Erweiterung der Differentialrechnung I: Ableitungsregeln

1

1.1 a) $y = m \cdot x + c$ — y-Achsenabschnitt $-1\frac{1}{5} \Longrightarrow c = -1\frac{1}{5} \Longrightarrow y = m \cdot x + -1\frac{1}{5}$

Nullstelle $x = 2{,}5$: $0 = m \cdot 2{,}5 - 1\frac{1}{5} \Longrightarrow m = \frac{1\frac{1}{5}}{2{,}5} = 0{,}48 \Longrightarrow y = 0{,}48 \cdot x - 1\frac{1}{5}$

b) $y = m \cdot x + c$

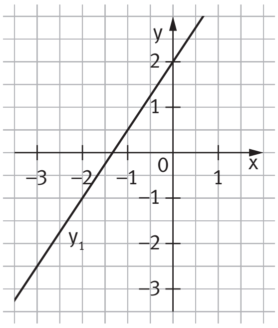
Einsetzen von A: I $\quad -0{,}75 = m \cdot (-2) + c$

Einsetzen von B: II $\quad 1{,}2 = m \cdot 4{,}6 + c$

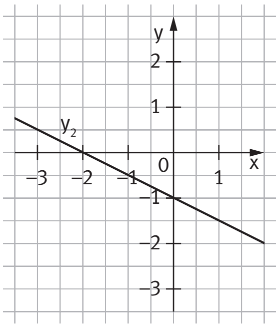
I – II: $-0{,}75 - 1{,}2 = -2m - 4{,}6m \Longleftrightarrow -1{,}95 = -6{,}6m \Longleftrightarrow m = \frac{-1{,}95}{-6{,}6} = \frac{13}{44}$

m in II einsetzen: $1{,}2 = \frac{13}{44} \cdot 4{,}6 + c \Longleftrightarrow c = \frac{-7}{44} \Longrightarrow y = \frac{13}{44}x - \frac{7}{44}$

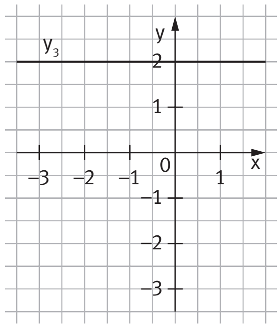
1.2 a)



b)



c)



2.1 Die Funktionsterme werden auf Scheitelpunktform gebracht.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + 5 = (x-2)^2 + 1 \Longrightarrow S(2\,|\,1)$

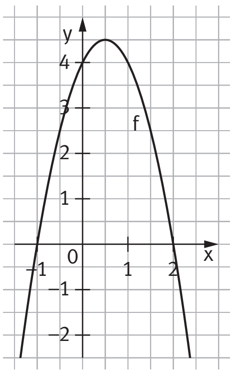
b) $f(x) = -2x^2 + 4x - 6 = -2(x^2 - 2x + 3) = -2(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + 3) = -2(x-1)^2 - 4$
$\Longrightarrow S(1\,|\,-4)$

c) $f(x) = -2x^2 - 5 = -2(x-0)^2 - 5 \Longrightarrow S(0\,|\,-5)$

2.2 Scheitel $S(x_s\,|\,f(x_s))$

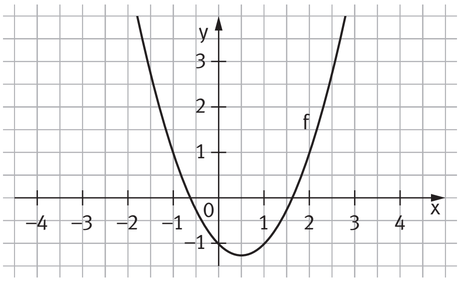
a) Nullstellen: $-2x_2 + 2x + 4 = 0 \quad x_1 = -1;\ x_2 = 2$

$x_S = \frac{-1+2}{2} = 0{,}5;\ f(x_S) = 4{,}5 \Longrightarrow S(0{,}5\,|\,4{,}5)$

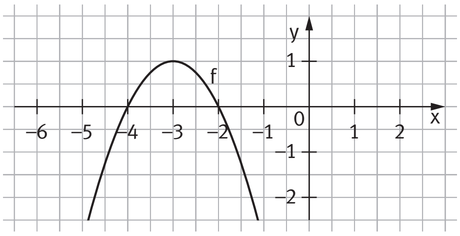


b) Nullstellen: $x^2 - x - 1 = 0 \quad x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2};\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x_S = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{2} = 0{,}5;\ f(x_S) = -1{,}25 \Longrightarrow S(0{,}5\,|\,-1{,}25)$



c) Nullstellen: $-x^2 - 6x - 8 = 0 \quad x_1 = -2;\ x_2 = -4$
$x_S = \frac{-4-2}{2} = -3;\ f(x_S) = 1 \Longrightarrow S(-3|1)$



2.3 a) $\boxed{1}$: $f(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4{,}5 = -2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 4{,}5 = -2x^2 + 2x - \frac{1}{2} + 4{,}5$
$= -2x^2 + 2x + 4$

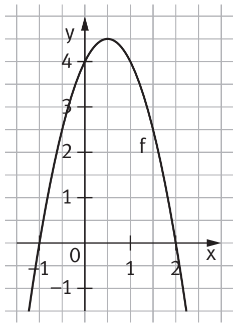
$\boxed{2}$: $f(x) = -2(x+1)(x-2) = -2(x^2 + x - 2x - 2) = -2(x^2 - x - 2) = -2x^2 + 2x + 4$

Die Funktionsterme in $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ stimmen mit dem Funktionsterm in $\boxed{3}$ überein. Somit handelt es sich in allen drei Fällen um dieselbe Funktion.

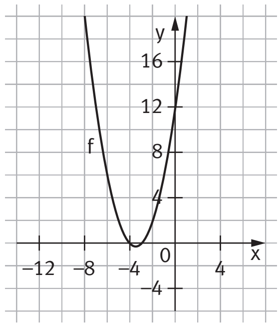
b) $\boxed{1}$: ablesbar: Scheitelpunkt $S\left(\frac{1}{2}|4{,}5\right)$; wegen $a = -2$ nach unten geöffnete gestreckte Parabel.

$\boxed{2}$: ablesbar: Nullstellen $x_1 = -1;\ x_2 = 2$; wegen $a = -2$ nach unten geöffnete gestreckte Parabel.

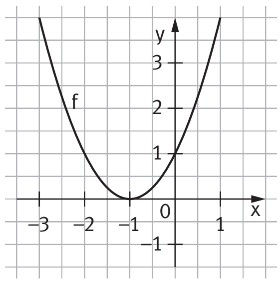
$\boxed{3}$: ablesbar: Schnittpunkt mit der y-Achse $(0|4)$; wegen $a = -2$ nach unten geöffnete gestreckte Parabel.



2.4 a) Wegen $a = 1$ nach oben geöffnete verschobene Normalparabel.
Nullstellen: $x^2 + 7x + 12 = 0$ ergibt nach dem Satz von Vieta
$N_1(-4|0)$ und $N_2(-3|0)$.
Scheitelpunkt $S(x_S|f(x_S))$:
$x_S = \frac{-4 + (-3)}{2} = -3{,}5;\ f(x_S) = -0{,}25 \Longrightarrow S(-3{,}5|-0{,}25)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 12 \Longrightarrow (0|12)$



b) $f(x) = -(x+1) \cdot (-1) \cdot (x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
Wegen $a = 1$ nach oben geöffnete verschobene Normalparabel.
Doppelte Nullstelle (ablesbar): $N(-1|0)$; Scheitelpunkt $S(-1|0) = N$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 1 \Longrightarrow (0|1)$



2.5 $f(x) = x^2 - 4;\ g(x) = -\frac{7}{4}(x+2)^2 + 3;\ h(x) = \frac{4}{9}(x-3)^2$

2.6 a) f: Scheitel S (–4 | 0); Schnittpunkt mit der y-Achse: P (0 | 16)
g: Scheitel S (5 | 9); Schnittpunkt mit der y-Achse: P (0 | –16)
h: Scheitel S (0 | –8); Schnittpunkt mit der y-Achse: P (0 | –8)

b) $g\left(3\frac{1}{2}\right) = -\left(3\frac{1}{2} - 5\right)^2 + 9 = 6{,}75$. B liegt auf dem Schaubild von g.

c) Wirkung der beschriebenen Veränderungen auf den Funktionsterm:
Spiegelung an der x-Achse: $-(x + 4)^2$
Verschiebung um eine Einheit nach oben: $-(x + 4)^2 + 1$
Verschiebung um sechs Einheiten nach rechts: $-(x + 4 - 6)^2 + 1 = -(x - 2)^2 + 1$
Neue Funktionsgleichung: $f^*(x) = -(x - 2)^2 + 1$.

3.1 r muss negativ (z. B. wegen Definitionslücke bei x = 0) und ungerade (z. B. wegen Punktsymmetrie) sein, a muss negativ sein, damit für positive x negative Werte entstehen.
Aus $-3 = a \cdot 1^r$ (Punkt P) folgt $a = -3$. Damit folgt aus $-1 = -3 \cdot 3^r$ (Punkt Q) $r = -1$.

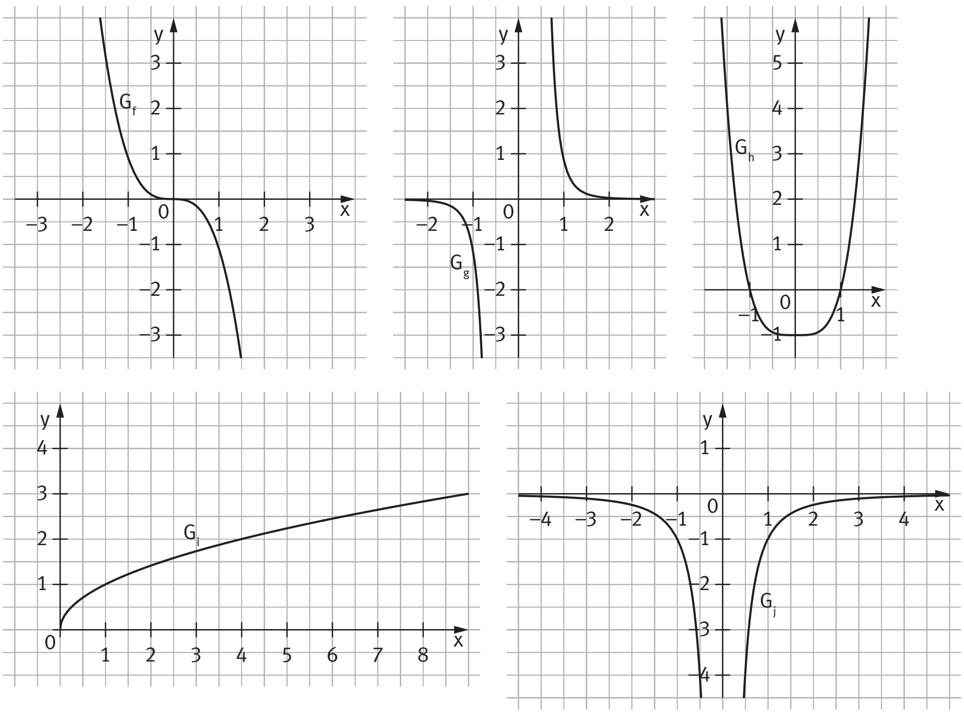
3.2 Funktion f:
Einsetzen der Koordinaten von P (1 | 0,5): $0{,}5 = a \cdot 1^r \Longrightarrow a = 0{,}5$
Einsetzen der Koordinaten von Q (2 | 8): $8 = 0{,}5 \cdot 2^r \Longrightarrow 2^r = 16 \Longrightarrow r = 4 \Longrightarrow f(x) = 0{,}5 \cdot x_4$

Funktion g:
Einsetzen der Koordinaten von R (–0,5 | 8): $8 = a(-0{,}5)^r$
Einsetzen der Koordinaten von S (–1 | 2): $2 = a(-1)^r$

Division dieser Gleichungen ergibt:
$\frac{8}{2} = \frac{(-0{,}5)^r}{(-1)^r} = \left(\frac{1}{2}\right)^r \Longleftrightarrow 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^r \Longleftrightarrow r = -2.$
$r = -2$ in $2 = a(-1)^r$ eingesetzt: $2 = a(-1)^{-2} = a \Longrightarrow g(x) = 2x^{-2}$

3.3 Da die x-Achse Asymptote ist, muss r negativ sein. Außerdem muss r wegen der Symmetrie zur y-Achse gerade sein. a muss positiv sein, da die Funktion nur positive y-Werte annimmt.

3.4



3.5 Einsetzen der Koordinaten von A: $-4 = a \cdot (-1)^n$

Einsetzen der Koordinaten von B: $0{,}125 = a \cdot 0{,}5^n$

Division dieser Gleichungen ergibt:

$\frac{-4}{0{,}125} = \frac{(-1)^n}{0{,}5^n} \Longleftrightarrow -32 = (-2)^n \Longrightarrow n = 5$

$n = 5$ in $-4 = a \cdot (-1)^n$ eingesetzt: $-4 = a \cdot (-1)^5 \Longrightarrow a = 4 \Longrightarrow f(x) = 4 \cdot x^5$

3.6 Einsetzen der Koordinaten von A: $2 = a \cdot (-2)^n$

Einsetzen der Koordinaten von B: $-0{,}25 = a \cdot 1^n \Longrightarrow a = -0{,}25$

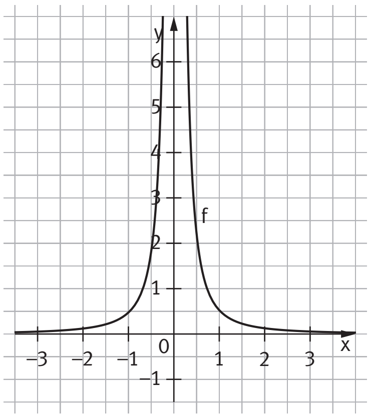
$a = -0{,}25$ in $2 = a \cdot (-2)^n$ eingesetzt: $2 = -0{,}25 \cdot (-2)^n \Longleftrightarrow -8 = (-2)^n \Longrightarrow n = 3$

$\Longrightarrow$ Potenzfunktion (rot) $f(x) = 0{,}25 \cdot x^3$

Gleichung der blau eingezeichneten Geraden $y = d$: $y = 1{,}5$

$\Longrightarrow$ Potenzgleichung $0{,}25 \cdot x^3 = 1{,}5$

3.7 a)



b) $f(2x) = \frac{1}{2}(2x)^{-2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}x^{-2} = \frac{1}{4} \cdot f(x) = 0{,}25\,f(x)$

$f(2x)$ beträgt somit 25 % von $f(x)$; der Funktionswert ändert sich um 75 %.

4.1 a) Der Graph von f ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung. Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$, und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.

b) Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.

c) Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$, und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.

d) Der Graph von f ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung. Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$ und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$.

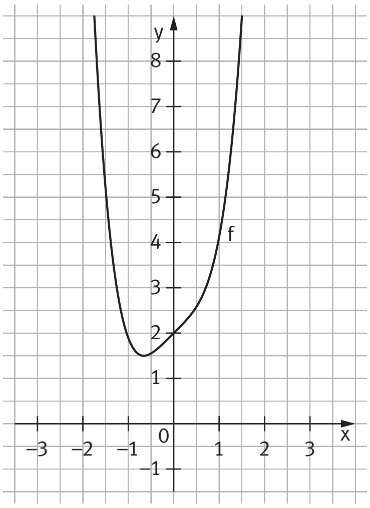
e) Der Graph von f ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung. Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$, und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.

f) Der Graph von f ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung. Für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$, und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.

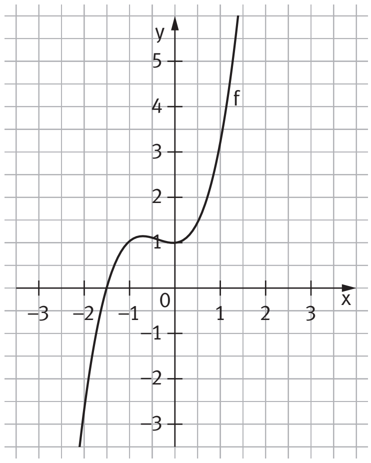
4.2 Der linke Graph gehört zum grünen Kärtchen, da nur bei dieser Funktion das Verhalten für betragsmäßig große x-Werte stimmt: Für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$. Zudem ist der Graph achsensymmetrisch, was zu den nur geraden Exponenten passt.

Der rechte Graph gehört zum blauen Kärtchen, denn wegen des Verhaltens im Unendlichen muss der Grad der Funktion ungerade sein. Beim roten Kärtchen aber können für positive x nur positive Funktionswerte vorliegen. Da der rechte Graph aber die positive x-Achse schneidet, kann somit nur die Funktion des blauen Kärtchens richtig sein.

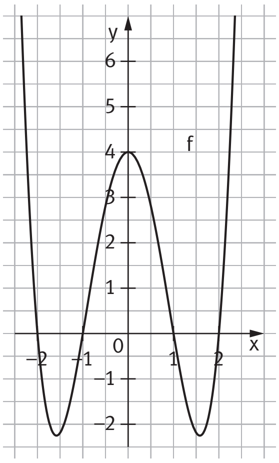
Graph der Funktion auf dem gelben Kärtchen:

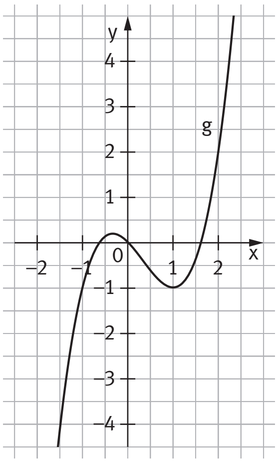


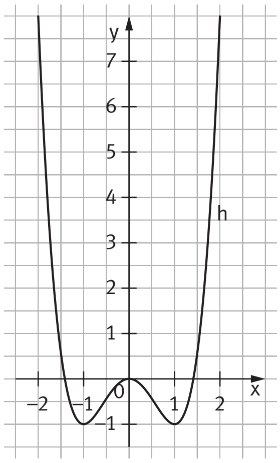
Graph der Funktion auf dem roten Kärtchen:



4.3 Wesentlich sind z. B. die Nullstellen, der Schnittpunkt mit der y-Achse und vor allem das Verhalten im Unendlichen.







Vor allem das Verhalten im Unendlichen wird bei allen drei vorgelegten Graphen nicht hinreichend berücksichtigt.

