

1

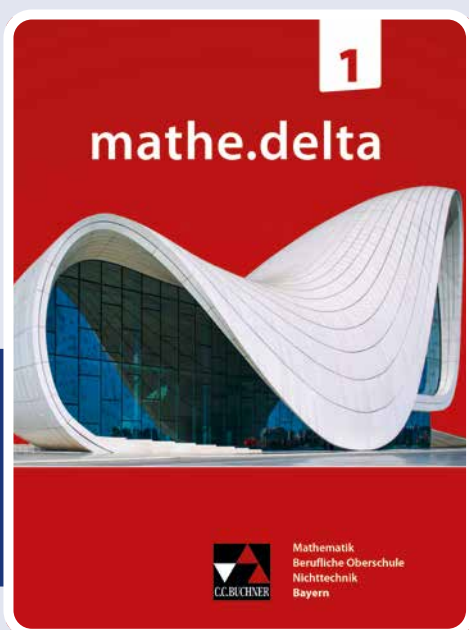
mathe.delta



kostenfreie
LESEPROBE



Mathematik
Berufliche Oberschule
Nichttechnik
Bayern



mathe.delta Berufliche Oberschule Bayern Ausgabe ab 2027

mathe.delta 1 Nichttechnik

Mehr Struktur. Mehr Differenzierung. Mehr Lernerfolg

Mit **mathe.delta – Berufliche Oberschule Bayern** bieten wir Ihnen ein Lehrwerk, das die Anforderungen des LehrplanPLUS passgenau umsetzt.

Umfangreiches Aufgabenmaterial auf drei Anforderungsniveaus, gezielte Selbstkontrolle und vielfältige Differenzierungsmöglichkeiten fördern individuelles Lernen. Klare Kapitelstrukturen und eine praxisgerechte Progression unterstützen zudem eine effiziente Unterrichtsvorbereitung. Den Anfang machen wir mit **mathe.delta 1 Nichttechnik** und setzen unser Angebot bis zur 13. Jahrgangsstufe fort.



Mehr Infos und Blick ins Buch:
www.ccbuchner.de/bn/63044



Ideal für den digitalen Materialaustausch

Die **digitale Ausgabe des Schülerbands click & study** und das **digitale Lehrmaterial click & teach** bilden zusammen die ideale digitale Lernumgebung: vielfältig im Angebot und einfach in der Bedienung!

Mehr Infos finden Sie auf den Seiten 70 bis 73 sowie auf www.click-and-study.de und www.click-and-teach.de.



Erklärvideos *click & study*
und *click & teach*!



Aufgabenvielfalt für individuelles und selbstständiges Lernen

- ▶ umfangreiches Aufgabenmaterial auf drei gekennzeichneten Anforderungsniveaus zur gezielten Differenzierung
- ▶ effektive Vorbereitung auf Leistungsnachweise und auf die Abschlussprüfung, auch anhand von Original-Prüfungsaufgaben
- ▶ Aufgaben zur Selbstkontrolle – systematische Überprüfung des Lernstands durch die Schülerinnen und Schüler
- ▶ mit QR- und Mediacodes verlinkte Erklärvideos und GeoGebra-Applets



Mediencode
63044-24

*Jetzt Erklärvideos ansehen
und GeoGebra testen!*

Entdecken Sie auch: Unser Angebot für die Ausbildungsrichtung Technik

Für die **Ausbildungsrichtung Technik** an der FOS/BOS steht Ihnen alternativ unser Band **mathe.delta 1 Technik** zur Verfügung.

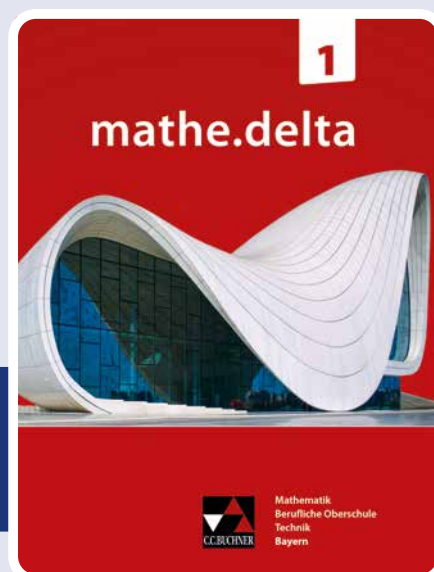
Dieser wird ebenfalls im kommenden Jahr erscheinen. Auch unser Angebot für die technische Ausbildungsrichtung setzen wir, parallel zu unserem Nichttechnik-Angebot, bis zur 13. Jahrgangsstufe fort.

Damit Sie sich bereits vorab ein Bild von den Inhalten machen können, steht Ihnen ein **digitales Vorabkapitel als Livebook** zur Verfügung.



Mehr Infos und Blick ins Buch:
www.ccbuchner.de/bn/63045

Technik



Aufbau der Kapitel

Startklar

Der **Eingangstest** aktiviert das benötigte Vorwissen und macht die vorausgesetzten Kompetenzen sichtbar. **Lösungen und Kompetenzentabelle** unterstützen die selbstständige Überprüfung und gezielte Wiederholung.

2

Startklar

Grundwissen

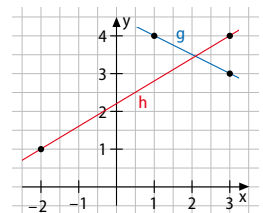


Mediencode
63044-21

Aufgabe	Ich kann schon ...
1, 2	... Steigungen von Geraden auf verschiedene Arten bestimmen.
3	... Geradengleichungen ermitteln.
4, 6	... Funktionen auf vorgegebene Eigenschaften untersuchen.
5	... Sachkontexte mithilfe von Funktionen modellieren.

- 1 Die Geraden g und h verlaufen durch Gitterpunkte.
 - a) Ermitteln Sie jeweils die Steigung der Geraden.
 - b) Bestimmen Sie jeweils die Größe des spitzen Winkels, den die Gerade mit der x-Achse einschließt.
- 2 Fertigen Sie eine Skizze an und bestimmen Sie die Größe des zugehörigen Steigungswinkels für Straßenabschnitte mit den angegebenen Steigungen.

a) 15 %	b) 22 %	c) 12 %
d) 5 %	e) 100 %	f) 150 %



- 3 Je zwei der Punkte A(1|3), B(-3|-5), C(0|6) und D(5|7) legen eine Gerade fest.
 - a) Zeichnen Sie alle durch die vier Punkte festgelegten Geraden in ein gemeinsames Koordinatensystem.
 - b) Bestimmen Sie rechnerisch die Steigung und eine Gleichung jeder Geraden. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.



- 4 a) Bestimmen Sie die Nullstellen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto f(x)$ und untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems sowie sein Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$. Zeichnen Sie G_f mithilfe einer DMS und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse.
 - b) Beschreiben Sie das Monotonieverhalten von G_f möglichst genau.

1 $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$	2 $f(x) = -0,5x^2 + 2$	3 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
--------------------------------	------------------------	----------------------------

- 5 Ein Golfball fliegt 32 m hoch und 144 m weit. Seine Flugbahn kann (näherungsweise) mithilfe einer quadratischen Funktion f modelliert werden.
 - a) Skizzieren Sie die Flugbahn des Golfballs in einem möglichst günstigen Koordinatensystem und begründen Sie die Wahl Ihres Koordinatensystems.
 - b) Bestimmen Sie einen Funktionsterm $f(x)$; geben Sie eine im Sachkontext sinnvolle Definitionsmenge von f an.



- 6 Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind.
 - a) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^3$, $D_f = \mathbb{R}$, ist monoton steigend.
 - b) Jede ganzrationale Funktion hat mindestens eine Nullstelle.
 - c) Der Graph einer ganzrationalen Funktion mit geradem Grad ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.
 - d) Wenn der im 1. Quadranten liegende Teil des Graphen der Funktion $f: x \mapsto 0,36x - 0,02x^2$ modellhaft einen Brückenbogen beschreibt ($x, f(x)$ in Meter), dann hat der Bogen eine Weite von 18 m und eine Höhe von weniger als 2 m.
 - e) Für jede ganzrationale Funktion f mit ungeradem Grad gilt: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Differenzialrechnung bei ganzrationalen Funktionen

2



Einstieg

Einer der größten Wasserparks der Welt ist Yas Waterworld in Abu Dhabi. Eine große Attraktion ist ein Becken, in dem Wellen unterschiedlicher Höhen erreicht werden, auf denen man auf einem Wasserboard surft.

Das Höhenprofil eines Streckenabschnitts der Wellen kann im Intervall $[-3; 3]$ modellhaft durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{11}{16}x^2 + 1$ beschrieben werden (1 Längeneinheit entspricht 1 m). Die x -Achse stellt den Querschnitt des Beckenbodens dar.

- Zeichnen Sie den Graphen der Welle auf dem angegebenen Streckenabschnitt mithilfe einer DMS.
- Geben Sie anhand der Zeichnung an, an welchen Stellen sich höchste und tiefste Punkte der Welle befinden.

Ausblick

In diesem Kapitel werden Differenzenquotienten und Differentialquotienten berechnet, die geometrisch als Steigungen von Sekanten bzw. Tangenten und in Sachkontexten interpretiert werden. Es werden die Gleichungen von Tangenten aufgestellt und Steigungswinkel von Tangenten berechnet.

Historische Ecke



Mediencode 63044-22

Einstieg

Lebensnahe Impulsfragen wecken Interesse und aktivieren das Denken.

Ausblick

Der **Ausblick** zeigt, welche Kompetenzen im Kapitel erworben oder weiterentwickelt werden.

Entdecken

Ein motivierendes **Einstiegsbeispiel** eröffnet den Zugang zu den Inhalten. Die Arbeitsaufträge laden dazu ein, Zusammenhänge selbstständig zu erkunden.

Verstehen

Eine kurze Einführung, verbindliche Lerninhalte und Musterbeispiele führen in das Thema ein. **Merkkästen** stellen zentrale Inhalte kompakt und gut auffindbar dar.

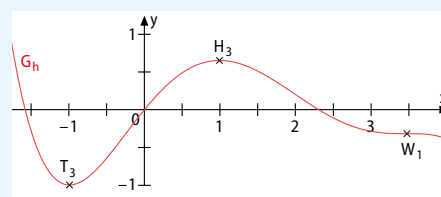
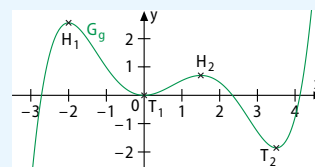
Beispiele

Ausführlich dargestellte **Musterlösungen** machen mathematische Vorgehensweisen nachvollziehbar und unterstützen das Verständnis.

Entdecken

Bei den Graphen zweier Funktionen g und h sind Hochpunkte (H), Tiefpunkte (T) und ein Wendepunkt (W) markiert.

- Entscheiden Sie bei allen gekennzeichneten Punkten, ob Rechtskrümmung, Linkskrümmung oder keine Krümmung vorliegt.
- Nennen Sie die Gemeinsamkeit beim Krümmungsverhalten der Graphen in den Hochpunkten (bzw. in den Tiefpunkten).



Verstehen

Neben den bereits bekannten hinreichenden Bedingungen gibt es weitere hinreichende Bedingungen für den Nachweis von Extremstellen und Wendestellen.

Erklärvideo

Mediencode
63044-34

Extremstellen

notwendige Bedingung $f'(x_0) = 0 \dots$

- und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Bei x_0 ist ein relativer Hochpunkt von G_f .
- und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Bei x_0 ist ein relativer Tiefpunkt von G_f .
- und $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ Keine Aussage möglich. Das Vorzeichen von f' muss untersucht werden.

Wendestellen

notwendige Bedingung $f''(x_w) = 0 \dots$

- und $f'''(x_w) \neq 0 \Rightarrow$ Bei x_w ist eine Wendestelle von f .
- und $f'''(x_w) = 0 \Rightarrow$ Keine Aussage möglich. Das Vorzeichen von f'' muss untersucht werden.

Beispiele

- I. Untersuchen Sie die Funktion $f: x \mapsto \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - 1$, $D_f = \mathbb{R}$, auf Extrempunkte. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer DMS.

Lösung:

- 1 Bestimmen Sie die 1. und die 2. Ableitung:

$$f'(x) = 2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 3) = 2(x-1)(x-3); f''(x) = 4x - 8$$

- 2 Lösen Sie die Gleichung $f'(x_0) = 0$ (notwendige Bedingung):

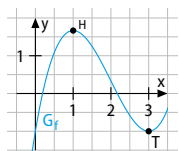
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 3$$

- 3 Nutzen Sie die alternative Bedingung, indem Sie x_1 und x_2 in f'' einsetzen und den Wert jeweils auf sein Vorzeichen prüfen:

$$f''(1) = 4 \cdot 1 - 8 = -4 < 0 \Rightarrow G_f \text{ hat einen Hochpunkt } H\left(1 \mid \frac{5}{3}\right).$$

$$f''(3) = 4 \cdot 3 - 8 = 4 > 0 \Rightarrow G_f \text{ hat einen Tiefpunkt } T(3 \mid -1).$$

Strategiewissen
Extrempunkte mit
alternativer Bedingung
bestimmen



II. Berechnen Sie die Wendestellen der Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - x^2$, $D_g = \mathbb{R}$.

Lösung:

notwendige Bedingung: $g'(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$; $g''(x) = x^2 + x - 2$

$$g''(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 1$$

hinreichende Bedingung: $g'''(x) = 2x + 1$ $g'''(-2) = -3 \neq 0$; $g'''(1) = 3 \neq 0$

Somit sind $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ die Wendestellen von g .

III. Untersuchen Sie die Funktion f mit $f(x) = x^4$, $D_f = \mathbb{R}$, auf Extremstellen.

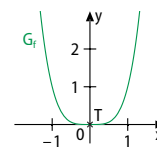
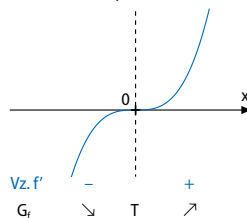
Lösung:

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

hinreichende Bedingung: $f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$

Keine Aussage möglich, also muss das Vorzeichen von f' z. B. mit einer Skizze untersucht werden.

Skizze von $G_{f'}$:



Es folgt, dass bei $x = 0$ ein Tiefpunkt von G_f vorliegt.

- Begründen Sie, dass eine ganzrationale Funktion vom Grad n höchstens $n - 1$ Extremstellen und höchstens $n - 2$ Wendestellen besitzt.
- Begründen oder widerlegen Sie: „Ist x_0 eine Nullstelle ungerader Vielfachheit der zweiten Ableitung f'' einer Funktion f , dann ist x_0 eine Wendestelle von f .“

Nachgefragt

Nachgefragt

Reflexionsfragen regen zum Weiterdenken an und fördern Argumentieren, Begründen und Kommunizieren. Zugleich helfen sie, Verständnislücken zu erkennen und zu schließen.

1 Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt $P_0(x_0 | f(x_0))$ ein Extrempunkt des Graphen der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$; $x_0 = 3$ | b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 0,5$; $x_0 = -3$ |
| c) $f(x) = x^4 + x^2$; $x_0 = 0$ | d) $f(x) = x^3 - 3x^2$; $x_0 = 2$ |
| e) $f(x) = x^3 - 3x^2$; $x_0 = 3$ | f) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x$; $x_0 = 1$ |
| g) $f(x) = x^5 - x^3 + x$; $x_0 = 0$ | h) $f(x) = x^4 - x^3 + 1$; $x_0 = 0$ |

Aufgaben

Aufgaben

Die **Aufgaben** steigen im Schwierigkeitsgrad und sind farblich gekennzeichnet: **Grün** steht für Üben, **Blau** für Anwenden und **Rot** für Vernetzen. Das vielfältige Angebot ermöglicht eine gezielte Auswahl.

2 Untersuchen Sie jeweils den Graphen G_f der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, auf Extrem- und Wendepunkte. Verwenden Sie das hinreichende Kriterium von Seite 122 für Extrempunkte. Zeichnen Sie den Graphen G_f und kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer DMS.

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ | b) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$ |
| c) $f(x) = \frac{1}{8} \cdot (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1)$ | d) $f(x) = x^5 + 2x^3 + 1$ |
| e) $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - 2x^2 - 2$ | f) $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3$ |

3 a) Bei der Funktion f mit $f(x) = x^5$ sind an der Stelle $x = 0$ alle Ableitungen null bis auf die 5. Ableitung $f^{(5)}(x) = 120$. Beurteilen Sie, ob der Graph einen Wendepunkt hat.
b) Bei einer Potenzfunktion sind alle Ableitungen an einer Stelle null bis auf eine. Formulieren Sie eine Regel, wie man erkennt, ob ein Wendepunkt vorliegt.

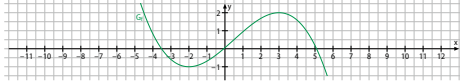
Trainingsrunde differenziert

Paralldifferenzierte Aufgaben ermöglichen das Üben auf unterschiedlichen Niveaustufen: Die linke Spalte entspricht **Anforderungsbereich I**, die rechte **Anforderungsbereich II**.

2 Trainingsrunde: differenziert

Differenzialrechnung bei ganzrationalen Funktionen

Zu 2.1.1 Gegeben ist die ganzrationale Funktion f durch ihren Funktionsgraphen G_f . Benötigte Werte lesen Sie so genau wie möglich aus dem Funktionsgraphen ab.



Berechnen Sie jeweils die mittlere Steigung im angegebenen Intervall.

1) $[-2; 3]$ 2) $[-1; 1]$ 3) $[3; 4.5]$

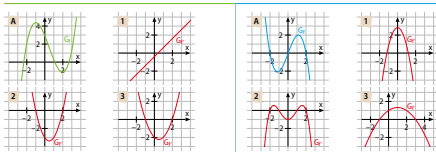
Berechnen Sie die mittlere Steigung zwischen Tiefpunkt und Hochpunkt. Untersuchen Sie, ob es Intervalle gibt, in denen die mittlere Steigung größer ist.

Zu 2.1.2 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 0,2x^2 - 1$, $D_f = \mathbb{R}$.

Zeigen Sie unter Verwendung des Differenzialquotienten in der Form $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, dass der Graph G_f der Funktion f bei $x_0 = 2$ die Steigung $m = 0,8$ hat.

Berechnen Sie die Steigung des Graphen G_f der Funktion f im Punkt $P(1|y_1)$.

Zu 2.1.3 Ordnen Sie dem Graphen A einer Funktion f den Graphen 1, 2 oder 3 ihrer Ableitungsfunktion f' zu.



Zu 2.1.4 Bestimmen Sie, falls vorhanden, die Koordinaten der Punkte, an denen die lokale Änderungsrate der Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x)$ den Wert m hat. Für alle Funktionen gilt: $D_f = \mathbb{R}$ und ggf. $a \in \mathbb{R}$.

- a) $f(x) = -0,5x^2 + 2$; $m = -2$
 b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4$; $m = 8$
 c) $f(x) = 2x + 1$; $m = 1$
- a) $f(x) = \frac{1}{2}(2x + 4)^2 + 2$; $m = -4$
 b) $f(x) = 5(2 - x)(-2 - x)$; $m = 20$
 c) $f(x) = 4ax^2 + 2ax + x - a$; $m = 1$

Zu 2.1.5 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{3}x^2 + 6x + \frac{53}{3}$, $D_f = \mathbb{R}$, mit ihrem Graphen G_f .

- a) Stellen Sie die Gleichung der Tangente t an G_f bei $x = -4$ auf.
 b) Überprüfen Sie, ob die Gerade mit der Gleichung $y = -0,5x + 4,8$ bei $x = -1$ Tangente an G_f ist.
- a) Stellen Sie die Gleichung der Tangente t an G_f bei $x = -4$ auf und überprüfen Sie, ob t mit f weitere Punkte gemeinsam hat.
 b) Überprüfen Sie, ob die Gerade mit der Gleichung $g(x) = -0,4x + 5$ eine Tangente an G_f ist.

134

Zu 2.2.1 Ermitteln Sie jeweils die Intervalle, in denen der Graph G_f der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, streng monoton steigt, und die Intervalle, in denen G_f streng monoton fällt. Geben Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f an.

- a) $f(x) = 4x^2$ b) $f(x) = -x^2 - 2x - 3$ c) $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x$ d) $f(x) = 4x^4 - 4x$
 c) $f(x) = x^3 - 4x$ d) $f(x) = -x^4 + 2x^3$ c) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 3x^2 + 2$ d) $f(x) = x^4 - 3x^2 + x^2$

Zu 2.2.2 Bestimmen Sie jeweils die Extrempunkte des Graphen der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit einer DMS.

- a) $f(x) = 0,5x^3 - 3x$ b) $f(x) = x^3 - 6x + 2$ c) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ d) $f(x) = 4x^3 - 2x^2$
 a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ b) $f(x) = x^2(x^2 - 2)$ c) $f(x) = (x^2 - 1)^2$ d) $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 4x$

Zu 2.2.3 Die Wassermenge (in Mio. Liter) in einem Regenrückhaltebecken lässt sich mithilfe der Funktion $f: t \mapsto -0,05t^3 + 1,5t^2 - 7,65t + 15$, $D_f = [0; 20]$, beschreiben (t : Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn).

- a) Berechnen Sie die Wassermenge im Becken zu Beobachtungsbeginn.
 b) Bestimmen Sie die geringste Wassermenge im Becken im betrachteten Zeitraum.
- a) Berechnen Sie die Wassermenge im Becken zum Ende des Beobachtungszeitraums.
 b) Bestimmen Sie die größte Wassermenge im Becken im betrachteten Zeitraum.

Zu 2.2.4 Gegeben ist jeweils der Term der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$. Begründen Sie, dass der Graph von f Punkte mit waagrecht Tangente besitzt, die keine Extrempunkte sind.

- $f'(x) = (x - 4)^2$ $f'(x) = x^4 - x^2$

Zu 2.2.5 Untersuchen Sie jeweils den Graphen der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, auf Wendepunkte. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit einer DMS.

- a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$ b) $f(x) = x^4 - x^2$ c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ d) $f(x) = x^2$
 a) $f(x) = \frac{2}{3}x^4 - 3x^2 - 3x^2$ b) $f(x) = x^4 + x^2 + x$ c) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^2$ d) $f(x) = x^4 - x^3$

Zu 2.2.6 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$. Untersuchen Sie jeweils den Graphen von f auf Wendepunkte und bestimmen Sie jeweils eine Gleichung jeder Wendetangente.

- a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 8$ b) $f(x) = x^4 - 24x^2 + 4$ c) $f(x) = 0,25x^4 + 1,5x^2 + 2$
 a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 8$ b) $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ c) $f(x) = 0,2x^4 - 0,5x^2$

Zu 2.2.7 Untersuchen Sie jeweils den Graphen G_f der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, auf Symmetrie zum Koordinatensystem, auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte und zeichnen Sie G_f . Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer DMS.

- a) $f(x) = x^3 - 6x + 12$ b) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16x$ c) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 4$
 a) $f(x) = 3x^4 - 4x^2$ b) $f(x) = \frac{2}{3}(4x^2 - 12x + 9)$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^2 - 2$

135

Trainingsrunde kreuz und quer

Vermischte Aufgaben greifen die Kapitelinhalte auf allen **drei Niveaustufen** auf und bieten Gelegenheit, das Gelernte abwechslungsreich zu festigen.

2 Trainingsrunde: kreuz und quer

Differenzialrechnung bei ganzrationalen Funktionen

13 Stellen Sie jeweils eine Gleichung der Sekante an den Graphen der Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x)$ durch die Punkte $P(-1|f(-1))$ und $Q(2|f(2))$ auf.

a) $f(x) = -x^2 + 2x - 4$ b) $f(x) = -0,5x^2 + 2,5x^2 - 4x + 0,5$

14 Stellen Sie jeweils eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle x_0 auf.

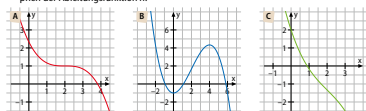
a) $f(x) = 0,5x^2 + 2x - 3$; $x_0 = 0$ b) $f(x) = \frac{1}{3}(x - 2)^2 + 3$; $x_0 = 4$
 c) $f(x) = 2x(x + 1)^2$; $x_0 = 0,5$ d) $f(x) = 2x^4 - x^2$; $x_0 = 1$

15 Ein Backofen wird auf 160°C eingestellt und beginnt mit dem Aufheizen. Die Temperatur während des Aufheizens wird durch die Funktion $T(t) = -0,16t^2 + 2,9t^2 + 21$ beschrieben. Dabei gilt $t \geq 0$. Die Temperatur wird in $^\circ\text{C}$ gemessen, die Zeit t in Minuten seit dem Beginn des Aufheizvorgangs.

a) Bestimmen Sie die Zimmertemperatur und untersuchen Sie, ob der Ofen nach 11 Minuten die gewünschte Temperatur erreicht hat.
 b) Berechnen Sie die mittlere Steigung der Funktion T im Intervall $[0; 11]$ und interpretieren Sie den berechneten Wert im Sachzusammenhang.
 c) Berechnen Sie $T(11)$ und entscheiden Sie, ob der Aufheizvorgang schon beendet ist.
 d) Bestimmen Sie das Maximum der Funktion T und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für T an.

16 Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1$, $D_f = \mathbb{R}$, und $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 2$, $D_g = \mathbb{R}$. Ihre Graphen werden mit G_f und G_g bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass die zweite Ableitung beider Funktionen übereinstimmt. Erklären Sie, was dies für den Verlauf der Graphen von f und g bedeutet.
 b) Die ersten Ableitungen f' und g' der beiden Funktionen sind nicht identisch. Skizzieren Sie die Graphen von f' und g' . Geben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede dieser Graphen an.
 c) Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen G_f und welcher G_g ist. Der Graph, den Sie nicht ausgewählt haben, gehört zu einer Funktion h . Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion h' .

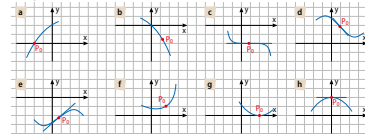


17 Untersuchen Sie jeweils die Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, bzw. ihren Graphen G_f auf Symmetrie zum Koordinatensystem, Verhalten für $|x| \rightarrow \infty$, Nullstellen, Extrem- und Wendestellen. Zeichnen Sie den Graphen G_f .

- a) $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x$ b) $f(x) = 3x^4 + 3$ c) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 20$
 d) $f(x) = \frac{1}{10}(x + 4)$ e) $f(x) = x^2 - \frac{5}{3}$ f) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$

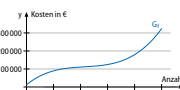
136

18 Die Abbildungen zeigen jeweils einen Teil des Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades ($D_f = \mathbb{R}$) sowie ggf. eine Tangente im Extrem- oder Wendepunkt von G_f . Ein Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$ des Graphen G_f ist markiert. Geben Sie jeweils an, ob der Wert der Funktion f (bzw. f') an der Stelle x_0 kleiner, größer oder gleich null ist.

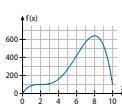


19 Eine Firma stellt Monitore für Notebooks her. Die bei der Herstellung von x Monitoren entstehenden Kosten (in €) werden durch die Funktion f mit $f(x) = 0,001x^3 - 1,29x^2 + 600x + 12000$, $x > 0$, beschrieben. Die Monitore werden zu einem Preis von je 300 € zur Weiterverarbeitung abgegeben; der dabei erzielte Gewinn (in €) wird durch eine Funktion g beschrieben.

- a) Untersuchen Sie den Graphen von f rechnerisch auf Monotonie und Extrempunkte. Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts.
 b) Zeigen Sie, dass für g gilt: $g(x) = -0,001x^3 + 1,29x^2 - 300x - 12000$.
 c) Berechnen Sie $g(300)$ und $g(500)$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.
 d) Bestimmen Sie den Gewinn bzw. Verlust pro Monitor, wenn 500 Stück produziert werden.
 e) Ermitteln Sie die Extrempunkte des Graphen der Funktion g . Interpretieren Sie den Graphen von g hinsichtlich Gewinn und Verlust und geben Sie den maximalen Gewinn an.



20 Das Höhenprofil einer Bergtour lässt sich annähernd durch die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^4 + 20x^3 - 90x^2 + 160x$ mit $x \in [0; 10]$ beschreiben. Dabei entspricht x dem horizontalen Abstand in km vom Ausgangspunkt bei $x = 0$. $f(x)$ ist die Höhe in Metern im Vergleich zum Ausgangspunkt. Die Abbildung zeigt den Graphen von f .



- a) Die untere Alm steht an einer Stelle, an der der Berg weder steigt noch fällt. Berechnen Sie, auf welcher Höhe gegenüber der Ausgangslage diese Alm liegt.
 b) Bestimmen Sie rechnerisch, wie viele Höhenmeter vom Start bis zum Gipfelkreuz überwinden werden müssen.
 c) Berechnen Sie $f'(4)$ und erklären Sie den Wert im Sachzusammenhang.
 d) Die durchschnittliche Steigung zwischen $x = 6,5$ und $x = 9,1$ ist ungefähr 0 m je Kilometer. Ein Wanderer folgert: „In diesem Bereich ist der Berg also nahezu eben.“ Erklären Sie, warum die Aussage des Wanderers falsch ist.

137

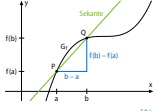
Alles im Blick

Am Kapitelende bündelt die **Übersichtsseite** das **Grundwissen** und veranschaulicht es mit kurzen Beispielen.

2 Alles im Blick

Differenzquotient – Sekantensteigung

Sind $P(a|f(a))$ und $Q(b|f(b))$ zwei Punkte des Graphen G_f einer Funktion f , die im Intervall $[a; b]$ definiert ist, so heißt die Gerade PQ **Sekante** von G_f durch P und Q .



Für die Sekantensteigung gilt: $m_{\text{Sek}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Dieser Quotient heißt **Differenzquotient** von f im Intervall $[a; b]$.
Er beschreibt die **mittlere (durchschnittliche) Änderungsrate** der Funktion f im Intervall $[a; b]$.

Differentialquotient – Tangentensteigung

Eine auf einem Intervall $I = [a; b]$ definierte Funktion f heißt an der Stelle $x_0 \in I$ **differenzierbar**, wenn der Grenzwert des Differenzquotienten $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

Das bedeutet insbesondere, dass sich bei rechtsseitiger und bei linksseitiger Annäherung an die Stelle x_0 der gleiche Grenzwert ergibt.
Dieser Grenzwert heißt **Differentialquotient** oder **Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- $f'(x_0)$ gibt die **Steigung der Tangente** t_{x_0} an den Graphen G_f im Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$ an. Diese wird auch als Steigung des Graphen G_f im Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$ bezeichnet.
- Beschreibt f eine mit x veränderliche Größe, so gibt $f'(x_0)$ deren lokale (momentane) Änderungsrate an der Stelle x_0 an.

Ableitungsfunktion

Die Ableitungsfunktion f' einer Funktion $f: x \mapsto f(x)$ mit maximaler Definitionsmenge $D_{f'}$ ordnet jeder Stelle $x \in D_{f'}$ ihre Ableitung zu, falls f dort differenzierbar ist. Die Ableitungsfunktion f' gibt damit an jeder Stelle $x \in D_{f'}$ die Steigung der Tangente bzw. die lokale Änderungsrate der Funktion f an.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$, $D_f = \mathbb{R}$, sowie die Punkte $P(1|f(1))$ und $Q(2|f(2))$ des Graphen G_f von f . Es gilt: $f(1) = 1,25$; $f(2) = 0$.



Sekantensteigung:

$$m_{\text{Sek}} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{0 - 1,25}{1} = -1,25$$

m_{Sek} ist die mittlere Steigung von G_f im Intervall $[1; 2]$.

