KX **1** **a)** Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$, $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, löst man durch Ausklammern von x.
Ein Produkt besitzt den Wert null, wenn mindestens ein Faktor den Wert null besitzt.

$3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-4) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 4 \Rightarrow L = \{0; 4\}$

b) Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$,
$a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$, löst man mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$5x^2 + 3x = 2x^2 + 6 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 6 = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{-3 \pm 9}{6}$

$\Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 1 \Rightarrow L = \{-2; 1\}$

c) Gleichungen der Form $x^2 = a$, $a \in \mathbb{R}_0^+$, löst man durch Radizieren. Die Gleichung besitzt keine Lösung, wenn $a < 0$ ist:

$2x^2 = x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Rightarrow L = \{\ \}$

d) Die linke Seite dieser Gleichung kann mithilfe der binomischen Formeln als Produkt dargestellt werden:

$x^2 + 9 = 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow L = \{3\}$

Das Vorgehen in e) und f) entspricht dem Vorgehen in Teilaufgabe b):

e) $3 - 4x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 3 = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{4}$

$\Rightarrow x_1 = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{10};\ x_2 = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}$

$\Rightarrow L = \left\{1 - \frac{1}{2}\sqrt{10};\ 1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}\right\}$

f) $2x^2 + 3x - 2 = -x^2 + 2x + 3$

$\Leftrightarrow 3x^2 + x - 5 = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{6}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-1 - \sqrt{61}}{6};\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{61}}{6}$

$\Rightarrow L = \left\{\frac{-1 - \sqrt{61}}{6};\ \frac{-1 + \sqrt{61}}{6}\right\}$

KX **2** **a)** $f(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$

$f(0) = 2 + \frac{1}{0-3} = 2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$; $T\left(0 \middle| 1\frac{2}{3}\right)$

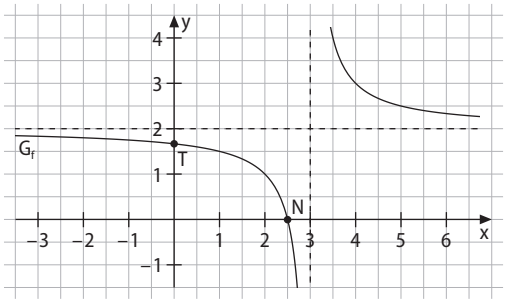
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 = -\frac{1}{x-3} \Leftrightarrow x - 3 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = 2{,}5$; $N(2{,}5 \mid 0)$

senkrechte Asymptote: $x = 3$

waagrechte Asymptote: $y = 2$

$W_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$



b) $f(x) = \frac{3x-2}{x} = 3 - \frac{2}{x}$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

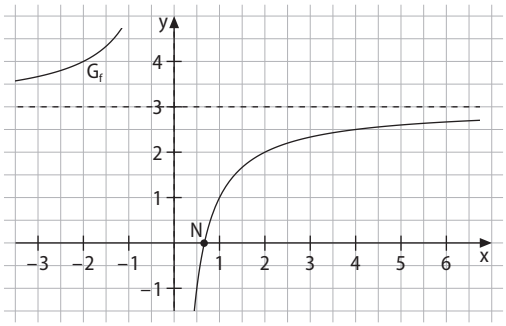
f(x) ist für $x = 0$ nicht definiert, d. h. es existiert kein Schnittpunkt mit der y-Achse.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$; $N\left(\frac{2}{3} \middle| 0\right)$

senkrechte Asymptote: $x = 0$

waagrechte Asymptote: $y = 3$

$W_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$



c) $f(x) = 1 + \frac{2}{x+4}$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-4\}$

$f(0) = 1 + \frac{2}{0+4} = 1 + \frac{2}{4} = 1{,}5$; $T\,(0\,|\,1{,}5)$

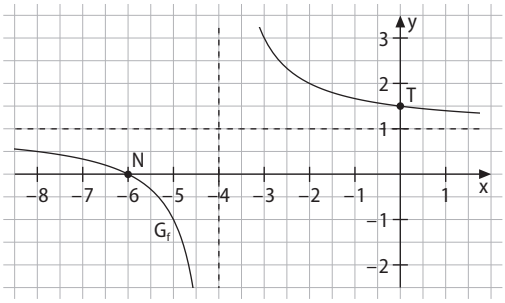
$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 = -\frac{2}{x+4} \;\Leftrightarrow\; x + 4 = -2$

$\Rightarrow\; x = -6$; $N\,(-6\,|\,0)$

senkrechte Asymptote: $x = -4$

waagrechte Asymptote: $y = 1$

$W_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$



d) $f(x) = -\frac{1}{2x} - \frac{1}{4}$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

f(x) ist für x = 0 nicht definiert, d. h. es existiert kein Schnittpunkt mit der y-Achse.

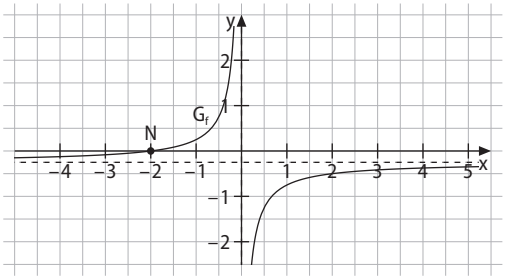
$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{4} = -\frac{1}{2x} \;\Leftrightarrow\; 4 = -2x$

$\Rightarrow\; x = -2$; $N\,(-2\,|\,0)$

senkrechte Asymptote: $x = 0$

waagrechte Asymptote: $y = -\frac{1}{4}$

$W_f = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{4}\right\}$



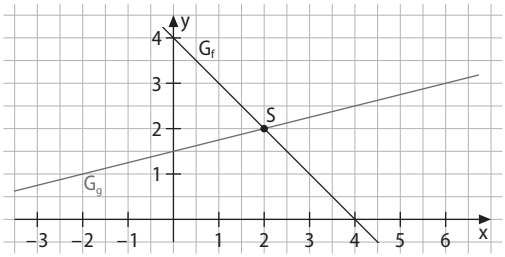
KX **3** Zur Ermittlung möglicher Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen setzt man die zu den Graphen gehörenden Funktionsterme gleich und ermittelt die Lösung(en) der Gleichung. Die Lösung(en) setzt man in einen der beiden Funktionsterme ein und berechnet den zugehörigen y-Wert des Schnittpunkts.

a) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$

$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; 4 - x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow\; \frac{5}{4}x = \frac{5}{2} \;\Rightarrow\; x = 2$

$f(2) = 4 - 2 = 2$; $S\,(2\,|\,2)$



b) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$

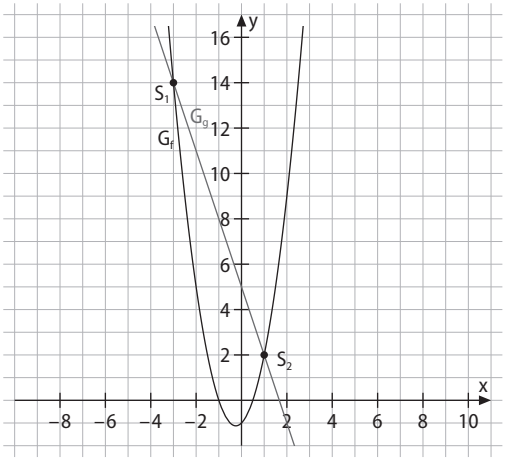
$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; 2x^2 + x - 1 = 5 - 3x$

$\Leftrightarrow\; 2x^2 + 4x - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow\; (x-1)(x+3) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -3;\; x_2 = 1$

$g(-3) = 5 - 3 \cdot (-3) = 14$; $S_1\,(-3\,|\,14)$

$g(1) = 5 - 3 \cdot 1 = 2$; $S_2\,(1\,|\,2)$



c) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$

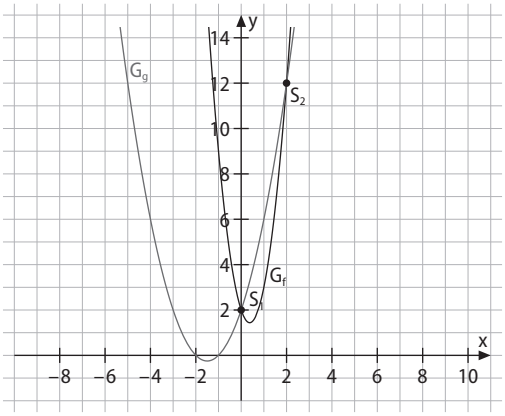
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4x^2 - 3x + 2 = x^2 + 3x + 2$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2$

$g(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 + 2 = 2;\ S_1(0|2)$

$g(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = 12;\ S_2(2|12)$



d) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$, $D_g = \mathbb{R}$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{x-2} = 2{,}5 - x$

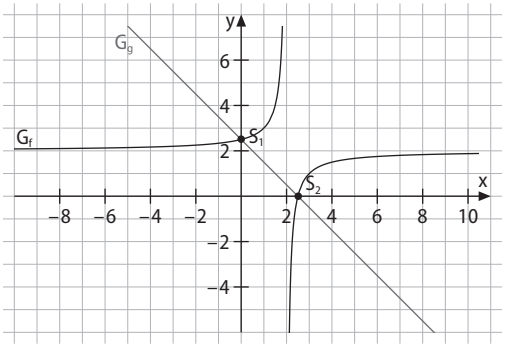
$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) = 1$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2{,}5x = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 2{,}5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2{,}5$

$g(0) = 2{,}5;\ S_1(0|2{,}5)$

$g(2{,}5) = 0;\ S_2(2{,}5|0)$

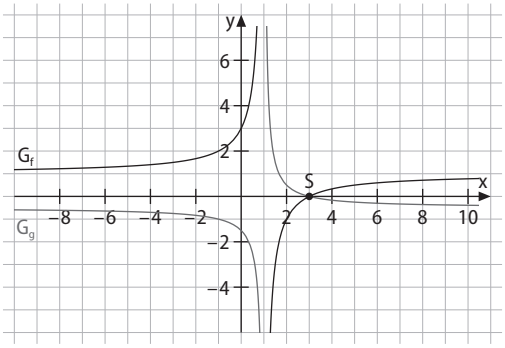


e) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $D_g = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x-1} = \frac{1}{x-1} - 0{,}5$

$\Leftrightarrow 1{,}5 = \frac{3}{x-1} \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$

$f(3) = 1 - \frac{2}{3-1} = 0;\ S(3|0)$



f) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$, $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -3 + \frac{1}{x-2} = -\frac{3}{x} - 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x} = 2 \Leftrightarrow x + 3(x-2) = 2x(x-2)$

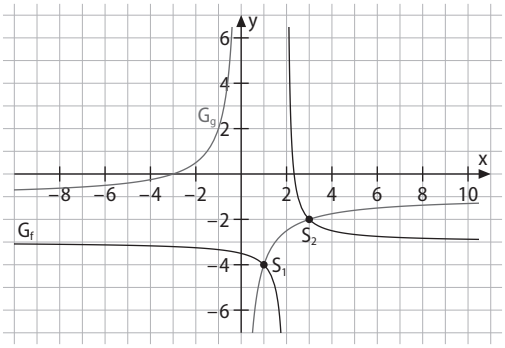
$\Leftrightarrow x + 3x - 6 = 2x^2 - 4x \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 3$

$g(1) = -\frac{3}{1} - 1 = -4;\ S_1(1|-4)$

$g(3) = -\frac{3}{3} - 1 = -2;\ S_2(3|-2)$



KX **4** **a)** Die Aussage ist falsch, z. B. besitzt die quadratische Funktion f mit $f(x) = x^2 + 1$ keine Nullstelle.

b) Die Aussage ist richtig, da bei jeder gebrochen-rationalen Funktion dieser Form das Nennerpolynom für $x = -b$ den Wert null annimmt, d. h. an dieser Stelle nicht definiert ist. Außerdem besitzt jede gebrochen-rationale Funktion dieser Form die waagrechte Asymptote $y = c$, die der Graph der Funktion nicht schneidet. Deshalb nimmt diese Funktion den Funktionswert c nicht an.

KX **5** **a)** Bei ganzrationalen Funktionen kann das Symmetrieverhalten bezüglich des Koordinatensystems auf zwei verschiedene Arten bestimmt werden:

1 Man betrachtet $f(-x)$. Gilt dann $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$, so ist der Graph achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse. Gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$, so ist der Graph punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

2 Man betrachtet die Exponenten der im Funktionsterm auftretenden Potenzen von x. Besitzt der Funktionsterm nur gerade Exponenten (einschließlich null), so ist der Graph der Funktion achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse. Besitzt der Funktionsterm nur ungerade Exponenten, so ist der Graph der Funktion punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

b) 1 $f(x)$ besitzt ausschließlich gerade Exponenten (4; 2 und 0), d. h. der Graph ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

2 $f(x)$ besitzt sowohl gerade (2) als auch ungerade Exponenten (1), d. h. der Graph weist keine Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems auf.

3 $f(x)$ besitzt nur ungerade Exponenten (1; 5), d. h. der Graph ist punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

4 $f(x)$ besitzt nur gerade Exponenten (0; 4), d. h. der Graph ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

KX **6** **a)** Der Graph der Funktion f wird um 2 Längeneinheiten in positive x-Richtung verschoben, mit dem Faktor 3 in y-Richtung gestreckt und um 1 Längeneinheit in positive y-Richtung verschoben.

b) $h_a(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{x-2} = a \Rightarrow -\frac{3}{a} = x - 2$

$\Rightarrow x = 2 - \frac{3}{a}$. Die Nullstelle der Funktion h_a ist abhängig von der Wahl des Parameters a.

c) Für ungerade positive natürliche Zahlen a besitzt die Funktion nur ungerade Exponenten, so dass ihr Graph punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.

d) $f^*(x) = -f(x) = -x^2 - 4x + 2$

Gebrochen-rationale Funktionen – Grenzwerte und Asymptoten

2

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schülerinnen und Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülerinnen und Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft in ihrem Leben vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

KX
- Wird der Abstand r zwischen zwei Ladungen sehr groß, so wird der Quotient $\frac{1}{r^2}$ betragsmäßig sehr klein und hat stets positive Werte. Da die Ladungen Q_1 und Q_2 sowie k konstant sind, wird die Kraft $F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ mit zunehmendem Abstand der Ladungen immer geringer.

KX
- Da die Ladungen als punktförmig angenommen werden, würde ein Abstand von 0 m bedeuten, dass sich die beiden Ladungen am selben Ort befinden. Dies ist in der Realität nicht möglich. Wird der Abstand zwischen zwei Ladungen sehr klein, wird der Quotient $\frac{1}{r^2}$ beliebig groß. Somit wird die Kraft $F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ immer größer, wenn sich der Abstand der Ladungen verringert.

