; $n = 3{,}5$

K3/4 **5** Gleichung: $2x + 2y = 190$
mögliche Lösung:
$y = -x + 95$

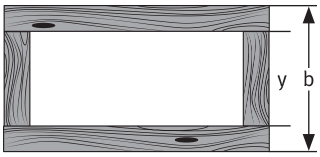
	A	B	C
x	40	50	65
y	55	45	30

mögliche Lösungspaare:
$(40|55)$; $(50|45)$; $(65|30)$



Zahlenpaare auf dem Graphen der zugehörigen Funktion
f: $y = -x + 95$

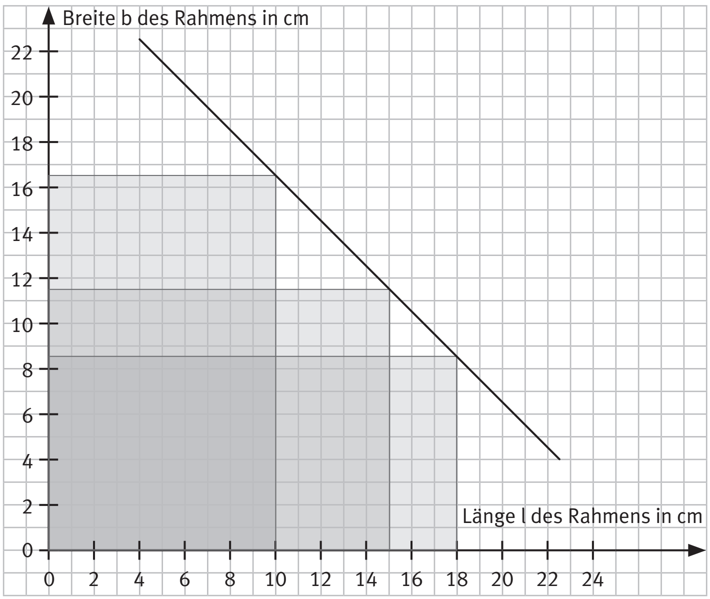
K3/4 **6** **a)**



x = l

Länge des Bilderrahmens in cm:
$x = l$
Breite b des Bilderrahmens in cm:
$b = y + 4$
$y = \frac{1}{2}(45 - 2x) = 22{,}5 - x$
eingesetzt:
$b = 22{,}5 - l + 4 = 26{,}5 - l$
(Länge l des Rahmens in cm | Breite b des Rahmens in cm);
z. B. $(19|7{,}5)$ oder $(14|12{,}5)$

b)



c) Zunächst muss man den Definitionsbereich einschränken: Der Rahmen kann maximal $x = l = 22{,}5$ (cm) lang werden, in diesem Fall ist $y = 0$, also die Breite $b = 4$ (cm). Umgekehrt gilt: Die Länge des Rahmens muss mindestens der doppelten Breite einer Leiste entsprechen, also mindestens 4 cm. Somit gilt theoretisch: $4 \leq l \leq 22{,}5$. „Realistisch“ sind aber wohl nur Bilderrahmen in einem wesentlich kleineren Bereich für l, vielleicht zwischen $l = 10$ (cm) und $l = 18$ (cm).

K5/4 **7** **a)** y = –2x + 4
mögliche Lösungspaare: (–2|8); (–1|6); (0|4); (1|2); (2|0)
b) y = x + 4
mögliche Lösungspaare: (–2|2); (–1|3); (0|4); (1|5); (2|6)
c) y = x
mögliche Lösungspaare: (–2|–2); (–1|–1); (0|0); (1|1); (2|2)

K5 **8** **a)** (5|7); (14|–2) **b)** (24|8); (10|1) **c)** (3|4); (6|8) **d)** (3|3); (–1|7)

Entdecken

K 6/4
- Gleichung I beschreibt die Anzahl der Zimmer und Gleichung II die Anzahl der Betten, wobei x für die Anzahl der Zwei- und y für die Anzahl der Dreibettzimmer steht.

K 1/4
- Der rote Graph gehört zur Gleichung I, da für $x = 0$ $y = 10$ und für $y = 0$ $x = 10$ sein muss. Der grüne Graph gehört zur Gleichung II, da für $x = 0$ $y = 8$ und für $y = 0$ $x = 12$ sein muss.

K 3/4
- Nur am Schnittpunkt $(6|4)$ der beiden Graphen sind beide Gleichungen erfüllt (Probe machen), also gibt es 6 Zwei- und 4 Dreibettzimmer.

Nachgefragt

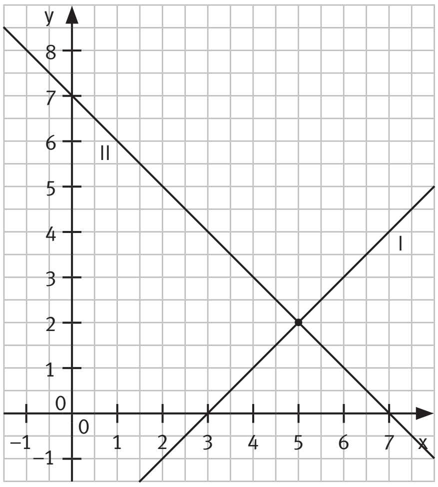
K 1/6
- Nein, die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems kann nicht aus genau zwei Zahlenpaaren bestehen. Durch zwei Zahlenpaare wird eindeutig eine Gerade festgelegt. Sind zwei Zahlenpaare Elemente der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, also Elemente der Lösungsmenge der ersten sowie der zweiten linearen Gleichung, dann sind auch alle anderen Zahlenpaare, die durch die Gerade festgelegt sind, Elemente der Lösungsmenge. Das lineare Gleichungssystem hat in diesem Fall unendlich viele Lösungen.

Aufgaben

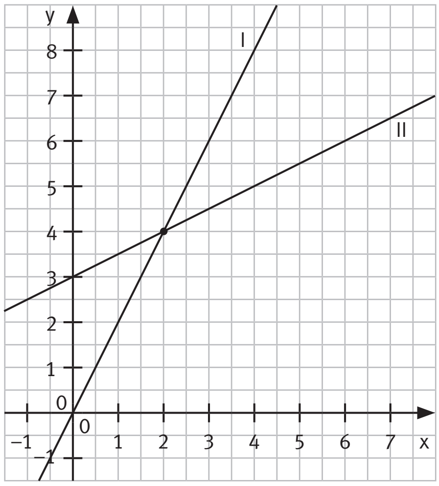
K 5 **1**

a)	$(2|2) \in L_I$ und $(2|2) \in L_{II}$ $(2|2) \in L_I \cap L_{II}$	$(6|6) \in L_I$ und $(6|6) \notin L_{II}$ $(6|6) \notin L_I \cap L_{II}$	$(8|3) \notin L_I$ und $(8|3) \notin L_{II}$ $(8|3) \notin L_I \cap L_{II}$
b)	$(6|0) \in L_I$ und $(6|0) \in L_{II}$ $(6|0) \in L_I \cap L_{II}$	$(4|-1) \notin L_I$ und $(4|-1) \in L_{II}$ $(4|-1) \notin L_I \cap L_{II}$	$(5|1) \in L_I$ und $(5|1) \notin L_{II}$ $(5|1) \notin L_I \cap L_{II}$
c)	$(3|7) \in L_I$ und $(3|7) \in L_{II}$ $(3|7) \in L_I \cap L_{II}$	$(-1|-1) \in L_I$ und $(-1|-1) \in L_{II}$ $(-1|-1) \in L_I \cap L_{II}$	$(0|1) \in L_I$ und $(0|1) \in L_{II}$ $(0|1) \in L_I \cap L_{II}$
d)	$(-6|-8) \in L_I$ und $(-6|-8) \notin L_{II}$ $(-6|-8) \notin L_I \cap L_{II}$	$(1|2{,}5) \in L_I$ und $(1|2{,}5) \in L_{II}$ $(1|2{,}5) \in L_I \cap L_{II}$	$(4|-2) \notin L_I$ und $(4|-2) \in L_{II}$ $(4|-2) \notin L_I \cap L_{II}$
e)	$(-2|-1) \notin L_I$ und $(-2|-1) \in L_{II}$ $(-2|-1) \notin L_I \cap L_{II}$	$(2|1) \in L_I$ und $(2|1) \in L_{II}$ $(2|1) \in L_I \cap L_{II}$	$(3|-1) \in L_I$ und $(3|-1) \notin L_{II}$ $(3|-1) \notin L_I \cap L_{II}$
f)	$(10{,}5|-12) \in L_I$ und $(10{,}5|-12) \notin L_{II}$ $(10{,}5|-12) \notin L_I \cap L_{II}$	$(-7{,}5|24) \in L_I$ und $(-7{,}5|24) \notin L_{II}$ $(-7{,}5|24) \notin L_I \cap L_{II}$	$(6|-6) \notin L_I$ und $(6|-6) \notin L_{II}$ $(6|-6) \notin L_I \cap L_{II}$

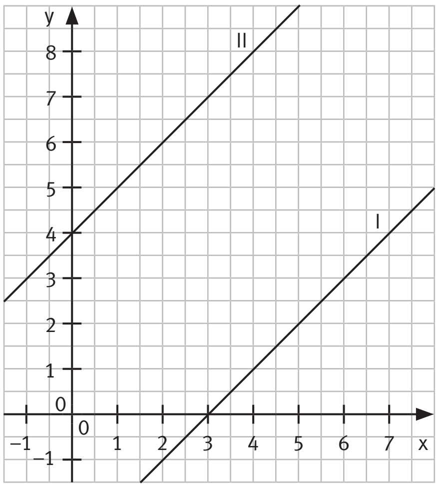
K5/4 **2** **a)** L = {(5 | 2)}



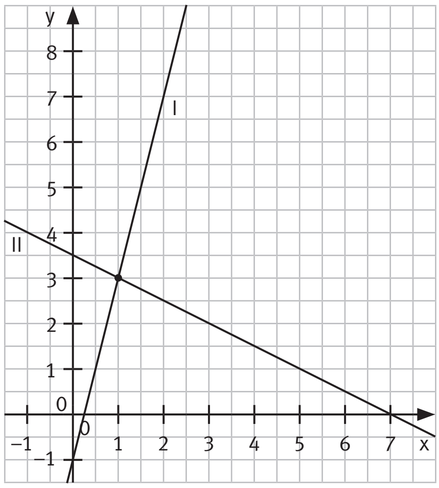
b) L = {(2 | 4)}



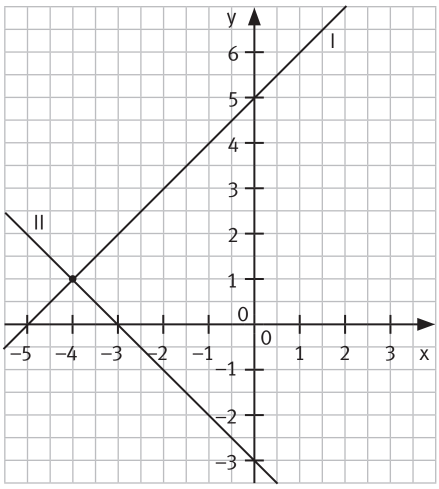
c) L = ∅



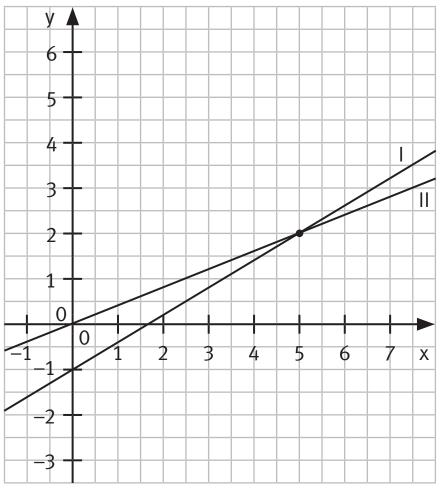
d) L = {(1 | 3)}



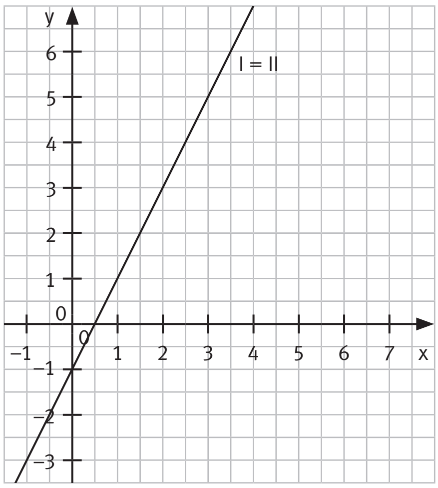
e) L = {(–4 | 1)}



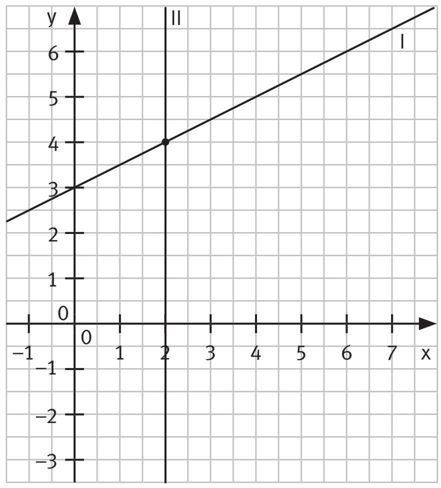
f) L = {(5 | 2)}



g) L = {(x | y) mit y = 2x – 1}



h) L = {(2 | 4)}



K 5 **3** **a)** (–5 | 4) **b)** (–2,5 | 1,5) **c)** (–5 | 4) **d)** (–2,5 | 1,5)