Ableitung an der Stelle $x_0 = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1,25}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{4}(x^3 - 1) - \frac{1}{2}(x^2 - 1) + 2(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{4}(x-1)(x^2+x+1) - \frac{1}{2}(x-1)(x+1) + 2(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{4}(x^2+x+1) - \frac{1}{2}(x+1) + 2}{1} = \frac{-\frac{1}{4}(1+1+1) - \frac{1}{2}(1+1) + 2}{1} = \frac{-\frac{3}{4} - 1 + 2}{1} = \frac{1}{4}$$

Dies gilt sowohl bei rechtsseitiger als auch bei linksseitiger Annäherung. Also hat die Tangente t_1 und der Graph von f im Punkt P_1 die Steigung $m_{t_1} = f'(1) = \frac{1}{4}$.
Für $x \geq 0$ beschreibt die Funktion f den Zeit-Weg-Zusammenhang eines Autos beim Anfahren (x : Zeit in Sekunden; $f(x)$: zurückgelegter Weg in Metern).
Dann ist $f'(1)$ die momentane Änderungsrate der Zeit-Weg-Funktion, d.h. die Momentangeschwindigkeit des Autos beträgt 1 s nach dem Start $\frac{1}{4}$ m/s.

$$f'(3) = -2$$

Der Graph der Funktion f hat bei $x = 3$ eine Tangente mit der Steigung -2 , oder kurz:
Der Graph der Funktion f hat bei $x = 3$ die Steigung -2 .

138

Am Ziel

Der **Abschlusstest** kombiniert Aufgaben zur Einzelarbeit mit Aufgaben für Lernpartner. **Lösungen** und **Kompetenzentabelle** unterstützen die selbstständige Überprüfung und das gezielte Nachschlagen.

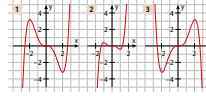
2 Am Ziel

- 3 Skizzieren Sie den Graphen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, deren Ableitungsfunktion keine Nullstellen besitzt. Begründen Sie, dass dies mit einer Funktion vierten Grades nicht möglich ist.

- 10 Bestimmen Sie jeweils die maximalen Monotonieintervalle und die Art und Lage der Extrempunkte der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$.
a) $f(x) = x^3 - 3,75x^2 + 3x$
b) $f(x) = 2x^3(x^2 - 4)$

- 11 Begründen oder widerlegen Sie.
a) Der Graph einer nichtlinearen ganzrationalen Funktion hat mindestens einen Extrempunkt.
b) Der Graph einer ganzrationalen Funktion mit zwei Nullstellen besitzt einen Extrempunkt.

- 12 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $D_f = \mathbb{R}$, ihr Graph ist G_f .
a) Zeigen Sie, dass f nur die Nullstellen $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$ besitzt, und erstellen Sie eine Monotonietabelle für die Funktion f oder eine Skizze von G_f .
b) Eine der drei Abbildungen stellt G_f richtig dar. Geben Sie an, welche dies ist, und begründen Sie bei jedem der übrigen Graphen, warum es sich bei ihm nicht um G_f handeln kann.



- 13 Das Profil der Rampe einer Baugrube kann durch die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{20}x^2 - \frac{1}{120}x^3$, $D_f = [0; 20]$, modelliert werden (x , $f(x)$ in Metern).
a) Zeichnen Sie G_f mit einer DMS.
b) Zeigen Sie, dass der Graph von f im Definitionsbereich monoton steigend ist, und berechnen Sie anschließend die Tiefe der Baugrube.
c) Bestimmen Sie die durchschnittliche Steigung der kompletten Rampe.

142

- 14 Untersuchen Sie die Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, jeweils auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Verhalten im Unendlichen sowie Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Graphen von f und kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer DMS.
a) $f(x) = 3x^2 - x^3$
b) $f(x) = \frac{5}{6}x^3 - 12x + 36$
c) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8x$
d) $f(x) = \frac{x^5}{10} - \frac{2}{3}x^2 + 5$

- 15 Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $D_f = \mathbb{R}$, und ihr Graph G_f .
a) Ermitteln Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie Extrem- und Wendepunkte und zeichnen Sie G_f .
b) Untersuchen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
1) Für $x < 2$ ist G_f rechtsgekrümmt.
2) Die Gerade $g: y = 1$ hat mit G_f drei Punkte gemeinsam.
3) Im Punkt $W(2|2)$ steigt G_f .
4) Die Tangente an G_f im Ursprung hat eine positive Steigung.
5) Die Tangenten an G_f bei $x = 0$ und bei $x = 5$ verlaufen parallel zueinander.

- 16 Das Profil einer Wasserrutsche kann durch den im I. Quadranten liegenden Teil des Graphen der Funktion $f: x \mapsto -0,1x^4 + 0,6x^3 - 1,0125x^2 + 0,85$, $D_f = [0; 2]$, modelliert werden (x : horizontale Entfernung vom Startpunkt in 10m; $f(x)$: Höhe der Rutsche über dem Wasserbecken in 10m).
a) Bestimmen Sie die Höhe der Rutsche am Startpunkt.
b) Weisen Sie nach, dass die Rutsche 20 m in horizontaler Entfernung vom Startpunkt auf das Wasser trifft.
Hinweis: Argumentieren Sie dazu auch mit dem Monotonieverhalten des Graphen G_f .
c) Bestimmen Sie das Intervall, in dem G_f rechtsgekrümmt ist, und erklären Sie dessen Bedeutung im Sachzusammenhang.

ganzrationale Funktionen hinsichtlich ihrer Eigenschaften analysieren.

8, 9, 13, 14, M

Hilfe
S. 96
S. 100, 104
S. 108
S. 112
S. 114, 118, 126
S. 122, 126
S. 128

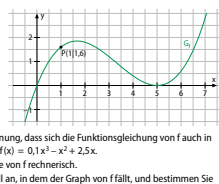
143

Auf dem Weg zur Abschlussprüfung

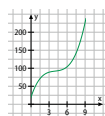
Kapitelbezogene Aufgaben bereiten auf Aufgabentypen vor, wie sie in Abschlussprüfungen gestellt werden können.

2 Auf dem Weg zur Abschlussprüfung

- 1 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Die ganzrationalen Nullstellen können der Abbildung entnommen werden.
a) Bestimmen Sie den vollständig faktorisierten Term der Funktion f und zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Funktionsgleichung von f auch in folgender Form darstellen lässt: $f(x) = 0,1x^3 - x^2 + 2,5x$.
b) Bestimmen Sie die Extrempunkte von f rechnerisch.
c) Geben Sie das maximale Intervall an, in dem der Graph von f fällt, und bestimmen Sie die mittlere Steigung in diesem Intervall.
d) An der Stelle $x = 0$ besitzt der Graph von f die Tangente t . Zeigen Sie, dass die Tangente t die Funktionsgleichung $y = \frac{5}{2}x$ besitzt.
e) Prüfen Sie rechnerisch, ob die Tangente t und der Graph von f außer dem Berührungspunkt bei $x = 0$ noch weitere gemeinsame Punkte besitzen.
f) Berechnen Sie den Tiefpunkt des Graphen der Ableitung f' und erklären Sie den Zusammenhang mit dem Graphen von f .



- 2 Die Kosten, die einem Unternehmen bei der Herstellung einer Flüssigkeit entstehen, können durch die Funktion $K: x \mapsto x^3 - 12x^2 + 50x + 20$ mit $x \in [0; 9]$ beschrieben werden. Dabei gibt $K(x)$ die Kosten in 1000 € an, die bei der Produktion von x Kubikmetern der Flüssigkeit insgesamt entstehen. Die Abbildung zeigt den Graphen von K .
a) Geben Sie mithilfe der Abbildung ...
1) die Produktionsmenge an, bei der die Kosten 125 000 € betragen.
2) das Monotonieverhalten von K an und deuten Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang.



Die Funktion E mit $E(x) = 23x$ gibt für $0 \leq x \leq 9$ den Erlös (in 1000 €) an, den das Unternehmen beim Verkauf von x Kubikmetern der Flüssigkeit erzielt. Für die sogenannte Gewinnfunktion G gilt $G(x) = E(x) - K(x)$. Positive Werte von G werden als Gewinn bezeichnet, negative als Verlust.
b) Zeigen Sie, dass das Unternehmen keinen Gewinn erzielt, wenn vier Kubikmeter der Flüssigkeit verkauft werden.
c) Übertragen Sie den Graphen von K in Ihr Heft und tragen Sie den Graphen von E in die Abbildung ein. Bestimmen Sie mithilfe der so entstehenden Darstellung den Bereich, in dem die verkaufte Menge der Flüssigkeit liegen muss, damit das Unternehmen einen Gewinn erzielt.
d) Berechnen Sie, welche Menge der Flüssigkeit verkauft werden muss, damit das Unternehmen den größten Gewinn erzielt.

144

Differenzialrechnung bei ganzrationalen Funktionen

- 3 Die erste Ableitung einer ganzrationalen Funktion mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ besitzt die Funktionsgleichung $f'(x) = -\frac{3}{2}(x-2)(x+3)$.
a) Skizzieren Sie einen Ausschnitt des Graphen von f' , sodass die maximalen Monotonieintervalle abgelesen werden können. Geben Sie diese Intervalle an.
b) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f' für $x \rightarrow \pm\infty$, ohne den Term von f' zu berechnen.
c) Entscheiden Sie mit Begründung, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
1) Der Graph von f besitzt bei $x = -2$ eine Extremstelle.
2) Bei $x = 3$ fällt der Graph von f .
3) Der Graph von f besitzt eine Extremstelle bei $x = -0,25$.
4) Der Graph von f ist streng monoton fallend für $x \in [1; 4]$.

- 4 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto -\frac{1}{2}x^4 + 4x^2$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Ihr Graph w mit G_g bezeichnet.
a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion g auf Symmetrie zum Koordinatensystem.
b) Ermitteln Sie alle Extremstellen der Funktion g .
c) Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte auf dem Graphen von g , die den y -Wert $y = -4,5$ besitzen.

- 5 In einem Freizeitpark werden E-Scooter verliehen. Die Anzahl der ausgeliehenen E-Scooter während eines Sommertages kann näherungsweise durch die ganzrationale Funktion $f: t \mapsto \frac{1}{10}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 12t$ mit der Definitionsmenge $D_f = [0; 9]$ beschrieben werden. t ist die Zeit in Stunden seit Öffnung des Parks um 9 Uhr. Auf das Mitführen von Einheiten kann während der Rechnungen verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.
a) Bestimmen Sie die Anzahl der ausgeliehenen E-Scooter um 15 Uhr.
b) Ermitteln Sie den Hochpunkt und geben Sie dessen Bedeutung im Kontext an.
c) Geben Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen von f an und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.
d) Zeichnen Sie den Graphen von f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Werte im Definitionsbereich.
Maßstab: 1 Stunde = 1 cm, 2 E-Scooter = 1 cm.
e) Ermitteln Sie mithilfe der Zeichnung näherungsweise, zu welchen Zeiten 18 E-Scooter ausgeliehen sind. Bestätigen Sie anschließend die abgelesenen Werte durch Rechnung.

- 6 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{3}(-x^4 + 4x^2)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.
a) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f mit der jeweiligen Vielfachheit.
b) Berechnen Sie die Nullstellen der ersten Ableitung f' . Bestimmen Sie anschließend, welche besonderen Punkte der Graph von f bei den berechneten Nullstellen von f' besitzt.
c) Skizzieren Sie den Graphen von f ausschließlich mit den bereits berechneten Ergebnissen.
d) Ermitteln Sie die Gleichungen aller Wendetangenten an den Graphen G_f .

145

mathe.delta
Berufliche Oberschule
Bayern

mathe.delta 1 – Nichttechnik

Bearbeitet von Michaela Eisenreich, Johannes Frischholz, Sanja Hack, Franziska Kunze, Armend Rama, Winfried Stark und Michael Suleder unter Mitarbeit der Verlagsredaktion

Zu diesem Lehrwerk sind erhältlich:

- Digitales Schulbuch **click & study 1 Nichttechnik** (WEB-Bestell-Nr. 630441)
- Digitales Lehrermaterial **click & teach 1 Nichttechnik** (WEB-Bestell-Nr. 630442)

Weitere Lizenzformen (Einzellizenz flex, Kollegiumslizenz) und Materialien unter www.ccbuchner.de.

Dieser Titel ist auch als digitale Ausgabe unter www.ccbuchner.de erhältlich.

Die enthaltenen Links verweisen auf digitale Inhalte, die der Verlag bei verlagsseitigen Angeboten in eigener Verantwortung zur Verfügung stellt. Links auf Angebote Dritter wurden nach den gleichen Qualitätskriterien wie die verlagsseitigen Angebote ausgewählt und bei Erstellung des Lernmittels sorgfältig geprüft. Für spätere Änderungen der verknüpften Inhalte kann keine Verantwortung übernommen werden.

Um diese Materialien zu verwenden, wird im Suchfeld auf www.ccbuchner.de der jeweils angegebene Mediencode eingegeben oder der QR-Code gescannt.

An keiner Stelle im Schülerbuch dürfen Eintragungen vorgenommen werden.

1. Auflage, 1. Druck 2027

Alle Drucke dieser Auflage sind, weil untereinander unverändert, nebeneinander benutzbar.

Dieses Lehrwerk folgt den aktuellen Regelungen für Rechtschreibung und Zeichensetzung. Ausnahmen bilden Texte, bei denen künstlerische, philologische oder lizenzrechtliche Gründe einer Änderung entgegenstehen. Teile des Lehrwerks wurden mithilfe gängiger Large Language Models erstellt oder bearbeitet. Sämtliche Inhalte wurden anschließend redaktionell geprüft, überarbeitet und verantwortet. Weitere Informationen finden Sie auf www.ccbuchner.de/ki-leitlinie.

© 2027 C.C.Buchner Verlag, Bamberg

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags. Hinweis zu §§ 60 a, 60 b UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und/oder in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Fotomechanische, digitale oder andere Wiedergabeverfahren sowie jede öffentliche Vorführung, Sendung oder sonstige gewerbliche Nutzung oder deren Duldung sowie Vervielfältigung (z. B. Kopie, Download oder Streaming), Verleih und Vermietung nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Verlags.

Nutzungsvorbehalt: Die Nutzung für Text und Data Mining (§ 44 b UrhG) ist vorbehalten, insbesondere für die (Weiter-) Entwicklung und das Training jeglicher KI-Systeme. Dies betrifft nicht Text und Data Mining für Zwecke der wissenschaftlichen Forschung (§ 60 d UrhG).

produktsicherheit@ccbuchner.de

Layout und Satz: tiff.any GmbH & Co. KG, Berlin

Umschlag: tiff.any GmbH & Co. KG, Berlin

Druck und Bindung: Firmengruppe Appl, aprinta Druck, Wemding

www.ccbuchner.de

ISBN 978-3-661-63044-1

mathe.delta 1

Mathematik
Berufliche Oberschule
Nichttechnik

Bayern

C.C.Buchner

Mit mathe.delta 1 Nichttechnik kompetent unterrichten – Konzeption des Lehrwerks . . .	5
--	---

1 Ganzrationale Funktionen



Startklar	8
1.1 Zuordnungen und Funktionen.	10
1.1.1 Zuordnungen	10
1.1.2 Funktionen.	14
1.2 Lineare Funktionen.	20
1.2.1 Funktionsgleichungen und Graphen linearer Funktionen.	20
1.2.2 Schnittpunkte von Funktionsgraphen	26
1.2.3 Lineare Ungleichungen	30
1.2.4 Lineare Funktionen mit Parameter	34
1.3 Quadratische Funktionen	38
1.3.1 Quadratische Funktionen – die Normalparabel	38
1.3.2 Die Scheitelpunktform	40
1.3.3 Parabeln der Form $y = ax^2$ – der Öffnungsfaktor	44
1.3.4 Nullstellen quadratischer Funktionen – quadratische Gleichungen	46
1.3.5 Quadratische Funktionen in Anwendungen	52
1.3.6 Quadratische Ungleichungen	58
1.3.7 Quadratische Funktionen mit Parameter	62
1.4 Ganzrationale Funktionen allgemein.	66
1.4.1 Funktionsgleichungen und Graphen.	66
1.4.2 Nullstellen und Schnittpunkte.	72
1.4.3 Ungleichungen bei Funktionen höheren Grades	78
Trainingsrunde	82
Alles im Blick	88
Am Ziel	91

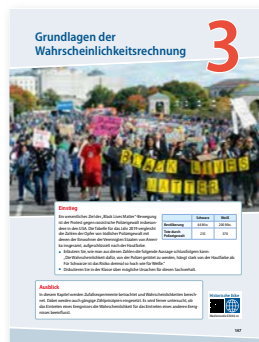
2 Differenzialrechnung bei ganzrationalen Funktionen



Startklar	94
2.1 Änderungsrate und Ableitung.	96
2.1.1 Der Differenzenquotient – die Sekantensteigung	96
2.1.2 Der Differenzialquotient – die Tangentensteigung	100
2.1.3 Die Ableitungsfunktion	104
2.1.4 Ableitungsregeln für ganzrationale Funktionen	108
2.1.5 Die Tangentengleichung	112
2.2 Untersuchung ganzrationaler Funktionen.	114
2.2.1 Monotonieverhalten.	114
2.2.2 Extrempunkte.	118

2.2.3 Krümmungsverhalten und Wendepunkte	122
2.2.4 Extremstellen und Wendestellen – weitere Kriterien	126
2.2.5 Kurvendiskussion.	128
Trainingsrunde	134
Alles im Blick	138
Am Ziel	141
Auf dem Weg zur Abschlussprüfung	144

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung



Startklar	146
3.1 Zufallsexperiment und Ereignis	148
3.1.1 Ergebnis, Ergebnisraum und Ereignis	148
3.1.2 Ereignisse	152
3.1.3 Verknüpfung von Ereignissen – Venn-Diagramm	156
3.1.4 Verknüpfung von Ereignissen – Vierfeldertafel	162
3.2 Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	166
3.2.1 Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	166
3.2.2 Laplace-Experimente	170
3.2.3 Kombinatorische Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten	172
3.3 Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	176
3.3.1 Baumdiagramm und Pfadregeln	176
3.3.2 Vierfeldertafel	182
3.3.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit.	188
3.3.4 Stochastische Unabhängigkeit	192
3.3.5 Auswertung von Daten	198

A Anhang

Lösungen zu „Startklar“ und „Am Ziel“	200
Stichwortverzeichnis	
Mathematische Zeichen und Abkürzungen	
Bildnachweis	
Quellenverzeichnis	

Grundwissen

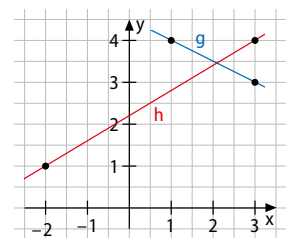


Mediencode
63044-21

Aufgabe	Ich kann schon ...
1, 2	... Steigungen von Geraden auf verschiedene Arten bestimmen.
3	... Geradengleichungen ermitteln.
4, 6	... Funktionen auf vorgegebene Eigenschaften untersuchen.
5	... Sachkontexte mithilfe von Funktionen modellieren.

- 1** Die Geraden g und h verlaufen durch Gitterpunkte.

- Ermitteln Sie jeweils die Steigung der Geraden.
- Bestimmen Sie jeweils die Größe des spitzen Winkels, den die Gerade mit der x -Achse einschließt.



- 2** Fertigen Sie eine Skizze an und bestimmen Sie die Größe des zugehörigen Steigungswinkels für Straßenabschnitte mit den angegebenen Steigungen.

- 15 %
- 22 %
- 12 %
- 5 %
- 100 %
- 150 %

- 3** Je zwei der Punkte $A(1|3)$, $B(-3|-5)$, $C(0|6)$ und $D(5|7)$ legen eine Gerade fest.

- Zeichnen Sie alle durch die vier Punkte festgelegten Geraden in ein gemeinsames Koordinatensystem.
- Bestimmen Sie rechnerisch die Steigung und eine Gleichung jeder Geraden. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.



- 4** a) Bestimmen Sie die Nullstellen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto f(x)$ und untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems sowie sein Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$. Zeichnen Sie G_f mithilfe einer DMS und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse.

- b) Beschreiben Sie das Monotonieverhalten von G_f möglichst genau.

1 $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$

2 $f(x) = -0,5x^2 + 2$

3 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

- 5** Ein Golfball fliegt 32 m hoch und 144 m weit. Seine Flugbahn kann (näherungsweise) mithilfe einer quadratischen Funktion f modelliert werden.

- Skizzieren Sie die Flugbahn des Golfballs in einem möglichst günstigen Koordinatensystem und begründen Sie die Wahl Ihres Koordinatensystems.
- Bestimmen Sie einen Funktionsterm $f(x)$; geben Sie eine im Sachkontext sinnvolle Definitionsmenge von f an.

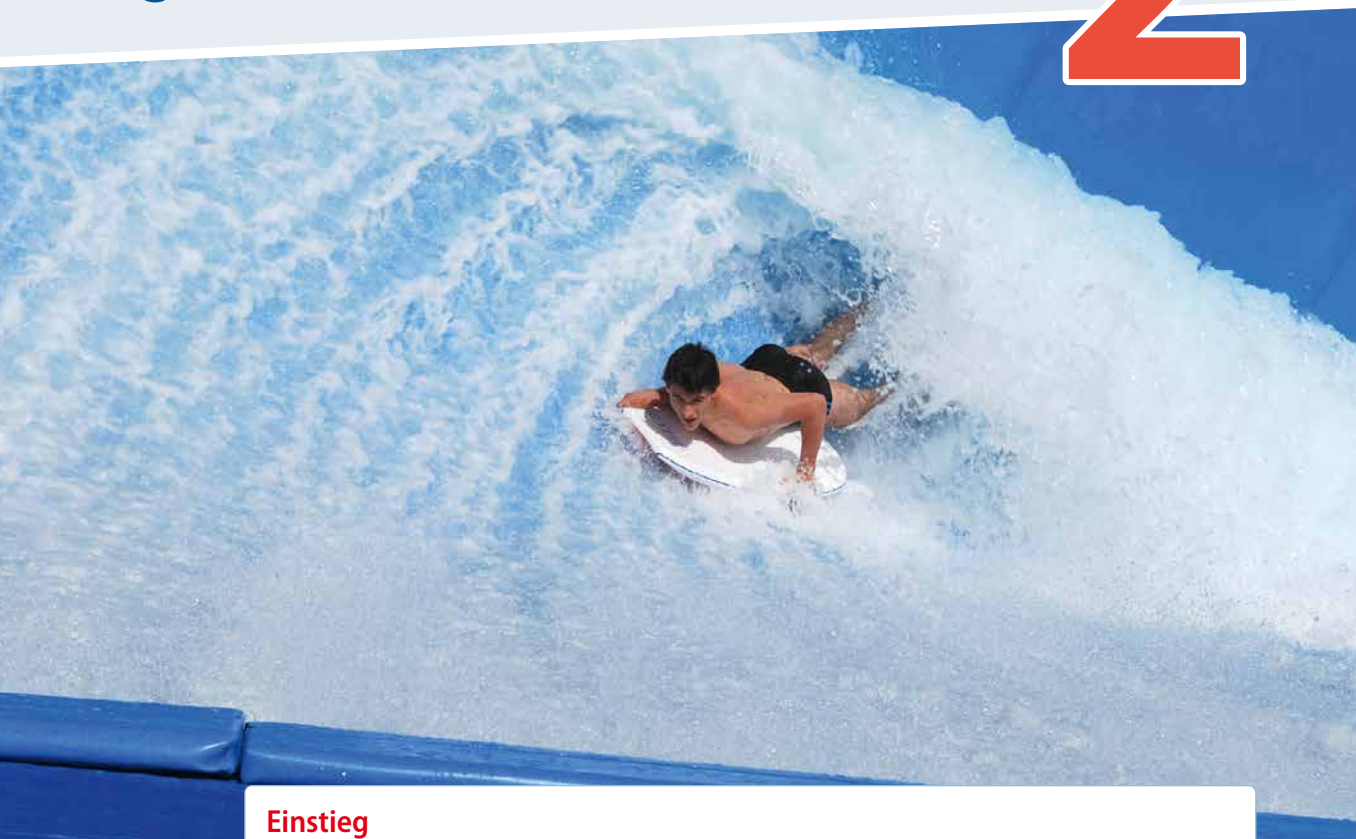


- 6** Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind.

- Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^3$, $D_f = \mathbb{R}$, ist monoton steigend.
- Jede ganzrationale Funktion hat mindestens eine Nullstelle.
- Der Graph einer ganzrationalen Funktion mit geradem Grad ist achsensymmetrisch bezüglich der y -Achse.
- Wenn der im 1. Quadranten liegende Teil des Graphen der Funktion $f: x \mapsto 0,36x - 0,02x^2$ modellhaft einen Brückenbogen beschreibt ($x, f(x)$ in Meter), dann hat der Bogen eine Weite von 18 m und eine Höhe von weniger als 2 m.
- Für jede ganzrationale Funktion f mit ungeradem Grad gilt: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Differenzialrechnung bei ganzrationalen Funktionen

2



Einstieg

Einer der größten Wasserparks der Welt ist Yas Waterworld in Abu Dhabi. Eine große Attraktion ist ein Becken, in dem Wellen unterschiedlicher Höhen erreicht werden, auf denen man auf einem Wasserboard surft.

Das Höhenprofil eines Streckenabschnitts der Wellen kann im Intervall $[-3; 3]$ modellhaft durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{11}{16}x^2 + 1$ beschrieben werden (1 Längeneinheit entspricht 1 m). Die x -Achse stellt den Querschnitt des Beckenbodens dar.

- Zeichnen Sie den Graphen der Welle auf dem angegebenen Streckenabschnitt mithilfe einer DMS.
- Geben Sie anhand der Zeichnung an, an welchen Stellen sich höchste und tiefste Punkte der Welle befinden.

Ausblick

In diesem Kapitel werden Differenzenquotienten und Differentialquotienten berechnet, die geometrisch als Steigungen von Sekanten bzw. Tangenten und in Sachkontexten interpretiert werden. Es werden die Gleichungen von Tangenten aufgestellt und Steigungswinkel von Tangenten berechnet.

Historische Ecke



Mediencode 63044-22

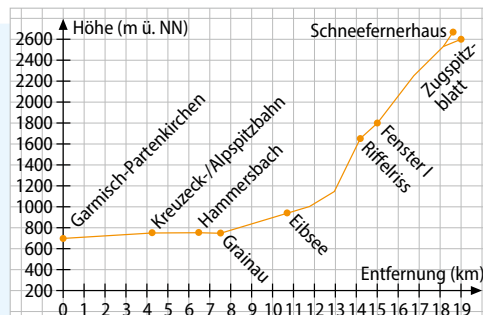
2.1 Änderungsrate und Ableitung

2.1.1 Der Differenzenquotient – die Sekantensteigung

Entdecken

Die Abbildung zeigt das Geländeprofil der Zugspitzbahn.

- Geben Sie an, welchen Höhenunterschied und welche durchschnittliche Steigung die Bahn überwindet.
- Beschreiben Sie den Anstieg der Bahnstrecke in den einzelnen Teilstücken.
- Vergleichen Sie den durchschnittlichen Anstieg der Bahn zwischen den Haltestellen Eibsee und Riffelriss mit dem tatsächlichen Verlauf der Bahn in diesem Abschnitt.



Verstehen

Kurven, die keine Geraden sind, haben keine konstante Steigung. Man kann aber die durchschnittliche Steigung in einzelnen Kurvenabschnitten angeben. Dazu legt man gedanklich eine Gerade durch Anfangspunkt und Endpunkt und berechnet deren Steigung.

Erklärvideo



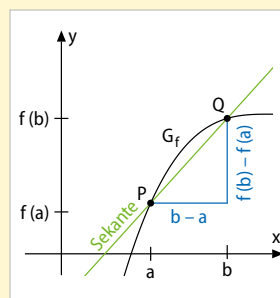
Mediencode
63044-23

Die Funktion f ist im Intervall $[a; b]$ zwischen zwei Punkten $P(a | f(a))$ und $Q(b | f(b))$ definiert; der Graph von f ist G_f . Durch P und Q wird eine Gerade gelegt, die **Sekante** von G_f durch P und Q .

Für die **Sekantensteigung** gilt: $m_s = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Die Sekantensteigung heißt **Differenzenquotient** von f im Intervall $[a; b]$.

Der Differenzenquotient beschreibt die **mittlere Änderungsrate** der Funktion f im Intervall $[a; b]$.



Beispiele

- I. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1,5x^3 - 3x^2 + 2$, $D_f = \mathbb{R}$. Die Punkte $A(-1 | f(-1))$ und $B(2 | f(2))$ liegen auf dem Graphen von f .
- Bestimmen Sie die Steigung der Sekante AB.
 - Bestimmen Sie eine Gleichung der Sekante AB.
 - Zeichnen Sie den Graphen von f sowie die Sekante AB.

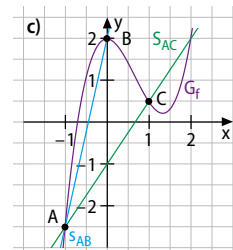
Lösung:

- a) Berechnen Sie die y-Werte der Punkte A und B: $f(-1) = -2,5$; $f(2) = 2$
Die Sekantensteigung entspricht dem Differenzenquotienten.

Setzen Sie die Werte in die Formel $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ein:

$$m_{AB} = \frac{2 - (-2,5)}{2 - (-1)} = \frac{4,5}{3} = 1,5$$

- b) Die Sekante ist die Gerade durch A und B mit der Steigung 1,5.
Setzen Sie die Koordinaten eines der beiden Punkte in die Geradengleichung $s_{AB}: y = 1,5x + t$ ein. Berechnen Sie t und notieren Sie die Sekantengleichung:
 $B(2 | 2) \in s_{AB}: 2 = 1,5 \cdot 2 + t \Rightarrow t = -1$
Sekantengleichung: $s_{AB}: y = 1,5x - 1$



Strategiewissen

Berechnen des Differenzenquotienten bzw. der Sekantensteigung

Strategiewissen

Aufstellen einer Geradengleichung

II. In einer Nährflüssigkeit befinden sich Bakterien, deren Anzahl sich modellhaft durch die Funktion N mit $N(t) = 0,5 \cdot t^3 + 100$, $D_N = [0; 120]$, beschreiben lässt (t : Zeit in Minuten nach Versuchsbeginn).

- Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion N während der zweiten Stunde nach Versuchsbeginn.
- Erklären Sie die Bedeutung dieser mittleren Änderungsrate im Sachkontext.

Die mittlere Änderungsrate wird in „Bakterien pro Minute“ angegeben.

Lösung:

- Die zweite Stunde beginnt nach 60 Minuten und endet nach 120 Minuten:

$$N(60) = 108\,100; N(120) = 864\,100$$

$$\text{mittlere Änderungsrate: } \frac{N(120) - N(60)}{120 - 60} = \frac{864\,100 - 108\,100}{120 - 60} = 12\,600 \left[\frac{\text{Bakterien}}{\text{Minute}} \right]$$

- In der zweiten Stunde nach Versuchsbeginn kommen im Durchschnitt 12 600 Bakterien pro Minute dazu.

III. In einer Zisterne befinden sich 2500 Liter Wasser. Für die Gartenbewässerung wird eine Stunde lang Wasser ungleichmäßig entnommen; insgesamt werden 780 Liter entnommen. Das Wasservolumen V in der Zisterne wird in Litern gemessen und die vergangene Zeit in Stunden.

- Geben Sie die mittlere Änderungsrate des Füllstands innerhalb dieser Stunde an.
- Man kann auch sagen, dass der Füllstand innerhalb einer Stunde durchschnittlich um 13 Liter pro Minute absinkt. Begründen Sie das.
- Treffen Sie eine begründete Aussage darüber, ob eine Minute nach Beginn der Entnahme 13 Liter weniger Wasser in der Zisterne sind.