Ausblick

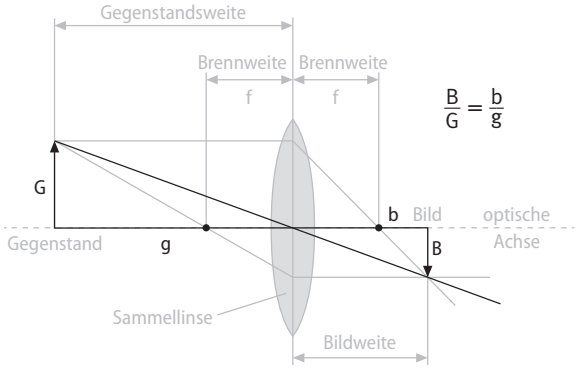
Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Lernende und Lehrkräfte. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Lernende und Lehrkräfte auf das Kommende einstellen. Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

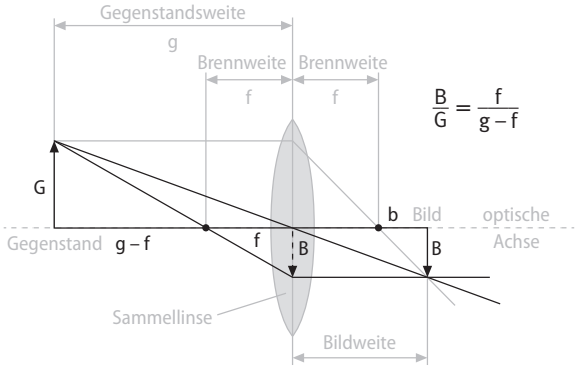
Kap. 2.1

Die Linsengleichung

KX ■ $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{f} = \frac{b+g}{bg} \Leftrightarrow bg = bf + gf \Leftrightarrow bg - bf = gf \Leftrightarrow b \cdot (g - f) = gf \Rightarrow b = \frac{gf}{g-f}$

Begründung: In der Abbildung findet man zwei X-Figuren, auf die man den 2. Strahlensatz anwendet.





Durch Gleichsetzen der beiden Terme auf der jeweils rechten Seite erhält man $\frac{b}{g} = \frac{f}{g-f}$ und damit die gesuchte Gleichung: $b = \frac{gf}{g-f}$.

KX ■ Es gilt laut Aufgabenstellung $g \in \mathbb{R}^+$. Außerdem darf der Nenner nicht den Wert 0 annehmen. Daher gilt $D_b = \mathbb{R}^+ \setminus \{f\}$.

KX ■

g	3f	2f	1,5f	1,2f	f
b(g)	1,5f	2f	3f	6f	nicht definiert

Interpretation:
Je mehr sich die Gegenstandsweite der Brennweite annähert (für $g > f$), desto größer wird die Bildweite. D. h. je näher der Gegenstand an den Brennpunkt der Linse rückt (für $g > f$), desto weiter rückt das Bild von der Linse weg.

Kap. 2.2

Gedränge in der Umlaufbahn

KX ■ Individuelle Ergebnisse, z. B.:

- Einsatzgebiete: Navigation, Wettervorhersagen, Telekommunikation
- Höhe:
  Erdbeobachtungssatelliten (ca. 800 km),
  Navigationssatelliten (ca. 20 000 km),
  geostationäre Satelliten (ca. 36 000 km).

KX ■ Erdradius: $r_E = 6371\,\text{km}$

Erdoberfläche: $A_E = 4\pi r_E^2 = 4\pi \cdot (6371\,\text{km})^2 \approx 510\,064\,471{,}91\,\text{km}^2$

$A_k(280\,\text{km}) = 2\pi \cdot (6371\,\text{km})^2 \cdot \frac{280\,\text{km}}{280\,\text{km} + 6371\,\text{km}} \approx 10\,736\,584{,}88\,\text{km}^2$

$\frac{A_k(280\,\text{km})}{A_E} \approx 2{,}1\,\%$

$A_k(400\,\text{km}) = 2\pi \cdot (6371\,\text{km})^2 \cdot \frac{400\,\text{km}}{400\,\text{km} + 6371\,\text{km}} \approx 15\,066\,148{,}93\,\text{km}^2$

$\frac{A_k(400\,\text{km})}{A_E} \approx 3{,}0\,\%$

$A_k(36\,000\,\text{km}) = 2\pi \cdot (6371\,\text{km})^2 \cdot \frac{36\,000\,\text{km}}{36\,000\,\text{km} + 6371\,\text{km}} \approx 216\,685\,008{,}48\,\text{km}^2$

$\frac{A_k(36\,000\,\text{km})}{A_E} \approx 42{,}5\,\%$

KX ■ Eine Raumsonde kann maximal 50 % der Erdoberfläche beobachten. Im Term $2\pi r_E^2 \cdot \frac{h}{h + r_E}$ gibt der Faktor $2\pi r_E^2$ die Hälfte des Inhalts der Erdoberfläche an. Im Bruch $\frac{h}{h + r_E}$ ist der Nenner für alle Werte von h größer als der Zähler, so dass der Wert des Bruchs stets kleiner als 1 ist. Je größer h ist, desto näher liegt der Wert des Bruchs bei 1.
Es gilt also $\lim\limits_{h \to +\infty} A_k = 2\pi r_E^2 = \frac{1}{2} A_E$

KX ■ Für den beobachtbaren Anteil an der Erdoberfläche gilt der Zusammenhang
$f(h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{h + r_E}$.
Der Graph von f nähert sich für $h \to +\infty$ der waagrechten Asymptote mit $y = \frac{1}{2}$.

Kap. 2.3

Dopplereffekt in Optik und Akustik

KX ■ Individuelle Ergebnisse

KX ■ Es gilt $0 < v < c$ und daher $0 < c - v < c$. Daher ist $\frac{c}{c - v} > 1$. Also gilt $f_1 > f$. Der Ton wird also höher.

KX ■ Nähert sich v der Schallgeschwindigkeit c, so gilt $\lim\limits_{v \to c} \left(f \cdot \frac{c}{c - v}\right) = +\infty$. Die Frequenzverschiebung gegenüber der Originalfrequenz ist umso größer, je näher die Geschwindigkeit v an der Schallgeschwindigkeit c liegt.

KX ■ Es gilt $136 \frac{km}{h} \approx 37{,}8 \frac{m}{s}$.
Bewegt sich die Schallquelle auf den Beobachter zu, hört dieser einen Ton mit der Frequenz
$f_1 = f \cdot \frac{c}{c - v} \approx \frac{343{,}2 \frac{m}{s}}{343{,}2 \frac{m}{s} - 37{,}8 \frac{m}{s}} \cdot f \approx 1{,}12 \cdot f$. Die wahrgenommene Frequenz ist etwa 12 % größer als die ursprüngliche Frequenz.

KX ■ Bewegt sich die Schallquelle vom Beobachter weg, hört dieser einen Ton mit der Frequenz
$f_2 = f \cdot \frac{c}{c + v} \approx \frac{343{,}2 \frac{m}{s}}{343{,}2 \frac{m}{s} + 37{,}8 \frac{m}{s}} \cdot f \approx 0{,}9 \cdot f$. Die wahrgenommene Frequenz beträgt nur noch etwa 90 % der ursprünglichen Frequenz.

KX ■ Der Beobachter nimmt also einen Sprung in der Tonhöhe wahr; der rund 21 % der ursprünglichen Frequenz entspricht.

KX ■ Individuelle Ergebnisse

Kap. 2.4

Gewässerverunreinigung

KX ■ Es gilt $S(0) = \frac{-36 \cdot 0}{0^2 + 16} + 6 = 6\left[\frac{mg}{l}\right]$.

$\lim\limits_{t \to +\infty} S(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(\frac{-36t}{t^2 + 16} + 6\right) = 6.$

Langfristig stellt sich (wieder) ein Sauerstoffgehalt von $6\frac{mg}{l}$ ein.

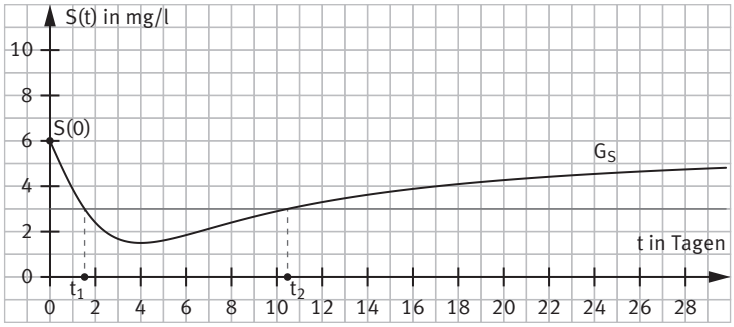
KX ■ $S(t) = 3 \Leftrightarrow \frac{-36t}{t^2 + 16} + 6 = 3 \Leftrightarrow \frac{-36t}{t^2 + 16} = -3 \Leftrightarrow -36t = -3(t^2 + 16) \Leftrightarrow 3t^2 - 36t + 48 = 0$

$\Rightarrow t_{\frac{1}{2}} = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \cdot 3 \cdot 48}}{2 \cdot 3} = \frac{36 \pm \sqrt{720}}{6} = \frac{36 \pm 12\sqrt{5}}{6} = 6 \pm 2\sqrt{5} \Rightarrow t_1 = 6 - 2\sqrt{5} \approx 1{,}53;$

$t_2 = 6 + 2\sqrt{5} \approx 10{,}47$

Ab dem 2. Tag können die Fische nicht überleben, ab dem 11. Tag ist ein Überleben wieder möglich.

KX ■ Der kleinste Funktionswert von S(t) gibt den niedrigsten Sauerstoffgehalt $\left(\text{in } \frac{mg}{l}\right)$ des Gewässers an, bevor das Gewässer sich wieder erholt.



KX ■ Individuelle Ergebnisse

Entdecken

KX

- Bei der Hinfahrt (flussaufwärts) hat das Boot eine Geschwindigkeit $v_{hin} = x - 5$ gegenüber dem Ufer. Bei der Rückfahrt (flussabwärts) hat das Boot eine Geschwindigkeit $v_{rück} = x + 5$ gegenüber dem Ufer.
  Für die Bewegung des Bootes gilt jeweils $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$.
  Für die Gesamtzeit der Schifffahrt gilt:
  $t_{gesamt} = t_{hin} + t_{rück} + t_{Pause} = \frac{s}{v_{hin}} + \frac{s}{v_{rück}} + 0{,}5 = \frac{20}{x-5} + \frac{20}{x+5} + 0{,}5.$

KX

- $f(x) = \frac{20}{x-5} + \frac{20}{x+5} + 0{,}5 = \frac{20 \cdot 2 \cdot (x+5)}{(x-5) \cdot 2 \cdot (x+5)} + \frac{20 \cdot 2 \cdot (x-5)}{(x+5) \cdot 2 \cdot (x-5)} + \frac{(x-5)(x+5)}{2 \cdot (x-5)(x+5)}$
  $= \frac{40x+200}{2(x^2-25)} + \frac{40x-200}{2(x^2-25)} + \frac{x^2-25}{2(x^2-25)} = \frac{x^2+80x-25}{2(x^2-25)} = h(x)$
  Eine Geschwindigkeit von $x \leq 5$ ist nicht sinnvoll im Sachzusammenhang, da das Boot bei der Hinfahrt nicht gegen die Strömung anfahren kann, wenn es langsamer ist als diese.

Nachgefragt

KX

- Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$, hat keine Definitionslücke.

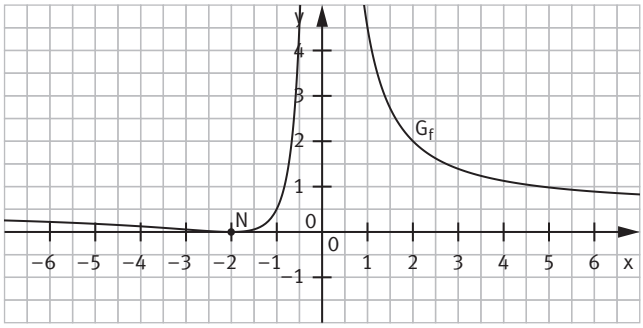
KX

- Der Term der Funktion f mit $f(x) = \frac{5}{3}x$ enthält zwar einen Bruch, es handelt sich aber um eine lineare Funktion.

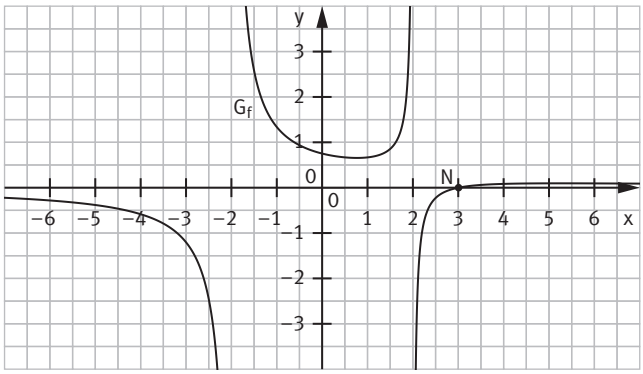
Aufgaben

KX

1 **a)** maximale Definitionsmenge:
$2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Nullstelle:
$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0$
$\Rightarrow x_0 = -2$ (doppelte Nullstelle)
$f(x) = \frac{x^2+4x+4}{2x^2} = \frac{(x+2)^2}{2x^2}$



b) maximale Definitionsmenge:
$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0$
$\Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 2;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$
Nullstelle:
$x - 3 = 0 \Rightarrow x_0 = 3$
$f(x) = \frac{x-3}{x^2-4} = \frac{x-3}{(x+2)\cdot(x-2)}$



c) maximale Definitionsmenge:

$x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) = 0$

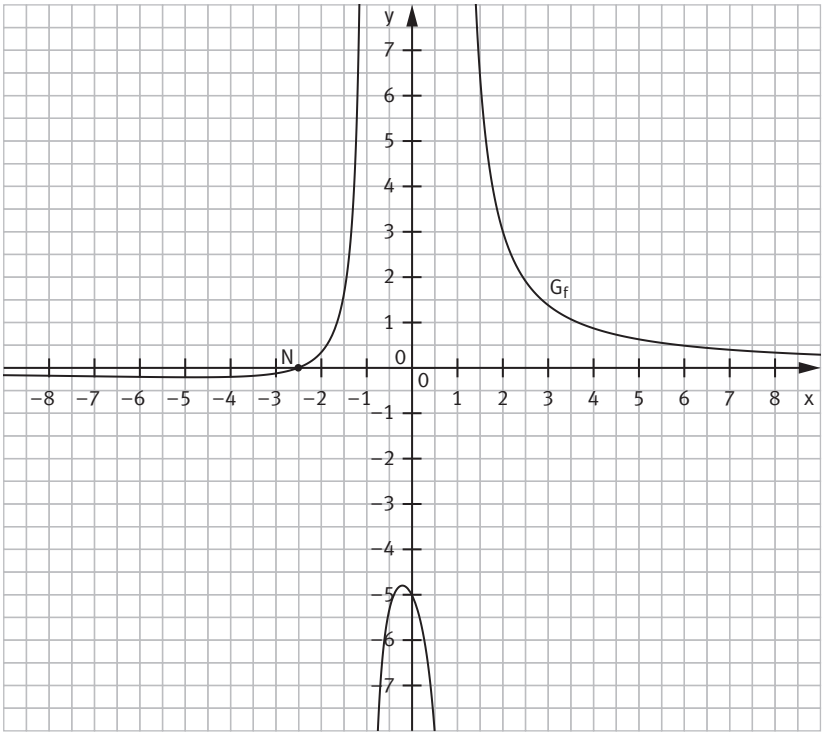
$\Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1;$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$

