Erweiterung der Differentialrechnung II:
Exponentialfunktion und Logarithmus

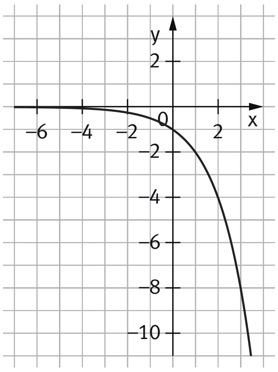
2

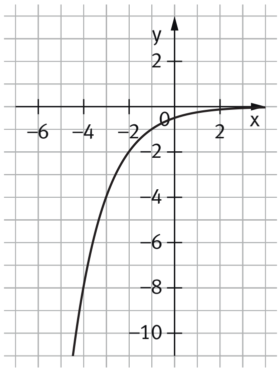
1.1 Bei A gilt für die Basis $0 < b < 1$, es muss sich also um eine fallende Funktion handeln, die aber positive Werte hat. Demnach gehört Graph 2 zum Funktionsterm A.
Das negative Vorzeichen bei B und C bewirkt, dass der Graph an der x-Achse gespiegelt ist (Graph 1 und 3). Setzt man $x = 0$ ein, führt dies bei beiden Funktionen zum gleichen Wert. Setzt man $x = 1$ ein, ergibt sich bei B $f(1) = -2{,}5$ und bei C $f(1) = -3$. Dieser Unterschied ist bei den Graphen sichtbar, so dass B zu Graph 1 und C zu Graph 1 gehört.

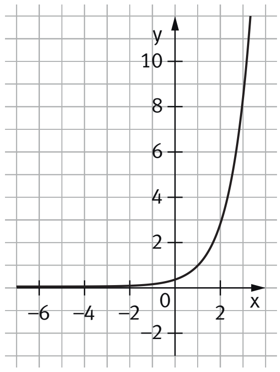
1.2 a) Das negative Vorzeichen bewirkt eine Spiegelung der steigenden Funktion $g(x) = 2^x$ an der x-Achse, es resultiert also eine fallende Funktion, die im 3. und 4. Quadraten verläuft, für die die x-Achse Asymptote ist, die durch $(0|-1)$ geht und für die gilt: $f(1) = -2$.

b) Das negative Vorzeichen bewirkt eine Spiegelung der wegen $0 < b < 1$ fallenden Funktion $g(x) = 0{,}5^x$ an der x-Achse; es resultiert also eine steigende Funktion, die im 3. und 4. Quadraten verläuft, für die die x-Achse Asymptote ist, die (wegen des Vorfaktors $a = -0{,}5$) durch $(0|-0{,}5)$ geht und für die gilt: $f(1) = -0{,}25$.

c) Das positive Vorzeichen bewirkt, dass die Funktion im 2. und 1. Quadraten verläuft. Sie ist wegen $b > 1$ monoton steigend; die x-Achse ist Asymptote. Sie geht (wegen des Vorfaktors $a = \frac{1}{3}$) durch $(0|0{,}\overline{3})$ und durch $(1|1)$.







1.3 Der Funktionsterm in c) liefert Werte, die zum Wachstum eines Hundewelpen passen können, denn man erhält: $f(1) = 13{,}3$, $f(5) = 20{,}22$, $f(12) = 42$; $f(14) = 51{,}53$.
Der Funktionsterm in a) kommt nicht in Frage wegen der negativen Werte, die er liefert; hier ist auch nur schwer eine passende Realsituation denkbar.
Der Funktionsterm in b) liefert sehr schnell viel zu große Werte, die die Größe eines Hundes weit übersteigen. Hiermit könnte eher ein Populationswachstum modelliert werden.

2.1 a) $\log_5(125) = x \Leftrightarrow 5^x = 125 = 5^3 \Rightarrow x = 3$

b) $\log_7(\sqrt{343}) = x \Leftrightarrow 7^x = \sqrt{343} = 7^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

c) $\log_8(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 8^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$

d) $\log_x(512) = 3 \Leftrightarrow x^3 = 512 = 8^3 \Rightarrow x = 8$

e) $\log_3(3^5) = x \Leftrightarrow 3^x = 3^5 \Rightarrow x = 5$

f) $\log_{\sqrt{3}}(27) = x \Leftrightarrow \sqrt{3^x} = 27 \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^3 \Rightarrow \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6$

2.2 a) $3 \cdot 2^{x+1} - 48 = 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 16 = 2^4 \Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$

b) $5^{2x} - 4 \cdot 5^x = 0 \Leftrightarrow \frac{5^{2x}}{5^x} = 4 \Leftrightarrow 5^{2x-x} = 4 \Leftrightarrow 5^x = 4 \Rightarrow x = \log_5 4$

c) $3^{2x} - 3^x = 6$ Substitution $u = 3^x$ ergibt $u^2 - u - 6 = 0$. $\Longrightarrow u_1 = 3;\ u_2 = -2$
Resubstitution: $u_1 = 3^x \Longleftrightarrow 3 = 3^x \Longrightarrow x = 1;\ u_2 = 3^x \Longleftrightarrow -2 = 3^x$ nicht möglich, da $3^x > 0$.
$\Longrightarrow$ Lösung der Gleichung: $x = 1$.

d) $3^{x+2} - 4 \cdot 3^x = 10 \Longleftrightarrow 3^2 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^x = 10 \Longleftrightarrow (9-4) \Longleftrightarrow 3^x = 10 \Longleftrightarrow 3^x = 2 \Longrightarrow x = \log_3 2 = 0{,}63$

e) $3^x - 2^{x+1} = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow 3^x \cdot 2^x \cdot 2 = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow (3 \cdot 2)^x = \frac{1}{6} \Longleftrightarrow 6x = 6^{-1} \Longrightarrow x = -1$

f) $7^{x-3} - 49^x = 0 \Longleftrightarrow 7^{x-3} - 7^{2x} = 0 \Longleftrightarrow \frac{7^{x-3}}{7^{2x}} = 1 \Longleftrightarrow 7^{-x-3} = 1 \Longrightarrow -x-3 = \log_7 1 = 0 \Longrightarrow x = -3$

g) $32 \cdot 3^x = 6^x \Longleftrightarrow 32 = \frac{6^x}{3^x} = 2^x \Longleftrightarrow 2^5 = 2^x \Longrightarrow x = 5$

h) $2^{3x} + 0{,}125 = 2 \cdot 8^x \Longleftrightarrow 2^{3x} + 0{,}125 = 2 \Longleftrightarrow (2^3)^x \Longleftrightarrow 2^{3x} + 0{,}125 = 2 \cdot 2^{3x} \Longleftrightarrow 0{,}125 = 2^{3x} \Longleftrightarrow \frac{1}{8} = 2^{3x}$
$\Longleftrightarrow 2^{-3} = 2^{3x} \Longrightarrow -3 = 3x \Longrightarrow x = -1$

3.1 a) I $f(-1) = a \cdot b^{-1} = 1{,}5$ II $f(3) = a \cdot b^3 = 24$
Divison I : II ergibt: $\frac{b^{-1}}{b^3} = \frac{1{,}5}{24} = \frac{1}{16} \Longleftrightarrow b^{-4} = \frac{1}{16} = 2^{-4} \Longrightarrow b = 2$
$b = 2$ in I eingesetzt: $a \cdot 2^{-1} = 1{,}5 \cdot a = 1{,}5 \cdot 2 = 3 \Longrightarrow f(x) = 3 \cdot 2^x$

b) I $f(-2) = a \cdot b^{-2} = \frac{1}{3}$ II $f(2) = a \cdot b^2 = 27$
Divison I : II ergibt: $\frac{b^{-2}}{b^2} = \frac{\frac{1}{3}}{27} = \frac{1}{81} \Longleftrightarrow b^{-4} = \frac{1}{81} = 3^{-4} \Longrightarrow b = 3$
$b = 3$ in II eingesetzt: $a \cdot 3^2 = 27 \Longrightarrow a = 3 \Longrightarrow f(x) = 3 \cdot 3^x$

c) I $f(-3) = a \cdot b^{-3} = -0{,}5$ II $f(1) = a \cdot b = -8$
Divison I : II ergibt: $\frac{b^{-3}}{b} = \frac{-0{,}5}{-8} = \frac{1}{16} \Longleftrightarrow b^{-4} = \frac{1}{16} = 2^{-4} \Longrightarrow b = 2$
$b = 2$ in II eingesetzt: $a \cdot 2 = -8 \Longrightarrow a = -4 \Longrightarrow f(x) = (-4) \cdot 2^x$

d) I $f(-4) = a \cdot b^{-4} = 4$ II $f(-1) = a \cdot b^{-1} = 0{,}5$
Divison I : II ergibt: $\frac{b^{-4}}{b^{-1}} = \frac{4}{0{,}5} = 8 \Longleftrightarrow b^{-3} = 8 = 2^3 \Longrightarrow b = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
$b = \frac{1}{2}$ in I eingesetzt: $a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 4 \Longrightarrow a = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^x$

3.2 I: $f(0) = a \cdot b^0 = \frac{2}{3} \Longrightarrow a = \frac{2}{3}$ II: $f(1) = a \cdot b^1 = \frac{2}{9}$
$a = \frac{2}{3}$ in II eingesetzt: $\frac{2}{3} \cdot b = \frac{2}{9} \Longleftrightarrow b = \frac{1}{3} \Longrightarrow f(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^x$
Probe mit den Koordinaten von R: $f(2) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{27} \neq \frac{2}{81}$
Das Schaubild geht nicht durch den Punkt R.

4.1 a) $a = 1000$, $b = 2$, x: Anzahl der Stunden $\Longrightarrow f(x) = 1000 \cdot 2^{\frac{x}{36}}$ (Anzahl der Bakterien nach x Stunden)
$f(x) = 10 \cdot 1000 = 10\,000 \Longleftrightarrow f(x) = 1000 \cdot 2^{\frac{x}{36}} = 10\,000 \Longleftrightarrow 2^{\frac{x}{36}} = 10$
$\Longrightarrow \frac{x}{36} = \log_2 10 \approx 3{,}32 \Longrightarrow x \approx 36 \cdot 3{,}32 = 119{,}52$
Innerhalb von 119,52 Stunden verzehnfacht sich die Kolonie.

b) 9 Tage = $9 \cdot 24$ h = 216 h $f(216) = 1000 \cdot 2^{\frac{216}{36}} = 64\,000$
Nach 9 Tagen besteht die Kolonie aus 64 000 Bakterien.
Veränderte Bedingungen:
$g(x) = 64\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$; x: Anzahl der Tage
$g(x) = 64\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{64} \Longrightarrow x = \log_{0,5} \frac{1}{64} = 6$
Nach weiteren 6 Tagen besteht die Kolonie wieder aus 1000 Bakterien. Insgesamt dauert es also 9 Tage + 6 Tage = 15 Tage, bis die ursprüngliche Anzahl an Bakterien wieder erreicht wird.

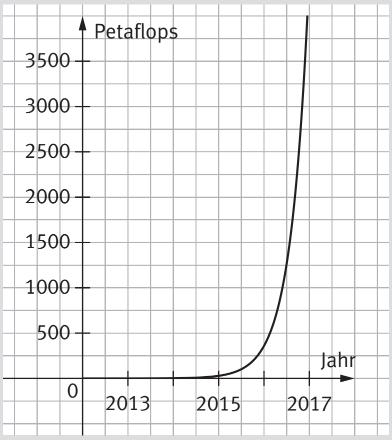
4.2 a) $100\text{ mg} \cdot 0{,}92^{10} \approx 43\text{ mg}$

b) $0{,}5 = b^{30}$ führt auf den Jahresfaktor $b \approx 0{,}97716$ und somit $0{,}97716^{13} \approx 0{,}74 = 74\,\%$.

2.1 Die Euler'sche Zahl e und die natürliche Exponentialfunktion

Entdecken

- Graph (z. B. anhand einer Wertetabelle):



Rechenleistung in Petaflops: $f(x) = 0{,}01 \cdot 2^{3{,}64x}$ mit x: Anzahl der Jahre ab 2012 ($x = 0$ entspricht 2012, $x = 1$ entspricht 2013, …, $x = 5$ entspricht 2017).

Aufgaben

1 Lösung im Schulbuch.

2 **a)** $f(x) = 3^x = \left(e^{\ln(3)}\right)^x = e^{x \cdot \ln(3)}$
b) $f(x) = 0{,}3^x = \left(e^{\ln(0{,}3)}\right)^x = e^{x \cdot \ln(0{,}3)}$
c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x} = \left(e^{\ln(3)}\right)^{-x} = e^{-x \cdot \ln(3)}$
d) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^5 = 5^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2} \cdot \ln(5)}$

3 **a)** $f(x) = 10^x = \left(e^{\ln(10)}\right)^x = e^{x \cdot \ln(10)}$
$f'(x) = e^{x \cdot \ln(10)} \cdot (x \cdot \ln(10))' = e^{x \cdot \ln(10)} \cdot \ln(10) = 10^x \cdot \ln(10)$
b) $f(x) = 2{,}71^x = \left(e^{\ln(2{,}71)}\right)^x = e^{x \cdot \ln(2{,}71)}$
$f'(x) = e^{x \cdot \ln(2{,}71)} \cdot (x \cdot \ln(2{,}71)' = e^{x \cdot \ln(2{,}71)} \cdot \ln(2{,}71) = 2{,}71^x \cdot \ln(2{,}71)$
c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x} = \left(e^{\ln(2)}\right)^{-x} = e^{-x \cdot \ln(2)}$
$f'(x) = e^{-x \cdot \ln(2)} \cdot (-x \cdot \ln(2))' = e^{-x \cdot \ln(2)} \cdot (-\ln(2)) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln(2)$
d) $f(x) = \frac{1}{7^{-x}} = 7^x = \left(e^{\ln(7)}\right)^x = e^{x \cdot \ln(7)}$
$f'(x) = e^{x \cdot \ln(7)} \cdot (x \cdot \ln(7))' = e^{x \cdot \ln(7)} \cdot \ln(7) = 7^x \cdot \ln(7) = \frac{1}{7^{-x}} \cdot \ln(7)$

4 Lösung siehe Schulbuch.

5 **a)** $f'(x) = 3^x \cdot \ln(3)$
b) $f'(x) = 0{,}3^x \cdot \ln(0{,}3)$
c) $f'(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -3^{-x} \cdot \ln(3)$
d) $f'(x) = e^x \cdot \ln(e) = e^x$
e) $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$
f) $f'(x) = e^{x+2} \cdot \ln(e) = e^{x+2}$
g) $f(x) = e^{-x}$; $f'(x) = -e^{-x}$
h) $f'(x) = e^{-x}$
i) $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1 + x)$
j) $f'(x) = 2(x + e^x) \cdot (1 + e^x)$
k) $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$; $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{e^x}$
l) $f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \ln(e) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

6 **a)** $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$; $f'(2) = 4 \cdot \ln(2) \approx 2{,}77$
b) $f'(x) = 5^x \cdot \ln(5)$; $f'(1) = 5 \cdot \ln(5) \approx 8{,}05$
c) $f'(x) = e^x$; $f'(0) = 1$
d) $f'(x) = 4 \cdot e^{4x}$; $f'(e) = 4 \cdot e^{4e} \approx 210\,959{,}55$

7 **a)** 1 $f'(x) = 2{,}5^x \cdot \ln(2{,}5)$; $f'(0{,}5) = 2{,}5^{0{,}5} \cdot \ln(2{,}5) \approx 1{,}45$

2 $f'(x) = 0{,}25^x \cdot \ln(0{,}25)$; $f'(2{,}5) = 0{,}25^{2{,}5} \cdot \ln(0{,}25) \approx -0{,}04$

3 $f(x) = \frac{1}{4}e^{-x}$; $f'(x) = -\frac{1}{4}e^{-x}$; $f'(0) = -\frac{1}{4}$

b) Es handelt sich um die Steigung des Graphen bei $x_0 = 0$ bzw. die Steigung der Tangente an den Graphen bei $x_0 = 0$.

8 **a)** $F(x) = \frac{1}{\ln(4)} \cdot 4^x$ **b)** $F(x) = \frac{1}{\ln(5)} \cdot 5^x + 5x$ **c)** $F(x) = \frac{1}{\ln(3)} \cdot 3^{x+1}$ **d)** $F(x) = e^{x+1}$

9 **a)** $e^{\ln(4)} - e^{\ln(2)} = 4 - 2 = 2$ **b)** $e^{4-\ln(2)} = \frac{e^4}{e^{\ln(2)}} = \frac{e^4}{2} \approx 27{,}30$

c) $\frac{e^{\ln(e)}}{(\ln(e))^e} = \frac{e}{1^e} = e$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt{(\ln(e))^5}} = \sqrt[3]{\sqrt{1^5}} = \sqrt[3]{1} = 1$

Nachgefragt

- Individuelle Antworten. Beispiel: $e \approx 2{,}71828$ ist die Euler'sche Zahl. Das Besondere an dieser Zahl ist, dass die Ableitung der Exponentialfunktion mit der Basis e mit dieser Exponentialfunktion übereinstimmt: $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$.
- Siehe Schulbuch Seite 61.
- $f(x) = a^x = e^{\ln(a) \cdot x}$, da $a = e^{\ln(a)}$.
  Die Umformung ist zum Ableiten zielführend, da nun die Kettenregel zum Ableiten der e-Funktion angewendet werden kann: $f'(x) = e^{\ln(a) \cdot x} \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$.

10 1 $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^{x+1} = 2 \cdot \ln(2) \cdot 2^x \Longrightarrow$ C

2 $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^{x+3} = 8 \cdot \ln(2) \cdot 2^x \Longrightarrow$ D

3 $f'(x) = 1 + \ln(2) \cdot 2^x \Longrightarrow$ B

4 $f'(x) = 2^x + x \cdot \ln(2) \cdot 2^x = (\ln(2) \cdot x + 1) \cdot 2^x \Longrightarrow$ E

5 $f'(x) = \frac{\ln(2) \cdot 2^x}{2\sqrt{2^x}} = \ln(2) \cdot \frac{2^x}{2^{\frac{x}{2}+1}} = \ln(2) \cdot 2^{x - \frac{x}{2} - 1} = \ln(2) \cdot 2^{\frac{x}{2} - 1} \Longrightarrow$ A

Die Ableitung F hat keinen Partner. Die zugehörige Funktion f(x) lautet $f(x) = \left(\frac{1}{\ln(2)}\right)^2 \cdot 2^{x+1}$, da

$f'(x) = \left(\frac{1}{\ln(2)}\right)^2 \cdot \ln(2) \cdot 2^{x+1} = \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^{x+1}$.