Lösung:

- Der Füllstand sinkt innerhalb einer Stunde um 780 Liter pro Stunde. Die mittlere Änderungsrate beträgt also -780 .
- $780 : 60 = 13$; es werden „Stunden“ in „Minuten“ umgerechnet; 780 Liter in 60 Minuten sind (durchschnittlich) 13 Liter in 1 Minute.
- Das ist wahrscheinlich falsch, denn 13 Liter pro Minute sind der Durchschnittswert innerhalb der betrachteten Stunde. Über die Entnahme in einer bestimmten Minute sagt dieser Durchschnittswert nichts aus.

- Begründen Sie, dass man den Differenzenquotienten auch folgendermaßen berechnen kann: $m_s = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$.
- Beurteilen Sie die Aussage: „Eine mittlere Änderungsrate von 0 bedeutet, dass die Funktion im betrachteten Intervall konstant ist.“

Nachgefragt

1 Erklären Sie die Bedeutung der durchschnittlichen Änderungsrate einer Funktion f , wenn ...

- $f(t)$ die bis zum Zeitpunkt t zurückgelegte Strecke (in m) ist.
- $f(t)$ die Bevölkerungszahl in einem Land zum Zeitpunkt t angibt.
- $f(t)$ die Höhe einer Pflanze (in cm) zum Zeitpunkt t angibt.
- $f(x)$ den Inhalt des Benzintanks (in ℓ) eines Autos nach x km Fahrstrecke seit dem letzten Tanken angibt.
- $f(t)$ die Temperatur (in °C) eines Ofens zum Zeitpunkt t angibt.

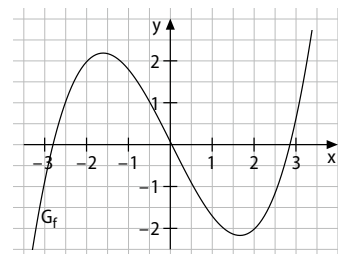
Aufgaben

Statt *mittlere Änderungsrate* sagt man auch *durchschnittliche Änderungsrate*.

- 2 Skizzieren Sie den Graphen G_f einer nichtlinearen Funktion f in einem Intervall $[a; b]$, deren Differenzenquotient in diesem Intervall ...
- a) positiv ist. b) negativ ist. c) gleich null ist.

- 3 Die Funktion f mit $f(t) = 0,45 \cdot t^2 - 11,7 \cdot t + 98,1$ mit $t \geq 0$ beschreibt die Temperatur von Tee. Dabei steht f für die Temperatur in $^{\circ}\text{C}$ und t für die seit dem Aufbrühen vergangene Zeit in Minuten.
- a) Berechnen Sie $f(0)$ und $f(10)$. Interpretieren Sie diese Werte im Sachzusammenhang.
- b) Berechnen Sie den Wert $\frac{f(10) - f(0)}{10}$ und beschreiben Sie seine Bedeutung.

- 4 Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der Funktion $f: x \mapsto 0,25x^3 - 2x$, $D_f = \mathbb{R}$.
- a) Ermitteln Sie die Steigung der Sekanten in den Intervallen $I_1 = [0; 1]$, $I_2 = [-3; -2]$ und $I_3 = [2; 3]$.
- b) Geben Sie Intervalle an, in denen der Graph G_f die gleiche mittlere Änderungsrate besitzt wie im Intervall $[0; 2]$. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.



- 5 Elena hat bei einer Autofahrt folgende Werte notiert:

verstrichene Zeit in h	0	1,5	4	4,7
zurückgelegter Weg in km	0	150	400	530

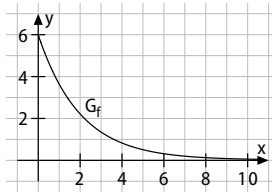
Begründen Sie anhand einer Abschätzung, in welchem Abschnitt der Fahrt die Durchschnittsgeschwindigkeit am größten war.

- 6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4$, $D_f = \mathbb{R}$.
- a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen G_f von f mit den Koordinatenachsen und untersuchen Sie sein Symmetrieverhalten bezüglich des Koordinatensystems. Zeichnen Sie den Graphen G_f im Intervall $[-3; 3]$.
- b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Sekante des Graphen G_f im Intervall $[-3; 2]$ und tragen Sie die Sekante in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a) ein.

- 7 Berechnen Sie jeweils die mittlere Änderungsrate der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, in Abhängigkeit von h ($h \in \mathbb{R}^+$) im angegebenen Intervall.
- a) $f(x) = 4x^2$; $I = [1; 1 + h]$ b) $f(x) = x^2 - 2x$; $I = [h; h + 1]$
- c) $f(x) = -x^2 + x$; $I = [1; 1 + h]$ d) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$; $I = [h; h + 1]$

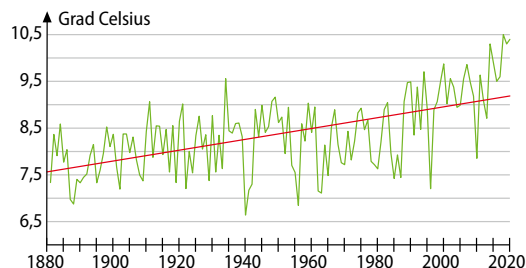
- 8 Gegeben sind die Funktion $f: x \mapsto 0,25x^3 - x$, $D_f = \mathbb{R}$, sowie die Punkte $P(-1 | f(-1))$, $Q(1 | f(1))$ und $R(2 | f(2))$.
- a) Bestimmen Sie jeweils den Differenzenquotienten der Funktion f im Intervall $[-1; 1]$ und im Intervall $[1; 2]$ sowie die Gleichungen der Sekanten PQ und QR.
- b) Legen Sie einen geeigneten Maßstab fest und zeichnen Sie für $-2 \leq x \leq 3$ den Graphen der Funktion f sowie die Sekanten PQ und QR in ein kartesisches Koordinatensystem.
- c) Die Punkte P und Q bilden zusammen mit dem Koordinatenursprung O ein Dreieck. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

- 9 Eine Glasglocke wird von einer Vakuumpumpe leergepumpt. Der abgebildete Graph G_f der Funktion f zeigt die Restmenge an Luft (in g) an, die innerhalb der Glasglocke verbleibt, in Abhängigkeit von der Zeit t (in min seit Versuchsbeginn).



- a) Geben Sie an, wie viel Luft zu Versuchsbeginn unter der Glasglocke war.
b) Ermitteln Sie grafisch die mittlere Änderungsrate in den ersten vier Minuten. Interpretieren Sie die Bedeutung der mittleren Änderungsrate in diesem Sachkontext.

- 10 Die Abbildung zeigt die Entwicklung der mittleren Jahrestemperatur in Deutschland von 1881 bis 2020 sowie den linearen Trend seit 1881 (rot). Recherchieren Sie die Bedeutung des linearen Trends für die Klimaentwicklung und wie man diesen Trend ermittelt. Erläutern Sie, weshalb der lineare Trend für politische Entscheidungen aussagekräftiger ist als der Differenzenquotient der Mittelwerte von 1881 und 2020.



- 11 Ein Gartenschaugelände soll neu angelegt werden. Auf einem Weg ist ein Höhenunterschied zu überwinden. Der Weg verläuft von oben betrachtet geradlinig (ohne seitliche Kurven). Sein Höhenprofil kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{85000} \cdot x^4 + 0,12 \cdot x^2$, $D_f = [0; 70]$, beschrieben werden. Dabei ist x die horizontale Entfernung vom Ausgangspunkt in Metern und y die Höhe über dem Ausgangspunkt in Zentimetern. Je nach maximaler Steigung (aufwärts und abwärts) kann der Weg nicht als barrierefrei eingestuft werden. So z. B. können Rollstuhlfahrer ohne Hilfsperson eine maximale Steigung von 6 % bewältigen.
- a) Der Landschaftsarchitekt schätzt die Steigung des Weges ab, indem er die durchschnittliche Steigung zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt des Weges berechnet. Nach seiner Abschätzung ist der Weg für Rollstuhlfahrer geeignet. Weisen Sie dies rechnerisch nach.
- b) Erklären Sie, warum die Vorgehensweise des Architekten nur für eine erste grobe Abschätzung geeignet ist.
- c) Der Weg ist im Intervall $[30; 50]$ recht steil. Berechnen Sie den Differenzenquotienten in diesem Intervall und geben Sie die Steigung in Prozent an.
- d) Legen Sie einen geeigneten Maßstab fest und zeichnen Sie den Graphen von f für $x \in [0; 70]$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Zeichnen Sie auch die Sekanten für die Intervalle $[0; 70]$ und $[30; 50]$ ein.

Vertiefung

Prozentuale Steigung

Die prozentuale Steigung drückt aus, wie stark der Anstieg (oder das Gefälle) im Verhältnis zur waagrechten Strecke ist.

- Wenn x -Wert und y -Wert in derselben Einheit gemessen werden, muss der Steigungswert nur noch als Prozentzahl ausgedrückt werden, z. B. $m = 0,08 = 8\%$.
- Bei unterschiedlichen Einheiten muss man diese einander anpassen.



Entdecken

Familie Roth fährt von München an die Nordsee in den Sommerurlaub. Für die 950 km lange Strecke werden sie laut Routenplaner 10 Stunden fahren.

„Nur $95 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ im Schnitt“, seufzt die Mutter.

„Im Moment sogar nur $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ “, knurrt der Vater im zähen Verkehr einer Baustelle.

„50 Kilometer pro Stunde? Aber so lange sind wir doch noch gar nicht unterwegs“, wirft der Jüngste von der Rückbank aus ein.

- Erklären Sie dem Sohn auf der Rückbank, was es mit der momentanen Geschwindigkeit auf sich hat und warum die Einheit sinnvoll ist.



Verstehen

Bei einem nichtlinearen Kurvenverlauf lässt sich eine durchschnittliche Änderung als Steigung einer Sekante in einem Intervall angeben. Verkleinert man dieses Intervall immer weiter, so erhält man schließlich eine Tangente an einem Punkt. Die Steigung dieser Tangente entspricht der momentanen Änderung.

DMS-Applet
und Erklärvideos



Mediencode
63044-24

Die Schreibweise $\lim_{x \rightarrow x_0}$ besagt, dass der Abstand zwischen x und x_0 immer kleiner wird.

Limes (lat.): Grenze
(hier: Grenzwert)

Die Funktion f ist im Intervall $]a; b[$ definiert; ihr Graph heißt G_f . Die x -Werte der Punkte $P_0(x_0 | f(x_0))$ und $P(x | f(x))$ liegen in diesem Intervall. Dabei kann $x < x_0$ oder $x > x_0$ sein. Durch P_0 und P wird eine Gerade gelegt, nämlich die **Sekante** von G_f durch P_0 und P . Für die **Sekantensteigung** gilt: $m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Durch $x \rightarrow x_0$ wird die Sekante zur **Tangente**.

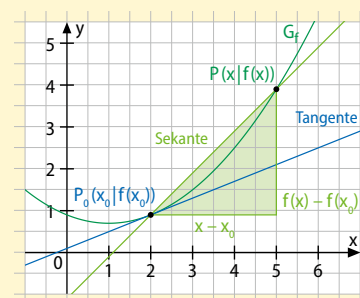
Wenn sich die Steigung der Tangente durch Grenzwertrechnung bestimmen lässt und sich bei Annäherung von links und von rechts derselbe Wert ergibt, dann heißt die Funktion f an der Stelle x_0 **differenzierbar**.

Die Tangentensteigung an der Stelle x_0 wird als **Differenzialquotient** oder als **Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0 bezeichnet. Es gilt:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{„f Strich von } x_0\text{“})$$

Die Steigung der Tangente an G_f bei P_0 wird auch als Steigung des Graphen G_f im Punkt P_0 bezeichnet.

Die Ableitung an der Stelle x_0 beschreibt die **momentane Änderungsrate** von f an der Stelle x_0 .



Beispiele

- I. a) Weisen Sie nach, dass die Funktion f mit $f(x) = 2x^2$, $D_f = \mathbb{R}$, an der Stelle $x_0 = 1$ differenzierbar ist, und berechnen Sie $f'(1)$.
- b) Skizzieren Sie den Graphen von f und erläutern Sie die geometrische Bedeutung des Wertes $f'(1)$ anhand des Graphen G_f .

Lösung:

- a) 1 Bilden Sie den Differenzenquotienten von f bezüglich $x_0 = 1$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2x^2 - 2 \cdot 1^2}{x - 1} = \frac{2 \cdot (x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)}{(x - 1)} = 2 \cdot (x + 1)$$

Strategiewissen

Ableitung an einer Stelle x_0
mithilfe des Differenzialquotienten bestimmen

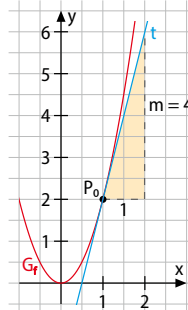
- 2 Untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} [2 \cdot (x + 1)] = 2 \cdot (1 + 1) = 2$$

Im grün markierten Term wurde für x der Wert 1 eingesetzt („Grenzübergang“). Es ist gleichgültig, ob x vor dem Grenzübergang größer oder kleiner als 1 war. Man sieht:

Dieser Grenzwert ist bei Annäherung von links und von rechts gleich, also eindeutig. Es gilt damit $f'(1) = 4$.

- b) Der Graph von f hat an der Stelle $x_0 = 1$ eine Tangente mit der Steigung $m = 4$. Dies ist auch die Steigung des Graphen von f an der Stelle $x_0 = 1$.



- II. Zeigen Sie unter Verwendung des Differenzialquotienten in der Form $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, dass der Graph G_f der Funktion f mit $f(x) = x^2 + 5$, $D_f = \mathbb{R}$, im Punkt $P(1 | f(1))$ die Steigung $m_{tp} = 2$ besitzt.

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + 5 - (1^2 + 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (2 + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2 = m_{tp} \end{aligned}$$

- III. a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f: x \mapsto |x|$, $D_f = \mathbb{R}$, die jeder reellen Zahl x ihren Betrag zuordnet.
b) Untersuchen Sie die Funktion f auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 0$. Erläutern Sie Ihr Ergebnis anhand des Graphen.

Lösung:

- b) 1 Bilden Sie den Differenzenquotienten bezüglich x_0 :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$$

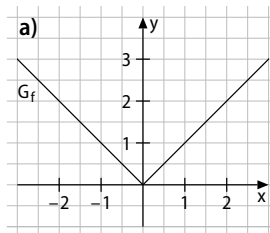
- 2 Untersuchen Sie das Verhalten bei rechtsseitiger und linksseitiger Annäherung:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

- 3 Vergleichen Sie beide Grenzwerte und erläutern Sie Ihr Ergebnis.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \text{ d. h. } f \text{ ist an der Stelle } x_0 = 0 \text{ nicht differenzierbar.}$$

Der Graph G_f besitzt im Punkt $P_0(0 | 0)$ keine Tangente: G_f hat für $x < 0$ die Steigung -1 , für $x > 0$ die Steigung 1 ; an der Stelle $x_0 = 0$ hat G_f einen „Knick“.

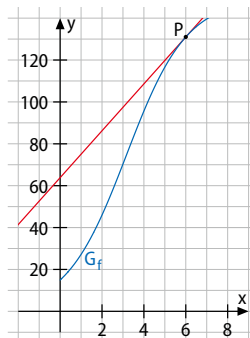


Strategiewissen

Untersuchen nicht differenzierbarer Funktionen

- IV. Das Wachstum einer Sonnenblume lässt sich annähernd durch eine Funktion f mit $D_f = [0; 10]$ beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Wochen ab Beobachtungsbeginn und f die Höhe der Pflanze in cm. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f . Außerdem ist die Tangente an den Graphen bei $t = 6$ eingezeichnet.

- a) Berechnen Sie mithilfe von Werten, die Sie der Abbildung entnehmen, die Steigung der eingezeichneten Tangente. Interpretieren Sie den berechneten Wert im Sachzusammenhang.
b) Beschreiben Sie in Worten, wie man grafisch näherungsweise die größte Wachstumsgeschwindigkeit der Sonnenblume bestimmt.



Lösung:

- a) Man berechnet die Tangentensteigung, indem man die Koordinaten zweier beliebiger Punkte abliest, z. B. $P(0|65)$ und $Q(6|131)$. Damit gilt: $m_t = \frac{131-65}{6-0} = 11$.
6 Wochen nach Beobachtungsbeginn beträgt die Wachstumsgeschwindigkeit der Sonnenblume gerade 11 Zentimeter pro Woche.
- b) Man sucht die Stelle, an der die Tangente an den Graphen die größte Steigung hat. Nachdem man die Tangente dort eingezeichnet hat, berechnet man ihre Steigung wie in a).

Nachgefragt

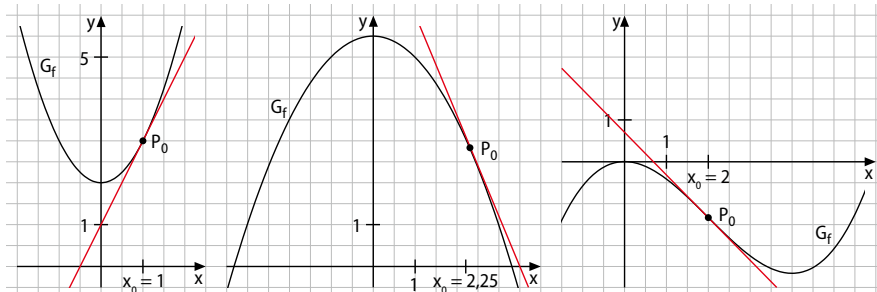
- Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion, die an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs $D_f = \mathbb{R}$ einen positiven Ableitungswert hat.
- Gegeben ist die lineare Funktion g mit $g(x) = -2x + 3$, $D_g = \mathbb{R}$. Geben Sie ohne Rechnung den Wert $g'(4)$ an und erläutern Sie Ihre Überlegung.

Aufgaben

- 1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0,5x^2 - x - 0,5$, $D_f = \mathbb{R}$.
- a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in ein Koordinatensystem, ggf. mit einer DMS.
- b) Berechnen Sie die momentane Änderungsrate an der Stelle $x_0 = 2$ mithilfe des Differenzialquotienten.



- 2 Bestimmen Sie jeweils anhand der Abbildung näherungsweise die Steigung des Graphen von f im Punkt $P_0(x_0 | f(x_0))$.



- 3 Gegeben ist jeweils die Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$. Ermitteln Sie für jede Funktion den Differenzialquotienten an der angegebenen Stelle x_0 .

1 $f(x) = x^2 + 1$; $x_0 = 3$

2 $f(x) = 3x^2$; $x_0 = -1$

3 $f(x) = 0,5x^2 + 3$; $x_0 = -2$

4 $f(x) = 4x + 2$; $x_0 = 1$

5 $f(x) = -x^2 + 2$; $x_0 = -1$

6 $f(x) = -2x^2 + 8x + 1$; $x_0 = -2$

- 4 Berechnen Sie jeweils die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 .

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$; $x_0 = 0$

b) $f(x) = (x-2)^2 + 1$; $x_0 = -1$

c) $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + x + 5$; $x_0 = 9$

d) $f(x) = x^2 - (4+x^2)$; $x_0 = 7$

e) $f(x) = 2x^2 - 7x + 1$; $x_0 = -2$

f) $f(x) = (x-2)^2 + x - 7$; $x_0 = 1$

g) $f(x) = 4x^3$; $x_0 = -1$

h) $f(x) = x^3 - 2x^2$; $x_0 = -1$

i) $f(x) = x(4-x)$; $x_0 = 3$

j) $f(x) = (x+2)(x-2)$; $x_0 = -2$



5 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $D_f = \mathbb{R}$.

- a) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $[-2; 5]$.
b) Berechnen Sie folgende Ableitungswerte und veranschaulichen Sie diese geometrisch am Graphen aus Teilaufgabe a).

1 $f'(1)$ 2 $f'(-1)$ 3 $f'(0)$ 4 $f'(2)$ 5 $f'(4)$ 6 $f'(3)$

6 Interpretieren Sie die lokale Änderungsrate im Sachkontext. Übertragen Sie die Tabelle hierzu in Ihr Heft und vervollständigen Sie sie.

x	y	lokale Änderungsrate
Zeit	Weg	
Zeit		momentane Beschleunigung
Zeit	Wassermenge	
	Luftdruck	momentane Luftdruckänderung



7 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = |x^2 - 4|$, $D_f = \mathbb{R}$, mithilfe einer DMS. Benennen Sie die Stellen, an denen f nicht differenzierbar ist, und begründen Sie Ihre Antwort. Hinweis: Der DMS-Befehl für den (Absolut-)Betrag lautet häufig „abs()“.

8 a) Skizzieren Sie im Bereich $-4 \leq x \leq 5$ den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f , die alle folgenden Eigenschaften aufweist:

1 $f'(-2) = 0$ 2 $f(0) = 2$ und $f'(0) = -1$ 3 $f'(1) > 0$

b) Skizzieren Sie im Bereich $-1 \leq x \leq 5$ den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f , die alle folgenden Eigenschaften aufweist:

1 f ist nur an der Stelle $x_0 = 3$ nicht differenzierbar.
2 Es gilt: $f(0) = 2$ und für die Ableitung f' gilt: $f'(0) = -1$.
3 Es ist $f'(4) > 0$.

9 Paul behauptet, dass eine Funktion genau dann an einer Stelle differenzierbar ist, wenn ihr Graph in einer Umgebung dieser Stelle durch die Tangente angenähert werden kann. Erklären Sie Pauls Behauptung.

10 Die Abbildung zeigt das Profil einer Alpenetappe der Tour de France. Ermitteln Sie näherungsweise die Stellen mit der größten Steigung und die Stellen, bei denen die Abfahrt am steilsten verläuft. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.



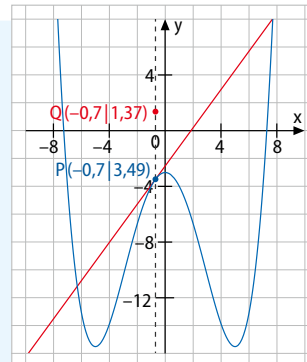
Entdecken

DMS-Applet

Mediencode
63044-25

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer Funktion f und einen Punkt P auf dem Graphen. G_f hat bei P eine Tangente mit der Steigung m , die ebenfalls eingezeichnet ist. Der Punkt Q hat denselben x -Wert wie der Punkt P . Sein y -Wert ist die Steigung m der Tangente an G_f . Man kann auch sagen: Sein y -Wert ist der Wert der Ableitung von f an der Stelle x .

- Zeichnen Sie mithilfe des DMS-Applets an möglichst vielen Stellen einen Punkt P mit Tangente und zugehörigem Punkt Q ein und beschreiben Sie Ihre Beobachtung.



Verstehen

GeoGebra-Applet

Mediencode
63044-26

Eine Funktion f ordnet jedem x -Wert einen y -Wert zu. Ihre Ableitungsfunktion f' ordnet jedem x -Wert die Steigung der Funktion f an dieser Stelle zu. Also bedeutet $f(2) = -4$: Die Funktion f hat an der Stelle $x = 2$ den y -Wert -4 . Dagegen bedeutet $f'(2) = 1$: Die Funktion f hat an der Stelle $x = 2$ die Steigung 1.

Die Funktion $f: x \mapsto f(x)$ hat die maximale Definitionsmenge D_f und den Graphen G_f .

Die **Ableitungsfunktion** f' ordnet jeder Stelle $x \in D_{f'}$ deren Ableitung zu.

Die Ableitungsfunktion f' ist nur dort definiert, wo f differenzierbar ist. Für die Definitionsmenge $D_{f'}$ gilt also $D_{f'} \subseteq D_f$.

Die Ableitungsfunktion f' gibt damit die Steigung der Tangente an G_f bzw. die lokale Änderungsrate der Funktion f an.

Erklärvideo

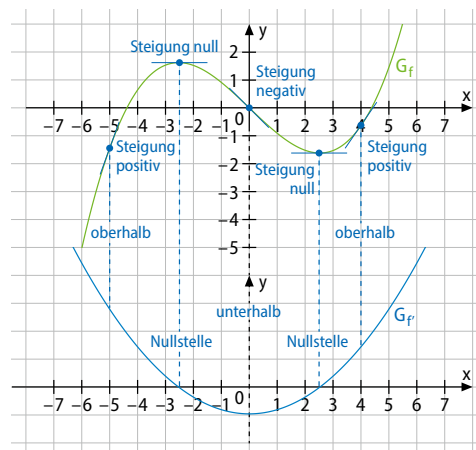
Mediencode
63044-27Strategiewissen
Grafisches Differenzieren

Beispiel

- I. Gegeben ist der Graph G_f einer Funktion f . Bestimmen Sie den Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion f' . Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

Lösung:

- Nutzen Sie alle Punkte von G_f , an denen die Tangente waagrecht ist, also die Steigung gleich null ist. Bei den zugehörigen x -Werten hat der Graph der Ableitungsfunktion eine Nullstelle.
- Wählen Sie weitere Punkte auf dem Graphen von f und zeichnen Sie dort die Tangente ein.
- Wenn die Tangente eine steigende Gerade ist, hat f' dort einen positiven Funktionswert. Der Graph von f' liegt oberhalb der x -Achse. Dementsprechend liegt der Graph von f' unterhalb der x -Achse, wenn die Tangente an G_f eine fallende Gerade ist.
- Markieren Sie, in welchen Bereichen der Graph von f' verlaufen muss, und zeichnen Sie einen Graphen durch die Nullstellen und die markierten Bereiche.



Nachgefragt

- Begründen Sie: „Eine ganzrationale Funktion f und ihre Ableitungsfunktion f' haben für $x \rightarrow \infty$ immer den gleichen Globalverlauf.“
- Beschreiben Sie, wie der Graph einer Funktion f an den Stellen verläuft, an denen der Graph der Ableitungsfunktion die x -Achse schneidet.



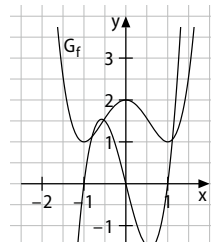
1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -0,5x^2 + 4x$, $D_f = \mathbb{R}$.

- Zeichnen Sie den Graphen von f mithilfe einer DMS.
- Ermitteln Sie jeweils mithilfe der DMS die Steigung des Graphen an verschiedenen Punkten. Übertragen Sie die Tabelle in Ihr Heft und ergänzen Sie sie.

x_0	-2	-1	-0,5	0	1	2,5
$f'(x_0)$						

- Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' .

2 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f und den Graphen ihrer Ableitungsfunktion f' , $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$. Geben Sie an, welche Rückschlüsse man vom Verlauf des Ableitungsgraphen $G_{f'}$ auf den Verlauf des Ausgangsgraphen G_f und umgekehrt ziehen kann.



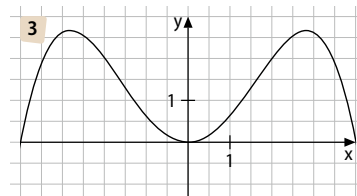
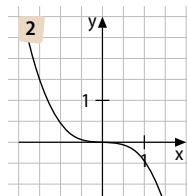
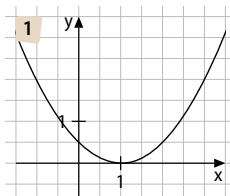
Erklärvideo



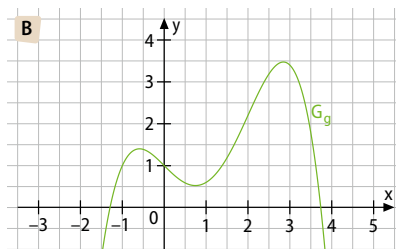
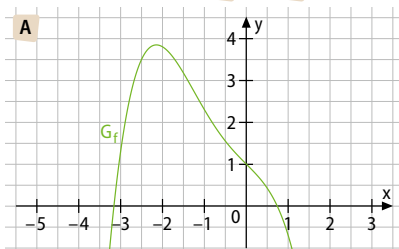
Mediencode
63044-28



3 Die Abbildungen zeigen drei Funktionsgraphen. Übertragen Sie jeden Graphen möglichst genau in Ihr Heft und ergänzen Sie an ausgewählten Punkten die Tangenten. Skizzieren Sie dann den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion.



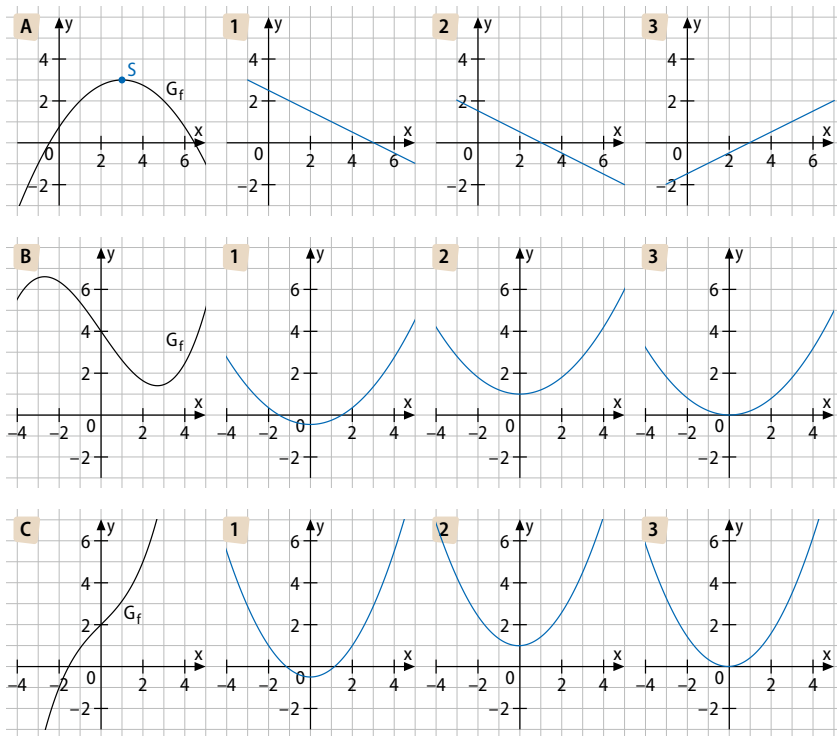
4 Gegeben sind die Graphen G_f und G_g zweier Funktionen f und g . Entscheiden Sie begründet, ob die Aussagen 1 bis 4 jeweils auf die Funktionen zutreffen.



- $f(0) = 1$
- $f'(-1) = 1$
- $f'(1) > 0$
- $\frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} < 0$

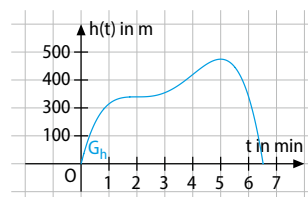
- $g(0) = 1$
- $g'(-1) = 1$
- $g'(1) > 0$
- $\frac{g(0) - g(-1)}{0 - (-1)} < 0$

- 5 Die erste Abbildung zeigt jeweils den Graphen G_f einer Funktion f . Genau eine der Abbildungen 1 bis 3 zeigt den Graphen ihrer Ableitungsfunktion f' . Entscheiden Sie begründet, welche Abbildung das ist.

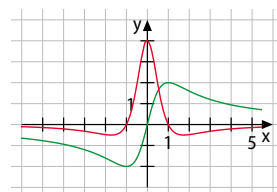


- 6 Die Abbildung zeigt die Höhe $h(t)$ eines Hubschraubers über dem Erdboden in Abhängigkeit von der Zeit t .

- Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen im Sachkontext.
- Übertragen Sie die Abbildung möglichst genau in Ihr Heft und skizzieren Sie den Graphen der Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit des Hubschraubers in ein weiteres Koordinatensystem. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.
- Formulieren Sie Aufgaben im Sachkontext und lassen Sie diese von einem Mitschüler oder einer Mitschülerin lösen.