Nullstelle:

$2x + 5 = 0 \Rightarrow x_0 = -2{,}5$

$f(x) = \frac{2x + 5}{x^2 - 1} = \frac{2(x - 2{,}5)}{(x + 1) \cdot (x - 1)}$



d) maximale Definitionsmenge:

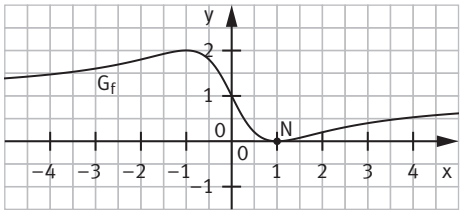
$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ nicht lösbar; $D_f = \mathbb{R}$

Nullstelle:

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow x_0 = 1$ (doppelte Nullstelle)

$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$



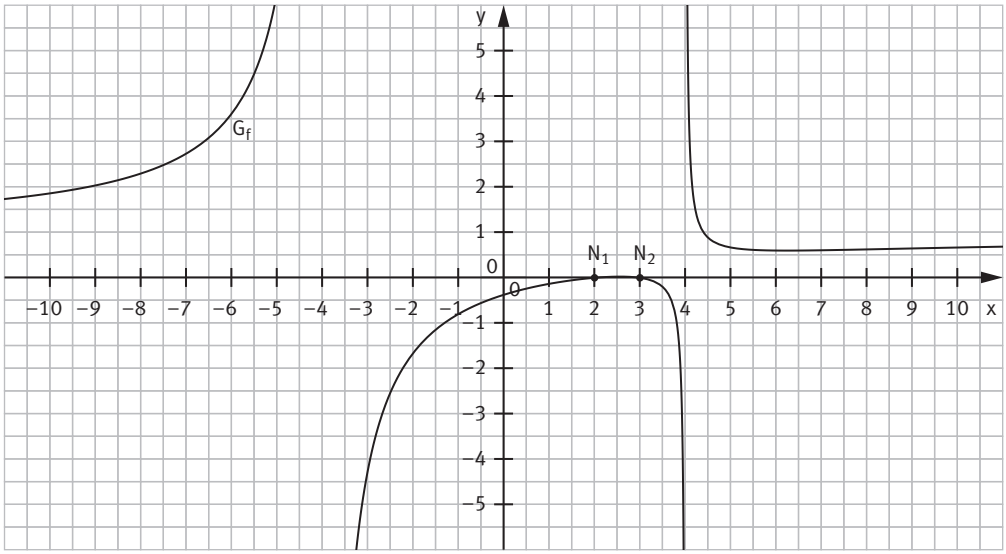
e) maximale Definitionsmenge:

$x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = -4\ ; x_2 = 4;\ D_f = \mathbb{R}\backslash\{-4; 4\}$

Nullstellen:

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = 3$

$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 16} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x + 4)(x - 4)}$



f) maximale Definitionsmenge:

$(x-1)(x+5)=0$

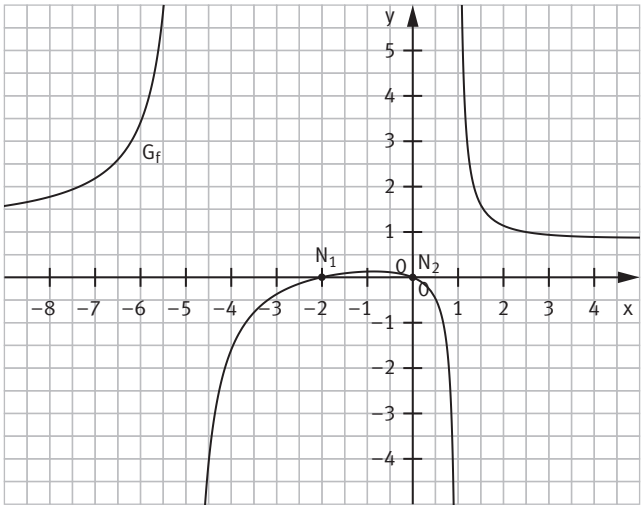
$\Rightarrow x_1=-5; x_2=1; D_f=\mathbb{R}\setminus\{-5;1\}$

Nullstellen:

$x^2+2x=0 \Leftrightarrow x\cdot(x+2)=0$

$\Rightarrow x_1=-2; x_2=0$

$f(x)=\frac{x^2+2x}{(x-1)(x+5)}=\frac{x(x+2)}{(x-1)(x+5)}$



g) maximale Definitionsmenge:

$4x^2+8x=0 \Leftrightarrow 4x(x+2)=0$

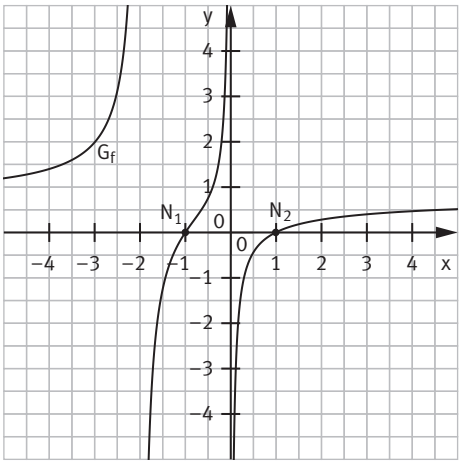
$\Rightarrow x_1=-2; x_2=0; D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$

Nullstellen:

$3x^2-3=0 \Leftrightarrow 3(x^2-1)=0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1)=0$

$\Rightarrow x_1=-1; x_2=1$

$f(x)=\frac{3x^2-3}{4x^2+8x}=\frac{3(x-1)(x+1)}{4x(x+2)}$



h) maximale Definitionsmenge:

$4x^2-36=0 \Leftrightarrow 4(x^2-9)=0$

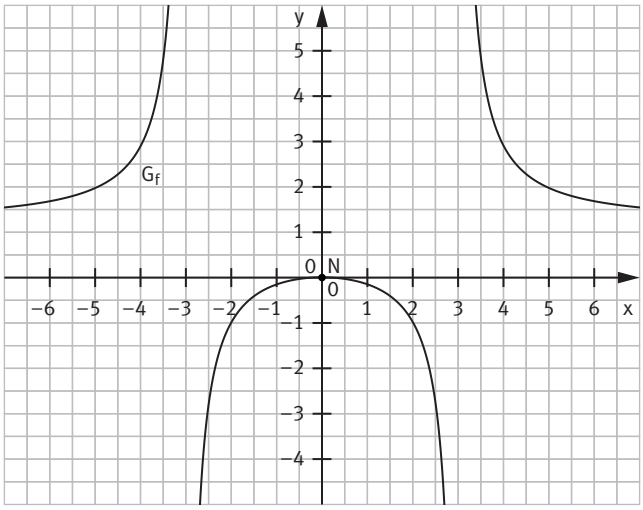
$\Leftrightarrow 4(x+3)(x-3)=0$

$\Rightarrow x_1=-3; x_2=3; D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$

Nullstelle:

$5x^2=0 \Rightarrow x_0=0$ (doppelte Nullstelle)

$f(x)=\frac{5x^2}{4x^2-36}=\frac{5x^2}{4(x+3)(x-3)}$



KX **2**

1 $2x - \frac{6x-2}{x+3} = \frac{2x(x+3)-(6x-2)}{x+3} = \frac{2x^2+6x-6x+2}{x+3} = \frac{2x^2+2}{x+3}$

2 $\frac{(x+1)^2}{x+3} = \frac{x^2+2x+1}{x+3}$

3 $x + \frac{1}{x+3} = \frac{x(x+3)+1}{x+3} = \frac{x^2+3x+1}{x+3}$

4 $\frac{2(x-1)(x+1)}{x+3} = \frac{2x^2-2}{x+3}$

5 $\frac{(x-3)^2}{x^2+3} = \frac{x^2-6x+9}{x^2+3}$

6 $\frac{x^2+3x+1}{x+3}$

7 $\frac{3(x+1)}{x(x+3)} = \frac{3x+3}{x^2+3x}$

8 $\frac{2x^2-2}{x+3}$

9 $\frac{(x-1)(x+2)}{x(x+3)} = \frac{x^2+x-2}{x^2+3x}$

10 $\frac{x^2+2x+1}{x+3}$

11 $\frac{x^2+x-2}{x^2+3x}$

12 $\frac{x^2-6x+9}{x^2+3}$

13 $x - 1 + \frac{4}{x+3} = \frac{(x-1)(x+3)+4}{x+3} = \frac{x^2+2x+1}{x+3}$

14 $1 - \frac{6x-6}{x^2+3} = \frac{x^2+3-(6x-6)}{x^2+3} = \frac{x^2+3-6x+6}{x^2+3} = \frac{x^2-6x+9}{x^2+3}$

15 $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+3} = \frac{x+3+2x}{x(x+3)} = \frac{3x+3}{x^2+3x}$

Äquivalente Terme:
2, 10 und 13
3 und 6
4 und 8
5, 12 und 14
7 und 15
9 und 11

KX **3**

a) maximale Definitionsmenge: $x = 0$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Nullstellen: $x + \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2}{x} = 0 \Rightarrow x^2 + 2 = 0$ nicht lösbar; f hat keine Nullstellen.

b) maximale Definitionsmenge: $x^2 + 1 = 0$ nicht lösbar; $D_f = \mathbb{R}$
Nullstellen: $5 - \frac{5}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{x^2+1} = 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x_0 = 0$

c) maximale Definitionsmenge: $x - 2 = 0$ und $x = 0$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0; 2\}$
Nullstellen: $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+(x-2)}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) = 0 \Rightarrow x_0 = 1$

d) maximale Definitionsmenge: $x = 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Nullstellen: $x + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x \cdot x + 1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$ nicht lösbar; f hat keine Nullstellen.

e) maximale Definitionsmenge: $3x = 0$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Nullstellen: $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 2$

f) maximale Definitionsmenge: $x^2 = 0$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Nullstellen: $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}; x_2 = \sqrt{2}$

g) maximale Definitionsmenge: $x - 1 = 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
Nullstellen: $2x - 1 + \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-1)(x-1)+1}{x-1} = 0$
$\Rightarrow (2x-1)(x-1) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2 = 0$ ist nicht lösbar,
da für die Diskriminante gilt $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 < 0$. f hat keine Nullstelle.

h) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$
Nullstellen: $x^2 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{4}$ nicht lösbar; f hat keine Nullstellen.

i) maximale Definitionsmenge: $x + 3 = 0$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$
Nullstellen: $x - 2 + \frac{4}{x+3} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+3)+4}{x+3} = 0$
$\Rightarrow (x-2)(x+3) + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 1$

KX **4** **a)** Mögliche Terme: $f_1(x) = \frac{x(x-1)}{x^2+1}$, $f_2(x) = \frac{x(x-1)}{x^2+2}$

b) Mögliche Terme: $g_1(x) = \frac{x^2+4}{x^2+1}$, $g_2(x) = \frac{3x^2+8}{5x^2+2}$

c) Mögliche Terme: $h_1(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $h_2(x) = \frac{3x^4+x^2+8}{5x^2-5}$

d) Mögliche Terme: $k_1(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$, $k_2(x) = \frac{3x^4+x^2}{5(x+1)^2}$

KX **5** $G_A = G_{f_3}$, da f_3 nur die Nullstelle $x_0 = 1$ hat und dies nur auf G_A zutrifft.
$G_B = G_{f_2}$, da f_2 die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat und dies nur auf G_B zutrifft.
$G_C = G_{f_1}$, da f_1 nur die Nullstelle $x_0 = -1$ hat und dies nur auf G_C zutrifft.
Damit gilt: $G_D = G_{f_4}$.

KX **6**

Abbildung	Funktionsterm	Begründung
A	h(x)	Der Graph G_A entsteht aus dem Graphen G_f durch Spiegelung an der x-Achse und anschließende Verschiebung um 1 Einheit in positive y-Richtung.
B	k(x)	Der Graph G_k entsteht aus dem Graphen G_f durch Verschiebung um 2 Einheiten in positive y-Richtung.
C	g(x)	Der Graph G_g entsteht aus dem Graphen G_f durch Verschiebung um 2 Einheiten in positive x-Richtung.

KX **7** **a)** Die Aussage ist wahr. Die Definitionslücken sind nur von den Nullstellen des Nennerpolynoms abhängig. Der Graph von g entsteht aus dem Graphen von f durch Verschiebung um 3 Einheiten in positive y-Richtung. Dabei ändert sich die Lage eventueller Definitionslücken nicht.
Es gilt also $D_f = D_g$.

b) Die Aussage ist wahr. Angenommen f hat eine Nullstelle bei x_0, dann gilt $f(x_0) = 0$.
Damit gilt auch $g(x_0) = 2 \cdot f(x_0) = 2 \cdot 0 = 0$. Somit ist x_0 auch eine Nullstelle von g.
Hat g umgekehrt eine Nullstelle bei x_0, dann gilt $g(x_0) = 0$. Aus $2 \cdot f(x_0) = 0$ folgt $f(x_0) = 0$ und somit ist x_0 auch eine Nullstelle von f.

c) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ hat die Definitionslücke $x_0 = 0$.
Aber die Funktion g mit $g(x) = f(x-1) = \frac{1}{x-1}$ hat die Definitionslücke $x_1 = 1$.

d) Die Aussage ist wahr. Angenommen die Funktion g hat (mindestens) eine Nullstelle x_1.
Dann gilt $f(x_1) \cdot g(x_1) = f(x_1) \cdot 0 = 0 \neq 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

KX **8** **a)** Einsetzen der Koordinaten der gegebenen Punkte:
$A(4|20)$: $f(4) = 20 \Leftrightarrow \frac{10}{4a+b} = 20 \Leftrightarrow 10 = 80a + 20b$ (I)
$B(10|1)$: $f(10) = 1 \Leftrightarrow \frac{10}{10a+b} = 1 \Leftrightarrow 10 = 10a + b \Rightarrow b = 10 - 10a$ (II)
(II) einsetzen in (I): $10 = 80a + 20(10 - 10a) \Leftrightarrow 10 = 80a + 200 - 200a \Leftrightarrow 120a = 190 \Rightarrow a = \frac{19}{12}$
$a = \frac{19}{12}$ einsetzen in (II): $b = 10 - 10 \cdot \frac{19}{12} \Rightarrow b = -\frac{35}{6}$

b) Es gilt $f(x) = \frac{10}{\frac{19}{12}x - \frac{35}{6}} = \frac{120}{19x - 70}$.
Der Graph von f^* geht aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der y-Achse hervor.
Daher gilt $f^*(x) = f(-x)$, also $f^*(x) = \frac{120}{19 \cdot (-x) - 70} = -\frac{120}{19x + 70}$

c) Schätzung: Es passen etwa 1,2 Liter Wasser in die Vase.
Vorgehen: Man kann das Volumen der Vase mit dem eines Zylinders mit der Höhe 1,5 dm und dem Grundkreisradius 0,5 dm annähern. Für dieses Volumen gilt:
$V = G \cdot h = r^2 \pi h = (0{,}5\,\text{dm})^2 \cdot \pi \cdot 1{,}5\,\text{dm} \approx 1{,}2\,\text{dm}^3 = 1{,}2\,\text{l}$

KX **9** **a)** Es gilt $D_{f_k} = \mathbb{R}$.