11 Lösung im Schulbuch.

12 **a)** $f'(x) = e^x + (x+1) \cdot e^x = e^x(2+x)$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow e^x(2+x) = 0 \Longrightarrow x = -2$

$f(-2) = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2} \Longrightarrow$ Extremum $\left(-2 \middle| -\frac{1}{e^2}\right)$

$f'(-2{,}1) \approx -0{,}01 < 0$ $f'(-1{,}9) \approx 0{,}01 > 0$

Vorzeichenwechsel von – nach + $\Longrightarrow$ Minimum

b) $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot x \cdot (2+x)$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow e^x \cdot x \cdot (2+x) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$; $x_2 = -2$

$f(0) = 0 \Longrightarrow$ Extremum $(0|0)$

$f'(-1) \approx -0{,}37 < 0$ $f'(1) \approx 8{,}1 > 0$

Vorzeichenwechsel von – nach + bei $x_1 = 0 \Longrightarrow$ Minimum

$f(-2) = 4 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \Longrightarrow$ Extremum $\left(-2 \middle| \frac{4}{e^2}\right)$

$f'(-2{,}1) \approx 0{,}03 > 0$ $f'(-1{,}9) \approx -0{,}03 < 0$

Vorzeichenwechsel von + nach – bei $x_2 = -2 \Longrightarrow$ Maximum

c) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$
$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \Longrightarrow x = 1$
$f(1) = \frac{1}{e} \Longrightarrow$ Extremum $\left(1 \,\middle|\, \frac{1}{e}\right)$
$f'(0{,}9) \approx 0{,}04 > 0$ $\qquad$ $f'(1{,}1) \approx -0{,}3 < 0$
Vorzeichenwechsel von + nach – bei $x_1 = 1 \Longrightarrow$ Maximum
d) $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$
$f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (für $x = 0$ sind $f(x)$ und $f'(x)$ nicht definiert) $\Longrightarrow$ Die Funktion f hat keine Extrema.

13 Lösung im Schulbuch.

14 1

a) Tangentengleichung: $t(x) = mx + c$
Berechnung der Steigung m an der Stelle $x = 3$:
$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x) \Longrightarrow m = f'(3) = 4 \cdot e^3 \approx 80{,}34$
Berechnung des y-Achsenabschnitts c:
$f(3) = 3e^3 \approx 60{,}26 \Longrightarrow t(3) = 80{,}34 \cdot 3 + c = 60{,}26 \Longrightarrow c = -180{,}76$
Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 3$: $t(x) = 80{,}34 \cdot x - 180{,}76$
b) $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow e^x(1+x) = 0 \Longrightarrow x = -1$
$f'(x) < 0$ für $x < -1 \Longrightarrow f(x)$ fallend für $x < -1$
$f'(x) > 0$ für $x > -1 \Longrightarrow f(x)$ steigend für $x > -1$
Vorzeichenwechsel von – nach + bei $x = -1 \Longrightarrow$ Minimum an der Stelle $x = -1$
$f(-1) = -e^{-1} \approx -0{,}37$ $\qquad \Longrightarrow$ Minimum $(-1 \,|\, -0{,}37)$

2

a) Tangentengleichung: $t(x) = mx + c$
Berechnung der Steigung m an der Stelle $x = 3$:
$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x \cdot e^x(2+x) \Longrightarrow m = f'(3) \approx 301{,}28$
Berechnung des y-Achsenabschnitts c:
$f(3) \approx 180{,}77 \Longrightarrow t(3) = 301{,}28 \cdot 3 + c = 180{,}77 \Longrightarrow c = -723{,}07$
Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 3$: $t(x) = 301{,}28x - 723{,}07$
b) $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x \cdot e^x(2+x) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -2$
$f'(x) > 0$ für $x < -2 \Longrightarrow f(x)$ steigend für $x < -2$
$f'(x) < 0$ für $-2 < x < 0 \Longrightarrow f(x)$ fallend für $-2 < x < 0$
Vorzeichenwechsel von + nach – bei $x_2 = -2 \Longrightarrow$ Maximum an der Stelle $x = -2$
$f(-2) = 0{,}54 \Longrightarrow$ Maximum $(-2 \,|\, 0{,}54)$
$f'(x) > 0$ für $x > 0 \Longrightarrow f(x)$ steigend für $x > 0$
Vorzeichenwechsel von – nach + bei $x_1 = 0 \Longrightarrow$ Minimum an der Stelle $x = 0$
$f(0) = 0 \Longrightarrow$ Minimum $(0 \,|\, 0)$

3

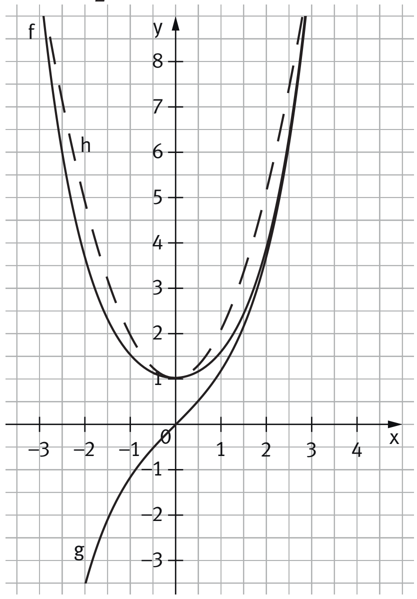
a) Tangentengleichung: $t(x) = mx + c$
Berechnung der Steigung m an der Stelle $x = 3$:
$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) \Longrightarrow m = f'(3) \approx -0{,}10$
Berechnung des y-Achsenabschnitts c:
$f(3) \approx 0{,}15 \Longrightarrow t(3) = -0{,}10 \cdot 3 + c = 0{,}15 \Longrightarrow c = 0{,}45$
Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 3$: $t(x) = -0{,}10x + 0{,}45$

b) $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \Longrightarrow x = 1$
$f'(x) > 0$ für $x < 1 \Longrightarrow f(x)$ steigend für $x < 1$
$f'(x) < 0$ für $x > 1 \Longrightarrow f(x)$ fallend für $x > 1$
Vorzeichenwechsel von + nach – bei $x_1 = 1 \Longrightarrow$ Maximum an der Stelle $x = 1$
$f(1) \approx 0{,}37 \Longrightarrow$ Maximum $(1 \mid 0{,}37)$

4

a) Tangentengleichung: $t(x) = mx + c$
Berechnung der Steigung m an der Stelle $x = 3$:
$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) \Longrightarrow m = f'(3) \approx -0{,}16$
Berechnung des y-Achsenabschnitts c:
$f(3) = 1{,}40 \Longrightarrow t(3) = -0{,}16 \cdot 3 + c = 1{,}40 \Longrightarrow c = 1{,}88$
Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 3$: $t(x) = -0{,}16x + 1{,}88$
b) $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = 0$ keine Lösung $\Longrightarrow$ keine Extremstellen
$f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Longrightarrow f(x)$ fallend für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

15 a) $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = g(x)$ $\quad f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = f(x)$
$g'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = f(x)$ $\quad g''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = g(x)$
b)



Der Graph von f erinnert an den Graphen der Parabel mit $h(x) = x^2 + 1$ (gestrichelt eingezeichnet).
c) $f(x) + g(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = e^x$
Die Summe der Funktionen f und g ist die natürliche Exponentialfunktion.
d) $g^2(x) - f^2(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 =$
$\frac{1}{4}(e^{2x} - 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}) = -1$
Die Differenz $g^2(x) - f^2(x)$ ist die konstante Funktion –1.
e) $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $\quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
Eine Katenoide („Kettenlinie“) beschreibt z. B. den Verlauf einer an zwei Punkten aufgehängten Kette oder eines Seils.

Nachgefragt

- $f(x) = e^{4x}$; $f'(x) = 4e^{4x} = 4 \cdot f(x)$
  $f(x) = e^{6x}$; $f'(x) = 6e^{6x} = 6 \cdot f(x)$
  $f(x) = e^{10x}$; $f'(x) = 10e^{10x} = 10 \cdot f(x)$
- $f(x) = b^x$; $f'(x) = \ln(b) \cdot b^x$; $f''(x) = (\ln(b))^2 \cdot b^x$
- Mit der Zahl e als Basis können Wachstumsvorgänge beschrieben werden. Für die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ gilt $f(x) = f'(x)$, d. h. das Wachstum (Ableitung $f'(x)$) ist an jeder Stelle x genau so groß wie der Funktionswert $f(x)$ an dieser Stelle.
- $f^{(1000)}(x) = 2 \cdot e^x$; $g^{(1000)}(x) = 2^{1000} \cdot e^{2x}$; $h^{(1000)}(x) = (-2)^{1000} e^{-2x} = 2^{1000} e^{-2x}$

Entdecken

1	gelber Graph; Ableitung: $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x \approx 0{,}7 \cdot 2^x$	blauer Ableitungsgraph
2	grüner Graph; Ableitung: $f'(x) = \ln(5) \cdot 5^x \approx 1{,}6 \cdot 5^x$	roter Ableitungsgraph
3	roter Graph; Ableitung: $f'(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \approx -0{,}7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$	grüner Ableitungsgraph
4	blauer Graph; Ableitung: $f'(x) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x \approx -1{,}6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$	gelber Ableitungsgraph

Aufgaben

1 $f'(x) = e^x = f(x)$ $g'(x) = c \cdot e^x = g(x)$ (Faktorregel)

2 **a)** $f'(x) = 2e^x$
b) $f'(x) = \frac{1}{2}e^x$
c) $f'(x) = 3 - 0{,}25e^x$

3 $h'(x) = (e^{k \cdot x})' = e^{k \cdot x} \cdot (k \cdot x)' = k \cdot e^{kx} \neq h(x)$ für $k \neq 1$.
Für $k = 1$, d. h. $h(x) = e^x$, stimmt die Funktion h mit ihrer Ableitung überein, für alle anderen Werte von k nicht.
$k'(x) = (e^{x + c})' = e^{x + c} \cdot (x + c)' = e^{x + c} = k(x)$
Die Funktion k stimmt für alle Werte von c mit ihrer Ableitung überein.

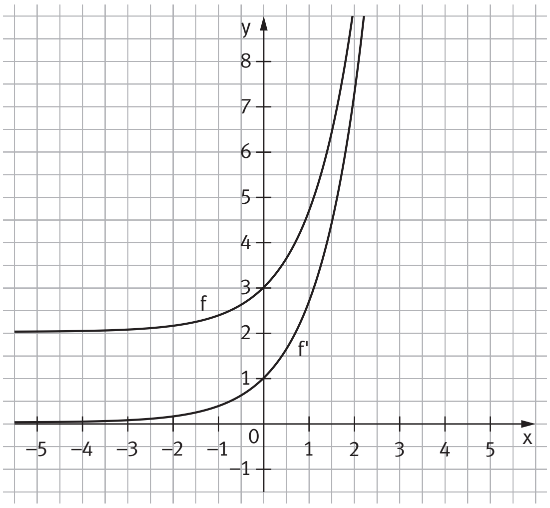
4 Lösung im Schulbuch.

5

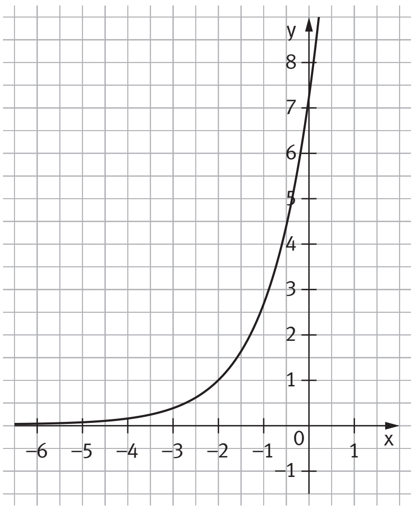
a)	$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (1 + x)$	Produktregel
b)	$f'(x) = 1 \cdot e^x - x \cdot e^{-x} = e^x - x \cdot e^{-x}$	Produktregel, Kettenregel
c)	$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{0,5x} + x^3 \cdot 0{,}5 \cdot e^{0,5x} = 0{,}5 \cdot e^{0,5x} \cdot (6x^2 + x^3)$	Produktregel, Kettenregel
d)	$f'(x) = 3x^2 \cdot e^x + (x^3 - 1) \cdot e^x = e^x \cdot (x^3 + 3x^2 - 1)$	Produktregel
e)	$f'(x) = e^{x-1} + (x - 1) \cdot e^{x-1} = x \cdot e^{x-1}$	Produktregel, Kettenregel
f)	$f'(x) = 3(x + 1)^2 \cdot e^{-0,5x} + (x + 1)^3 \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0,5x} =$ $0{,}5(x + 1)^2 \cdot e^{-0,5x} \cdot (-x + 5)$	Produktregel, Kettenregel

Nachgefragt

- $f'(x) = e^x$, denn $(e^x)' = e^x$ und $(d)' = 0$, weil d eine Konstante ist.
  Individuelle Erklärung anhand des Graphen. Beispiel (d = 2):
  $f(x) = e^x + 2$; $f'(x) = e^x$

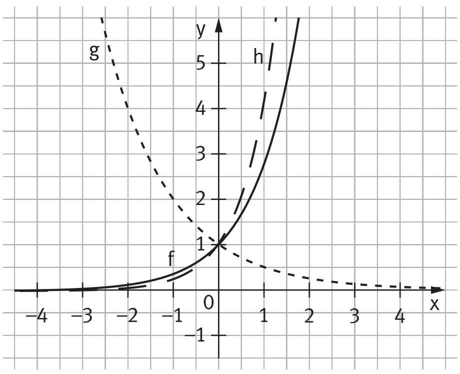


  Der Graph der Ableitungsfunktion $f'(x)$ ist der um 2 Einheiten nach unten verschobene Graph der Funktion $f(x)$. An der Steigung des Graphen ändert der Summand d nichts.
  Allgemein:
  Für $d > 0$ ist der Graph von $f'(x)$ der um d Einheiten nach unten verschobene Graph von $f(x)$.
  Für $d < 0$ ist der Graph von $f'(x)$ der um d Einheiten nach oben verschobene Graph von $f(x)$.
- $f(x) = b^{x+c} = b^c \cdot b^x = a \cdot b^x$ mit $a = b^c$ (Konstante); $f'(x) = a \cdot \ln(b) \cdot b^x = b^c \cdot \ln(b) \cdot b^x$
- $f'(x) = e^{x+c} \cdot (x + c)' = e^{x+c} = f(x)$ Kettenregel
  Zusammenhang mit $g(x) = a \cdot e^x$:
  $f(x) = e^{x+c} = e^c \cdot e^x = a \cdot e^x = g(x)$ mit $a = e^c$ (Konstante)
  $f'(x) = g'(x) = (a \cdot e^x)' = a \cdot e^x = g(x) = f(x)$
  Individuelle Erklärung anhand des Graphen. Beispiel (c = 2 und damit $a = e^2$):



- Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion:
  - keine Symmetrie
  - keine Nullstelle
  - kein Schnittpunkt mit der x-Achse
  - Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0|1)$, da $e^0 = 1$
  - keine Extremstelle
  - Monotonie: monoton wachsend auf $\mathbb{R}$
  - Definitionsmege: $D = \mathbb{R}$
  - Wertemenge: $W =]0, +\infty[$
  - Streberverhalten: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- Individuelle Erklärungen. Mögliche Beispiele:
  Die x-Achse ist eine waagrechte Asymptote der e-Funktion, da $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, d. h. für $x \to -\infty$ nähert sich der Graph der e-Funktion der x-Achse immer weiter an, ohne sie zu berühren.
  Allgemein: Exponentialfunktionen besitzen eine waagrechte Asymptote.
  Gebrochen-rationale Funktionen besitzen an ihren Definitionslücken (Nullstellen des Nenners) senkrechte Asymptoten.

---

6 

f:
- monoton wachsend auf $\mathbb{R}$
- Schnittpunkt mit der y-Achse $(0|1)$, da $f(0) = e^0 = 1$

g:
- monoton fallend auf $\mathbb{R}$
- flacher als die e-Funktion, da $0{,}5 < e$
- Schnittpunkt mit der y-Achse $(0|1)$, da $g(0) = 0{,}5^0 = 1$

h:
- monoton wachsend auf $\mathbb{R}$
- steiler als die e-Funktion, da $4 > e$
- Schnittpunkt mit der y-Achse $(0|1)$, da $h(0) = 4^0 = 1$

Individuelle Aufsätze. Die Schülerinnen und Schüler sollen ihr Wissen über Exponentialfunktionen angemessen verbalisieren.

7 **a)** Verschiebung der e-Funktion um 3 LE entlang der y-Achse nach unten.
b) – Stauchung der e-Funktion um den Faktor 0,5
– Verschiebung der Funktion um 2 LE nach links entlang der x-Achse
c) – Spiegelung der e-Funktion an der y-Achse
– Verschiebung der Funktion um 3 LE nach oben entlang der y-Achse

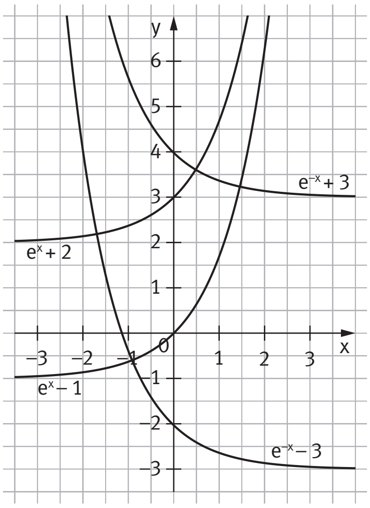
d) – Spiegelung der e-Funktion an der y-Achse
– Spiegelung der Funktion an der x-Achse

e) – Spiegelung der e-Funktion an der y-Achse
– Verschiebung der Funktion um e^2 LE nach unten entlang der y-Achse

f) – Spiegelung der e-Funktion an der y-Achse
– Spiegelung der Funktion an der x-Achse
– Verschiebung der Funktion um 3 LE entlang der y-Achse nach oben

8 **a)** Verschiebung der e-Funktion um 1 LE entlang der y-Achse nach unten
b) Verschiebung der e-Funktion um 2 LE entlang der x-Achse nach rechts
c) Streckung der e-Funktion um den Faktor 2

9

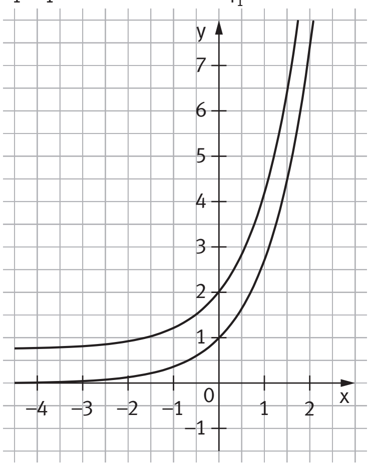


10

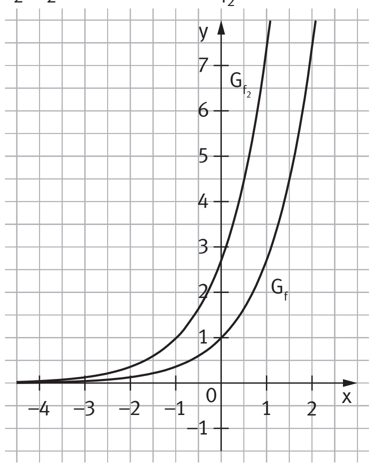
Funktion	1	2	3	4
Steckbrief	D	A	B	C

Erläuterungen:
A: $f(1) = -e$ trifft nur bei 2 zu.
B: $2f(-1) = -1$ trifft nur bei 3 zu.
C: $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ trifft nur bei 4 zu.
D: $f(0) \neq 0$ trifft nur bei 1 zu.
Sämtliche übrigen Steckbrief-Eigenschaften treffen jeweils ebenfalls zu.