- 7 Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer Funktion f sowie den Graphen $G_{f'}$ ihrer Ableitungsfunktion f' . Ermitteln Sie, welches der Graph G_f ist, und geben Sie eine Begründung an.





- 8** Das Profil eines Hangs für ein Snowboard-Rennen lässt sich näherungsweise mittels der Funktion f mit $f(x) = 0,0001x^2 - 0,52x + 507$ beschreiben, wobei $x \in [0; 1300]$ die horizontale Entfernung von der Startlinie (in m) und $f(x)$ die Höhe (in m) über dem Zieleinlauf angibt. Der Zieleinlauf liegt auf einer Höhe von knapp 1200 m über dem Meeresspiegel.
- Zeichnen Sie den Graphen von f mit einer DMS und wählen Sie geeignete Einstellungen für das Koordinatensystem.
 - Ermitteln Sie rechnerisch die Höhe des Startpunkts über NN (Normalnull).
 - Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate des Hangprofils und beschreiben Sie deren Bedeutung im Sachkontext.
 - Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion f' und interpretieren Sie diesen im Sachkontext.
 - Ermitteln Sie das prozentuale Gefälle in der Nähe des Startbereichs und veranschaulichen Sie dieses an Ihrem Graphen.

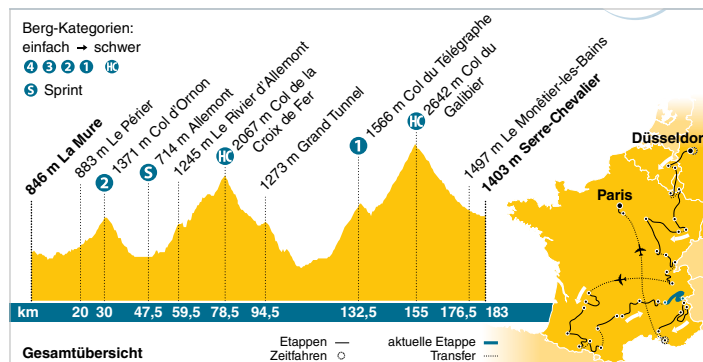


- 9** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -0,1x^5 + 0,75x^3 + 1,5x + 1$, $D_f = \mathbb{R}$.
- Ermitteln Sie das Verhalten der Funktion f für $x \rightarrow \pm\infty$ sowie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen G_f mit der y -Achse.
 - Begründen Sie, dass die Funktion f mindestens eine Nullstelle besitzt. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f , ggf. mithilfe einer DMS.
 - Ermitteln Sie anhand des Graphen Stellen, an denen die lokale Änderungsrate von f null ist.
 - Im Bereich $0 \leq x \leq 3$ modelliert die Funktion f das Profil eines Hochwasserschutzdamms. Bestimmen Sie anhand des Graphen $f'(1)$, $f'(2)$ und $f'(3)$ und erläutern Sie die Bedeutung der Werte im Sachzusammenhang.



- 10** Die Funktion f mit $f: x \mapsto f(x)$ und $D_f = [0; 183]$ beschreibt das Höhenprofil einer Etappe der Tour de France. Dabei ist f die Höhe über dem Ausgangspunkt in La Mure in Metern und x die zurückgelegte horizontale Strecke in Kilometern.

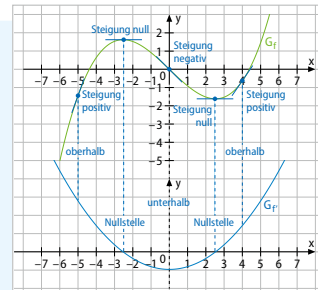
- Beschreiben Sie in Worten die Bedeutung des Werts $f(78,5) = 2067$.
- Beschreiben Sie in Worten die Bedeutung des Werts $f'(125) = 7$.
- Drücken Sie in Worten die Bedeutung folgender Gleichung aus: $\frac{f(155) - f(137)}{18} = 67$.
- Geben Sie den passenden mathematischen Ausdruck an: „Wenn der Radfahrer 70 Kilometer weit gefahren ist, befindet er sich gerade 454 Meter über dem Ausgangspunkt.“
- Geben Sie die passende mathematische Bedingung an: „Wenn der Radfahrer 80 Kilometer weit gefahren ist, fährt er gerade bergab.“
- Geben Sie den passenden mathematischen Ausdruck an: „Bei Kilometer 130 beträgt das Gefälle 4,5 %.“
- Drücken Sie durch eine passende Gleichung aus: „Auf den letzten drei Kilometern vor dem höchsten Punkt der Etappe beträgt die durchschnittliche Steigung 8,3 %.“



Entdecken

In Beispiel I auf Seite 104 wurde eine Funktion 3. Grades grafisch abgeleitet. Dieses Verfahren wird nun auf eine Funktion 5. Grades angewendet.

- Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion 5. Grades.
- Geben Sie an, wie viele Hoch- und Tiefpunkte der Graph höchstens hat (Hochpunkt: „Gipfel“, Tiefpunkt: „Talsohle“).
- Erläutern Sie, wie viele Nullstellen die Ableitungsfunktion somit höchstens haben kann.
- Stellen Sie eine Vermutung über den Grad der Ableitungsfunktion an.
- Wiederholen Sie diese Überlegungen für Funktionen höheren Grades.



Verstehen

Gelegentlich ist die Merkregel zu hören, dass beim Ableiten „der Grad um 1 sinkt“. Das stimmt bei ganzrationalen Funktionen. Wenn die Funktion f den Grad n hat, dann hat die Ableitungsfunktion den Grad $n - 1$. Ergänzt werden muss diese Merkregel um den korrekten Leitkoeffizienten.

Beim Differenzieren ganzrationaler Funktionen nutzt man **Ableitungsregeln**.

- **Potenzregel:** Eine Funktion f mit $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $D_f = \mathbb{R}$, ist differenzierbar und es gilt $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Sind u und v differenzierbare Funktionen, dann gilt ...

- die **Summenregel:** $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
- die **Faktorregel:** $f(x) = c \cdot u(x)$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$

Ist $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, eine **konstante Funktion**, so gilt $f'(x) = 0$.

Begründungen

Begründen Sie die Gültigkeit der Potenzregel für eine beliebige Potenzfunktion f mit $f(x) = x^n$ mithilfe des Differenzialquotienten.

Lösung:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$$

Der Term im Zähler wird faktorisiert, um kürzen zu können:

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})$$

Einsetzen in den Zähler und Kürzen ergibt:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \end{aligned}$$

Der Limes verlangt, dass sich x an x_0 annähert. Da kein Bruch mehr vorhanden ist, gelingt der Grenzübergang, indem man für x einfach x_0 einsetzt:

$$f'(x_0) = x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + \dots + x_0 x_0^{n-2} + x_0^{n-1} = x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1} = n \cdot x_0^{n-1},$$

da es n Summanden x_0^{n-1} gibt.

Insgesamt gilt: $f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}$.

Die Ableitungsfunktion fasst die Ableitungen an allen Stellen x_0 zu einer Funktion zusammen.

Somit gilt: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Beispiele

- I. Bestimmen Sie jeweils mithilfe der Ableitungsregeln die Ableitung der Funktion f.
- a) $f(x) = x^7$ b) $f(x) = x^{12}$ c) $f(x) = x$ d) $f(x) = 7x^4$
 e) $f(x) = x^5 + x^3$ f) $f(x) = 5x^3 - 2x + 1$ g) $f_a(x) = \frac{1}{2}ax^4 + 2a$ h) $P_a(t) = a^2t^2 - t + a$

Lösung:

Bei allen Teilaufgaben findet die Potenzregel Anwendung:

a) $f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6$ b) $f'(x) = 12x^{12-1} = 12x^{11}$ c) $f'(x) = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1$

In den weiteren Teilaufgaben wird auch die Faktor- und/oder Summenregel verwendet:

d) $f'(x) = 7 \cdot 4x^3 = 28x^3$ e) $f'(x) = 5x^4 + 3x^2$ f) $f'(x) = 5 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 1x^0 = 15x^2 - 2$

g) Der Parameter a ist eine veränderliche Zahl, keine Variable. Beim Ableiten wird er wie eine Zahl behandelt: $f'_a(x) = \frac{1}{2}a \cdot 4x^3 + 0 = 2ax^3$

h) In der Klammer steht – wie bei jeder Funktion – die Variable, nach der abgeleitet wird: $P'_a(t) = a^2 \cdot 2x^1 - 1 + 0 = 2a^2x$

- II. a) Erklären Sie anhand des Funktionsterms $f(x) = x^3 \cdot x^5$, dass Sie Produkte von Funktionen nicht faktorweise ableiten können.
- b) Bestimmen Sie jeweils die Ableitung der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$.
- 1 $f(x) = (2x + 1)^2$ 2 $f(x) = (x + 1)(1 - 2x)$

Lösung:

a) Es ist $f(x) = x^3 \cdot x^5 = x^8 \Rightarrow f'(x) = 8x^7$.

Wenn man die einzelnen Faktoren ableitet und deren Ableitungen multipliziert, erhält man $(x^3)' \cdot (x^5)' = 3x^2 \cdot 5x^4 = 15x^6 \neq 8x^7 = f'(x)$.

Ein faktorweises Ableiten ist daher nicht möglich.

b) 1 $f(x) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow f'(x) = 8x + 4$

2 $f(x) = (x + 1)(1 - 2x) = x + 1 - 2x^2 - 2x = -2x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = -4x - 1$

- Begründen oder widerlegen Sie: „Die Summenregel kann man auch bei Differenzen anwenden.“
- Begründen Sie mithilfe der Ableitungsregeln: „Für $x \rightarrow \infty$ hat die Ableitungsfunktion einer ganzrationalen Funktion das gleiche Globalverhalten wie die Funktion f. Aber für $x \rightarrow -\infty$ ändert sich immer das Vorzeichen.“

Erklärvideo



Mediencode

63044-29

Strategiewissen

Anwenden der
Ableitungsregeln

Erinnerung:

$$x^1 = x \quad x^0 = 1$$

Der konstante Summand entfällt beim Ableiten.

Nachgefragt

Aufgaben

- 1 Bilden Sie jeweils die Ableitung f' der Funktion f.
- a) $f(x) = x^6$ b) $f(x) = x^{14}$ c) $f(x) = x^3$ d) $f(x) = 4$
 e) $f(x) = -2x^3$ f) $f(x) = -\frac{1}{12}x^{11} + \frac{1}{16}x^5$ g) $f(x) = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$
 h) $f(x) = x^{2023}$ i) $f(x) = x$ j) $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ k) $f(x) = t$, $t \in \mathbb{R}$
 l) $f(x) = 3x^2$ m) $f(x) = -x^5$ n) $f(x) = 0,5x^4$ o) $f(x) = k \cdot x^{15}$, $k \in \mathbb{Z}$
 p) $f(x) = 2,5x^8$ q) $f(x) = 0,25x^{10}$ r) $f(x) = n \cdot x^n$, $n \in \mathbb{N}$ s) $f(x) = -7x^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$



- 2 Eine Mitschülerin war krank und bittet Sie um Hilfe beim Nachholen der Ableitungsregeln. Erklären Sie an Beispielen und allgemein die Ableitungsregeln in eigenen Worten. Vergessen Sie nicht zu erklären, wie man lineare Funktionen und konstante Funktionen ableitet, also z.B. $f(x) = x$ und $f(x) = -2$.

Hinweis: f'' ist die Ableitung von f' , also die zweite Ableitung von f .

3 Bilden Sie jeweils $f'(x)$ und $f''(x)$.

a) $f(x) = 2x^3$

b) $f(x) = 2x + 3x^3$

c) $f(x) = 7 - 14x + 21x^3$

d) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2$

e) $f(x) = -x^6 + x^5 - x^4$

f) $f(x) = 1 + 2x + 4x^3$

g) $f(x) = \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{6}x^3 - 2$

h) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 1$

i) $f(x) = \frac{2x + x^2}{3}$



4 Bestimmen Sie die Ableitung jedes Funktionsterms.

a) $f(x) = x^2(2 + x)$

b) $f(x) = (x - 1)^2$

c) $f(x) = x(x^2 + x - 1)$

d) $f(x) = (x^2 + 2) \cdot 3$

e) $f(x) = (x^2 + 2) \cdot x$

f) $f(x) = (x + 4)(x - 4)$

g) $f(x) = (x + 2)^2(x - 2)^2$

h) $f(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

i) $f(x) = x^3(1 - x)$



5 Bestimmen Sie – falls vorhanden – die Koordinaten der Punkte, an denen die lokale Änderungsrate der Funktion den Wert m hat. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

a) $f(x) = 4x + 8$; $m = 4$

b) $f(x) = 5x - 1$; $m = 2$

c) $f(x) = 4$; $m = 4$

d) $f(x) = 2x^2 + 5x$; $m = -3$

e) $f(x) = -0,25x^2 - 4$; $m = 1$

f) $f(x) = 7x^2 + 4x + 1$; $m = 11$

g) $f(x) = (2 + 5x)^2$; $m = 0$

h) $f(x) = (-1 - x)^2$; $m = 2$

i) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x - 2$; $m = 4$

j) $f(x) = 5x^3 + 7x^2 - 5x$; $m = -5$



6 Bestimmen Sie die Ableitung folgender Funktionenscharen.

a) $f_a(x) = ax^2 - ax$

b) $f_a(x) = 2ax^2 + 4ax$

c) $p_k(x) = 5x^2 - 15x + k$

d) $f_a(x) = 128 \cdot (x + a)$

e) $f_a(x) = 128x + 128a$

f) $f_a(x) = (a - 1) \cdot x^3$

g) $n_a(x) = 2x^2 + a$

h) $n_a(x) = a^2x + ax^2 + a^2 + x^3$

i) $f_a(x) = x^6 + 4a^3x^3 - 2ax + 1$

j) $f_a(x) = 2ax^4 - x^2 + (a + 1)^2$

k) $f_a(x) = 3x^3 + (a + 1)x^2 - 3a^3x + \frac{4a^2}{3}$

l) $f_a(x) = \frac{1}{2}x^5 + \frac{a-2}{2} \cdot x^2 + 3a^2$

m) $f_a(x) = a \cdot (x^2 + 1)$

n) $p_t(x) = (t - 2)^2 \cdot (t + 1) \cdot x$



7 Bilden Sie jeweils die erste Ableitung.

a) $t(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$

b) $A(x) = -\frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x - 4$

c) $U(r) = 2\pi r^2$

d) $V_R(h) = \pi \cdot h^2 \cdot \frac{R-h}{3}$

e) $s(v) = 1,2v + \frac{v^2}{15}$

f) $V_I(a) = a^3 + |a^2 + 3|a$

g) $m(q) = 4 + q + 2q^2$

h) $a_b(c) = (2b + 1) \cdot (2c + 1)$



8 a) Weisen Sie mithilfe der Ableitungsregeln nach, dass die Funktionen f_1 mit

$f_1(x) = 4x^3 + 2x + 3$ und f_2 mit $f_2(x) = 4x^3 + 2x - 2$ ($D_1 = D_2 = \mathbb{R}$) dieselbe Ableitungsfunktion besitzen.

b) Vervollständigen Sie folgende Aussage und begründen Sie diese.

Hat die Funktion f die Ableitungsfunktion f' , so gibt es unendlich viele weitere Funktionen, die alle dieselbe Ableitungsfunktion f' besitzen. Diese unterscheiden sich nur ...

c) Geben Sie jeweils mindestens zwei Funktionen an, die die angegebene Ableitung f' besitzen. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

1 $f'(x) = x^2$

2 $f'(x) = x^3$

3 $f'(x) = 0$

4 $f'(x) = 5$

5 $f'(x) = x + 1$

6 $f'(x) = x + 4x^2$

7 $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}$

8 $f'(x) = 2 + 0,5x$

9 $f'(x) = 1 - 2x + x^2$



9 Ermitteln Sie jeweils rechnerisch die Stellen, an denen der Graph der Funktion f eine waagrechte Tangente aufweist. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer DMS.

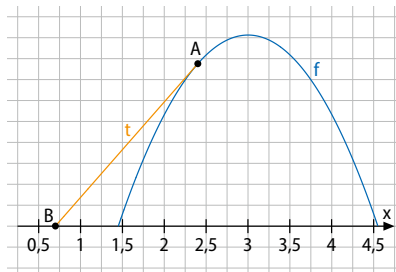
- | | | |
|------------------------|---|---------------------------|
| a) $f(x) = x^2$ | b) $f(x) = 2x^2 - x$ | c) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ |
| d) $f(x) = x^3$ | e) $f(x) = \frac{1}{5}x^5$ | f) $f(x) = x^3 + x^2$ |
| g) $f(x) = x^2(2 - x)$ | h) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ | i) $f(x) = x(2x^2 - 6)$ |

- 10** a) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion $f: x \mapsto x^3 + x$, $D_f = \mathbb{R}$, punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. Untersuchen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' auf Symmetrie.
- b) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion $g: x \mapsto x^4 + x^2 + 1$, $D_g = \mathbb{R}$, achsensymmetrisch bezüglich der y -Achse ist. Untersuchen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion g' auf Symmetrie.
- c) Verallgemeinern Sie die Aussagen aus den Teilaufgaben a) und b) und begründen Sie.
- d) Der Graph einer Ableitungsfunktion f' ist achsensymmetrisch zum Koordinatensystem. Begründen Sie, welche Symmetrie der Funktionsgraph der zugehörigen Funktion f aufweisen muss.
- e) Der Graph einer Ableitungsfunktion f' ist punktsymmetrisch zum Koordinatensystem. Begründen Sie, dass der Funktionsgraph der zugehörigen Funktion f achsensymmetrisch zur y -Achse sein muss.

- 11** a) Begründen Sie zunächst anschaulich und dann rechnerisch: Wenn eine Parabel genau eine Nullstelle hat, dann ist die Tangente an dieser Stelle waagrecht.
- b) Begründen Sie anschaulich: Wenn eine Parabel zwei verschiedene Nullstellen hat, dann sind die Tangenten an diesen Stellen nicht waagrecht.



12 Ein Hersteller möchte Tunnelzelte für vier Personen entwerfen. Die endgültige Form steht noch nicht fest, man hat sich jedoch bereits auf einige Eckdaten geeinigt: Die Funktion f_a mit $f_a(x) = 0,25a \cdot (x - 3)^2 - 0,6a$, $a \in \mathbb{R}^+$, beschreibt in einer geeignet gewählten Definitionsmenge den Querschnitt eines Zeltes. Die Koordinaten sind Angaben in Metern.



- a) Zeigen Sie, dass die Breite des Zeltes durch die Funktionenschar f_a bereits fest vorgegeben ist. Geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für die Funktion f_a an.
- b) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a die Höhe des Zeltes. Geben Sie ein Intervall für sinnvolle Zelthöhen an und bestimmen Sie a entsprechend.
- c) Das Zelt muss durch Abspannleinen gesichert sein. Am Punkt $A(2,4 | f(2,4))$ wird eine Öse für die Leine angebracht. Die Leine verläuft tangential zum Graphen von f_a . Stellen Sie die Gleichung dieser Tangente t_a in Abhängigkeit von a auf.
- d) „Das ist ja verrückt“, staunt der Designer. „Egal, wie ich wähle, der Hering muss immer an derselben Stelle in den Boden!“ Weisen Sie nach, dass diese Beobachtung richtig ist.
- e) Die Abspannleine darf nicht in beliebigen Winkeln verlaufen. Wenn die Tangentensteigung zwischen 0,4 und 2 liegt, ist die Verspannung stabil. Bestimmen Sie das Intervall, in dem der Parameter a aufgrund dieser Bedingung liegen darf.
- f) Treffen Sie eine sinnvolle, begründete Wahl für den Wert des Parameters a .

DMS-Applet


Mediencode
63044-30

Entdecken



Die tiefstehende Sonne kann beim Autofahren gefährlich blenden.

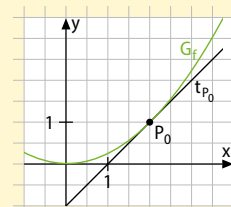
- Erläutern Sie die Situation eines Autofahrers an einer Kuppe mithilfe des Graphen der Funktion f mit $f(x) = -0,1x^2 + x$, $D_f = [0; 10]$. Die Sonne befindet sich in diesem Modell im Punkt $S(10|1)$.



Verstehen

In vielen Sachzusammenhängen spielt die Tangente an den Graphen einer Funktion in einem Punkt eine wichtige Rolle. Die Gleichung der Tangente lässt sich mithilfe der Ableitung der Funktion ermitteln.

Für eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$ mit Definitionsbereich D_f wird die **Gleichung der Tangente** in einem Punkt $P_0(x_0 | f(x_0))$ über den Ansatz einer Geradengleichung $t_{P_0}: y = m \cdot x + t$ mit der Steigung $m = f'(x_0)$ ermittelt:
 $t_{P_0}: y = f'(x_0) \cdot x + t$.



Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, $D_f = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen G_f im Punkt $P(2 | f(2))$.

Lösung:

- Bestimmen Sie die Ableitung an der Stelle $x_P = 2$:
 $f'(x) = 6x - 4 \Rightarrow f'(2) = 8$
- Notieren Sie den Ansatz für die Tangentengleichung $t_P: y = f'(x_P) \cdot x + t$:
 $y = f'(2) \cdot x + t \Rightarrow y = 8x + t$
- Setzen Sie die Koordinaten des Punktes $P(2 | f(2))$ ein:
 $f(2) = 5 \Rightarrow 5 = 8 \cdot 2 + t \Rightarrow t = -11$
- Geben Sie die Tangentengleichung an: $t_P: y = 8x - 11$

Strategiewissen

Aufstellen einer Tangentengleichung

Nachgefragt

- Begründen Sie, dass die Tangente an einen Funktionsgraphen in einem Punkt nicht parallel zur y-Achse verlaufen kann.
- „Eine Tangente an einen Funktionsgraphen hat stets genau einen Punkt mit dem Graphen gemeinsam.“
Begründen oder widerlegen Sie diese Aussage.

Aufgaben



- Gegeben ist jeweils die Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, sowie ein Punkt $P_0(x_0 | f(x_0))$ des Graphen von f . Stellen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P_0 auf und überprüfen Sie Ihr Ergebnis in einer DMS.

a) $f(x) = 2x^2 - 7x + 1$; $x_0 = 1$	b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5x$; $x_0 = -3$
c) $f(x) = -4x^3 - 4x^2 + 2x + 1$; $x_0 = 0$	d) $f(x) = 0,5x^3 - 2x^2$; $x_0 = 3$
e) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 3x^2$; $x_0 = 4$	f) $f(x) = x^3 + x^2 + 1$; $x_0 = 2$
g) $f(x) = x^2 - 6x + 10^2$; $x_0 = 3$	h) $f(x) = -(2 + x^2)^2$; $x_0 = 1$

- 2** Vorgelegt ist jeweils eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$; ihr Graph ist G_f . Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t_p an G_f im Punkt $P(p|f(p))$ sowie den Flächeninhalt des Dreiecks, das von t_p und den beiden Koordinatenachsen berandet wird.

- a) $f(x) = x^3$; $P(1|f(1))$ b) $f(x) = 0,5x^4$; $P(-1|f(-1))$
c) $f(x) = 0,25x^2$; $P(2|f(2))$ d) $f(x) = \frac{1}{32}x^5 - 3x$; $P(-2|f(-2))$

Tangentengleichungen zu 2:

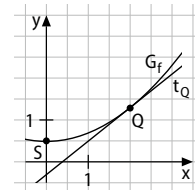
$$\begin{aligned} y &= -2x - 1,5; \\ y &= x - 1; \\ y &= -0,5x + 4; \\ y &= 3x - 2 \end{aligned}$$

- 3** Ermitteln Sie jeweils, in welchem Punkt bzw. in welchen Punkten die Tangente an den Graphen G_f der gegebenen Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, parallel zur Geraden g ist.

- a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$; $g: y = 2x - 2$ b) $f(x) = 2x^3 - 3x$; $g: y = 3x + 6$
c) $f(x) = x^4 - 2x^2$; $g: y = -1$ d) $f(x) = -2x^2 + 6$; $g: y = -2x + 5$

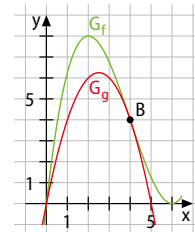
Berührungspunktkoordinaten zu 3:
 $(-1|-1)$; $(-1|1)$;
 $(0|0)$; $(0,5|5,5)$;
 $(1|-1)$; $(2|-3)$

- 4** a) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise die Steigung der Tangente t_Q an den Graphen G_f im Punkt $Q(2|1,3)$.
b) Der Graph G_f ist eine bezüglich der y -Achse symmetrische Parabel, die die y -Achse im Punkt $S(0|0,5)$ schneidet. Ermitteln Sie einen Funktionsterm $f(x)$ von G_f und bestimmen Sie rechnerisch die Steigung der Tangente t_Q an G_f im Punkt Q . Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Teilaufgabe a).



- 5** Die Abbildung zeigt die Graphen G_f und G_g der Funktionen $f: x \mapsto 0,25x^3 - 3x^2 + 9x$ und $g: x \mapsto -x^2 + 5x$, $D_f = D_g = \mathbb{R}$.

- a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass sich die beiden Graphen im Ursprung schneiden und genau einen weiteren Punkt B gemeinsam haben, in dem sie sich berühren.
b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Berührungspunktes B sowie eine Gleichung der gemeinsamen Tangente t_B an G_f und G_g im Punkt B .



- 6** Vorgelegt ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3$, $D_f = \mathbb{R}$.
a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t_p an den Graphen von f im Punkt $P(1|f(1))$ und zeichnen Sie den Graphen von f sowie die Tangente t_p für $-2 \leq x \leq 3$.
b) Die Gerade t_p aus Teilaufgabe a) hat mit dem Graphen G_f außer P noch einen weiteren Punkt R gemeinsam. Ermitteln Sie dessen Koordinaten.
c) Weisen Sie ohne Aufstellen der Tangentengleichung nach, dass die Tangente an G_f im Punkt $Q(-1,5|f(-1,5))$ die x -Achse im Punkt $(-1|0)$ schneidet.

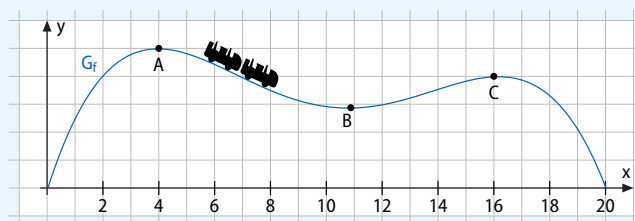
- 7** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1,5 - 2,5x - x^2$, $D_f = \mathbb{R}$; ihr Graph ist G_f .
a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen und geben Sie die Koordinaten des Parabelscheitels S an.
b) Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2 an G_f in den Schnittpunkten mit der x -Achse und zeigen Sie, dass t_1 und t_2 einander im Scheitel S_2 der Parabel P_2 mit der Gleichung $y = 2f(x)$ schneiden.
c) Der Graph G_f und seine Tangenten aus Teilaufgabe b) werden an der x -Achse gespiegelt. Geben Sie einen Funktionsterm $f^*(x)$ der „Spiegelfunktion“ sowie Gleichungen der gespiegelten Tangenten t_1^* und t_2^* an.

- 8** Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = x^2 + 4x$, $D_f = \mathbb{R}$, mit ihrem Graphen G_f sowie der Punkt $P(0|1)$. Zeigen Sie, dass sich die Tangenten an den Graphen G_f bei $x = -1$ und bei $x = 1$ im Punkt P schneiden.

Entdecken



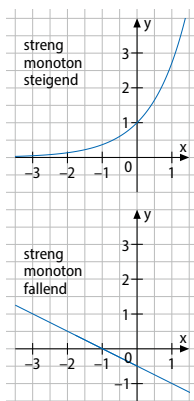
Das Höhenprofil einer Teilstrecke einer Achterbahn lässt sich vereinfacht durch die Funktion f darstellen (x : Abstand in Metern vom Beginn der Teilstrecke; y : Höhe in Metern).



- Geben Sie die Intervalle (x -Werte) an, in denen die Achterbahn nach oben bzw. nach unten fährt.
- Geben Sie an, in welche Richtung sich die Achterbahn in den Punkten A, B und C bewegt.
- Die Punkte A, B und C sind entweder ein lokaler Hochpunkt oder ein lokaler Tiefpunkt. Ordnen Sie zu.

Verstehen

Das Steigungsverhalten einer Funktion lässt sich mathematisch beschreiben und untersuchen.



Eine Funktion ist streng monoton zunehmend (abnehmend), wenn ihr Graph streng monoton steigend (fallend) ist.

H ist ein lokaler Hochpunkt.
 T ist ein lokaler Tiefpunkt.

Der Graph G_f einer Funktion f heißt in einem Intervall I ...

streng monoton steigend,

streng monoton fallend,

wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:

Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$.

Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$.

Einen Punkt eines Funktionsgraphen, der in einer Umgebung entweder der höchste Punkt (Hochpunkt) oder der tiefste Punkt (Tiefpunkt) des Graphen ist, nennt man **Extrempunkt**. Bei einem Extrempunkt ändert sich das Monotonieverhalten des Graphen.

Monotoniesatz: Wenn die Funktion f im Intervall I differenzierbar ist und für alle $x \in I$...

■ $f'(x) > 0$ gilt, dann ist G_f **streng monoton steigend** in I .

■ $f'(x) < 0$ gilt, dann ist G_f **streng monoton fallend** in I .

Die Umkehrung gilt jeweils nicht.

Beispiele

- I. Zeigen Sie anhand der Zeichnung rechts exemplarisch, dass der Monotoniesatz gilt.

Lösung:

Bei den Extremstellen kann die Zeichnung gedanklich in Spalten geteilt werden.

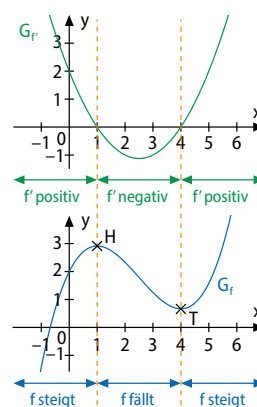
In der ersten Spalte (für $x < 1$) liegt G_f über der x -Achse, also gilt: $f'(x) > 0$.

G_f ist hier streng monoton steigend.

In der zweiten Spalte (für $1 < x < 4$) liegt G_f unter der x -Achse, also gilt: $f'(x) < 0$.

G_f ist hier streng monoton fallend.

In der dritten Spalte (für $x > 4$) gilt $f'(x) > 0$ und G_f ist hier streng monoton steigend.



- II. Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen G_f der Achterbahn-Strecke bei „Entdecken“ auf Seite 114.

Lösung:

Aus der Zeichnung wird abgelesen, dass der Graph im Intervall $[0; 4]$ steigt, im Intervall $[4; 12]$ fällt, im Intervall $[12; 16]$ steigt und im Intervall $[16; 20]$ fällt.

Es gilt somit:

G_f ist streng monoton steigend für $x \in [0; 4]$ sowie für $x \in [12; 16]$.

G_f ist streng monoton fallend für $x \in [4; 12]$ sowie für $x \in [16; 20]$.

Maximales Monotonieintervall: Das größte Intervall, in dem G_f streng monoton steigend oder fallend ist.

Die Grenzen werden (wenn in der Definitionsmenge erlaubt) eingeschlossen.

- III. Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph G_f der Funktion $f: x \mapsto x^2$; $D_f = \mathbb{R}^+$, streng monoton steigend ist.