5.1 a) $m = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{3^2 - 0}{3} = 3$ **b)** $m = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{(2 \cdot 2^3 + 1 - 2 \cdot (-1)^3 - 1}{3} = \frac{18}{3} = 6$

c) $m = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{2 \cdot 3^2 + 3 - 2 \cdot 1^3 - 1}{2} = \frac{18}{2} = 9$ **d)** $m = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{13 + 2 \cdot 12 - 1}{1} = 2$

5.2 a) $f'(-2) = 12$ **b)** $f'(1) = 2$ **c)** $f'(2) = 93$ **d)** $f'(9) = 319$

6.1 a) $f(x) = 0{,}5x^2 - 1 \Longrightarrow f'(x) = x$.
Für $x < 0$ ist f streng monoton fallend, für $x > 0$ ist f streng monoton steigend.
Also liegt bei $x = 0$ ein Tiefpunkt.

b) $f(x) = -2x^2 + x \Longrightarrow f'(x) = -4x + 1$.
Für $x < \frac{1}{4}$ ist f streng monoton steigend, für $x > \frac{1}{4}$ ist f streng monoton fallend.
Also liegt bei $x = \frac{1}{4}$ ein Hochpunkt.

c) $f(x) = 2x^3 + x \Longrightarrow f'(x) = 6x^2 + 1$.
Für alle x ist f streng monoton steigend; es gibt also weder Hoch- noch Tiefpunkte.

d) $f(x) = 0{,}25x^3 + 4x^2 - 2 \Longrightarrow f'(x) = 0{,}75x^2 + 8x = 0{,}75x\left(x + \frac{32}{3}\right)$.
Für $x < -\frac{32}{3}$ ist f streng monoton steigend, für $-\frac{32}{3} < x < 0$ ist f streng monoton fallend, und für $x > 0$ ist f steng monoton steigend. Also liegt bei $x = -\frac{32}{3}$ ein Hochpunkt und bei $x = 0$ ein Tiefpunkt.

e) $f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$.
Auf $I = [1; 4]$ ist f streng monoton steigend; es gibt weder Hoch- noch Tiefpunkte.

f) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ist $g(x) = \frac{1}{x}$ um eine Einheit nach rechts verschoben.
$g'(x) = \frac{-1}{x^2} \Longrightarrow$ g ist auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ streng monoton fallend, also ist auch f auf $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ streng monoton fallend. Es gibt also weder Hoch- noch Tiefpunkte.

6.2 Individuelle Lösungen. Beispiele:
$f(x) = (x-1)^2 + 1$ (verschobene Normalparabel) hat ein lokales Minimum bei $x = 1$.
$f(x) = 2x^3 - x^2 + 12x$ hat ein lokales Maximum $x = 1$ und ein lokales Minimum bei $x = 2$.
$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$ hat lokale Extrema bei $x = 1$, bei $x = 2$ und $x = 3$.

7.1 a) $3x^2 - 3x - 2 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{6} \Longrightarrow N_1(-0{,}46|0),\ N_2(1{,}46|0)$

b) $x^3 - 6x = 0 \Longleftrightarrow x(x^2 - 6) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -\sqrt{6};\ x_3 = \sqrt{6} \Longrightarrow N_1(0|0),\ N_2(-\sqrt{6}|0),\ N_3(\sqrt{6}|0)$

c) $x^3 + 3x^2 - 2x = x(x^2 + 3x - 2) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} = \left(\frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}\right) = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$
$\Longrightarrow N_1(0|0),\ N_2(-3{,}56|0),\ N_3(0{,}56|0)$

d) $x^2 \cdot (x^2 - 4) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2;\ x_3 = 2 \Longrightarrow N_1(0|0),\ N_2(-2|0),\ N_3(2|0)$

e) $x^3 \cdot (x - 1) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1 \Longrightarrow N_1(0|0),\ N_2(1|0)$

f) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1) = 0 \Longleftrightarrow (x+1)^2(x-1)^2 = 0 \Longrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1 \Longrightarrow N_1(-1|0),\ N_2(1|0)$

7.2 Individuelle Lösungen. Beispiele:

a) $f(x) = (x-2)(x+3),\ g(x) = 5(x-2)(x+3)$

b) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3),\ g(x) = 6(x-1)(x-2) \cdot (x-3)^2$

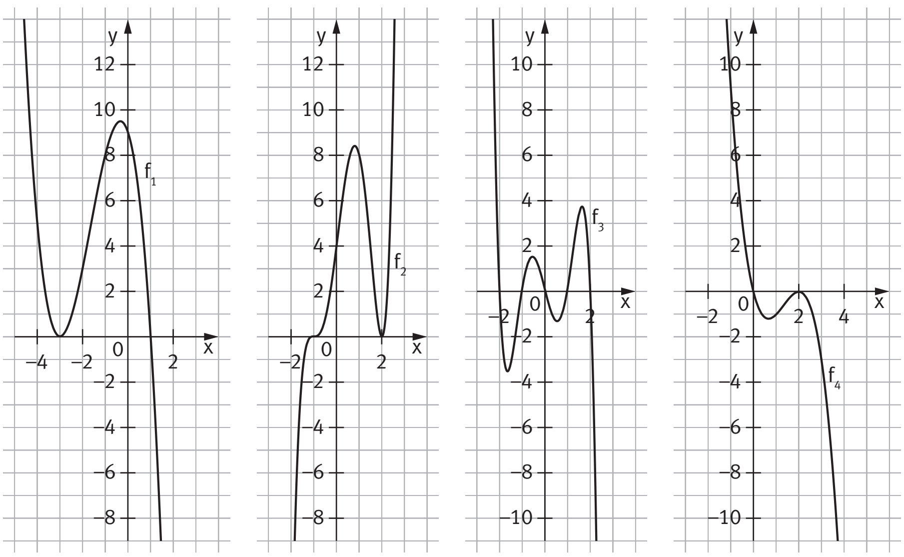
c) $f(x) = x(x-1),\ g(x) = 5x^2(x-1)$

d) $f(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right),\ g(x) = -4\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)^3$

e) $f(x) = \left(x + \frac{1}{9}\right)\left(x + \frac{2}{9}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right),\ g(x) = 3\left(x + \frac{1}{9}\right)\left(x + \frac{2}{9}\right)^2\left(x + \frac{1}{3}\right)$

f) $f(x) = (x - \sqrt{2})(x - \sqrt[3]{2}),\ g(x) = 5(x - \sqrt{2})(x - \sqrt[3]{2})(x^2 + 1)$

7.3



1.1 Die Summen-, Faktor- und Potenzregel der Ableitung

Entdecken

- $f_1'(x) = 0$ $f_2'(x) = 1$ $f_3'(x) = 1$ $f_4'(x) = 1$ $f_5'(x) = 1$ $f_6'(x) = 4$

Aufgaben

1 **a)** $f'(x) = 4x^3$ **b)** $f'(x) = 11x^{10}$ **c)** $f(x) = x^{-1}$; $f'(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$
d) $f(x) = x^{-3}$; $f'(x) = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$ **e)** $f'(x) = -5x^{-6} = \frac{-5}{x^6}$

2 **a)** $f'(x) = 8x - 5$ **b)** $f'(x) = 6 - 12x$ **c)** $f(x) = x - 3x^2$; $f'(x) = 1 - 6x$
d) $f(x) = 4 - 12x + 9x^2$; $f'(x) = -12 + 18x$ **e)** $f(x) = 14x^2 - 28x$; $f'(x) = 28x - 28$
f) $f(x) = 2 + 3(16x^2 - 40x + 25) = 48x^2 - 120x + 77$; $f'(x) = 96x - 120$

3 **a)** $f'(x) = 4x - 1$ $f'(2) = 4 \cdot 2 - 1 = 7$
b) $f'(x) = -9x^2 + 4x$ $f'(1) = -9 + 4 = -5$
c) $f(x) = 2x^2 - x^3$ $f'(x) = 4x - 3x^2$ $f'(-1) = -4 - 3 = -7$

4 **a)** $f(x) = 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = 2x^2 - 4x + 3$ $f'(x) = 4x - 4$ $f'(1) = 0$
b) $f(x) = -3x^3 - 6 + x^2$ $f'(x) = -9x^2 + 2x$ $f'(1) = -7$
c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$ $f'(x) = 4x - 4$ $f'(1) = 0$

Nachgefragt

- $f(x) = (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$ $f'(x) = 8x - 12$
  Summenregel: einzelne Summanden ableiten
  1. Summand: Potenz-und Faktorregel anwenden
  2. Summand: Potenz-und Faktorregel anwenden
  3. Summand: Konstante, also Ableitung gleich null
- Beispiel: $f(x) = x^3 + 2x$ $f'(x) = 3x^2 + 2$
  Multiplikation des Gliedes mit der höchsten x-Potenz mit 4:
  $f^*(x) = 4x^3 + 2x$ $f^{*\prime}(x) = 12x^2 + 2$
  Vergleich der Steigungen von f und f* an der Stelle x = 1:
  $f'(1) = 5$ $f^{*\prime}(1) = 14 \neq 20 = 4 \cdot 5 = 4 \cdot f'(1)$.
  Die Aussage stimmt nicht. Es wurden die Summen-, die Faktor- und die Potenzregel benutzt.
  Die Aussage würde stimmen, wenn der gesamte Term mit 4 multipliziert werden würde.

5 Lösung im Schulbuch.

6 Der Graph einer Funktion f hat in einem $P(x|f(x))$ des Graphen von f eine waagrechte Tangente, wenn die Ableitung f' von f an der Stelle x gleich null ist: $f'(x) = 0$.
a) $f(x) = 0{,}0625x^2 - x + 4$ $f'(x) = 0{,}125x - 1$
$f'(x) = 0$: $0{,}125x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{0{,}125} = 8$
$f(8) = 0 \Longrightarrow$ waagrechte Tangente im Punkt $P(8|0)$
b) $f(x) = (1 - 2x)(1 + 2x + 3x^2) = -6x^3 - x^2 + 1$ $f'(x) = -18x^2 - 2x$
$f'(x) = 0$: $-18x^2 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x(-18x - 2) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{1}{9}$
$f(x_1) = 1$; $f(x_2) = \frac{242}{243} \Longrightarrow$ waagrechte Tangente in den Punkten $P_1(0|1)$ und $P_2\left(-\frac{1}{9}\middle|\frac{242}{243}\right)$

c) $f(x) = x^2 - x^3$ $\quad f'(x) = 2x - 3x^2$

$f'(x) = 0$: $\quad 2x - 3x^2 = 0 \Longleftrightarrow x(2 - 3x) = 0 \quad \Longrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{3}$

$f(x_1) = 0$; $f(x_2) = \frac{4}{27} \Longrightarrow$ waagrechte Tangente in den Punkten $P_1\,(0|0)$ und $P_2\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{4}{27}\right)$

7 Gesucht sind die Stellen, an denen für die Ableitung f' der Funktion f gilt: $f'(x) = 2$.

a) $f'(x) = 9x^2 + 4x + 1$

$f'(x) = 2$: $\quad 9x^2 + 4x + 1 = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 9x^2 + 4x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{9} \quad x_1 \approx 0{,}18$; $x_2 \approx -0{,}62$

$f(x_1) = 1{,}26$; $f(x_2) = 0{,}43 \quad \Longrightarrow \quad P_1\,(0{,}18|1{,}26)$; $P_2\,(-0{,}62|0{,}43)$

b) $f(x) = x^2 + x - 6 \quad f'(x) = 2x + 1$

$f'(x) = 2$: $\quad 2x + 1 = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow x = 0{,}5$

$f(0{,}5) = -5{,}25 \quad \Longrightarrow \quad P\,(0{,}5|-5{,}25)$

c) Der Graph der linearen Funktion f ist eine Gerade mit der Steigung 2 ($f'(x) = 2$). Die Tangente an den Graphen stimmt in allen Punkten mit dem Graphen überein. Demnach hat die Tangente in allen Punkte des Graphen die Steigung 2.

8 Gesucht sind die Stellen, an denen für die Ableitung f' der Funktion f gilt: $f'(x) = -3$.

a) $f'(x) = -12x^3 + 3$

$f'(x) = -3$: $\quad -12x^3 + 3 = -3 \quad \Longleftrightarrow \quad -12x^3 + 6 = 0 \quad \Longrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{3}{2 \cdot \sqrt[3]{2}} \quad \Longrightarrow \quad P\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\middle|\frac{3}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)$

b) $f'(x) = 6x$

$f'(x) = -3$: $\quad 6x = -3 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

$f(-0{,}5) = 1{,}75 \quad \Longrightarrow \quad P\,(-0{,}5|1{,}75)$

c) $f(x) = x^2 + 2x + 4 \quad f'(x) = 2x + 2$

$f'(x) = -3$: $\quad 2x + 2 = -3 \quad \Longrightarrow \quad x = -2{,}5$

$f(-2{,}5) = 5{,}25 \quad \Longrightarrow \quad P\,(-2{,}5|5{,}25)$

9 **a)** $f'(x) = -5x^4 + 6x$

$f'(x) = 0$: $\quad -5x^4 + 6x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x(-5x^3 + 6) = 0 \quad \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt[3]{\frac{6}{5}} \approx 1{,}06$

$f(x_1) = 0 \quad x < 0$: $f'(x) < 0 \quad x_2 > x > x_1$: $f'(x) > 0$

VZW von f' von – nach + im Punkt $(0|0)$ $\quad \Longrightarrow$ Tiefpunkt $(0|0)$

$f(x_2) = 2{,}03 \quad x_2 > x > x_1$: $f'(x) > 0 \quad x > x_2$: $f'(x) < 0$

VZW von f' von + nach – im Punkt $(1{,}06|2{,}03)$: $\quad \Longrightarrow$ Hochpunkt $(1{,}06|2{,}03)$

b) $f'(x) = 3x^2 + x - 2$

$f'(x) = 0$: $\quad 3x^2 + x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = -1$

$f(x_1) = -\frac{22}{27} \quad x_1 > x > x_2$: $f'(x) < 0 \quad x > x_1$: $f'(x) > 0$

VZW von f' von – nach + im Punkt $\left(\frac{2}{3}\middle|-\frac{22}{27}\right)$ $\quad \Longrightarrow$ Tiefpunkt $\left(\frac{2}{3}\middle|-\frac{22}{27}\right)$

$f(x_2) = 1{,}5 \quad x < x_2$: $f'(x) > 0 \quad x_1 > x > x_2$: $f'(x) < 0$

VZW von f' von + nach – im Punkt $(-1|1{,}5)$ $\quad \Longrightarrow$ Hochpunkt $(-1|1{,}5)$

c) $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1 \quad f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$

$f'(x) = 0$: $\quad 3x^2 + 6x + 1 = 0 \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{6}}{3} \quad x_1 \approx -0{,}18$; $x_2 \approx -1{,}82$

$f(x_1) = -1{,}09 \quad x_1 > x > x_2$: $f'(x) < 0 \quad x > x_2$: $f'(x) > 0$

VZW von f' von – nach + im Punkt $(-0{,}18|-1{,}09)$ $\quad \Longrightarrow$ Tiefpunkt $(-0{,}18|-1{,}09)$

$f(x_2) = 1{,}09 \quad x < x_2$: $f'(x) > 0 \quad x_1 > x > x_2$: $f'(x) < 0$

VZW von f' von + nach – im Punkt $(-1{,}82|1{,}09)$ $\quad \Longrightarrow$ Hochpunkt $(-1{,}82|1{,}09)$

10 $f_1(x) = x^2 + 6x + 9 - 3 = x^2 + 6x + 6$ $\quad f_1'(x) = 2x + 6$

$f_2(x) = -(x^2 - 4x + 4) + 2 = -x^2 + 4x - 2$ $\quad f_2'(x) = -2x + 4$

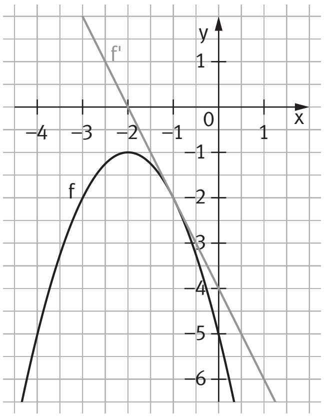
$f_1'(x) = f_2'(x)$: $\quad 2x + 6 = -2x + 4$ $\quad \Longrightarrow x = -0{,}5$

$f_1(-0{,}5) = 3{,}25$; $f_2(-0{,}5) = -4{,}25$

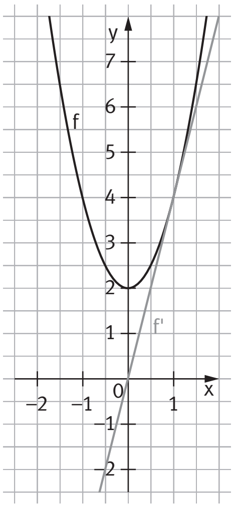
In den Punkten $P_1(-0{,}5\,|\,3{,}25)$ und $P_2(-0{,}5\,|\,-4{,}25)$ sind die Steigungen der Graphen von f_1 und f_2 gleich.

11 Lösung im Schulbuch.

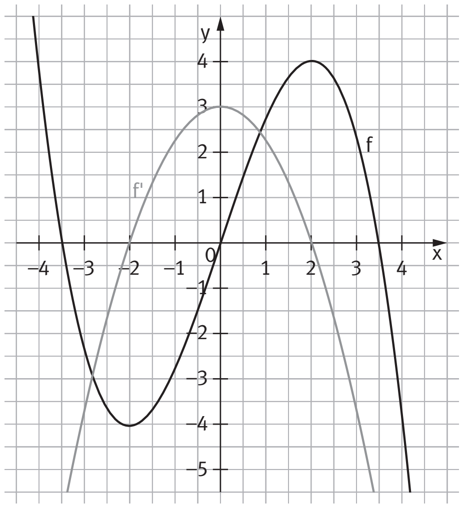
12 **a)** $f(x) = -x^2 - 4x - 5$
$f'(x) = -2x - 4$



b) $f(x) = 2x^2 + 2$
$f'(x) = 4x$



c) $f(x) = -0{,}25x^3 + 3x$
$f'(x) = -0{,}75x^2 + 3$

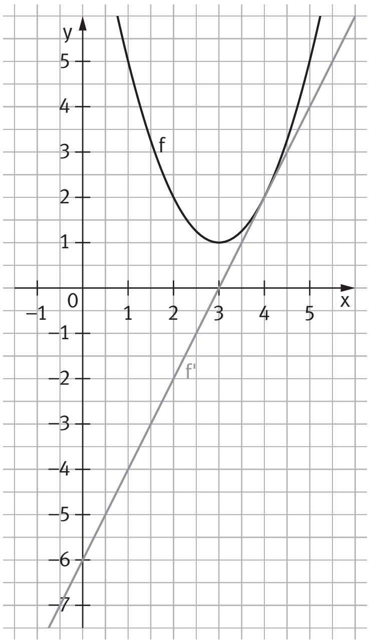


13 1: $f'(x) = 2x + 5$ — Graph A

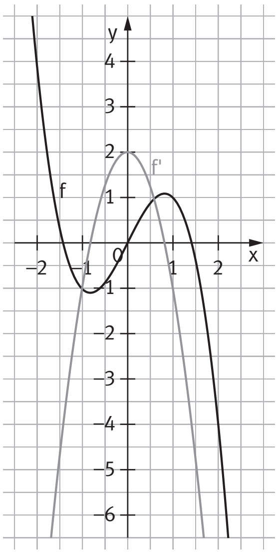
2: $f(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}25x^3 + 2x$ $\quad f'(x) = -0{,}75x^2 + x + 2$ — Graph C

3: $f'(x) = -2x^3 + 6x^2 - 2$ — Graph B

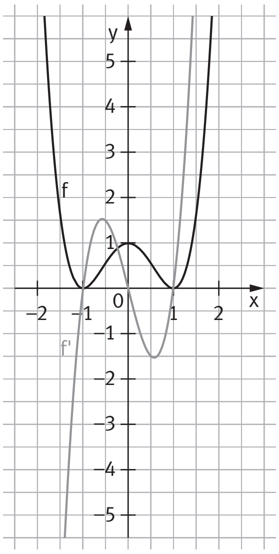
14 **a)** $f(x) = x^2 - 6x + 10$
$f'(x) = 2x - 6$



b) $f(x) = -x^3 + 2x$
$f'(x) = -3x^2 + 2$



c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
$f'(x) = 4x^3 - 4x$



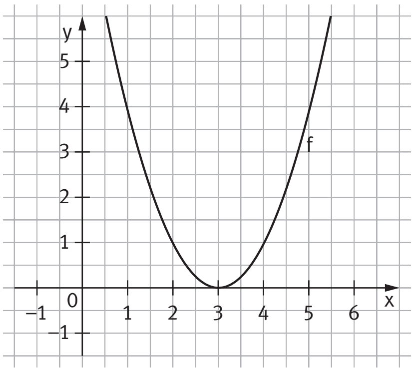
15 Lösung im Schulbuch.