$f_k(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - k \cdot 0 + 3}{x^2 + 3} = \frac{3}{3} = 1$ ist unabhängig von k.

Daher ist $P(0|1)$ gemeinsamer Punkt aller Graphen G_{f_k}.

b) Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + kx + 3 = 0$

Die Anzahl der Nullstellen hängt von der Diskriminante ab. Es gilt $D = k^2 - 24$.

1. Fall $D = 0$: $k^2 - 24 = 0 \Rightarrow k_{1/2} = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$.

Für $k_1 = -2\sqrt{6}$ und $k_2 = 2\sqrt{6}$ hat f_k genau eine Nullstelle.

2. Fall $D > 0$: Für $k < -2\sqrt{6}$ oder $k > 2\sqrt{6}$ besitzt f_k zwei Nullstellen.

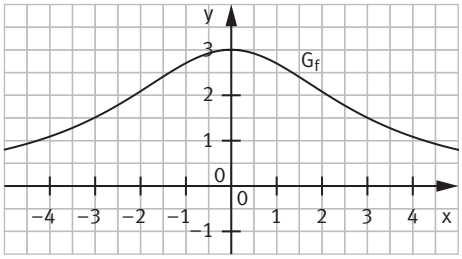
3. Fall $D < 0$: Für $-2\sqrt{6} < k < 2\sqrt{6}$ besitzt f_k keine Nullstellen.

KX **10** **a)** Für jeden Wert von $x \in D_f$ ist sowohl der Zähler wie auch der Wert des Nennerterms positiv, also $f(x) > 0$.

Für jeden Wert von $x \in D_f$ ist der Wert des Nennerterms größer oder gleich 9 und somit der Funktionswert $f(x)$ kleiner oder gleich 3.

b) $f(-x) = \frac{27}{9 + (-x)^2} = \frac{27}{9 + x^2} = f(x)$ für alle $x \in D_f$. G_f ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.

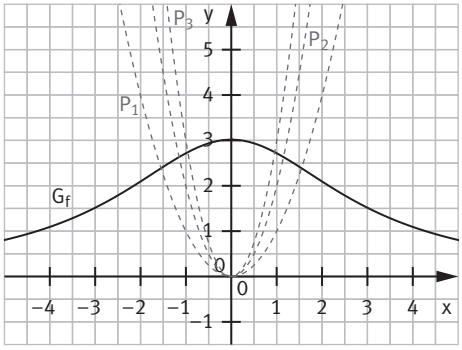
c)



d) $\frac{27}{9 + x^2} = ax^2 \Leftrightarrow 27 = ax^2 \cdot (9 + x^2) \Leftrightarrow ax^4 + 9ax^2 - 27 = 0$

Substitution $u = x^2$: $au^2 + 9au - 27 = 0 \Rightarrow u_{1/2} = \frac{-9a + \sqrt{81a^2 + 108a}}{2a}$

Für jeden Wert von $a \in R_+$ gilt $2a > 0$ und $81a^2 + 108a > 0$ sowie $\sqrt{81a^2 + 108a} > 9a$, also ist $\frac{-9a + \sqrt{81a^2 + 108a}}{2a} > 0$. Somit ist $u_1 = \frac{-9a - \sqrt{81a^2 + 108a}}{2a}$ negativ, so dass dies zu keiner Lösung für x führt. Es gilt $u_2 = \frac{-9a + \sqrt{81a^2 + 108a}}{2a} > 0$. Somit haben G_f und die Parabel P_a für jeden Wert von $a \in \mathbb{R}^+$ zwei Punkte $\left(x_{1/2} = \pm\sqrt{u_2}\right)$ gemeinsam.



KX **11 a)** $f(-x) = \frac{8(-x)}{x^2+2} = -\frac{8x}{x^2+2} = -f(x)$ für alle $x \in D_f$. Daher ist G_f punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

b)

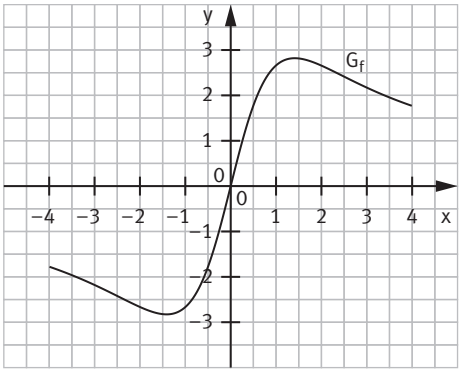
x	−3	−2	$-\sqrt{2}$	−1	−0,5	0	0,5	1	$\sqrt{2}$	2	3
f(x)	$-\frac{24}{11}$	$-\frac{16}{6}$	$-2\sqrt{2}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{16}{9}$	0	$\frac{16}{9}$	$\frac{8}{3}$	$2\sqrt{2}$	$\frac{16}{6}$	$\frac{24}{11}$

c) Gesucht sind die Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$, für die G_f mit der Parallelen p zur x-Achse mit der Gleichung $y = a$ mindestens einen Punkt gemeinsam hat:

$\frac{8x}{x^2+2} = a \Leftrightarrow ax^2 + 2a = 8x \Leftrightarrow ax^2 - 8x + 2a = 0.$

Für die Diskriminante gilt $D = 64 - 8a^2$. G_f und p haben entweder einen oder zwei gemeinsame Punkte, wenn $D \geq 0$, also wenn $64 - 8a^2 \geq 0$; d. h. wenn $64 \geq 8a^2$, also $8 \geq a^2$ und damit $|a| \leq 2\sqrt{2}$ ist.

Hieraus folgt, dass für jeden Wert von $x \in \mathbb{R}$ stets $-2\sqrt{2} \leq f(x) \leq 2\sqrt{2}$ gilt.



Entdecken

KX

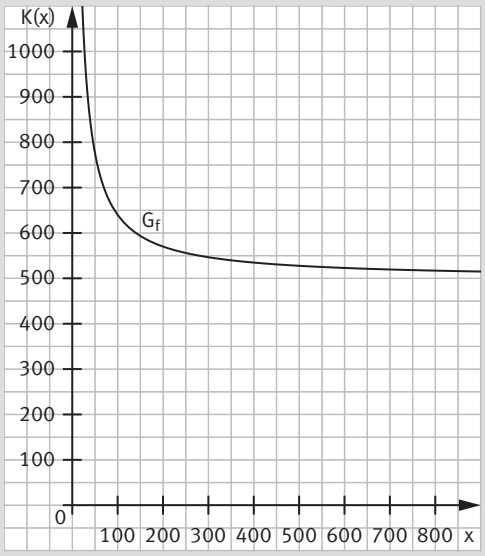
- $H(n) < 600 \Leftrightarrow \frac{2000n + 60\,000}{4n + 5} < 600$

  $\Leftrightarrow 2000n + 60\,000 < 2400n + 3000 \Leftrightarrow 57\,000 < 400n$

  KX

  $\Rightarrow n > 142{,}5$

  Ab einer Stückzahl von 143 liegen die Produktionskosten unter 600 €.
- Für sehr große Stückzahlen werden die Laptops zu einem Stückpreis von rund 500 € hergestellt und müssen, um Gewinn zu erzielen, für mehr als 500 € verkauft werden.



Nachgefragt

KX

- Eine gebrochen-rationale Funktion besitzt dann eine waagrechte Asymptote, wenn ihr Zählergrad kleiner oder gleich dem Nennergrad ist. In diesem Fall gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, so dass es höchstens eine waagrechte Asymptote geben kann.

KX

- Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiele:

  Die Funktion f mit $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$, hat die waagrechte Asymptote $y = 0$, schneidet sie aber im Punkt $S\,(0|0)$.

  Die Funktion g mit $g(x) = x + \frac{x}{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$, hat die schräge Asymptote $y = 1$, schneidet sie aber im Punkt $S\,(0|0)$.

Aufgaben

KX

1 **a)** maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{2}{x^2}\right) = 0$, da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist; die Funktion konvergiert.

waagrechte Asymptote: $y = 0$

b) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x^2 + 1} = 0$, da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist; die Funktion konvergiert.

waagrechte Asymptote: ist $y = 0$

c) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-3; 3\}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x^2 - 9} = 0$, da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist; die Funktion konvergiert.

waagrechte Asymptote: $y = 0$

d) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1 - x^2} = 0$, da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist; die Funktion konvergiert.

waagrechte Asymptote $y = 0$

e) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0; 2\}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-2x} = 0$, da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist;
die Funktion konvergiert.
waagrechte Asymptote ist $y = 0$

f) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0; 1\}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+1}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-x} = 2$, da der Zählergrad gleich dem Nennergrad ist;
die Funktion konvergiert.
waagrechte Asymptote ist $y = 2$

g) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2-1}{2x^2+1} = \frac{3}{2}$, da der Zählergrad gleich dem Nennergrad ist; die Funktion konvergiert.
waagrechte Asymptote ist $y = \frac{3}{2}$

h) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2+3}{2x^2-2} = 2$, da der Zählergrad gleich dem Nennergrad ist; die Funktion konvergiert.
waagrechte Asymptote ist $y = 2$

i) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) = -\infty$; die Funktion f divergiert.
Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ hat der Graph G_f die schräge Asymptote $y = x$.

j) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-0{,}5x + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-0{,}5x + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$;
die Funktion f divergiert. Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ hat der Graph G_f die schräge Asymptote $y = -0{,}5x$.

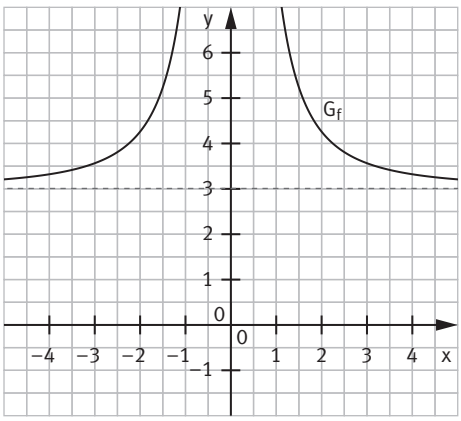
k) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$; die Funktion f divergiert.
Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ hat der Graph G_f die schräge Asymptote $y = x + 1$.

l) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + 5 + \frac{1}{x-2}\right) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x + 5 + \frac{1}{x-2}\right) = -\infty$;
die Funktion f divergiert. Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0$ hat der Graph G_f die schräge Asymptote $y = x + 5$.

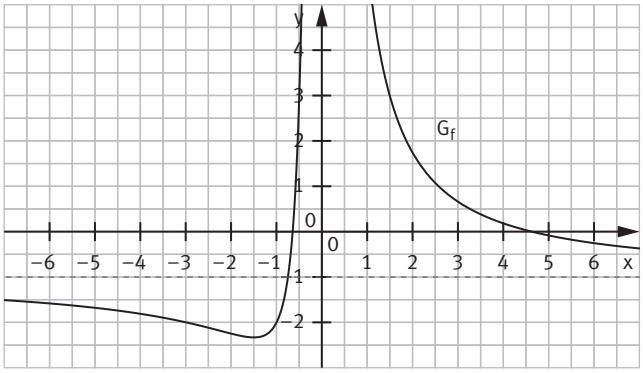
KX **2** **a)** $f(x) = \frac{3x^2+5}{x^2} = \frac{3x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2} = 3 + \frac{5}{x^2}$.
Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$ konvergiert die Funktion.
waagrechte Asymptote $y = 3$



b) $f(x) = \frac{4x - x^2 + 3}{x^2} = \frac{4x}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2} = -1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}$.

Wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -1$ konvergiert die Funktion.

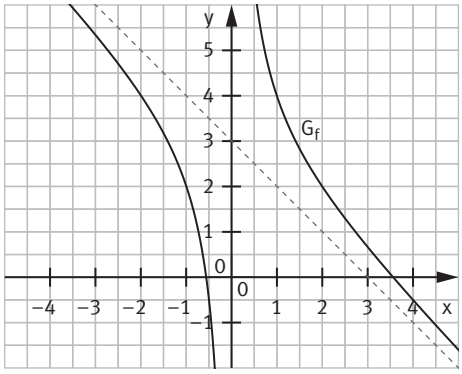
waagrechte Asymptote $y = -1$



c) $f(x) = \frac{3x - x^2 + 2}{x} = \frac{3x}{x} - \frac{x^2}{x} + \frac{2}{x} = -x + 3 + \frac{2}{x}$

Wegen $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ divergiert die Funktion.

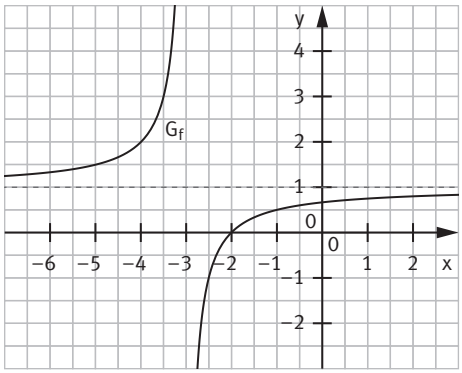
Wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x} = 0$ hat G_f die schräge Asymptote $y = -x + 3$.



d) $f(x) = \frac{x + 2}{x + 3} = \frac{(x + 3) - 1}{x + 3} = \frac{x + 3}{x + 3} - \frac{1}{x + 3} = 1 - \frac{1}{x + 3}$

Wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ konvergiert die Funktion.

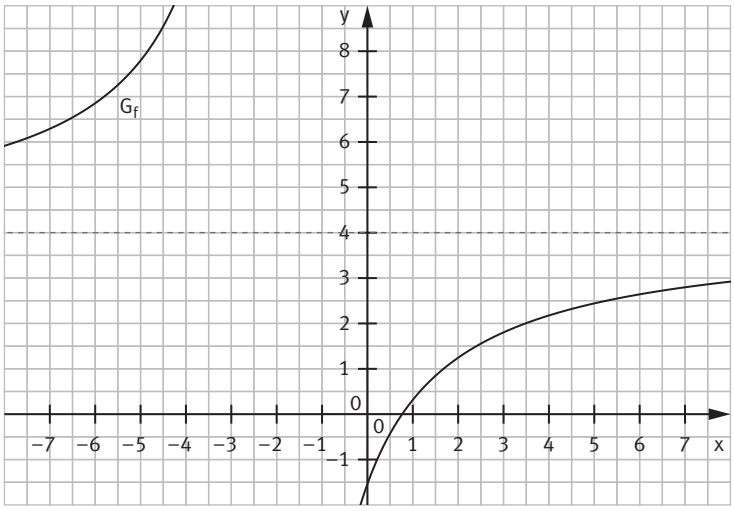
waagrechte Asymptote $y = 1$



e) $f(x) = \frac{4x - 3}{x + 2} = \frac{4(x + 2) - 11}{x + 2} = \frac{4(x + 2)}{x + 2} - \frac{11}{x + 2} = 4 - \frac{11}{x + 2}$

Wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 4$ konvergiert die Funktion.