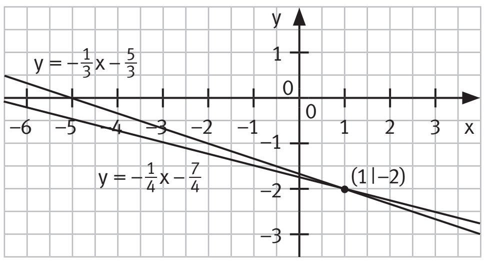
K 4/5 **4**

	1	2	3
a)	I $y = -0{,}5x + 0{,}5$ II $y = 2x - 1$	I $y = -2x - 1{,}5$ II $y = -2x - 1{,}5$	I $y = -0{,}5x - 0{,}5$ II $y = -0{,}5x + 1$
b)	L = {(0,6 | 0,2)}	L = {(x | y) mit $y = -2x - 1{,}5$}	L = ∅

K 5/4 **5** **a)** I $y = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{4}$

II $y = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

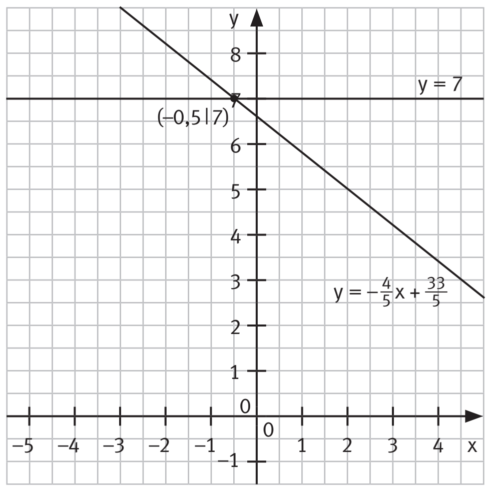
L = {(1 | –2)}



b) I $y = -\frac{4}{5}x + \frac{33}{5}$

II $y = 7$

L = {(–0,5 | 7)}

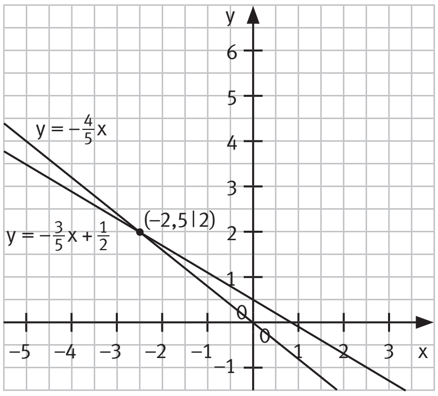


2.2 Lineare Gleichungssysteme zeichnerisch lösen

c) I $y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}$

II $y = -\frac{4}{5}x$

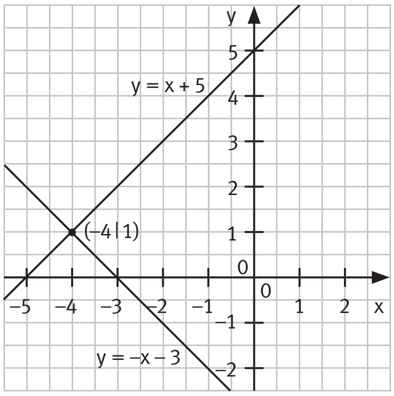
$L = \{(-2{,}5 \mid 2)\}$



d) I $y = x + 5$

II $y = -x - 3$

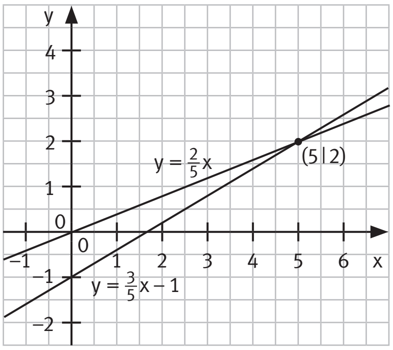
$L = \{(-4 \mid 1)\}$



e) I $y = \frac{3}{5}x - 1$

II $y = \frac{2}{5}x$

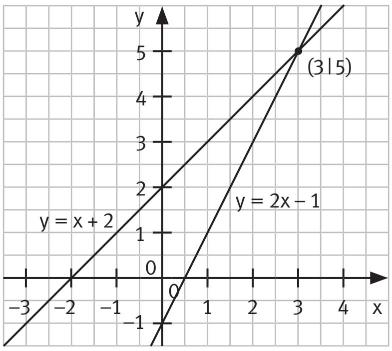
$L = \{(5 \mid 2)\}$



f) I $y = 2x - 1$

II $y = x + 2$

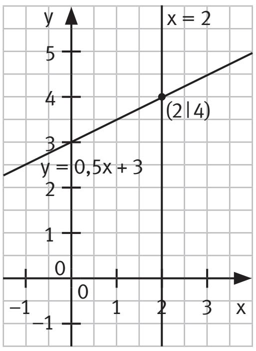
$L = \{(3 \mid 5)\}$



g) I $y = 0{,}5x + 3$

II $x = 2$

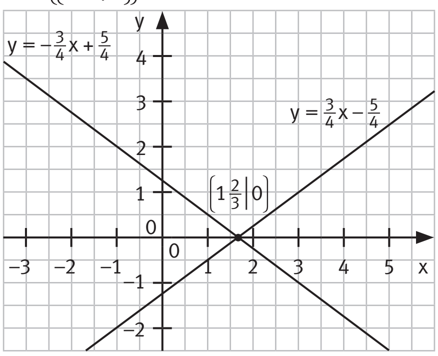
$L = \{(2 \mid 4)\}$



h) I $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$

II $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

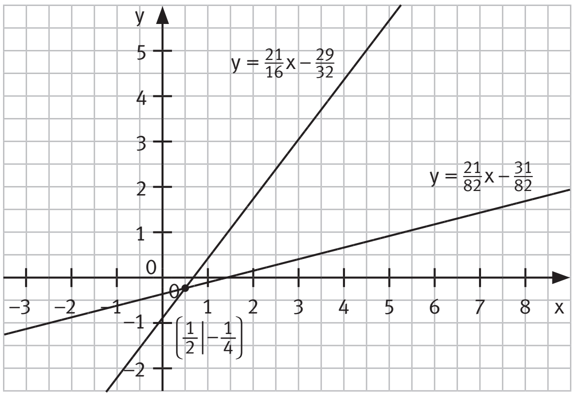
$L = \left\{\left(1\frac{2}{3} \,\middle|\, 0\right)\right\}$



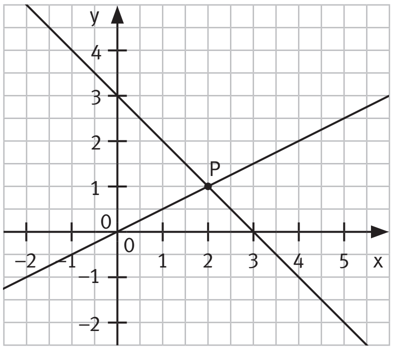
i) I $y = \frac{21}{82}x - \frac{31}{82}$

II $y = \frac{21}{16}x - \frac{29}{32}$

$L = \left\{\left(\frac{1}{2}\middle|-\frac{1}{4}\right)\right\}$



K4/5 **6**



Lösungsmöglichkeit:

I $y = 0{,}5x$

II $y = -x + 3$

Weitere mögliche Gleichungssysteme:

$y = 1$	$y = -1{,}5x + 4$	$0 = 0{,}75x - 0{,}5 - y$
$y = 2x - 3$	$x = 2$	$y + 2{,}5 = 1{,}75x$

K3/4 **7** **a)** 1 Wie viel kostet eine Currywurst, wie viel eine Portion Pommes?

x: Preis für eine Currywurst (in €)

y: Preis für eine Portion Pommes (in €)

I $x + y = 5{,}60$

II $3x + 2y = 14{,}40$

2 Wie viel kostet der Eintritt für einen Erwachsenen, wie viel für einen Jugendlichen?

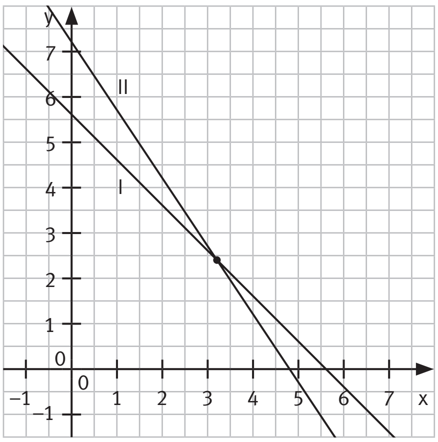
x: Eintrittspreis für einen Erwachsenen (in €)

y: Eintrittspreis für einen Jugendlichen (in €)

I $x + 2y = 18{,}50$

II $2x + 3y = 31{,}20$

b) 1

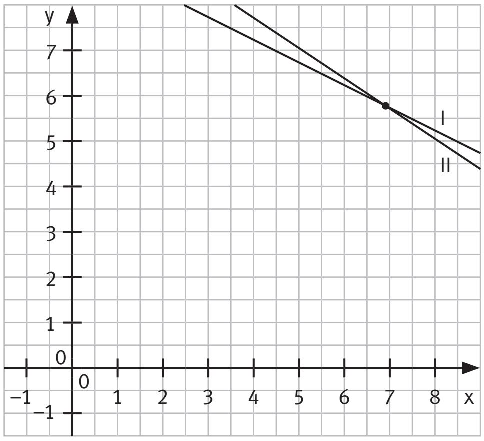


$L = \{(3{,}20 \mid 2{,}40)\}$

Das Zahlenpaar $(3{,}2 \mid 2{,}4)$ erfüllt die Gleichungen I und II.

Eine Currywurst kostet 3,20 € und eine Portion Pommes 2,40 €.

2

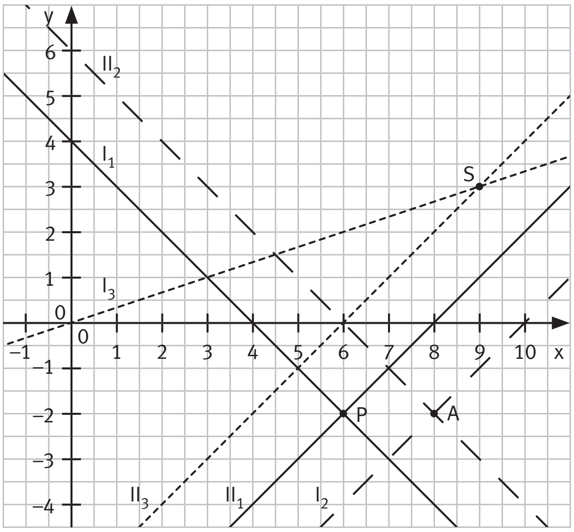


$L = \{(6{,}90 \mid 5{,}80)\}$

Das Zahlenpaar $(6{,}9 \mid 5{,}8)$ erfüllt die Gleichungen I und II.

Ein Erwachsener muss 6,90 € für den Eintritt bezahlen, ein Jugendlicher 5,80 €.

K3/4 **8** ① bis ③



① $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

I_1 $x + y = 4$ $\Leftrightarrow$ $y = -x + 4$

II_1 $x - y = 8$ $\Leftrightarrow$ $y = x - 8$

$L_1 = \{(6|-2)\}$; Lösung P

Die gesuchten Zahlen sind 6 und −2.

② $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

I_2 $x - y = 10$ $\Leftrightarrow$ $y = x - 10$

II_2 $x + y = 6$ $\Leftrightarrow$ $y = -x + 6$

$L_2 = \{(8|-2)\}$; Lösung A

Die gesuchten Zahlen sind 8 und −2.