16 **a)** ■ $f(-x) = -\frac{1}{3}(-x)^2 + x = -\frac{1}{3}x^2 + x$
$f(-x) \neq f(x);\ f(-x) \neq -f(x)$ $\Longrightarrow$ keine Symmetrie
■ ungerader und gerader Exponent $\Longrightarrow$ keine Symmetrie
b) ■ $f(-x) = 2(-x)^5 + 2(-x)^3 + x = -2x^5 - 2x^3 + x = -(2x^5 + 2x^3 - x)$
$f(-x) \neq f(x);\ f(-x) = -f(x)$ $\Longrightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung
■ nur ungerade Exponenten $\Longrightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung
c) ■ $f(-x) = 0{,}25x^3 + 4x^2$
$f(-x) \neq f(x);\ f(-x) \neq -f(x)$ $\Longrightarrow$ keine Symmetrie
■ ungerader und gerader Exponent $\Longrightarrow$ keine Symmetrie
d) ■ $f(x) = -x^2 - 2x - 2$ $f(-x) = -x^2 + 2x - 2$
$f(-x) \neq f(x);\ f(-x) \neq -f(x)$ $\Longrightarrow$ keine Symmetrie
■ ungerade und gerade Exponenten $\Longrightarrow$ keine Symmetrie
e) ■ $f(x) = x^2 - 6x + 9 + 2x^3$ $f(-x) = x^2 + 6x + 9 - 2x^3$
$f(-x) \neq f(x);\ f(-x) \neq -f(x)$ $\Longrightarrow$ keine Symmetrie
■ ungerade und gerade Exponenten $\Longrightarrow$ keine Symmetrie
f) ■ $f(-x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
$f(-x) \neq f(x);\ f(-x) \neq -f(x)$ $\Longrightarrow$ keine Symmetrie
■ ungerade und gerade Exponenten $\Longrightarrow$ keine Symmetrie

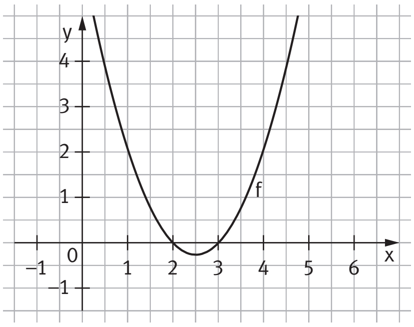
17 B kommt nicht in Frage, da die Extrempunkte von f (Nullstellen von f') bei x = 0 und x = 2 liegen.
C scheidet aus, da es wegen des Hochpunkts von f bei x = 0 einen VZW der Ableitung f' von + nach – bei x = 0 geben muss.
D ist der Graph der Ableitungsfunktion f'.

18 Lösung im Schulbuch.

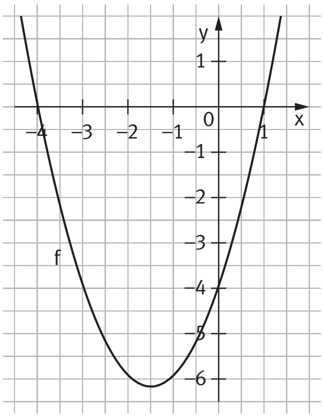
19 **a)** $x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-3)^2 = 0 \quad \Longrightarrow x_1 = x_2 = 3$



b) $x^2 - 5x + 6 = 0$ z. B. Vieta: $-5 = -(x_1 + x_2);\ 6 = x_1 \cdot x_2 \Longrightarrow x_1 = 2;\ x_2 = 3$

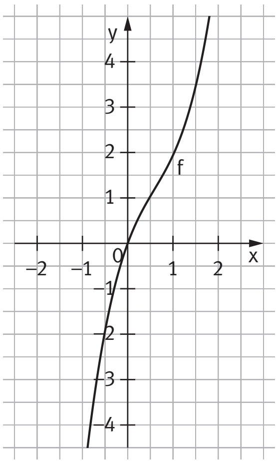


c) $x^2 + 3x - 4 = 0$ z. B. Vieta: $3 = -(x_1 + x_2)$; $-4 = x_1 \cdot x_2 \implies x_1 = 1$; $x_2 = -4$

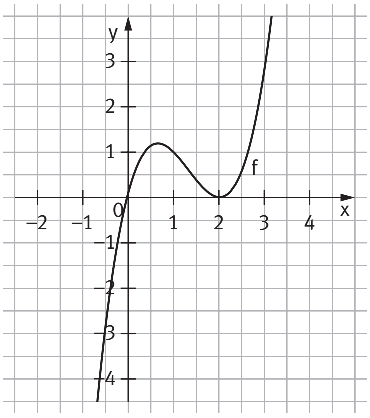


d) $x^3 - 2x^2 + 3x = 0 \iff x(x^2 - 2x + 3) = 0 \implies x_1 = 0$

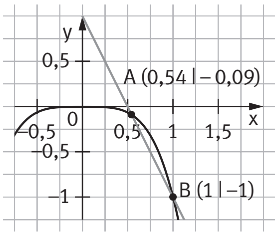
$x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$ Keine weitere Nullstelle, da Diskriminante negativ.



e) $x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \iff x(x^2 - 4x + 4) = 0 \iff x(x-2)^2 = 0 \implies x_1 = 0, x_2 = x_3 = 2$

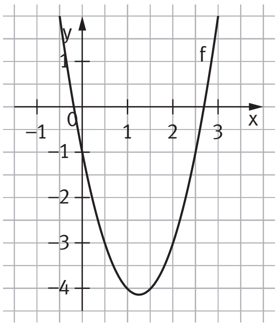


f) graphische Lösung: $-x^4 + 2x - 1 = 0 \iff -x^4 = -2x + 1$

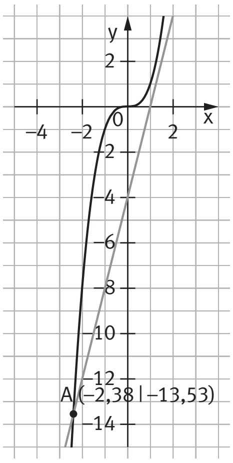


Schnittpunkte: A (0,54 | –0,09) und B (1 | –1) $\implies$ Nullstellen von f: $x_1 = 0,54$, $x_2 = 1$

g) $2x^2 - 5x - 1 = 0 \qquad \Longrightarrow x_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{4},\ x_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{4}$

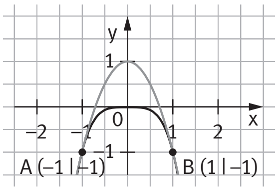


h) graphische Lösung: $x^3 - 4x + 4 = 0 \quad \Longrightarrow x^3 = 4x - 4$



Schnittpunkt A (–2,38 | –13,53) $\quad \Longrightarrow$ Nullstelle von f: $x = -2{,}38$

i) graphische Lösung: $-x^4 + 2x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow -x^4 = -2x^2 + 1$



Schnittpunkte: A (–1 | –1) und B (1 | –1) $\Longrightarrow$ Nullstellen von f: $x_1 = -1,\ x_2 = 1$

rechnerische Lösung: $-x^4 + 2x^2 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -(x^4 - 2x^2 + 1) = 0$

$\Longleftrightarrow \quad -(x^2 - 1)^2 = 0$

$\Longrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$

20 a) $f'(x) = -25x^4 - x$ **b)** $f'(x) = -4x^{-5}$ **c)** $f'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ **d)** $f(x) = x^{\frac{3}{4}};\ f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

21

Vorgehensweise symbolisch	Vorgehensweise verbalisiert	Ziel der Umformung
$f(x) = k \cdot g(x)$	Definition von f	–
$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	allg. Form des Differenzenquotient	Aus dem Differenzenquotient wird später der Differentialquotient abgeleitet.
$\frac{k \cdot g(x+h) - k \cdot g(x)}{h}$	Einsetzen der Funktion $f(x) = k \cdot g(x)$	Differenzenquotient der Funktion f berechnen.
$\frac{k \cdot (g(x+h) - \cdot g(x))}{h}$	Ausklammern von k	Vereinfachung des Ausdrucks
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	allg. Form des Differentialquotienten	–
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left(k \cdot \frac{g(x+h) - \cdot g(x)}{h}\right)$	Übergang zum Differentialquotienten	Differentialquotient als Grenzwert des Differenzenquotienten
$f'(x) = k \cdot \lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{g(x+h) - \cdot g(x)}{h}\right)$	k als von h unabhängige Konstante vor den Limes ziehen	Differentialquotient für die Funktion g
$f'(x) = k \cdot g'(x)$	Einsetzen der allg. Form des Differentialquotienten	Faktorregel

1.1 Die Summen-, Faktor- und Potenzregel der Ableitung

22

Vorgehensweise symbolisch	Vorgehensweise verbalisiert	Ziel der Umformung
$f(x) = g(x) + k(x)$	Definition von f	–
$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	allg. Form des Differenzenquotient	Aus dem Differenzenquotient wird später der Differentialquotient abgeleitet.
$\frac{g(x+h) + k(x+h) - g(x) - k(x)}{h}$	Einsetzen der Funktion $f(x) = k \cdot g(x)$	Differenzenquotient der Funktion f berechnen.
$\frac{g(x+h) - g(h)}{h} + \frac{k(x+h) - k(h)}{h}$	Auseinanderziehen und Sortieren des Quotienten nach den Funktionen g und k	Differenzenquotient der einzelnen Funktionen g und k berechnen.
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	allg. Form des Differentialquotienten	–
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(h)}{h} + \frac{k(x+h) - k(h)}{h}\right)$	Übergang zum Differentialquotienten	Differentialquotient als Grenzwert des Differenzenquotienten
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(h)}{h}\right) + \lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{k(x+h) - k(h)}{h}\right)$	Grenzwert der Summe als Summe zweier Grenzwerte schreiben	Den Differentialquotienten der einzelnen Funktionen g und k berechnen
$f'(x) = g'(x) + k'(x)$	Einsetzen der allg. Form des Differentialquotienten	Summenregel

Nachgefragt

- Die Aussage stimmt. Begründung:
  Sei f eine Funktion mit dem Funktionsterm $f(x)$ und der Ableitung $f'(x)$. Der Funktionsterm der um zwei Einheiten nach links verschobenen Funktion f* ist dann $f^*(x) = f(x+2)$.
  Wir untersuchen die Ableitung von $f^*(x)$:
  $f^{*'}(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h+2) - f(x+2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f((x+2)+h) - f(x+2)}{h} = f'(x+2)$
  $f'(x+2)$ ist die um zwei Einheiten nach links verschobene Ableitungsfunktion $f'(x)$.
  Beispiel: $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$
  $f^*(x) = f(x+2) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ $\quad f^{*'}(x) = 2x + 4$
  $f'(x)$ um zwei Einheiten nach links verschoben: $f'(x+2) = 2(x+2) = 2x + 4 = f^{*'}(x)$
- Die Aussage stimmt nicht. Gegenbeispiel:
  $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$
  $g(x) = x^2 + 1$; $g'(x) = 2x = f'(x)$
- Die Aussage stimmt nicht. Gegenbeispiel:
  $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$
  An der y-Achse gespiegelte Funktion f*:
  $f^*(x) = f(-x) = (-x)^3 = -x^3$; $f^{*'}(x) = -3x^2$
  $f'(-x) = 3x^2 \neq -3x^2 = f^{*'}(x)$
- Die Aussage stimmt. Begründung:
  Sei f eine Funktion mit dem Funktionsterm $f(x)$ und der Ableitung $f'(x)$. Der Funktionsterm der an der x-Achse gespiegelten Funktion f* ist dann $f^*(x) = -f(x)$. Für die Ableitung $f^{*'}(x)$ gilt:
  $f^{*'}(x) = [-f(x)]' = -f'(x)$. Die Ableitung $f^{*'}(x)$ der an der x-Achse gespiegelten Funktion f* ist somit die an der x-Achse gespiegelte Ableitung $f'(x)$ der Funktion f.

1.2 Das Produkt von Funktionen und die Produktregel

Entdecken

- $f(x) = g(x) \cdot h(x) = x \cdot (x + 2)$ (roter Graph)
  $g(x) = x$ (blauer Graph); $g'(x) = 1$
  $h(x) = x + 2$ (grüner Graph); $h'(x) = 1$
  Es gilt $g'(x) \cdot h'(x) = 1$. Dies kann nicht $f'(x)$ sein, da die Steigung des Graphen von $f(x)$ offensichtlich nicht konstant ist.

Aufgaben

1 Lösung im Schulbuch.

2 **a)** $f(x) = (1 + 2x)(1 + 2x)$ $\quad f'(x) = 2 \cdot (1 + 2x) + (1 + 2x) \cdot 2 = 4(1 + 2x) = 4 + 8x$

b) $f'(x) = 1 \cdot (x + 5) + x \cdot 1 = 2x + 5$

c) $f(x) = x \cdot x^{\frac{1}{2}}$ $\quad f'(x) = 1 \cdot x^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

d) $f(x) = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ $\quad f'(x) = 2x \cdot x^{\frac{1}{2}} + x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$

e) $f'(x) = 1 \cdot (2x - 3) + (x + 2) \cdot 2 = 4x + 1$

f) $f(x) = (x - 1) \cdot x^{\frac{3}{2}}$ $\quad f'(x) = 1 \cdot x^{\frac{3}{2}} + (x - 1) \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$
$= \frac{5}{2}\sqrt{x^3} - \frac{3}{2}\sqrt{x}$

3 **a)** $f'(x) = \mathbf{1} \cdot (x + 4) + \mathbf{(x + 4)} \cdot 1$ $\quad$ **b)** $f'(x) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\sqrt{x}}} \cdot (x + 1) + \sqrt{x} \cdot 1$

c) $f'(x) = 2 \cdot \sqrt{\mathbf{x^3}} + 2x \cdot \mathbf{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$ $\quad$ **d)** $f'(x) = \mathbf{3} \cdot \mathbf{(2x - 3)} + \mathbf{(3x + 2)} \cdot 2$

4 **a)** 1 : $f(x) = 2x^2 + x^3$; $f'(x) = 4x + 3x^2$
2 : $f'(x) = 2x(2 + x) + x^2 = 4x + 3x^2$

b) 1 : $f(x) = x^2 - 2x + 1$; $f'(x) = 2x - 2$
2 : $f'(x) = 1 \cdot (x - 1) + (x - 1) \cdot 1 = 2x - 2$

c) 1 : $f(x) = x^3 + x^2 - x$; $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$
2 : $f'(x) = 1 \cdot (x^2 + x - 1) + x \cdot (2x + 1) = 3x^2 + 2x - 1$

d) 1 : $f(x) = (x^2 - 2^2)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$; $f'(x) = 4x^3 - 16x$
2 : $f'(x) = [1 \cdot (x - 2) + (x - 2) \cdot 1](x - 2)^2 + (x + 2)^2 \cdot [1 \cdot (x - 2) + (x - 2) \cdot 1] =$
$2(x + 2)(x - 2)^2 + (x + 2)^2 \cdot 2(x - 2) = 4x^3 - 16x$

e) 1 : $f(x) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1$; $f'(x) = 3x^2$
2 : $f'(x) = 1 \cdot (x^2 - x + 1) + (x + 1) \cdot (2x - 1) = 3x^2$

f) 1 : $f(x) = x^3 - x^4$; $f'(x) = 3x^2 - 4x^3$
2 : $f'(x) = 3x^2(1 - x) + x^3 \cdot (-1) = 3x^2 - 4x^3$

5 **a)** $f(x) = 3x^2 - 3x + 3x - 3 = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 6x$
$f'(x) = 1 \cdot (3x - 3) + (x + 1) \cdot 3 = 3x - 3 + 3x + 3 = 6x$

b) $f(x) = x^3 - x + x^2 - 1$; $f'(x) = 3x^2 - 1 + 2x$
$f'(x) = 2x(x + 1) + (x^2 - 1) \cdot 1 = 3x^2 + 2x - 1$

c) $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4$; $f'(x) = 4x^3 + 8x$
$f'(x) = 2x(x^2 + 2) + (x^2 + 2) \cdot 2x = 4x(x^2 + 2) = 4x^3 + 8x$

d) $f(x) = 3\sqrt{x^3} = 3x^{\frac{3}{2}}$; $f'(x) = 3 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{9}{2}\sqrt{x}$
$f'(x) = 3 \cdot \sqrt{x} + 3x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{9}{2}\sqrt{x}$

e) $f(x) = 3\sqrt{x^5} = 3x^{\frac{5}{2}}$; $f'(x) = 3 \cdot \frac{5}{2} \cdot \sqrt[2]{x^3} = \frac{15}{2}\sqrt{x^3}$

$f'(x) = 6x \cdot \sqrt{x} + 3x^{2\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 6\sqrt{x^3} + \frac{3}{2}\sqrt{x^3} = \frac{15}{2}\sqrt{x^3}$

f) $f(x) = 3\sqrt{x^7} = 3x^{\frac{7}{2}}$; $f'(x) = 3 \cdot \frac{7}{2} \cdot \sqrt{x^5} = \frac{21}{2}\sqrt{x^5}$; $f'(x) = 3 \cdot \frac{7}{2} \cdot \sqrt{x^5} = \frac{21}{2}\sqrt{x^5}$

$f'(x) = 6x \cdot \sqrt{x^3} + 3x^2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x} = 6\sqrt{x^5} + \frac{9}{2}\sqrt{x^5} = \frac{21}{2}\sqrt{x^5}$

6 **a)** entweder Produkt-, Potenz- und Summenregel oder (nach Ausmultiplizieren) Potenz- und Summenregel

b) entweder Produkt-, Potenz- und Summenregel oder (nach Ausmultiplizieren) Potenz- und Summenregel

c) entweder Produkt- und Potenzregel oder (nach Zusammenfassen der Potenzen zu $x^{\frac{3}{2}}$) Potenzregel

d) entweder Produkt-, Potenz- und Summenregel oder (nach Ausmultiplizieren) Potenz- und Summenregel

e) entweder Produkt-, Potenz- und Summenregel oder (nach Ausmultiplizieren) Potenz- und Summenregel

f) Summen-, Faktor-, und Potenzregel

Nachgefragt

- f_1: Produktregel anwendbar, aber nicht sinnvoll, da Anwendung der Potenzregel wegen $f_1(x) = x^2$ einfacher.
  f_2: Produktregel anwendbar, aber nicht sinnvoll, da Anwendung der Faktorregel einfacher.
  f_3: Produktregel anwendbar; Anwendung sinnvoll.
  f_4: Produktregel anwendbar, wegen $f_4(x) = x$ aber nicht sinnvoll.
- Individuelle Lösungen. Beispiel: $f(x) = (x + 2)(2x - 3)$.
- Individuelle Lösungen. Beispiel:
  $f(x) = u(x) \cdot v(x) = 2x \cdot (x + 3) = 4x^2 + 6x$
  $u'(x) = 2$; $v'(x) = 1$ $\quad$ $u'(x) \cdot v'(x) = 2$
  $f'(x) = 2(x + 3) + 2x \cdot 1 = 4x + 6 \neq u'(x) \cdot v'(x) = 2$
  Vorschlag 2 ist somit richtig.