Lösung:

1. Bilden Sie die 1. Ableitung: Es gilt: $f'(x) = 2x$.

2. Bestimmen Sie das Vorzeichen der 1. Ableitung:

Für $x \in \mathbb{R}^+$ gilt $f'(x) = 2x > 0$, also ist G_f streng monoton steigend auf D_f .

*Strategiewissen
Strenge Monotonie nachweisen*

- IV. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$, $D_f = \mathbb{R}$. Ermitteln Sie die Nullstellen der ersten Ableitung und untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f .

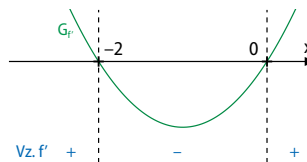
Lösung:

Ableitung: $f'(x) = x^2 + 2x$

Nullstellen von f' : $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = -2$

Vorzeichenuntersuchung von f' mit der Skizze von $G_{f'}$.

1. Tragen Sie die Nullstellen von f' auf der x -Achse ein.
2. Zeichnen Sie den Graphen von f' .
3. Teilen Sie den Graphen durch die Nullstellen mit senkrechten Linien in mehrere Spalten.
4. Ermitteln Sie das Vorzeichen von f' in jeder Spalte.



*Strategiewissen
Vorzeichenuntersuchung mithilfe der Skizze von $G_{f'}$.*

Es wird untersucht, ob $G_{f'}$ in den Teilabschnitten über der x -Achse (Vz. f' : +) oder unter der x -Achse (Vz. f' : -) liegt.

G_f ist streng monoton steigend für $x \in]-\infty; -2]$ sowie für $x \in [0; \infty[$.

G_f ist streng monoton fallend für $x \in [-2; 0]$.

Das Vorzeichen von f' kann auch mit einer Monotonietabelle untersucht werden:

Erstellen einer Monotonietabelle:

1. In der ersten Zeile wird der Definitionsbereich anhand der Nullstellen von f' in Intervalle unterteilt.
2. Man berechnet in jedem Intervall an einer beliebigen Stelle den Wert der 1. Ableitung und leitet daraus ihr Vorzeichen im ganzen Intervall ab:

Da alle Nullstellen von f' berechnet wurden, ändert f' das Vorzeichen innerhalb der Intervalle nicht.

x	$x < -2$	$x_1 = -2$	$-2 < x < 0$	$x_2 = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	$f'(-3) = 3 > 0$ +	0	$f'(-1) = -1 < 0$ -	0	$f'(1) = 3 > 0$ +
G_f	streng monoton steigend	waagrechte Tangente	streng monoton fallend	waagrechte Tangente	streng monoton steigend

*Strategiewissen
Erstellen einer Monotonietabelle*

Erklärvideo



Mediencode
63044-31

Nutzen Sie möglichst einfache Werte für die Berechnung.

- V. a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph G_f der Funktion $f: x \mapsto x^3$, $D_f = \mathbb{R}$, auf ganz D_f streng monoton steigend ist.
 b) Erläutern Sie anhand des Graphen G_f , dass die strenge Monotonie auf ganz D_f nicht im Widerspruch dazu steht, dass $f'(0) = 0$ gilt.

Lösung:

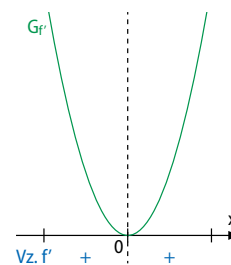
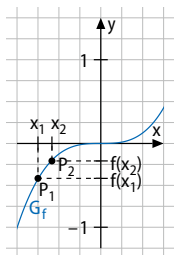
- a) Es gilt: $f'(x) = 3x^2$.

Nullstelle von f' : $3x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = 0 \text{ (Vielfachheit 2)}$$

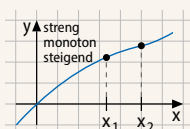
Aus der Skizze von $G_{f'}$ wird entnommen, dass $G_{f'}$ außer bei $x = 0$ positiv ist. Damit ist G_f streng monoton steigend in den Intervallen $]-\infty; 0]$ sowie $[0; \infty[$. Zusammengefasst ist G_f in $D_f = \mathbb{R}$ streng monoton steigend (da die Funktion f bei $x = 0$ keine Lücke hat).

- b) Wählt man zwei Punkte P_1 und P_2 mit $x_1 < x_2$, so liegt stets P_2 „oberhalb“ von P_1 , da $f(x_1) < f(x_2)$. Der Graph G_f besitzt an der Stelle $x = 0$ zwar eine waagerechte Tangente, aber auch dort gilt der obige Zusammenhang.

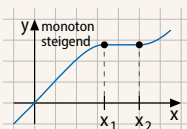


Nachgefragt

- Erklären Sie, wie man mithilfe der ersten Ableitung einer Funktion erkennen kann, ob diese in einem Intervall streng monoton fallend ist.
- Begründen Sie anhand eines Beispiels, dass sich das Monotonieverhalten einer Funktion nicht zwingend in einem Punkt mit waagerechter Tangente ändern muss.
- Erklären Sie mithilfe der beiden Schaubilder anschaulich den Unterschied zwischen Monotonie und strenger Monotonie.



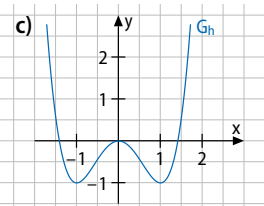
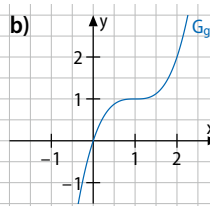
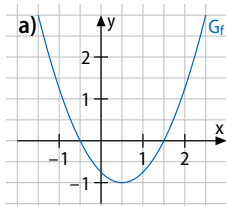
Aus $x_1 < x_2$ folgt
 $f(x_1) < f(x_2)$.



Aus $x_1 < x_2$ folgt
 $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Aufgaben

- 1 Geben Sie jeweils die maximalen Monotonieintervalle an.



- 2 Bestimmen Sie jeweils die maximalen Monotonieintervalle des Graphen der Funktion f mit der angegebenen Funktionsgleichung. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mit einer DMS.

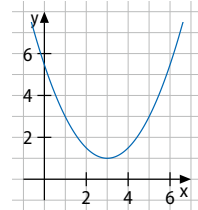
a) $f(x) = x^3 - 7,5x^2 + 12x - 1$

b) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2$

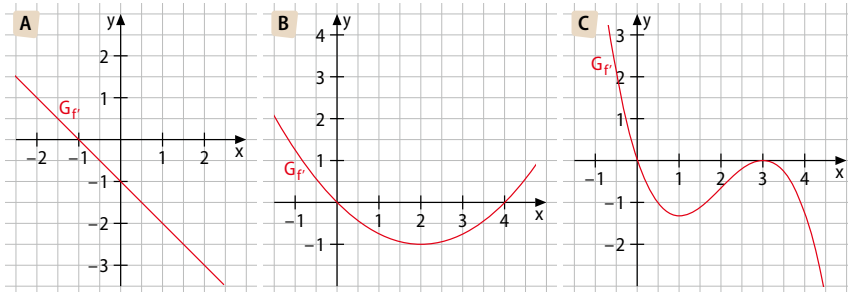
c) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + x^2 - 2$

d) $f(x) = \frac{1}{1000}x^5 + \frac{1}{100}x^4 + 1$

- 3 Begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
- Der dargestellte Funktionsgraph ist im Intervall $[3; 5]$ streng monoton steigend.
 - Der dargestellte Funktionsgraph ist im Intervall $[1; 6]$ streng monoton steigend.
 - Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -5x + 5$, $D_f = \mathbb{R}$, ist im gesamten Definitionsbereich streng monoton fallend.
 - Ein Funktionsgraph ist streng monoton steigend in einem Intervall, wenn der Funktionswert am Intervallanfang kleiner ist als der Funktionswert am Intervallende.



- 4 Die Abbildungen zeigen jeweils den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f . Beschreiben Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f .



- 5 Bestimmen Sie jeweils das Monotonieverhalten des Graphen der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$. Zeichnen Sie den Graphen von f und überprüfen Sie Ihre Lösung.
- $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 1$
 - $f(x) = x^4 + 2x^3$
 - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{9}x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x$



- 6 Gegeben sind die vier für alle reellen Zahlen definierten Ableitungsfunktionen f'_1, f'_2, f'_3 und f'_4 durch die Funktionsterme ...

- $f'_1(x) = -4(x+1)(x-2)$
- $f'_2(x) = 6(1-x)(x-2)$
- $f'_3(x) = 6(x-1)(x-2)$
- $f'_4(x) = 4(x+1)(x+2)$

- a) Ordnen Sie die Tabelle der passenden Ableitungsfunktion zu und begründen Sie.

x	$x < 1$	$x_1 = 1$	$1 < x < 2$	$x_2 = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$

- b) Erstellen Sie zu den übrigen Ableitungsfunktionen jeweils eine Monotonietabelle.

Tipp:
Skizzieren Sie jeweils $G_{f'}$.



- 7 Peter fährt während einer Radtour eine 30 Kilometer lange Strecke, deren Geländeprofil mithilfe der Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{200000}x(x-8)^2(x-15)(x-27)^3$, $D_h = [0; 30]$, modelliert werden kann (x in Kilometern, $h(x)$ in Metern).

- Zeichnen Sie den Graphen G_h mithilfe einer DMS. Stellen Sie dabei die Skalierung auf den Achsen so ein, dass der Graph im gesamten Definitionsbereich sichtbar ist.
- Erstellen Sie eine Tabelle, aus der ersichtlich ist, in welchen Teilstrecken Peter bergauf bzw. bergab fährt. Lesen Sie die erforderlichen Koordinaten näherungsweise ab.

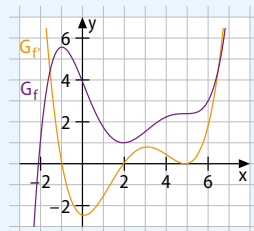


- 8 Begründen Sie, dass die folgende Aussage falsch ist:
„Die Funktion f mit $f(x) = x^3$, $D_f = \mathbb{R}$, ist streng monoton zunehmend, also ist die Ableitung nach dem Monotoniesatz stets positiv.“

Entdecken

Beurteilen Sie anhand der Graphen folgende Aussagen und diskutieren Sie Ihre Ergebnisse mit einer Mitschülerin oder einem Mitschüler.

- 1 Wenn der Graph G_f an der Stelle x_0 einen Hochpunkt hat, dann gilt $f'(x_0) = 0$.
- 2 Wenn $f'(x_0) = 0$ ist, dann hat der Graph G_f bei x_0 einen Hoch- oder Tiefpunkt.



Verstehen

Hoch- und Tiefpunkte werden auch als **Extrempunkte** bezeichnet. Eine **Extremstelle** ist die x-Koordinate eines Extrempunkts.

- 1 **notwendiges Kriterium:**
 $f'(x_E) = 0$
- 2 **hinreichendes Kriterium:**
VZW von f' bei x_E

Für eine Extremstelle x_E einer Funktion f gilt:

- 1 $f'(x_E) = 0$ (G_f hat an dieser Stelle eine waagrechte Tangente.)
und gleichzeitig
- 2 An der Stelle x_E liegt ein Vorzeichenwechsel (VZW) bei f' vor.
 - VZW von + nach - $\Rightarrow$ **Hochpunkt** $H(x_E | f(x_E))$
 $f(x_E)$ nennt man ein **lokales Maximum**.
 - VZW von - nach + $\Rightarrow$ **Tiefpunkt** $T(x_E | f(x_E))$
 $f(x_E)$ nennt man ein **lokales Minimum**.

Erklärvideo



Mediencode
63044-32

Strategiewissen
Extrempunkte
bestimmen

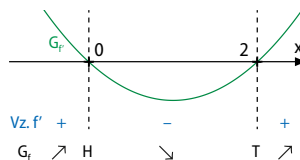
Kurzschreibweise:
 $\nearrow$: streng monoton
steigend
 $\searrow$: streng monoton
fallend

Beispiele

- I. Untersuchen Sie die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2$, $D_f = \mathbb{R}$, auf Extrempunkte und zeichnen Sie den Graphen G_f .

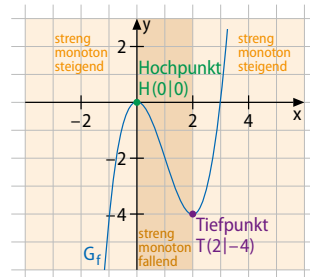
Lösung:

- 1 **Bilden Sie die Ableitung:**
 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$
- 2 **Notwendiges Kriterium – lösen Sie die Gleichung $f'(x) = 0$:**
 $3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$
- 3 **Hinreichendes Kriterium – Vorzeichen-Untersuchung mit Skizze von f' :**



Hinweis: Schreibt man das Monotonieverhalten von G_f mit $\nearrow$ oder $\searrow$ unter G_f , so kann anschaulich H oder T gefolgert werden.

- 4 **Berechnen Sie die y-Werte der Extrempunkte:**
 $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0 - 0 = 0 \Rightarrow H(0|0)$
 $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4 \Rightarrow T(2|-4)$



- II. Berechnen Sie alle Stellen der Funktion $f: x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 0,5$, $D_f = \mathbb{R}$, an denen der Graph G_f von f eine waagrechte Tangente besitzt.

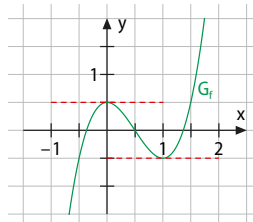
Lösung:

Ableitung: $f'(x) = 6x^2 - 6x$

Nullstellen von f' :

$$6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 6x(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 1$$

Bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ besitzt G_f eine waagrechte Tangente.



- III. Zeigen Sie rechnerisch, dass bei der Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{8}x^4 - x^3$, $D_f = \mathbb{R}$, an der Stelle $x = 0$ keine Extremstelle vorliegt, obwohl die notwendige Bedingung $f'(0) = 0$ erfüllt ist, und überprüfen Sie das Ergebnis anhand des Graphen G_f .

Lösung:

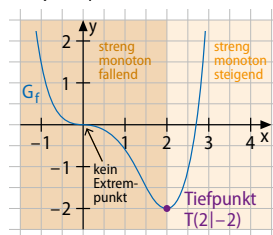
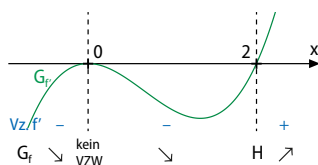
Ableitung: $f'(x) = \frac{3}{2}x^3 - 3x^2 = \frac{3}{2}x^2(x - 2)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ („doppelte Nullstelle“); } x_2 = 2 \text{ („einfache Nullstelle“)}$$

Die notwendige Bedingung, $f'(0) = 0$ für eine Extremstelle ist erfüllt.

Skizze von G_f : Bei $x = 0$ liegt kein Vorzeichenwechsel von f' vor und damit auch keine Extremstelle.

Graph G_f :



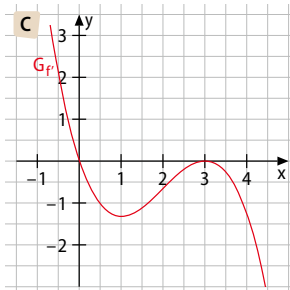
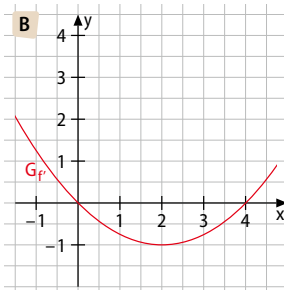
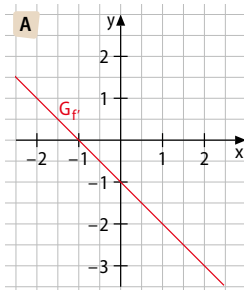
An der Stelle $x_1 = 0$ ist ein sogenannter **Terrassenpunkt**.

- Begründen oder widerlegen Sie: Ist x_0 eine einfache Nullstelle der Ableitung f' einer Funktion f , so ist x_0 eine Extremstelle des Graphen von f .
- Begründen oder widerlegen Sie: Ist x_0 eine Nullstelle der Ableitung f' und bei x_0 ändert sich das Vorzeichen von f' , dann besitzt der Graph von f einen Tiefpunkt bei x_0 .

Nachgefragt



- 1 Die Abbildung zeigt jeweils den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f . Geben Sie die Art und die Lage der Extremstellen der Funktion f an, falls vorhanden.



Aufgaben



2 Bestimmen Sie jeweils die Art und die Lage der Extrempunkte der Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x)$ mithilfe der Skizze der ersten Ableitung.

Extremstellen zu 2:
 $-2; -\sqrt{2}; -1; -\frac{2}{3}; -1;$
 $0; 1; \sqrt{2}; 2; 4; 6$

a) $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$

b) $f(x) = 0,2x^2 - 1,6x + 1$

c) $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$

d) $f(x) = \frac{1}{6}x(x^2 - 12x + 36)$

e) $f(x) = x^3 - 6x$

f) $f(x) = 2(x^3 + 4x^2 + 4x)$

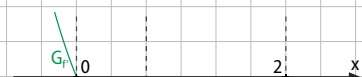
g) $f(x) = 0,25x^2 - 2x - 3$

h) $f(x) = -(x-2)^2(x+1)$

3 Es sollen die Art und die Lage der Extrempunkte der Funktion $f: x \mapsto -3x^4 - 8x^3 + 1,5$ bestimmt werden. In der folgenden Lösung sind Fehler enthalten. Verbessern Sie diese und schreiben Sie den korrekten Lösungsweg in Ihr Heft.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -12x^3 - 24x^2 = -12x^2(x+2) \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow -12x^2(x+2) = 0 \\ \Rightarrow x_1 &= 0 \quad (\text{doppelte Nullstelle}) \\ \Rightarrow x_2 &= -2 \quad (\text{einfache Nullstelle}) \end{aligned}$$

Skizze von G_f :



Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(-2) &= 0 & \Rightarrow H(-2 \mid 0) \\ f'(-1,3) &\approx -14,2 & \Rightarrow T(-1,3 \mid -14,2) \\ f'(0) &= 0 & \Rightarrow H(0 \mid 0) \end{aligned}$$

Vz. f' + - + -
 G_f ↗ H ↘ T ↗ H ↘

4 Der folgende Lösungsweg zur Bestimmung der Art und der Lage der Extrempunkte der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$ enthält Fehler. Verbessern Sie diese und schreiben Sie den korrekten Lösungsweg in Ihr Heft.

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2 \quad (\text{binomische Formel}) \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow x(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -1 \end{aligned}$$

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < -1$	$x = -1$	$x > -1$
$f'(x)$	$f'(-2) = -2$	0	$f'(0,5) = 1,125$	0	$f'(1) = 4$
G_f	↘	T	↗	TEP	↗

$$f(0) = -1 \Rightarrow T(-1 \mid 0)$$

Bei $x = -1$ liegt ein Terrassenpunkt und kein Extrempunkt vor.

Abkürzung:
 TEP: Terrassenpunkt

5 Bestimmen Sie jeweils die Art und die Lage der Extremstellen (falls vorhanden) der Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x)$ und geben Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen G_f an.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2$

c) $f(x) = 2x - 1$

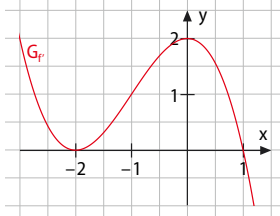
d) $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 15x^2 + 12x$

e) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x$

f) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$



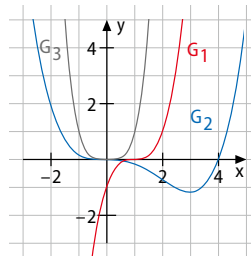
- 6 Gegeben ist der Graph $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f . Entscheiden Sie mit Begründung, ob die Aussagen im abgebildeten Ausschnitt des Graphen zutreffen.



- $G_{f'}$ hat einen Hochpunkt bei $(0|2)$.
- $G_{f'}$ hat zwei Extremstellen.
- $G_{f'}$ ist für $x < 0$ streng monoton steigend.
- $G_{f'}$ hat zwei Stellen mit waagrechter Tangente.
- $G_{f'}$ ist für $x > 0$ streng monoton fallend.
- $G_{f'}$ hat bei $x = 0$ eine Extremstelle.
- $G_{f'}$ ist für $-2 \leq x \leq 1$ streng monoton steigend.

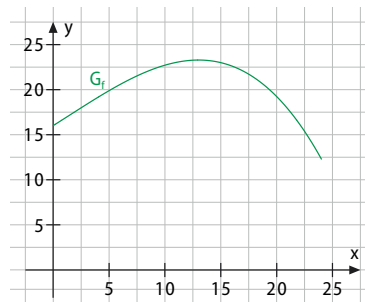
- 7 Ordnen Sie jeder Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, mithilfe ihres Verhaltens an der Stelle x_0 den zugehörigen Funktionsgraphen zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

- $f(x) = x^4$; $x_0 = 0$
- $f(x) = (x - 1)^3$; $x_0 = 1$
- $f(x) = \frac{1}{24}(x^4 - 4x^3)$; $x_0 = 0$



- 8 Der Temperaturverlauf an einem bestimmten Tag kann durch die Funktion $f: t \mapsto -0,002t^3 + 0,009t^2 + 0,78t + 16$, $D_f = [0; 24]$, beschrieben werden (t : Zeit in Stunden ab 0 Uhr; $f(t)$: Temperatur in $^{\circ}\text{C}$).

- Ermitteln Sie die höchste Temperatur.
- Überlegen Sie mithilfe der Zeichnung, wann die Temperatur am niedrigsten ist, und berechnen Sie die niedrigste Temperatur.
- Berechnen Sie $f'(5)$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.



- 9 Bei einem Regenschauer wird die momentane Regenmenge (in $\frac{\text{mm}}{\text{h}}$) durch die im Intervall $[0; 4]$ definierte Funktion f mit $f(t) = 0,5t^3 - 4t^2 + 8t$ modelliert (t : Zeit in Stunden). Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die momentane Regenmenge am größten ist, sowie die maximale Regenmenge.



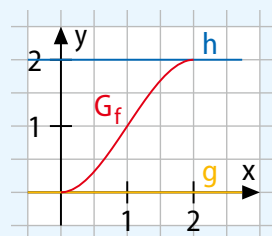
- 10 Ein Pkw fährt innerorts. Seine Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ kann durch die Funktion $g: t \mapsto 5t^3 - 26,25t^2 + 37,5t + 44$ mit $D_g = [0; 2,7]$ modelliert werden (t : Zeit in Minuten). Begründen Sie rechnerisch, ob der Fahrer oder die Fahrerin ein Bußgeld erwarten muss, wenn ein solches ab einer Geschwindigkeit von $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ droht.

- 11 Bestimmen Sie jeweils die Art und die Lage der Extrempunkte der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, falls vorhanden.

- $f(x) = 2x^3 + 6x - 67$
- $f(x) = -\frac{9}{4}x^4 - 5x^3 + 16x^2 - 12x$
- $f(x) = -3x^5 + 40x^3 - 240x$
- $f(x) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 1$

Entdecken

In einem Modell wird eine Straße durch die Gerade $g: y = 0$ und eine Autobahn durch die Gerade $h: y = 2$ sowie die Überleitung von der Straße auf die Autobahn durch den Graphen G_f der Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$, $D_f = [0; 2]$, dargestellt.

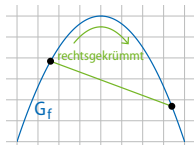


- Geben Sie mithilfe der Abbildung die Streckenabschnitte an, in denen der Fahrer das Lenkrad nach links bzw. rechts drehen muss, sowie die Stelle des Graphen G_f , an der die Linkskurve in eine Rechtskurve übergeht.
- Bestimmen Sie rechnerisch die Stelle, an der die Steigung des Graphen G_f am größten ist, und stellen Sie einen Zusammenhang zu Ihren vorangegangenen Überlegungen her.

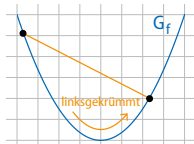
Verstehen

Ein Funktionsgraph G_f ist gekrümmt, wenn sich seine Steigung kontinuierlich ändert. Die Krümmung kann also durch die Betrachtung der Veränderung der Steigung und damit der Monotonie der ersten Ableitung einer Funktion untersucht werden.

Jede Strecke zwischen zwei Punkten des Graphen im betrachteten Intervall verläuft ...



unterhalb des Graphen.



oberhalb des Graphen.

Ist f eine in einem Intervall $I =]a; b[$ differenzierbare Funktion, so heißt ihr Graph G_f ...

rechtsgekrümmt in I , wenn im Intervall I die Ableitungsfunktion f' streng monoton abnehmend ist, also die **Steigung von G_f kleiner** wird.

linksgekrümmt in I , wenn im Intervall I die Ableitungsfunktion f' streng monoton zunehmend ist, also die **Steigung von G_f größer** wird.

Ist f im Intervall I zweimal differenzierbar, so ist der Graph G_f ...

rechtsgekrümmt in I , wenn für die zweite Ableitung $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$ gilt.

linksgekrümmt in I , wenn für die zweite Ableitung $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Ändert sich an der Stelle x_0 die Art der Krümmung, so heißt x_0 **Wendestelle**. Der zugehörige Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ des Graphen G_f heißt **Wendepunkt**.

Für eine zweimal differenzierbare Funktion f gilt für eine Wendestelle x_0 :

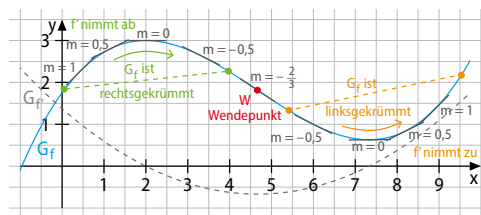
- **Notwendiges Kriterium:** $f''(x_0) = 0$
- **Hinreichendes Kriterium:** $f''(x_0) = 0$ und Vorzeichenwechsel von f'' an der Stelle x_0 .

Begründung

Erklären Sie, dass der Graph G_f einer in einem Intervall I zweimal differenzierbaren Funktion f **rechtsgekrümmt** ist, wenn für alle $x \in I$ gilt: $f''(x) < 0$.

Lösung:

Ist die zweite Ableitung f'' in einem Intervall **negativ**, so ist der Graph G_f der ersten Ableitung f' in diesem Intervall **streng monoton fallend**. Die Steigung des Graphen G_f nimmt somit im Intervall I ab. Daraus ergibt sich, dass der Graph G_f **rechtsgekrümmt** ist.



Beispiele

- I. Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen G_f der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 1$, $D_f = \mathbb{R}$, und geben Sie die Wende- bzw. Terrassenpunkte an.

Lösung:

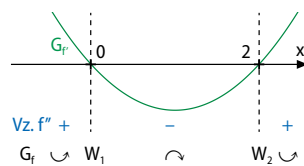
1. Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen von f :

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2; f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x = \frac{3}{2}x(x-2)$$

2. Notwendiges Kriterium – lösen Sie die Gleichung $f''(x) = 0$:

$$\frac{3}{2}x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$

3. Hinreichendes Kriterium – überprüfen Sie den Vorzeichenwechsel von f'' :



Aus der Skizze von $G_{f''}$ folgt:

G_f ist linksgekrümmt in $]-\infty; 0]$ sowie in $[2; \infty[$.

G_f ist rechtsgekrümmt in $[0; 2]$.

Wendepunkte:

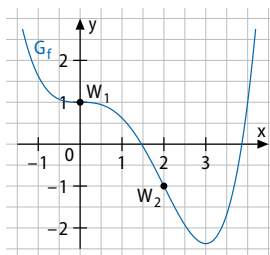
$$f(0) = 1 \quad W_1(0|1)$$

$$f(2) = -1 \quad W_2(2|-1)$$

4. Bestimmen Sie die Steigung des Graphen G_f in den Wendepunkten:

$$f'(0) = 0 \Rightarrow W_1 \text{ ist Terrassenpunkt.}$$

$$f'(2) = -2 \neq 0 \Rightarrow W_2 \text{ ist kein Terrassenpunkt.}$$



Ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente heißt **Terrassenpunkt**.

Strategiewissen
Bestimmen von
Wendepunkten

Erklärvideos



Mediencode
63044-33

Strategiewissen
Untersuchen auf
Terrassenpunkte

- II. Zeigen Sie, dass bei der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3x^2$, $D_f = \mathbb{R}$, bei $x = 1$ keine Wendestelle vorliegt, obwohl die notwendige Bedingung $f''(1) = 0$ erfüllt ist, und zeichnen Sie den Graphen von f .

Lösung:

$$\text{Ableitungen: } f'(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x$$

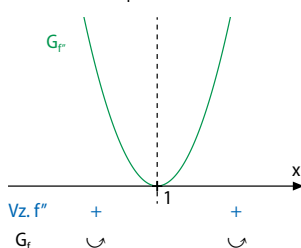
$$f''(x) = 6x^2 - 12x + 6$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(x-1)^2 = 0 \text{ (binomische Formel)} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ (doppelte Nullstelle)}$$

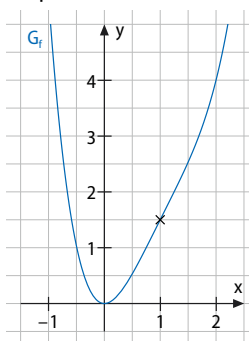
Die notwendige Bedingung, $f''(1) = 0$ für eine Wendestelle ist erfüllt.

Skizze von $G_{f''}$:



Bei $x = 1$ liegt kein Vorzeichenwechsel von f'' vor und damit auch keine Wendestelle.

Graph von f :



Hinreichendes Kriterium ist nicht erfüllt.
Der Graph ändert bei $x = 1$ seine Krümmung nicht.

Erinnerung: Eine ganzrationale Funktion wechselt an einer Nullstelle das Vorzeichen (nicht), wenn die Vielfachheit der Nullstelle ungerade (gerade) ist.

Die Wendetangente ist die Tangente an den Graphen in einem Wendepunkt.

III. f'' ist die zweite Ableitung einer Funktion f mit $f''(x) = -2(x-1)$. Begründen Sie ohne Rechnung, dass bei $x = 1$ eine Wendestelle vorliegt.

Lösung:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (notwendige Bedingung)}$$

$x = 1$ ist eine einfache Nullstelle von f'' . Damit liegt an dieser Stelle ein Vorzeichenwechsel von f'' vor und $x = 1$ ist eine Wendestelle.

IV. Der Graph von f mit $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2$ besitzt einen Wendepunkt. Bestimmen Sie die Gleichung der **Wendetangente** g und zeichnen Sie die Graphen von f und g .

Lösung:

$$\text{Wendepunkt bestimmen: } f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x$$

$$0 = -3(x+1) \Rightarrow x_1 = -1$$

x_1 ist eine einfache Nullstelle von f'' und somit liegt hier ein Vorzeichenwechsel von f'' vor.

$\Rightarrow x_1$ ist eine Wendestelle von f .

$$f(-1) = -1 \Rightarrow \text{Wendepunkt } W_1(-1|-1)$$

Gleichung der Wendetangente aufstellen:

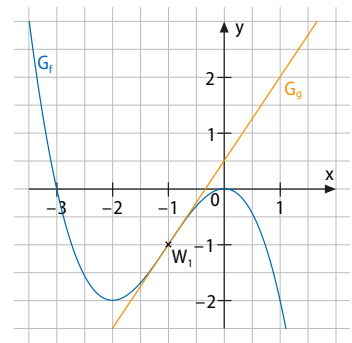
$$\text{Für die Steigung gilt: } m = f'(-1) = \frac{3}{2}$$

$$W_1 \text{ und } m \text{ eingesetzt in } y = mx + t:$$

$$-1 = \frac{3}{2}(-1) + t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Wendetangente } g: y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -3x - 3 = -3(x+1)$$



Nachgefragt

- Erklären Sie, wie viele Wendepunkte der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. (4. oder 5.) Grades höchstens besitzen kann. Folgern Sie daraus eine Regel für eine ganzrationale Funktion n -ten Grades.
- Geben Sie an, für welche Werte von $n \geq 3$ der Ursprung des Koordinatensystems Wendepunkt des Graphen der Funktion $f: x \mapsto x^n$, $D_f = \mathbb{R}$, ist, und begründen Sie.