③ $G = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

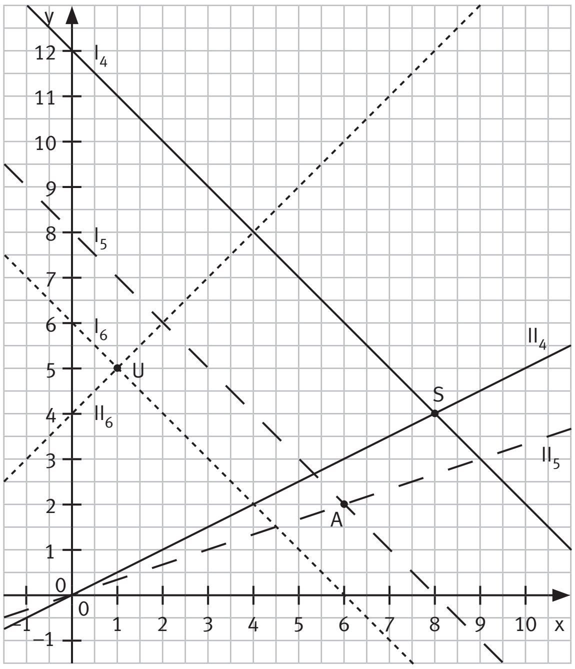
I_3 $x = 3y$ $\Leftrightarrow$ $y = \frac{1}{3}x$

II_3 $x - y = 6$ $\Leftrightarrow$ $y = x - 6$

$L_3 = \{(9|3)\}$; Lösung S

Die gesuchten Zahlen sind 9 und 3.

④ bis ⑥



④ $G = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

$0 < x < 10;\ 0 \leq y < 10$

I_4 $x + y = 12$ $\Leftrightarrow$ $y = -x + 12$

II_4 $x = 2y$ $\Leftrightarrow$ $y = 0{,}5x$

$L_4 = \{(8|4)\}$; Lösung S

Die gesuchte Zahl ist 84.

⑤ $G = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

$0 < x < 10;\ 0 \leq y < 10$

I_5 $x + y = 8$ $\Leftrightarrow$ $y = -x + 8$

II_5 $x = 3y$ $\Leftrightarrow$ $y = \frac{1}{3}x$

$L_5 = \{(6|2)\}$; Lösung A

Die gesuchte Zahl ist 62.

⑥ $G = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

$0 < x < 10;\ 0 \leq y < 10$

I_6 $x + y = 6$ $\Leftrightarrow$ $y = -x + 6$

II_6 $x = y - 4$ $\Leftrightarrow$ $y = x + 4$

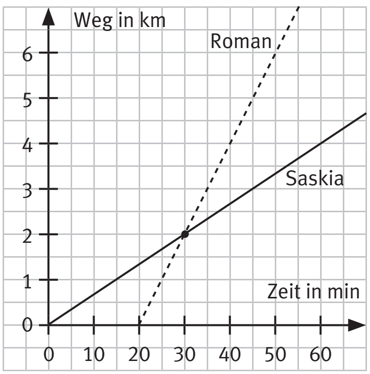
$L_6 = \{(1|5)\}$; Lösung U

Die gesuchte Zahl ist 15.

Lösungswort: PASSAU

K3/4 **9** **a)** Der Schulweg ist 2 km lang.

b)



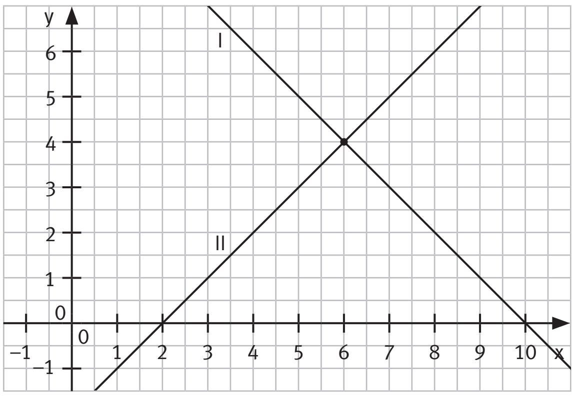
c) Sabine läuft mit 4 km/h, Roman fährt mit 12 km/h.

K2/5 **10**

	1	2	3	4
a)	II $y = 5x + 6$ Es gibt unendlich viele Möglichkeiten: alle Zahlen aus $\mathbb{Q}\setminus\{7\}$	II $y = 3x - 4$ Es gibt genau eine Möglichkeit: $m = 3$	II $-0{,}5y = 2x - 1$ Es gibt genau eine Möglichkeit: $m = -0{,}5$	II $y = -\frac{2}{3}x - 4$ Es gibt unendlich viele Möglichkeiten: $-\frac{2}{3}x - a$ mit $a \in \mathbb{Q}\setminus\{5\}$
b)	II $y = -3x + 2$ Es gibt genau eine Möglichkeit: $t = 2$	II $y = 1x - 5$ Es gibt genau eine Möglichkeit: $m = 1$	II $y = -3x + (-1)$ Es gibt genau eine Möglichkeit: $t = -1$	II $3y = -\frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$ Es gibt genau eine Möglichkeit: $-\frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$
c)	II $y = 2x - 4$ Es gibt unendlich viele Möglichkeiten: alle Zahlen aus $\mathbb{Q}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\}$	II $y = 3x - 5$ Es gibt unendlich viele Möglichkeiten: alle Zahlen aus $\mathbb{Q}\setminus\{2\}$	II $4y = 2x + 4$ Es gibt unendlich viele Möglichkeiten: alle Zahlen aus $\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$ bzw. aus $\mathbb{Q}$	II $2y = 4x + 5$ Es gibt unendlich viele Möglichkeiten: $ax + b$ mit $a \in \mathbb{Q}\setminus\{2{,}5\}$

K2/4 **11** **a)** I $x + y = 10$ x: Alter von Anna
II $x = y + 2$ y: Alter von Marie

Anna ist 6, Marie 4 Jahre alt.



b) Es sind individuelle Lösungen möglich.

Entdecken

K6/5

- Xenia setzt den Term für y aus Gleichung II in Gleichung I ein und löst anschließend nach x auf. Das Ergebnis setzt sie in die Ausgangsgleichung I ein, um y zu bestimmen. Die Probe erfolgte mit Gleichung II. Mia löst Gleichung I nach y auf, setzt dann die Terme beider Gleichungen gleich und löst dann nach x auf. Das Ergebnis setzt sie in Gleichung II ein, um y zu bestimmen. Die Probe erfolgt mit Gleichung I.

K6/1

- Merkzettel „Xenia“:
Löse eine Gleichung nach einer Variablen auf. Setze den erhaltenen Term für die Variable in die andere Gleichung ein und löse zur verbleibenden Variable auf. Setze das Ergebnis in eine der Ausgangsgleichungen ein, um auch die andere Variable genau zu bestimmen. Mache die Probe mit einer Ausgangsgleichung.
Merkzettel „Mia“:
Löse beide Gleichungen nach derselben Variablen auf. Setze die erhaltenen Terme gleich und löse nach der verbleibenden Variablen auf. Setze das Ergebnis in eine der Ausgangsgleichungen ein, um auch die andere Variable genau zu bestimmen. Mache die Probe mit einer der Ausgangsgleichungen.

K6/1

- 1 „Xenia“

I $\frac{1}{4}x - y = -4$
II $y = 2x + 4$

II in I einsetzen:

$\frac{1}{4}x - (2x + 4) = -4$
$-\frac{7}{4}x - 4 = -4 \quad | + 4$
$-\frac{7}{4}x = 0 \quad | : \left(-\frac{7}{4}\right)$
$x = 0$

Einsetzen in Gleichung II:

$y = 2 \cdot 0 + 4$
$y = 4$

Probe mit Gleichung I:

$\frac{1}{4} \cdot 0 - 4 = -4$ wahr $\quad L = \{(0|4)\}$

„Mia“

I $\frac{1}{4}x - y = -4 \quad | + y + 4$
II $y = 2x + 4$

Auflösen nach y:

I $y = \frac{1}{4}x + 4$
II $y = 2x + 4$
$\frac{1}{4}x + 4 = 2x + 4 \quad | - 2x - 4$
$-\frac{7}{4}x = 0 \quad | : \left(-\frac{7}{4}\right)$
$x = 0$

Einsetzen in Gleichung II:

$y = 2 \cdot 0 + 4$
$y = 4$

Probe mit Gleichung I:

$\frac{1}{4} \cdot 0 - 4 = -4$ wahr $\quad L = \{(0|4)\}$

2 „Xenia“

I $y = -x + 5$
II $-2x + y = -6$

I in II einsetzen:

$-2x + (-x + 5) = -6$
$-3x + 5 = -6 \quad | - 5$
$-3x = -11 \quad | : (-3)$
$x = \frac{11}{3}$

Einsetzen in Gleichung I:

$y = -\frac{11}{3} + 5$
$y = \frac{4}{3}$

Probe mit Gleichung II:

$-2 \cdot \frac{11}{3} + \frac{4}{3} = -6$ wahr $\quad L = \left\{\left(\frac{11}{3}\middle|\frac{4}{3}\right)\right\}$

„Mia“

I $y = -x + 5$
II $-2x + y = -6 \quad | + 2x$

Auflösen nach y:

I $y = -x + 5$
II $y = 2x - 6$
$-x + 5 = 2x - 6 \quad | -2x - 5$
$-3x = -11 \quad | : (-3)$
$x = \frac{11}{3}$

Einsetzen in Gleichung I:

$y = -\frac{11}{3} + 5$
$y = \frac{4}{3}$

Probe mit Gleichung II:

$-2 \cdot \frac{11}{3} + \frac{4}{3} = -6$ wahr $\quad L = \left\{\left(\frac{11}{3}\middle|\frac{4}{3}\right)\right\}$

Nachgefragt

K 1/6
- Beim Einsetzungsverfahren wird eine Gleichung nach einer Variablen aufgelöst und der entstandene Term für die Variable in der anderen Gleichung eingesetzt. Beim Gleichsetzungsverfahren löst man beide Gleichungen zuerst nach einer der beiden Variablen auf. Die anschließende Gleichsetzung kann man so verstehen, dass man den einen Term für die Variable im anderen Term einsetzt. In diesem Sinne ist das Gleichsetzungsverfahren ein Sonderfall des Einsetzungsverfahrens.

K 6/4
- Werden beim Gleichsetzungsverfahren beide Gleichungen nach y aufgelöst, dann erhält man die Funktionsgleichungen, die man für das grafische Lösen benötigt. Die Lösungen dieser beiden linearen Gleichungen lassen sich als zwei Geraden darstellen. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist Element der Lösungsmengen beider Gleichungen und Lösung des Gleichungssystems.

Aufgaben

K 6/5

1

I $3x + 4y = 12$		Vorgehen:
II $x + 3y = 4$	| nach x auflösen	• Löse beide Gleichungen nach derselben Variablen (hier: x) auf.
I $x = -\frac{4}{3}y + 4$		
II $x = -3y + 4$	| Terme gleichsetzen	• Setze die beiden Terme für x gleich.
$-\frac{4}{3}y + 4 = -3y + 4$	| $+ 3y - 4$	• Berechne y durch Äquivalenzumformungen.
$-\frac{5}{3}y = 0$	| $:\left(-\frac{5}{3}\right)$	
$y = 0$		
$x + 3 \cdot 0 = 4$		• Setze den Wert für y in eine der beiden Gleichungen (hier: Gleichung II) ein.
$x = 4$		• Berechne den Wert für x.
Probe:		
I $3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 = 12$	wahr	• Führe die Probe durch.
II $4 + 3 \cdot 0 = 4$	wahr	
$L = \{(4 \mid 0)\}$		• Gib die Lösungsmenge an.