7 **a)** $f(x) = 2x \cdot \sqrt{x}$; $\quad f'(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

richtige Ableitung: $f'(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $f(x) = (x^2 - 2)^2$; $\quad f'(x) = 4x^2(x^2 - 2)$

richtige Ableitung: $f'(x) = 4x(x^2 - 2)$

c) $f(x) = x^2(x + 3)$; $\quad f'(x) = 2(x + 3) + x^2 \cdot 3$

richtige Ableitung: $f'(x) = 2x(x + 3) + x^2$

d) $f(x) = \sqrt{4x} \cdot \sqrt{9x}$; $\quad f'(x) = 2x \cdot \sqrt{9x} + \sqrt{4x} \cdot 3x$

richtige Ableitung: $f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x}} \cdot \sqrt{9x} + \sqrt{4x} \cdot \frac{9}{2\sqrt{9x}} = 6$

oder: $f(x) = 6x$; $\quad f'(x) = 6$

8 Lösung im Schulbuch.

9 **a)** $F'(x) = 2(2x-4) + (2x-4)\cdot 2 = 4(2x-4) = 8x-16 = f(x)$
b) $F'(x) = 2\cdot 2x\left(x^2-\frac{2}{3}\right) = 4x^3 - \frac{8}{3}x = f(x)$
c) $F'(x) = 2x(x+1) + (x^2-1)\cdot 1 = 3x^2+2x-1 = f(x)$
d) $F'(x) = (2x+3)(3x-3) + (x^2+3x)\cdot 3 = 6x^2+9x-6x-9+3x^2+9x = 9x^2+12-9 = 3(3x^2+4x-3) = f(x)$

10 **a)** $f'(x) = 3\cdot 2\cdot (x+1) = 6x+6$
waagerechte Tangente: $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 6x+6 = 0 \Longleftrightarrow x = -1$
b) $f'(x) = 24x^2+4$
$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 24x^2+4 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = -\frac{1}{6}$ keine Lösung, d. h. es gibt keine waagerechte Tangente.

11 Individuelle Lösungen. Beispiele:
a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3$
b) $f(x) = 4x-3$
c) $f(x) = 2$
d) $f(x) = 2x + \frac{1}{4}x^2$
e) $f'(x) = 1-2x+x^2$; $f(x) = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3$
f) $f'(x) = x^2-2x+1$; $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 4$

12 **a)** $f(0) = 0$; $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 + x^3$
b) $f(2) = -3$; $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 + x^3 - 13$

13 f_1 grüner Graph; f_1' orange Graph
f_2 blauer Graph; f_2' lila Graph
f_3 roter Graph; f_3' gelber Graph

14 $f(x) = x(x+1)(x-1) = x(x^2-1) = x^3 - x$ $\qquad f'(x) = 3x^2-1$
Graph 1 kommt z. B. wegen $f'(0) = -1$ nicht in Frage. Die Graphen 3 und 4 haben u. a. bei $x = 1$ eine Nullstelle, es ist aber $f'(1) = 2 \neq 0$. Die Graphen 1 und 3 sind außerdem keine Parabeln.
Zur Ableitungsfunktion $f'(x)$ gehört somit der Graph 2.

15 **a)** Individuelle Schätzungen.
$f'(x) = 3x^2-4x$ $\qquad f'(-0{,}5) = 2{,}75$ $\qquad f'(1) = -1$
b) Individuelle Schätzungen.
$f'(x) = -4x^3-9x^2+1$ $\qquad f'(-0{,}5) = -0{,}75$ $\qquad f'(1) = -12$

16 Lösung im Schulbuch.

17 Mit der Länge l und der Breite b(Maßeinheit jeweils Meter) gilt für den Umfang der rechteckigen Fläche:
$U = 2\cdot l + 2\cdot b = 20 \Longrightarrow l = 10-b$.
Für den Flächeninhalt A gilt: $A = l\cdot b = (10-b)\cdot b = -b^2 + 10\cdot b$.
Um den größten Flächeninhalt zu ermitteln, bilden wir die Ableitung: $A'(b) = -2b+10$.
$A'(b) = 0 \Longleftrightarrow -2b+10 = 0 \Longleftrightarrow b = 5$; $l = 10-5 = 5$.
Mit der Länge 5 m und der Breite 5 m erhält man die größte Fläche (Quadrat). Ihr Flächeninhalt ist
$A = 5\text{ m}\cdot 5\text{ m} = 25\text{ m}^2$.

18 Für den Flächeninhalt A des Dreiecks gilt: $A = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot(2\cdot x)\cdot y = x\cdot y = x\cdot(4-x^2)$.
$A'(x) = -3x^2+4$ $\qquad A'(x) = 0 \Longleftrightarrow -3x^2+4 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Longleftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$
Für $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ erhält man den Funktionswert $4 - \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.
Das gleichschenklige Dreieck mit dem Eckpunkt $P\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \mid \frac{8}{3}\right)$ hat den größten Flächeninhalt.

19 a) $x_{N1} = 0$, $x_{N2} = 1$

b) $f'(x) = \frac{x-1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}$ An der Stelle $x_{N1} = 0$ ist $f'(x)$ nicht definiert.

Steigung an der Stelle $x_{N2} = 1$: $f'(1) = 1$

c) waagerechte Tangente: $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{x-1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{3}$

An der Stelle $x = \frac{1}{3}$ besitzt der Graph von f eine waagerechte Tangente.

20 ■ $f'(x) = 9x^2 - 4$ $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 9x^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{4}{9} \Longrightarrow x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$

■ $g(x) = (f(x))^2 = (3x^3 - 4x)^2 = (3x^3 - 4x)(3x^3 - 4x)$

$g'(x) = (9x^2 - 4)(3x^3 - 4x) + (3x^3 - 4x)(9x^2 - 4) = 2(3x^3 - 4x)(9x^2 - 4) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$

Jede Nullstelle von $f'(x)$ ist somit auch eine Nullstelle von $g'(x)$. Damit hat auch die Funktion $g(x)$ an den Stellen $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$ waagerechte Tangenten.

Darüber hinaus sind auch die Nullstellen 0 und $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ von $f(x)$ Nullstellen von $g'(x)$. $g(x)$ hat also auch an diesen Stellen waagerechte Tangenten.

■ Wenn $f(x)$ an einer Stelle eine waagerechte Tangente hat, dann hat auch $g(x) = (f(x))^2$ an dieser Stelle eine waagerechte Tangente. Der Satz in der Aufgabenstellung ist also richtig.

Die Umkehrung gilt jedoch nicht: Wenn $g(x)$ an einer Stelle eine waagerechte Tangente hat, dann muss $f(x)$ an dieser Stelle nicht zwingend auch eine waagerechte Tangente haben, wie die Nullstellen 0 und $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ von $g'(x)$ zeigen. An diesen Stellen hat $f'(x)$ keine Nullstellen und $f(x)$ somit keine waagerechten Tangenten.

21 a) $f_2(x) = -x(x+1)^2 = -x^3 - 2x^2 - x$ $f_2(-1) = 0$

$f_2'(x) = -3x^2 - 4x - 1$ $f_2'(-1) = 0$

b) f_1 hat den Hochpunkt $P(-1\,|\,0)$. Wir untersuchen, ob P auch ein Hochpunkt von f_2 ist.

$f_2(-1) = 0 \Longrightarrow$ P liegt auf dem Graphen von f_2.

$f_2'(x) = -3x^2 - 4x - 1$ $f_2'(-1) = 0$

In einer Umgebung von $x_0 = -1$ gilt: $x < -1$: $f_2'(x) < 0$ $x > -1$: $f_2'(x) > 0$.

$\Longrightarrow$ Vorzeichenwechsel von $f_2(x)$ bei $x_0 = -1$ von – nach + $\Longrightarrow P(-1\,|\,0)$ ist ein Tiefpunkt des Graphen von f_2.

c) $f_3(-1) = 0 \Longrightarrow$ P liegt auf dem Graphen von f_3.

$f_3'(x) = -4x^3 - 6x^2 - 2x$ $f_3'(-1) = 0$

In einer Umgeung von $x_0 = -1$ gilt: $x < -1$: $f_3'(x) > 0$ $x > -1$: $f_3'(x) < 0$

$\Longrightarrow$ Vorzeichenwechsel von $f_3(x)$ bei $x_0 = -1$ von + nach – $\Longrightarrow P(-1\,|\,0)$ ist ein Hochpunkt des Graphen von f_3.

22 a) $x_{1,2} = -2$; $x_{3,4} = 1$

b) Ableiten der ausmultiplizierten Form von $g_1(x)$ führt auf:

$g_1'(x) = 0 \Longleftrightarrow 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 0.$

Am Graphen von $g_1'(x)$ lassen sich die Nullstellen von $g_1'(x)$ näherungsweise ablesen:

$x_1 = -2$; $x_2 = 1$; $x_3 = -\frac{1}{2}$. Die Nullstellen von $g_1(x)$ sind somit auch Nullstellen von $g_1'(x)$, also doppelte Nullstellen von $g_1(x)$.

Eine exakte Lösung erhält man, wenn man $g_1(x)$ durch mehrmaliges Anwenden der Produktregel ableitet:

$g_1(x) = (x+2)(x+2)(x-1)(x-1)$

$g_1'(x) = [(x+2)(x+2)(x-1)(x-1)]' =$

$(x+2)'\,[(x+2)(x-1)(x-1)] + (x+2)[(x+2)(x-1)(x-1)]' =$

$(x+2)(x-1)^2 + (x+2)[(x+2)'\,(x-1)(x-1) + (x+2)\,[(x-1)(x-1)]'] =$

$(x+2)(x-1)^2 + (x+2)[(x-1)^2 + (x+2)[(x-1)'\,(x-1) + (x-1)(x-1)']] =$

$(x + 2)(x - 1)^2 + (x + 2)[(x - 1)^2 + (x + 2)[(x - 1) + (x - 1)]] =$
$(x + 2)(x - 1)^2 + (x + 2)[(x - 1)^2 + (x + 2)(2x - 2)] =$
$(x + 2)(x - 1)^2 + (x + 2)(x - 1)^2 + (x + 2)^2(2x - 2) =$
$2(x + 2)(x - 1)^2 + (x + 2)^2(2x - 2) =$
$2(x + 2)(x - 1)^2 + 2(x + 2)^2(x - 1) =$
$2(x + 2)(x - 1)[(x - 1) + (x + 2)] =$
$2(x + 2)(x - 1)(2x + 1)$
$g_1'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2(x + 2)(x - 1)(2x + 1) = 0 \Longrightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 1;\ x_3 = -\frac{1}{2}$

c) $g_1'(x) = -4 \Longleftrightarrow 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = -4 \Longleftrightarrow 4x^3 + 6x^2 - 6x = 0 \Longleftrightarrow 2x(2x^2 + 3x - 3) = 0$
$\Longrightarrow x_1 = 0;\ x_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{4};\ x_3 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{4}$

d) g_2 ist eine quadratische Funktion, ihr Schaubild ist eine Parabel.

e) Nachweis der Darstellung $g_1'(x) = 2(x + 2)(x - 1)(2x + 1)$: siehe **b)**.
Monotoniebereiche:
$x < -2$: $g_1'(x) < 0 \Longrightarrow g_1(x)$ monoton fallend
$-\frac{1}{2} > x > -2$: $g_1'(x) > 0 \Longrightarrow g_1(x)$ monoton steigend
$1 > x > -\frac{1}{2}$: $g_1'(x) < 0 \Longrightarrow g_1(x)$ monoton fallend
$x > 1$: $g_1'(x) > 0 \Longrightarrow g_1(x)$ monoton steigend

f) $g_2(x) = x^2 + 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 = 2x^2 + 2x + 5$
Es kommen ungerade und gerade Exponeten vor. g_2 weist somit keine Symmetrie auf.

23 a) $f(x) = \frac{2}{x} = 2 \cdot x^{-1}$ $\quad f'(x) = 0 \cdot x^{-1} + 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \frac{-2}{x^2}$

b) 1 $f(x) = (2x - 1) \cdot x^{-1}$ $\quad f'(x) = 2 \cdot x^{-1} + (2x - 1) \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \frac{2}{x} - \frac{2x - 1)}{x^2}$

2 $f(x) = (3x + 2) \cdot x^{-2}$ $\quad f'(x) = 3x^{-2} + (3x + 2) \cdot (-2)x^{-3} = \frac{3}{x^2} - \frac{6x + 4}{x^3}$

3 $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-1}$ $\quad f'(x) = 0 \cdot x^{-1} + 0{,}5 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$

4 $f(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{-3}$ $\quad f'(x) = 0 \cdot x^{-3} + \frac{3}{2} \cdot (-3) \cdot x^{-4} = -\frac{9}{2x^4}$

5 $f(x) = (3x + 2) \cdot x^{-2}$ $\quad f'(x) = 3 \cdot x^{-2} + (3x + 2) \cdot (-2)x^{-3} = \frac{3}{x^2} - \frac{6x + 4}{x^3}$

6 $f(x) = \frac{(3x + 3)(x - 1)}{x^4(x - 1)(x + 1)} = \frac{3x + 3}{x^4(x + 1)} = (3x + 3) \cdot (x^5 + x^4)^{-1}$
$f'(x) = 3(x^5 + x^4)^{-1} + (3x + 3) \cdot (-1) \cdot (x^5 + x^4)^{-2} \cdot (5x^4 + 4x^3) = \frac{3}{x^5 + x^4} - \frac{(3x + 3)(5x^4 + 4x^3)}{(x^5 + x^4)^2}$

Nachgefragt

- Eine anschauliche Herleitung steht im Schulbuch auf Seite 27.
- Mögliches Beispiel 1: $f(x) = (2x + 1)^2$
  Mögliches Beispiel 2: $f(x) = (2x^2 + 1)^2(3x^4 + x)$
  Mögliches Beispiel 3: $f(x) = x^5 \cdot \frac{1}{x^2}$
- Mögliches Beispiel: $f(x) = 3x^2$
  Faktorregel $f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$
  Produktregel $f'(x) = 0 \cdot x^2 + 3 \cdot 2x = 6x$
- Mögliche Anwendungen ergeben sich z. B. bei Extremwertproblemen wie dem folgenden: Welchen Flächeninhalt hat die größte rechteckige Fläche, die man mit einem 20 m langen Zaun einzäunen kann?
- Als isoperimetrisches Problem bezeichnet man die Frage, welche geschlossene Kurve mit gegebener Länge die größte Fläche umschließt. Es handelt sich dabei um ein Extremalproblem, das mit Methoden der Differentialrechnung gelöst werden kann. Die Lösung ist der Kreis.

1.3 Die Verkettung von Funktionen und die Kettenregel

Entdecken

- Bei $f(x) = (x+1)^2$ wird zuerst 1 addiert, und das Ergebnis wird dann quadriert. Mit den beiden Funktionen $u(x) = x^2$ und $v(x) = x + 1$ lässt sich dies als $f(x) = (x+1)^2 = u(v(x))$ schreiben. Die Funktion u wird auf das Ergebnis der Anwendung der Funktion v angewandt.
- Bei $\sqrt{3x-1}$ wird die Variable zuerst mit 3 multipliziert, vom Ergebnis wird 1 subtrahiert und aus dem dann erhaltenen Ergebnis wird die Wurzel gezogen (falls möglich).
  Mit den Funktionen $u(x) = \sqrt{x}$, $v(x) = x - 1$ und $w(x) = 3x$ lässt sich dies als $g(x) = \sqrt{3x-1} = u(v(w(x)))$ schreiben.
- Individuelle Lösungen. Beispiele:
  $f(x) = \sin(2+3x)$ $\quad f(x) = (x^2+3x)^4$ $\quad f(x) = e^{2x+1}$

Aufgaben

1 **a)** $u(v(x)) = 3(4x) = 12x$ $\quad v(u(x)) = 4(3x) = 12x$
b) $u(v(x)) = 5(x-4) = 5x - 20$ $\quad v(u(x)) = 5x - 4$
c) $u(v(x)) = 2x^2$ $\quad v(u(x)) = (2x)^2 = 4x^2$
d) $u(v(x)) = 2(1-x^2) + 1 = 2 - 2x^2 + 1 = 3 - 2x^2$
$v(u(x)) = 1 - (2x+1)^2 = 1 - (4x^2 + 4x + 1) = -4x^2 - 4x$
e) $u(v(x)) = \sqrt{x} - 2$ $\quad v(u(x)) = \sqrt{x-2}$
f) $u(v(x)) = \frac{1}{x^2}$ $\quad v(u(x)) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$

2 $u \circ v(x) = u(v(x)) = 2\sqrt{x^2-1} + 1$
$v \circ u(x) = v(u(x)) = \sqrt{(2x+1)^2 - 1} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1 - 1} = \sqrt{4x^2+4x} = 2\sqrt{x^2+x}$

3 $f(x) = u(v(x)) = 2\sqrt{\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x}$ $\quad g(x) = v(u(x)) = \frac{1}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{1}{4x}$

4 **a)** $u(x) = x^3$; $v(x) = x + 4$; $f(x) = u(v(x))$
b) $u(x) = \sqrt{x}$; $v(x) = 2x^2 + 3$; $f(x) = u(v(x))$
c) $u(x) = \frac{2}{x}$; $v(x) = 3x + 4$; $f(x) = u(v(x))$
d) $f(x) = (x+3)^2$ $\quad u(x) = x^2$; $v(x) = x + 3$; $f(x) = u(v(x))$

5 Lösung im Schulbuch.

6 **a)** $u(x) = \sqrt{x}$; $v(x) = 3x - 2$
b) $u(x) = \frac{1}{x}$; $v(x) = 2x^2$
c) $f(x) = (x+4)^2$ $\quad u(x) = x^2$; $v(x) = x + 4$
d) $u(x) = \frac{3}{x}$; $v(x) = \sqrt{3x^2+1}$
e) $f(x) = (x^2-2)^2$ $\quad u(x) = x^2$; $v(x) = x^2 - 2$
f) $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 3x}$ $\quad u(x) = \frac{1}{x}$; $v(x) = 2x^2 - 3x$

Nachgefragt

- Bei allen Beispielen **a)** bis **e)** gilt $u(v(x)) \neq v(u(x))$.
- $f \circ g$: $f(g(x)) = 3\sqrt{x+1} - 2$ $g \circ f$: $g(f(x)) = \sqrt{3x-2+1} = \sqrt{3x-1}$

x	−2	−1	0	1	2
f (g (x))	–	−2	1	$3\sqrt{2} - 2$	$3\sqrt{3} - 2$
g (f (x))	–	–	–	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

Die Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$ unterscheiden sich sowohl bei der Definitionsmenge als auch im Allgemeinen bei den Funktionswerten.