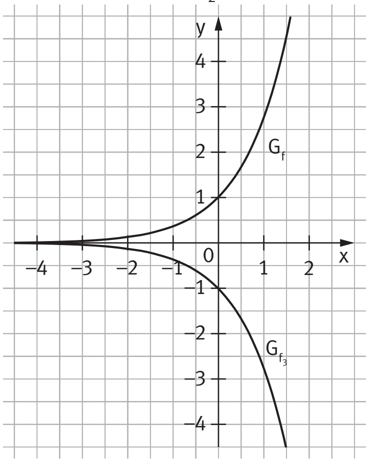
11 **a)** f_1: $f_1(x) = e^x + 2$; $\mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{R}$



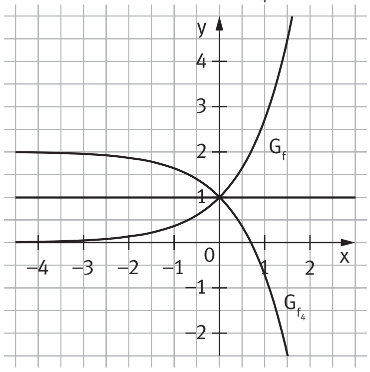
b) f_2: $f_2(x) = e^{x+1}$; $\mathbb{D}_{f_2} = \mathbb{R}$



c) f_3: $f_3(x) = -e^x$; $\mathbb{D}_{f_2} = \mathbb{R}$

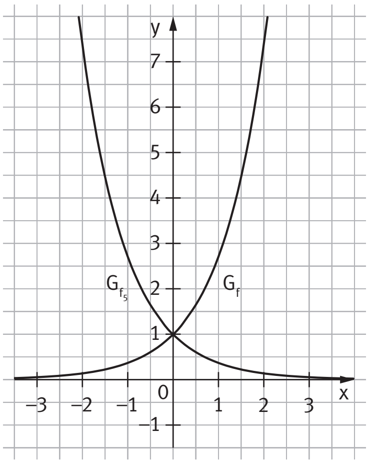


d) f_4: $f_4(x) = -e^{-x} + 2$; $\mathbb{D}_{f_4} = \mathbb{R}$

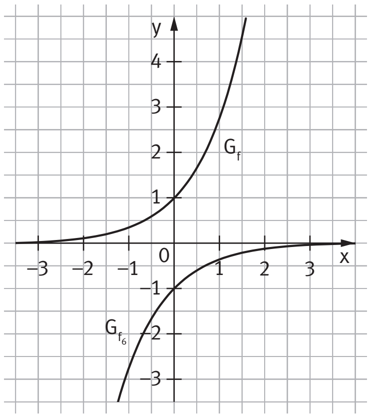


Hinweis zu d): G_f wird zuerst an der x-Achse gespiegelt (y wird durch –y ersetzt); dann wird der neue Graph um 2 in Richtung der y-Achse nach oben verschoben.

e) f_5: $f_5(x) = e^{-x}$; $\mathbb{D}_{f_5} = \mathbb{R}$



f) f_6: $f_6(x) = -e^{-x}$; $\mathbb{D}_{f_6} = \mathbb{R}$



12 a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 10^6$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 10^6$

13 a) $f(-x) = 4e^{-x-1} - 3 \neq f(x)$; $f(-x) \neq -f(x)$ $\Longrightarrow$ keine Symmetrie

b) $f(-x) = -2x \cdot e^x - 1 \neq f(x)$; $f(-x) \neq -f(x)$ $\Longrightarrow$ keine Symmetrie

c) $f(-x) = x^2 \cdot e^{-x} \neq f(x)$; $f(-x) \neq -f(x)$ $\Longrightarrow$ keine Symmetrie

d) $f(-x) = 3e^{(-x)^2} + 2 = 3e^{x^2} + 2 = f(x)$ $\Longrightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse

e) $f(-x) = 5(-x) \cdot e^{(-x)^2} = -5x \cdot e^{x^2} = -f(x)$ $\Longrightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung

f) $f(-x) = -x^3 \cdot e^{2x} - 3 \neq f(x)$; $f(-x) \neq -f(x)$ $\Longrightarrow$ keine Symmetrie

14 Lösung im Schulbuch.

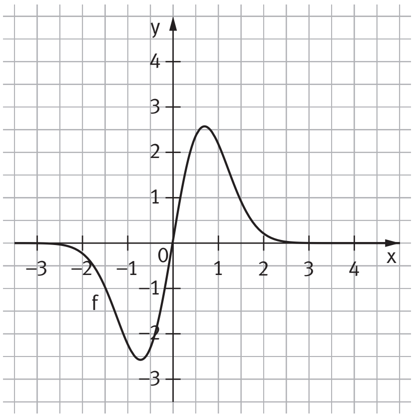
15 a) $P(1|7{,}39)$: $7{,}39 = 1 \cdot e^k \Longrightarrow k = 2$, da $e^2 = 7{,}39$.

$Q(2|2)$: $2 = 2 \cdot e^{2k} \Longleftrightarrow e^{2k} = 1 \Longrightarrow k = 0$

b) $f'(x) = e^{k \cdot x} + x \cdot k \cdot e^{k \cdot x}$

$f'(3) = e^{3k} + 3k \cdot e^{3k}$ $\quad$ $f'(3) = 0 \Longleftrightarrow (1 + 3k) \cdot e^{3k} = 0 \Longleftrightarrow (1 + 3k) = 0 \Longleftrightarrow k = -\frac{1}{3}$

16 **a)**



Eigenschaften (Beispiele):

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Nullstelle bei $x = 0$

Hochpunkt $(0{,}71 \mid 2{,}57)$

Tiefpunkt $(-0{,}71 \mid -2{,}57)$

punktsymmetrisch zu $(0 \mid 0)$

b) Individuelle Lösungen. Beispiele:

Die Veränderung des Vorfaktors bewirkt eine Streckung oder Stauchung des Graphen, ggf. in Verbindung mit einer Spiegelung an der x-Achse bei negativem Faktor (z. B. –4 statt 6 bewirkt eine Stauchung und Spiegelung).

Wird der Exponent 2 durch einen anderen geraden Exponenten ersetzt (4, 6 usw.), bleibt die grundsätzliche Form des Graphen erhalten, er wird aber in y-Richtung gestreckt.

Wird der Exponent 2 durch einen ungeraden Exponenten ersetzt (3, 5 usw), ändert sich der Verlauf des Graphen insbesondere für $x < 0$ grundlegend $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\right)$.

17 A: Es gilt $a(0) = 2$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} a(x) = 0$: Dies trifft nur für 3 zu.

A: 3

B: $\lim\limits_{x \to \infty} (3 - e^x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (3 - e^x) = 3$: Dies trifft nur für 4 zu.

B: 4

C: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = -1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = 1$

Nur 5 besitzt die beiden waagrechten Asymptoten a_1: $y = -1$ und a_2: $y = 1$.

C: 5

D: 2 besitzt als einziger Graph eine senkrechte Asymptote:

D: 2

E: Die einzige Funktion, deren Graph durch die Punkte $S(1 \mid 0)$ und $T(0 \mid 1)$ verläuft, ist 6.

$e(1) = 0$; $e(0) = 1$

E: 6

F: Die einzige Funktion mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$:

F: 1

Zusammenfassung:

1	2	3	4	5	6
F	D	A	B	C	E

18 a) x-Achsenpunkt(e):

$(x^2 - 3) \cdot 3^x = 0; \qquad 3^x > 0$

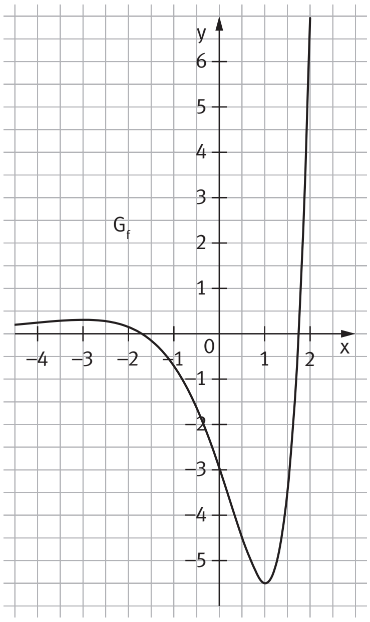
$x^2 = 3; x_1 = \sqrt{3}; x_2 = -\sqrt{3}; S_1(\sqrt{3}\,|\,0); S_2(-\sqrt{3}\,|\,0)$

y-Achsenpunkt $f(0) = (-3) \cdot 3^0 = -3; T(0\,|\,-3)$

b) $f(-x) = (x^2 - 3) \cdot 3^{-x} \Longrightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x) \Longrightarrow$ keine Symmetrie

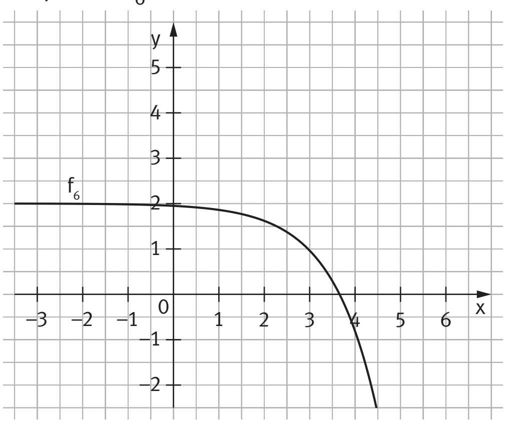
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c)



19 f_1: C $\quad f_2$: A $\quad f_3$: B $\quad f_4$: F $\quad f_5$: E $\quad f_6$: kein passender Graph

Graph von f_6:



Zum Graphen D ist kein passender Funktionsterm angegeben. Funktionsterm zu D: $f_D(x) = 1 + 2 \cdot e^{-x}$.

20 $f(0) = \frac{4}{2} = 2$; der Punkt $T(0\,|\,2) \in G_f$ liegt nicht auf G_3.

$f'(x) = \frac{(1 + e^x) \cdot 4e^x - 4e^x \cdot e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{4e^x(1 + e^x - e^x)}{(1 + e^x)^2} = \frac{4e^x}{(1 + e^x)^2}$;

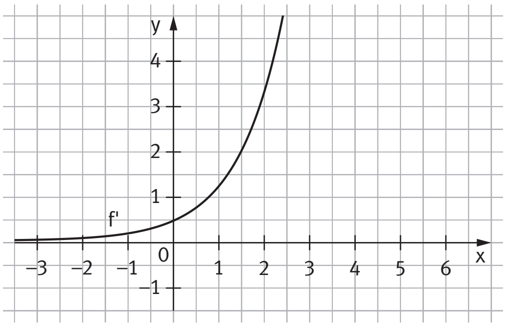
$f'(0) = \frac{4}{4} = 1 > 0$;

Die Tangentensteigung im Punkt T ist nur bei G_2 positiv: $G_2 = G_f$.

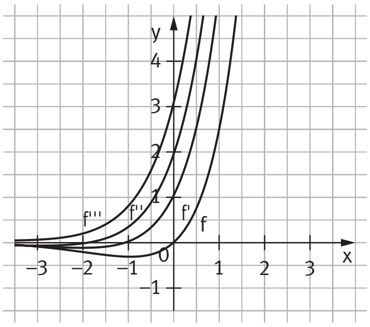
G_1: $f_1(x) = \frac{4e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{4}{e^x + 1}$;

G_3: $f_3(x) = \frac{4e^{x-2}}{1 + e^{x-2}} = \frac{4e^x}{e^2 + e^x}$

21 a) Die Funktion f und alle ihre Ableitungen sind gleich: $f^{(n)}(x) = f(x) = 0{,}5 \cdot e^x$.



b) $f'(x) = (x + 1)e^x$ $f''(x) = (x + 2)e^x$
$f'''(x) = (x + 3)e^x$ Vermutung: $f^n(x) = (x + n)e^x$



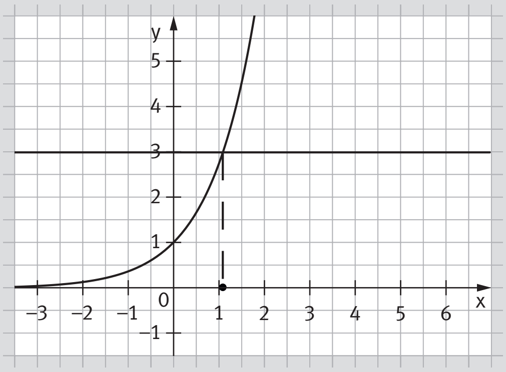
Nachgefragt

- Zeichnet man die Graphen der beiden Ableitungsfunktionen $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$ und $g'(x) = 2x$, erkennt man: Für $x < 0{,}49$ liegt $G_{f'}$ oberhalb von $G_{g'}$, ebenso für $x > 3{,}21$. Im Intervall $[0{,}49; 3{,}21]$ liegt $G_{g'}$ oberhalb von $G_{f'}$. Die Aussage gilt also für $x > 3{,}21$.
- f wird g einholen. Man erkennt dies daran, dass die Ableitung von f ab einem bestimmten x-Wert größer ist als die Ableitung von g (d. h. f ist „steiler“ als g). So z. B. ist $f'(40) > g'(40)$.
- Es ändert sich nichts am Ausgang des „Rennens“, da die e-Funktion für große Werte von x schneller wächst als jede Potenzfunktion.
- Individuelle Lösungen. Beispiele: $g(x) = 2 \cdot e^x$ bzw. allgemein $h_r(x) = r \cdot e^x$ mit $r \in \mathbb{R}$.
- Der Einfluss der Parameter ist in beiden Fällen gleich. Beispiele für Funktionen $f(x) = x^n$ (Potenzfunktion) und $g(x) = a^x$:
  1. Ein Vorfaktor ($f_1(x) = b \cdot x^n$ bzw. $g_1(x) = b \cdot a^x$) bewirkt eine Streckung (für $b > 1$) bzw. Stauchung (für $0 < b < 1$) des Graphen, ggf. in Verbindung mit einer Spiegelung an der x-Achse für $b < 0$.
  2. Eine additive Konstante ($f_2(x) = x^n + c$ bzw. $g_2(x) = a^x + c$) bewirkt eine Verschiebung des Graphen in Richtung der y-Achse um $|c|$ nach oben (für $c > 0$) bzw. nach unten (für $c < 0$).
  3. Eine additive Konstante im Argument der Funktion ($f_3(x) = (x + d)^n$ bzw. $g_3(x) = a^{x + d}$) bewirkt eine Verschiebung des Graphen um $|d|$ in Richtung der x-Achse nach links (für $d > 0$) bzw. nach rechts (für $d < 0$).