Aufgaben

Lösungen zu 1:

I $W_1(-1|4)$; $W_2(1|-2)$

N $W(1|0)$

E $W_1(0|0)$; $W_2(1|-1)$

L $W(1|0)$

Z $W(2|\frac{2}{3})$

I $W(0|3)$

B $W(-1|36)$

- 1 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen G_f der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, und geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts bzw. der Wendepunkte von G_f an. Die Lösungen für die Wendepunkte ergeben in der Reihenfolge der Aufgaben ein Lösungswort.

1 $f(x) = x^3 + 1$

2 $f(x) = x^4 - 2x^3$

3 $f(x) = -3x^3 + 12x + 3$

4 $f(x) = 3x^3 + 9x^2 - 27x + 3$

5 $f(x) = -3x^2 + 2x + x^3$

6 $f(x) = 2 + x - 6x^2 + x^4$

7 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$



- 2 Bestimmen Sie jeweils, falls vorhanden, die Wendepunkte des Graphen der Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x)$ und prüfen Sie, ob diese auch Terrassenpunkte sind. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer DMS.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - \frac{2}{3}$

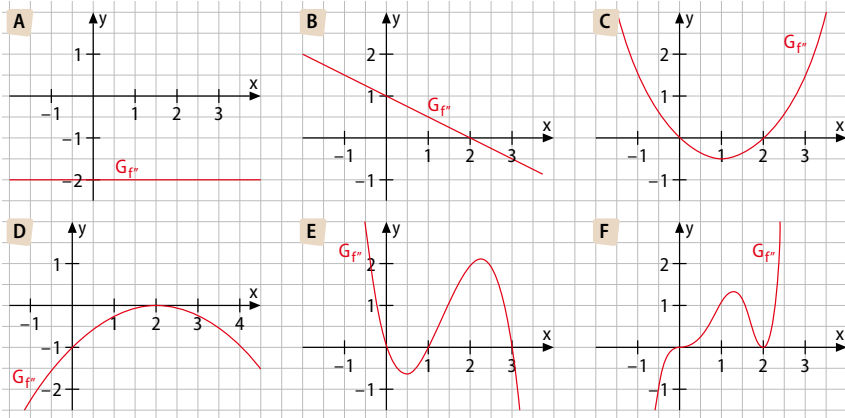
c) $f(x) = x^3 - 3x^2$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3$

e) $f(x) = x^6 - 2x^4 - 3x^2$

f) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

- 3 Die Abbildungen zeigen jeweils den Graphen der zweiten Ableitungsfunktion f'' einer Funktion f . Beschreiben Sie das Krümmungsverhalten des Graphen G_f von f und geben Sie, falls vorhanden, die Wendestelle(n) von G_f an. Die Koordinaten von benötigten Punkten können den Abbildungen entnommen werden.



- 4 Bestimmen Sie jeweils die Wendepunkte der Funktion f mit der angegebenen Funktionsgleichung und ermitteln Sie eine Gleichung der Wendetangente. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer DMS.

1 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2$

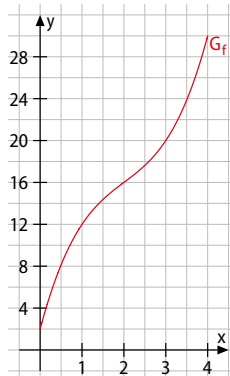
2 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

3 $f(x) = \frac{1}{10}x^6 - \frac{1}{4}x^4 - 1$

4 $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 1$

- 5 Die Funktion $f: x \mapsto x^3 - 6x^2 + 15x + 2$ beschreibt für $x \in [0; 4]$ modellhaft die Produktionskosten eines Produkts in Abhängigkeit von der hergestellten Stückzahl x (in 100 Stück; $f(x)$ in Euro). Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f .

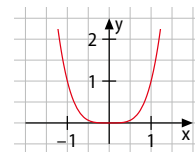
- Berechnen Sie $f(1)$ und erklären Sie den Wert im Sachzusammenhang.
- Interpretieren Sie den Verlauf von G_f im Sachkontext.
- Berechnen Sie die Wendestelle von f und erklären Sie deren Bedeutung im Sachzusammenhang.



- 6 Bestätigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über ganzrationale Funktionen.

- Jede Funktion dritten Grades hat genau eine Wendestelle.
- Jede Funktion vierten Grades hat genau zwei Wendestellen.
- Ist der Graph einer Funktion in ganz $\mathbb{R}$ linksgekrümmt, so ist er in ganz $\mathbb{R}$ monoton steigend.

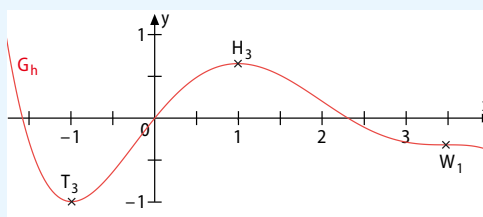
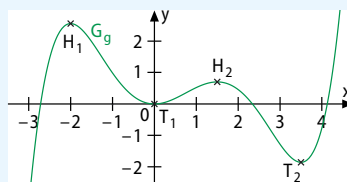
- 7 Der abgebildete Graph der Funktion f mit $f(x) = x^4$, $D_f = \mathbb{R}$, hat offenbar keinen Wendepunkt im Ursprung, obwohl $f''(0) = 0$ gilt. Erläutern Sie an diesem Beispiel, dass das Kriterium $f''(x_0) = 0$ notwendig, aber nicht hinreichend für das Vorliegen einer Wendestelle $x_0 \in D_f$ einer zweimal differenzierbaren Funktion f ist.



Entdecken

Bei den Graphen zweier Funktionen g und h sind Hochpunkte (H), Tiefpunkte (T) und ein Wendepunkt (W) markiert.

- Entscheiden Sie bei allen gekennzeichneten Punkten, ob Rechtskrümmung, Linkskrümmung oder keine Krümmung vorliegt.
- Nennen Sie die Gemeinsamkeit beim Krümmungsverhalten der Graphen in den Hochpunkten (bzw. in den Tiefpunkten).



Verstehen

Neben den bereits bekannten hinreichenden Bedingungen gibt es weitere hinreichende Bedingungen für den Nachweis von Extremstellen und Wendestellen.

Erklärvideo



Mediencode
63044-34

Extremstellen

notwendige Bedingung $f'(x_0) = 0 \dots$

- und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Bei x_0 ist ein relativer Hochpunkt von G_f .
- und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Bei x_0 ist ein relativer Tiefpunkt von G_f .
- und $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ Keine Aussage möglich. Das Vorzeichen von f' muss untersucht werden.

Wendestellen

notwendige Bedingung $f''(x_w) = 0 \dots$

- und $f'''(x_w) \neq 0 \Rightarrow$ Bei x_w ist eine Wendestelle von f .
- und $f'''(x_w) = 0 \Rightarrow$ Keine Aussage möglich. Das Vorzeichen von f'' muss untersucht werden.

Beispiele

- I. Untersuchen Sie die Funktion $f: x \mapsto \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - 1$, $D_f = \mathbb{R}$, auf Extrempunkte. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer DMS.

Lösung:

- 1 Bestimmen Sie die 1. und die 2. Ableitung:

$$f'(x) = 2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 3) = 2(x-1)(x-3); f''(x) = 4x - 8$$

- 2 Lösen Sie die Gleichung $f'(x_0) = 0$ (notwendige Bedingung):

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 3$$

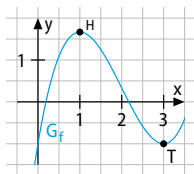
- 3 Nutzen Sie die alternative Bedingung, indem Sie x_1 und x_2 in f'' einsetzen und den Wert jeweils auf sein Vorzeichen prüfen:

$$f''(1) = 4 \cdot 1 - 8 = -4 < 0 \Rightarrow G_f \text{ hat einen Hochpunkt } H\left(1 \mid \frac{5}{3}\right).$$

$$f''(3) = 4 \cdot 3 - 8 = 4 > 0 \Rightarrow G_f \text{ hat einen Tiefpunkt } T(3 \mid -1).$$

Strategiewissen

Extrempunkte mit
alternativer Bedingung
bestimmen



II. Berechnen Sie die Wendestellen der Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - x^2$, $D_g = \mathbb{R}$.

Lösung:

notwendige Bedingung: $g'(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$; $g''(x) = x^2 + x - 2$

$$g''(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 1$$

hinreichende Bedingung: $g'''(x) = 2x + 1$ $g'''(-2) = -3 \neq 0$; $g'''(1) = 3 \neq 0$

Somit sind $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ die Wendestellen von g .

III. Untersuchen Sie die Funktion f mit $f(x) = x^4$, $D_f = \mathbb{R}$, auf Extremstellen.

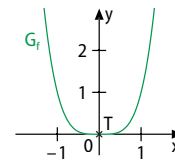
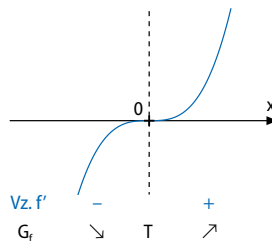
Lösung:

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

hinreichende Bedingung: $f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$

Keine Aussage möglich, also muss das Vorzeichen von f' z. B. mit einer Skizze untersucht werden.

Skizze von $G_{f'}$:



Es folgt, dass bei $x = 0$ ein Tiefpunkt von G_f vorliegt.

- Begründen Sie, dass eine ganzrationale Funktion vom Grad n höchstens $n - 1$ Extremstellen und höchstens $n - 2$ Wendestellen besitzt.
- Begründen oder widerlegen Sie: „Ist x_0 eine Nullstelle ungerader Vielfachheit der zweiten Ableitung f'' einer Funktion f , dann ist x_0 eine Wendestelle von f .“

Nachgefragt

1 Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt $P_0(x_0 | f(x_0))$ ein Extrempunkt des Graphen der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$; $x_0 = 3$ | b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 0,5$; $x_0 = -3$ |
| c) $f(x) = x^4 + x^2$; $x_0 = 0$ | d) $f(x) = x^3 - 3x^2$; $x_0 = 2$ |
| e) $f(x) = x^3 - 3x^2$; $x_0 = 3$ | f) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x$; $x_0 = 1$ |
| g) $f(x) = x^5 - x^3 + x$; $x_0 = 0$ | h) $f(x) = x^4 - x^3 + 1$; $x_0 = 0$ |

Aufgaben



2 Untersuchen Sie jeweils den Graphen G_f der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, auf Extrem- und Wendepunkte. Verwenden Sie das hinreichende Kriterium von Seite 122 für Extrempunkte. Zeichnen Sie den Graphen G_f und kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer DMS.

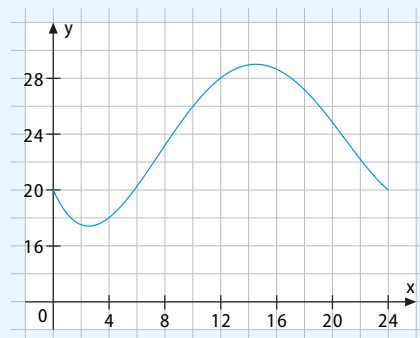
- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ | b) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$ |
| c) $f(x) = \frac{1}{8} \cdot (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1)$ | d) $f(x) = x^5 + 2x^3 + 1$ |
| e) $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - 2x^2 - 2$ | f) $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3$ |

3 a) Bei der Funktion f mit $f(x) = x^5$ sind an der Stelle $x = 0$ alle Ableitungen null bis auf die 5. Ableitung $f^{(5)}(x) = 120$. Beurteilen Sie, ob der Graph einen Wendepunkt hat.
 b) Bei einer Potenzfunktion sind alle Ableitungen an einer Stelle null bis auf eine. Formulieren Sie eine Regel, wie man erkennt, ob ein Wendepunkt vorliegt.

Entdecken

Der Temperaturverlauf an einem Sommertag in München kann näherungsweise durch die Funktion T mit dem abgebildeten Graphen beschrieben werden (y-Achse: Temperatur in Grad °C; x-Achse: Zeit in Stunden ab 0 Uhr).

- Lesen Sie aus dem Graphen ab, wann die Temperatur sinkt.
- Geben Sie einen Ansatz an, mit dem der Zeitpunkt der höchsten Temperatur bestimmt werden kann.



Verstehen

Anhand der bisher betrachteten Eigenschaften können ganzrationale Funktionen – auch in Sachzusammenhängen – näher untersucht werden.

Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion f mit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, vom Grad n ($n \geq 1$) und der Verlauf ihres Graphen G_f können mithilfe der im Folgenden aufgeführten Eigenschaften gut analysiert werden.

- 1 Symmetrie zum Koordinatensystem
- 2 Verhalten im Unendlichen
- 3 Schnittpunkt mit der y-Achse
- 4 Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen)
- 5 Extrempunkte und Monotonieverhalten
- 6 Wendepunkte und Krümmungsverhalten
- 7 Zeichnen des Graphen G_f der Funktion f

Zu den genannten Eigenschaften siehe auch Kapitel 1.4 und das Beispiel unten.

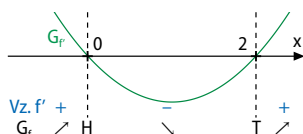
Beispiel

Untersuchen Sie die Funktion $f: x \mapsto x^3 - 3x^2$, $D_f = \mathbb{R}$, anhand ihrer Eigenschaften.

Lösung:

- 1 **Symmetrie** – überprüfen Sie, ob $f(x)$ nur gerade (nur ungerade) Exponenten von x hat: G_f ist nicht symmetrisch bezüglich des Koordinatensystems, da $f(x)$ gerade und ungerade Exponenten hat. Dabei gehört 0 zu den geraden Exponenten.
- 2 **Verhalten im Unendlichen** – untersuchen Sie den Summanden $a_n x^n$ auf sein Verhalten für betragsgroße Werte von x : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- 3 **Schnittpunkt mit der y-Achse** $S_y(0|a_0)$: $f(0) = 0 \Rightarrow S_y(0|0)$
- 4 **Schnittpunkte mit der x-Achse** – lösen Sie die Gleichung $f(x) = 0$:
 $x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 3 \Rightarrow N_1 = S_y(0|0); N_2(3|0)$
- 5 **Extrempunkte und Monotonieverhalten** – lösen Sie die Gleichung $f'(x) = 0$ und erstellen Sie eine Skizze von G_f : $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$

- 5 auch möglich:
- Monotonietabelle
 - alternatives Kriterium, vgl. Kapitel 2.2.4

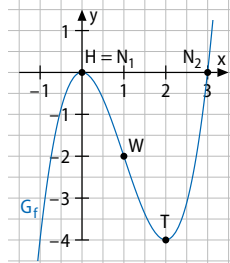


$$\begin{array}{ll} f(0) = 0 & \Rightarrow H(0|0) \\ f(2) = -4 & \Rightarrow T(2|-4) \end{array}$$

- 6 Wendepunkte und Krümmungsverhalten – lösen Sie die Gleichung $f''(x) = 0$ und erstellen Sie eine Krümmungstabelle:

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1) \Rightarrow 6(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f''(x)$	$f''(0) = -6 < 0$ –	0 VZW	$f''(2) = 6 > 0$ +
G_f	rechtsgekrümmt	W(1 -2)	linksgekrümmt



- 6 auch möglich:
 ■ Skizze von $G_{f''}$
 ■ alternatives Kriterium, vgl. Kapitel 2.2.4

- 7 Zeichnen Sie den Graphen G_f mithilfe der bisherigen Ergebnisse.

- Erklären Sie, wie sie rechnerisch nachweisen können, dass der Graph einer Funktion achsensymmetrisch zum Ursprung ist.
- Widerlegen Sie folgende Aussage: „Wenn der Graph einer ganzrationalen Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist, dann kann dieser nur einen einzigen Extrempunkt, einen Hochpunkt, besitzen.“

Nachgefragt



- 1 Untersuchen Sie jeweils die Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, anhand der Eigenschaften 1 bis 7 (vgl. oben) und zeichnen Sie den Graphen G_f . Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer DMS.

- | | | |
|-----------------------------------|---|--|
| a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$ | b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$ | c) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$ |
| d) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2$ | e) $f(x) = x^5 - 6x^4 + 9x^3$ | f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$ |
| g) $f(x) = 2x^4 + x$ | h) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2$ | i) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$ |
| j) $f(x) = -x^3 + 2x$ | k) $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$ | l) $f(x) = x^4 - x^2 - 12$ |

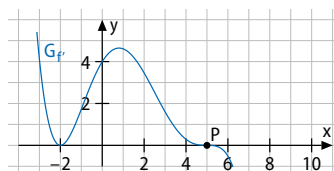
- 2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 4)$, $D_f = \mathbb{R}$, mit dem Graphen G_f .
- Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie auf Extrem- und Wendepunkte und zeichnen Sie G_f .
 - Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente im Punkt $W_1(1 | f(1))$. Zeichnen Sie die Tangente in das Koordinatensystem ein.
 - Geben Sie ohne weitere Rechnung eine Gleichung der Tangente im Punkt $W_2(-1 | f(-1))$ an und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

Aufgaben



- 3 Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f . Entscheiden und begründen Sie jeweils, ob die Aussage über die Funktion f bzw. über ihren Graphen G_f wahr oder falsch ist.

- G_f hat bei $x_0 = -2$ einen Tiefpunkt.
- G_f ist in $[0; 3]$ streng monoton steigend.
- Der Punkt $P(5 | 0)$ ist Hochpunkt von G_f .
- G_f verläuft im Schnittpunkt mit der y-Achse steiler als die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten.
- Es gilt $f(0) > f(5)$.



4 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - 3x^2$, $D_f = \mathbb{R}$.

- Berechnen Sie die Nullstellen von f und prüfen Sie G_f auf Symmetrie.
- Bestimmen Sie das Verhalten von G_f für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow \infty$.
- Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f .
- Im IV. Quadranten hat G_f einen Wendepunkt. Ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente.



5 Die Funktion f mit $f(t) = \frac{1}{2000}t^4 - \frac{1}{75}t^3 + \frac{1}{10}t^2$, $D_f = [0; 24]$, beschreibt modellhaft die seit Mitternacht gefallene Niederschlagsmenge (in $\frac{\text{L}}{\text{m}^2}$) im Verlauf eines Tages (t in Stunden).

- Zeichnen Sie den Graphen mithilfe einer DMS und erklären Sie im Sachzusammenhang, dass der Funktionsgraph keine Extrempunkte hat.
- Berechnen Sie die Stellen, an denen der Graph von f eine horizontale Tangente besitzt, und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachkontext.
- Berechnen Sie den Wert des Quotienten $\frac{f(20) - f(10)}{20 - 10}$ und erklären Sie dessen Bedeutung im Sachzusammenhang.

Prüfungsaufgabe



6 Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto 0,5(x-3)^2 \left(2x + \frac{4}{3}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$.

Geben Sie die Nullstellen der Funktion k mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an und bestimmen Sie damit ein Intervall, in dem die x -Koordinate des lokalen Hochpunkts des Graphen der Funktion k liegt.

Prüfungsaufgabe

7 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

- Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f .
- Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten aller Punkte, in denen G_f eine waagrechte Tangente besitzt.
- Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-3 \leq x \leq 1$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm
- Der Graph G_p einer quadratischen Funktion p mit $D_p = \mathbb{R}$ besitzt den Scheitelpunkt $S(-1 | -1,5)$ und schneidet den Graphen G_f in den Punkten $A(-3 | -4,5)$ und $B(1 | -4,5)$. Bestimmen Sie einen Funktionsterm von p und zeichnen Sie die zugehörige Parabel für $-3 \leq x \leq 1$ in das vorhandene Koordinatensystem ein.
[Mögliches Teilergebnis: $p(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$]

Prüfungsaufgabe

8 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$, $D_f = \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente G_g an G_f im Punkt $P(0 | 2)$.
- Zeigen Sie, dass in keinem Punkt des Graphen G_f eine Tangente mit der Steigung $m = -2$ angelegt werden kann.

Prüfungsaufgabe



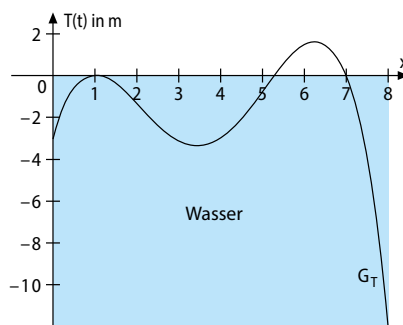
9 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_g = [-3; 3]$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

- Untersuchen Sie den Graphen der Funktion g auf Symmetrie zum Koordinatensystem.
- Ermitteln Sie alle Extremstellen der Funktion g .

- 10** Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{8}x^4 + 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.
- Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f .
 - Berechnen Sie die Wendestellen des Graphen von f .
 - Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto -4x - 2$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gerade G_g Tangente an den Graphen G_f an der Stelle $x = -2$ ist.
 - Zeichnen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-4 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

Prüfungsaufgabe

- 11** Das Auf- und Abtauchverhalten eines Delfins im Meer wird mittels eines an ihm angebrachten Sensors untersucht. Die momentane Höhe des Sensors in Metern bezogen auf die Wasseroberfläche in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden lässt sich annähernd durch die Funktionswerte der Funktion T beschreiben. Der Graph der Funktion T wird mit G_T bezeichnet und ist im Zeitraum von 0 bis 8 Sekunden im nebenstehenden Koordinatensystem abgebildet. Die Funktion T ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades und zum Zeitpunkt $t_1 = 1$ befindet sich der Delfin an der Wasseroberfläche.



Prüfungsaufgabe

- Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.
- Beschreiben Sie anhand des Funktionsgraphen G_T den Bewegungsablauf des Delfins im Bereich von $t \approx 5,3$ bis $t = 7$ und erläutern Sie, ob für die Funktion T das Intervall $[0; \infty[$ für den beschriebenen Sachverhalt eine sinnvolle Definitionsmenge ist.
 - Der Leitkoeffizient im Funktionsterm von T ist gegeben durch $a = -\frac{1}{12}$. Zudem ist bekannt, dass G_T den Schnittpunkt $S\left(0 \mid -\frac{28}{9}\right)$ mit der Ordinatenachse besitzt. Die zwei ganzzahligen Nullstellen von T können der Zeichnung entnommen werden. Berechnen Sie den exakten Wert der fehlenden Nullstelle von T .

Die Funktion T ist gegeben durch die Funktionsgleichung

$$T(t) = \frac{1}{12} \left(t^4 - \frac{43}{3}t^3 + 63t^2 - 87t + \frac{112}{3} \right) \text{ mit der Definitionsmenge } D_T = [0; 8].$$

Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.

- Bestimmen Sie die Art und Lage der Extrempunkte von G_T . Der Rand der Definitionsmenge muss bei der Untersuchung der Extrema nicht beachtet werden. Geben Sie anschließend die Intervalle an, in denen der Delfin aufsteigt.
- Berechnen Sie die Steigung an der Stelle $t = 2$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.



Prüfungsaufgabe

- 12 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{100}x(x-10)^2(x-24)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.
- Geben Sie die Nullstellen der Funktion f mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an.
 - Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich der Funktionsterm $f(x)$ auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{100}(x^4 - 44x^3 + 580x^2 - 2400x)$ darstellen lässt.
 - Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f .
[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = -\frac{1}{25}(x-3)(x-10)(x-20)$]
 - Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $0 \leq x \leq 24$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab.
 - Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle von G_f .
 - Berechnen Sie die Gleichung der Tangente von G_f an der Stelle $x = 5$.

Prüfungsaufgabe

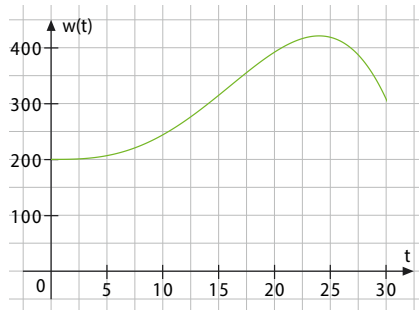


- 13 Ein Teilstück einer Langlaufloipe verläuft von oben betrachtet geradlinig und hat im Querschnitt das abgebildete Profil, welches annähernd durch den Graphen der Funktion $f: x \mapsto 8\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 18x + 100\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = [0; 7,5]$ beschrieben werden kann. Die x -Achse gibt die Länge in waagrechter Richtung an, auf der y -Achse ist die Höhe über dem Meeresspiegel aufgetragen. Die Koordinaten x und y stellen Längenangaben in der Einheit Kilometer bzw. Meter dar.
-
- Ermitteln Sie die maximalen Teilintervalle von D_f , in denen die Loipe auf- bzw. abwärts verläuft.
 - Berechnen Sie unter Verwendung von Teilaufgabe a), in welcher horizontalen Entfernung vom Beginn des Teilstückes der Loipe die Spitze des ersten Hügels erreicht wird. Geben Sie an, in welcher Höhe sich die Sporttreibenden dann befinden.
 - Berechnen Sie die Lage der Wendestelle des Graphen von f .
 - Bestimmen Sie die durchschnittliche Steigung der Loipe in Prozent auf den ersten drei Kilometern.
 - Die Steigung der Loipe bei Kilometer 2 tritt im weiteren Verlauf der Loipe noch einmal auf. Berechnen Sie die Stelle, an der dies der Fall ist.



- 14 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{4}(2x-2)^2(4-x)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
- Geben Sie die Nullstellen der Funktion f mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an.
 - Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $f'(x) > 0$ und erklären Sie die Bedeutung der Lösungsmenge für den Graphen von f .
 - Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussage: „Der Graph der zweiten Ableitung von f ist eine fallende Gerade.“

- 15** Das Landesamt für Umwelt ist unter anderem dafür zuständig, vor Überflutungen durch Flüsse zu warnen und lässt dazu täglich kontinuierlich die Wasserstände diverser Flüsse überprüfen. Der Wasserstand eines bestimmten Flusses im März des Jahres 2010 kann vereinfacht durch die Funktion w mit der Funktionsgleichung $w(t) = at^4 + \frac{8}{125}t^3 + c$ mit geeigneten Werten $a, c \in \mathbb{R}$ und der Definitionsmenge


Prüfungsaufgabe

$D_w = [0; 30]$ beschrieben werden. Dabei bedeutet die Variable t die Zeit in Tagen ab Monatsbeginn zum Zeitpunkt $t_0 = 0$. Der Funktionswert $w(t)$ gibt den Wasserstand des Flusses in cm an. Zu Monatsbeginn lag der Wasserstand bei 200 cm und am Monatsende bei 308 cm. Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse – falls nicht anders gefordert – sinnvoll.

- Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und c und damit die zugehörige Funktionsgleichung von w .
[Mögliches Ergebnis $w(t) = -\frac{1}{500}(t^4 - 32t^3 - 100\,000)$]
- Berechnen Sie den höchsten Pegel im Beobachtungszeitraum zentimetergenau.
- Ermitteln Sie den Wert $\frac{w(20) - w(0)}{20 - 0}$ und interpretieren Sie diesen im Sachzusammenhang.

- 16** Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{9}(-x^4 + 4x^3)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

- Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f mit der jeweiligen Vielfachheit.
- Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie Art und Koordinaten des Extrempunktes des Graphen G_f .
- Bestimmen Sie die Gleichungen aller Wendetangenten an den Graphen G_f .
- Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse im Bereich $-1 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm.

Prüfungsaufgabe

- 17** Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{5}(x^4 - 8x^3 + 18x^2)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph wird mit G_f bezeichnet.

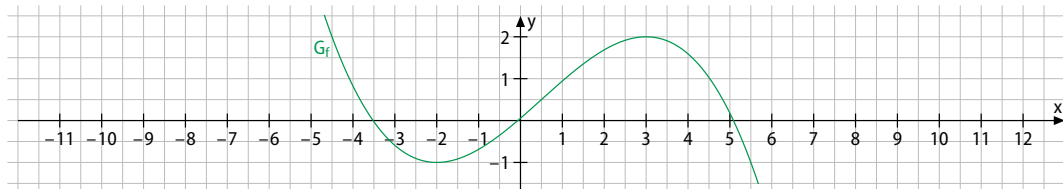
- Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von G_f bezüglich des Koordinatensystems und das Verhalten für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$.
- Zeigen Sie, dass die Funktion f genau eine Nullstelle besitzt und geben Sie diese samt Vielfachheit an.
- Begründen Sie mithilfe der Ergebnisse aus a) und b), dass an der Stelle $x = 0$ ein relatives Minimum vorliegt.
- Zeigen Sie, dass bei $x = 1$ und $x = 3$ Wendestellen liegen, und bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte. Bestimmen Sie, welcher Punkt ein Terrassenpunkt ist.
- Die Wendepunkte aus Teilaufgabe d) legen die Gerade G_g fest. Ermitteln Sie deren Gleichung.
- Zeichnen Sie die Graphen G_f und G_g unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse im Bereich $-1 \leq x \leq 4,5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm.

Prüfungsaufgabe

2

Trainingsrunde: differenziert

- Zu 2.1.1 1** Gegeben ist die ganzrationale Funktion f durch ihren Funktionsgraphen G_f . Benötigte Werte lesen Sie so genau wie möglich aus dem Funktionsgraphen ab.



Berechnen Sie jeweils die mittlere Steigung im angegebenen Intervall.

- 1 $[-2; 3]$ 2 $[-1; 1]$ 3 $[3; 4,5]$

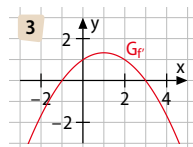
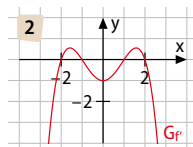
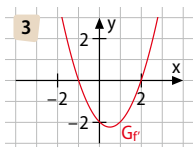
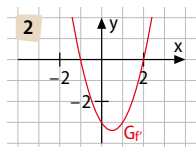
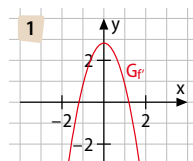
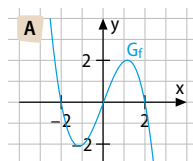
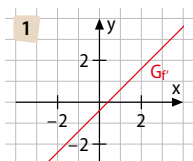
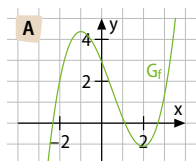
Berechnen Sie die mittlere Steigung zwischen Tiefpunkt und Hochpunkt. Untersuchen Sie, ob es Intervalle gibt, in denen die mittlere Steigung größer ist.

- Zu 2.1.2 2** Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 0,2x^2 - 1$, $D_f = \mathbb{R}$.

Zeigen Sie unter Verwendung des Differenzialquotienten in der Form $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, dass der Graph G_f der Funktion f bei $x_0 = 2$ die Steigung $m = 0,8$ hat.

Berechnen Sie die Steigung des Graphen G_f der Funktion f im Punkt $P(1 | y_P)$.

- Zu 2.1.3 3** Ordnen Sie dem Graphen **A** einer Funktion f den Graphen **1**, **2** oder **3** ihrer Ableitungsfunktion f' zu.



- Zu 2.1.4 4** Bestimmen Sie, falls vorhanden, die Koordinaten der Punkte, an denen die lokale Änderungsrate der Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x)$ den Wert m hat. Für alle Funktionen gilt $D_f = \mathbb{R}$ und ggf. $a \in \mathbb{R}$.