- Mögliche Beispiele:
  1 $u(x) = \frac{1}{x}$; $v(x) = x^2$; $D_u = D_v = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
  2 $u(x) = 3x$; $v(x) = 4x$; $D_u = D_v = \mathbb{R}$
  3 $u(x) = \sqrt{x}$; $v(x) = x^2$; $D_u = D_v = \mathbb{R}_0^+$

7 Lösung im Schulbuch.

8 **a)** ■ Kettenregel: $f'(x) = 2(2x-2) \cdot 2 = 8x - 8$
■ Binomische Formel: $f(x) = 4x^2 - 8x + 4$ $f'(x) = 8x - 8$

b) ■ Kettenregel: $f'(x) = 3(x+1)^2 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3x^2 + 6x + 3$
■ Ausmultiplizieren: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$

c) ■ Kettenregel: $f(x) = -(2x^2 - x)^{-1}$ $f'(x) = -(2x^2 - x)^{-2} \cdot 4x = \frac{-4x}{(2x^2 - x)^2}$
■ Quotientenregel: $f'(x) = \frac{0 \cdot (2x^2 - x) - 1 \cdot (2x^2 - x) \cdot 4x}{(2x^2 - x)^2} = \frac{-4x}{(2x^2 - x)^2}$

d) ■ Kettenregel: $f(x) = (2x - 1)^{-1}$ $f'(x) = (-1)(2x-1)^{-2} = \frac{-1}{(2x-1)^2}$
■ Quotientenregel: $f'(x) = \frac{0 \cdot (2x-1) - 1 \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{-1}{(2x-1)^2}$

e) ■ Kettenregel: $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 2) = \frac{1}{2}((x+1)^2)^{-\frac{1}{2}}(2x + 2) = 1$
■ Binomische Formel: $f(x) = \sqrt{(x+1)^2} = x + 1$ $f'(x) = 1$

f) $f(x) = ((x-5)^2)^{-2} = (x-5)^{-1} = \frac{1}{x-5}$
■ Kettenregel: $f'(x) = -(x-5)^{-2} = \frac{-1}{(x-5)^2}$
■ Quotientenregel: $f'(x) = \frac{0 \cdot (x-5) - 1 \cdot 1}{(x-5)^2} = \frac{-1}{(x-5)^2}$

9 **a)** $f'(x) = 5(2x+4)^4$
b) $f'(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}}$
c) $f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$
d) $f'(x) = \frac{1 \cdot x - (x+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x - x - 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$
e) $f'(x) = \frac{1}{2}(x^5 - 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 5x^4 = \frac{5x^4}{2\sqrt{x^5 - 5}}$
f) $f'(x) = -3(5x^4 - 2x)^{-4} \cdot (20x^3 - 2) = \frac{-3(20x^3 - 2)}{(5x^4 - 2x)^4}$

10 Lösung im Schulbuch.

11 **a)** $f'(x) = \frac{1}{2}(2x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$ $\quad f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

$x < 0$: $f'(x) < 0 \Longrightarrow$ f monoton fallend $\quad x > 0$: $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ f monoton steigend

Vorzeichenwechsel von – nach + bei $x = 0$ $\Longrightarrow$ Tiefpunkt $P(0|1)$

b) $f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2+0{,}5) - 1 \cdot (2x)}{(x^2+0{,}5)^2} = \frac{-2x}{(x2+0{,}5)^2}$ $\quad f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+0{,}5)^2} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

$x < 0$: $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ f monoton steigend $\quad x > 0$: $f'(x) < 0 \Longrightarrow$ f monoton fallend

Vorzeichenwechsel von + nach – bei $x = 0$ $\Longrightarrow$ Hochpunkt $P(0|2)$

c) $f'(x) = 3(x+1)^2 - 2 = 3(x^2+2x+1) - 2 = 3x^2+6x+1$ $\quad f'(x) = 3x^2+6x+1 = 0 \Longleftrightarrow x = x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{6}}{3}$

$x < x_1$: $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ f monoton steigend

$x_2 > x > x_1$: $f'(x) < 0 \Longrightarrow$ f monoton fallend

Vorzeichenwechsel von + nach – bei $x_1 = \frac{-3-\sqrt{6}}{3} \Longrightarrow$ Hochpunkt $P\left(\frac{-3-\sqrt{6}}{3} \middle| \frac{8\sqrt{6}}{9} - 2\right)$

$x_2 > x > x_1$: $f'(x) < 0 \Longrightarrow$ f monoton fallend

$x > x_2$: $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ f monoton steigend

Vorzeichenwechsel von – nach + bei $x_2 = \frac{-3+\sqrt{6}}{3} \Longrightarrow$ Tiefpunkt $Q\left(\frac{-3+\sqrt{6}}{3} \middle| -\frac{4\sqrt{6}}{9} - 2\right)$

12 **a)** Schnittpunkt mit der x-Achse im Intervall $I = [0; \pi]$:

$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \sin(x+1)\sqrt{x+1} = 0 \quad \Longrightarrow x + 1 = \pi \quad \Longrightarrow x = \pi - 1$

$f'(x) = \cos(x+1) \cdot \sqrt{x+1} + \sin(x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2\cos(x+1)(x+1) + \sin(x+1)}{2\sqrt{x+1}}$

$f'(\pi - 1) = \frac{2\cos(\pi) \cdot \pi + \sin(\pi)}{2\sqrt{\pi}} = -\sqrt{\pi}$

$\tan^{-1}(f'(\pi-1)) = \tan^{-1}(-\sqrt{\pi}) \approx -60{,}57°$

Schnittwinkel: $\alpha \approx 180° - 60{,}57° = 119{,}43°$

b) Schnittpunkt mit der x-Achse im Intervall $I = [0; 2]$:

$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos^2(x+1) - 0{,}5 = 0 \quad \Longrightarrow x \approx 1{,}36$

$f'(x) = -2 \cdot \cos(x+1) \cdot \sin(x+1) \quad f'(1{,}36) \approx 0{,}9962$

Schnittwinkel: $\alpha \approx \tan^{-1}(f'(1{,}36)) = \tan^{-1}(0{,}9962) \approx 44{,}89°$

13 $f_1(g_1(x)) = (3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$
$f_1(g_2(x)) = (x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$
$f_1(g_3(x)) = (2-3x)^2$
$f_2(g_1(x)) = 2(3x-1) - 1 = 6x - 3 = 3(2x-1)$
$f_2(g_2(x)) = 2(x^2-1) - 1 = 2x^2 - 3$
$f_2(g_3(x)) = 2(2-3x) - 1 = 4 - 6x - 1 = -6x + 3$
$f_3(g_1(x)) = 1 + 3x - 1 = 3x$
$f_3(g_2(x)) = x^2$
$f_3(g_3(x)) = 3 - 3x$

14 $u(x_0) = 3$; $u(x_1) = 0$; $u(x_2) = -1$
$v(x_0) = -0{,}5$; $v(x_1) = 0$; $v(x_2) = 0{,}5$
$u(v(x_0)) = u(-0{,}5) = 5$
$u(v(x_1)) = u(0) = 3$
$u(v(x_2)) = u(0{,}5) = 1{,}25$
$v(u(x_0)) = v(3) = 1$
$v(u(x_1)) = v(0) = -0{,}5$
$v(u(x_2)) = v(-1) = -1$

15 $u(x) = ax^2 + bx + c$

$u(0) = c = 1$ $\quad$ $u(1) = a + b + 1 = 0$ $\quad$ $u(-1) = a - b + 1 = 0 \Longleftrightarrow a = b - 1$

Einsetzen von a liefert: $b - 1 + b = 0 \Longleftrightarrow 2b = 1 \quad \Longrightarrow b = 0{,}5$

Einsetzen von b liefert: $a = 0{,}5 - 1 = -0{,}5$

$u(x) = -0{,}5x^2 + 0{,}5x + 1$ $\quad$ $u(-1) = 0;\ u(0) = 1;\ u(1) = 0$

$v(x) = mx + 0{,}5$ $\quad$ $v(1) = m + 0{,}5 = 0 \Longleftrightarrow m = -0{,}5$

$v(x) = -0{,}5x + 0{,}5$ $\quad$ $v(-1) = 1;\ v(0) = 0{,}5;\ v(1) = 0$

$u(v(-1)) = u(1) = 0$ $\quad$ $u(v(0)) = u(0{,}5) = 0{,}7$ $\quad$ $u(v(1)) = u(0) = 1$

$v(u(-1)) = v(0) = 0{,}5$ $\quad$ $v(u(0)) = v(1) = 0$ $\quad$ $v(u(1)) = v(0) = 0{,}5$

16 $f'(x) = 3(0{,}5x^2 - 1)^2 \cdot x$

Nullstelle bei $x = 0 \Longrightarrow$ Graph 1

17 **a)** $f(x) = \sqrt{x + 1}$ $\quad$ **b)** $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ $\quad$ **c)** $f(x) = (x + 3)^4$

d) $f(x) = 6(x + 3)^2$ $\quad$ **e)** $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ $\quad$ **f)** $f(x) = \frac{1}{x^2}$

18 **a)** Kettenregel falsch angewendet. $f'(x) = 3(4x - 1)^2 \cdot 4 = 12(4x - 1)^2$

b) Kettenregel falsch angewendet. $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{6x - 1)}{\sqrt{3x^2 - x}}$

c) Quotientenregel (bzw. Produktregel) falsch angewendet. $f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2}$

19 **a)** $f'(x) = 2((x + k)^2 + x) \cdot (2(x + k) + 1)$

$f'(-2) = 0 \Longleftrightarrow 2((-2 + k)^2 - 2) \cdot (2(-2 + k) + 1) = 0 \Longleftrightarrow (k^2 - 4k + 2)(2k - 3) = 0$

$k^2 - 4k + 2 = 0$: $k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$

$2k - 3 = 0$: $k_3 = 1{,}5$

Für $k_1 = 2 + \sqrt{2}$:

$x < x_0$: $f'(x) < 0$ $\quad$ $x > x_0$: $f'(x) > 0$ $\quad$ Vorzeichenwechsel von – nach + $\Longrightarrow$ Tiefpunkt

Für $k_2 = 2 - \sqrt{2}$:

$x < x_0$: $f'(x) > 0$ $\quad$ $x > x_0$: $f'(x) < 0$ $\quad$ Vorzeichenwechsel von + nach – $\Longrightarrow$ Hochpunkt

Für $k_3 = 1{,}5$:

$x < x_0$: $f'(x) > 0$ $\quad$ $x > x_0$: $f'(x) < 0$ $\quad$ Vorzeichenwechsel von + nach – $\Longrightarrow$ Hochpunkt

b) $f'(x) = 3(x^2 + kx)^2 \cdot (2x + k)$

$f'(1) = 0 \Longleftrightarrow 3(1 + k)^2 \cdot (2 + k) = 0$

$(1 + k)^2 = 0$: $k_1 = -1$

$2 + k = 0$: $k_2 = -2$

Für $k_1 = -1$:

$x < x_0$: $f'(x) < 0$ $\quad$ $x > x$: $f'(x) > 0$ $\quad$ Vorzeichenwechsel von – nach + $\Longrightarrow$ Tiefpunkt

Für $k_2 = -2$:

$x < x_0$: $f'(x) < 0$ $\quad$ $x > x_0$: $f'(x) > 0$ $\quad$ Vorzeichenwechsel von – nach + $\Longrightarrow$ Tiefpunkt

c) $f'(x) = 4[(x + k)^2 - 1]^3 \cdot 2(x + k)$

$f'(1) = 0 \Longleftrightarrow 4[(1 + k)^2 - 1]^3 \cdot 2(1 + k) = 0$

$(1 + k)^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow k(2 + k) = 0$: $\quad$ $k_1 = 0;\ k_2 = -2$

$1 + k = 0$: $\quad$ $k_3 = -1$

Für $k_1 = 0$:
$x < x_0$: $f'(x) < 0$ $\quad x > x_0$: $f'(x) > 0$ $\quad$ Vorzeichenwechsel von – nach + $\Longrightarrow$ Tiefpunkt

Für $k_2 = -2$:
$x < x_0$: $f'(x) < 0$ $\quad x > x_0$: $f'(x) > 0$ $\quad$ Vorzeichenwechsel von – nach + $\Longrightarrow$ Tiefpunkt

Für $k_3 = -1$:
$x < x_0$: $f'(x) > 0$ $\quad x > x_0$: $f'(x) < 0$ $\quad$ Vorzeichenwechsel von + nach – $\Longrightarrow$ Hochpunkt

20 **a)** $k(x) = f(g(h(x)))$
$g(h(x))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$
$k'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g(h(x))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$
b) $k'(x) = 2\left(\sqrt{3x-1}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x-1}} \cdot 3 = 3$

21 Mögliches Beispiel: $f(x) = x^2 + 1$ $\quad f'(x) = 2x$ $\quad f'(0) = 0$
Die Funktion f hat an der Stelle x = 0 eine waagrechte Tangente.
$g(x) = (x^2 + 1)^2$ $\quad g'(x) = 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot (2x)$ $\quad g'(0) = 0$
Auch die Funktion g hat an der Stelle x = 0 eine waagrechte Tangente.

22 Gleichung der Tangente: $T(x) = \frac{5 - f(x_0)}{0 - x_0} \cdot x + 5 = \frac{5 - f(x_0)}{-x_0} \cdot x + 5$
Gleichung für die Gerade des Radius: $R(x) = \frac{f(x_0)}{x_0} \cdot x$
$m_R \cdot m_T = -1 \Longleftrightarrow \frac{f(x_0)}{x_0} \cdot \frac{5 - f(x_0)}{-x_0} = -1$
$f(x_0) \cdot [-5 + f(x_0)] = -x_0^2 \Longleftrightarrow -5\sqrt{16 - x_0^2} + 16 - x_0^2 = -x_0^2 \Longrightarrow x_0 = \pm\frac{12}{5}$
Da A im 1. Quadranten liegt, ist $x_0 = \frac{12}{5}$.
$f\left(\frac{12}{5}\right) = 3{,}2 \Longrightarrow m_T = \frac{5 - f(x_0)}{-x_0} = -\frac{3}{4}$
b) $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}} \Longrightarrow f'\left(\frac{12}{5}\right) = -\frac{3}{4}$

23 $h(x) = 4(3x - 5)^2 + 2(3x - 5) = 4(9x^2 - 30x + 25) + 6x - 10 = 36x^2 - 114x + 90$
$k(x) = 3(4x^2 + 2x) - 5 = 12x^2 + 6x - 5$
$h'(x) = 72x - 114 \quad k'(x) = 24x + 6$

24 $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}}$ $\quad f'(-0{,}5) \approx 0{,}4$ $\quad f'(0) = 0$
Gleichung der Tangente t_1 an der Stelle $x = -0{,}5$:
$t_1(x) = 0{,}4x + t$
$f(-0{,}5) = \sqrt{(-0{,}5)^3 + 1} \approx 0{,}94$
$t_1(-0{,}5) = 0{,}4 \cdot (-0{,}5) + t = 0{,}94 \Longrightarrow t = 1{,}14$
$t_1(x) = 0{,}4x + 1{,}14$

Gleichung der Tangente t_2 an der Stelle $x = 0$:
$t_2(x) = 0 \cdot x + t$
$f(0) = 1$
$t_2(x) = 1$

Schnittpunkt S von t_1 und t_2: $\quad t_1(x) = t_2(x) \Longleftrightarrow 0{,}4x + 1{,}14 = 1 \Longrightarrow x = -0{,}35 \Longrightarrow S(-0{,}35 \mid 0{,}98)$

25 Beispiel: $u(x) = x^2$; $v(x) = \sqrt{x}$; $w(x) = 3x - 1$

$k(x) = u(v(w(x))) = \left(\sqrt{3x-1}\right)^2$

$k'(x) = 2\left(\sqrt{3x-1}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x-1}} \cdot 3 = 3$

Allgemeine Regel:

$v(w(x))' = v'(w(x)) \cdot w'(x)$

$k'(x) = u'(v(w(x))) \cdot v(w(x))' = u'(v(w(x))) \cdot v'(w(x)) \cdot w'(x)$

26 **a)** $Q(4|0)$; $P\left(x|\frac{1}{2}x^2\right)$

$g(x)^2 = \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 + (4-x)^2 = \frac{1}{4}x^4 + 16 - 8x + x^2$

$g(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 + 16 - 8x + x^2}$ $\quad g'(x) = \frac{x^3 + 2x - 8}{2\sqrt{\frac{1}{4}x^4 + 16 - 8x + x^2}}$

$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{x^3 + 2x - 8}{2\sqrt{\frac{1}{4}x^4 + 16 - 8x + x^2}} = 0 \Longleftrightarrow x^3 + 2x - 8 = 0$

Grafische Lösung liefert: $x \approx 1{,}67$ $\quad \Longrightarrow P(1{,}67|1{,}39)$

b) $f(x) = 0{,}5x^2$; $f'(x) = x$; $f'(1{,}67) = 1{,}67 = m_T$ Steigung der Tangente

Steigung der Geraden $\overline{PQ}$: $m_{PQ} = \frac{1{,}39 - 0}{1{,}67 - 4} \approx -0{,}59$

Die Gerade PQ ist senkrecht zur Tangenten in P, wenn gilt: $m_T \cdot m_{PQ} = -1$. Dies ist (im Rahmen der Näherung) erfüllt, da $1{,}67 \cdot (-0{,}59) \approx -1$ ist.