Entdecken

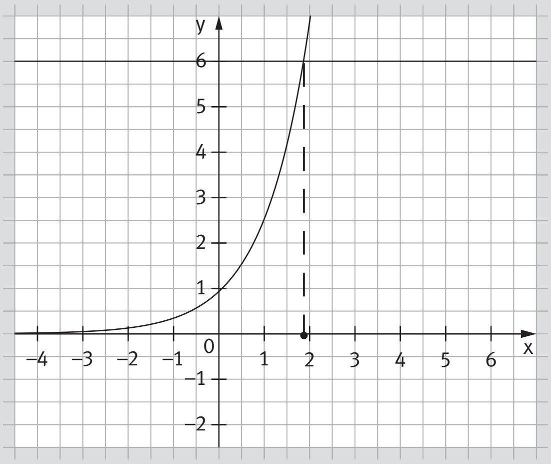
1 **a)** $x \approx 1{,}1$

b)



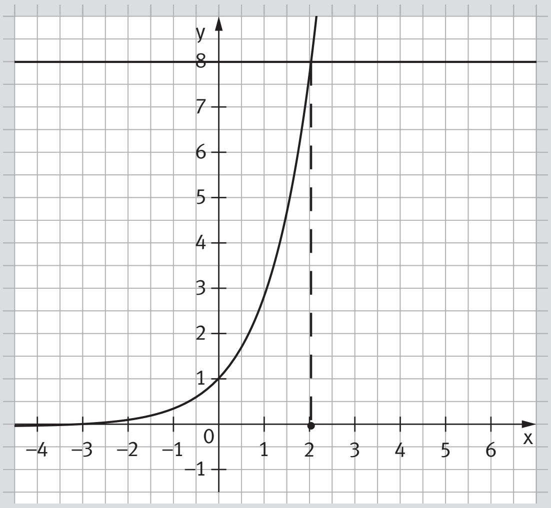
2 **a)** $x \approx 1{,}8$

b)



3 **a)** $x \approx 2{,}1$

b)



Aufgaben

1 **a)** $e^{\frac{1}{2}}$ **b)** e^{-1} **c)** $e^{\frac{2}{5}}$ **d)** e^{-2}

e) $e^{2-6} = e^{-4}$ **f)** $e^{-\frac{2}{3}}$ **g)** $e^{-\frac{1}{2}}$ **h)** e^{0}

2 Lösung im Schulbuch.

3 **a)** $\ln\left(e^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{5}\ln(e) = \frac{1}{5}$ **b)** $\ln(e^{-3}) = -3 \cdot \ln(e) = -3$
c) $\ln(e^3) = 3$ **d)** $\ln(e^{-1}) = -1$
e) $\ln(e^{-3}) = -3$ **f)** $\ln(\ln(e^e)) = \ln(e\ln(e)) = \ln(e) = 1$
g) $\ln(e^{-2}) + \ln(e^e) + e^{\ln(2)} = -2 + e + 2 = e$ **h)** $e^{\ln(e)} = e$
i) $e^{3\ln(2)} = e^{\ln(2^3)} = e^{\ln(8)} = 8$ **j)** $e^{-2\cdot\ln(4)} = e^{\ln(2^{-4})} = e^{\ln\left(\frac{1}{16}\right)} = \frac{1}{16}$
k) $e^{0,5\cdot\ln(5)} = e^{\ln(5^{0,5})} = e^{\ln(\sqrt{5})} = \sqrt{5}$ **l)** $\sqrt[5]{e^{5\cdot\ln(e)}} = \sqrt[5]{e^5} = e$

4 Individuelle Schätzungen. Beispiele:
a) $e \approx 3$ **b)** $e^2 \approx 7$ **c)** $e^{-1} \approx 0{,}4$ **d)** $\sqrt{e} \approx 1{,}6$
e) $\ln(10) \approx 2{,}3$ **f)** $\ln(30) \approx 3{,}4$ **g)** $\ln(100) \approx 4{,}6$ **h)** $\ln(1000) \approx 6{,}9$

5 Lösung im Schulbuch.

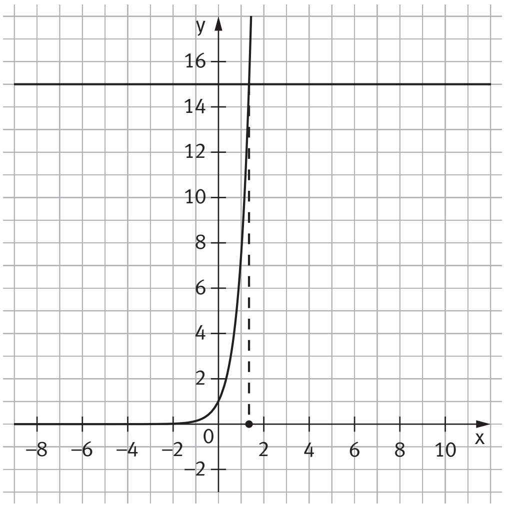
6 **a)** $x = \ln(21) \approx 3{,}04$ **b)** $-x = \ln(0{,}25) \approx -1{,}39 \Longrightarrow x \approx 1{,}39$
c) $e^x = 33 \Longrightarrow x = \ln(33) \approx 3{,}50$ **d)** $e^{2x} = 16 \Longleftrightarrow 2x = \ln(16) \approx 2{,}77 \Longrightarrow x \approx 1{,}39$
e) $x + 3 = \ln(24) \approx 3{,}18 \Longrightarrow x \approx 0{,}18$ **f)** $2x = \ln(11) \approx 2{,}40 \Longrightarrow x \approx 1{,}20$
g) $-x = \ln(e) = 1 \Longrightarrow x = -1$ **h)** $2x = \ln(e^{-1}) = -1 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$
i) $e^x(e^x - e) = 0 \Longleftrightarrow e^x - e = 0 \Longleftrightarrow e^x = e \Longrightarrow x = 1$
j) $\sqrt{e^x} - \frac{e^3}{e^x} = 0 \Longleftrightarrow e^{\frac{x}{2}} \cdot e^x - e^3 = 0 \Longleftrightarrow e^{\frac{3}{2}x} = e^3 \Longleftrightarrow \frac{3}{2}x = 3 \Longrightarrow x = 2$
k) $e^{2x} - 6e^x + 9 = 0 \Longleftrightarrow (e^x - 3)^2 = 0 \Longleftrightarrow e^x - 3 = 0 \Longleftrightarrow e^x = 3 \Longleftrightarrow x = \ln(3) \approx 1{,}10$
l) $e^{2x} - 2 + e^{-2x} = 0 \quad | \cdot e^{2x}$
$e^{4x} - 2 \cdot e^{2x} + 1 = 0 \Longleftrightarrow (e^{2x} - 1)^2 = 0 \Longleftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \Longleftrightarrow e^{2x} = 1 \Longleftrightarrow x = 0$

Nachgefragt

- Nach Definition des Logarithmus ist $\ln(a) = b \Longleftrightarrow e^b = a$. Der Ausdruck e^b ist für jedes $b \in \mathbb{R}$ positiv: $e^b > 0$ für alle $b \in \mathbb{R}$. Damit muss auch $a > 0$ sein.
- Als Ergebnisse beim Berechnen von Logarithmen sind alle reellen Zahlen möglich.
- Man kann die Gleichung wie Valentin lösen, mit der Aussage, dass man sie auf diese Weise lösen müsse, hat er jedoch nicht Recht. Da die natürliche Exponentialfunktion streng monoton steigend ist, gibt es zu jedem Funktionswert y genau einen x-Wert mit $e^x = y$. Deshalb kann man die Gleichung (einfacher) auch durch Exponentenvergleich lösen: $e^x = e^2 \Longleftrightarrow x = 2$.
- Linke Seite: $\ln(e^n) = n$ (siehe Schulbuch Seite 71).
  Rechte Seite: $n \cdot \ln(e) = n$, da $\ln(e) = 1$.
  Damit gilt $\ln(e^n) = n \cdot \ln(e)$.

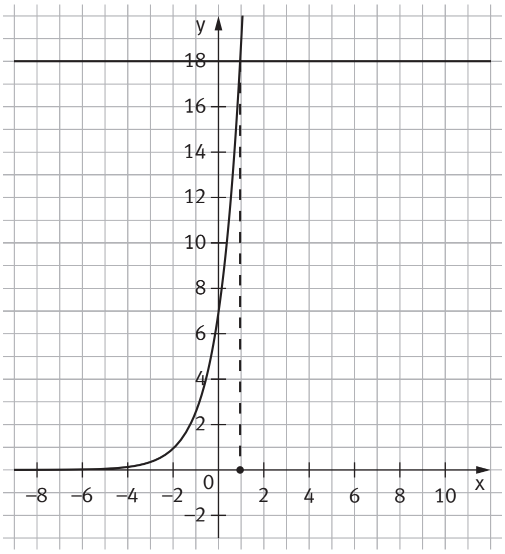
7 **a)** $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0;\quad e^x - 1 = 0;\quad e^x = 1;\quad x = 0$
b) $\ln(2 - e^{-x}) = 0;\quad 2 - e^{-x} = 1;\quad e^{-x} = 1;\quad x = 0$
c) $\ln\frac{x^2 + k^2}{x} = 0;\quad \frac{x^2 + k^2}{x} = 1;\quad x^2 + k^2 = x;\quad x^2 - x + k^2 = 0;\quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4k^2}}{2}$
d) $e^x - 3 + 2e^{-x} = 0;\quad | \cdot e^x$
$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0;$
$(e^x - 2)(e^x - 1) = 0;$
$e^x = 2;\ x_1 = \ln(2)$
$e^x = 1;\ x_2 = 0$

8 **a)**



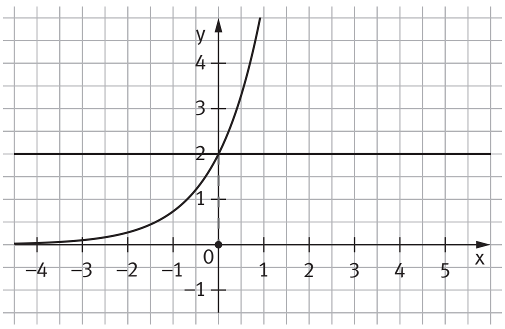
$2x = \ln(15) \approx 2{,}71 \Longrightarrow x \approx 1{,}35$

b)



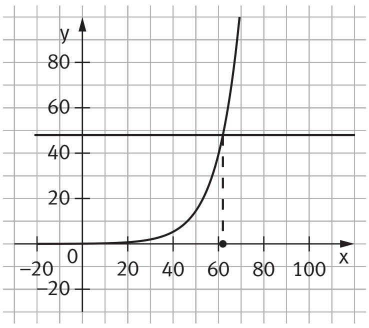
$x + 2 = \ln(18) \approx 2{,}89 \Longrightarrow x \approx 0{,}89$

c)



$2e^{x} = 2 \Longleftrightarrow e^{x} = 1 \Longrightarrow x = 0$

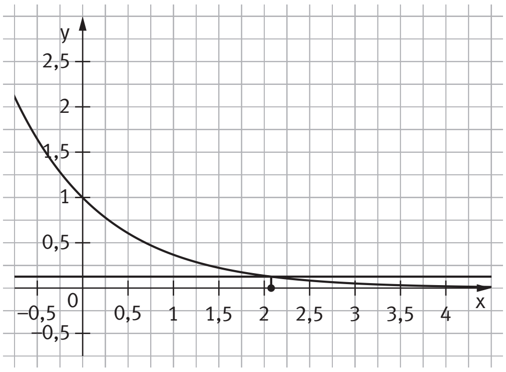
d)



$0{,}1e^{0{,}1x} = 48 \Longleftrightarrow e^{0{,}1x} = 480$

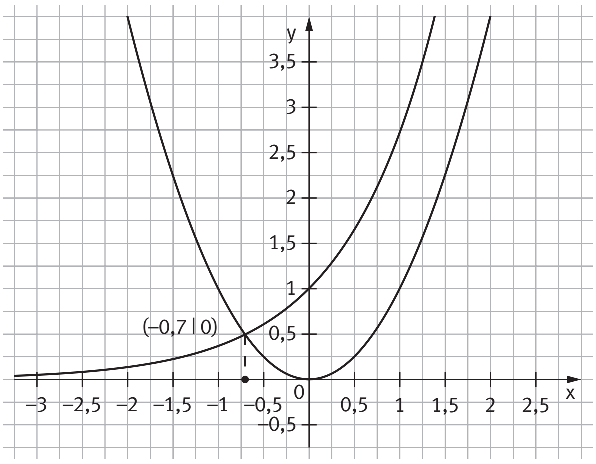
$\Longleftrightarrow 0{,}1x = \ln(480) \approx 6{,}17 \Longrightarrow x \approx 61{,}7$

e)



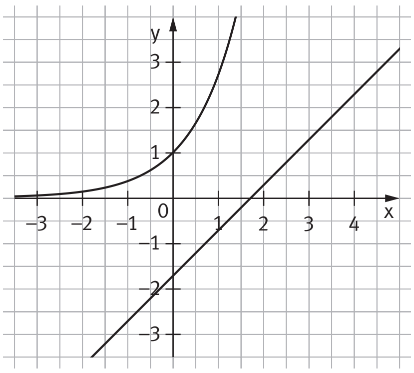
$e^{-x} = 0{,}125 \Longleftrightarrow -x = \ln(0{,}125) \approx -2{,}08 \Longrightarrow x \approx 2{,}08$

f)



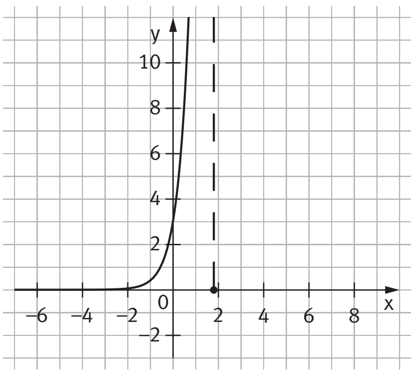
Rechnerische Lösung nicht möglich.
$x \approx -0{,}7$

g) $e^x = x + 1 - e$



Keine Lösung, da kein Schnittpunkt der Graphen existiert.

h)



$e^{2x} = 37 \Longleftrightarrow 2x = \ln(37) \approx 3{,}61 \Longrightarrow x \approx 1{,}81$

9 Lösung im Schulbuch.

10 a) $f'(x) = 2e^x$ $2e^x = 8 \Longleftrightarrow e^x = 4 \Longrightarrow x = \ln(4) \approx 1{,}39$
$f(\ln(4)) = 2e^{\ln(4)} = 2 \cdot 4 = 8$
Im Punkt $(\ln(4)|8)$ bzw. gerundet $(1{,}39|8)$ hat der Graph von f die Steigung 8.

b) $f'(x) = e^{2x}$ $e^{2x} = 1 \Longleftrightarrow 2x = \ln(1) \Longrightarrow x = 0$
$f(0) = 0{,}5$
Im Punkt $(0|0{,}5)$ hat der Graph von f die Steigung 1.

c) $f'(x) = -e^x$ $-e^x = -3 \Longleftrightarrow e^x = 3 \Longrightarrow x = \ln(3) \approx 1{,}10$
$f(\ln(3)) = -e^{\ln(3)} = -3$
Im Punkt $(\ln(3)|-3)$ bzw. gerundet $(1{,}10|-3)$ hat der Graph von f die Steigung –3.

d) $f'(x) = 0{,}5e^{-x}$ $0{,}5e^{-x} = 0{,}25 \Longleftrightarrow e^{-x} = 0{,}5 \Longrightarrow -x = \ln(0{,}5) \Longrightarrow x = -\ln(0{,}5) \approx 0{,}69$
$f(-\ln(0{,}5)) = -0{,}5e^{\ln(0{,}5)} = -0{,}5 \cdot 0{,}5 = -0{,}25$
Im Punkt $(-\ln(0{,}5)|-0{,}25)$ bzw. gerundet $(0{,}69|-0{,}25)$ hat der Graph von f die Steigung 0,25.

e) $f'(x) = e^{-2x}$ $e^{-2x} = 1 \Longleftrightarrow -2x = \ln(1) = 0 \Longrightarrow x = 0$
$f(0) = -0{,}5$
Im Punkt $(0|-0{,}5)$ hat der Graph von f die Steigung 1.

f) $f'(x) = 2e^{2x-1}$ $2e^{2x-1} = 0{,}5 \Longleftrightarrow e^{2x-1} = 1 \Longrightarrow 2x - 1 = \ln(1) = 0 \Longrightarrow x = 0{,}5$
$f(0{,}5) = 3$
Im Punkt $(0{,}5|3)$ hat der Graph von f die Steigung 0,5.

11 a) Logarithmen sind nur für positive Basen definiert, in den WTR wurde aber die Basis –3 eingegeben.

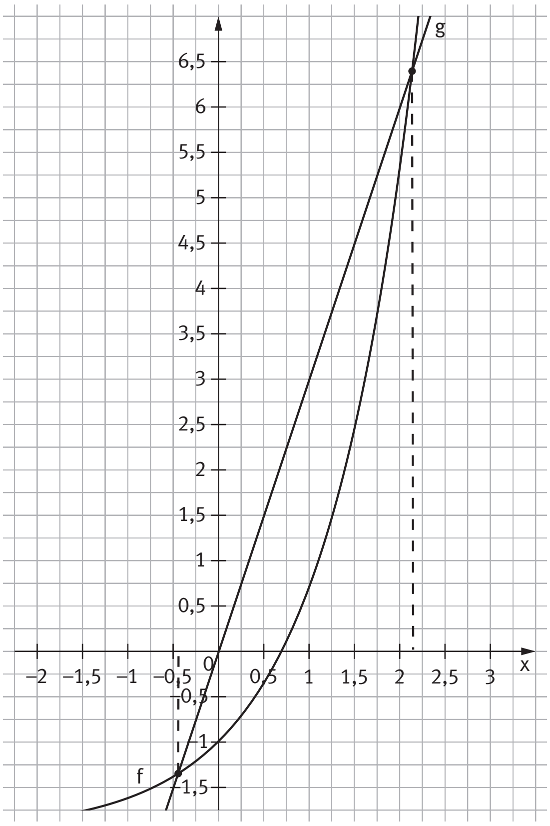
b) Logarithmen sind nur für positive Zahlen definiert, in den WTR wurde aber die Zahl –27 eingegeben.

c) Logarithmen sind nur für positive Basen und positive Zahlen definiert, in den WTR wurde aber die Basis –3 und die Zahl –27 eingegeben. Es gilt zwar $(-3)^3 = -27$, aufgrund der Definition des Logarithmus ist das Einsetzen einer negativen Basis bzw. einer negativen Zahl in den Logarithmus aber nicht möglich.