K 5

2 (Hier a) bis d) ausführlich, e) bis i) nur das Ergebnis)

a) I $2x + 5y = 4$
II $y = 2x + 8$
II in I einsetzen:
$2x + 5 \cdot (2x + 8) = 4$
$2x + 10x + 40 = 4$ | -40
$12x = -36$ | $:12$
$x = -3$
x in II einsetzen:
$y = 2 \cdot (-3) + 8 = 2$
Probe:
I $2 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 4$ wahr
II $2 = 2 \cdot (-3) + 8$ wahr
$L = \{(-3 \mid 2)\}$

b) I $3x + y = 15$
II $y = 5x - 11$
II in I einsetzen:
$3x + 5x - 11 = 15$ | $+11$
$8x = 26$ | $:8$
$x = 3{,}25$
x in II einsetzen:
$y = 5 \cdot 3{,}25 - 11 = 5{,}25$
Probe:
I $3 \cdot 3{,}25 + 5{,}25 = 15$ wahr
II $5{,}25 = 5 \cdot 3{,}25 - 11$ wahr
$L = \{(3{,}25 \mid 5{,}25)\}$

c) I $x - y = 5$
II $x = 2y - 4$
II in I einsetzen:
$2y - 4 - y = 5$ | $+4$
$y = 9$
y in II einsetzen:
$x = 2 \cdot 9 - 4 = 18 - 4$
$x = 14$
Probe:
I $14 - 9 = 5$ wahr
II $14 = 2 \cdot 9 - 4$ wahr
$L = \{(14 \mid 9)\}$

d) I $x + 16y = -9$
II $y = 4{,}5 - \frac{1}{2}x$
II in I einsetzen:
$x + 16 \cdot (4{,}5 - \frac{1}{2}x) = -9$
$x + 72 - 8x = -9$ | -72
$-7x = -81$ | $:(-7)$
$x = \frac{81}{7}$
x in II einsetzen:
$y = 4{,}5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{81}{7} = -\frac{9}{7}$
Probe:
I $\frac{81}{7} + 16 \cdot \left(-\frac{9}{7}\right) = -9$ wahr
II $-\frac{9}{7} = 4{,}5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{81}{7}$ wahr
$L = \left\{\left(\frac{81}{7} \mid -\frac{9}{7}\right)\right\}$

e) $L = \{(8 \mid 1{,}5)\}$ **f)** $L = \{(2 \mid -2)\}$ **g)** $L = \{(0{,}4 \mid 8)\}$ **h)** $L = \{(0{,}5 \mid -2)\}$ **i)** $L = \{(-1 \mid -2)\}$

K5 **3** (Hier a) bis d) ausführlich, e) bis i) nur das Ergebnis)

a) Gleichungen nach y auflösen:
I $y = 2x - 4$
II $y = -\frac{2}{3}x + 4$ | I und II gleichsetzen
$2x - 4 = -\frac{2}{3}x + 4$ | $+\frac{2}{3}x + 4$
$\frac{8}{3}x = 8$ | $:\frac{8}{3}$
$x = 3$ | x in I einsetzen
$y = 2 \cdot 3 - 4 = 2$
Probe:
I $2 = 2 \cdot 3 - 4$ wahr
II $3 \cdot 2 = -2 \cdot 3 + 12$ wahr
$L = \{(3 \mid 2)\}$

b) Gleichungen nach y auflösen:
I $y = x - 65$
II $y = -x + 107$ | I und II gleichsetzen
$x - 65 = -x + 107$ | $+x + 65$
$2x = 172$ | $:2$
$x = 86$ | x in II einsetzen
$y = 86 - 65 = 21$
Probe:
I $86 - 21 = 65$ wahr
II $21 = -86 + 107$ wahr
$L = \{(86 \mid 21)\}$

c) Gleichungen nach y auflösen:
I $y = -3x - 5$
II $y = -0{,}5x + 2{,}5$ | I und II gleichsetzen
$-3x - 5 = -0{,}5x + 2{,}5$ | $+3x - 2{,}5$
$-7{,}5 = 2{,}5x$ | $:2{,}5$
$-3 = x$ | x in I einsetzen
$y = -3 \cdot (-3) - 5 = 4$
Probe:
I $6 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 = -10$ wahr
II $-3 + 2 \cdot 4 = 5$ wahr
$L = \{(-3 \mid 4)\}$

d) Gleichungen nach x auflösen:
I $x = 3y - 1$
II $x = -5y - 7$ | I und II gleichsetzen
$3y - 1 = -5y - 7$ | $+5y + 1$
$8y = -6$ | $:8$
$y = -0{,}75$ | y in I einsetzen
$x = 3 \cdot (-0{,}75) - 1 = -3{,}25$
Probe:
I $-3{,}25 = 3 \cdot (-0{,}75) - 1$ wahr
II $-3{,}25 + 5 \cdot (-0{,}75) = -7$ wahr
$L = \left\{-\frac{13}{4} \mid -\frac{3}{4}\right\}$

e) Gleichungen nach x auflösen und gleichsetzen: $1{,}5y + 1{,}5 = 1{,}5$ $\Rightarrow L = \{(1{,}5 \mid 0)\}$
f) Gleichungen nach x auflösen und gleichsetzen: $\frac{2}{3}y - \frac{7}{3} = \frac{11}{3}$ $\Rightarrow L = \left\{\left(\frac{11}{3} \mid 9\right)\right\}$
g) Gleichungen nach y auflösen und gleichsetzen: $-\frac{5}{3}x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ $\Rightarrow L = \left\{\left(-\frac{11}{7} \mid \frac{16}{7}\right)\right\}$
h) Gleichungen nach x auflösen und gleichsetzen: $-\frac{32}{7}y + \frac{13}{7} = -\frac{8}{9}y + \frac{83}{9}$ $\Rightarrow L = \{(11 \mid -2)\}$
i) Gleichungen nach x auflösen und gleichsetzen: $\frac{5}{2}y - \frac{9}{2} = -\frac{7}{3}y + \frac{1}{3}$ $\Rightarrow L = \{(-2 \mid 1)\}$

K6/5 **4** **a)** Sofie (Lösungsweg fortgesetzt)

$-4x + 5 = -5x + 3 \quad | + 5x - 5$
$x = -2 \quad |$ x in I einsetzen
$2y = -4 \cdot (-2) + 5$
$2y = 13 \quad | : 2$
$y = 6{,}5$
Probe:
I $4 \cdot (-2) + 2 \cdot 6{,}5 = 5$ wahr
II $10 \cdot (-2) + 4 \cdot 6{,}5 = 6$ wahr
$L = \{(-2|6{,}5)\}$

Jenny (Lösungsweg fortgesetzt)

$-2x + \frac{5}{2} = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \quad | + \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$
$\frac{1}{2}x = -1 \quad | \cdot 2$
$x = -2 \quad |$ x in I einsetzen
$y = -2 \cdot (-2) + \frac{5}{2}$
$y = 6{,}5$
Probe:
I $4 \cdot (-2) + 2 \cdot 6{,}5 = 5$ wahr
II $10 \cdot (-2) + 4 \cdot 6{,}5 = 6$ wahr
$L = \{(-2|6{,}5)\}$

b) Es sind individuelle Antworten möglich, z. B.:
Beide Rechenwege führen zum Ziel. Im vorliegenden Fall scheint Sofies Vorgehen etwas geschickter zu sein, weil Sofie die beiden Gleichungen nicht nach y, sondern nach 2y auflöst. Dadurch kann sie möglichst lange mit ganzen Zahlen in den Termen rechnen.

c) Es sind individuelle Lösungswege möglich, z. B.:

1 Gleichungen nach 2y auflösen und gleichsetzen:
$3x + 2 = -6x + 5 \Leftrightarrow 9x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}; y = 1\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow L = \left\{\left(\frac{1}{3}\middle|1\frac{1}{2}\right)\right\}$

2 Gleichung II nach x auflösen und den Term für x in I einsetzen:
$5 \cdot (22 - 7y) + 4y = 16 \Leftrightarrow 3\frac{1}{31} = y; x = \frac{24}{31} \qquad \Rightarrow L = \left\{\left(\frac{24}{31}\middle|3\frac{1}{31}\right)\right\}$

3 Gleichungen nach 2x auflösen und gleichsetzen:
$10 - 2y = 38 - 16y \Leftrightarrow y = 2; x = 3 \qquad \Rightarrow L = \{(3|2)\}$

K5/6 **5** **a)** I $y = 1{,}5x - 4$
II $y = 1{,}5x + 2{,}5$
$L = \varnothing$

b) I $y = -0{,}4x + 2{,}4$
II $y = -0{,}4x + 2{,}4$
$L = \{(x|y) \text{ mit } y = -0{,}4x + 2{,}4\}$

c) I $y = 3x + 2{,}5$
II $y = 1{,}5x + 2{,}5$
$L = \{(0|2{,}5)\}$

Löst man beide Gleichungen eines linearen Gleichungssystems nach y auf, so hat das Gleichungssystem ...

1 keine Lösung, wenn die Koeffizienten vor dem x gleich sind (also identische Steigungen vorliegen), die Konstanten (also die y-Achsenabschnitte) aber unterschiedlich sind. Die zugehörigen Geraden sind parallel.

2 eine Lösung, wenn verschiedene x-Koeffizienten vorliegen. Die zugehörigen Geraden schneiden sich in einem Punkt.

3 unendlich viele Lösungen, wenn die Koeffizienten vor dem x gleich sind (also identische Steigungen vorliegen) und zusätzlich noch die Konstanten (also die y-Achsenabschnitte) übereinstimmen. Die zugehörigen Geraden sind identisch.

K5 **6** Es sind individuelle Lösungswege möglich.

a) $L = \{(1{,}5|2)\}$ **b)** $L = \left\{\left(3\frac{2}{3}\middle|6\right)\right\}$ **c)** $L = \left\{(x|y) \text{ mit } y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right\}$

d) $L = \varnothing$ **e)** $L = \{(5|-2)\}$ **f)** $L = \left\{\left(-2\frac{5}{12}\middle|\frac{5}{6}\right)\right\}$

K5 **7** (Hier a) bis d) ausführlich, e) bis i) nur das Ergebnis)

a)
I $x + 5y = -14{,}5$
II $-x - y = 2{,}5$
I + II: $4y = -12$ | : 4
$y = -3$
y in I einsetzen:
$x + 5 \cdot (-3) = -14{,}5$ | + 15
$x = 0{,}5$
$L = \{(0{,}5 \mid -3)\}$
Probe:
I $0{,}5 + 5 \cdot (-3) = -14{,}5$ wahr
II $-0{,}5 - (-3) = 2{,}5$ wahr

b)
I $2x + y = 10{,}3$
II $3x - y = 1{,}2$
I + II: $5x = 11{,}5$ | : 5
$x = 2{,}3$
x in I einsetzen:
$2 \cdot 2{,}3 + y = 10{,}3$ | − 4,6
$y = 5{,}7$
$L = \{(2{,}3 \mid 5{,}7)\}$
Probe:
I $2 \cdot 2{,}3 + 5{,}7 = 10{,}3$ wahr
II $3 \cdot 2{,}3 - 5{,}7 = 1{,}2$ wahr

c)
I $8x - 5y - 3 = 0$
II $5 \cdot (y - 3x) = -10$
I $8x - 5y - 3 = 0$
II $5y - 15x = -10$
I + II: $-7x - 3 = -10$ | + 3
$-7x = -7$ | : (−7)
$x = 1$
x in I einsetzen:
$8 \cdot 1 - 5y - 3 = 0$ | + 5y
$5 = 5y$ | : 5
$y = 1$
$L = \{(1 \mid 1)\}$
Probe:
I $8 \cdot 1 - 5 \cdot 1 - 3 = 0$ wahr
II $5 \cdot (1 - 3 \cdot 1) = -10$ wahr

d)
I $\frac{1}{2}x + y = 3$
II $y - 0{,}5x = 5$
I + II: $2y = 8$ | : 2
$y = 4$
y in I einsetzen:
$\frac{1}{2}x + 4 = 3$ | − 4
$\frac{1}{2}x = -1$ | · 2
$x = -2$
$L = \{(-2 \mid 4)\}$
Probe:
I $\frac{1}{2} \cdot (-2) + 4 = 3$ wahr
II $4 - 0{,}5 \cdot (-2) = 5$ wahr

e) $L = \{(10 \mid 2)\}$ **f)** $L = \{(1 \mid -\frac{3}{4})\}$ **g)** $L = \{\,\}$ **h)** $L = \{(10 \mid 2)\}$ **i)** $L = \{\,\}$

K1/5 **8** Es sind individuelle Antworten möglich.

a) Bei 1 erscheint das Gleichsetzungsverfahren am geschicktesten, da beide Gleichungen bereits nach y aufgelöst sind.
Bei 2 erscheint das Einsetzungsverfahren am geschicktesten, da die Gleichung I nach y aufgelöst ist und der Term für y aus I direkt in II eingesetzt werden kann.
Bei 3 erscheint das Additionsverfahren am geschicktesten, da in beiden Gleichungen 3y mit unterschiedlichem Vorzeichen steht und bei der Addition der Gleichungen die Variable y entfällt.

b) 1 I und II gleichsetzen
$2x + 5 = -x + 3$ | + x − 5
$3x = -2$ | : 3
$x = -\frac{2}{3}$ | x in II einsetzen
$y = -\left(-\frac{2}{3}\right) + 3 = 3\frac{2}{3}$
$L = \left\{\left(-\frac{2}{3} \mid 3\frac{2}{3}\right)\right\}$

2 I in II einsetzen
$2x - 4 + x = 8$
$3x = 12$ | : 3
$x = 4$ | x in I einsetzen
$y = 4 - 4 = 0$
$L = \{(4 \mid 0)\}$

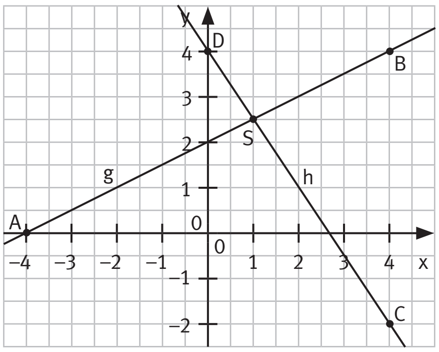
3 I und II addieren
$6x + 2x = 5 + 9$
$8x = 14$ | : 8
$x = 1\frac{3}{4}$ | x in II einsetzen
$y = \frac{1}{3} \cdot (9 - 3{,}5) = 1\frac{5}{6}$
$L = \left\{\left(1\frac{3}{4} \mid 1\frac{5}{6}\right)\right\}$