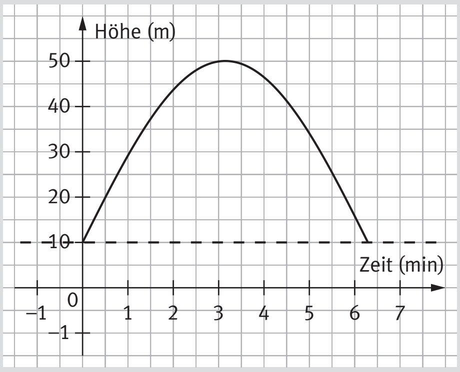
Nachgefragt

- Individuelle Beispiele. Die Verkettung zweier linearer Funktionen ist wieder eine lineare Funktion.
  Allgemeine Begründung:
  $u(x) = m_1x + t_1$; $v(x) = m_2x + t_2$
  $u(v(x)) = m_1(m_2x + t_2) + t_1 = m_1 \cdot m_2 \cdot x + m_1t_2 + t_1$
  Mit $m = m_1 \cdot m_2$ und $t = m_1t_2 + t_1$ gilt somit: $u(v(x)) = m \cdot x + t$. Die ist die Funktionsgleichung einer linearen Funktion.
- Beispiel:
  $g(x) = x^2 + 1$; $g'(x) = 2x$ $\quad g'(x) = 2x = 0$ $\quad x_1 = 0$
  $k(x) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2+1}$; $k'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad k'(0) = 0$ $\quad x_1 = 0$
  Die Aussage stimmt für dieses Beispiel, jedoch nicht allgemein, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:
  $g(x) = x^2 - 1$ $\quad g'(x) = 2x$ $\quad g'(x) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$
  $k(x) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 - 1}$: An der Stelle $x_1 = 0$ ist die Funktion k nicht definiert, sie kann demnach an dieser Stelle keine waagrechte Tangente haben.
- Die angegebene Beziehung kann gelten. Mögliches Beispiel:
  $u(x) = 1$; $v(x) = 1 + x$ $\quad \Longrightarrow u(v(x)) = 1$; $v(u(x)) = 2$
  $[u(v(x))]' = 0$; $[v(u(x))]' = 0$

1.4 Trigonometrische Funktionen und ihre Ableitung

Entdecken

- Individuelle Lösungen. Man erhält eine Kurve folgender Art:



- Der Graph steigt von der Ausgangshöhe (y = 10 m) bis zu seinem Hochpunkt (y = 50 m) an und fällt dann auf die Ausgangshöhe zurück. Nach einer Umdrehung der Gondel wiederholt sich der Verlauf.

Aufgaben

1 **a)**

Gradmaß α	360°	180°	90°	1°	n°
Bogenmaß x	2π	π	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{n}{180} \cdot \pi$

b) Es gilt (r: Kreisradius):
$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi r} \Longrightarrow x = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{\alpha}{(180^\circ)} \cdot \pi r$ Mit r = 1 (Einheitskreis): $x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}$

c) Umstellen der Formel aus **b)** liefert $\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$.

2 Lösung im Schulbuch.

3 $\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$

a) $\alpha = 180^\circ$ **b)** $\alpha = 572{,}96^\circ$ **c)** $\alpha = 52{,}3^\circ$ **d)** $\alpha = 5{,}7^\circ$

4 $x = \frac{\alpha}{(180^\circ)} \cdot \pi$

a) $x = \frac{\pi}{4}$ **b)** $x = \frac{\pi}{3}$ **c)** $x = \frac{7\pi}{6}$ **d)** $x = \frac{19\pi}{9}$

5 Lösung im Schulbuch.

6 **a)** $x_1 = \sin^{-1}(0{,}75) \approx 0{,}848$ $x_2 = \pi - 0{,}848 \approx 2{,}294$
$\alpha_1 \approx 48{,}59^\circ$ $\alpha_2 \approx 131{,}41^\circ$

b) $x = \sin^{-1}(-0{,}25) \approx -0{,}253 \notin [0; 2\pi]$
$x_1 = \pi + 0{,}253 \approx 3{,}395$ $x_2 = 2\pi - 0{,}253 \approx 6{,}030$
$\alpha_1 \approx 194{,}52^\circ$ $\alpha_2 \approx 345{,}49^\circ$

c) $x = \sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2} \notin [0; 2\pi]$
$x_1 = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$ $\alpha_1 = 270^\circ$

d) $x_1 = \cos^{-1}(0{,}75) \approx 0{,}723$ $x_2 = 2\pi - 0{,}723 \approx 5{,}560$
$\alpha_1 \approx 41{,}42^\circ$ $\alpha_2 \approx 318{,}56^\circ$

e) $x_1 = \cos^{-1}(-0{,}25) \approx 1{,}823$ $x_2 = 2\pi - 1{,}823 \approx 4{,}460$
$\alpha_1 \approx 104{,}45^\circ$ $\alpha_2 \approx 255{,}54^\circ$

f) $x = \cos^{-1}(-1) = \pi$ $\alpha = 180^\circ$

Nachgefragt

- Individuelle Lösungen. Die Zusammenhänge werden im Schulbuch auf Seite 38 behandelt.
- Die Kosinusfunktion geht aus Verschiebung der Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ nach links hervor bzw. die Sinusfunktion geht aus der Kosinusfunktion durch Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts hervor.
- Die x-Werte der Hoch- und Tiefpunkte der Sinusfunktion sind Nullstellen von deren Ableitung. Unter Beachtung des Vorzeichenwechsels erhält man als Ableitung die Kosinusfunktion.
- 111-te Ableitung: $-\cos(x)$ 222-te Ableitung: $-\sin(x)$
  333-te Ableitung: $-\sin(x)$ 444-te Ableitung: $-\cos(x)$
  Begründung: Für $f(x) = \sin(x)$ ist $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$, $f''''(x) = \sin(x)$, d. h. nach jeweils vier Ableitungen gelangt man wieder zur Ausgangsfunktion. So z. B. ist die 112-te Ableitung von $\sin(x)$ wieder $\sin(x)$.

7 Amplitude A; Periode p

a) $a = 3;\ p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ **b)** $a = 1;\ p = \frac{2\pi}{3}$

c) $a = 3;\ p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ **d)** $a = 2;\ p = \frac{2\pi}{3}$

8 Lösung im Schulbuch.

9 **a)** $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

b) $f'(x) = -4\sin(x)$

c) $f'(x) = 2\cos(x)$

d) $f'(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}} + 3$

e) $f'(x) = 2\cos(x)\cdot(-\sin(x)) + 2x^2 = -2\sin(x)\cdot\cos(x) + 2x^2$

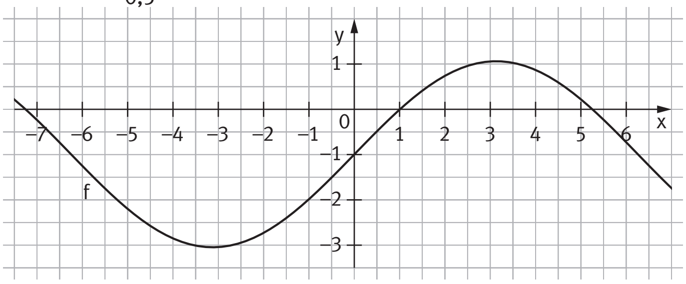
f) $f'(x) = \frac{-2\cos(x)}{(2\sin(x))^2} - \frac{1}{x^2}$

g) $f'(x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x) + 2\cos(x)\cdot(-\sin(x)) = 0$

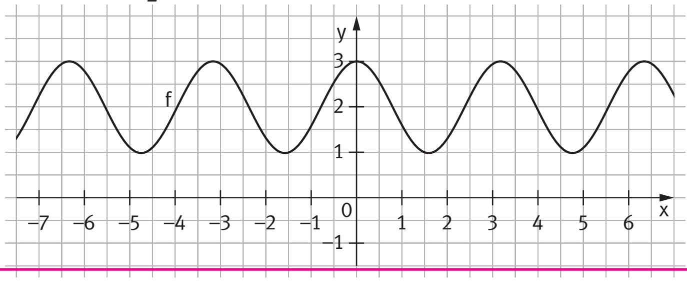
h) $f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{x^2}$

i) $f'(x) = 2x\sin^2(x) + x^2\cdot 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$

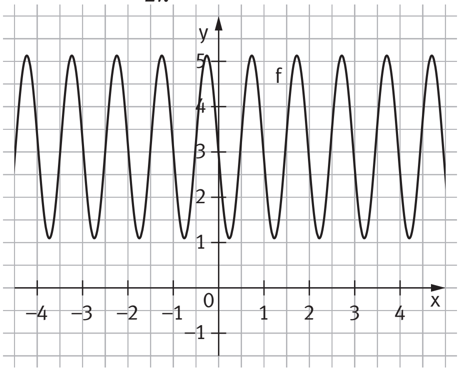
10 **a)** $a = 2;\ p = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$



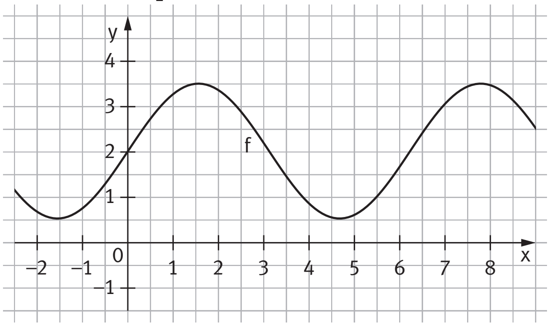
b) $a = -1;\ p = \frac{2\pi}{2} = \pi$



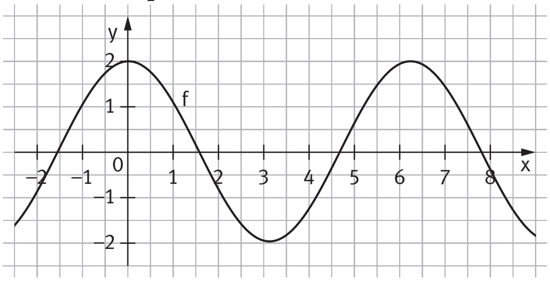
c) $a = -2$; $p = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$



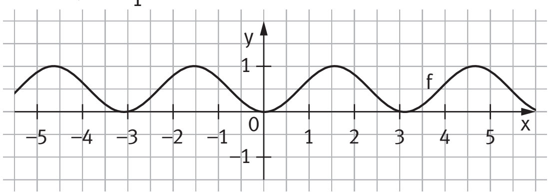
d) $a = 1{,}5$; $p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$



e) $a = -2$; $p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$



f) $a = 1$; $p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$



11 a) $a = 1$; $p = \pi$ — $f'(x) = \cos(2x) \cdot 2$

b) $f(x) = 4$; es handelt sich um keine periodische Funktion. — $f'(x) = 0$

c) $a = -0{,}5$; $p = \frac{2\pi}{0{,}1} = 20\pi$ — $f'(x) = -2\cos(2\pi x) \cdot 2\pi = -4\pi\cos(2\pi x)$

d) $a = 1$; $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ — $f'(x) = -\sin(2x) \cdot 2 = -2\sin(2x)$

e) $a = \frac{1}{4}$; $p = \frac{2\pi}{0{,}25} = 8\pi$ — $f'(x) = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

f) $a = -0{,}2$; $p = \frac{2\pi}{\frac{2}{12}} = 12$ — $f'(x) = -0{,}2\left(-\sin\left(\frac{2\pi}{12}x\right)\right) \cdot \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{30}\sin\left(\frac{2\pi}{12}x\right)$

12 1 $f(x) = 0{,}5\sin(2x)$ gehört zu C: $f'(x) = \cos(2x)$

2 $f(x) = \sin(0{,}5(x + 2))$ gehört zu A: $f'(x) = 0{,}5\cos(0{,}5(x + 2))$

3 $f(x) = 1{,}75\sin(x + \pi)$ gehört zu B: $f'(x) = -1{,}75\cos(x + \pi)$

13 Lösung im Schulbuch.

14 $f'(x) = \cos(x)$

a) 1. Winkelhalbierende: $g(x) = x$ $\quad g'(x) = 1$

$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \quad \Leftrightarrow x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Punkte des Graphen von f: $P_k(2k\pi | 0)$

b) 2. Winkelhalbierende: $g(x) = -x$ $\quad g'(x) = -1$

$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow \cos(x) = -1 \quad \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Punkte des Graphen von f: $P_k((2k+1)\pi | 0)$

c) x-Achse: $g(x)=0$ $\quad g'(x) = 0$

$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$

Punkte des Graphen von f: $P_k((2k+1)\frac{\pi}{2} | \pm 1)$

d) $y = -0{,}5x + 2$ $\quad y' = -0{,}5$

$y' = g'(x) \Leftrightarrow \cos(x) = -0{,}5 \Leftrightarrow x = \cos^{-1}(-0{,}5) \Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ und $x_1 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Punkte des Graphen von f: $P_k\left(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \middle| \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und $P_k\left(\frac{4}{3}\pi + 2k\pi \middle| -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

15 a) Schnittpunkte mit der x-Achse:

$f(x) = \sqrt{2}\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = \pi \Rightarrow P_1(0|0)$ und $P_2(\pi|0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = \sqrt{2} \Rightarrow S(0|\sqrt{2})$

b) $f'(x) = \sqrt{2}\cos(x)$

$f'(x) = \sqrt{2}\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2};\ k \in Z$

Hochpunkte: $H_k\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \middle| \sqrt{2}\right)$ $\quad$ Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \middle| -\sqrt{2}\right)$

c) $y(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{-4}{\pi^2}x(x-\pi) = \sqrt{2}\sin(x) \Leftrightarrow x_1 = 0;\ x_2 = \pi \Rightarrow A(0|0),\ B(\pi|0)$

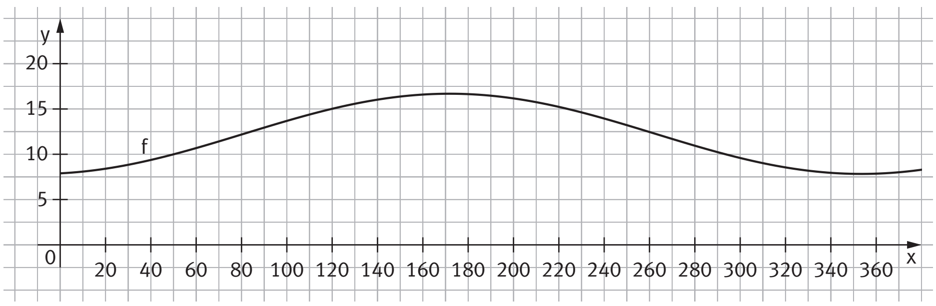
Die beiden Graphen berühren sich in einem gemeinsamen Punkt, wenn neben den Funktionswerten auch die Werte der ersten Ableitung in diesem Punkt gleich sind.

$f'(x) = \sqrt{2}\cos(x) \quad y'(x) = -\frac{4}{\pi^2}(2x-\pi)$

$A(0|0)$: $\quad f'(0) = \sqrt{2} \quad y'(0) = \frac{4}{\pi} \neq \sqrt{2} \quad \Rightarrow$ A ist ein Schnittpunkt der beiden Graphen.

$B(\pi|0)$: $\quad f'(\pi) = -\sqrt{2} \quad y'(\pi) = -\frac{4}{\pi} \neq -\sqrt{2} \quad \Rightarrow$ B ist ein Schnittpunkt der beiden Graphen.

16 a)



b) $f'(x) = 4{,}4\cos\left(\frac{2\pi}{365}(x-81)\right) \cdot \frac{2\pi}{365} = \frac{44\pi}{1825}\cos\left(\frac{2\pi}{365}(x-81)\right)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{365}(x-81)\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}(x-81) = (2k+1)\frac{\pi}{2};k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = (2k+1)\cdot 91{,}5 + 81 \Rightarrow x_1 = 172{,}5$ (22. Juni); $x_2 = 355{,}5$ (22. Dezember)

Tageslängen: $f(x_1) \approx 16{,}6$ h $\quad f(x_2) \approx 7{,}8$ h

c) Graphische Lösung durch Ablesen der Tageslänge aus dem Graphen in **a)**.

Rechnerische Lösung:

21. März:	$x = 80$	$f(80) \approx 12{,}12$ h
21. Juni:	$x = 193$	$f(193) \approx 16{,}32$ h
23. September:	$x = 266$	$f(266) \approx 12{,}01$ h
21. Dezember:	$x = 355$	$f(355) \approx 7{,}8$ h

17 a) $D_g = \mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$; $k \in \mathbb{Z}$

b) $f'(x) = 4\sin(x)\cdot\cos(x)$ $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x)\cdot\cos(x) = 0$

1. Faktor: $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$; mit $x \in [-4; 4]$ erhält man die Lösungen $x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $x_3 = -\pi$ und daraus die Extrempunkte $P_1(0|-1)$; $P_2(\pi|-1)$; $P_3(-\pi|-1)$.

2. Faktor $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$; mit $x \in [-4; 4]$ erhält man die Lösungen $x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = -\frac{\pi}{2}$ und daraus die Extrempunkte $P_4\left(\frac{\pi}{2}|1\right)$; $P_5\left(-\frac{\pi}{2}|1\right)$.

Die Extrempunkte des Graphen von f im Intervall von –4 bis 4 sind somit: $P_1(0|-1)$; $P_2(\pi|-1)$; $P_3(-\pi|-1)$, $P_4\left(\frac{\pi}{2}|1\right)$; $P_5\left(-\frac{\pi}{2}|1\right)$.

$g'(x) = \frac{-2\sin(x)\cdot\cos(x)}{(\sin(x))^4} = \frac{-2\cos(x)}{(\sin(x))^3}$ $\quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$; mit $x \in [-4; 4]$ erhält man die Lösungen $x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = -\frac{\pi}{2}$ und daraus die Extrempunkte $Q_1\left(\frac{\pi}{2}|1\right)$ und $Q_2\left(-\frac{\pi}{2}|1\right)$ von g im Intervall von –4 bis 4.

Gemeinsame Punkte der Graphen von f und g:

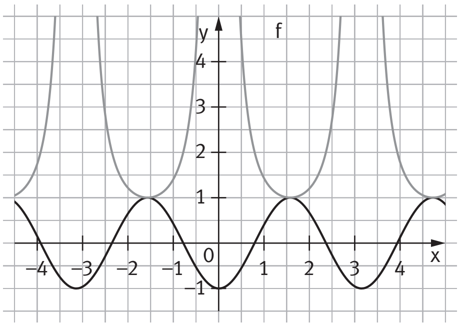
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2(\sin(x))^2 - 1 = \frac{1}{(\sin(x))^2}$ $\quad \Rightarrow 2(\sin(x))^4 - (\sin(x))^2 - 1 = 0$

Mit $(\sin(x))^2 = u$ erhält man $2u^2 - u - 1 = 0$ $\Rightarrow u_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow u_1 = 1$; $u_2 = -0{,}5$

Für $\sin^2(x) = 1 \Leftrightarrow \sin(x) = \pm 1$ erhält man die Lösungen $x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = -\frac{\pi}{2}$.

Für $\sin^2(x) = -0{,}5$ gibt es keine Lösung

Die gemeinamen Punkte der Graphen von f und g sind somit $Q_1\left(\frac{\pi}{2}|1\right)$ und $Q_2\left(-\frac{\pi}{2}|1\right)$.



18 a) B_1 blauer Graph: Verschiebung der Sinusfunktion um 100 nach oben mit Amplitude a = 20 und Periode p = 1.