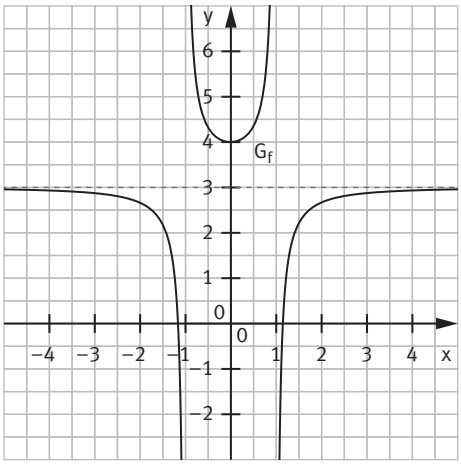
waagrechte Asymptote $y = 4$



f) $f(x) = \frac{3x^2-4}{x^2-1} = \frac{3(x^2-1)-1}{x^2-1} = \frac{3(x^2-1)}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-1} = 3 - \frac{1}{x^2-1}$

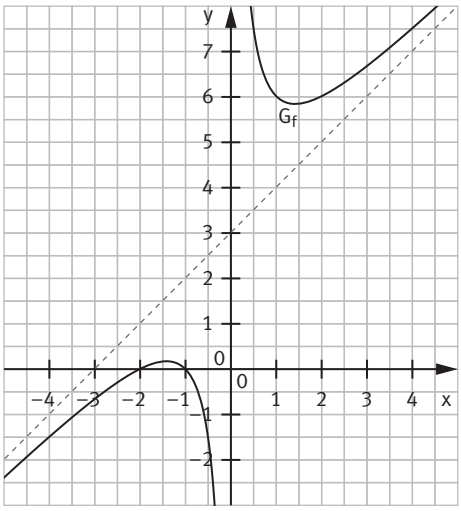
Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$ konvergiert die Funktion.

waagrechte Asymptote $y = 3$



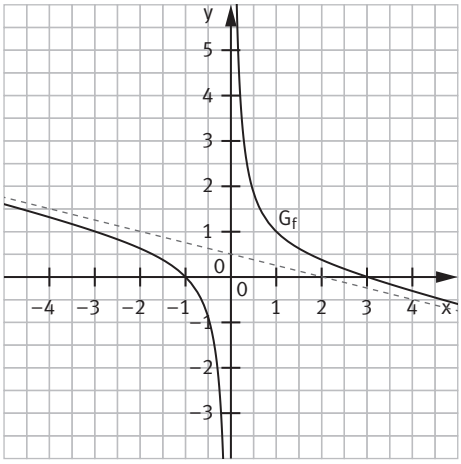
g) $f(x) = \frac{3x^2+6+9x}{3x} = \frac{3x^2}{3x} + \frac{6}{3x} + \frac{9x}{3x} = x + 3 + \frac{2}{x}$

Wegen $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ divergiert die Funktion. Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0$ hat G_f die schräge Asymptote $y = x + 3$.



h) $f(x) = \frac{-x^2+2x+3}{4x} = \frac{-x^2}{4x} + \frac{2x}{4x} + \frac{3}{4x} = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{3}{4x}$

Wegen $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ divergiert die Funktion. Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3}{4x} = 0$ hat G_f die schräge Asymptote $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

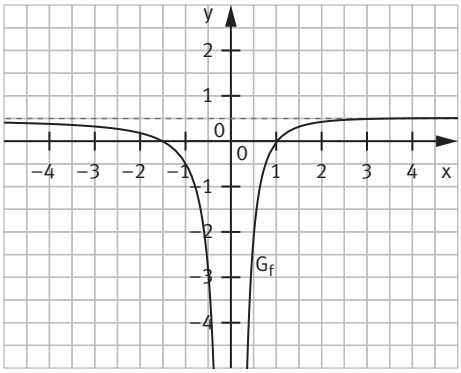


i) $f(x) = -\frac{3-x-2x^2}{4x^2} = \frac{-3+x+2x^2}{4x^2}$

$= \frac{-3}{4x^2} + \frac{x}{4x^2} + \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} - \frac{3}{4x^2}$

Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ konvergiert die Funktion.

waagrechte Asymptote $y = \frac{1}{2}$



KX **3** **a)** Es gilt $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

1 $f(x) < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow x - 2 > 100 \Rightarrow x > 102$

2 $f(x) < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow x - 2 > 1000 \Rightarrow x > 1002$

3 $f(x) < \frac{1}{10\,000} \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} < \frac{1}{10\,000} \Leftrightarrow x - 2 > 10\,000 \Rightarrow x > 10\,002$

b) Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in D_f$.

1 $f(x) < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow x^2 > 100 \Rightarrow |x| > 10$, d. h. $x < -10$ oder $x > 10$

2 $f(x) < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow x^2 > 1000 \Rightarrow |x| > 10\sqrt{10}$, d. h. $x < -10\sqrt{10}$ oder $x > 10\sqrt{10}$

3 $f(x) < \frac{1}{10\,000} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} < \frac{1}{10\,000} \Leftrightarrow x^2 > 10\,000 \Rightarrow |x| > 100$, d. h. $x < -100$ oder $x > 100$

Für G_f bedeutet das Ergebnis, dass der Graph einen Streifen der Breite 1 $\frac{1}{100}$, 2 $\frac{1}{1000}$, 3 $\frac{1}{10\,000}$ um die x-Achse für alle x mit 1 $|x| > 10$, 2 $|x| > 10\sqrt{10}$, 3 $|x| > 100$ nicht mehr verlässt.
Die Funktion konvergiert.

KX **4** **a)** maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x^2 - 1} = 0$ nicht lösbar; f hat keine Nullstelle.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x^2 - 1} = 0$, da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist.
waagrechte Asymptote $y = 0$

b) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$, da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist.
waagrechte Asymptote $y = 0$

c) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{4x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{4x^2} = \frac{1}{4}$, da der Zählergrad gleich dem Nennergrad ist.
waagrechte Asymptote ist $y = \frac{1}{4}$

d) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{1 - x^2} = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{6x}{1 - x^2} = 0$, da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist.
waagrechte Asymptote ist $y = 0$

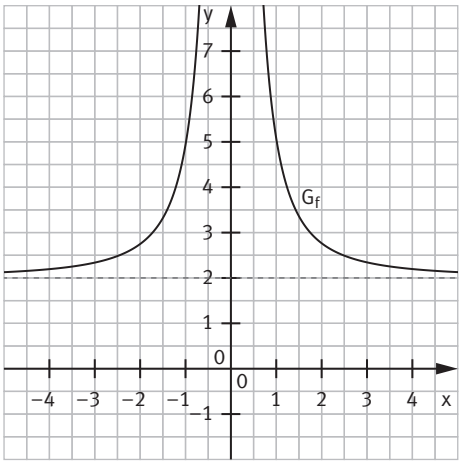
KX **5** **a)** Mögliche Terme: $f_1(x) = -x + \frac{1}{x(x+1)}$; $f_2(x) = -x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$

b) Mögliche Terme: $g_1(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$; $g_2(x) = \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 4}$

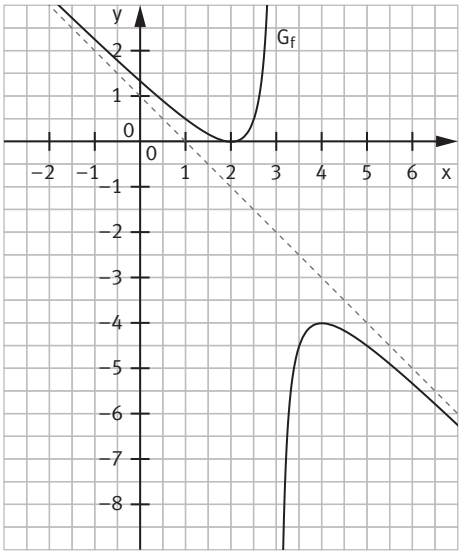
c) Mögliche Terme: $h_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{2}$; $h_2(x) = \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{2}$

d) Mögliche Terme: $k_1(x) = \frac{-3(x-2)^2}{x^2 + 1}$; $k_2(x) = \frac{-3(x-2)^2}{x^2 + 4}$

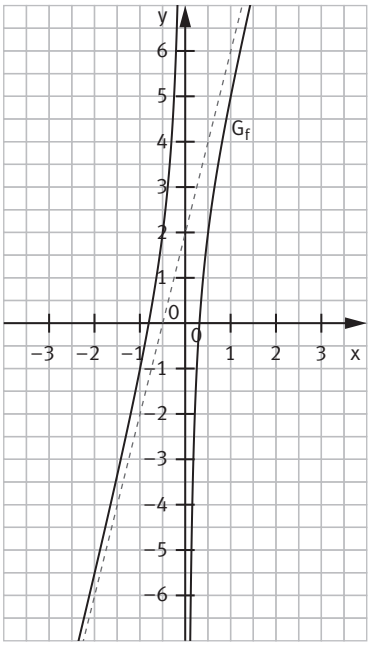
KX **6** **a)** Asymptote: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(2 + \frac{3}{x^2}\right) = 2$
waagrechte Asymptote: $y = 2$
G_f verläuft im Intervall I oberhalb der Asymptote,
da $\frac{3}{x^2}$ für alle $x \in D_f$ positiv ist.



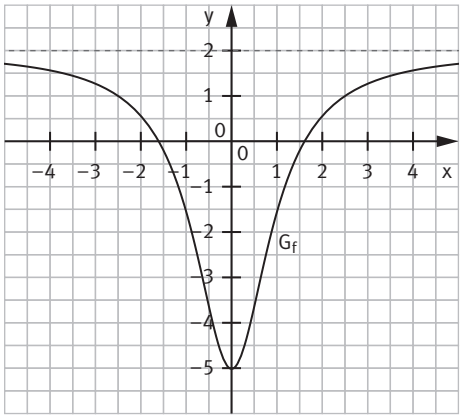
b) Asymptote: Wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x-3} = 0$ besitzt G_f die schräge Asymptote $y = -x + 1$.
G_f verläuft im Intervall I unterhalb der Asymptote,
da $\frac{1}{x-3}$ für alle $x \in$ I positiv ist,
so dass $f(x) = -x + 1 - \frac{1}{x-3} < -x + 1$ gilt.



c) Asymptote: $f(x) = \frac{4x^2 + 2x - 1}{x} = \frac{4x^2}{x} + \frac{2x}{x} - \frac{1}{x} = 4x + 2 - \frac{1}{x}$.
Wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ besitzt G_f die schräge Asymptote $y = 4x + 2$.
G_f verläuft im Intervall I oberhalb der Asymptote,
da $\frac{1}{x}$ für alle $x \in$ I negativ ist, so dass
$f(x) = 4x + 2 - \frac{1}{x} > 4x + 2$ gilt.



d) Asymptote: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 5}{x^2 + 1} = 2$, da der Zählergrad gleich dem Nennergrad ist; waagrechte Asymptote $y = 2$.
Es gilt $f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 1) - 7}{x^2 + 1} = 2 - \frac{7}{x^2 + 1}$.
G_f verläuft im Intervall I unterhalb der Asymptote, da $\frac{7}{x^2 + 1}$ für alle $x \in I$ positiv ist, so dass $f(x) = 2 - \frac{7}{x^2 + 1} < 2$ gilt.



KX **7** **a)** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{kx + 2}{x + 3} = k$, da der Zählergrad gleich dem Nennergrad ist.
Daher gilt $k = 3$.

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(k + \frac{1}{x^2 + 5}\right) = k$.
Daher gilt $k = 0$.

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2 - kx}{2x + 4} = -\frac{k}{2}$, da der Zählergrad gleich dem Nennergrad ist.
Daher gilt $-\frac{k}{2} = 4 \Rightarrow k = -8$.

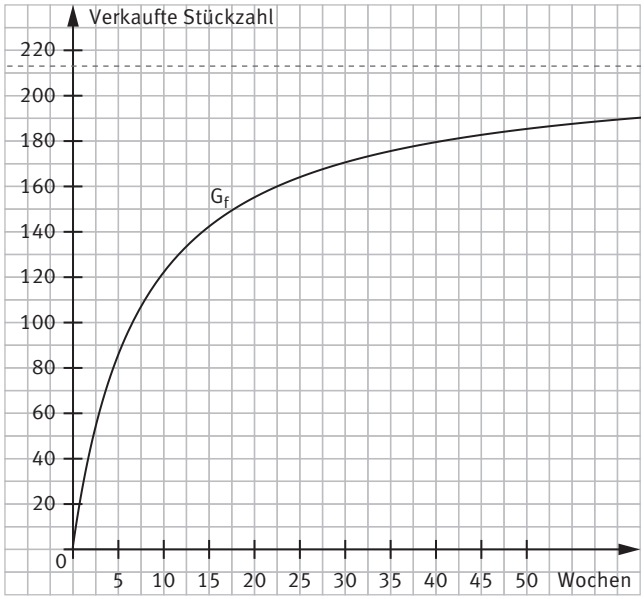
d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{(k + 1)x + 1}{1 - 2x} = -\frac{k + 1}{2}$, da der Zählergrad gleich dem Nennergrad ist.
Daher gilt $-\frac{k + 1}{2} = 3 \Leftrightarrow k + 1 = -6 \Rightarrow k = -7$.

KX **8** **a)** $G_{f_3} = G_f$, da die Funktion f_1 die Definitionslücke $x_1 = 0$ und die Funktion f_2 die Definitionslücke $x_2 = -1$, aber der abgebildete Graph keine senkrechte Asymptote mit $x = 0$ oder $x = -1$ hat.
Anm.: Im 1. und 2. Druck der 1. Auflage des Schulbuchs ist der Funktionsterm von f_3 falsch angegeben. Er muss richtig lauten: $f_3(x) = 2x - 1 - \frac{2}{x + 1}$.

b) $G_{f_2} = G_f$, da der abgebildete Graph keine senkrechte Asymptote besitzt, die Funktionen f_1 und f_3 aber jeweils (mindestens) eine Definitionslücke haben.

c) $G_{f_3} = G_f$. Es gilt $f_2(x) = \frac{-x + 1}{x} = -1 + \frac{1}{x}$ und $f_3(x) = \frac{-x^2 - 1}{x} = -x - \frac{1}{x}$.
Die Funktion f_2 entfällt, da $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_2(x) = -1$ gilt und der abgebildete Graph nicht die waagrechte Asymptote $y = -1$ besitzt.
Die Funktion f_1 entfällt, da für $x > 0$ gilt $f_1(x) = -x + \frac{1}{x} > -x$ und der abgebildete Graph unterhalb der schrägen Asymptote verläuft.