K5 **9** **a)** $L = \{(-2 \mid 3)\}$ **b)** $L = \{(4 \mid -1)\}$ **c)** $L = \{(-5 \mid 0{,}5)\}$
d) $L = \{(11 \mid -2)\}$ **e)** $L = \{(5 \mid -1)\}$ **f)** $L = \{(13 \mid -3)\}$

K5 **10** Zahlenpaare in alphabetischer Reihenfolge der Buchstaben: (a | b); (s | t); (v | w); (m | n); (u | v); (k | l).
a) $L = \left\{\left(5\frac{2}{7} \mid 5\frac{1}{7}\right)\right\}$ **b)** $L = \{(1 \mid 3)\}$ **c)** $L = \{(5 \mid 0)\}$
d) $L = \{(5 \mid -2)\}$ **e)** $L = \{(u \mid v)$ mit $v = -0{,}25u + 1\}$ **f)** $L = \{(1 \mid 1)\}$

K5/2 **11** (Lösung zu a) ausführlich, Lösungen zu b) bis d) verkürzt)
Mit A, B ∈ g und C, D ∈ h kann man die Gleichungen der Geraden g und h bestimmen, man erhält so zwei lineare Gleichungen bzw. ein lineares Gleichungssystem mit den Gleichungen g und h. Der Schnittpunkt S erfüllt beide Gleichungen, er ist Lösung des linearen Gleichungssystems.

a)



$A \in g \Rightarrow 0 = -4m + t$
$B \in g \Rightarrow 4 = 4m + t$
Gleichungen addieren: $4 = 2t \Leftrightarrow t = 2$
$t = 2$ einsetzen: $0 = -4m + 2 \Leftrightarrow m = 0{,}5$
$\Rightarrow$ g: $y = 0{,}5x + 2$
$C \in h \Rightarrow -2 = 4m + t$
$D \in h \Rightarrow t = 4$
$t = 4$ einsetzen: $-2 = 4m + 4 \Leftrightarrow m = -1{,}5$
$\Rightarrow$ h: $y = -1{,}5x + 4$
$S \in g$ und $S \in h$: g und h gleichsetzen:
$0{,}5x + 2 = -1{,}5x + 4 \Leftrightarrow x = 1;\ y = 2{,}5 \Rightarrow S\,(1\,|\,2{,}5)$

b) Gleichung für A: $2 = m + t$ und Gleichung für B: $5 = 4m + t$. $\Rightarrow$ g: $y = x + 1$
Gleichung für C: $3 = -m + t$ und Gleichung für D: $9 = m + t$. $\Rightarrow$ h: $y = 3x + 6$
g und h gleichsetzen: $x + 1 = 3x + 6 \Leftrightarrow x = -2{,}5;\ y = -1{,}5$ $\Rightarrow S\,(-2{,}5\,|\,-1{,}5)$

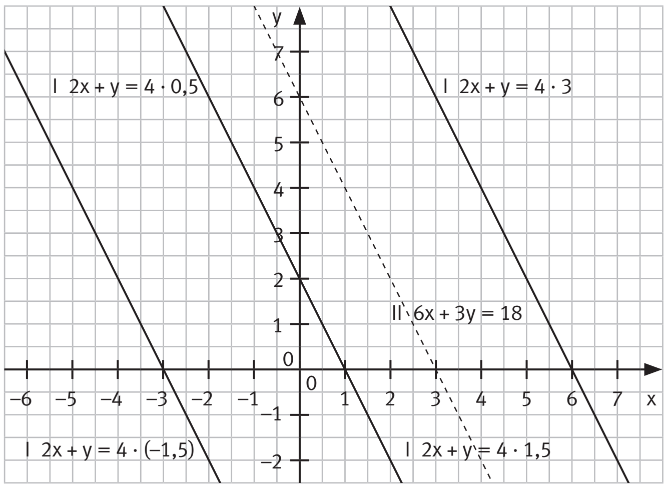
c) Gleichung für A: $3 = 2m + t$ und Gleichung für B: $6 = -m + t$. $\Rightarrow$ g: $y = -x + 5$
Gleichung für C: $4 = 2m + t$ und Gleichung für D: $2 = 8m + t$. $\Rightarrow$ h: $y = -\frac{1}{3}x + 4\frac{2}{3}$
g und h gleichsetzen: $-x + 5 = -\frac{1}{3}x + 4\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 0{,}5;\ y = 4{,}5$ $\Rightarrow S\,(0{,}5\,|\,4{,}5)$

d) Gleichung für A: $1 = -3m + t$ und Gleichung für B: $3 = 4m + t$. $\Rightarrow$ g: $y = \frac{2}{7}x + 1\frac{6}{7}$
Gleichung für C: $3 = -2m + t$ und Gleichung für D: $-1 = 4m + t$. $\Rightarrow$ h: $y = -\frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3}$
g und h gleichsetzen: $\frac{2}{7}x + 1\frac{6}{7} = -\frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5};\ y = 1\frac{4}{5}$ $\Rightarrow S\left(-\frac{1}{5}\,\middle|\,1\frac{4}{5}\right)$

K2/4 **12** **a)**

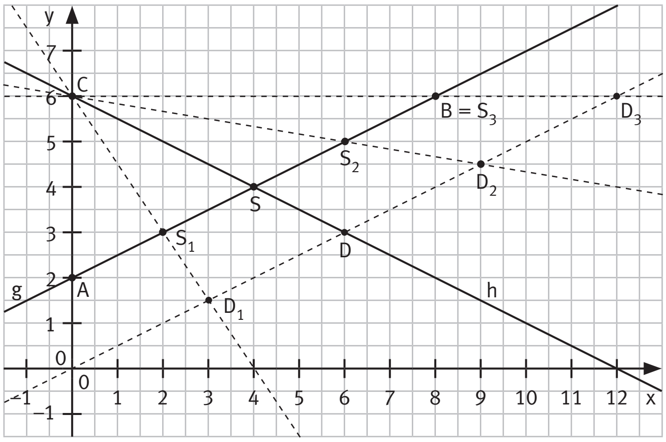
I $2x + y = 4a$	$\mid \cdot (-3)$
II $6x + 3y = 18$	
I $-6x - 3y = -12a$	
II $6x + 3y = 18$	
I + II:	
$0 = -12a + 18$	$\mid + 12a$
$12a = 18$	$\mid : 12$
$a = 1{,}5$	

Für $a \neq 1{,}5$ besitzt das lineare Gleichungssystem keine Lösung, die zugehörigen Geraden verlaufen parallel.



b) Für $a = 1{,}5$ besitzt das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, die zugehörigen Geraden sind identisch.

K5/4 **13 a)** D (6|3); S (4|4)



b)

$S(x_S \mid y_S)$	(0|2)	(2|3)	(4|4)	(6|5)	(8|6)	(10|7)
$D(x_D \mid 0{,}5x_D)$	(0|0)	(3|1,5)	(6|3)	(9|4,5)	(12|6)	(15|7,5)

Da $S(x_S \mid y_S)$ auf g liegt und g die Steigung 0,5 hat, muss x_S geradzahlig (und positiv) sein, damit $(x_S \mid y_S)$ ein ganzzahliges Zahlenpaar ist. Möglichkeiten für x_S sind daher: 2; 4; 6; 8; 10; … ; zugehörige y_S sind: 3; 4; 5; 6; 7; … Die Koordinaten des Punktes D ändern sich bei Änderung von S linear, d. h., für die nächste Lösung von S nimmt die x-Koordinate von D um 3 Einheiten und die y-Koordinate um 1,5 Einheiten zu.

Aufgaben

K6/3 **1** **a)** Es sind individuelle Lösungen möglich.

b)

Variablen zuordnen:	Preis für einen Erwachsenen in €: x Preis für ein Kind in €: y
Grundmenge festlegen:	$G = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$
Gleichung aufstellen zur 1. Bedingung: „Ein Erwachsener und sechs Kinder zahlen 34,60 €.“	I x + 6y = 34,60
Gleichung aufstellen zur 2. Bedingung: „Drei Erwachsene mit vier Kindern zahlen 36,60 €.“	II 3x + 4y = 36,60
Lineares Gleichungssystem mit einem Verfahren lösen:	I x + 6y = 34,60 | – 6y I' x = 34,60 – 6y I' in II: 103,80 – 14y = 36,60 ⇔ y = 4,80 y in I: x = 5,80 Probe: I 5,8 + 28,8 = 34,6 wahr II 17,4 + 19,2 = 36,6 wahr L = {(5,80 | 4,80)}
Lösung auf Ausgangssituation beziehen:	Eine Karte für einen Erwachsenen kostet 5,80 € und eine Karte für ein Kind 4,80 €.

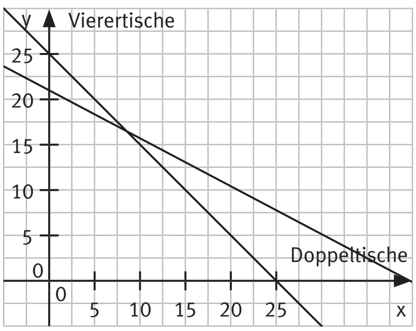
K3/5 **2** I x + y = 24 x: Anzahl Sechser-Kartons
II 6x + 10y = 188 y: Anzahl Zehner-Kartons
L = {(13 | 11)} Es wurden 13 Sechser- und 11 Zehner-Kartons verwendet.

K3/5 **3** I x + y = 116 x: Anzahl Einzelzimmer
II x + 2y = 192 y: Anzahl Doppelzimmer
L = {(40 | 76)} Das Hotel hat also 40 Einzel- und 76 Doppelzimmer.

K3/4 **4** Sei x die Anzahl der Doppel- und y die Anzahl der Vierertische.

a) I x + y = 25
II 2x + 4y = 84

b) Der Schnittpunkt der Graphen liegt etwa bei (8 | 17).



Rechnerische Bestätigung durch Probe: 8 + 17 = 25; 2 · 8 + 4 · 17 = 84
Das Restaurant hat also 8 Doppel- und 17 Vierertische.

c) Das Restaurant hat dann 10 Doppel- und 20 Vierertische.

K3/5 **5** Frage: Wie viele Menüs hat die Klasse 9c jeweils bestellt?

I $x + y = 31$ x: Anzahl vegetarischer Menüs

II $3{,}50x + 3{,}60y = 110{,}30$ y: Anzahl fleischhaltiger Menüs

$L = \{(13|18)\}$

Die Klasse 9c hat 13 vegetarische Menüs und 18 Menüs mit Fleisch bestellt.

K3/5 **6** I $s = b + 1236$ b: Stimmen Frau Beyer

II $4s = 5b$ s: Stimmen Frau Schwab

$L = \{(4944|6180)\}$

Frau Schwab hatte 6180 Stimmen, ihre Gegenkandidatin Frau Beyer 4944 Stimmen.

K3/5 **7** x: Anzahl der Radiergummi

y: Anzahl der Spitzer

Es gilt: $0{,}7x + 1{,}4y = 10{,}5 \quad | : 0{,}7$

$x + 2y = 15$

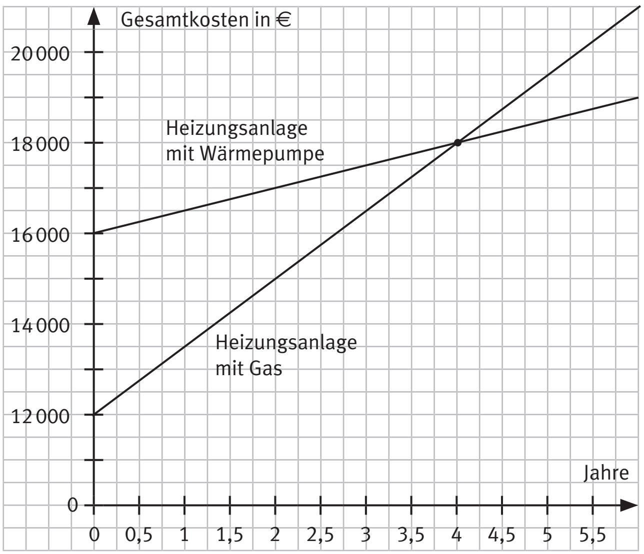
Durch Ausprobieren erhält man folgende Lösungen:

$L = \{(1|7); (3|6); (5|5)\}$

K3/4 **8** **a)** $16\,000\,€ + 5 \cdot 500\,€ = 18\,500\,€$

b) I $y_{Wärmepumpe} = 500x + 16\,000$ x: Anzahl Jahre

II $y_{Gas} = 1500x + 12\,000$ y: Gesamtkosten in €



c) Nach vier Jahren betragen die Kosten bei beiden Anlagen 18 000 €.

d) 1 Die Aussage ist falsch.