12 a) In der zweiten Zeile wurde der ln auf der linken Seite falsch angewendet; die korrekte Anwendung des ln würde $\ln(e^x - 4)$ ergeben. Allerdings ist diese Anwendung des ln nicht sinnvoll, da $\ln(e^x - 4)$ sich nicht weiter umformen lässt.
Im letzten Schritt wurde das Gesetz für die Addition von Logarithmen falsch angewendet und dadurch zufällig das richtige Ergebnis gefunden.
Richtige Lösung:
$e^x - 4 = 5 \quad | +4$
$e^x = 9 \quad | \ln$
$x = \ln(9)$

b) Im ersten Schritt wurde –2 aus dem Exponenten fälschlich als +2 auf die rechte Seite gebracht.
Richtige Lösung:
$e^{x-2} = 8 \quad | \ln$
$\ln(e^{x-2}) = \ln(8)$
$(x-2) \cdot \ln(e) = \ln(8)$
$x - 2 = \ln(8) \quad | +2$
$x = 2 + \ln(8)$

c) Die Umformungen sind richtig, die Gleichung wurde aber nicht gelöst. Diese Gleichung lässt sich nicht rechnerisch lösen. Mit einer graphischen Lösung erhält man Näherungswerte der Lösungen. Man bestimmt die x-Koordinaten der Schittpunkte der Funktionsgraphen von $f(x) = e^x - 2$ und $g(x) = 3x$:



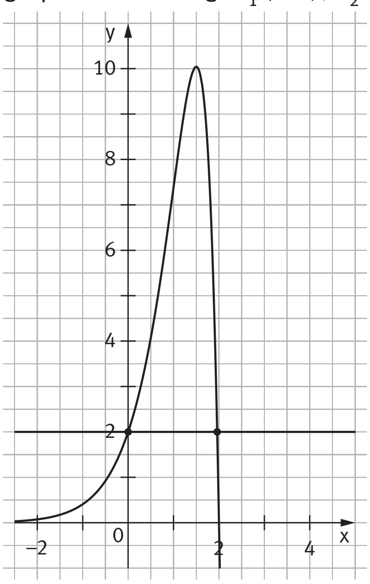
Durch Ablesen findet man $x_1 \approx 0{,}45$ und $x_2 \approx 2{,}15$.

d) Die Kettenregel wurde falsch angewendet.
Richtige Lösung: $f'(x) = 2 \cdot 5 \cdot e^{5x} = 10e^{5x}$

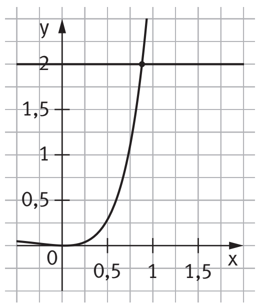
e) Es wurde falsch abgeleitet. Der Funktionsterm muss mit der Produkt- und Kettenregel abgeleitet werden.
Richtige Lösung: $f'(x) = 3 \cdot e^{4x} + 3x \cdot 4 \cdot e^{4x} = 3 \cdot e^{4x} \cdot (1 + 4x)$

f) Es wurde falsch abgeleitet. Der Funktionsterm muss mit der Produkt- und Kettenregel abgeleitet werden.
Richtige Lösung: $f'(x) = 2 \cdot x \cdot e^{2x} + x^2 \cdot 2 \cdot e^{2x} = 2 \cdot x \cdot e^{2x} \cdot (1 + x)$

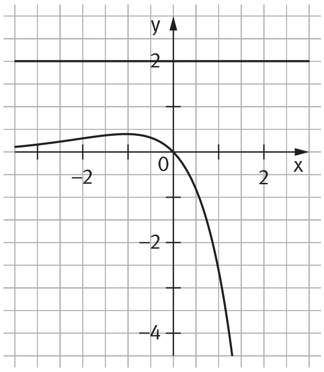
13 **a)** graphische Lösung: $P_1\,(0|2)$, $P_2\,(1{,}96|2)$



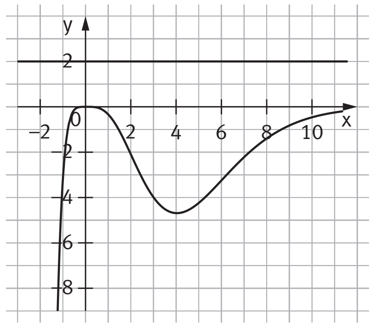
b) graphische Lösung: $P\,(0{,}85|2)$



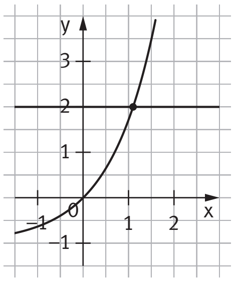
c) Die Gleichung hat keine Lösung.



d) Die Gleichung hat keine Lösung.

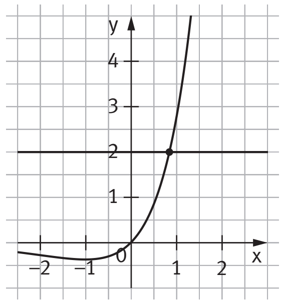


e) graphische Lösung: P (1,1 | 2)



rechnerische Lösung:
$-1 + e^x = 2 \Longleftrightarrow e^x = 3 \Longrightarrow x = \ln(3) \approx 1{,}1$

f) graphische Lösung: P (0,85 | 2)



14 a) $\ln(4) \approx 1{,}4$
$\mathbf{ln(40)} = \ln(4 \cdot 10) = \ln(4 \cdot 10^1) = \mathbf{ln(4)} + \mathbf{ln(10)} \approx 3{,}9$
$\mathbf{ln(400)} = \ln(4 \cdot 100) = \ln(4 \cdot 10^2) = \mathbf{ln(4)} + \mathbf{2 \cdot ln(10)} \approx 6{,}0$
$\mathbf{ln(4000)} = \ln(4 \cdot 1000) = \ln(4 \cdot 10^3) = \mathbf{ln(4)} + \mathbf{3 \cdot ln(10)} \approx 8{,}3$
$\mathbf{ln(40\,000)} = \ln(4 \cdot 10\,000) = \ln(4 \cdot 10^4) = \mathbf{ln(4)} + \mathbf{4 \cdot ln(10)} \approx 10{,}6$
$\mathbf{ln(0,4)} = \ln(4 \cdot 10^{-1}) = \mathbf{ln(4) + (-1) \cdot ln(10)} = \mathbf{ln(4)} - \mathbf{ln(10)} \approx -0{,}9$
Allgemein: $\mathbf{ln(4 \cdot 10^k)} = \mathbf{ln(4) + k \cdot ln(10)}$

b) $\ln(9) \approx 2{,}2$
$\ln(0{,}9) = \ln(9 \cdot 10^{-1}) = \mathbf{ln(9)} + \mathbf{(-1)} \cdot \mathbf{ln(10)} = \mathbf{ln(9)} - \mathbf{ln(10)} \approx -0{,}1$
$\ln(0{,}009) = \ln(9 \cdot 10^{-3}) = \mathbf{ln(9)} + \mathbf{(-3)} \cdot \mathbf{ln(10)} = \mathbf{ln(9)} - \mathbf{3 \cdot ln(10)} \approx -4{,}7$
$\ln(0{,}009) = \ln(9 \cdot 10^{-4}) = \mathbf{ln(9)} + \mathbf{(-4)} \cdot \mathbf{ln(10)} = \mathbf{ln(9)} - \mathbf{4 \cdot ln(10)} \approx -7{,}0$
$\ln(9 \cdot 10^{-4}) = \mathbf{ln(9)} + \mathbf{(-4)} \cdot \mathbf{ln(10)} = \mathbf{ln(9)} - \mathbf{4 \cdot ln(10)} \approx -7{,}0$
$\ln(9 \cdot 10^4) = \mathbf{ln(9)} + \mathbf{4 \cdot ln(10)} \approx 11{,}4$
Allgemein: $\mathbf{ln(9 \cdot 10^k)} = \mathbf{ln(9) + k \cdot ln(10)}$

15 a) $3^x + 2 = -3x$ Durch Ablesen: $x \approx -0{,}81$
Die Gleichung ist algebraisch nicht lösbar.
b) $3^{-x} = 3$ Aus dem Exponentenvergleich folgt $-x = 1 \Longrightarrow x = -1$
c) $-e^x = \frac{1}{4}x - 2$ Durch Ablesen: $x \approx 0{,}61$
Die Gleichung ist algebraisch nicht lösbar.

16 a) Der Bestand fällt wegen des negativen Exponenten exponentiell, d. h. zu Beginn verhältnismäßig schnell und dann mit zunehmender Zeit immer langsamer, ohne jemals null zu werden. Hierin zeigt sich allerdings eine Grenze der Modellierung des Bestands mithilfe der Exponentialfunktion: In der Realität ist ein Tierbestand bereits gefährdet, wenn seine Anzahl eine bestimmte kritische Grenze (größer als null) unterschreitet.

b) Aktueller Bestand (entsprechend t = 0): 350 000 Tiere
10 % des aktuellen Bestands: 35 000 Tiere
Damit erhält man die Gleichung:
$350\,000 \cdot e^{-0{,}2t} = 35\,000 \quad | : 350\,000$
$e^{-0{,}2t} = 0{,}1 \quad | \ln$
$-0{,}2t = \ln(0{,}1) \quad | : (-0{,}2)$
$t = -\frac{\ln(0{,}1)}{0{,}2} \approx 11{,}5$
Die Kudu-Population umfasst nach etwa 11,5 Jahren nur noch 10 % des aktuellen Bestands.

c) Die Bestandsabnahme wird durch die Ableitungsfunktion der Bestandsfunktion B (t) beschrieben:
$B'(t) = -70\,000 \cdot e^{-0{,}2t}$.
Berechnung des Zeitpunkts, zu dem die Bestandsabnahme 10 000 Tiere beträgt:
$-70\,000 \cdot e^{-0{,}2t} = -10\,000 \Longrightarrow e^{-0{,}2t} = \frac{1}{7} \Longrightarrow -0{,}2t = \ln\left(\frac{1}{7}\right) \Longrightarrow t \approx 9{,}7$
Nach etwa 9,7 Jahren beträgt die Bestandsabnahme innerhalb eines Jahres erstmals weniger als 10 000 Tiere.

17 **a)** $f(t) = 0{,}1 \cdot 2^t$ (t in Tagen). f(t) ist die Fläche (in Quadratmeter), den die Blätter der Seerose nach t Tagen bedecken.

b) $20 = 0{,}1 \cdot 2^t \Longleftrightarrow 2^t = 200 \Longrightarrow t = \log_2(200) \approx 7{,}6$
Nach etwa 8 Tagen ist der See vollständig zugewachsen.

c) Zunächst wächst der Bestand nur langsam, das Wachstum nimmt dann mit der Zeit aber mehr und mehr zu.

d) Individuelle Stellungnahmen. Im Kontext der Entwicklung von Umweltproblemen, auf die Farthmann sich mit dem Beispiel bezog, wird verdeutlicht, dass man sich bei einer vermuteten exponentiellen Entwicklung von geringen Änderungen zu Beginn nicht täuschen lassen sollte. Sobald ein exponentielles Wachstum eine bestimmte Grenze überschreitet und „Fahrt aufnimmt“, verläuft die weitere Entwicklung explosionsartig und ist kaum noch zu kontrollieren. Die dadurch verursachten Folgen können dann irreversibel sein.

18 Individuelle Lösungen. Beispiel: c = 2; a = 4; b = 8
1 $\log_2(4 \cdot 8) = \log_2(32) = 5 \qquad \log_2(4) + \log_2(8) = 2 + 3 = 5$
2 $\log_2(4 : 8) = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \qquad \log_2(4) - \log_2(8) = 2 - 3 = -1$
Anmerkung: Die Gesetze gelten allgemein, nicht nur für Zahlen a und b, die Potenzen der Basis c sind. Die Zahlen a und b wurden hier als Potenzen der Basis c gewählt, um die Gesetze mit ganzzahligen Logarithmenwerten möglichst einfach veranschaulichen zu können.

19 Lösung im Schulbuch.

20 **a)** $\log(x^3) - \log(x^2) - \log(x) = 3\log(x) - 2\log(x) - \log(x) = 0$

b) $\log(a \cdot b) - \log(a^2 \cdot b) - \log\left(\frac{1}{b}\right) = \log(a) + \log(b) - \log(a^2) - \log(b) + \log(b) = \log(a) + \log(b) - 2\log(a)$
$= \log(b) - \log(a) = \log\left(\frac{b}{a}\right)$

c) $\log(x^3) - 2\log\left(\frac{1}{x}\right) = 3\log(x) + 2\log(x) = 5\log(x)$

d) $\log(a+b)^2 - \log(a^2 - b^2) = \log\frac{(a+b)^2}{a^2 - b^2} = \log\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)} = \log\frac{a+b}{a-b}$

e) $\log(a^2b - b) - \log(a-1)^2 - \log(a+1) = \log\frac{a^2b - b}{(a-1)^2\,(a+1)} = \log\frac{b(a^2-1)}{(a-1)^2\,(a+1)} = \log\frac{b(a^2-1)}{(a^2-1)(a-1)} =$
$\log\frac{b}{(a-1)}$

f) $\log\left(\sqrt{x+1}\right) - 0{,}5\log(x+1) + \log\left(\frac{1}{x}\right) + \log(x^2) = \log\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right) + \log(x) = \log(1) + \log(x) = \log(x)$

21 **a)** Die Grafik beschreibt die Häufigkeit von Meteoriteneinschlägen in Abhänigkeit vom Meteoriten-Durchmesser. Darüber hinaus sind auch die Durchmesser der Meteoritenkrater und der Vergleich mit Bombenexplosionen angegeben.

b) Die x-Achse ist nicht äquidistant skaliert, sondern logarithmisch zur Basis 10.

c) $\log_{10}(13{,}5) \approx 1{,}13$ $\quad$ $\log_{10}(213{,}57) \approx 2{,}33$
$\log_{10}(0{,}17) \approx -0{,}77$ $\quad$ $\log_{10}(3845{,}91) \approx 3{,}58$

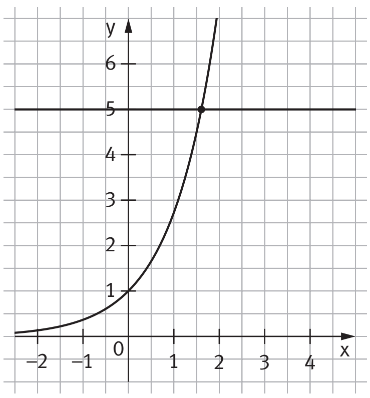
d) Logarithmische Skalen können nicht bei null beginnen, da der Logarithmus von null nicht definiert ist. Die Teilstriche sind nicht äquidistant, weil der Logarithmus mit größer werdenden Werten immer langsamer wächst.

e) $y = a \cdot e^{bx} \Longleftrightarrow \frac{1}{a} \cdot y = e^{bx} \Longrightarrow \ln\left(\frac{y}{a}\right) = bx \Longrightarrow \ln(y) - \ln(a) = bx \Longrightarrow \ln(y) = bx + \ln(a)$
Die Gerade hat die Steigung b.

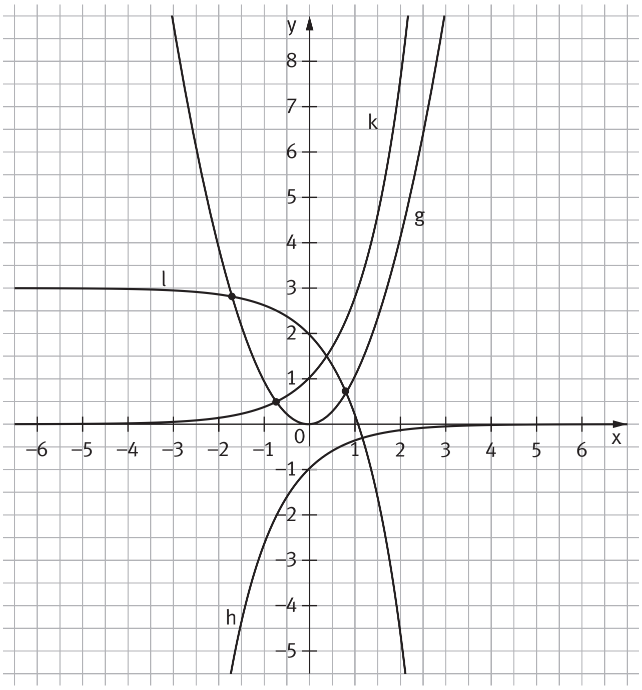
f) Die Richter-Skala wird zur Angabe der Stärke von Erdbeben (sog. Magnitude) verwendet. Die Magnitude ist ein logarithmisches Maß für die am Epizentrum freigesetzte Schwingungsenergie. Sie wird aus den Aufzeichnungen von Seismographen berechnet.
Dezibel (bzw. Bel) ist eine logarithmische Maßzahl zur Kennzeichnung des Verhältnisses zweier gleichartiger physikalischer Größen. Ein Dezibel ist ein Zehntel eines Bel; die Einheit ist nach dem Physiker Alexander G. Bell benannt. Die Einheit Dezibel wird z. B. für die Angabe von Lautstärken verwendet.

Nachgefragt

- Individuelle Lösungen. Beispiele: $\log_{10}0{,}5 \approx -0{,}3$; $\log_5 0{,}2 = -1$
  Für Basen $b > 1$ ist der Logarithmus einer Zahl a negativ, wenn $0 < a < 1$ gilt;
  allgemein: Ist in $\log_b(a) = c$ die Basis $b > a$, so ist $c < 0$.
- Die Gleichung $3^x = a$ ($b^x = a$) ist für alle Werte $a > 0$ (und nur für diese) lösbar, da die Potenz 3^x (b^x) nur positive Werte annimmt.
- Individuelle Lösungen. Beispiel:
  rechnerische Lösung der Gleichung $e^x = 5$:
  $e^x = 5 \Longrightarrow x = \ln(5) \approx 1{,}61$
  graphische Lösung:



  Durch Ablesen erhält man $x \approx 1{,}61$.
- Individuelle Lösungen. Beispiel: $e^{2x} = e^3$. Exponentenvergleich der beiden Seiten liefert:
  $2x = 3 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{2}$.
- Individuelle Lösungen. Beispiele: $f(x) = ae^{bx} + c$; $g(x) = x^2$
  kein Schnittpunkt: $h(x) = -e^{-x}$
  ein Schnittpunkt: $k(x) = e^x$
  zwei Schnittpunkte: $l(x) = -e^x + 3$


y
x
k
g
l
h
0

Entdecken

- Eine Epidemie (griechisch für „im Volk verbreitet“) oder Seuche ist die zeitliche und örtliche Häufung einer Infektionskrankheit innerhalb einer Population.
  Meist wird der Ausbruch einer Epidemie nicht sofort, sondern erst zu einem späteren Zeitpunkt erkannt, wenn bereits eine größere Anzahl Personen erkrankt sind. Man muss dann davon ausgehen, dass noch mehr Menschen infiziert sind, da u. U. nicht alle sofort Symptome zeigen oder aus organisatorischen Gründen nicht alle Erkrankten sofort erfasst werden können. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der „Dunkelziffer“, d. h. einer nicht näher bekannten Anzahl weiterer Erkrankungsfälle.
  Die Anzahl 1820 der Verstorbenen kann trügerisch sein, weil die Anzahl der Todesopfer in Anbetracht einer möglichen größeren Dunkelziffer an Infizierten exponentiell steigen kann.

Aufgaben

1 **a)** Es liegt kein exponentielles, sondern lineares Wachstum vor, da die Werte von f (x) sich für benachbarte x-Werte immer um 4 unterscheiden.
b) Es liegt exponentielles Wachstum vor, denn es gilt z. B. $\frac{54}{6} = 9$; $\frac{486}{54} = 9$; $\frac{118\,098}{486} = 243 = 9^{2,5}$, d. h. der Quotient der Werte von f (x) ist bei gleichen x-Schritten konstant.
c) Es liegt eine exponentielle Abnahme vor, denn es gilt z. B. $\frac{1,5}{3} = 0,5$; $\frac{0,75}{1,5} = 0,5$, $\frac{0,047}{0,75} \approx 0,5^4$, d. h. der Quotient der Werte von f (x) ist bei gleichen x-Schritten konstant.