- a) $f(x) = -0,5x^2 + 2$; $m = -2$
 b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4$; $m = 8$
 c) $f(x) = 2x + 1$; $m = 1$

- a) $f(x) = \frac{1}{2}(2x + 4)^2 + 2$; $m = -4$
 b) $f(x) = 5(2 - x)(-2 - x)$; $m = 20$
 c) $f_a(x) = 4ax^2 + 2ax + x - a$; $m = 1$

- Zu 2.1.5 5** Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{11}{5}x^2 + 6x + \frac{53}{5}$, $D_f = \mathbb{R}$, mit ihrem Graphen G_f .

- a) Stellen Sie die Gleichung der Tangente t an G_f bei $x = -4$ auf.
 b) Überprüfen Sie, ob die Gerade mit der Gleichung $y = -0,5x + 4,8$ bei $x = -1$ Tangente an G_f ist.

- a) Stellen Sie die Gleichung der Tangente t an G_f bei $x = -4$ auf und überprüfen Sie, ob t mit f weitere Punkte gemeinsam hat.
 b) Überprüfen Sie, ob die Gerade mit der Gleichung $g(x) = -0,4x + 5$ eine Tangente an G_f ist.

Zu 2.2.1 6 Ermitteln Sie jeweils die Intervalle, in denen der Graph G_f der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, streng monoton steigt, und die Intervalle, in denen G_f streng monoton fällt. Geben Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f an.

a) $f(x) = 4x^2$
c) $f(x) = x^3 - 4x$

b) $f(x) = -x^2 - 2x - 3$
d) $f(x) = -x^4 + 2x^3$

a) $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3x$
c) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = 4x^4 - 4x$
d) $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2$

Zu 2.2.2 7 Bestimmen Sie jeweils die Extrempunkte des Graphen der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit einer DMS.



a) $f(x) = 0,5x^3 - 3x$
c) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

b) $f(x) = x^3 - 6x + 2$
d) $f(x) = 4x^5 - 2x^4$

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$
c) $f(x) = (x^2 - 1)^2$

b) $f(x) = x^2(x^2 - 2)$
d) $f(x) = x^5 + \frac{4}{3}x^3 + 4x$

8 Die Wassermenge (in Mio. Liter) in einem Regenrückhaltebecken lässt sich mithilfe der Funktion $f: t \mapsto -0,05t^3 + 1,5t^2 - 7,65t + 15$, $D_f = [0; 20]$, beschreiben (t : Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn).

- a) Berechnen Sie die Wassermenge im Becken zu Beobachtungsbeginn.
b) Bestimmen Sie die geringste Wassermenge im Becken im betrachteten Zeitraum.

- a) Berechnen Sie die Wassermenge im Becken zum Ende des Beobachtungszeitraums.
b) Bestimmen Sie die größte Wassermenge im Becken im betrachteten Zeitraum.

9 Gegeben ist jeweils der Term der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$. Begründen Sie, dass der Graph von f Punkte mit waagrechter Tangente besitzt, die keine Extrempunkte sind.

$f'(x) = (x - 4)^2$

$f'(x) = x^4 - x^2$

Zu 2.2.3 10 Untersuchen Sie jeweils den Graphen der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, auf Wendepunkte. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit einer DMS.



a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$
c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

b) $f(x) = x^4 - x^2$
d) $f(x) = x^5$

a) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2$
c) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3x^3} + 2x^2$

b) $f(x) = x^4 + x^2 + x$
d) $f(x) = x^5 - x^3$

Zu 2.2.4 11 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$. Untersuchen Sie jeweils den Graphen von f auf Wendepunkte und bestimmen Sie jeweils eine Gleichung jeder Wendetangente.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 8$
b) $f(x) = x^4 - 24x^2 + 4$
c) $f(x) = 0,25x^3 + 1,5x^2 + 2$

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 8$
b) $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^4$
c) $f(x) = 0,2x^5 - 0,5x^3$

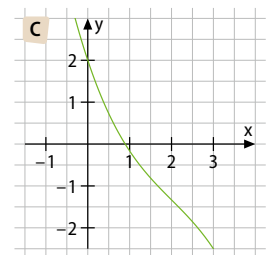
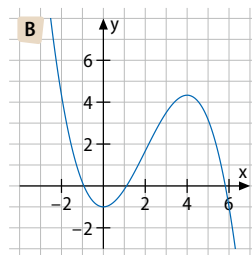
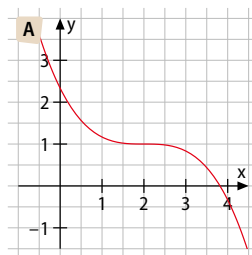
Zu 2.2.5 12 Untersuchen Sie jeweils den Graphen G_f der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, auf Symmetrie zum Koordinatensystem, auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte und zeichnen Sie G_f . Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer DMS.



a) $f(x) = x^2 - 6x + 12$
b) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$
c) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 4$

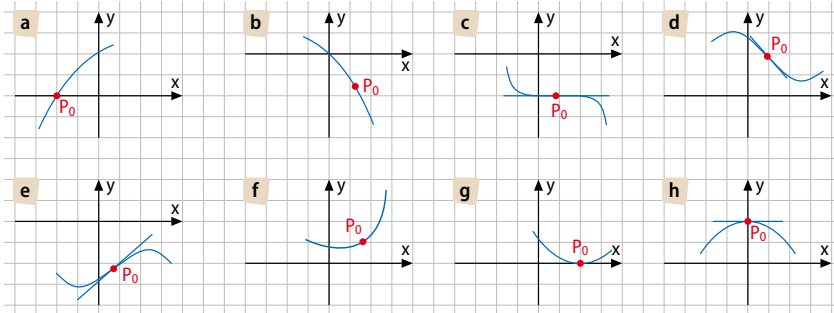
a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$
b) $f(x) = \frac{x}{4}(4x^2 - 12x + 9)$
c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^2 - 2$

- 13** Stellen Sie jeweils eine Gleichung der Sekante an den Graphen der Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x)$ durch die Punkte $P(-1|f(-1))$ und $Q(2|f(2))$ auf.
- a) $f(x) = -x^2 + 2x - 4$ b) $f(x) = -0,5x^3 + 2,5x^2 - 4x + 0,5$
- 14** Stellen Sie jeweils eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle x_0 auf.
- a) $f(x) = 0,5x^2 + 2x - 3; x_0 = 0$ b) $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2 + 3; x_0 = 4$
- c) $f(x) = 2x(x+1)^2; x_0 = 0,5$ d) $f(x) = 2x^4 - x^2; x_0 = 1$
- 15** Ein Backofen wird auf 160°C eingestellt und beginnt mit dem Aufheizen. Die Temperatur während des Aufheizens wird durch die Funktion T mit $T(t) = -0,16t^3 + 2,9t^2 + 21$ beschrieben. Dabei gilt $t \geq 0$. Die Temperatur wird in $^\circ\text{C}$ gemessen, die Zeit t in Minuten seit dem Beginn des Aufheizvorgangs.
- a) Bestimmen Sie die Zimmertemperatur und untersuchen Sie, ob der Ofen nach 11 Minuten die gewünschte Temperatur erreicht hat.
- b) Berechnen Sie die mittlere Steigung der Funktion T im Intervall $[0; 11]$ und interpretieren Sie den berechneten Wert im Sachzusammenhang.
- c) Berechnen Sie $T'(11)$ und entscheiden Sie, ob der Aufheizvorgang schon beendet ist.
- d) Bestimmen Sie das Maximum der Funktion T und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für T an.
- 16** Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 1$, $D_f = \mathbb{R}$, und $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 3x + 2$, $D_g = \mathbb{R}$. Ihre Graphen werden mit G_f und G_g bezeichnet.
- a) Zeigen Sie, dass die zweite Ableitung beider Funktionen übereinstimmt. Erklären Sie, was dies für den Verlauf der Graphen von f und g bedeutet.
- b) Die ersten Ableitungen f' und g' der beiden Funktionen sind nicht identisch. Skizzieren Sie die Graphen von f' und g' . Geben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede dieser Graphen an.
- c) Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen G_f und welcher G_g ist. Der Graph, den Sie nicht ausgewählt haben, gehört zu einer Funktion h . Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion h' .

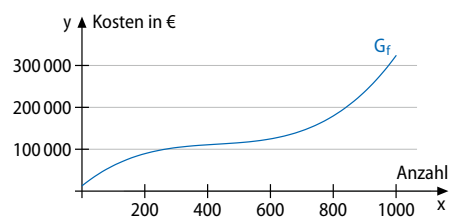


- 17** Untersuchen Sie jeweils die Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, bzw. ihren Graphen G_f auf Symmetrie zum Koordinatensystem, Verhalten für $|x| \rightarrow \infty$, Nullstellen, Extrem- und Wendestellen. Zeichnen Sie den Graphen G_f .
- a) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$ b) $f(x) = 3x^3 + 3$ c) $f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 20$
- d) $f(x) = \frac{x^3}{16} \cdot (x+4)$ e) $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{3}$ f) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$

- 18** Die Abbildungen zeigen jeweils einen Teil des Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades ($D_f = \mathbb{R}$) sowie ggf. eine Tangente im Extrem- oder Wendepunkt von G_f . Ein Punkt $P_0(x_0 | f(x_0))$ des Graphen G_f ist markiert. Geben Sie jeweils an, ob der Wert der Funktion f (bzw. f', f'') an der Stelle x_0 kleiner, größer oder gleich null ist.

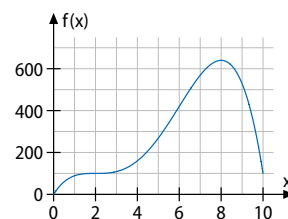


- 19** Eine Firma stellt Monitore für Notebooks her. Die bei der Herstellung von x Monitoren entstehenden Kosten (in €) werden durch die Funktion f mit $f(x) = 0,001x^3 - 1,29x^2 + 600x + 12\,000$, $x > 0$, beschrieben. Die Monitore werden zu einem Preis von je 300 € zur Weiterverarbeitung abgegeben; der dabei erzielte Gewinn (in €) wird durch eine Funktion g beschrieben.



- Untersuchen Sie den Graphen von f rechnerisch auf Monotonie und Extrempunkte. Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts.
- Zeigen Sie, dass für g gilt: $g(x) = -0,001x^3 + 1,29x^2 - 300x - 12\,000$.
- Berechnen Sie $g(300)$ und $g(500)$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.
- Bestimmen Sie den Gewinn bzw. Verlust pro Monitor, wenn 500 Stück produziert werden.
- Ermitteln Sie die Extrempunkte des Graphen der Funktion g . Interpretieren Sie den Graphen von g hinsichtlich Gewinn und Verlust und geben Sie den maximalen Gewinn an.

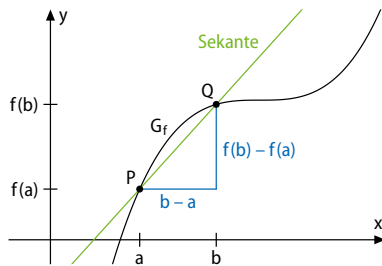
- 20** Das Höhenprofil einer Bergtour lässt sich annähernd durch die Funktion $f: x \mapsto -\frac{5}{4}x^4 + 20x^3 - 90x^2 + 160x$ mit $x \in [0; 10]$ beschreiben. Dabei entspricht x dem horizontalen Abstand in km vom Ausgangspunkt bei $x = 0$. $f(x)$ ist die Höhe in Metern im Vergleich zum Ausgangspunkt. Die Abbildung zeigt den Graphen von f .



- Die untere Alm steht an einer Stelle, an der der Berg weder steigt noch fällt. Berechnen Sie, auf welcher Höhe gegenüber der Ausgangslage diese Alm liegt.
- Bestimmen Sie rechnerisch, wie viele Höhenmeter vom Start bis zum Gipfelkreuz überwunden werden müssen.
- Berechne Sie $f'(4)$ und erklären Sie den Wert im Sachzusammenhang.
- Die durchschnittliche Steigung zwischen $x \approx 6,5$ und $x \approx 9,1$ ist ungefähr 0 m je Kilometer. Ein Wanderer folgert: „In diesem Bereich ist der Berg also nahezu eben.“ Erklären Sie, warum die Aussage des Wanderers falsch ist.

Differenzenquotient – Sekantensteigung

Sind $P(a|f(a))$ und $Q(b|f(b))$ zwei Punkte des Graphen G_f einer Funktion f , die im Intervall $[a; b]$ definiert ist, so heißt die Gerade PQ **Sekante** von G_f durch P und Q .

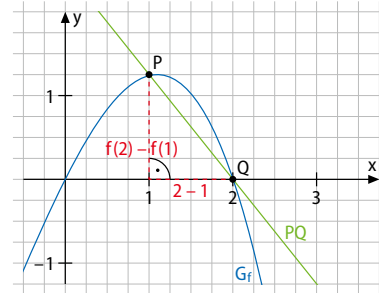


Für die **Sekantensteigung** gilt: $m_{PQ} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Dieser Quotient heißt **Differenzenquotient** von f im Intervall $[a; b]$.

Er beschreibt die **mittlere (durchschnittliche) Änderungsrate** der Funktion f im Intervall $[a; b]$.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$, $D_f = \mathbb{R}$, sowie die Punkte $P(1|f(1))$ und $Q(2|f(2))$ des Graphen G_f von f . Es gilt: $f(1) = \frac{5}{4} = 1,25$; $f(2) = 0$.



Sekantensteigung:

$$m_{PQ} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{0 - 1,25}{1} = -1,25$$

m_{PQ} ist die mittlere Steigung von G_f im Intervall $[1; 2]$.

Differentialquotient – Tangentensteigung

Eine auf einem Intervall $I =]a; b[$ definierte Funktion f heißt an der Stelle $x_0 \in I$ **differenzierbar**, wenn der Grenzwert des

Differenzenquotienten $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \neq x_0$, existiert.

Das bedeutet insbesondere, dass sich bei rechtsseitiger und bei linksseitiger Annäherung an die Stelle x_0 der gleiche Grenzwert ergibt.

Dieser Grenzwert heißt **Differentialquotient** oder **Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0 :

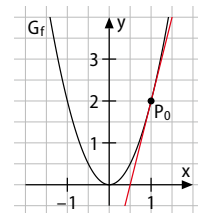
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- $f'(x_0)$ gibt die **Steigung der Tangente** t_{P_0} an den Graphen G_f im Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$ an. Diese wird auch als Steigung des Graphen G_f im Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$ bezeichnet.
- Beschreibt f eine mit x veränderliche Größe, so gibt $f'(x_0)$ deren **lokale (momentane) Änderungsrate** an der Stelle x_0 an.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^2$, $D_f = \mathbb{R}$, sowie der Punkt $P_0(1|f(1))$ des Graphen von f .

Ableitung an der Stelle $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} 2(x + 1) = 2 \cdot 2 = 4 \end{aligned}$$



Dies gilt sowohl bei rechtsseitiger als auch bei linksseitiger Annäherung. Also hat die Tangente t_{P_0} und der Graph von f im Punkt P_0 die Steigung $m_{t_{P_0}} = f'(1) = 4$.

Für $x \geq 0$ beschreibt die Funktion f den Zeit-Weg-Zusammenhang eines Autos beim Anfahren (x : Zeit in Sekunden; $f(x)$: zurückgelegter Weg in Metern).

Dann ist $f'(1)$ die momentane Änderungsrate der Zeit-Weg-Funktion, d. h. die Momentangeschwindigkeit des Autos beträgt 1 s nach dem Start $4 \frac{m}{s}$.

Ableitungsfunktion

Die Ableitungsfunktion f' einer Funktion $f: x \mapsto f(x)$ mit maximaler Definitionsmenge D_f ordnet jeder Stelle $x \in D_f$ ihre Ableitung zu, falls f dort differenzierbar ist.

Die Ableitungsfunktion f' gibt damit an jeder Stelle $x \in D_f$ die Steigung der Tangente bzw. die lokale Änderungsrate der Funktion f an.

$$f'(3) = -2:$$

Der Graph der Funktion f hat bei $x = 3$ eine Tangente mit der Steigung -2 .

oder kurz:

Der Graph der Funktion f hat bei $x = 3$ die Steigung -2 .

Ableitungsregeln

- **Potenzregel:** Eine Funktion f mit $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $D_f = \mathbb{R}$, ist differenzierbar, und es gilt $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Sind u und v differenzierbare Funktionen, dann gilt:

- **Summenregel:**

$$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

- **Faktorregel:**

$$f(x) = c \cdot u(x), c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

Ist $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, so gilt $f'(x) = 0$.

$$f(x) = x^{12} \Rightarrow f'(x) = 12 \cdot x^{11}$$

$$f(x) = x^3 + x^5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 5x^4$$

$$f(x) = 4 \cdot x^3 \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$$

$$f(x) = -4 \Rightarrow f'(x) = 0$$

Gleichung der Tangente

Die Gleichung der Tangente an den Graphen einer Funktion f im Punkt $P_0(x_0 | f(x_0))$ ermittelt man über den Ansatz einer Geradengleichung mit $m = f'(x_0)$, also

$$t_{P_0}: y = f'(x_0) \cdot x + t.$$

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -x^2 + 8x - 10$, $D_f = \mathbb{R}$, und der Punkt $P_0(3 | 5)$ des Graphen von f .

Ableitung: $f'(x) = -2x + 8$; $m = f'(3) = 2$

Tangentengleichung: $t_{P_0}: y = 2x + t$

Einsetzen von $P_0(3 | 5)$: $5 = 2 \cdot 3 + t \Rightarrow t = -1$

Tangentengleichung: $t_{P_0}: y = 2x - 1$

Monotonie

Der Graph G_f einer Funktion f heißt in einer Teilmenge I der Definitionsmenge von f ...

- **streng monoton steigend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$.
- **streng monoton fallend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$.

Monotoniesatz: Ist die Funktion f im Intervall I differenzierbar, so ist der Graph G_f ...

- **streng monoton steigend** in I , wenn für alle $x \in I$ gilt: $f'(x) > 0$.
- **streng monoton fallend** in I , wenn für alle $x \in I$ gilt: $f'(x) < 0$.

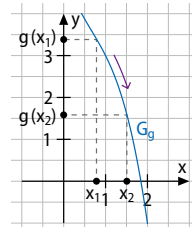
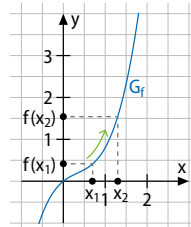
Die Umkehrung des Monotoniesatzes gilt nicht.

Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto x^3 + x$ und

$g: x \mapsto -2x^3 - x$, $D_f = D_g = \mathbb{R}$.

Es gilt: $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ und $g'(x) = -6x^2 - 1 < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Daher ist der **Graph von f streng monoton steigend** und der **Graph von g streng monoton fallend** in $\mathbb{R}$.



Extrempunkte

Ist die Funktion f in einem offenen Intervall I aus ihrer Definitionsmenge differenzierbar und ist $x_0 \in I$, dann gilt:

Notwendige Bedingung: Wenn $f'(x_0) = 0$ gilt, dann besitzt G_f an der Stelle x_0 eine waagrechte Tangente. Nur unter dieser Bedingung kann eine Extremstelle vorliegen.

Hinreichende Bedingung: Wenn $f'(x_0) = 0$ gilt und gleichzeitig f' an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von ...

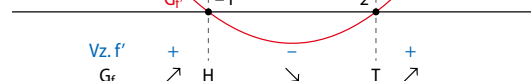
- **positiven zu negativen** Werten hat, dann ist $f(x_0)$ ein **lokales Maximum** und G_f besitzt einen **Hochpunkt $H(x_0 | f(x_0))$** .
- **negativen zu positiven** Werten hat, dann ist $f(x_0)$ ein **lokales Minimum** und G_f besitzt einen **Tiefpunkt $T(x_0 | f(x_0))$** .

$f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$, $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = x^2 - x - 2$

Notwendiges Kriterium: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 2$

Hinreichendes Kriterium – Vorzeichenskizze



Alternatives hinreichendes Kriterium – Monotonietabelle

x	$x < -1$	$x_1 = -1$	$-1 < x < 2$	$x_2 = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	$f'(-2) = 4 > 0$ +	0 VZW von + nach -	$f'(0) = -2 < 0$ -	0 VZW von - nach +	$f'(3) = 4 > 0$ +
G_f	$\nearrow$	$H\left(-1 \mid \frac{7}{6}\right)$	$\searrow$	$T\left(2 \mid -\frac{10}{3}\right)$	$\nearrow$

Krümmungsverhalten und Wendepunkte

Ist f eine in einem offenen Intervall I differenzierbare Funktion, so heißt ihr Graph G_f **rechtsgekrümmt** (**linksgekrümmt**) in I , wenn im Intervall I die Ableitungsfunktion f' streng monoton abnehmend (streng monoton zunehmend) ist.

Ist f im Intervall I zweimal differenzierbar, so ist der Graph G_f **rechtsgekrümmt** (**linksgekrümmt**), wenn für die zweite Ableitung $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) für alle $x \in I$ gilt.

In einem **Wendepunkt** des Graphen G_f ändert sich die Art der Krümmung von G_f .

Für eine zweimal differenzierbare Funktion f gilt für eine Wendestelle x_0 :

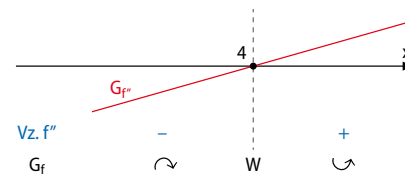
- **Notwendiges Kriterium:** $f''(x_0) = 0$
- **Hinreichendes Kriterium:** $f''(x_0) = 0$ und gleichzeitig Vorzeichenwechsel von f'' an der Stelle x_0 .

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$, $D_f = \mathbb{R}$.

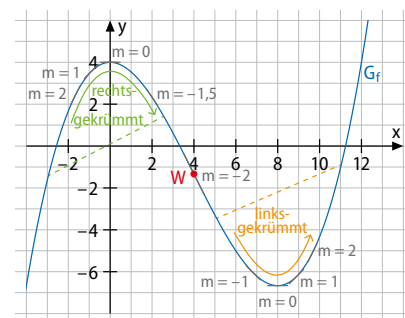
Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{8}x^2 - x$

$$f''(x) = \frac{1}{4}x - 1$$

Notwendige Bedingung: $f''(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 4$



$$W\left(4 \mid -\frac{4}{3}\right)$$



Weitere Kriterien für Extrem- und Wendestellen

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f'(x_0) = 0$

2. hinreichende Bedingung für Extremstellen:

- $f'(x_0) = 0$ und gleichzeitig $f''(x_0) < 0$:
 G_f hat einen **Hochpunkt** $H(x_0 \mid f(x_0))$
- $f'(x) = 0$ und gleichzeitig $f''(x_0) > 0$:
 G_f hat einen **Tiefpunkt** $T(x_0 \mid f(x_0))$

Notwendige Bedingung für Wendestellen:
 $f''(x_0) = 0$

2. hinreichende Bedingung für Wendestellen:

- $f''(x_0) = 0$ und gleichzeitig $f'''(x_0) \neq 0$
 G_f hat ein Wendestelle bei x_0 .
- Gilt $f''(x_0) = 0$ und gleichzeitig $f'''(x_0) = 0$,
muss das Vorzeichen von f'' extra untersucht werden.

Ebenso gilt: Ist x_0 eine Nullstelle ungerader Vielfachheit der zweiten Ableitung f'' , dann ist x_0 eine Wendestelle von f .

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2$, $D_f = \mathbb{R}$.

Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x = \frac{1}{2}x(x-2)$; $f''(x) = x - 1$

Extremstellen – notwendige Bedingung:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$

Hinreichende Bedingung:

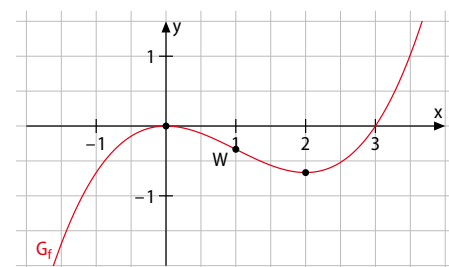
$$f''(0) = -1 < 0 \Rightarrow G_f \text{ hat einen Hochpunkt } H(0 \mid 0).$$

$$f''(2) = 1 > 0 \Rightarrow G_f \text{ hat einen Tiefpunkt } T\left(2 \mid -\frac{2}{3}\right).$$

Wendestelle:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 1; x_0 \text{ ist einfache Nullstelle von } f'' \text{ (hinreichende Bedingung).}$$

$$G_f \text{ hat den Wendepunkt } W\left(1 \mid -\frac{1}{3}\right).$$



Aufgaben zur Einzelarbeit



Das kann ich!



Das kann ich fast!



Das kann ich noch nicht!

Überprüfen Sie Ihre Fähigkeiten und Kompetenzen. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Aufgaben und bewerten Sie Ihre Lösungen mit einem Smiley.

- 1 Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 1$, $D_f = \mathbb{R}$, jeweils den Differenzenquotienten in den Intervallen $I_1 = [-1; 1]$, $I_2 = [0; 1]$, $I_3 = [0; 2]$ und $I_4 = [-1; 2]$. Veranschaulichen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe des Graphen von f .

- 2 Bilden Sie jeweils die Ableitung der Funktion mit dem gegebenen Funktionsterm.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^8 + 3$ b) $p(x) = (2 - x)^2$
 c) $f(x) = (x + 2) \cdot (-3)$ d) $f(x) = (x + 2) \cdot x^2$
 e) $V(r) = \pi r^3 - 4r^2$ f) $f_t(x) = 2tx^4 - 4x + 2t^2$

- 3 Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(-2 | f(-2))$.

a) $f(x) = -x^2$ b) $f(x) = 0,25x^4 - x + 3$

- 4 Bestimmen Sie die Punkte, in denen der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x + 1$ eine waagrechte Tangente besitzt.

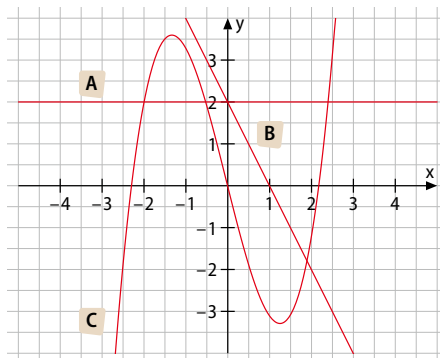
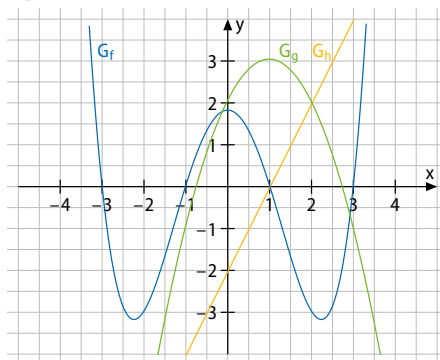


- 5 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f mit $f(x) = 0,5x^3 - 2x - 1$, $D_f = \mathbb{R}$, zwei Punkte besitzt, in denen seine Tangente parallel zur Geraden g mit $g(x) = 4x + 1$ verläuft. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer DMS.

- 6 Die Funktion $N(t)$ beschreibt die Anzahl von Heuschrecken in einem Schwarm im Zeitraum $[0; 18]$. Dabei ist N die Anzahl der Heuschrecken in Millionen und t die Zeit seit der Schwarmbildung in Monaten.

- a) Es gilt $N(6) = 483$ und $N'(6) = 170,3$. Deuten Sie die Werte im Sachzusammenhang.
 b) Nach neun Monaten umfasst der Schwarm mit 843,5 Millionen gerade am meisten Tiere. Geben Sie zwei passende Gleichungen an.

- 7 Ordnen Sie den Graphen der Funktionen f , g und h jeweils den zugehörigen Graphen **A**, **B** oder **C** der Ableitungsfunktion begründet zu.



- 8 Die Funktion f mit $f(t) = 10t - 1,25t^2$ beschreibt im Intervall $[0; T]$ den Zeit-Weg-Zusammenhang des Bremsvorgangs eines Autos (t : Zeit seit Beginn des Bremsens in Sekunden; $f(t)$: zurückgelegte Strecke in Metern). Zum Zeitpunkt T ist das Auto gerade zum Stillstand gekommen.

- a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der das Auto zu Beginn des Bremsvorgangs fuhr.
 b) Bestimmen Sie T und begründen Sie Ihr Vorgehen mithilfe des Graphen von f .

- 9 Skizzieren Sie den Graphen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, deren Ableitungsfunktion keine Nullstellen besitzt. Begründen Sie, dass dies mit einer Funktion vierten Grades nicht möglich ist.

- 10 Bestimmen Sie jeweils die maximalen Monotonieintervalle und die Art und Lage der Extrempunkte der Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$.

a) $f(x) = x^3 - 3,75x^2 + 3x$
 b) $f(x) = 2x^2(x^2 - 4)$

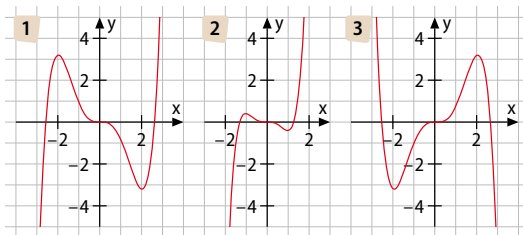
- 11 Begründen oder widerlegen Sie.

- a) Der Graph einer nichtlinearen ganzrationalen Funktion hat mindestens einen Extrempunkt.
 b) Der Graph einer ganzrationalen Funktion mit zwei Nullstellen besitzt einen Extrempunkt.

- 12 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{3}{20}x^5 - x^3$, $D_f = \mathbb{R}$; ihr Graph ist G_f .



- a) Zeigen Sie, dass f' nur die Nullstellen $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$ besitzt, und erstellen Sie eine Monotonietabelle für die Funktion f oder eine Skizze von G_f .
 b) Eine der drei Abbildungen stellt G_f richtig dar. Geben Sie an, welche dies ist, und begründen Sie bei jedem der übrigen Graphen, warum es sich bei ihm nicht um G_f handeln kann.



- 13 Das Profil der Rampe einer Baugrube kann durch die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{40}x^2 - \frac{1}{1200}x^3$, $D_f = [0; 20]$, modelliert werden ($x, f(x)$ in Metern).



- a) Zeichnen Sie G_f mit einer DMS.
 b) Zeigen Sie, dass der Graph von f im Definitionsbereich monoton steigend ist, und berechnen Sie anschließend die Tiefe der Baugrube.
 c) Bestimmen Sie die durchschnittliche Steigung der kompletten Rampe.



- 14 Untersuchen Sie die Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, jeweils auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Verhalten im Unendlichen sowie Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Graphen von f und kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer DMS.

a) $f(x) = 3x^2 - x^3$
 b) $f(x) = \frac{x}{6}(x^2 - 12x + 36)$
 c) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8x$
 d) $f(x) = \frac{x^4}{16} - \frac{3}{2}x^2 + 5$

- 15 Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $D_f = \mathbb{R}$, und ihr Graph G_f .

- a) Ermitteln Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie Extrem- und Wendepunkte und zeichnen Sie G_f .
 b) Untersuchen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
 1 Für $x < 2$ ist G_f rechtsgekrümmt.
 2 Die Gerade $g: y = 1$ hat mit G_f drei Punkte gemeinsam.
 3 Im Punkt $W(2|2)$ steigt G_f .
 4 Die Tangente an G_f im Ursprung hat eine positive Steigung.
 5 Die Tangenten an G_f bei $x = 0$ und bei $x = 5$ verlaufen parallel zueinander.

- 16 Das Profil einer Wasserrutsche kann durch den im I. Quadranten liegenden Teil des Graphen der Funktion $f: x \mapsto -0,1x^4 + 0,6x^3 - 1,0125x^2 + 0,85$, $D_f = [0; 2]$, modelliert werden (x : horizontale Entfernung vom Startpunkt in 10 m; $f(x)$: Höhe der Rutsche über dem Wasserbecken in 10 m).