B_2 roter Graph: Verschiebung der Sinusfunktion um 135 nach oben mit Amplitude a = 5 und Periode p = 0,5.

b) Der Blutdruck nimmt besonders stark zu bzw. ab, wenn der Betrag der Steigung des Graphen maximal ist, also an den Extrempunkten der 1. Ableitung. Diese sind Nullstellen der 2. Ableitung.

$B_1'(t) = 40\pi\cdot\cos(2\pi t)$ $\quad B_1''(t) = -80\pi^2\cdot\sin(2\pi t)$

$B_1''(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(2\pi t) = 0 \Leftrightarrow 2\pi t = k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$B_2'(t) = 220\pi\cdot\cos(4\pi t)$ $\quad B_2''(t) = -880\pi^2\cdot\sin(4\pi t)$

$B_2''(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(4\pi t) = 0 \Leftrightarrow 4\pi t = k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{k}{4}, k \in \mathbb{Z}$

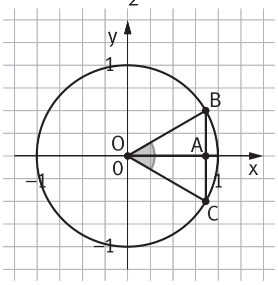
c) Bluthochdruck schädigt die Blutgefäße und Organe wie z. B. das Herz. Als Folge können lebensbedrohliche Krankheiten wie Herzinfarkt oder Schlaganfall auftreten.

Bluthochdruck wird durch Erbanlagen und durch den persönlichen Lebensstil begünstigt wie z. B. Bewegungsmangel oder ungesunde Ernährung.

Bei 200 mmHg spricht man von Hypertonie (Bluthochdruck) vom Grad 3 (schwerer Bluthochdruck).

19 $\sin(0°) = 0$: Dies folgt aus der Definition des Sinus am Einheitskreis.

$\sin(30°) = \frac{1}{2}$ (Herleitung am Einheitskreis):



$\sphericalangle(BOA) = 30°$; $\sin(30°) = \overline{AB}$

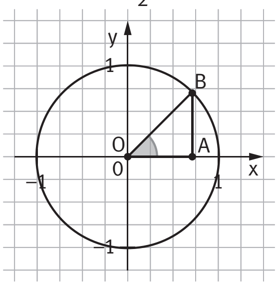
Das Dreieck OAB wird durch die Strecke $\overline{OC}$ mit $\sphericalangle(AOC) = 30°$ zum gleichschenkligen Dreieck BOC ergänzt ($\overline{OB} = \overline{OC}$). Damit gilt $\sphericalangle(OCB) = \sphericalangle(OBC)$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) und $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Wegen $\sphericalangle(BOC) = 60°$ folgt daraus $\sphericalangle(OCB) = \sphericalangle(OBC) = 60°$.

Das Dreieck BOC ist somit gleichseitig.

Daraus folgt $\overline{BC} = \overline{OB} = \overline{OC} = 1$ und aus $\overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2}$.

$\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Herleitung am Einheitskreis):

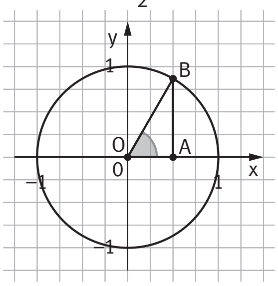


$\sphericalangle(BOA) = 45°$; $\sin(45°) = \overline{AB}$

Wegen $\sphericalangle(OAB) = 90°$ ist $\sphericalangle(ABO) = 45°$ und damit $\overline{OA} = \overline{AB}$ (Dreieck OAB gleichschenklig). Mit dem Satz des Pythagoras und $\overline{OB} = 1$ folgt

$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = 1 \Longrightarrow 2 \cdot \overline{AB}^2 = 1 \Longrightarrow \overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Herleitung am Einheitskreis):



$\sphericalangle(BOA) = 60°$; $\sin(60°) = \overline{AB}$

Wegen der Winkelsumme im Dreieck OAB ist $\sphericalangle(ABO) = 30°$.

$\overline{OA} = \sin(\sphericalangle(ABO)) = \sin(30°) = \frac{1}{2}$.

Mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck OAB folgt damit:

$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = 1 \Longrightarrow \frac{1}{4} + \overline{AB}^2 = 1 \Longrightarrow \overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin(90°) = 1$: Dies folgt aus der Definition des Sinus am Einheitskreis.

Die Werte für $\cos(\alpha)$ lassen sich am Einheitskreis aus den Werten für $\sin(\alpha)$ z. B. mithilfe des Satzes von Pythagoras herleiten. Die Werte für $\tan(\alpha)$ folgen dann aus der Definition des Tangens als $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Nachgefragt

- Die Aussage ist falsch. Durch die Verschiebung ändert sich die Periode nicht.
- Die Aussage ist für $b \neq 1$ falsch. Wegen $\sin'(bx) = b\cos(bx)$ ist nun b die Amplitude der Ableitung.
- 1 : Die Aussage stimmt. Für die Periode p gilt $p = \frac{2\pi}{b}$.

  2 : Die Aussage ist falsch. Die Amplitude streckt bzw. staucht die Funktion in y-Richtung. Eine Veränderung der Amplitude ändert somit den Schnittpunkt der Funktion mit der y-Achse. Die Schnittpunkte der Funktion mit der y-Achse (Nullstellen) werden dadurch aber nicht verändert.

Aufgabe 1

Warm up

A **a)** $f_1'(x) = -9(x-3)^2$

b) $f_2'(x) = \frac{3x^2+3}{2\sqrt{x^3+3x}}$

c) $f_3(x) = (x^2-x)\cdot(x^2-x-6)$

$f_3'(x) = (2x-1)(x^2-x-6) + (x^2-x)(2x-1) = (2x-1)(2x^2-2x-6)$

B **a)** ohne Ableitung (Scheitelpunktform):

$g_1(x) = -2(x^2-4x+2) = -2(x-2)^2 \Longrightarrow$ Hochpunkt $(2|0)$

mit Ableitung:

$g_1'(x) = -4x+8$ $\quad$ $g_1'(x) = 0 \Longleftrightarrow -4x+8=0 \Longleftrightarrow x=2$

$g_1(2) = 0 \Longrightarrow$ Hochpunkt $(2|0)$

b) ohne Ableitung (Scheitelpunktform):

$g_2(x) = 3(x^2+4x+3) = 3(x^2+4x+2^2-2^2+3) = 3(x+2)^2-3 \Longrightarrow$ Tiefpunkt $(-2|-3)$

mit Ableitung:

$g_2'(x) = 6x+12$ $\quad$ $g_2'(x) = 0 \Longleftrightarrow 6x+12=0 \Longleftrightarrow x=-2$

$g_2(-2) = -3 \Longrightarrow$ Tiefpunkt $(-2|-3)$

C **a)** $x_1 = -2$; $x_2 = 4$

b) $x^2+4x+4=0 \Longleftrightarrow (x+2)^2=0 \Longrightarrow x=-2$

c) $x-1 = \sqrt{x+1} = 0$

Quadrieren der Gleichung (keine Äquivalenzumformung) ergibt

$x^2-3x=0 \Longleftrightarrow x(x-3)=0 \Longrightarrow x_1=0;\ x_2=3.$

Probe durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung:

$x_1 = 0$ führt auf $-1 = 1$ (falsch), somit ist $x_1 = 0$ keine Lösung.

$x_2 = 3$ führt auf $2 = 2$ (richtig), somit ist $x_2 = 3$ die Lösung der Gleichung.

---

1 **a)** Der Radikand darf nicht negativ sein. $D = [-2; +\infty[$

b) Nullstellen: $\sqrt{x+2}\cdot(x-4) = 0 \Longrightarrow x_1=-2;\ x_2=4$

Extrema: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}(x-4) + \sqrt{x+2} = \frac{3x}{2\sqrt{x+2}}$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x = 0 \Longrightarrow x = 0$ $\quad$ $f(0) = -4\sqrt{2}$

Für $x < 0$: $f'(x) < 0$ $\quad$ $x > 0$: $f'(x) > 0$

Vorzeichenwechsel an der Stelle $x = 0$ von – nach + $\Longrightarrow$ Tiefpunkt $\left(0|-4\sqrt{2}\right)$.

c) Die Funktion f hat die Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 4$; somit kommen nur G_1 und G_2 in Frage.

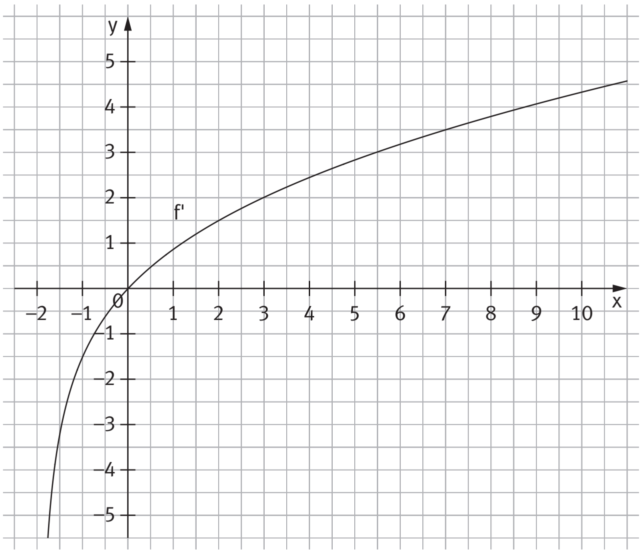
Wegen $f(0) = -4\sqrt{2}$ ist G_2 der Graph von f.

Funktionsterm zu G_1: $g(x) = -f(x) = -\sqrt{x+2}\cdot(x-4)$

Funktionsterm zu G_3: $h(x) = g(-x) = -\sqrt{-x+2}\cdot(-x-4) = \sqrt{2-x}\cdot(x+4)$

Funktionsterm zu G_4: $k(x) = -h(x) = -\sqrt{2-x}\cdot(x+4)$

d)



e) Gesucht ist die Stelle, an der f' (x) = 1 (Steigung der Geraden y) ist.

$f'(x) = 1 \Longleftrightarrow \frac{3x}{2\sqrt{x+2}} = 1 \Longleftrightarrow 3x = 2\sqrt{x+2}$

Quadrieren der Gleichung (keine Äquivalenzumformung!) ergibt

$9x^2 - 4x - 8 = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{19}}{9}$; $x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{19}}{9}$

Wegen $x_1 < 0$ und $f'(x) < 0$ für $x < 0$ (siehe **c)**) kann x_1 nicht die gesuchte Lösung der Gleichung $f'(x) = 1$ sein.

An der Stelle $x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{19}}{9}$ verläuft der Graph von f parallel zur Geraden $y = x + 4$.

f) Die Aussage ist richtig. „Streng monoton steigend" bedeutet gilt $f'(x) > 0$ und somit $f'(x) \neq 0$.

Aufgabe 2

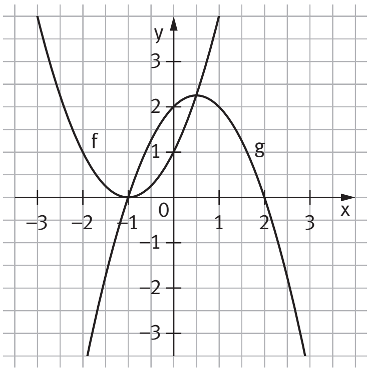
Warm up

A **a)** $-2v^3 + 12v^2w - 18vw^2 = -2v(v^2 - 6vw + 9w^2) = -2v(v - 3w)^2$

b) $37(-9m^4 + n^2) = 37(n^2 - 9m^4) = 37(n - 3m^2)(n + 3m^2)$

B $f(x) = g(x) \Longleftrightarrow (x + 1)^2 = -(x + 1)(x - 2)$

zeichnerische Lösung:



$x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow$ Schittpunkte $P_1\,(-1\,|\,0)$, $P_2\left(\frac{1}{2}\,|\,\frac{9}{4}\right)$

rechnerische Lösung:

$(x + 1)^2 = -(x + 1)(x - 2) \Longleftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Longrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow$

Schittpunkte $P_1\,(-1\,|\,0)$, $P_2\left(\frac{1}{2}\,|\,\frac{9}{4}\right)$

C **a)** $y = (x + 3)^2 \Longrightarrow S\,(-3\,|\,0)$

b) $y = x^2 + 7x + 3{,}5^2 - 3{,}5^2 + 12 = (x + 3{,}5)^2 - 4 \Longrightarrow S\,(-3\,|\,-4)$

c) $y = x^2 + 7x + 3{,}5^2 - 3{,}5^2 + 12 = (x + 3{,}5)^2 - 0{,}25 \Longrightarrow S\,(-3{,}5\,|\,-0{,}25)$

---

2 **a)** $f(x) = ax^2 + bx + c$

I $\quad f(0) = c = 3$

II $\quad f(1{,}5) = 2{,}25a + 1{,}5b + 3 = 0$

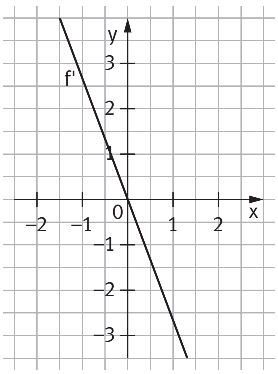
III $\quad f(-1{,}5) = 2{,}25a - 1{,}5b + 3 = 0$

I + III $\quad 4{,}5a + 6 = 0 \Longrightarrow a = -\frac{4}{3}$

$a = -\frac{4}{3}$ in I eingesetzt: $-3 + 1{,}5b + 3 = 0 \Longleftrightarrow 1{,}5b = 0 \Longrightarrow b = 0 \Longrightarrow f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 3$

b) Die Funktion f ist eine quadratische Funktion, ihre Ableitungsfunktion f' somit eine lineare Funktion und der Graph von f' eine Gerade. Wegen des Verlaufs des Graphen von f muss der Graph von f' durch den 2. und 4. Quadranten verlaufen. Da der Hochpunkt von f bei x = 0 liegt, verläuft der Graph von f' durch den Ursprung O (0|0) des Koordinatensystems.

Der Funktionsterm der Ableitungsfunktion lautet: $f'(x) = -\frac{4}{3} \cdot 2x = -\frac{8}{3}x$.



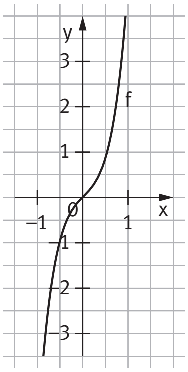
c) $\alpha = \tan^{-1}(f'(x_0))$ $\qquad f'(-1{,}5) = 4$ $\qquad \alpha = \tan^{-1}(4) \approx 76°$

d) Wenn man mit dem Auto genau mittig durch den Tunnel fährt, beträgt die Breite links und rechts von der Mitte jeweils 0,85 m. Für die Höhe des Tunnels bei x = 0,85 gilt: f(0,85) = 2,04. Der Tunnel ist hier also 2,04 m hoch. Da das Auto nur 1,50 m hoch ist, passt es durch den Tunnel.

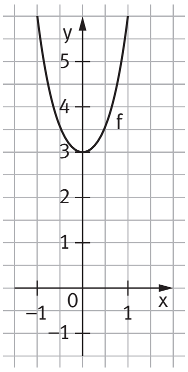
Aufgabe 3

Warm up

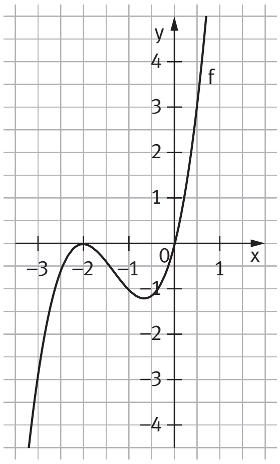
A **a)**



b)



c)



B **a)** $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$

Nullstellen: $x_1 = -1; x_2 = 1$

Extremstellen: $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow x_1 = -1; x_2 = 1; x_3 = 0$

$f(-1) = f(1) = 0,\ f(0) = 1 \Longrightarrow$ Extremstellen: $P_1(-1|0)$, $P_2(1|0)$, $P_3(0|1)$

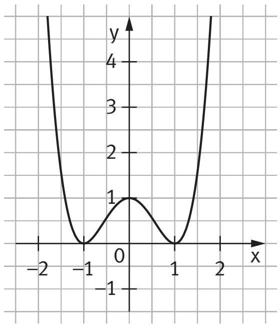
$x < -1$: $f'(x) < 0$ monoton fallend

$-1 < x < 0$: $f'(x) > 0$ monoton steigend

$0 < x < 1$: $f'(x) < 0$ monoton fallend

$x > 1$: $f'(x) > 0$ monoton steigend

$\Longrightarrow P_1(-1|0)$ Tiefpunkt, $P_2(1|0)$ Hochpunkt, $P_3(0|1)$ Tiefpunkt



b) $f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 12x = 3x(x^2 - 4x + 4) = 3x(x - 2)^2$

Nullstellen: $x_1 = 0; x_2 = 2$

Extremstellen: $f'(x) = 9x^2 - 24x + 12$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 9x^2 - 24x + 12 = 0 \Longrightarrow x_1 = 2; x_2 = \frac{2}{3}$

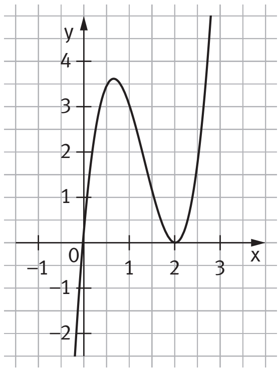
$f(2) = 0,\ f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{9} \Longrightarrow$ Extremstellen: $P_1(2|0)$, $P_2\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{32}{9}\right)$

$x < \frac{2}{3}$: $f'(x) > 0$ monoton steigend

$\frac{2}{3} < x < 2$: $f'(x) < 0$ monoton fallend

$x > 2$: $f'(x) > 0$ monoton steigend

$\Longrightarrow P_1(2|0)$ Tiefpunkt, $P_2\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{32}{9}\right)$ Hochpunkt



c) Nullstellen: $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2(x - 1) = 0 \Longrightarrow$

$x_1 = 0$ (doppelte Nullstelle), $x_2 = 1$

Extremstellen: $f'(x) = 2x(x - 1) + x^2 = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x(3x - 2) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{2}{3}$

$f(0) = 0;\ f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{27}$

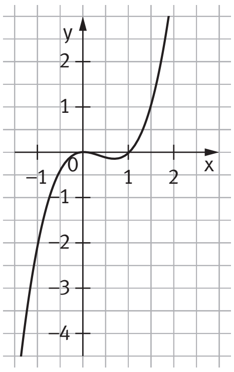
$x < 0$: $f'(x) > 0$ monoton steigend

$0 < x < \frac{2}{3}$: $f'(x) < 0$ monoton fallend

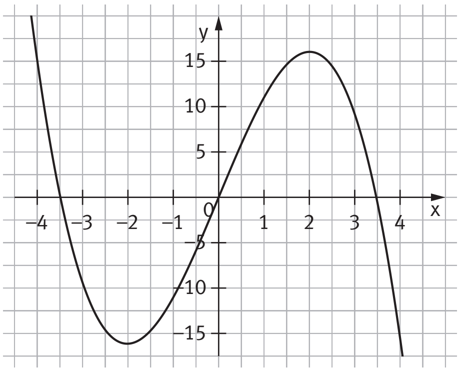
$x > \frac{2}{3}$: $f'(x) > 0$ monoton steigend