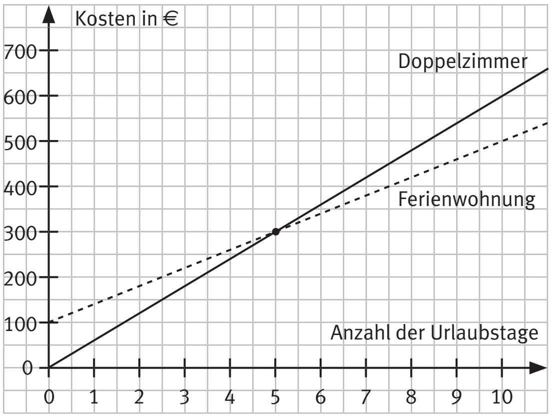
2 Die Aussage ist falsch. Für die Heizung mit Wärmepumpe ergeben sich Kosten von 17 500 €, für die Gasheizungsanlage 16 500 €.

3 Die Aussage ist wahr. Für die Heizung mit Wärmepumpe ergeben sich Kosten von 19 000 €, für die Gasheizungsanlage 21 000 €. Gegenüber der Gasheizungsanlage sind die Gesamtkosten der Heizung mit Wärmepumpe also 2000 € günstiger.

K3/4 **9** **a)**

	3 Tage	8 Tage
Ferienwohnung	220 €	420 €
Doppelzimmer	180 €	480 €

b)



c) Nach 5 Tagen betragen die Kosten bei beiden Übernachtungsmöglichkeiten je 300 €.

2.5 Vermischte Aufgaben

K5 **1** Lösungsmöglichkeiten:

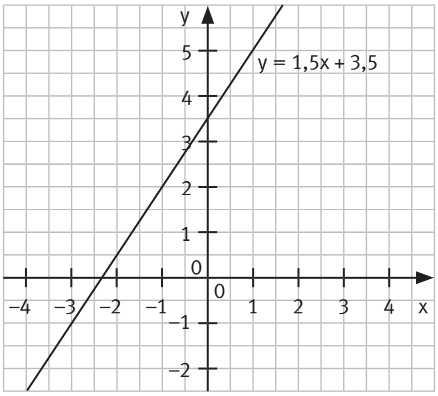
a) $-x = 2y$ **b)** $y - 1 = 2x$ **c)** $y = 0{,}5x + 0{,}5$

K5 **2** **a)** Lösungsmöglichkeit: $(0|4)$; $\left(1\,|\,2\frac{2}{3}\right)$; $\left(2\,|\,1\frac{1}{3}\right)$; $(3|0)$

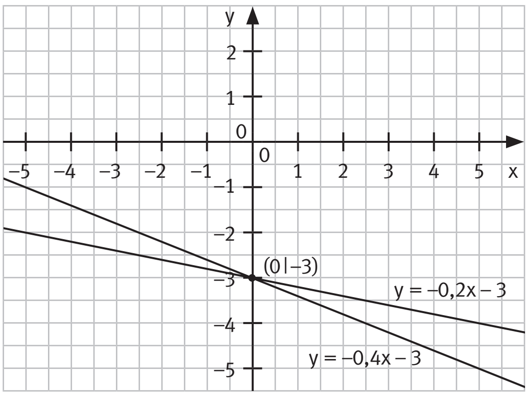
b) Lösungsmöglichkeit: $(0|1)$; $(0{,}1|0{,}9)$; $(0{,}5|0{,}5)$; $(0{,}6|0{,}4)$; $\left(\frac{3}{4}\,|\,\frac{1}{4}\right)$

c) Lösungsmöglichkeit: $(0|-3{,}5)$; $(1|-2{,}5)$; $(2|-1{,}5)$; $(3{,}5|0)$; $(7|3{,}5)$

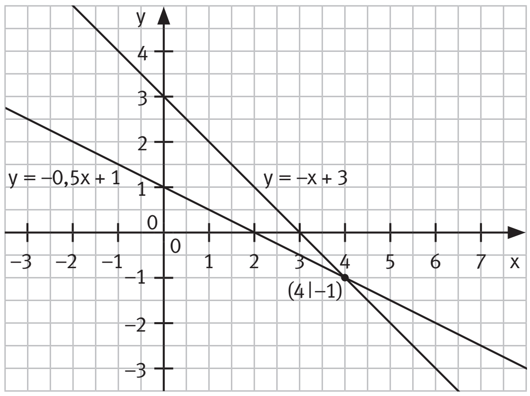
K5/4 **3**



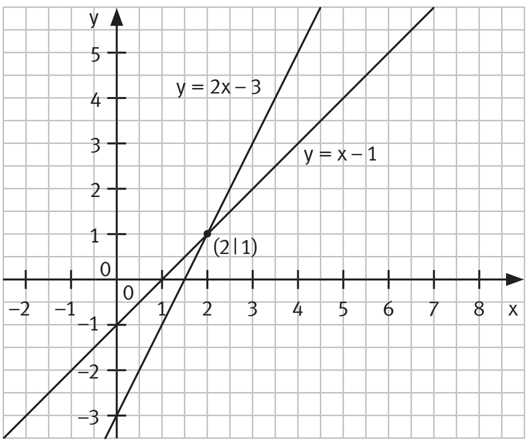
K5/4 **4** **a)** $L = \{(0|-3)\}$



b) $L = \{(4|-1)\}$



c) $L = \{(2|1)\}$



K5/4 **5** Es sind individuelle Lösungen möglich.

K5/4 **6** **a)** rot: I $y = -0{,}5x + 0{,}5$
blau: II $y = -1{,}5x - 0{,}5$
$L = \{(-1 \mid 1)\}$

b) rot: I $y = -0{,}25x + 3$
blau: II $y = 1{,}25x - 1{,}5$
$L = \{(3 \mid 2{,}25)\}$

Jede zu den obigen Gleichungen äquivalente Gleichung ist ebenfalls richtig.

K3/5 **7** **a)** $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, oder genauer: $0° < \beta \leq 90°$ und $0° < \gamma \leq 90°$
I $\beta + \gamma = 180° - 42°$
II $\gamma = \beta + 24°$
$L = \{(57° \mid 81°)\}$
Es gilt: $\beta = 57°$ und $\gamma = 81°$.

b) $G = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$
I $2a + 2b = 46$
II $(a + 3) \cdot (b - 3) = a \cdot b + 21$
$L = \{(6{,}5 \mid 16{,}5)\}$
Die zu verlängernde Seite ist ursprünglich $a = 6{,}5$ (cm) und die zu verkürzende $b = 16{,}5$ (cm) lang.

c) $G = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$
I $2a + 2b = 15$
II $a = b + 1{,}5$
$L = \{(4{,}5 \mid 3)\}$
Die Seiten des Parallelogramms sind $a = 4{,}5$ (cm) und $b = 3$ (cm) lang.

K5 **8** **a)** $L = \{(-13 \mid 8{,}5)\}$ **b)** $L = \{(-8{,}5 \mid 7)\}$ **c)** $L = \{(-16 \mid 13)\}$

K5 **9** **a)** $L = \{(4 \mid -14)\}$ **b)** $L = \{(-2 \mid 6)\}$ **c)** $L = \{(-17 \mid -6)\}$

K5 **10** **a)**

$$\begin{array}{ll}
\text{I} \quad 3x - 8y = -6{,}5 & \\
\text{II} \quad 3x - 4y = 9{,}5 & \mid \text{II} - \text{I} \\
4y = 16 & \mid :4 \\
y = 4 & \mid y \text{ in II einsetzen} \\
3x - 4 \cdot 4 = 9{,}5 & \mid +16 \\
3x = 25{,}5 & \mid :3 \\
x = 8{,}5 & \\
L = \{(8{,}5 \mid 4)\} &
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll}
\text{I} \quad 3x - 2y = 5 & \\
\text{II} \quad 9x - 7y = -2 & \mid \text{II} - 3 \cdot \text{I} \\
-y = -17 & \mid :(-1) \\
y = 17 & \mid y \text{ in I einsetzen} \\
3x - 2 \cdot 17 = 5 & \mid +34 \\
3x = 39 & \mid :3 \\
x = 13 & \\
L = \{(13 \mid 17)\} &
\end{array}$$

c)

$$\begin{array}{ll}
\text{I} \quad 3x + 3y = 22{,}5 & \\
\text{II} \quad 6x + 3y = -7{,}5 & \mid \text{II} - \text{I} \\
3x = -30 & \mid :3 \\
x = -10 & \mid x \text{ in I einsetzen} \\
3 \cdot (-10) + 3y = 22{,}5 & \mid +30 \\
3y = 52{,}5 & \mid :3 \\
y = 17{,}5 & \\
L = \{(-10 \mid 17{,}5)\} &
\end{array}$$

K 5

11 **a)** $L = \left\{\left(6\frac{1}{2} \mid 5\frac{3}{4}\right)\right\}$ **b)** $L = \{(-46 \mid 29)\}$ **c)** $L = \left\{\left(-6\frac{4}{19} \mid 7\frac{6}{19}\right)\right\}$

d) $L = \{(x \mid y) \text{ mit } y = x - 3\}$ **e)** $L = \left\{(x \mid y) \text{ mit } y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right\}$ **f)** $L = \left\{\left(\frac{5}{8} \mid \frac{9}{14}\right)\right\}$

g) $L = \left\{\left(11\frac{1}{2} \mid 15\frac{1}{2}\right)\right\}$ **h)** $L = \{(-1 \mid -18)\}$ **i)** $L = \{(2 \mid -18)\}$

K 3/5

12 x: Anzahl der Arbeitstage
y: Anzahl der freien Tage
Es gilt:
I $7x - 3y = 0$
II $x + y = 30 \Leftrightarrow x = 30 - y$
x in I: $210 = 10y$
$L = \{9 \mid 21)\}$
Der Arbeiter hat 9 Tage gearbeitet.

K 6/5

13 **a)** I $2 \cdot (x + y) = 24 \Leftrightarrow x + y = 12$
II $3 \cdot (x - y) = -6 \Leftrightarrow x - y = -2$
Additionsverfahren liefert:
$x = 5$; $y = 7$; $L = \{(5 \mid 7)\}$
Die eine Zahl ist 5, die andere 7.

b) I $x + 8 = y$ (y ist die größere Zahl.)
II $3x - 10 = y$
Gleichsetzungsverfahren liefert:
$x = 9$; $y = 17$; $L = \{(9 \mid 17)\}$
17 ist um 8 größer als 9 und um 10 kleiner als 27.

K 5/2

14 **a)** 1 $\square \neq 6{,}5$
2 $\square = 6{,}5$
3 z. B. $\square = x + 1$ (alle Terme, die das Verhältnis von x zu y ändern)

b) 1 z. B. $\square = x + t$ mit $t \neq 0$
2 $\square = x$
3 z. B. $\square = 8$ (alle Zahlen oder Terme, für die nicht 1 oder 2 gilt)

c) 1 $\square = -4y$
2 $\square = -4y + t$ mit $t \neq 0$
3 z. B. $\square = 3$ (alle Zahlen oder Terme, für die nicht 1 oder 2 gilt)

K 5/4

15 **a)** blau: $y = x + 1$
rot: $y = x - 2$

b) y-Terme gleichsetzen:
$x + 1 = x - 2 \quad | -x$
$1 = -2$ falsch
$L = \{\ \}$
Es gibt für das Gleichungssystem keine Lösung. Das bedeutet, dass sich die beiden Graphen nicht schneiden und daher parallel zueinander sind.

c) Wenn zwei Geraden senkrecht aufeinander stehen, so ergibt das Produkt ihrer Steigungen den Wert –1. Daher beträgt die Steigung der Senkrechten –1. Da die Gerade die y-Achse im Punkt (0 | 1) schneidet, lautet die Funktionsgleichung: $y = -x + 1$.