KX **9** **a)** Einsetzen der Koordinaten von (1|26):
$F(1) = 26 \Leftrightarrow \frac{a + 15}{b + 15} = 26 \Leftrightarrow a + 15 = 26(b + 15)$
$\Rightarrow a = 26b + 375$ (Gleichung 1)
Einsetzen der Koordinaten von (5|86):
$f(5) = 86 \Leftrightarrow \frac{5a + 15}{5b + 15} = 86 \Leftrightarrow 5a + 15 = 86(5b + 15)$
$\Rightarrow a = 86b + 255$ (Gleichung 2)
Gleichsetzen der Gleichungen (1) und (2):
$26b + 375 = 86b + 255 \Leftrightarrow 60b = 120 \Leftrightarrow b = 2$
$b = 2$ einsetzen in (1):
$a = 26 \cdot 2 + 375 = 427$
$f(x) = \frac{427x + 15}{2x + 15}$



b) Der Graph ist monoton steigend und nähert sich der Asymptote $y = 213{,}5$ an.
Mögliche Gründe: Die Zahnpasta wird bekannter, so dass mehr Kunden die Zahnpasta kaufen; die wöchentlichen Verkaufszahlen steigen. Die langfristig in diesem Modell zu erwartende wöchentliche Verkaufszahl beträgt 213,5. Es tritt also eine Sättigung des Marktes ein.

KX **10 a)** Der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion besitzt genau dann eine waagrechte Asymptote, wenn der Zählergrad kleiner oder gleich dem Nennergrad ist.
Es gilt also: $n \in \{0; 1\}$.
In beiden Fällen ist der Zählergrad gleich dem Nennergrad und es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -4$; waagrechte Asymptote: $y = -4$.

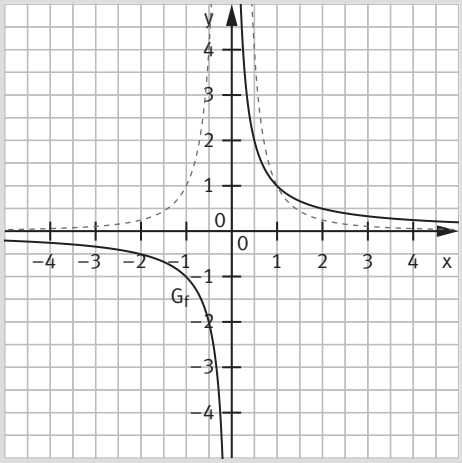
b) Der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion besitzt genau dann eine schräge Asymptote, wenn der Zählergrad um 1 größer ist als der Nennergrad.
Es gilt also $n = 3$ und mit $f_3(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 5}{x^2} = x - 4 + \frac{5}{x^2}$ folgt die schräge Asymptote $y = x - 4$.

Entdecken

KX
- Individuelle Ergebnisse, z. B.:
  Newton hat mit dem Gravitationsgesetz allgemein die Anziehungskraft zweier Massen (m_1 und m_2) im Abstand r beschrieben, wenn die Massen als punktförmig (bzw. ihre Ausdehnung klein gegenüber ihrem Abstand) angesehen werden können.
  Die Konstante G ist die allgemeine Gravitationskonstante $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2}$.

KX
- Für $r \to 0^+$ wird die Gravitationskraft beliebig groß.

KX
- Mögliche Ergebnisse:
  Beide Graphen haben dieselben Asymptoten: waagrechte Asymptote ist $y = 0$, senkrechte Asymptote ist $x = 0$.
  Für $x \to 0^-$ gilt $f(x) \to -\infty$ und für $x \to 0^+$ gilt $f(x) \to +\infty$.
  Die Funktion f wechselt an der Stelle $x_0 = 0$ das Vorzeichen.
  Für $x \to 0^-$ gilt $g(x) \to +\infty$ und für $x \to 0^+$ gilt $g(x) \to +\infty$.
  Die Funktion g wechselt an der Stelle $x_0 = 0$ das Vorzeichen nicht.



Nachgefragt

KX
- Die Aussage ist für die senkrechte Asymptote falsch. Gegenbeispiel: Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$ hat zwei senkrechte Asymptoten $x = -1$ und $x = 1$.

KX
- Der Graph kann keinen gemeinsamen Punkt mit seiner senkrechten Asymptote $x = x_0$ haben, da an der Stelle x_0 nur dann eine senkrechte Asymptote vorliegt, wenn x_0 eine Definitionslücke ist. Daher gibt es keinen Punkt des Graphen, dessen x-Koordinate x_0 ist.

Aufgaben

KX **1** **a)** Polstelle: $x_0 = 5$
senkrechte Asymptote: $x = 5$
Verhalten an der Polstelle: $\lim\limits_{x \to 5^-} \frac{1}{x-5} = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to 5^+} \frac{1}{x-5} = +\infty$

b) Polstelle: $x_0 = 5$
senkrechte Asymptote: $x = 5$
Verhalten an der Polstelle: $\lim\limits_{x \to 5^-} \frac{1}{(x-5)^2} = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to 5^+} \frac{1}{(x-5)^2} = +\infty$

c) Polstellen: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$
senkrechte Asymptoten: $x = -2$; $x = 2$
Verhalten an den Polstellen:
$x_1 = -2$: $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{1}{x^2-4} = -\infty$
$x_2 = 2$: $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x^2-4} = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$

d) Polstelle: $x_0 = -1$
senkrechte Asymptote: $x = -1$
Verhalten an der Polstelle: $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$

KX **2** **a)** $x^2 + 4 = 0$ ist nicht lösbar. Die Funktion f hat keine senkrechte Asymptote.

b) $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = 3$
senkrechte Asymptoten: $x = -3;\ x = 3$

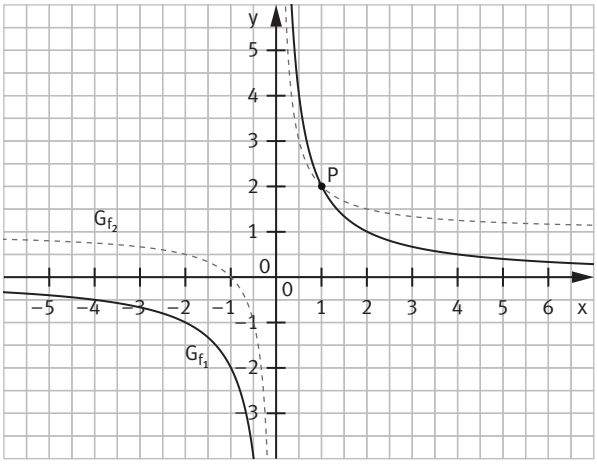
c) $(x + 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 3$
senkrechte Asymptoten: $x = -1;\ x = 3$

d) $2x = 0 \Rightarrow x_0 = 0$
senkrechte Asymptote: $x = 0$

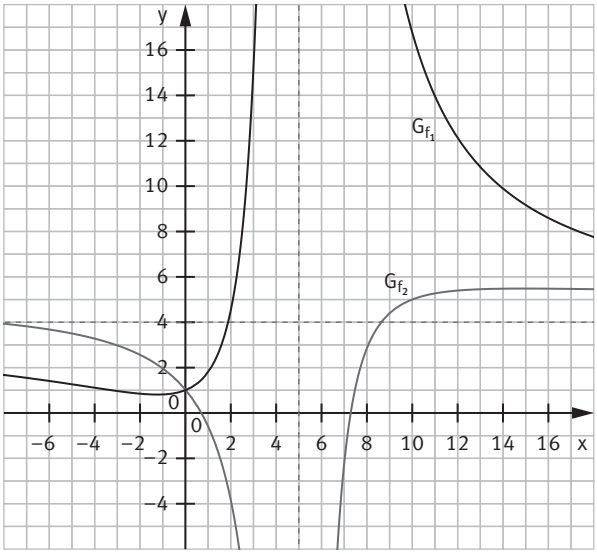
e) $(x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$
senkrechte Asymptote: $x = 2$

f) $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$
senkrechte Asymptote: $x = -1$

KX **3** **a)** Mögliche Terme:
$f_1(x) = \frac{2}{x};\ f_2(x) = 1 + \frac{1}{x}$



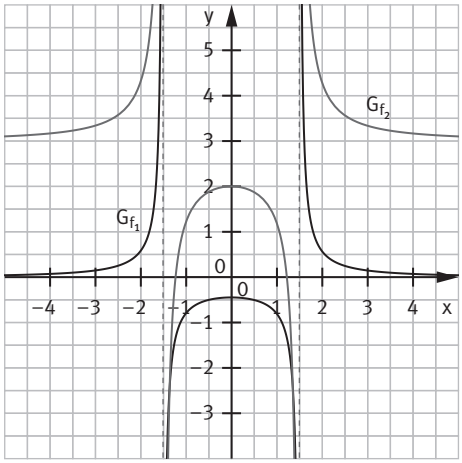
b) Mögliche Terme:
$f_1(x) = \frac{4x^2 + 25}{(x - 5)^2};\ f_2(x) = 4 + \frac{x^2 - 75}{(x - 5)^2}$



c) Mögliche Terme:

$f_1(x) = \frac{1}{(x-1{,}5)(x+1{,}5)} = \frac{1}{x^2-2{,}25}$;

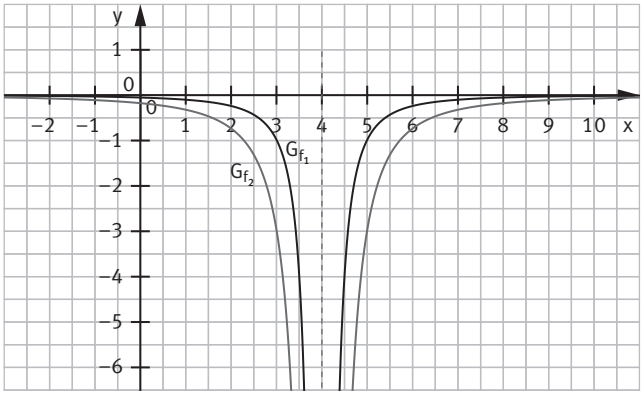
$f_2(x) = 2 + \frac{x^2}{x^2-2{,}25}$



d) Mögliche Terme:

$f_1(x) = -\frac{1}{(x-4)^2}$;

$f_2(x) = -\frac{3}{(x-4)^2}$



KX **4** **a)** maximale Definitionsmenge: $(x-2)(x+3) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = 2;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3; 2\}$

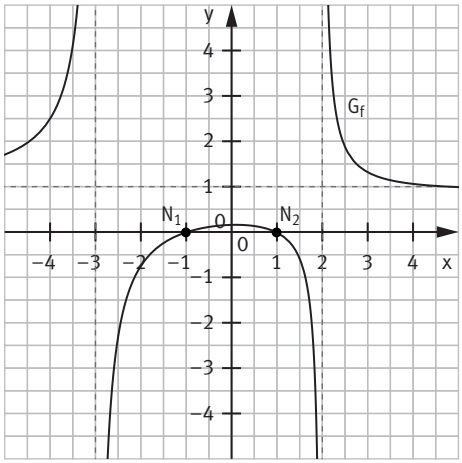
senkrechte Asymptoten: $x = -3$; $x = 2$

Nullstellen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1$

waagrechte Asymptote: $y = 1$



b) maximale Definitionsmenge:

$2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2(x+2)(x-1) = 0$

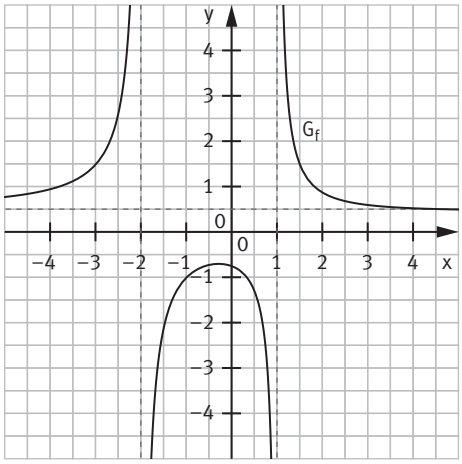
$\Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 1;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$

senkrechte Asymptoten: $x = -2$; $x = 1$

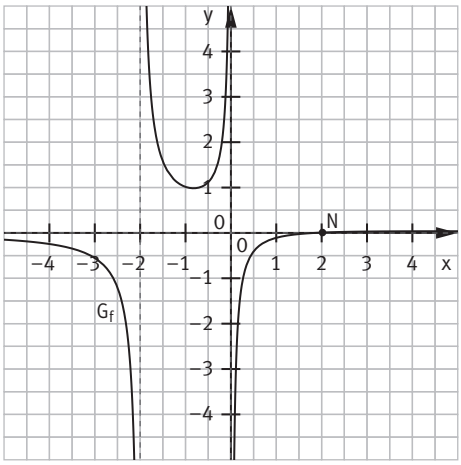
Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3 = 0$ nicht lösbar;

f hat keine Nullstellen.

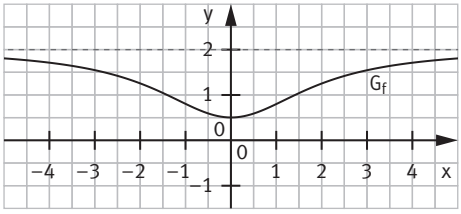
waagrechte Asymptote: $y = \frac{1}{2}$



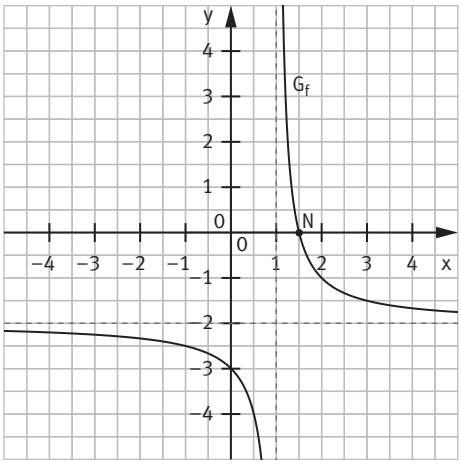
c) maximale Definitionsmenge:
$3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x + 2) = 0$
$\Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 0;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2; 0\}$
senkrechte Asymptoten: $x = -2;\ x = 0$
Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$
$\Rightarrow x_0 = 2$
waagrechte Asymptote: $y = 0$



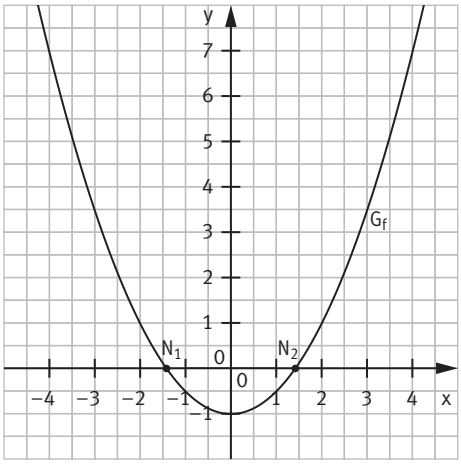
d) maximale Definitionsmenge:
$x^2 + 4 = 0$ nicht lösbar; $D_f = \mathbb{R}$
Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2 = 0$
$\Rightarrow x^2 = -1$ nicht lösbar; f hat keine Nullstellen.
waagrechte Asymptote: $y = 2$



e) maximale Definitionsmenge: $x - 1 = 0$
$\Rightarrow x_1 = 1;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
senkrechte Asymptote: $x = 1$
Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = 2 \Leftrightarrow 1 = 2x - 2$
$\Rightarrow x_0 = 1{,}5$
waagrechte Asymptote: $y = -2$



f) Es gilt $f(x) = \frac{x^2-2}{2} = \frac{1}{2}x^2 - 1$,
d. h. die Funktion f ist ganzrational.
maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$
Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$
$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{2};\ x_2 = \sqrt{2}$



KX **5** **a)** $G_f = G_B$, da die Definitionslücke $x_0 = 0$ doppelte Nennernullstelle ist und $\lim\limits_{x \to 0^-}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ gilt.

b) $G_f = G_C$, da die Definitionslücke $x_0 = 2$ einfache Nullstelle ist und $\lim\limits_{x \to 2^-}\left(\frac{2}{2-x} - 1\right) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to 2^+}\left(\frac{2}{2-x} - 1\right) = -\infty$ gilt.