Vorzeichenwechsel von f' bei $x = 0$ von + nach $- \Longrightarrow$ Hochpunkt $(0|0)$

Vorzeichenwechsel von f' bei $x = \frac{2}{3}$ von – nach $+ \Longrightarrow$ Tiefpunkt $\left(\frac{2}{3}\middle|-\frac{4}{27}\right)$



3 **a)**



b) $f'(x) = -3x^2 + 12$; $f'(2{,}5) = -6{,}75$

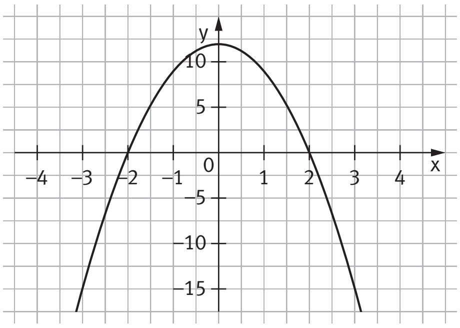
$g(x) = -6{,}75x + t = 16$

$g(2) = -6{,}75 \cdot 2 + t = -13{,}5 + t \Longrightarrow t = 16 + 13{,}5 = 29{,}5 \Longrightarrow g(x) = -6{,}75x + 29{,}5$

$g(0) = 29{,}5 \Longrightarrow S(0|29{,}5)$

c) Spiegelung des x^3-Terms an der y-Achse; $h(0) = 2 \neq 0$

d)



e) Extrema von f:

$f'(x) = -3x^2 + 12 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x_{1,2} = \pm 2$

$f(2) = 16$; $f(-2) = -16 \Longrightarrow$ Hochpunkt $(2|16)$, Tiefpunkt $(-2|-16)$

Nullstellen von f:

$f(x) = -x^3 + 12x = 0 \Longleftrightarrow x(-x^2 + 12) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 2\sqrt{3}$

Extrema von h:

$h'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Longleftrightarrow x(3x - 6) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$

$h(0) = 2$; $h(2) = -2 \Longrightarrow$ Hochpunkt $(0|2)$, Tiefpunkt $(2|-2)$

Nullstellen von h:

$h(x) = 0 \Longleftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

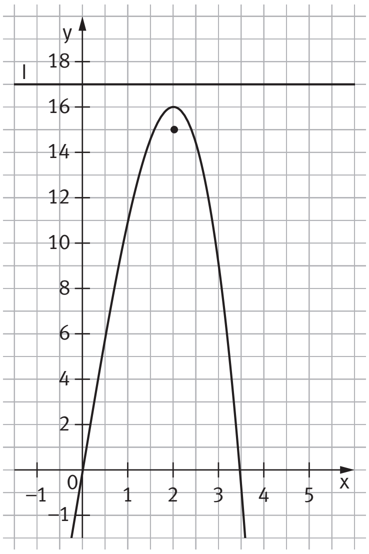
Durch Probieren $x_1 = 1$

Die weiteren Nullstellen können näherungsweise graphisch oder durch Polynomdivision ermittelt werden:

$(x^3 - 3x^2 + 2) : (x - 1) = x^2 - 2x - 2$

$x^2 - 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}$

f)



g) Je weiter der Brennpunkt und die Leitgerade auseinander liegen, desto flacher ist die Öffnung der Parabel. Je geringer der Abstand von Brennpunkt und Leitgerade, desto steiler ist die Öffnung der Parabel.

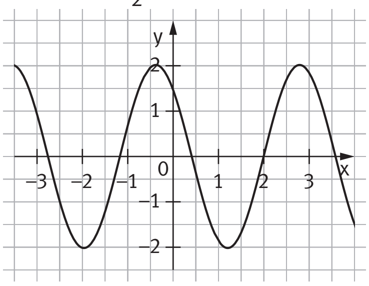
Aufgabe 4

Warm up

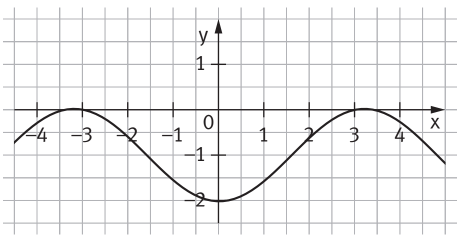
A **a)** $f'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x-1) - \sin(x) \cdot \sin(x-1)$

b) $f'(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x) + 6\sin(2x)$

B **a)** $a = 2;\ p = \frac{2\pi}{2} = \pi$

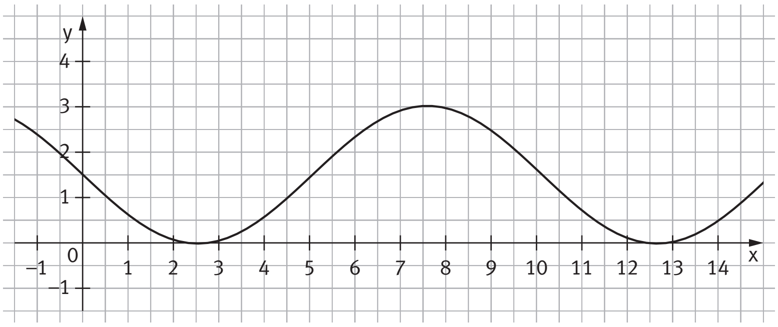


b) $a = -1;\ p = 2\pi$



4 **a)** $f(0) = 1{,}5$: Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt der Wasserstand 1,5 m.

b)



c) Bei $t = 0$ fällt der Graph von f, der Wasserstand nimmt also ab.
Begründung mithilfe der Ableitung f':
$f'(t) = \frac{3\pi}{10} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}(t-5)\right)$ $\quad f'(0) = \frac{3\pi}{10} \cdot \cos(-\pi) = -\frac{3\pi}{10} < 0$

d) Graph 1 stellt die Ableitung f' von f dar, da nur die durch diesen Graphen dargestellte Funktion bei $x = 0$ einen negativen Wert annimmt.

e) $f'(t) = \frac{3\pi}{10} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}(t-5)\right)$

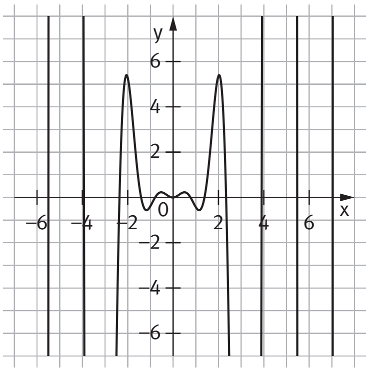
$f'(t) = 0 \Longleftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{5}(t-5)\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\pi}{5}(t-5) = (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow t = 2{,}5 \cdot (2k+1) + 5;\ k \in \mathbb{Z}$
Für $k = -1$: $t_1 = 2{,}5$ h; $f(2{,}5) = 0$
Für $k = 0$: $t_2 = 7{,}5$ h; $f(7{,}5) = 3$
Für $k = 1$: $t_3 = 12{,}5$ h
$0\text{ h} < t < 2{,}5$ h: $f'(t) < 0$
$7{,}5\text{ h} > t > 2{,}5$ h: $f'(t) > 0$
$12{,}5\text{ h} > t > 7{,}5$ h: $f'(t) < 0$
$\Longrightarrow$ Tiefpunkt $(2{,}5 \mid 0)$, Hochpunkt $(7{,}5 \mid 3)$
Der Wasserstand erreicht sein Minimum von 0 m nach 2,5 h. Der Wasserstand erreicht sein Maximum von 3 m nach 7,5 h. Der Tidenhub beträgt 3 m.

1 **a)** g ist eine trigonometrische Funktion, da sie periodisch ist ($p = \pi$) und nur Werte zwischen –1 und 1 annimmt. f ist eine ganzrationale Funktion u. a. wegen ihres Verhaltens für $x \to \pm\infty$.

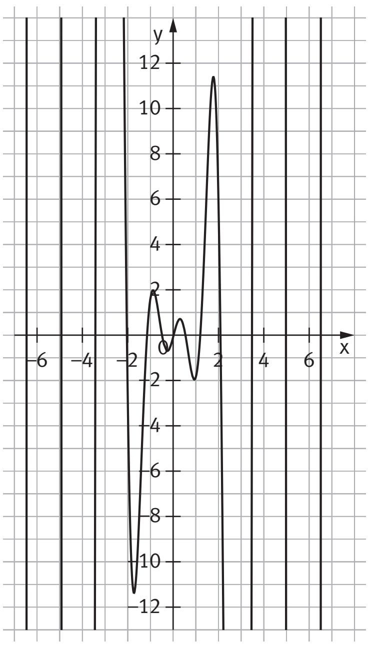
b) Mögliche Beispiele:
$g(x) = \cos(2x)$
$f(x) = -x^2(x + 1{,}4)(x - 1{,}4) = -x^2(x^2 - 1{,}96)$ (näherungsweise)

c) Die trigonometrische Funktion hat die Periode $p = \pi$.
Die Funktion f_1 hat die Periode 2π; $f_1(x)$ passt somit nicht zum Graphen der trigonometrischen Funktion.
Die Funktion f_2 hat die Periode 4π; $f_2(x)$ passt somit nicht zum Graphen der trigonometrischen Funktion.
Die Funktion f_3 hat die Periode π und nimmt nur Werte zwischen –1 und 1 an; zudem gilt $f_3(0) = 1$, f_3 hat also denselben y-Achsenabschnitt wie der grüne Graph.
$f_3(x)$ passt somit zum Graphen der trigonometrischen Funktion.
Die Funktion f_4 hat die Periode 2π; $f_1(x)$ passt somit nicht zum Graphen der trigonometrischen Funktion. Außerdem ist $f_4(0) = -1$, der Graph von g schneidet die y-Achse aber bei $(0|1)$.

d) Individuelle Lösungen je nach den in Teil **a)** gewählten Beispielen.
Mit den in Teil **a)** angegebenen Funktionstermen $f(x) = -x^2(x^2 - 1{,}96)$ und $g(x) = \cos(2x)$ erhält man für $h = f \cdot g$ folgenden Graphen:



$h'(x) = (-4x^3 + 3{,}92x) \cdot \cos(2x) - 2 \cdot (-x^4 + 1{,}96x^2) \cdot \sin(2x) =$
$(-4x^3 + 3{,}92x) \cdot \cos(2x) + (2x^4 - 3{,}92x^2) \cdot \sin(2x)$



e) Produktregel: $k'(x) = 3x^2(x^2 - 4) + x^3 \cdot 2x = 5x^4 - 12x^2$
Summenregel: $k(x) = x^5 - 4x^3 \;\; k'(x) = 5x^4 - 12x^2$

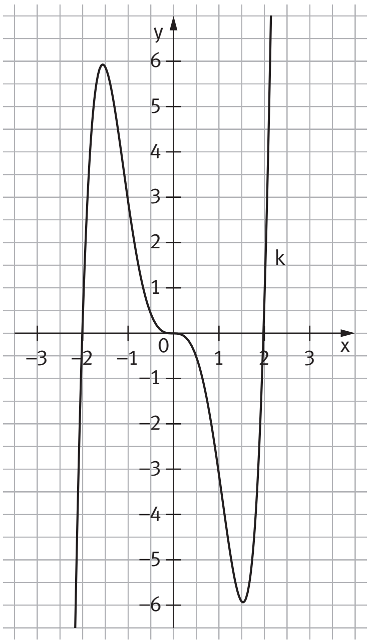
f) Individuelle Lösungen. Beispiele:
Summenregel:
$k(x) = f(x) + g(x)$. Zu zeigen: $k'(x) = f'(x) + g'(x)$.

$$k'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

Produktregel: siehe Schulbuch Seite 27.

g) $k(x) = 0 \Longleftrightarrow x^3(x^2 - 4) = 0$
Beispiele für mögliche Vorgehensweisen:
Satz vom Nullprodukt: $x^3 = 0 \Longrightarrow x_1 = 0 \qquad x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x_{2,3} = \pm 2$
Nullstellen am Graphen von k (näherungsweise) ablesen:



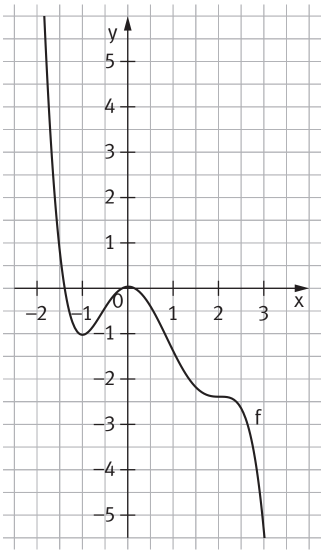
2 **a)** $x_1 = -1$ einfache Nullstelle
$x_2 = 0$ einfache Nullstelle
$x_3 = 2$ doppelte Nullstelle (Berührpunkt)
Der Funktionsterm von f' enthält die Faktoren mit den Nullstellen x_1 und x_2 jeweils als lineare Terme. Der Faktor mit der Nullstelle x_3 kommt im Term von f' als quadratischer Term vor.

b) $f'(x) = -x(x + 1)(x - 2)^2$

c) Es handelt sich hierbei um die Extrema von f.

d)

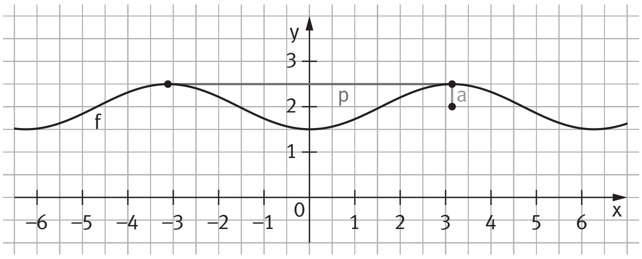
$x < -1$:	$f'(x) < 0$	$\Longrightarrow$ f monoton fallend
$-1 < x < 0$:	$f'(x) > 0$	$\Longrightarrow$ f monoton steigend
$0 < x < 2$:	$f'(x) < 0$	$\Longrightarrow$ f monoton fallend
$x > 2$:	$f'(x) < 0$	$\Longrightarrow$ f monoton fallend

e) 

f) f' hat minimalen Grad 4, f hat minimalen Grad 5.

g) $f(x) = -0{,}2x^5 + 0{,}75x^4 - 2x^2$

3 **a)** $a = 0{,}5$; $p = 2\pi$



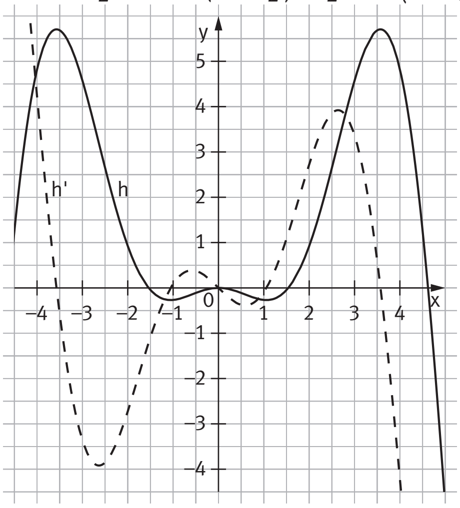
b) Verschiebung des Graphen von g um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts entlang der x-Achse; Stauchung des Graphen mit dem Faktor 0,5 und Verschiebung um 2 nach oben.

c) 1 ist der Graph von f', denn die erste Ableitung muss bei $x_1 = -\pi$; $x_2 = 0$; $x_3 = \pi$ eine Nullstelle haben (Extrempunkte des Graphen von f). Die anderen beiden Graphen erfüllen dies nicht.

d) Die Aussage ist falsch, da die beiden Punkte zu trigonometrischen Funktionen mit unterschiedlichen Perioden gehören können.

e) siehe Schulbuch Seite 38.

f) $h(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2\sin\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(-x)^2\left(-\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(-x)^2\left(-\sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}x^2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = h(x)$

g) 

h) $h'(x) = x\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x^2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

1 **a)** $f'(x) = 4\pi x^2$ **b)** $f'(r) = 4\pi r^2$ **c)** $f'(r) = 8\pi r$

2 $V_{Kugel} = \frac{4}{3} r^3$ $O_{Kugel} = 4\pi r^2$

3 **a)** $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$

b) $\overline{V}(r) = \dfrac{\frac{4}{3}\pi\left(r_1^3 - r_2^3\right)}{r_1 - r_2} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi(r_1 - r_2)\left(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2\right)}{r_1 - r_2} = \frac{4}{3}\pi\left(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2\right)$

4 $\lim\limits_{r_2 \to r_1} \overline{V}(r) = \lim\limits_{r_2 \to r_1} \frac{4}{3}\pi\left(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2\right) \to \frac{4}{3}\pi\left(r_1^2 + r_1^2 + r_1^2\right) = 4\pi r_1^2$

Der Grenzwert entspricht dem Oberflächeninhalt der größeren Kugel.

5 $O_K = 3 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2$. Zur Erklärung siehe Aufgabe 4.

6 Würfel: $V(a) = a^3$; $V'(a) = 3a^2$ $O = 6a^2$

Der Zusammenhang besteht hier nicht.

Quader: $V(l) = l \cdot b \cdot h$; $V'(l) = b \cdot h$ $O = 6 \cdot l \cdot b$

Der Zusammenhang besteht hier nicht.

Quadratische Pyramide: $V(a) = \frac{1}{3} a^2 h$; $V'(a) = \frac{2}{3} ah$ $O = 4 \cdot \frac{1}{2} ah_s + a^2 = a^2 + 2ah_s$

Der Zusammenhang besteht hier nicht.

Kegel: $V(r) = \frac{1}{3} Gh = \frac{1}{3} r^2 \pi h$; $V'(r) = \frac{2}{3} r\pi h$ $O = \pi r^2 + \pi rs = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

Der Zusammenhang besteht hier nicht.

7 $\dfrac{V_{Kugel}}{O_{Kugel}} = \dfrac{V_{Zylinder}}{O_{Zylinder}}$

Es gilt $V'_{Kugel} = O_{Kugel} \Longrightarrow \dfrac{V_{Kugel}}{V'_{Kugel}} = \dfrac{V_{Zylinder}}{O_{Zylinder}}$

8 $\dfrac{V_{Zylinder}}{O_{Zylinder}} = \dfrac{r^2\pi h}{2\pi r(r+h)} = \dfrac{rh}{2(r+h)} = \dfrac{1}{\frac{2}{r} + \frac{2}{h}} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{4}{\frac{2}{r} + \frac{2}{h}} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2}{\frac{1}{r} + \frac{1}{h}}$

Das harmonische Mittel ist definiert als $\overline{x}_{harm} = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$.

Der Quotient aus Volumen und Oberfläche eines Zylinders ist ein Viertel des harmonischen Mittels aus dessen Radius und seiner Höhe.

Das harmonische Mittel kommt meist dann zum Einsatz, wenn der Mittelwert von Verhältniszahlen gesucht ist.