K2

Der Gauß-Algorithmus

Josephine erhält die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{\left(-\frac{1}{2}\,|\,1\,|\,2\right)\right\}$. Ihr Vorgehen ist richtig, da sie zweimal das Ein-setzungsverfahren korrekt verwendet.

a) ①
I $2x + 3y + 4z = 20$
II $3x + 2y + 5z = 22$ | $-2 \cdot$ II $+ 3 \cdot$ I
III $4x + 5y + z = 17$ | $-$ III $+ 2 \cdot$ I

I $2x + 3y + 4z = 20$
II $5y + 2z = 16$
III $y + 7z = 23$ | $5 \cdot$ III $-$ II

I $2x + 3y + 4z = 20$
II $5y + 2z = 16$
III $33z = 99$

Über III erhält man $z = 3$
Einsetzen von z in II $5y + 6 = 16$ ergibt: $y = 2$
Einsetzen von y und z in I $2x + 6 + 12 = 20$ ergibt: $x = 1$ $\mathbb{L} = \{(1\,|\,2\,|\,3)\}$

②
I $x - y - z = 11$ | I + III
II $2x + 3z = 7$ | II $- 2 \cdot$ I
III $2y + z = 9$

I $x + y = 20$
II $2y + 5z = -15$
III $2y + z = 9$ | $-$ III + II

I $x + y = 20$
II $2y + 5z = -15$
III $4z = -24$

Über III erhält man $z = -6$
Einsetzen von z in II $2y - 30 = -15$ ergibt: $y = \frac{15}{2}$
Einsetzen von y in I $x + \frac{15}{2} = 20$ ergibt: $x = \frac{25}{2}$ $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{25}{2}\,|\,\frac{15}{2}\,|\,-6\right)\right\}$

③
I $x + y + z = 11$ | $2 \cdot$ I $-$ III
II $2x + 2y + 2z = 22$ | II $- 2 \cdot$ I
III $2y - 5z = 9$

I $2x + 7z = 13$
II $0 = 0$
III $2y - 5z = 9$

Über I erhält man $x = 6{,}5 - 3{,}5z$
Über III erhält man $y = 4{,}5 + 2{,}5z$
$\mathbb{L} = \{(x\,|\,y\,|\,z)$ mit $x = 6{,}5 - 3{,}5z$ und $y = 4{,}5 + 2{,}5z\}$

b) ①
I $3x - 4y + 2z = 1$
II $2x - y + z = 2$ | $3 \cdot$ II $- 2 \cdot$ I
III $-2x + 2y + 6z = 6$ | III + II

I $3x - 4y + 2z = 1$
II $5y - z = 4$
III $y + 7z = 8$ | $5 \cdot$ III $-$ II

I $3x - 4y + 2z = 1$
II $5y - z = 4$
III $36z = 36$

Über III erhält man $z = 1$
Einsetzen von z in II $5y - 1 = 4$ ergibt: $y = 1$
Einsetzen von y und z in I $3x - 4 + 2 = 1$ ergibt: $x = 1$ $\mathbb{L} = \{(1\,|\,1\,|\,1)\}$

2
I $2x + y + 3z = -5$
II $2y - 2z = -10$
III $2x + y = -14$ | III – I

I $2x + y + 3z = -5$
II $2y - 2z = -10$
III $-3z = -9$

Über III erhält man $z = 3$
Einsetzen von z in II $2y - 6 = -10$ ergibt: $y = -2$
Einsetzen von y und z in I $2x - 2 + 9 = -5$ ergibt: $x = -6$ $\mathbb{L} = \{(-6|-2|3)\}$

3
I $32x - 34y + 35z = 234$
II $8x - 6y + 9z = 54$ | 4 · II – I
III $4x - y + 2z = 18$ | 8 · III – I

I $32x - 34y + 35z = 234$
II $10y + z = -18$
III $26y - 19z = -90$ | 5 · III – 13 · II

I $32x - 34y + 35z = 234$
II $10y + z = -18$
III $-108z = -216$

Über III erhält man $z = 2$
Einsetzen von z in II $10y + 2 = -18$ ergibt: $y = -2$
Einsetzen von y und z in I $32x + 68 + 70 = 234$ ergibt: $x = 3$ $\mathbb{L} = \{(3|-2|2)\}$

c) Sei x die Anzahl der Äpfel, y die der Birnen und z die der Pflaumen im Korb.
Paulas Aufgabe entspricht dann folgendem Gleichungssystem:
I $x + y + z = 16$
II $2x + 2y + z = 28$
III $y - 3z = -8$
Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{(8|4|4)\}$.
Das heißt, in Paulas Korb sind 8 Äpfel, 4 Birnen und 4 Pflaumen.

d) Sei x die Anzahl der Flaschen Apfelsaft, y die der Flaschen Brause und z die der Flaschen Cola, die Moritz kauft. Die Aufgabe entspricht dann folgendem Gleichungssystem:
I $x + y + z = 124$
II $4x + 2y - z = -2$
III $30x - y - z = 0$
Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{(4|34|86)\}$.
Das heißt, Moritz kauft 4 Flaschen Apfelsaft, 34 Flaschen Brause und 86 Flaschen Cola.

e) Es sind jeweils verschiedene Lösungen möglich.
Beispiele für mögliche Gleichungssysteme:

1
I $x + y + z = 1$
II $2x + y + z = 2$
III $y - z = 4$

2
I $x + y + z = 1$
II $2x + 2y + 2z = 2$
III $-x - y - z = -1$

3
I $x + y + z = 1$
II $2x + y + z = 2$
III $-x - y - z = 1$

f) Mögliche Diskussionspunkte:
Man kann auch bei Gleichungssystemen mit drei Gleichungen direkt das Additionsverfahren anwenden. Im Prinzip kann man Gleichungssysteme mit drei Variablen genauso lösen wie mit zwei. Tatsächlich sind dann drei Gleichungen nötig, damit das System lösbar ist. Es stimmt, dass man es so umformen muss, dass man eine Gleichung mit einer Variablen erhält.

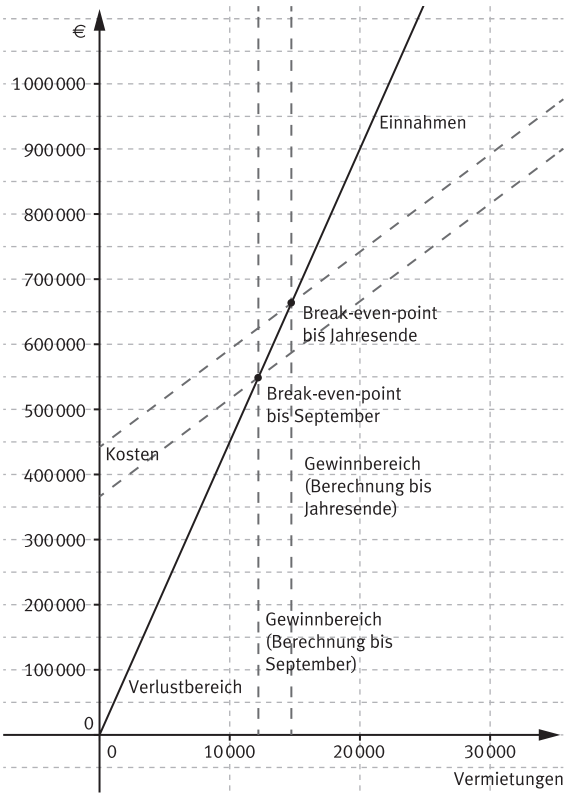
K3/4

Break-even-point: Der Punkt zum Gewinn

a) Der „Break-even-point" ist der Punkt, an dem die Kosten und die Einnahmen eines Unternehmens gleich sind. Grafisch lässt er sich als Schnittpunkt der Kosten- und der Einnahmen-Funktion darstellen.

b) Es sei x die Anzahl der Vermietungen im Jahr und y die Geldmenge in €; $x \in \mathbb{N}_0$, $y \in \mathbb{Q}^+$.

Berechnung bis zum Jahresende (365 Tage)	Berechnung bis Ende September (273 Tage)
Bis zum Jahresende sind maximal $80 \cdot 365 = 29\,200$ Vermietungen möglich. Die Anzahl der leeren Zimmer bei x belegten Zimmern beträgt $29\,200 - x$. Kosten bzw. Einnahmen in €: I $y = 25x + 10 \cdot (29\,200 - x) + 150\,000$ $\Leftrightarrow y = 15x + 442\,000$ II $y = 45x$ Da x ganzzahlig sein muss, gilt: $L = \{14\,734\}$ Bis Jahresende sind 14 734 Vermietungen (663 010 €) erforderlich. Dazu müssen am Tag durchschnittlich $14\,734 : 365 \approx 40$ Zimmer vermietet sein.	Bis Ende September sind maximal $80 \cdot 273 = 21\,840$ Vermietungen möglich. Die Anzahl der leeren Zimmer bei x belegten Zimmern beträgt $21\,840 - x$. Kosten bzw. Einnahmen in €: I $y = 25x + 10 \cdot (21\,840 - x) + 150\,000$ $\Leftrightarrow y = 15x + 368\,400$ II $y = 45x$ $L = \{12\,280\}$ Bis Ende September sind 12 280 Vermietungen (552 600 €) erforderlich. Dazu müssen am Tag durchschnittlich $12\,280 : 273 \approx 45$ Zimmer vermietet sein.



Anmerkungen:
Es ist sicherlich sinnvoll, den Break-even-point innerhalb des Jahres zu legen, da viele Kosten vor Jahresende beglichen werden müssen.
Bei der Berechnung des Break-even-points bis zum Jahresende fällt auf, dass für verschiedene Zeitpunkte des Break-even-points innerhalb des Jahres sich im Gleichungssystem nur der Wert der Übernachtungen bis zu dem bestimmten Zeitpunkt ändert, der Rest dagegen gleich bleibt. Dies könnte man für eine Vertiefung mit einem Tabellenkalkulationsprogramm nutzen.

K3/5

Spare, spare, Häusle baue

Es sei x der Geldbetrag (in €) für das Bauspardarlehen und y der Geldbetrag für den Bankkredit. $x, y \in \mathbb{Q}^+$.
I $x + y = 320\,000$
II $0{,}025x + 0{,}03y = 8600$ $\qquad$ $L = \{(200\,000 | 120\,000)\}$
Familie Meisel hat für den Hausbau 200 000 € als Bauspardarlehen und 120 000 € als Bankkredit aufgenommen.

K3/5

Money, money, money ...

a) Es sei x der Geldbetrag (in €), den Christopher im Global-Fonds angelegt hat, und y der Geldbetrag im Öko-Fonds. $x, y \in \mathbb{Q}^+$.
I $x + y = 20\,000$
II $0{,}045x + 0{,}055y = 1050$ $\qquad$ $L = \{(5000 | 15\,000)\}$
Christopher hat 5000 € im Global-Fonds und 15 000 € im Öko-Fonds angelegt.

b) $0{,}045 \cdot 5000 + 0{,}035 \cdot 15\,000 = 750$
Christopher hat im ersten Jahr wegen des schwankenden Öko-Fonds-Kurses statt den erwarteten 1050 € nur 750 € Zinsen bekommen.

K2/5

Alles Theater

a) Es sind individuelle Antworten möglich. In den Antworten sollte deutlich werden, dass für den Break-even-point die Einnahmen die festen Kosten von insgesamt 25 000 € sowie die 40 % Beteiligung decken sollten. Beispiel:
Eine Karte für den 1. Rang sei doppelt so teuer wie eine Karte für den 2. Rang:
1. Rang 60 €, 2. Rang 30 €.
Es sei x die Anzahl der verkauften Karten für den 1. Rang und y die Anzahl der verkauften Karten für den 2. Rang; $x, y \in \mathbb{N}_0$.
Term für die Kosten (in €): $T_1(x) = 25\,000 + 0{,}4 \cdot 60 \cdot x + 0{,}4 \cdot 30 \cdot y$
Term für die Einnahmen (in €): $T_2(x) = 60x + 30y$
Wenn für den 1. Rang 500 Karten verkauft werden, müssten für den 2. Rang folgende Anzahl an Karten verkauft werden, damit kein Verlust entsteht:
$25\,000 + 0{,}4 \cdot 60 \cdot 500 + 0{,}4 \cdot 30 \cdot y = 60 \cdot 500 + 30y \Leftrightarrow 7000 = 18y \Rightarrow y \approx 389$
Es müssten 389 Karten vom 2. Rang verkauft werden, damit kein Verlust entsteht.

b) 1 Die Kosten für den Künstler bestehen aus 10 000 € festen Kosten und 40 % aus den Einnahmen. Mit x als Anzahl der verkauften 1.-Rang-Karten à 40 € und y als Anzahl der verkauften 2.-Rang-Karten à 32 € betragen die Einnahmen (in €): $40x + 32y$.
Hiervon bekommt der Künstler zuzüglich zu den 10 000 € 40 %, also insgesamt (in €): $10\,000 + 0{,}4 \cdot (40x + 32y)$.

2 Gleichung I gibt die Gesamtanzahl an Plätzen an: $x + y = 1400$.
In Gleichung II stehen im Linksterm die Kosten (in €) für den Künstler $(10\,000 + 0{,}4 \cdot (40x + 32y))$ und für Miete, Versicherungen etc. (15 000) sowie der erwartete Gewinn (5000) als „Kosten“ für das Theater. Im Rechtsterm von Gleichung II stehen die Einnahmen durch den Kartenverkauf.
I $x + y = 1400$
II $10\,000 + 0{,}4 \cdot (40x + 32y) + 15\,000 + 5000 = 40x + 32y \Leftrightarrow 30\,000 = 24x + 19{,}2y$
$L = \{(650 | 750)\}$
Es müssen 650 Karten à 40 € und 750 Karten à 32 € verkauft werden, dann ergibt sich bei 50 000 € Einnahmen gegenüber 45 000 € Ausgaben ein Gewinn von 5000 €.