KX **6** Funktionswerte größer als 10:

$f(x) > 10 \Leftrightarrow \frac{2}{x} > 10 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{5}$

$g(x) > 10 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2} > 10 \Rightarrow 0 < x^2 < \frac{1}{5} \Rightarrow 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$

Funktionswerte größer als 100:

$f(x) > 100 \Leftrightarrow \frac{2}{x} > 100 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{50}$

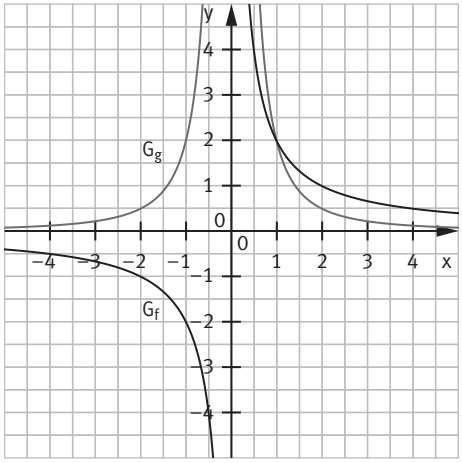
$g(x) > 100 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2} > 100 \Rightarrow 0 < x^2 < \frac{1}{50} \Rightarrow 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{10}\sqrt{2}$

Geometrische Deutung:

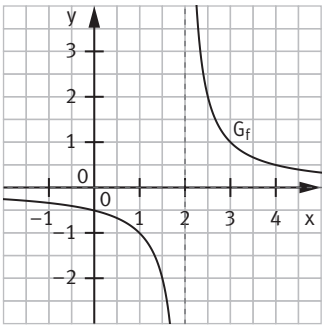
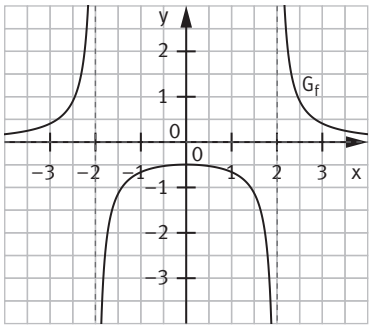
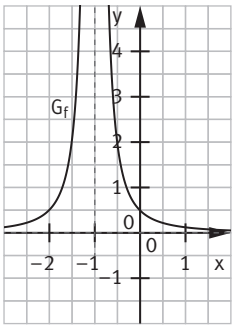
Die y-Achse ist senkrechte Asymptote beider Graphen.

G_f hat einen Vorzeichenwechsel, G_g nicht.

Für $x \to 0^+$ schmiegt sich G_f schneller an die y-Achse an als G_g.



KX **7** **a)**

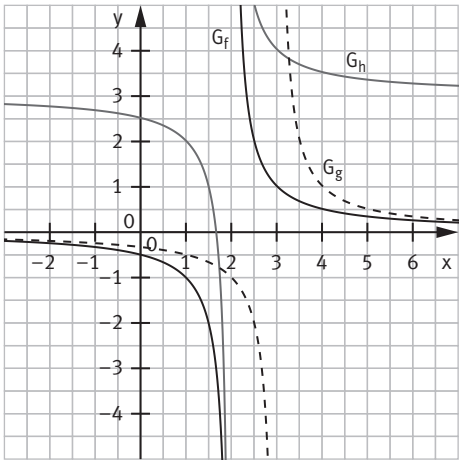
	1	2	3
D_f	$\mathbb{R}\setminus\{2\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
senkrechte Asymptote(n)	$x = 2$	$x = -2$; $x = 2$	$x = -1$
waagrechte Asymptote	$y = 0$	$y = 0$	$y = 0$
			

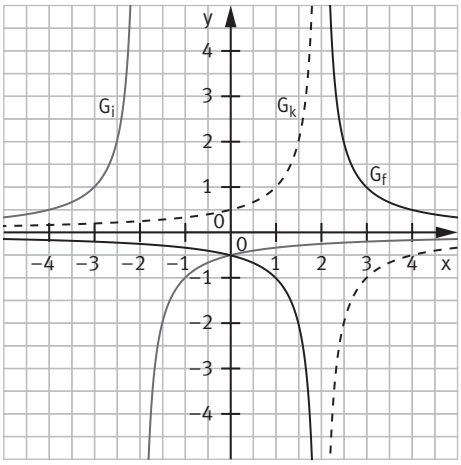
b)

A: G_g entsteht aus G_f durch Verschiebung um 1 Einheit in positive x-Richtung.			
	1	2	3
D_g	$\mathbb{R}\setminus\{3\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1; 3\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
senkrechte Asymptote(n)	$x = 3$	$x_1 = -1$; $x_2 = 3$	$x = 0$
waagrechte Asymptote	$y = 0$	$y = 0$	$y = 0$

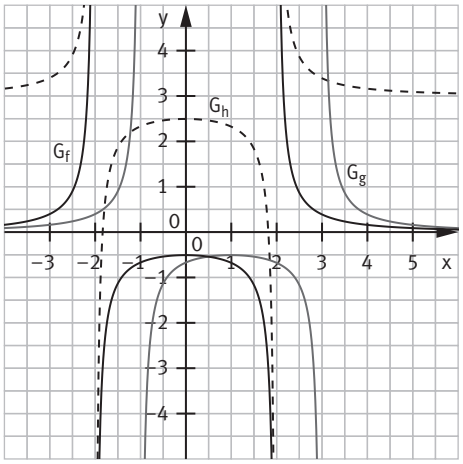
B : G_h entsteht aus G_f durch Verschiebung um 3 Einheiten in positive y-Richtung.			
	1	2	3
D_h	$\mathbb{R}\setminus\{2\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
senkrechte Asymptote(n)	$x = 2$	$x = -2$; $x = 2$	$x = -1$
waagrechte Asymptote	$y = 3$	$y = 3$	$y = 3$
C : G_k entsteht aus G_f durch Spiegelung an der x-Achse.			
	1	2	3
D_k	$\mathbb{R}\setminus\{2\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
senkrechte Asymptote(n)	$x = 2$	$x = -2$; $x = 2$	$x = -1$
waagrechte Asymptote	$y = 0$	$y = 0$	$y = 0$
D : G_i entsteht aus G_f durch Spiegelung an der y-Achse.			
	1	2	3
D_i	$\mathbb{R}\setminus\{-2\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$
senkrechte Asymptote(n)	$x = -2$	$x = -2$; $x = 2$	$x = 1$
waagrechte Asymptote	$y = 0$	$y = 0$	$y = 0$

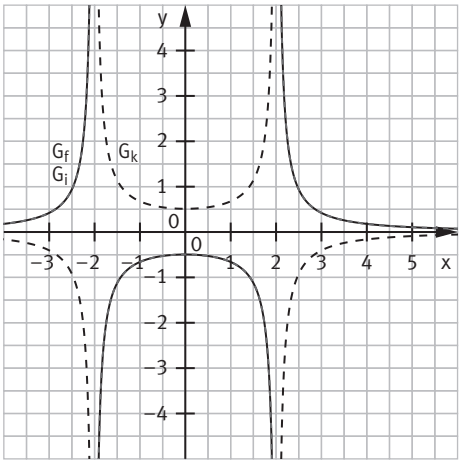
1



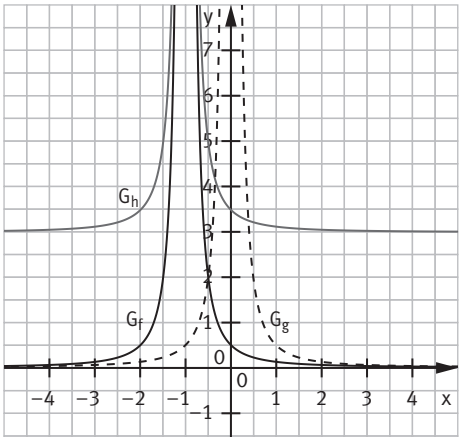


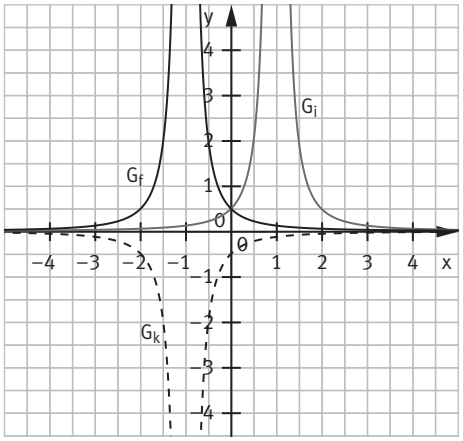
2





3

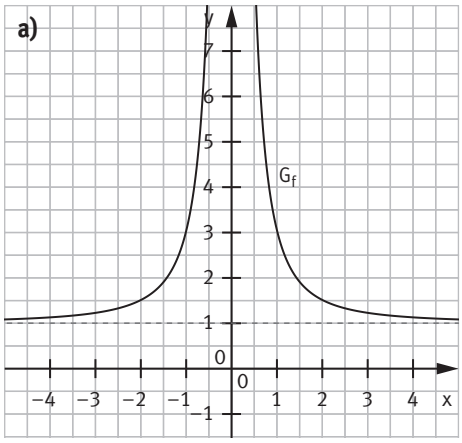




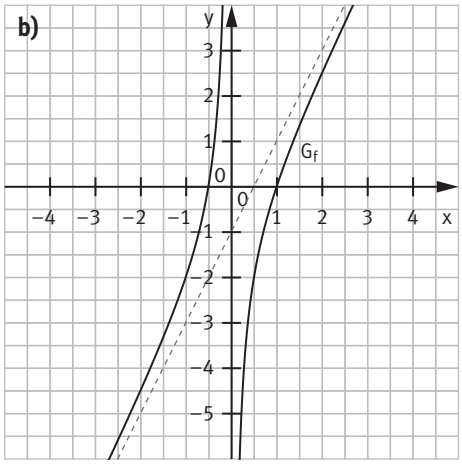
KX **8**

	a)	b)	c)
D_f	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
Asymptoten ...			
• senkrecht	$x = 0$	$x = 0$	$x = -1$
• waagrecht	$y = 1$	–	$y = 3$
• schräg	–	$y = 2x - 1$	–

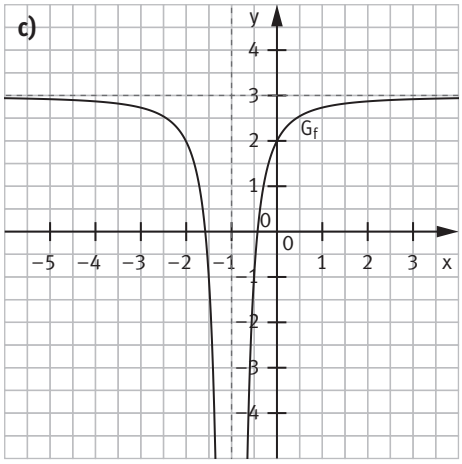
a)



b)

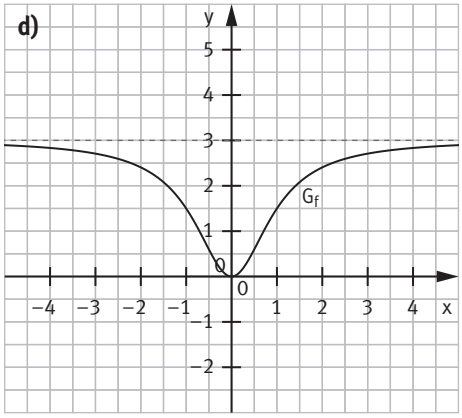


c)

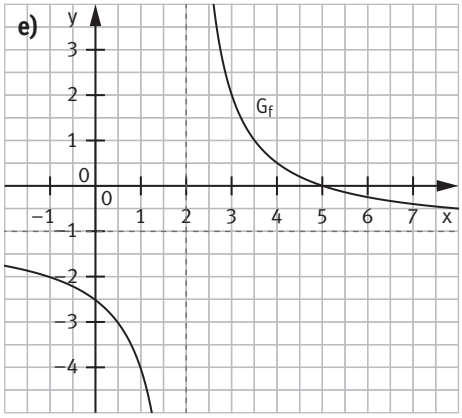


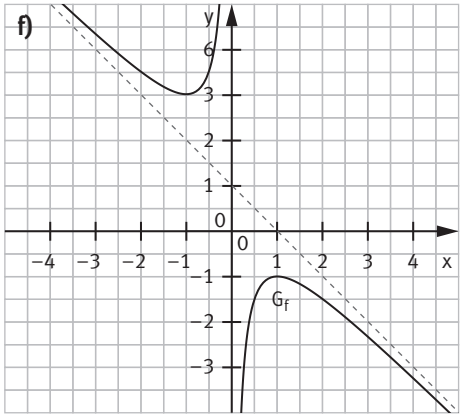
	d)	e)	f)
D_f	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\{2\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
Asymptoten...			
senkrecht	–	$x = 2$	$x = 0$
waagrecht	$y = 3$	$y = -1$	–
schräg	–	–	$y = 1 - x$

d)



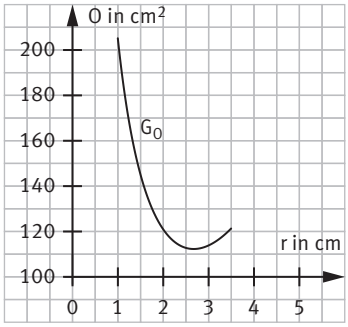
e)





KX **9** **a)** Für die Funktion O gilt $\lim\limits_{r \to 0^+} O(r) = \lim\limits_{r \to 0^+} \left(\frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{200}{r}\right) = +\infty$: Der Oberflächeninhalt nimmt also beliebig große Werte an für $r \to 0$. Deswegen sollte ein geeigneter endlicher Wert für die untere Grenze der Definitionsmenge gewählt werden, z. B. 1 bzw. $D_O = [1; 3{,}5]$.

b) Den kleinsten Wert O_{min} erhält man für $r_{min} \approx 2{,}7$ [cm].



c) $O_{min} = O(r_{min}) = \frac{5}{3}\pi \cdot 2{,}7^2 + \frac{200}{2{,}7} \approx 112{,}4\ [cm^2]$

$O(2) = \frac{5}{3}\pi \cdot 2^2 + \frac{200}{2} \approx 120{,}9\ [cm^2]$

$\frac{O(2) - O_{min}}{O_{min}} \approx \frac{120{,}9 - 112{,}4}{112{,}4} = 0{,}076$

Mit r = 2 cm wird ca. 7,6 % mehr Material verbraucht als mit $r_{min} \approx 2{,}7$ cm.

d) Die Variablen für das neue Fläschchen werden mit dem Index „neu“ gekennzeichnet.