- a) Bestimmen Sie die Höhe der Rutsche am Startpunkt.
 b) Weisen Sie nach, dass die Rutsche 20 m in horizontaler Entfernung vom Startpunkt auf das Wasser trifft.
 Hinweis: Argumentieren Sie dazu auch mit dem Monotonieverhalten des Graphen G_f .
 c) Bestimmen Sie das Intervall, in dem G_f rechtsgekrümmt ist, und erklären Sie dessen Bedeutung im Sachzusammenhang.

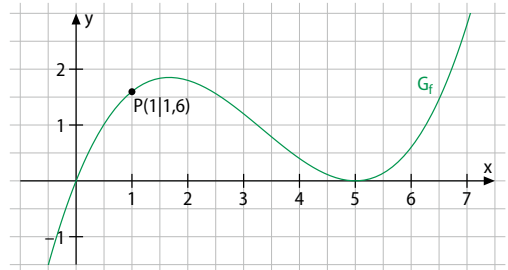
Aufgaben für Lernpartner

- 1 Bearbeiten Sie diese Aufgaben zuerst alleine.
 - 2 Suchen Sie sich einen Partner oder eine Partnerin und arbeiten Sie zusammen weiter: Erklären Sie sich gegenseitig Ihre Lösungen. Korrigieren Sie fehlerhafte Antworten.
- Sind folgende Behauptungen richtig oder falsch? Begründen Sie.

- A** Die mittlere Änderungsrate eines Wachstumsvorgangs gibt an, wie lineares Wachstum mit gleichem Anfangs- und Endpunkt verlaufen würde.
- B** Es gibt nicht-konstante Funktionen, die in einem Intervall eine mittlere Änderungsrate von 0 haben.
- C** Die Tangenten an einen Funktionsgraphen G_f in zwei Punkten P_1 und P_2 schneiden sich stets.
- D** Wenn ein gleichmäßig ansteigender Weg eine Steigung von 5 % hat, bedeutet das, dass man nach jeweils 10 Metern nach vorn immer fünf Meter aufwärts gegangen ist.
- E** Die ganzrationale Funktion dritten Grades g mit $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat bei $x = 0$ die Tangente t mit $t(x) = cx + d$.
- F** Hat eine ganzrationale Funktion einen Hochpunkt, so gilt an dieser Stelle $f'(x) = 0$.
- G** Jede Nullstelle der Ableitung f' ist eine Extremstelle der Funktion f .
- H** Besitzt ein Funktionsgraph einen Tiefpunkt, so gibt es keinen weiteren Punkt des Graphen, dessen y -Wert kleiner ist.
- I** Jeder Punkt des Graphen G_f einer Funktion f , in dem sich die Art der Krümmung ändert, ist ein Wendepunkt von G_f .
- J** Jede ganzrationale Funktion, deren Graph in einem Intervall I_1 streng monoton steigend und in einem Intervall I_2 streng monoton fallend ist, hat einen Extrempunkt.
- K** In einem Terrassenpunkt ändert sich das Monotonieverhalten des Funktionsgraphen nicht.
- L** Die durchschnittliche Steigung m kann mit der Formel $m = \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$ berechnet werden.
- M** Die Nullstellen von ganzrationalen Funktionen von mindestens drittem Grad können nicht bestimmt werden, da es keine Lösungsformel gibt.
- N** Es gibt ganzrationale Funktionen, deren Krümmung in ganz $\mathbb{R}$ positiv ist.
- O** Jede Nullstelle der Ableitung f' ist eine Wendestelle der Funktion f .
- P** Es gibt eine ganzrationale Funktion f , die keine Extrempunkte besitzt.

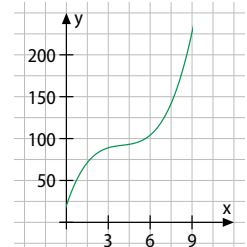
Ich kann ...	Aufgaben	Hilfe
Differenzenquotienten berechnen und diese geometrisch an Graphen und in Sachzusammenhängen deuten.	1, A, B, L	S. 96
Ableitungswerte als Tangentensteigungen und als momentane Änderungsrate deuten.	6, 7, D	S. 100, 104
die Ableitungen ganzrationaler Funktionen mithilfe von Ableitungsregeln bestimmen.	2, 3, 4, 5	S. 108
Gleichungen von Tangenten an einen Graphen aufstellen.	3, C, E	S. 112
Graphen ganzrationaler Funktionen auf Monotonie und Extrempunkte untersuchen.	10, 11, 12, 13, 14, F, G, H, J, K, P	S. 114, 118, 126
das Krümmungsverhalten der Graphen ganzrationaler Funktionen untersuchen und Wendepunkte bestimmen.	14, 15, I, N, O	S. 122, 126
ganzrationale Funktionen hinsichtlich ihrer Eigenschaften analysieren.	8, 9, 13, 16, M	S. 128

- 1** Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Die ganzzahligen Nullstellen können der Abbildung entnommen werden.



- Bestimmen Sie den vollständig faktorisierten Term der Funktion f und zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Funktionsgleichung von f auch in folgender Form darstellen lässt: $f(x) = 0,1x^3 - x^2 + 2,5x$.
- Bestimmen Sie die Extrempunkte von f rechnerisch.
- Geben Sie das maximale Intervall an, in dem der Graph von f fällt, und bestimmen Sie die mittlere Steigung in diesem Intervall.
- An der Stelle $x = 0$ besitzt der Graph von f die Tangente t . Zeigen Sie, dass die Tangente t die Funktionsgleichung $y = \frac{5}{2}x$ besitzt.
- Prüfen Sie rechnerisch, ob die Tangente t und der Graph von f außer dem Berührungspunkt bei $x = 0$ noch weitere gemeinsame Punkte besitzen.
- Berechnen Sie den Tiefpunkt des Graphen der Ableitung f' und erklären Sie den Zusammenhang mit dem Graphen von f .

- 2** Die Kosten, die einem Unternehmen bei der Herstellung einer Flüssigkeit entstehen, können durch die Funktion $K: x \mapsto x^3 - 12x^2 + 50x + 20$ mit $x \in [0; 9]$ beschrieben werden. Dabei gibt $K(x)$ die Kosten in 1000 € an, die bei der Produktion von x Kubikmetern der Flüssigkeit insgesamt entstehen. Die Abbildung zeigt den Graphen von K .



- Geben Sie mithilfe der Abbildung ...
 - die Produktionsmenge an, bei der die Kosten 125 000 € betragen.
 - das Monotonieverhalten von K an und deuten Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang.

Die Funktion E mit $E(x) = 23x$ gibt für $0 \leq x \leq 9$ den Erlös (in 1000 €) an, den das Unternehmen beim Verkauf von x Kubikmetern der Flüssigkeit erzielt. Für die sogenannte Gewinnfunktion G gilt $G(x) = E(x) - K(x)$. Positive Werte von G werden als Gewinn bezeichnet, negative als Verlust.

- Zeigen Sie, dass das Unternehmen keinen Gewinn erzielt, wenn vier Kubikmeter der Flüssigkeit verkauft werden.
- Übertragen Sie den Graphen von K in Ihr Heft und tragen Sie den Graphen von E in die Abbildung ein. Bestimmen Sie mithilfe der so entstehenden Darstellung den Bereich, in dem die verkaufte Menge der Flüssigkeit liegen muss, damit das Unternehmen einen Gewinn erzielt.
- Berechnen Sie, welche Menge der Flüssigkeit verkauft werden muss, damit das Unternehmen den größten Gewinn erzielt.



3 Die erste Ableitung einer ganzrationalen Funktion mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ besitzt die Funktionsgleichung $f'(x) = -\frac{1}{3}(x-2)(x+3)$.

- Skizzieren Sie einen Ausschnitt des Graphen von f' , sodass die maximalen Monotonieintervalle abgelesen werden können. Geben Sie diese Intervalle an.
- Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f' für $x \rightarrow \pm\infty$, ohne den Term von f' zu berechnen.
- Entscheiden Sie mit Begründung, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
 - Der Graph von f besitzt bei $x = -2$ eine Extremstelle.
 - Bei $x = 3$ fällt der Graph von f .
 - Der Graph von f' besitzt eine Extremstelle bei $x = -0,25$.
 - Der Graph von f' ist streng monoton fallend für $x \in [1; 4[$.



4 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto -\frac{1}{2}x^4 + 4x^2$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

- Untersuchen Sie den Graphen der Funktion g auf Symmetrie zum Koordinatensystem.
- Ermitteln Sie alle Extremstellen der Funktion g .
- Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte auf dem Graphen von g , die den y -Wert $y = -4,5$ besitzen.

5 In einem Freizeitpark werden E-Scooter verliehen. Die Anzahl der ausgeliehenen E-Scooter während eines Sommertages kann näherungsweise durch die ganzrationale Funktion $f: t \mapsto \frac{1}{8}t^3 - \frac{9}{4}t^2 + 12t$ mit der Definitionsmenge $D = [0; 9]$ beschrieben werden. t ist die Zeit in Stunden seit Öffnung des Parks um 9 Uhr. Auf das Mitführen von Einheiten kann während der Rechnungen verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

- Bestimmen Sie die Anzahl der ausgeliehen E-Scooter um 15 Uhr.
- Ermitteln Sie den Hochpunkt und geben Sie dessen Bedeutung im Kontext an.
- Geben Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen von f an und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.
- Zeichnen Sie den Graphen von f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Werte im Definitionsbereich.
Maßstab: 1 Stunde $\hat{=}$ 1 cm, 2 E-Scooter $\hat{=}$ 1 cm
- Ermitteln Sie mithilfe der Zeichnung näherungsweise, zu welchen Zeiten 18 E-Scooter ausgeliehen sind. Bestätigen Sie anschließend die abgelesenen Werte durch Rechnung.

6 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{9}(-x^4 + 4x^3)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

- Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f mit der jeweiligen Vielfachheit.
- Berechnen Sie die Nullstellen der ersten Ableitung f' . Bestimmen Sie anschließend, welche besonderen Punkte der Graph von f bei den berechneten Nullstellen von f' besitzt.
- Skizzieren Sie den Graphen von f ausschließlich mit den bereits berechneten Ergebnissen.
- Ermitteln Sie die Gleichungen aller Wendetangenten an den Graphen G_f .

Erläuterungen der im Buch verwendeten Symbole

Symbol	Erläuterung
Grundwissen	Mit dem angegebenen Medien- bzw. QR-Code auf jeder Startklar-Seite kann das für das jeweilige Kapitel vorausgesetzte und in der Tabelle aufgeführte Vorwissen abgerufen und auch für die Bearbeitung der Aufgaben auf dieser Seite genutzt werden.
Historische Ecke 	Mit dem angegebenen Medien- bzw. QR-Code auf jeder Kapitel-Auftaktseite können historische Informationen zu Mathematikerinnen und Mathematikern, deren Arbeiten einen Bezug zum jeweiligen Kapitel haben, abgerufen werden. Damit erhalten die Schülerinnen und Schüler Einblicke in kulturelle Leistungen, die Grundlage für zahlreiche Fortschritte in unterschiedlichen Wissenschaften und Anwendungsbereichen waren.
	Aufgaben, die sich besonders gut für Partner- oder Gruppenarbeit eignen. Dennoch belassen auch diese Aufgabenstellungen der Lehrkraft die Möglichkeit, frei über die methodischen Vorgehensweisen zu entscheiden und auch solche Aufgaben z. B. als Hausaufgaben zu stellen.
	Aufgaben, die sich in besonderer Weise auch für die Bearbeitung mit einem Computerprogramm, z. B. einem Tabellenkalkulationsprogramm, einer dynamischen Geometriesoftware (DGS) bzw. einer dynamischen Mathematiksoftware (DMS) eignen. Über die Art und den Einsatz der Software entscheidet die Lehrkraft.
	Aufgaben, die ohne Taschenrechner bearbeitet werden sollen. Ihre Einbeziehung bereits in den laufenden Unterricht dient dem kontinuierlichen Training der Rechenfertigkeiten im Hinblick auf eine nachhaltige Vorbereitung auf die Anforderungen im hilfsmittelfreien Teil der Abschlussprüfung.
Prüfungsaufgabe	Bei den so gekennzeichneten Aufgaben handelt es sich um Original-Prüfungsaufgaben oder um Teile solcher Aufgaben. Ihre Einbeziehung bereits in den laufenden Unterricht stellt eine fundierte und nachhaltige Vorbereitung auf die Anforderungen in der Abschlussprüfung sicher. Der Ursprung dieser Aufgaben wird im Quellenverzeichnis im Anhang angegeben.
Vertiefung Werkzeug	Die blauen Kästen bieten ihrer jeweiligen Kennzeichnung entsprechend weitere zum jeweiligen Unterkapitel passende Inhalte.

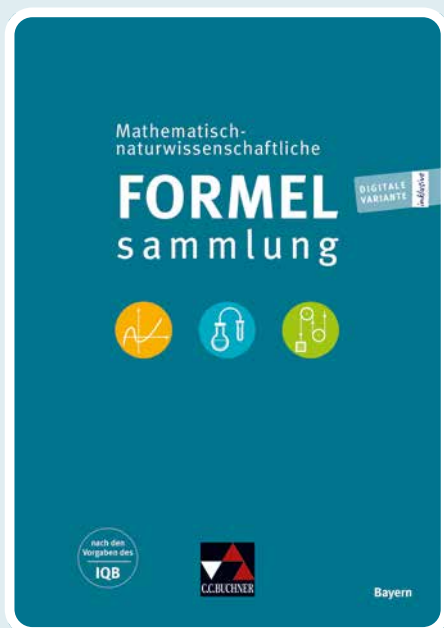
Bildnachweis

AdobeStock / Ansario S. 121; - / Elena Yanchyn S. 106; - / FPLV S. 131; Getty Images Plus / iStockphoto, Aromon S. 111; - / iStockphoto, JohnAlexandr S. 112; - / iStockphoto, kudou S. 98; - / Stockbyte, Jupiter-images S. 107; iStockphoto / typo-graphics S. 107; Mauritius Images / Image Source, Gonalo Barriga S. 94; - / imageBROKER, Christian Handl S. 132; - / imageBROKER, STELLA S. 99; picture-alliance / dpa, dpa-infografik GmbH S. 103; - / dpa-infografik S. 107; - / SvenSimon, Frank Hoermann S. 100; Shutterstock / Photographer RM Cover; - / T.Vyc S. 117; Viola Adam, Luckenwalde S. 95.

mathe.delta – Berufliche Oberschule Bayern Ausgabe ab 2027		ISBN 978-3-661- / Bestellnr.	Lieferbarkeit
	mathe.delta 1 Nichttechnik	63044-1	2. Quartal 2027
	Digitale Ausgabe click & study 1 Nichttechnik Einzellizenz	WEB 630441	2. Quartal 2027
	Digitales Lehrermaterial click & teach 1 Nichttechnik Einzellizenz	WEB 630442	3. Quartal 2027
	mathe.delta 1 Technik	63045-8	2. Quartal 2027
	Digitale Ausgabe click & study 1 Technik Einzellizenz	WEB 630451	2. Quartal 2027
	Digitales Lehrermaterial click & teach 1 Technik Einzellizenz	WEB 630452	3. Quartal 2027



Weitere Infos zur Reihe finden Sie auf:
www.ccbuchner.de/reihe/2744



Mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung – Bayern

nach den Vorgaben des IQB

IQB-konforme Formelsammlung für Abiturprüfungen in Mathematik, Chemie und Physik

Unsere **Mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung – Bayern** ist exakt nach den Vorgaben des IQB in Berlin konzipiert und kann als Hilfsmittel für die Bearbeitung der Aufgaben in den Fächern Mathematik, Chemie und Physik in Abiturprüfungen verwendet werden.

Zulassungsnummer: 77/24-G+



Mehr Infos und einen Blick in die Formelsammlung:
www.ccbuchner.de/bn/67001



click & study und click & teach

Jedes gedruckte Exemplar der Formelsammlung enthält einen **kostenfreien Code** für die **digitale Ausgabe click & study** (6-Jahres-Lizenz). Somit kann die Formelsammlung auch digital im Unterricht oder zuhause via Tablet genutzt werden.



Sie benötigen die Formelsammlung separat als **digitale Ausgabe** mit **unbegrenzter Laufzeit**? Hierfür steht Ihnen diese ab sofort als **digitales Lehrmaterial click & teach** zur Verfügung. Um die **IQB-Konformität** zu gewährleisten, ist diese nicht durch digitales Zusatzmaterial angereichert.

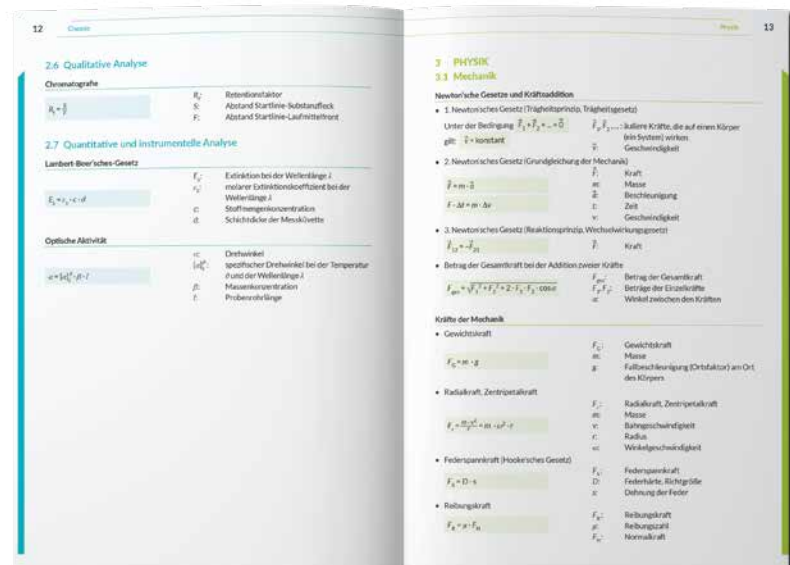


Mehr Infos zum digitalen
Lehrmaterial click & teach:
www.ccbuchner.de/bn/670012



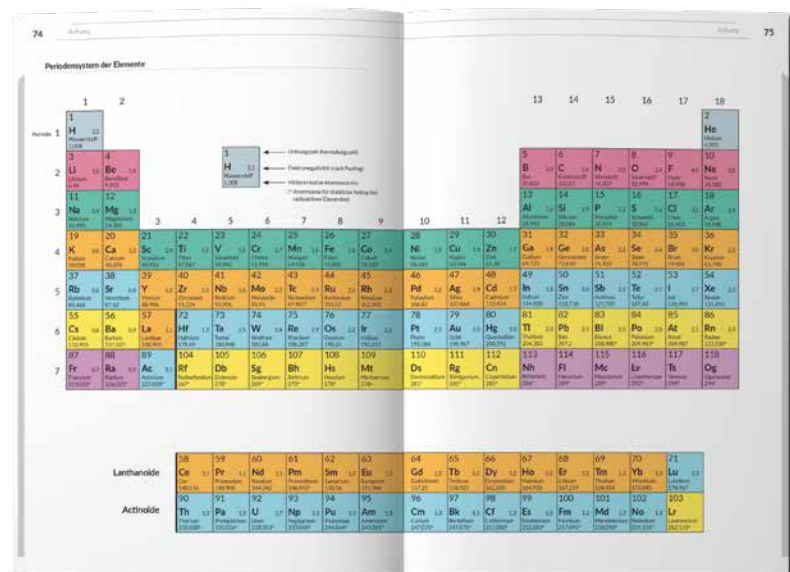
Optimal für den Einsatz in Prüfungssituationen

Der übersichtliche Aufbau der Formelsammlung hilft den Schülerinnen und Schülern dabei, sich insbesondere in Prüfungssituationen möglichst schnell zurechtzufinden.



Format und Bindung optimiert

Durch das kompakte, aber ausreichend große Format sind das Periodensystem der Elemente und die Nuklidkarte problemlos lesbar. Dank der praktischen Bindung bleibt die Formelsammlung aufgeschlagen auf der gewünschten Seite offen. Beides erleichtert ein unkompliziertes Nachschlagen und Arbeiten.





Digitaler Unterricht mit C.C.Buchner

Das digitale Lehrmaterial **click & teach** und die digitale Ausgabe des Schulbuchs **click & study** bilden zusammen die ideale digitale Lehr- und Lernwelt: vielfältig im Angebot und einfach in der Bedienung. Für eine moderne und individuelle Unterrichtsgestaltung!



Mit **click & teach**, unserem Angebot für Lehrkräfte, kann der digitale Arbeitsplatz rund um das Lehrwerk von C.C.Buchner selbst gestaltet werden. Enthalten sind nicht nur die vollständige digitale Ausgabe des jeweiligen Schulbuchs, sondern auch nützliche Funktionen wie der Unterrichtsplaner sowie umfangreiches und perfekt abgestimmtes Zusatzmaterial wie Aufgabenlösungen, digitale Lernanwendungen, Hörtexte, Arbeitsblätter, didaktische Kommentare und vieles mehr.



Für Schülerinnen und Schüler bieten wir die digitale Ausgabe des Schulbuchs **click & study**. Im modernen und intuitiven Reader finden Lernende nicht nur die vollständige digitale Ausgabe und hilfreiche Werkzeuge, sondern auch direkten Zugriff auf zusätzliches Material, wie gestufte Hilfen oder Erklärvideos.



click & teach und **click & study** sind intelligent miteinander verknüpft: Mit dem Aufgabenpool, dem Forum und der Lerngruppenfunktion kann die Interaktion zwischen Lehrenden und Lernenden rein digital erfolgen. So sind **click & teach** und **click & study** die idealen Begleiter in der digitalen Lernwelt – vor, während und nach dem Unterricht.

Individuelle Lizenzierung

Egal ob für Einzelpersonen, das Kollegium oder die Schülerschaft – für **click & teach** und **click & study** gibt es für jeden Bedarf eine passende Lizenz. Bestellungen sind ausschließlich auf www.ccbuchner.de möglich. Die digitale Ausgabe **click & study** kann zudem über den Bildungslogin genutzt werden.



Einfache Verwaltung

Lehrkräfte, Lehrmittelverantwortliche und IT-Kräfte haben Zugang zum C.C.Buchner-Schulkonto. Damit können die digitalen Lehr- und Lernmittel **click & teach** und **click & study** an einem zentralen Ort vergünstigt erworben, verwaltet und dem Kollegium oder der Schülerschaft bereitgestellt werden.





Lizenzmodelle click & teach

	Kollegiumslizenz	Einzellizenz flex	Einzellizenz
Inhalt	Digitale Ausgabe + Zusatzmaterial	Digitale Ausgabe + Zusatzmaterial	Digitale Ausgabe + Zusatzmaterial
Preis	ab 155,- €	ab 42,50 €	ab 27,50 €
Laufzeit	solange das gedruckte Lehrwerk erhältlich ist	solange das gedruckte Lehrwerk erhältlich ist	solange das gedruckte Lehrwerk erhältlich ist
Lizenzanzahl	beliebige Anzahl für das komplette Fachkollegium inkl. Referendare	1	1
Weitergabe	übertragbar	übertragbar	nicht übertragbar
Zugang	direkte Freischaltung im Schulkonto	direkte Freischaltung im Schulkonto	digitaler Freischaltcode per E-Mail
Verfügbarkeit	im verknüpften Schulkonto	im verknüpften Schulkonto	im persönlichen Konto

Preisstand: 1. März 2026



Lizenzmodelle click & study

Bestellen Sie click & study
im Schulkonto und profitieren
Sie vom **3-fach-Rabatt!**



	Testlizenz	Einzellizenz	Schulkonto PrintPlus Lizenz	Schulkonto Lizenz
Inhalt	Digitale Ausgabe + Zusatzmaterial	Digitale Ausgabe + Zusatzmaterial	Digitale Ausgabe + Zusatzmaterial	Digitale Ausgabe + Zusatzmaterial
Preis	kostenfrei nur für Lehrkräfte	Standardpreis ab 7,30 €	ab 2,30 € bei Einführung des Schulbuchs	Standardpreis abzgl. Schulkonto- Laufzeit- und Mengenrabatt
Laufzeit	100 Tage	12 + 1 Monat ab Freischaltung	12 + 1 Monat ab Freischaltung	wählbar 1-6 Jahre (+ 1 Monat) ab Freischaltung
Lizenzanzahl	1 – 30	1	1 pro eingeführtem Schulbuch	beliebige Anzahl für die Schülerschaft
Weitergabe	nicht übertragbar	nicht übertragbar	nicht übertragbar	übertragbar
Zugang	digitaler Freischaltcode per E-Mail	digitaler Freischaltcode per E-Mail	Freischaltung im Schulkonto oder Codeliste/ Abholnummer*	Freischaltung im Schulkonto oder Codeliste/ Abholnummer*
Verfügbarkeit	im persönlichen Konto	im persönlichen Konto	im verknüpften Schulkonto	im verknüpften Schulkonto

Preisstand: ab 1. Januar 2027

* Im Schulkonto haben Sie die Wahl: Sie können click & study-Lizenzen regulär erwerben oder als Codeliste
(= Freischaltcodes als Excel-Datei) oder als Abholnummern (= zur Übertragung in den Lizenzmanager des Bildungslogins).



Unsere WebSeminare für Bayern

Wir unterstützen und begleiten Sie beim Umsetzen des LehrplanPLUS – und das nicht nur mit unseren neuen Lehrwerken. Wir möchten Ihnen Anregungen bieten, Materialien vorstellen und Gelegenheit zum Gedankenaustausch geben.

Deshalb bieten wir Ihnen WebSeminare an, für die Sie auch eine Teilnahmebestätigung erhalten.

Natürlich finden Sie uns ebenfalls auf überregionalen Messen und Kongressen.

Wir freuen uns auf spannende Veranstaltungen, auf gute Gespräche und vor allem auf Sie!



Detaillierte Informationen und Termine:
www.ccbuchner.de/veranstaltungen



**Nichts mehr verpassen:
Unser Newsletter mit allen aktuellen Terminen**

Abonnieren Sie jetzt unseren Veranstaltungsnewsletter!
Damit sind Sie fächerübergreifend immer über die aktuellen Termine von C.C.Buchner informiert und können sich Ihren Platz sichern.

Ihr Schulberatungsteam in Bayern



Dr. Katrin Brogl

Mobil: 0178 6012379

E-Mail: k.brogl@ccbuchner.de

Zuständigkeitsbereiche

- Mittelfranken PLZ-Bereiche 914-972
- Unterfranken



Kilian Jacob

Mobil: 0171 6012375

E-Mail: jacob@ccbuchner.de

Zuständigkeitsbereiche

- Mittelfranken PLZ-Bereich 90-913
- Niederbayern
- Oberbayern ohne PLZ-Bereiche 82, 836/837, 850/52, 86
- Oberfranken
- Oberpfalz

Tagungsstätten:

Gars, Wasserburg



Annette Goldscheider

Mobil: 0171 6012371

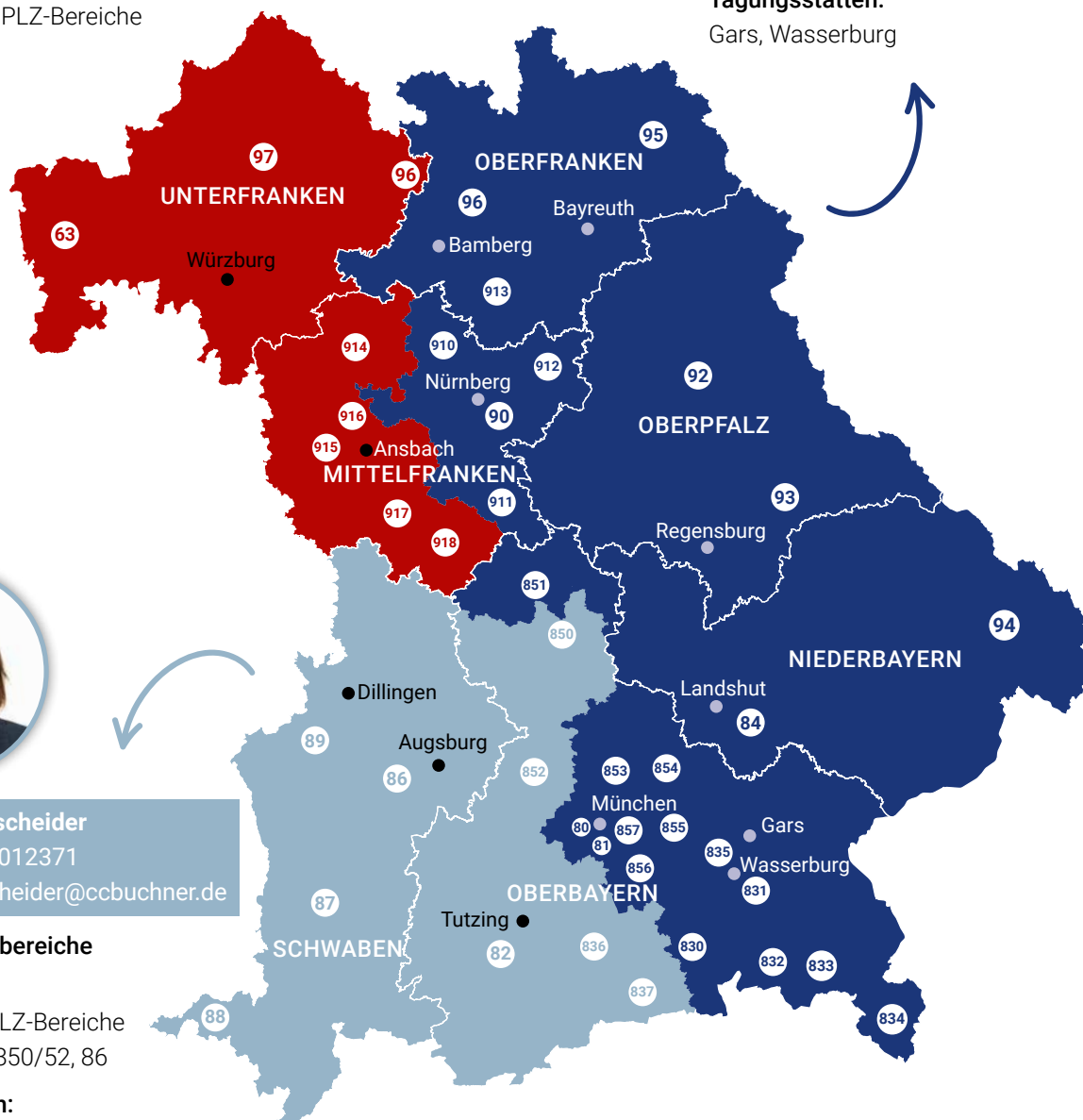
E-Mail: goldscheider@ccbuchner.de

Zuständigkeitsbereiche

- Schwaben
- Oberbayern PLZ-Bereiche 82, 836/837, 850/52, 86

Tagungsstätten:

Akademie Dillingen und Tutzing



Sie wünschen persönliche Beratung?
Unser Schulberatungsteam für Bayern ist für Sie da
– vor Ort, telefonisch und online:



Dr. Katrin Brogl

0178 6012379

k.brogl@ccbuchner.de



Annette Goldscheider

0171 6012371

goldscheider@ccbuchner.de



Kilian Jacob

0171 6012375

jacob@ccbuchner.de

Sie benötigen weitere Exemplare
dieser Leseprobe* für Ihre Fachkonferenz?

1

Geben Sie auf www.ccbuchner.de die Bestellnummer **L63044** in die Suchleiste ein.



2

Legen Sie die kostenfreie Leseprobe (1 Exemplar pro Person) und ggf. weitere Produkte in Ihren **Warenkorb**.



3

Folgen Sie den weiteren Anweisungen, um den Bestellvorgang abzuschließen.

*Nur solange der Vorrat reicht.



Oder
direkt über:



L63044