Aufgaben zur Einzelarbeit

K5 **1** Lösungsmöglichkeit:

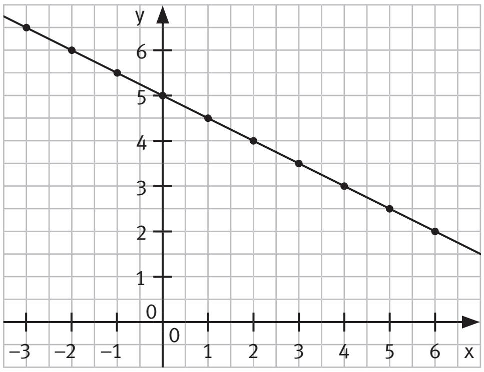
a)	$P_1\,(0\vert -5)$	$P_2\,(1\vert -4)$	$P_3\,(2\vert -3)$	$P_4\,(3\vert -2)$	$P_5\,(4\vert -1)$
b)	$P_1\,(0\vert 4)$	$P_2\,(2\vert 1)$	$P_3\,(4\vert -2)$	$P_4\,(6\vert -5)$	$P_5\,(8\vert -8)$
c)	$P_1\,(0\vert -5)$	$P_2\,(1\vert -2{,}5)$	$P_3\,(2\vert 0)$	$P_4\,(3\vert 2{,}5)$	$P_5\,(4\vert 5)$
d)	$P_1\,(0\vert -2)$	$P_2\,(1\vert 10)$	$P_3\,(2\vert 22)$	$P_4\,(3\vert 34)$	$P_5\,(4\vert 46)$

K5/4 **2** **a)** $y = -\frac{1}{2}x + 5$

b)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	6,5	6	5,5	5	4,5	4	3,5

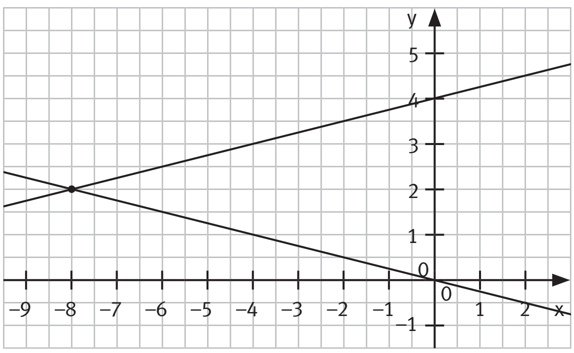
c)

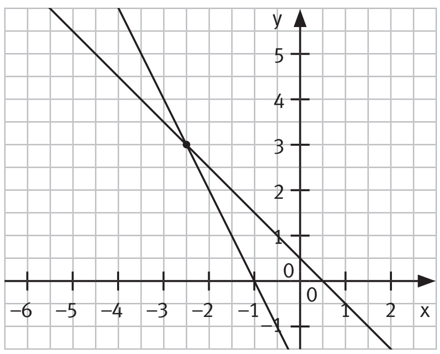


K5 **3** **a)** (1 | 0,5) **b)** (10 | –13) **c)** (5 | –5,5) **d)** (–3 | 6,5)

K5 **4** **a)** $L = \left\{\left(\frac{14}{5}\middle|\frac{3}{5}\right)\right\}$ **b)** $L = \{(-11\vert -5)\}$ **c)** $L = \left\{\left(\frac{46}{55}\middle|-\frac{3}{55}\right)\right\}$ **d)** $L = \{(5\vert -0{,}9)\}$

K5/4 **5** **a)** (–8 | 2) **b)** (–2,5 | 3)

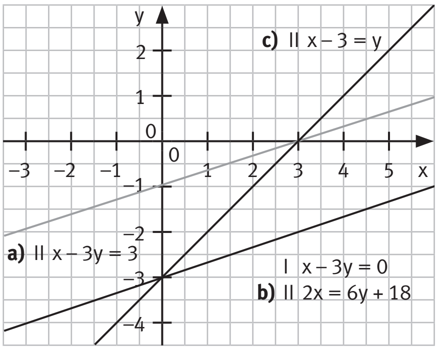




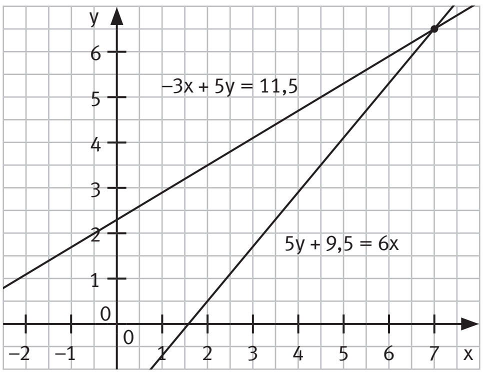
K4/5 **6** Es sind individuelle Darstellungen für die Gleichungen des linearen Gleichungssystems möglich (I = blau; II = rot).

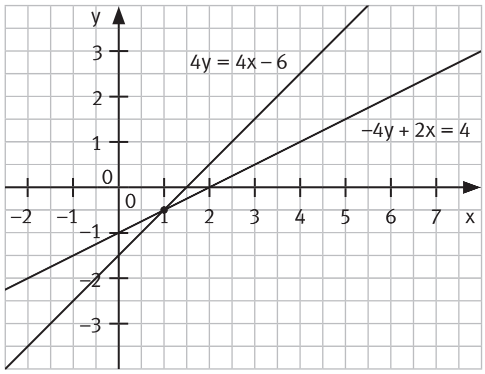
	1	2
a)	I $y = 3x - 1$	I $y = -x + 0{,}5$
	II $y = -0{,}5x + 1{,}5$	II $y = -x - 1$
b)	$L = \{(0{,}7\vert 1{,}1)\}$ (genau: $L = \left\{\left(\frac{5}{7}\middle|\frac{8}{7}\right)\right\}$	$L = \varnothing$

K5/4 **7** I $x - 3y = 9$
Lösungsmöglichkeit:
a) II $x - 3y = 3$
Die zugehörige Gerade verläuft parallel zum gegebenen Graphen.
b) II $2x = 6y + 18$
Die zweite Gleichung muss äquivalent zur ersten sein.
c) II $x - 3 = y$



K5/4 **8** **a)** (7|6,5) **b)** (1|–0,5)





K4/6 **9** **a)** I $15 = x + 2y + 1$
II $2y = x + 10$
b) Die Waagen werden so verändert, dass auf den inneren Waagschalen jeweils gleich viel liegt: $x + 2y$. Man kann anschließend die beiden äußeren Waagschalen gleichsetzen und erhält eine Gleichung, die nur eine Variable (x) enthält.
1 I $15 = x + 2y + 1$ II $2y = x + 10$
2 I $14 = x + 2y$ II $x + 2y = 2x + 10$
3 $14 = 2x + 10$
4 $4 = 2x$
5 $2 = x$
Durch Einsetzen erhält man: $y = 6$, also $L = \{(2|6)\}$.

K1/6 **10** **a)** keine Lösung
b) genau eine Lösung: (0|1,4)

K5 **11** **a)** $L = \{(-20|-11{,}5)\}$ **b)** $L = \{(-12{,}5|-2)\}$

K5 **12** **a)** $L = \{(18|-3)\}$ **b)** $L = \{(3{,}5|16)\}$

K5 **13 a)** $L = \{(9|1)\}$ **b)** $L = \{(-2|4)\}$

K5 **14 a)** $L = \{(18{,}5|-1)\}$ **b)** $L = \{(12|15)\}$ **c)** $L = \left\{\left(-2\frac{5}{11}\middle|2\frac{4}{11}\right)\right\}$ **d)** $L = \{(12|-17)\}$

K3/5 **15** I $e + z = 125\,000$ e: Kreditbetrag erster Kredit
II $e \cdot 1{,}5\,\% + z \cdot 2{,}0\,\% = 2250$ z: Kreditbetrag zweiter Kredit
$e = 50\,000$
$z = 75\,000$
Der eine Kredit beträgt 50 000 €, der andere 75 000 €.

K6/5 **16 a)** I $x + y = 108$
II $2x = y$
$L = \{(36|72)\}$
b) e: Einerziffer der Zahl
z: Zehnerziffer der Zahl
I $e + z = 10$
II $3 \cdot (10z + e) - 2 = 10e + z$
$L = \{(8|2)\}$
Die ursprüngliche Zahl ist 28. Vertauscht man die Ziffern, so erhält man $82 = 3 \cdot 28 - 2$.

K3/5 **17** x: Preis pro Käselaugenstange
y: Preis pro normaler Laugenstange
I $15x + 15y = 27$
II $18x + 12y = 27{,}90$
$x = 1{,}05$ $y = 0{,}75$
Die normale Laugenstange kostet 0,75 €, die Käselaugenstange 1,05 €.

Aufgaben für Lernpartner

K1/6 **A** Das ist richtig.

K1/6 **B** Das ist richtig. Beide Gleichungen beschreiben dieselbe Gerade und sind somit identisch.

K1/6 **C** Das ist richtig.

K1/6 **D** Das ist richtig. Man kann aber auch beide Gleichungen nach demselben Term auflösen und dann gleichsetzen.

K1/6 **E** Das ist falsch, denn es entsteht „ausführlich“ das folgende Gleichungssystem:
I $x + 0y = 3$
II $0x + y = 4$
Die Lösung ist aber direkt ablesbar: $(3|4)$.
$x = 3$ beschreibt eine zur y-Achse parallele Gerade, $y = 4$ eine Parallele zur x-Achse.
Die Geraden schneiden sich in $P(3|4)$.

Lineare Gleichungssysteme

K2/5 **1** Affe: 12 Banane: 8

K2/5 **2** Wenn man die Lösung nicht sofort sieht, bietet es sich an, ein lineares Gleichungssystem zu erstellen:
l: Anzahl der Streichhölzer in einer lila Schachtel
b: Anzahl der Streichhölzer in einer blauen Schachtel

I $l + 3 = 3b$
II $2l = 4b$ $\quad | : 2$

I $l + 3 = 3b$
II $l = 2b$

II in I: $2b + 3 = 3b$ $\quad | - 2b$
$b = 3$
b in I einsetzen:
$l + 3 = 3 \cdot 3 = 9$
$l = 6$
In einer lila Schachtel sind sechs Streichhölzer, in einer blauen drei.

K5 **3** **a)** Einsetzungsverfahren

I $y = x + 42$
II $x + y = 50$
I in II: $x + x + 42 = 50$
$2x + 42 = 50$
$2x = 8$
$x = 4$
x in I:
$y = 4 + 42 = 46$
$L = \{(4|46)\}$

b) Gleichsetzungsverfahren

I $y = x + 42$
II $x + y = 50$ $\quad | - x$

I $y = x + 42$
II $y = 50 - x$

I und II gleichsetzen:
$x + 42 = 50 - x$
$2x = 8$
$x = 4$
…
$L = \{(4|46)\}$

c) Additionsverfahren

I $y = x + 42$ $\quad | \cdot (-1)$
II $x + y = 50$

I $-y = -x - 42$
II $x + y = 50$

I + II: $x = -x + 8$ $\quad | + x$
$2x = 8$
$x = 4$
…
$L = \{(4|46)\}$

K1/5 **4** Lösungsmöglichkeiten:

a) Gleichsetzungsverfahren
$L = \{(3{,}5|1)\}$

b) Additionsverfahren
$L = \{(3|1)\}$

c) Einsetzungsverfahren
$L = \{(2{,}5|1)\}$

d) Einsetzungsverfahren
$L = \{(-10|-3)\}$

K6/1 **5** Diejenigen Gleichungen, die in denselben Kästchen stehen, sind äquivalent.
Man kann jeweils die eine aus der anderen durch Äquivalenzumformungen erhalten.

Sachbezogene Aufgaben

K 3/5 **6** n: Anzahl der normalen Fahrräder

t: Anzahl der Tandems

I $n + t = 30$

II $n + 2t = 40$

$n = 20$; $t = 10$

Der Fahrradverleih besitzt 20 normale Fahrräde und 10 Tandems.

K 6/5 **7** l: Preis pro Limonade in €

e: Preis pro Tüte Erdnüsse in €

I $l + 2e = 8$

II $2l + 3e = 14$

$l = 4$; $e = 2$

Eine Limonade kostet 4 €, eine Tüte Erdnüsse 2 €.

K 6/5 **8** e: Preis pro Erwachsener in Dollar

k: Preis pro Kind in Dollar

I $2e + 2k = 25$

II $e + 2k = 17{,}5$

$e = 7{,}5$; $k = 5$

Ein Erwachsener bezahlt 7,50 $ Eintritt, ein Kind 5 $.