2 **a)** Wachstumsfaktor 1,5

x	0	1	2	3	5	8
f (x)	2	3	4,5	6,75	15,19	51,26

b) Wachstumsfaktor 0,5 (d. h. Abnahme)

x	0	10	20	40	100	250
f (x)	24	12	6	1,5	0,023	$7,2 \cdot 10^{-7}$

3 **a)** $f(0) = 3 \cdot 2^0 = 3$ $f(5) = 3 \cdot 2^5 = 96$
b) $f(0) = 10 \cdot 0,5^0 = 10$ $f(5) = 0,3125$
c) $f(0) = 4 \cdot e^{2 \cdot 0} = 4$ $f(5) \approx 88\,106$

4 **a)** $B(0) = 1,2$ $B(10) = 1,2 \cdot 3^{10} \approx 70\,859$
b) $B(0) = 10$ $B(10) = 10 \cdot e^{1,2 \cdot 10} \approx 1\,627\,548$
c) $B(0) = 100$ $B(10) = 100 \cdot e^{-0,1 \cdot 10} \approx 36,8$

5 **a)** $B'(t) = 1,2 \cdot 3^t \cdot \ln(3)$ $B'(7) \approx 2883,2$
b) $B'(t) = 10 \cdot 1,2 \cdot e^{1,2t}$ $B'(7) \approx 53\,364,8$
c) $B'(t) = 100 \cdot (-0,1) \cdot e^{-0,1t}$ $B'(7) \approx 4,97$

6 **a)** $0,5 \cdot 5,5^x = 50 \Leftrightarrow 5,5^x = 100 \Rightarrow x = \log_{5,5} 100 \approx 2,7$
b) $2,7 \cdot e^{2x} = 50 \Leftrightarrow e^{2x} = 18,52 \Leftrightarrow 2x = \ln(18,52) \approx 2,92 \Rightarrow x \approx 1,46$
c) $300 \cdot e^{-3x} = 50 \Leftrightarrow e^{-3x} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow -3x = \ln\left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow x = -\frac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{3} \approx 0,6$

Nachgefragt

- Individuelle Lösungen. Beispiele:
  Handelt es sich um exponentielles Wachstum?
  Wie groß ist der Bestand zu einem bestimmten Zeitpunkt?
  Wie groß ist der Wachstumsfaktor?
- Gemeinsamkeiten:
  Beide beschreiben Wachstumsvorgänge
  Unterschiede:
  - Konstante Ab- bzw. Zunahme bei linearem Wachstum,
    Ab- bzw. Zunahme ist proportional zum jeweiligen Bestand bei exponentiellem Wachstum.
  - Steigung ist konstant bei linearem Wachstum,
    Steigung ist nicht konstant bei exponentiellem Wachstum
- Die Steigung bei exponentiellem Wachstum nimmt nach einer gewissen Zeit stark zu und überholt das lineare Wachstum für $t \to \infty$.
- Exponentielles Wachstum:
  Zunächst bildet man den Quotienten benachbarter Funktionswerte; dieser ist bei exponentiellem Wachstum konstant und gibt den Wachstumsfaktor b an.
  Durch Einsetzen eines Wertepaars in die allgemeine Wachstumsgleichung $B(t) = B(0) \cdot b^t$ kann der Anfangsbestand B (0) berechnet werden.
  Lineares Wachstum:
  Bei linearem Wachstum nehmen die f(x)-Werte mit einem konstanten Faktor zu bzw. ab.
- Individuelle Lösungen. Beispiel:
  Ab- bzw. Zunahme ist proportional zum jeweiligen Bestand.

7 Lösung im Schulbuch.

8 **a)** Quotient benachbarter Funktionswerte

$\frac{0{,}3}{0{,}2} \approx 1{,}5$; $\frac{0{,}48}{0{,}3} \approx 1{,}6$; $\frac{0{,}8}{0{,}48} \approx 1{,}67$; $\frac{1{,}2}{0{,}8} \approx 1{,}5$

Das Wachstum der Kresse kann somit näherungsweise mithilfe einer Exponentialfunktion h (t) (h in cm, t in Tagen) mit dem Wachstumsfaktor 1,6 und der Anfangshöhe 0,2 cm beschrieben werden:
$h(t) = 0{,}2 \cdot 1{,}6^t$.
Nach zwei Wochen (14 Tage) würde dieses Modell eine Wuchshöhe von $h(14) \approx 144{,}12$ cm ergeben. In Wirklichkeit ist Kresse mit einer maximalen Wuchshöhe von etwa 40 cm bereits früher ausgewachsen.

b) $0{,}2 \cdot 1{,}6^t = 10 \Longleftrightarrow 1{,}6^t = 50 \Longrightarrow t \approx 8{,}3$
Nach etwa 8 Tagen und 7 Stunden hat die Kresse eine Höhe von 10 cm erreicht.

c) $0{,}2 \cdot b^7 = 4{,}2 \Longleftrightarrow b^7 = 21 \Longleftrightarrow b = \sqrt[7]{21} \approx 1{,}54$

d) Mit der mittleren Wachstumsrate aus c) gilt für das Wachstum der Kresse $f(t) = 0{,}2 \cdot 1{,}54^t$ (f in cm, t in Tagen). Die momentane Wachstumsrate ist durch die Ableitung gegeben (in cm / Tag):
$f'(t) = 0{,}2 \cdot \ln(1{,}54) \cdot 1{,}54^t \approx 0{,}09 \cdot 1{,}54^t$.
Momentane Wachstumsrate größer als 6 cm/Tag:
$0{,}09 \cdot 1{,}54^t > 6 \Longleftrightarrow 1{,}54^t > 66{,}67 \Longleftrightarrow t \cdot \ln(1{,}54) > \ln(66{,}67) \Longleftrightarrow t > \frac{\ln(66{,}67)}{\ln(1{,}54)} \approx 9{,}7$
Nach ungefähr 9 Tagen und 17 Stunden ist das Wachstum größer als 6 cm / Tag.

9 **a)** $B(t) = 22\,000 \cdot e^{kt}$

$B(1) = 22\,000e^{k} = 44\,000 \Longrightarrow k = \ln(2) \approx 0{,}7 \Longrightarrow B(t) = 22\,000e^{0{,}7t}$

b) $B(5) = 22\,000e^{0{,}7 \cdot 5} \approx 728\,540$

$B(10) \approx 24\,125\,930$

$B(20) \approx 2{,}6 \cdot 10^{10}$

Nach 5 Jahren sind 728 540, nach 10 Jahren sind 24 125 930 und nach 20 Jahren sind $2{,}6 \cdot 10^{10}$ Nutrias zu erwarten.

c) $22\,000e^{0{,}7t} = 10^6 \Longrightarrow 0{,}7t = \ln\left(\frac{10^6}{22\,000}\right) \approx 3{,}8 \Longrightarrow t = 5{,}4$

Nach etwa 5 Jahren und 5 Monaten würde die Population nach diesem Modell eine Million Nutrias zählen.

In der Realität wird sich die Nutriapopulation nicht exakt nach diesem Modell entwickeln. So z. B. kann eine starke Zunahme der Population zu Nahrungsknappheit führen, was die weitere Entwicklung der Population hemmt.

10 **a)** $h(0) = \frac{180}{1+k} = 3{,}0; \quad k = 59$

$h(5) = \frac{180}{1+59e^{-5a}} = 20{,}0; \quad 1 + 59e^{-5a} = 9{,}0; \quad e^{-5a} = \frac{8{,}0}{59};\ a = -0{,}2\ln\frac{8{,}0}{59} \approx 0{,}40$

$h(x) = \frac{180}{1+59e^{-0{,}40x}}$

b)

x (in Wochen)	0	5	10	12	15	20	25	30
Höhe h (in cm)	3,0	20,0	86,5	121	157	177	180	180

c) $h'(x)$ bedeutet die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanzen $\left(\text{in } \frac{\text{cm}}{\text{Woche}}.\right)$

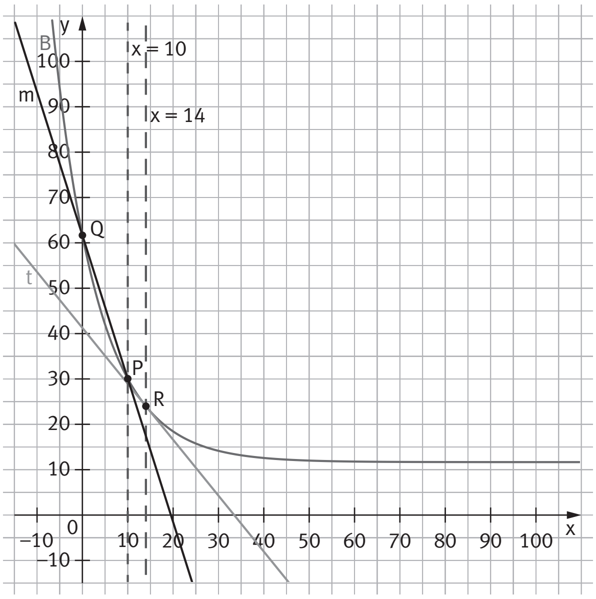
11 Lösung im Schulbuch.

12 **a)** Mittlere Wachstumsrate:

$m = \frac{B(10) - B(0)}{10 - 0} = \frac{12 + 50e^{-0{,}1 \cdot 10} - (12 + 50e^{-0{,}1 \cdot 0})}{10} \approx -3{,}16$

Momentane Wachstumsrate:

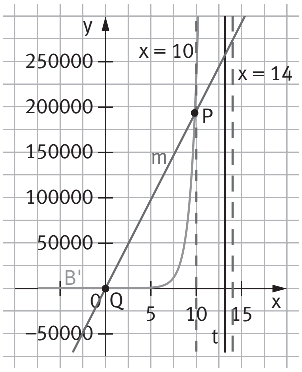
$B'(t) = 50 \cdot (-0{,}1) \cdot e^{-0{,}1t} = -5 \cdot e^{-0{,}1t} \qquad \Longrightarrow B'(14) \approx -1{,}23$



b) Mittlere Wachstumsrate:

$m = \frac{B(10) - B(0)}{10 - 0} = \frac{1{,}2e^{1{,}2 \cdot 10} - 1{,}2e^{1{,}2 \cdot 0}}{10} \approx 19\,530{,}5$

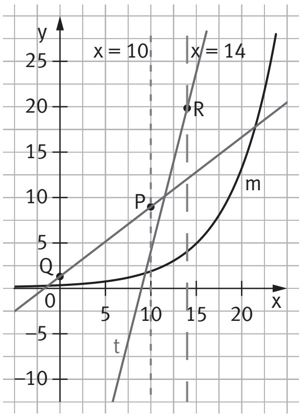
Momentane Wachstumsrate: $B'(t) = (1{,}2)^2 \cdot e^{1{,}2t} = 1{,}44 \cdot e^{1{,}2t} \Longrightarrow B'(14) \approx -28\,478\,020$



c) Mittlere Wachstumsrate:

$m = \frac{B(10) - B(0)}{10 - 0} = \frac{1{,}2e^{0{,}2 \cdot 10} - (1{,}2e^{0{,}2 \cdot 0})}{10} \approx 0{,}76$

Momentane Wachstumsrate: $B'(t) = 1{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot e^{0{,}2t} = 0{,}24 \cdot e^{0{,}2t} \Longrightarrow B'(14) \approx 3{,}95$



13 $f(x) = 0{,}015 \cdot 3^{kx}$;

$f(0) = 0{,}015 \cdot 1 = 0{,}015$

Zu Beginn der Beobachtung war die Pflanze 1,5 cm hoch.

$f(5) = 0{,}015 \cdot 3^{5k} = 0{,}015 + 0{,}22 = 0{,}235$;

$0{,}015 \cdot 3^{5k} = 0{,}235$;

$3^{5k} = \frac{0{,}235}{0{,}015} = \frac{47}{3}$;

$5k \ln 3 = \ln \frac{47}{3}$; $\quad k = \frac{\ln \frac{47}{3}}{5 \cdot \ln 3} \approx 0{,}50$

Höhe nach 8 Wochen (in m): $f(8) = 0{,}015 \cdot 3^{0{,}50 \cdot 8} = 0{,}015 \cdot 3^4 = 1{,}215$:

Nach weiteren 3 Wochen müsste die Pflanze 1,215 m hoch sein.

$g(x) = a + b \cdot 3^{0{,}5x}$; $x \geq 5$;

1 $0{,}235 = a + b \cdot 3^{0{,}5 \cdot 5}$;	$a + b \cdot 3^{2{,}5} = 0{,}235$;
2 $1{,}08 = a + b^{0{,}5 \cdot 8}$;	$a + b \cdot 3^4 = 1{,}08$;
2 − 1	$b \cdot (3^4 - 3^{2{,}5}) = 0{,}845$
$b = \frac{0{,}845}{3^4 - 3^{2{,}5}} \approx 0{,}013$	eingesetzt in 2

$a + 0{,}013 \cdot 81 = 1{,}08$; $a \approx 0{,}027$;

$g(x) = 0{,}027 + 0{,}013 \cdot 3^{0{,}5x}$

14 Für die Berechnung der Zinsen werden (wie bei Banken üblich) 360 Tage pro Jahr gerechnet.

a) Dagoberts Guthaben wird täglich mit $\frac{6}{360}$ % verzinst. Die Tageszinsen werden zum Guthaben hinzugerechnet und in den nachfolgenden Tagen mit verzinst (Zinseszins). Nach einem Jahr (360 Tage) beträgt Dagoberts Guthaben $200\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{360}\right)^{360}$ € ≈ 76 792 791 €.
Dagobert hat somit etwa 76 792 791 € – 200 000 € = 76 592 791 € Zinsen erhalten.

b) $200\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{360}\right)^x = 400\,000$ (x in Tagen) $\Longrightarrow \left(1 + \frac{6}{360}\right)^x = 2 \Longrightarrow x \cdot \ln\left(1 + \frac{6}{360}\right) = \ln(2) \Longrightarrow$

$x = \frac{\ln(2)}{\ln\left(1 + \frac{6}{360}\right)} \approx 42.$

Dagoberts ursprüngliches Guthaben verdoppelt sich nach etwa 42 Tagen, also nach $\frac{42}{360} \approx 0{,}117$ Jahren.

15 $d_{max} = \lim\limits_{t \to \infty} d(t) = 1$

$\frac{1}{1 + e^{-0{,}05(t-60)}} = 0{,}9$

$\frac{10}{9} = 1 + e^{-0{,}05(t-60)}$

$e^{-0{,}05(t-60)} = \frac{1}{9}$

$-0{,}05(t - 60) = \ln\frac{1}{9}$

$t - 60 = -\frac{1}{0{,}05} \cdot \ln\frac{1}{9}$

$t = 60 - 20\ln\frac{1}{9} \approx 104$

Nach etwa 104 Jahren hat die Fichte 90 % ihrer maximalen Durchmesserlänge erreicht.

16 a) $f(t) = 10 + t^2e^{4-t}$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(t)	10	30,1	39,6	34,5	26	19,2	14,9	12,4	11,2	10,5	10,2

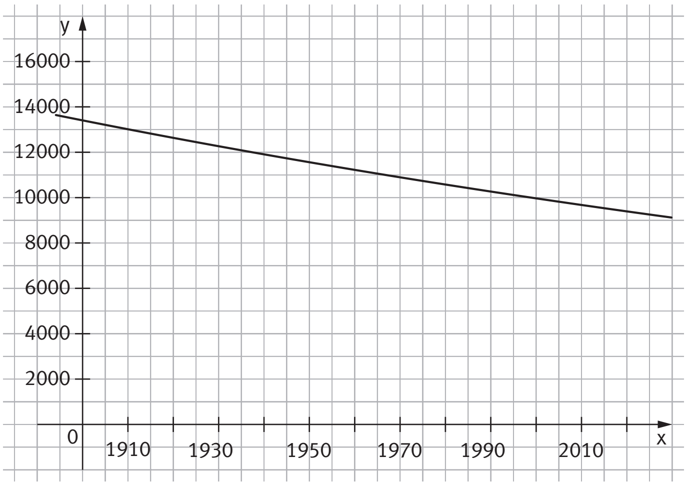
b) $f'(t) = 2te^{4-t} + t^2 \cdot (-1)e^{4-t} = e^{4-t} \cdot t(2 - t)$;
$f''(t) = -e^{4-t}(2t - t^2) + e^{4-t}(2 - 2t) = e^{4-t}(-2t + t^2 + 2 - 2t) = e^{4-t}(t^2 - 4t + 2)$
$f'(t) = 0$; $(t_1 = 0)$ $t_2 = 2$
$f'(2) = e^2(4 - 8 + 2) = -2e^2 < 0$
Nach 2 Stunden ist der Bestand am größten.

c) Im Zeitintervall 0 h < t < 2 h wächst die Population; im Zeitintervall 2 h < t < 10 h nimmt sie ab.
$f''(t) = 0$
Da $e^{4-t} \neq 0$ ist, gilt
$t^2 - 4t + 2 = 0$;
$t_{3,4} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$;
$t_3 \approx 3{,}41$; $t_4 \approx 0{,}59$
$f'''(t) = -e^{4-t}(t^2 - 4t + 2) + e^{4-t}(2t - 4) = e^{4-t}(2t - 4 - t^2 + 4t - 2) = e^{4-t}(-t^2 + 6t - 6)$;
$f'''\left(2 + \sqrt{2}\right) \approx 5{,}1 > 0$
$f'''\left(2 - \sqrt{2}\right) \approx -80 < 0$
Nach etwa 0,6 h ist die Zunahme am größten; nach etwa 3,4 h ist die Abnahme am größten.

17

Jahr	1908	1909	1920	1935	1947	1960	1981	2003
Sekunden	10518	9634	9155	8802	8739	8116	7698	7495

a) Möglicher Funktionsterm (x in Jahren, f (x) in Sekunden): $f(x) = 4 \cdot 10^6 \cdot e^{-0{,}003x}$



b) aktueller Weltrekord (2020): 2 : 01 : 39 Eliud Kipchoge (Kenia) Berlin 2018
Dieser Rekord entspricht 7299 Sekunden. Vergleich mit dem Wert für 2018 nach dem Modell aus a): $f(2018) = 4 \cdot 10^6 \cdot e^{-0{,}003 \cdot 2018} \approx 9394$
Der Rekordwert von 2018 passt nicht zu der Modellierung.

c) $f(2030) = 4 \cdot 10^6 \cdot e^{-0{,}003 \cdot 2030} \approx 9062$
Dieser Wert wurde z. B. bereits 2018 unterboten (siehe b)). Er kommt somit als Rekordwert für 2030 nicht in Frage.

Nachgefragt

- Individuelle Beschreibungen. Beispiele: Wachstum von Pflanzen, Entwicklung eines Tierbestands, radioaktiver Zerfall.
- Mögliche Realsituation: der Epidemieverlauf in Sierra Leone 2014 (siehe Schulbuch Seite 76 und 77), der annähernd durch die Funktion $f(t) = 260 \cdot e^{0{,}34t}$ beschrieben werden konnte.
  Es ist von entscheidender Bedeutung, welchen Zeitraum man sich anschaut, denn exponentielles Wachstum benötigt eine gewisse Zeit, bis es sich signifikant auf die absoluten Zahlen auswirkt. Da es am Anfang relativ schwach wächst, könnte man in dieser Zeitspanne die bald einsetzende Dynamik des Wachstums leicht unterschätzen.
- Zunächst bildet man den Quotienten benachbarter Funktionswerte, dieser ist bei exponentiellem Wachstum konstant und gibt den Wachstumsfaktor e^k an. k folgt dann aus dem natürlichen Logarithmus des Quotienten.
  Durch Einsetzen eines Wertepaars in die allgemeine Wachstumsgleichung $B(t) = B(0) \cdot e^{kt}$ kann der Anfangsbestand B (0) berechnet werden.

Aufgabe 1

Warm up

A **a)** $f(x) = -3e^{-9x}$ $f'(x) = (-3)\cdot(-9)\cdot e^{-9x} = 27e^{-9x}$

b) $f'(x) = \frac{1+e^x}{2\sqrt{x+e^x}}$

c) $f'(x) = 2(x-1)\cdot e^x + (x-1)^2e^x = (x-1)\cdot e^x\cdot(x+1) = (x^2-1)\cdot e^x$

B **a)** $f'(x) = -9(x^2-2)\cdot 2x = -18x(x^2-2)$

$f'(x) = 0$: $x_1 = 0$ oder $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{2,3} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41$

$f'(-0{,}1) \approx -3{,}58$ $f'(0{,}1) \approx 3{,}58$

VZW von – nach + bei $x = 0$: Tiefpunkt $(0|24)$

$f'(1{,}3) \approx 7{,}3$ $f'(1{,}5) \approx -6{,}8$

VZW von + nach – bei $x = \sqrt{2}$: Hochpunkt $(\sqrt{2}|0)$

$f'(-1{,}5) \approx 6{,}8$ $f'(-1{,}3) \approx -7{,}3$

VZW von + nach – bei $x = -\sqrt{2}$: Hochpunkt $(-\sqrt{2}|0)$

b) $f'(x) = \cos(x)\cdot x^2 + \sin(x)\cdot 2x = x(\cos(x)\cdot x + 2\cdot\sin(x))$

$f'(x) = 0$: $x_1 = 0$ oder $\cos(x)\cdot x + 2\cdot\sin(x) = 0$ mit den Näherungslösungen $x_{2,3} \approx \pm 2{,}29$

$f'(-0{,}1) \approx 0{,}17$ $f'(0{,}1) \approx 0{,}17$

Kein VZW der 1. Ableitung bei $x = 0$, d. h. kein Extremum bei $x = 0$.

$f'(-3) \approx -8{,}1$ $f'(-2) \approx 2$

VZW von – nach + bei $x = -2{,}29$: Tiefpunkt $(-2{,}29|-3{,}95)$

$f'(2) \approx 2$ $f'(3) \approx -8{,}1$

VZW von + nach – bei $x = 2{,}29$: Hochpunkt $(2{,}29|3{,}95)$

C **a)** $(x+2)^2\cdot e^{-x} = 0$ $\Rightarrow x = -2$

b) $e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow e^x = 4$ $\Rightarrow x = \ln(4)$

c) $x - 1 = \sqrt{x-1}$ Quadrieren ergibt:

$(x-1)^2 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot1\cdot2}}{2} \Leftrightarrow x_1 = 2;\ x_2 = 1$

Die Probe mit der ursprünglichen Gleichung zeigt, dass dieses tatsächlich die Lösungen der Gleichung sind (Probe erforderlich, da Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist).

---

1 **a)** **1–B–III**

f_1 besitzt eine Nullstelle bei $x = 1$, daher kommt nur Graph B in Frage.

$f_1'(x) = e^{-0{,}2x^2} + (x-1)\cdot(-0{,}4x)\cdot e^{-0{,}2x^2} = e^{-0{,}2x^2}(-0{,}4x^2 + 0{,}4x + 1)$

Da die Hoch- und Tiefpunkte des Graphen die Nullstellen der ersten Ableitung sind, kommt nur Graph III in Frage.

2–C–I

f_2 besitzt eine Nullstelle bei $x = 0$, daher kommt nur Graph C in Frage.

$f_2'(x) = e^{-x} - x\cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x)$

Da die Hoch- und Tiefpunkte des Graphen die Nullstellen der ersten Ableitung sind, kommt nur Graph III in Frage.

3–A–II

f_3 besitzt eine doppelte Nullstelle bei $x = \ln(2)$, daher kommt nur Graph A in Frage.

$f_3'(x) = 2(e^x - 2)\cdot e^x$

Da die Hoch- und Tiefpunkte des Graphen die Nullstellen der ersten Ableitung sind, kommt nur Graph II in Frage.

b) Tangente parallel zur x-Achse:

$f_1'(x) = e^{-0,2x^2}(-0,4x^2 + 0,4x + 1) = 0 \Longleftrightarrow -0,4x^2 + 0,4x + 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-0,4 \pm \sqrt{0,4^2 - 4 \cdot (-0,4) \cdot 1}}{2 \cdot (0,4)}$ $\qquad x_1 \approx 2,16;\ x_2 \approx -1,16$

$P_1\,(2,16 \mid 0,46)$; $P_2\,(-1,16 \mid -1,65)$

Parallele Tangente zur Geraden $y = 4x + 1$:

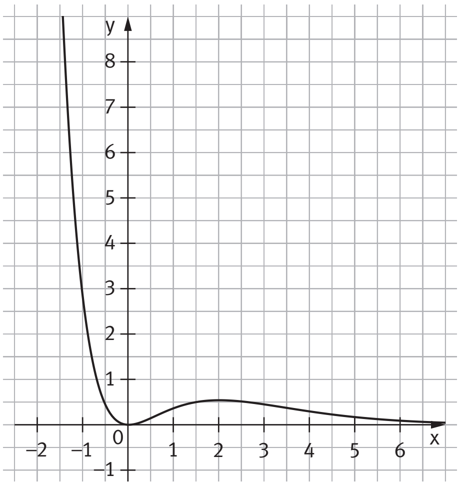
Dafür müsste gelten: $f_1'(x) = 4$; aus dem Graphen III ist ersichtlich, dass $f_1'(x) \neq 4$. Es gibt somit keine zur Geraden $y = 4x + 1$ parallele Tangente an den Graphen von $f_1(x)$.

c) Ablesen an Graph B ergibt $x_1 \approx -2,5$ und $x_2 = 0$.
Die Lösung $x_2 = 0$ kann auch aus der Gleichung $f_1(x) = -1$ gefunden werden, auch wenn diese Gleichung nicht allgemein rechnerisch gelöst werden kann.

d) Um eine Funktion graphisch abzuleiten, zeichnet man an den Graphen der Funktion die Tangenten in einigen Punkten ein. Diese Steigungen der Tangenten werden dann als Funktionswerte der Ableitung zu den zugehörigen x-Werten in ein seperates Koordinatensystem eingezeichnet. Wenn man diese Punkte verbindet, erhält man den Graphen der Ableitung (näherungsweise).

e) Individuelle Beschreibungen von Realsituationen. Beispiel: Loslassen eines Balls unter der Wasseroberfläche ($y = 0$). Zunächst bewegt sich der Ball sehr schnell in Richtung der Oberfläche. Er schießt kurz über die Oberfläche hinaus und fällt dann auf die Oberfläche zurück, wo er nach einiger Zeit ohne nennenswerte weitere Bewegung schwimmt.

f)



Der Graph verläuft oberhalb der x-Achse und berührt die x-Achse in der doppelten Nullstelle bei $x = 0$ (aus der einfachen Nullstelle von $f_2(x)$ bei $x = 0$ ist bei $f_4(x)$ eine doppelte Nullstelle geworden).

Für $x \to -\infty$ strebt der Graph gegen $+\infty$.

Für $x \to \infty$ strebt der Graph gegen 0; die x-Achse ist waagrechte Asymptote.

Aufgabe 2

Warm up

A **a)** $5^{-2} : 5^{-4} = 5^{-2} \cdot 5^4 = 5^2 = 25$

b) $6^{-3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-4} = 6^{-3} \cdot 6^4 = 6^{-3+4} = 6$

c) $\frac{6^3 \cdot 14^5}{12^4 \cdot 7^4} = \frac{6^3 \cdot (2 \cdot 7)^5}{(2 \cdot 6)^4 \cdot 7^4} = \frac{6^3 \cdot 2^5 \cdot 7^5}{2^4 \cdot 6^4 \cdot 7^4} = \frac{2 \cdot 7}{6} = \frac{7}{3}$

d) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^2$

e) $\frac{a^{-5}b^2}{c^{-2}a^3} : \frac{c^4b^3}{ba^8} = \frac{b^2}{c^{-2}a^8} : \frac{c^4b^2}{a^8} = \frac{b^2}{c^{-2}a^8} \cdot \frac{a^8}{c^4 \cdot b^2} = \frac{1}{c^2}$

B **a)** Verschiebung um 3 Längeneinheiten nach rechts entlang der x-Achse, Streckung um den Faktor 2, Verschiebung um 4 Längeneinheiten nach oben entlang der y-Achse.

b) anderer Funktionstyp mit senkrechter Asymptote bei $x = 0$ und Änderung des Vorzeichens.

c) Keine Nullstelle mehr bei $x = 0$, sondern bei $x = -1$ und doppelte Nullstelle (Berührstelle) bei $x = 2$; Spiegelung an der x-Achse.

d) Verschiebung um π Längeneinheiten nach links entlang der x-Achse, Stauchung um den Faktor 0,5, Verschiebung um 1 Längeneinheit nach unten entlang der y-Achse.

C **a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

---

2 **a)** f: blauer Graph

g: grüner Graph, da periodisch

h: roter Graph, da exponentielles Wachstum erkennbar und Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ charakteristisch ist.

b) $h(x) = h_0 e^{kx}$

$h(2) = h_0 e^{2k} = 1$ $\qquad h(3{,}5) = h_0 e^{3{,}5k} = 4{,}5$

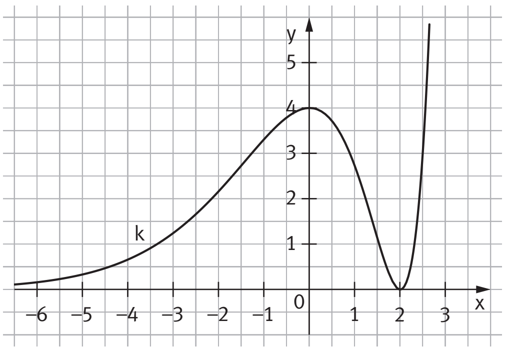
$\frac{h(2)}{h(3{,}5)} = \frac{e^{2k}}{e^{3{,}5k}} = \frac{1}{4{,}5} \Leftrightarrow e^{-\frac{3}{2}k} = \frac{2}{9} \Longrightarrow -\frac{3}{2}k = \ln\left(\frac{2}{9}\right) \approx -1{,}5 \Longrightarrow k = 1$

$h(2) = h_0 e^2 = 1 \Leftrightarrow h_0 = \frac{1}{e^2} \approx 0{,}14$

$h(x) = 0{,}14e^x$

c) Die Expoentialfunktion geht für $x \to -\infty$ gegen 0 und für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$. Sie ist monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$. Ihr Wertebereich ist $\mathbb{R}^+$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} k(x) = 4$



e) $k'(x) = 2(x-2) \cdot e^x + (x-2)^2 \cdot e^x = x(x-2)e^x$

$k'(x) = 0$: $x(x-2)e^x = 0 \Longrightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2$

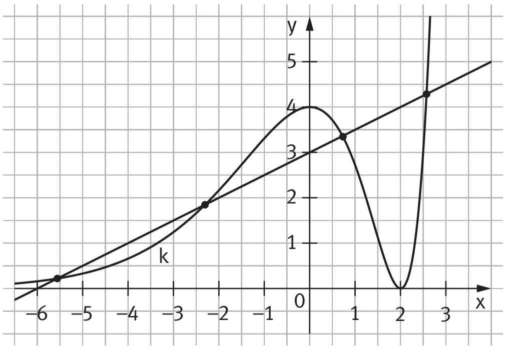
$k'(-0{,}1) = -0{,}19$ $k'(0{,}1) = -0{,}21$

Vorzeichenwechsel von + nach – bei x = 0: Hochpunkt (0|4)

$k'(-1{,}9) = -1{,}27$ $k'(2{,}1) = 1{,}71$

Vorzeichenwechsel von – nach + bei x = 2: Tiefpunkt (2|0)

f) Gleichsetzen der Funktionsterme liefert die Gleichung $(x-2)^2e^x = 0{,}5x + 3$. Da diese Gleichung nicht rechnerisch gelöst werden kann, bietet sich eine graphische Lösung durch Einzeichnen des Graphen von k und der Geraden an. An den Graphen werden dann die Schnittpunkte (näherungsweise) abgelesen.



Schnittpunkte: (–5,6|0,2), (–2,3|1,9), (0,7|3,4), (2,6|4,3)

Aufgabe 3

Warm up

A **a)** $5^{2x} - 4 \cdot 5^x = 0 \Leftrightarrow 5^x \cdot (5^x - 4) = 0 \Leftrightarrow 5^x - 4 = 0 \Rightarrow x = \log_5 4 \approx 0{,}86$

b) $3^{x+2} - 4 \cdot 3^x = 10 \Leftrightarrow 3^2 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^x = 10 \Leftrightarrow 5 \cdot 3^x = 10 \Leftrightarrow 3^x = 2 \Rightarrow x = \log_3 2 \approx 0{,}63$

c) $7^{x-3} - 49^x = 0 \Leftrightarrow 7^{x-3} = 7^{2x} \Leftrightarrow x - 3 = 2x \Leftrightarrow x = -3$

B **a)** Nullstellen: $(x^2 - 1) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow N_1\,(1|0);\ N_2\,(-1|0)$

Extremstellen: $f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 - 1) \cdot e^x = (x^2 + 2x - 1)e^x$

$(x^2 + 2x - 1)e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2};\ x_1 \approx -2{,}41;\ x_2 \approx 0{,}41$

$f'(-2{,}6) \approx 0{,}04$ $\qquad f'(-2{,}3) \approx -0{,}03$

Vorzeichenwechsel von + nach – bei x = –2,41: Hochpunkt (–2,41 | 0,43)

$f'(0{,}3) \approx -0{,}42$ $\qquad f'(0{,}5) \approx 0{,}41$

Vorzeichenwechsel von – nach + bei x = 0,41: Tiefpunkt (0,41 | –1,25)

b) Nullstellen: $x^3(x - 2)^2 = 0$

$x_1 = 0$ dreifache Nullstelle $N_1\,(0|0)$ $\qquad x_2 = 2$ doppelte Nullstelle $N_2\,(2|0)$

Extremstellen: $f'(x) = 3x^2(x - 2)^2 + x^3 \cdot 2 \cdot (x - 2) = x^2(x - 2)(5x - 6)$

$f'(x) = 0$: $x_1 = 0$ doppelte Nullstelle $\qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = \frac{6}{5} = 1{,}2$

$f'(-0{,}1) \approx 0{,}14$ $\qquad f'(0{,}1) \approx 0{,}1$

Kein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung bei x = 0, also kein Extrempunkt

$f'(1{,}9) \approx -1{,}26$ $\qquad f'(2{,}1) \approx 1{,}98$

Vorzeichenwechsel von – nach + bei x = 2: Tiefpunkt (2 | 0)

$f'(1{,}1) \approx 0{,}54$ $\qquad f'(1{,}3) \approx -0{,}59$

Vorzeichenwechsel von + nach – bei x = 1,2: Hochpunkt (1,2 | 1,1)

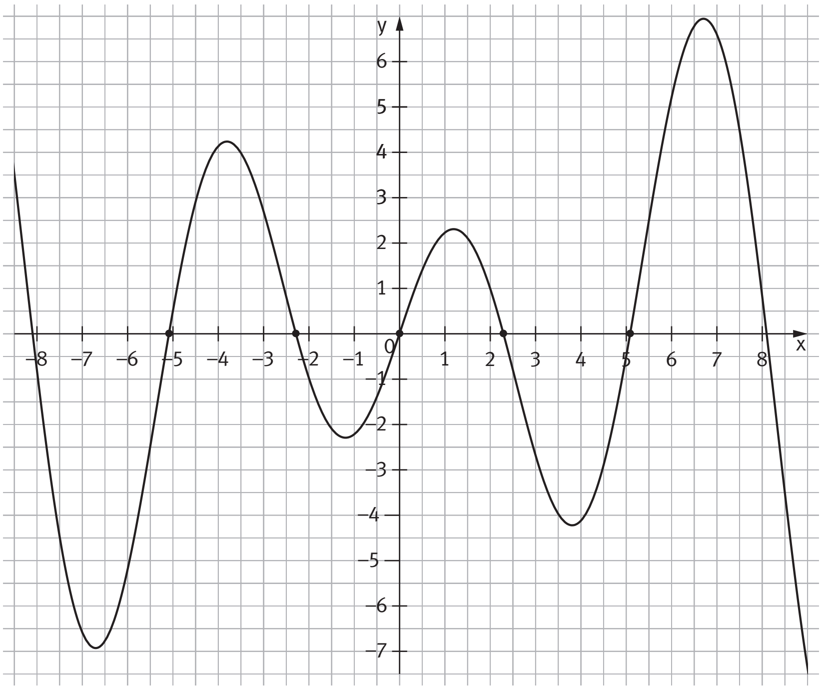
c) Nullstellen: $x^2 \cdot \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi;\ k \in \{0; \pm 1; \pm 2\}$

$x_1 = -2\pi;\ x_2 = -\pi;\ x_3 = 0$ (dreifache Nullstelle); $x_4 = \pi;\ x_5 = 2\pi$

Extremstellen: $f'(x) = \cos(x) \cdot x^2 + \sin(x) \cdot 2x = x(\cos(x) \cdot x + 2 \cdot \sin(x))$

$f'(x) = 0$: $x_1 = 0$ oder $\cos(x) \cdot x + 2 \cdot \sin(x) = 0$

Graphische Lösung der Gleichung $\cos(x) \cdot x + 2 \cdot \sin(x) = 0$ im Intervall [–8; 8]:



$x_1 \approx -5{,}1$
Hochpunkt (–5,1 | 24,1)

$x_2 \approx -2{,}3$
Tiefpunkt (–2,3 | –4)

$x_3 = 0$
kein Extrempunkt
(doppelte Nullstelle)

$x_4 \approx 2{,}3$
Hochpunkt (2,3 | 4)

$x_5 \approx 5{,}1$
Tiefpunkt (5,1 | –24,1)

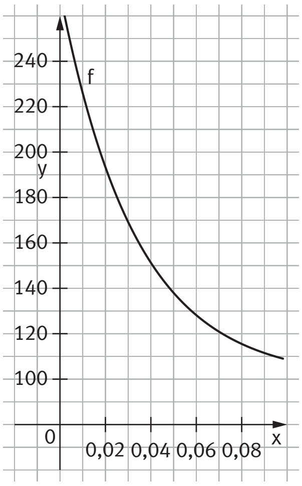
3 **a)** $f(0) = 260\,\frac{km}{h}$

$f'(t) = 160\,\frac{km}{h} \cdot \left(-30\,\frac{1}{h}\right) \cdot e^{-30t} = -4800\,\frac{km}{h^2} \cdot e^{-30\frac{1}{h}t}$

$f'(0) = -4800\,\frac{km}{h^2}$

f (0) entspricht der Geschwindigkeit zum Startpunkt t = 0. f' (0) ist die Änderung der Geschwindigkeit, also die Beschleunigung (bzw. Verzögerung wegen des negativen Vorzeichens) zum Zeitpunkt t = 0.

b)



c) Zum Zeitpunkt t = 0 hat der Ferrari eine Geschwindigkeit von 260 km/h. Danach wird er zunehmend stärker abgebremst bis zu einer Geschwindigkeit von ungefähr 135 km/h zum Zeitpunkt t = 0,05.
Als Streckenverlauf kommt z. B. der Übergang von einem geraden Streckenabschnitt, der mit hoher Geschwindigkeit (260 km/h) gefahren wird, in eine nicht allzu enge Kurve, die mit mittlerer Geschwindigkeit (135 km/h) gefahren wird, in Betracht.
Es könnte sich aber z. B. auch um ein Abbremsen auf gerader Strecke, etwa wegen eines liegen gebliebenen Fahrzeugs oder wegen „gelber Flaggen" handeln.
Weiterer Streckenverlauf und Graph der Geschwindigkeitsfunktion: individuelle Überlegungen.

d) $g(x) = 0 \Longleftrightarrow (3-x)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 3 \Longrightarrow$ doppelte Nullstelle N (3|0)

e) $g'(x) = 2 \cdot (3-x) \cdot (-1) \cdot e^x + (3-x)^2 \cdot e^x = (3-x)(1-x)e^x = 0 \Longrightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 3$

$g'(0{,}9) \approx 0{,}52 \quad g'(1{,}1) \approx -0{,}57$

Vorzeichenwechsel von + nach – bei x = 1: Hochpunkt (1|10,87)

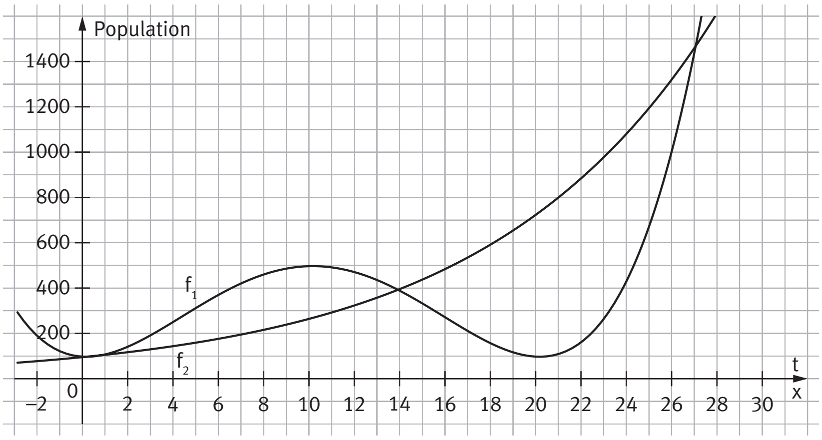
$g'(2{,}9) \approx -3{,}45 \quad g'(3{,}1) \approx 4{,}66$

Vorzeichenwechsel von – nach + bei x = 3: Tiefpunkt (3|0)

1 **a)** Der Graph zeigt den Bestand der Population der Schädlinge. Der Bestand wächst zunächst vermutlich exponentiell an (zu Beginn langsam, dann zunehmend schneller), bis der Anstieg um den 22. Tag beendet wird. Danach geht der Bestand innerhalb von etwa 5 Tagen auf null zurück.
Es ist nicht bekannt, nach wie langer Zeit das eingesetzte Schädlingsbekämpfungsmittel seine Wirkung entfaltet. Da der Rückgang der Population etwa am 21. Tag einsetzt, muss das Mittel spätestens an diesem Tag eingesetzt worden sein. Ab etwa dem 12. Tag verläuft der Graph zunehmend flacher, als man es bei einer exponentiellen Entwicklung erwarten würde. Dies könnte darauf hindeuten, dass das Mittel etwa zwischen dem 12. und dem 21. Tag eingesetzt wurde.

b) Einzeichen der Tangente bei t = 6 und Ablesen der Steigung liefert $m \approx 33$. Die Änderung der Population an Tag 6 beträgt somit etwa $33\,\frac{\text{Schädlinge}}{\text{Tag}}$.

c) Nur f_3 kommt für die Beschreibung der Situation in Frage, da der Bestand nach einer gewissen Zeit gleich null wird und von den drei Funktionstermen lediglich f_3 eine Nullstelle besitzt.
Graphen von f_1 und f_2:



d) $D = \mathbb{R}$. Die natürliche Exponentialfunktion ist allgemein auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

e) $f_3'(t) = 100 \cdot 0{,}15 \cdot e^{0{,}15t} - 2 \cdot 0{,}3 \cdot e^{0{,}3t} = 15e^{0{,}15t} - 0{,}6e^{0{,}3t} = e^{0{,}15t} \cdot (15 - 0{,}6e^{0{,}15t})$
$f_3'(t) = 0$: $\quad 15 - 0{,}6e^{0{,}15t} = 0 \Leftrightarrow e^{0{,}15t} = 25 \Leftrightarrow 0{,}15t = \ln(25) \approx 3{,}22 \Leftrightarrow t \approx 21{,}46$
Maximale Population: $f_3(21{,}46) \approx 1250$.

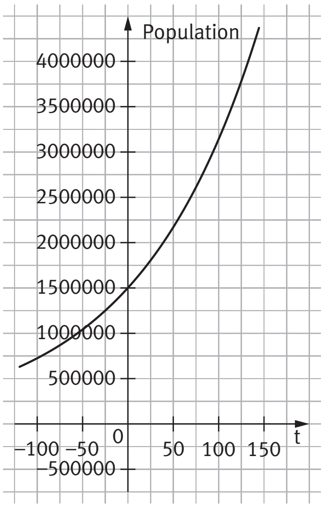
f) Ablesen am Graph ergibt: Für $t_1 \approx 12{,}5$ Tage und $t_2 \approx 25{,}5$ Tage beträgt der Schädlingsbestand etwa 550.
Bei t_1 handelt es sich um den Zeitpunkt, ab dem vermutlich mit der Schädlingsbekämpfung begonnen wurde (siehe a)).

g) $f_3(t) = 0 \Leftrightarrow 2e^{0{,}3t}(50e^{-0{,}15t} - 1) = 0 \Leftrightarrow 50e^{-0{,}15t} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-0{,}15t} = \frac{1}{50} \Leftrightarrow$
$-0{,}15t = \ln\left(\frac{1}{50}\right) \approx -3{,}91 \Rightarrow t = 26{,}07$
Die angegebene Darstellung ist hilfreich, da sie die Anwendung des Satzes vom Nullprodukt ermöglicht.

h) Die Bestandsentwicklung lässt sich sowohl in der Wachstumsphase als auch in der Phase des Rückgangs gut durch geeignete Exponentialfunktionen beschreiben.

i) Individuelle Überlegungen.

2 a) Bevölkerungswachstum von München (t in Jahren):



b) Es handelt sich nicht um lineares Wachstum, weil der jährliche Zuwachs (0,75 %) von der im jeweiligen Jahr vorliegenden Bevölkerungszahl abhängt. Der Zuwachs wird damit selbst von Jahr zu Jahr immer größer. Bei linearem Wachstum wäre der Zuwachs über alle Jahre hinweg konstant. Die Bevölkerungszahl würde sich in diesem Fall jedes Jahr um denselben Betrag erhöhen.

c) $f(x) = 1\,500\,000 \cdot 1{,}0075^x$ (x in Jahren)

d) Die Ableitung an einer bstimmten Stelle gibt die momentane Änderungsrate der Funktion an dieser Stelle an. In der zugrunde liegenden Realsituation ist dies die Zunahme der Bevölkerungs (als Absolutzahl) in einem bestimmten Jahr.

e) $f'(x) = 1\,500\,000 \cdot 1{,}0075^x \cdot \ln(1{,}0075) \approx 11\,208 \cdot 1{,}0075^x$

Wegen $f'(x) > 0$ auf ganz $\mathbb{R}_0^+$ hat f keine Extremstellen (abgesehen vom Randminimum bei $x = 0$) und ist streng monoton steigend auf ganz $\mathbb{R}_0^+$.

f) $1\,500\,000 \cdot 1{,}0075^x = 10\,000\,000 \Longleftrightarrow 1{,}0075^x = \frac{20}{3} \Longleftrightarrow x = \log_{1{,}0075}\frac{20}{3} \approx 253{,}9$

München wäre nach etwa 254 Jahren Megacity.

g) Individuelle Überlegungen. Beispiele:

- Generell beschreiben Modelle Entwicklungen oft nur für bestimmte Zeiträume realistisch. Bei längeren Zeiträumen (siehe z. B. Teilaufgabe f)) werden die Prognosen zunehmend unsicher.
- Die im Modell zugrunde gelegte jährliche Wachstumsrate von 0,75 % kann sich ändern. So z. B. könnte der Anstieg der Einwohnerzahl zu einer Verknappung und damit Verteuerung des Wohnraums führen. Dies könnte den weiteren Zuzug bremsen und damit die jährliche Wachstumsrate senken.

3 a) f_1: A

f_1 besitzt eine Nullstelle bei $x = 3$ (für $x > 3$ verläuft der Graph unterhalb der x-Achse). Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \infty$ und $f_1(0) = 3$.

f_2: B

f_2 besitzt eine Nullstelle bei $x = 3$. Es gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f_2(x) = -\infty$ und $f_2(0) = 3$.

f_3: C

$f_3(0) = -3$ erfüllt nur der Graph C. Es gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = -3$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f_2(x) = -\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = -\infty$.

Zwischen $-1 < x < 2$ ist der Graph monoton wachsend.

c) Hochpunkt: $f_2'(x) = (-1) \cdot e^x - (x - 3)e^x = (-x + 2)e^x$

$f_2'(x) = 0 \Longrightarrow x = 2$

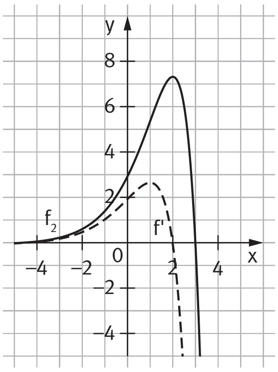
$f_2'(1{,}9) > 0 \quad f_2'(2{,}1) < 0$

Vorzeichenwechsel von $f_2'(x)$ von + nach – bei x = 2x = 2 $\Longrightarrow$ Hochpunkt $(2\,|\,e^2) \approx (2\,|\,7{,}39)$

Nullstelle: $f_2(x) = 0 \Longrightarrow x = 3 \Longrightarrow$ Nullstelle $(3\,|\,0)$

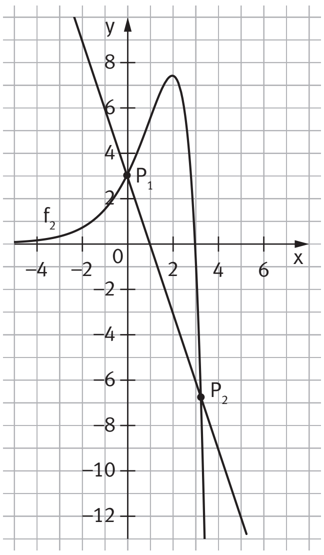
d) Die x-Achse ist waagrechte Asymptote des Graphen von $f_2(x)$ für $x \to -\infty$.

e) Zeichnerische Bestimmung:



Rechnerische Bestimmung siehe Teil c).

f)



Ablesen liefert $P_1\,(0\,|\,3)$; $P_2\,(3{,}25\,|\,-6{,}75)$.

Die Berechnung ist schwierig, da x sowohl im Exponenten der Exponentialfunktion als auch im linearen Term $-3x$ vorkommt.

g) Zunächst steigt der Graph sehr langsam, dann nimmt die Steigung bis in die Nähe des Hochpunkts immer weiter zu. Rechts vom Hochpunkt fällt der Graph sehr stark ab.

Ein Beispiel für eine Realsituation (bis x = 3) ist die Entwicklung einer Schädlingspopulation bei Einsatz eines Schädlingsbekämpfungsmittels (siehe Aufgabe 1).

h) Individuelle Stellungnahmen.

Es gibt Wachstumsvorgänge, die gut durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden können (z. B. Vermehrung einer Bakterienkultur, radioaktiver Zerfall), aber auch solche, für die dies nicht gilt (z. B. lineares Wachstum einer Pflanze um die immer gleiche Länge pro Tag in einem bestimmten Zeitraum).

1 $N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}00012t}$

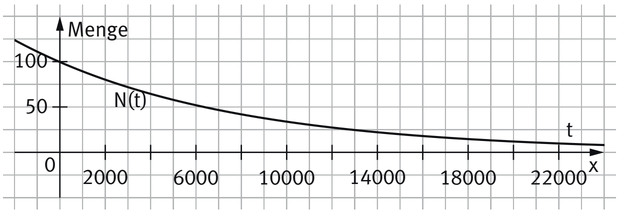
$\frac{N(t)}{N_0} = 0{,}53 = e^{-0{,}00012t}$

$-0{,}00012t = \ln(0{,}53) \approx -0{,}63 \Longrightarrow t = 5250$

Ötzi hat vor ungefähr 5250 Jahren gelebt.

2 **a)** $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k} \Longrightarrow k = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} = \frac{\ln(2)}{6600} \approx 0{,}00011$

b) $N(t) = 100 \cdot e^{-0{,}00011t}$



c) $100 \cdot e^{-0{,}00011t} = 1 \Longleftrightarrow e^{-0{,}00011t} = 0{,}01 \Longleftrightarrow -0{,}00011t = \ln(0{,}01) \Longleftrightarrow t = \frac{-\ln(0{,}01)}{0{,}00011} \approx 41\,865{,}2$

Nach ungefähr 41865 Jahren ist nur noch 1 % der Ausgangsmenge vorhanden.

Anmerkung: Dies gilt unabhängig von der Ausgangsmenge.

d) $N'(t) = -0{,}011e^{-0{,}00011t}$

$N'(100) \approx -0{,}0109 \frac{\text{Zerfälle}}{\text{Jahr}}$

$N'(1000) \approx -9{,}9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Zerfälle}}{\text{Jahr}}$

3 **a)** $N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}024t}$ ($N(t)$: Sr90-Menge nach t Jahren; N_0: Anfangsmenge an Sr90)

b) Die Halbierungszeit (Halbwertszeit) ist unabhängig vom Anfangsbestand. Sollte dies nicht bekannt sein, kann es durch Nachrechnen analog zu der unten stehenden allgemeinen Rechnung herausgefunden werden.

$\frac{N(t)}{N_0} = 0{,}5 = e{-}0{,}024t \Longleftrightarrow -0{,}024t = \ln(0{,}5) \Longleftrightarrow t = \frac{-\ln(0{,}5)}{0{,}024} \approx 28{,}88$

Nach ungefähr 28,88 Jahren hat sich der Anfangsbestand halbiert.

Nachgefragt

- Es gilt $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k}$, d. h. $t_{1/2} \sim \frac{1}{k}$.
  Die Halbwertszeit ist somit umgekehrt proportional zur Zerfallskonstanten k.
- $N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}$
  $\frac{N(t_{1/2})}{N_0} = e^{-kt_{1/2}} \Longleftrightarrow 0{,}5 = e^{-kt_{1,2}} \Longleftrightarrow -kt_{1/2} = \ln(0{,}5) \Longleftrightarrow -kt_{1/2} = -\ln(2) \Longleftrightarrow t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k}$
  Die letzte Gleichung zeigt, dass die Halbwertszeit nur von der Zerfallskonstanten k, nicht aber von der Ausgangsmenge N_0 abhängt.
- Man erkennt, dass es sich um eine exponentielle Abnahme handelt, da das Zerfallsgesetz vom Term e^{-kt} bestimmt wird. Dieser stellt für $k > 0$ eine fallende Exponentialfunktion dar.
- Am Anfang ist die Menge der radioaktiven Substanz und damit die von ihr ausgehende Gefahr am größten. Mit der Zeit wird die Menge der Substanz wegen des radioaktiven Zerfalls und damit die Gefahr zwar geringer, die Bedrohung verschwindet aber nie ganz, da die Exponentialfunktion e^{-kt} sich für $t \to \infty$ (also für lange Zeiten t) nur asymptotisch dem Wert null annähert, ihn aber nie erreicht. Es ist somit auch nach sehr langen Zeiträumen immer ein „Rest“ vorhanden, von dem Gefahr ausgeht.