Wegen $V = 100\ [cm^3]$ gilt $V_{neu} = 105\ [cm^3]$.

Für das Volumen eines Fläschchens gilt

$V = V_{Zylinder} + V_{Halbkugel} = \pi r^2 \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$.

Aus $V_{neu} = 105$ folgt $\pi r_{neu}^2 \cdot h_{neu} + \frac{2}{3}\pi r_{neu}^3 = 105$ und damit

$h_{neu} = \frac{105 - \frac{2}{3}\pi r_{neu}^3}{\pi r_{neu}^2} = \frac{105 - \frac{2}{3}\pi \cdot 2^3}{\pi \cdot 2^2} \approx 7{,}02\ [cm]$

Das neue Parfümfläschchen ist ca. 7,02 cm groß.

KX **10** Die Nullstellen des Zählerpolynoms sind die Nullstellen der Funktion:

$x_1 = -1; x_2 = 1$.

Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind die Polstellen:

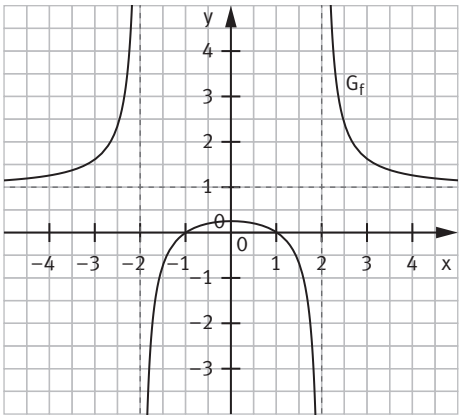
$x_1 = -2; x_2 = 2$.

Möglicher Funktionsterm:

$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Probe: $f(0) = \frac{1}{4}$

Der Graph von f stimmt näherungsweise mit dem angegebenen Graphen überein, z. B. $f(3) \approx 1{,}4$.



KX **11** Aus $f_{a,b}(2) = 0$ ergibt sich $\frac{2^2 + a}{2^2 + b} = 0 \Rightarrow 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$.

Aus $f_{-4,b}(0) = -4$ ergibt sich $\frac{0^2 - 4}{0^2 + b} = -4 \Rightarrow -4 = -4b \Rightarrow b = 1$.

Mögliche Eigenschaften:

- G_f ist monoton fallend im Intervall $]-\infty; 0]$ und monoton steigend im Intervall $[0; +\infty[$.
- G_f ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.
- G_f besitzt die waagrechte Asymptote $y = 1$.

KX **12 a)** Bei Abbildung 1 wird c variiert, da die Graphen unterschiedliche Polstelle besitzen.
Bei Abbildung 2 wird b variiert, da die Graphen unterschiedliche Nullstellen besitzen.
Bei Abbildung 3 wird a variiert, da die Graphen unterschiedliche waagrechte Asymptoten besitzen.

b) Der Graph verläuft durch den Koordinatenursprung:

$f^*(0) = 0 \Leftrightarrow a \cdot \frac{0 - b}{0 - c} = 0 \Rightarrow b = 0$

Der Graph verläuft durch die Punkte $P(1|1)$ und $Q(-2|4)$.

$f^*(1) = 1 \Leftrightarrow a \cdot \frac{1}{1 - c} = 1 \Rightarrow a = 1 - c \quad (1)$

$f^*(-2) = 4 \Leftrightarrow a \cdot \frac{-2}{-2 - c} = 4 \Leftrightarrow -2a = -8 - 4c \Rightarrow a = 4 + 2c \quad (2)$

Gleichsetzen von (1) und (2) ergibt $1 - c = 4 + 2c \Leftrightarrow 3c = -3 \Rightarrow c = -1$.

$c = -1$ einsetzen in (1) ergibt $a = 1 - (-1) = 2$.

Damit folgt $f^*(x) = 2 \cdot \frac{x}{x + 1}$.

KX **13 a)** $f^*(x) = f(x + 1) = \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 1} = \frac{x - 1}{(x + 1)(x - 1)} + \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x - 1 + x + 1}{x^2 - 1} = \frac{2x}{x^2 - 1}$

Symmetrie: $f^*(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{2x}{x^2 - 1} = -f^*(x) \Rightarrow G_{f^*}$ ist punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Damit ist G_f punktsymmetrisch bezüglich des Punkts $(0|1)$.

b) 1 Verschiebung des Graphen G_g um 2 Einheiten in positive x-Richtung:

$g^*(x) = g(x - 2) = \frac{2}{(x - 2)^2 + 4(x - 2) + 5} = \frac{2}{x^2 - 4x + 4 + 4x - 8 + 5} = \frac{2}{x^2 + 1}$

Symmetrie: $g^*(-x) = \frac{2}{(-x)^2 + 1} = \frac{2}{x^2 + 1} = g^*(x) \Rightarrow G_{g^*}$ ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

Damit ist G_g ist achsensymmetrisch bezüglich der Parallelen zur y-Achse durch den Punkt $(-2|0)$.

2 senkrechte Asymptote: $x = 0$

schräge Asymptote: $y = x + 1$

Schnittpunkt der Asymptoten: $(0|1)$

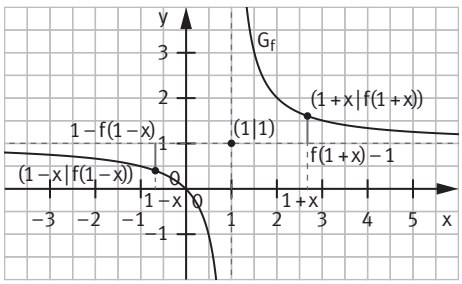
Verschiebung des Graphen G_h um 1 in negative y-Richtung:

$h^*(x) = h(x) - 1 = x + 1 + \frac{1}{x} - 1 = x + \frac{1}{x}$

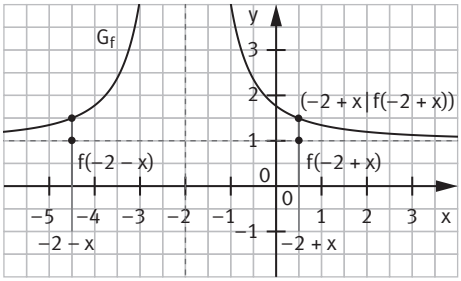
Symmetrie: $h^*(-x) = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -h^*(x) \Rightarrow G_{h^*}$ ist punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Damit ist G_h punktsymmetrisch bezüglich des Schnittpunkts der beiden Asymptoten.

KX **14 a)** Es gilt $f(1 + x) + f(1 - x) = 1 + \frac{1}{(1 + x) - 1} + 1 + \frac{1}{(1 - x) - 1}$
$= 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 2$ unabhängig von $x \in D_f$.

Aus $f(1 + x) + f(1 - x) = 2$ für alle $x \in D_f$ folgt $f(1 + x) - 1 = 1 - f(1 - x)$, woraus die Punktsymmetrie von G_f bezüglich des Schnittpunkts der Asymptoten $(1|1)$ folgt.



b) Es gilt $g(x) = \frac{x^2+4x+7}{x^2+4x+4} = 1 + \frac{3}{x^2+4x+4} = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}$.
senkrechte Asymptote: $x = -2$
Die Achsensymmetrie bezüglich der senkrechten Asymptote wird beschrieben durch
$g(-2+x) = g(-2-x) \Leftrightarrow g(-2+x) - g(-2-x) = 0$.
Probe:
$G(-2+x) - g(-2-x) = 1 + \frac{3}{[(-2+x)+2]^2} - \left[1 + \frac{3}{[(-2-x)+2]^2}\right]$
$= 1 + \frac{3}{x^2} - 1 - \frac{3}{x^2} = 0$



KX **15 a)** 1 und C: Aus $f(x) = 2$ folgt $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$.
2 und D: Von den verbleibenden sechs Graphen sind nur G_g und $G_{\frac{1}{g}}$ mit $g(x) = x^2$ und $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x^2}$ achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.
3 und A: Aus $h(x) = x$ folgt $\frac{1}{h(x)} = \frac{1}{x}$, also z. B. aus $h(2) = 2$ der Funktionswert $\frac{1}{h(2)} = \frac{1}{2}$.
4 und B: Die Zuordnung der übrigen Paare wurde begründet; also müssen 4 und B nach dem Ausschlussprinzip einander zugeordnet sein.

KX **16 a)** Die Funktionen besitzen nicht dieselben Definitionsmengen.
Die Funktion f_1 besitzt genau eine Definitionslücke, nämlich $x_1 = -1$, also $D_{f_1} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
Die Funktion f_2 mit $f_2(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x+2}{x+1}} = \frac{x+1}{x+2}$ hat zwei Definitionslücken,
nämlich $x_1 = -1$ und $x_2 = -2$, also $D_{f_2} = \mathbb{R}\setminus\{-2; -1\}$.

b) Man kann z. B. mithilfe der CAS-Funktion einer DGS die Funktionsterme vereinfachen.
$f_3(x) = \frac{x+2}{2x+3}$, $D_{f_3} = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}; -1\right\}$
$f_4(x) = \frac{2x+3}{3x+5}$, $D_{f_4} = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{3}; -1\right\}$
$f_5(x) = \frac{3x+5}{5x+8}$, $D_{f_5} = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{8}{5}; -1\right\}$ usw.
Man kann für $n \geq 2$ folgende Struktur erkennen:
$f_n(x) = \frac{a_n x + b_n}{b_n x + (a_n + b_n)}$ und damit $D_{f_n} = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{a_n+b_n}{b_n}; -1\right\}$ mit $a_2 = b_2 = 1$ und
$a_{n+1} = b_n$ sowie $b_{n+1} = a_n + b_n$.
Die Folge der Zahlen (a_n) bzw. (b_n) ist die sogenannte Fibonacci-Folge. Die neben -1 weitere Definitionslücke der Funktion f_n nähert sich damit dem Goldenen Schnitt an.
Diese Aufgabe ermöglicht weitere Anknüpfungspunkte z. B. zu Kettenbrüchen, zur Fibonacci-Folge und zum Goldenen Schnitt.

Ausblick

KX

Stetig hebbare Definitionslücken

- Mögliche Funktionsterme:

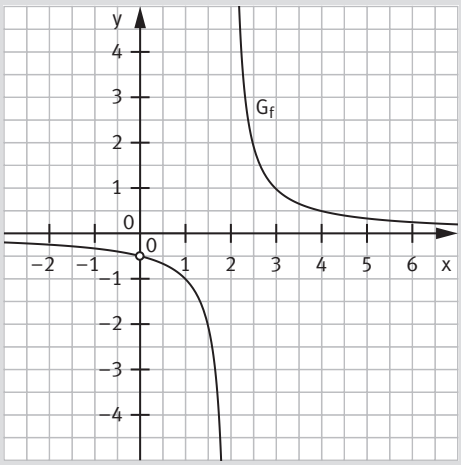
$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}$; $x_0 = 1$ ist hebbare Definitionslücke.

$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$; $x_0 = -1$ ist hebbare Definitionslücke.

$h(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 4x} = \frac{x(x-1)}{x(x+4)} = \frac{x-1}{x+4}$; $x_0 = 0$ ist hebbare Definitionslücke.

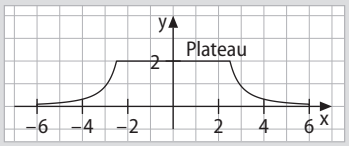
Es gilt $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x} = \frac{x}{x(x-2)} = \frac{1}{x-2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$.

Der Graph G_f weist an der Stelle $x_0 = 0$ ein „Loch“ auf.
Dieses ist in der Darstellung einer DGS nicht zu erkennen.



Entdecken

KX

- 

  Funktionsterm: $g(x) = f(-x) = \frac{8}{(2(-x)-3)^2} = \frac{8}{(-2x-3)^2} = \frac{8}{(2x+3)^2}$

KX

- Man berechnet den x-Wert, an dem die Funktion f den Funktionswert 2 hat:

  $\frac{8}{(2x-3)^2} = 2 \Leftrightarrow 4 = (2x-3)^2 \Rightarrow 2x-3 = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 2{,}5;\ x_2 = 0{,}5$ (im Sachkontext nicht sinnvoll)

  Wegen der Achsensymmetrie der Rampe bezüglich der y-Achse ergibt sich für die Breite der Rampe $2 \cdot 2{,}5\,\text{m} = 5\,\text{m}$.

Nachgefragt

KX

- Dies ist nicht der Fall. Gegenbeispiel: Mit der Geraden g: $y = 0$ (x-Achse) hat G_f keinen gemeinsamen Punkt.

KX

- Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, ist punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, hat aber eine Definitionslücke bei $x = 0$, insbesondere gilt daher auch nicht $f(0) = 0$.

Aufgaben

KX

1 **a)** maximale Definitionsmenge: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$

Polstellen: $x_1 = -1;\ x_2 = 1$

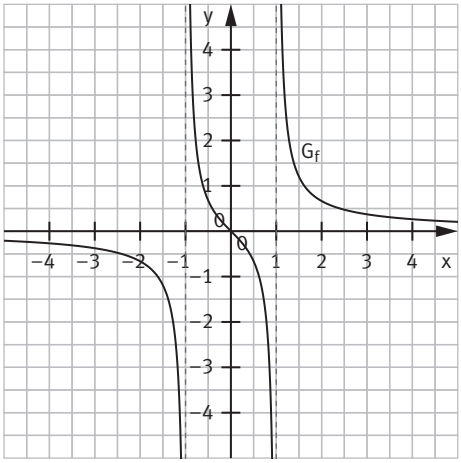
Nullstelle: $x_0 = 0$

senkrechte Asymptoten: $x = -1;\ x = 1$

waagrechte Asymptote: $y = 0$

Symmetrie: $f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{x^2 - 1} = -f(x)$

G_f ist punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.



b) maximale Definitionsmenge: $x^2 + 1 = 0$ nicht lösbar;

$D_f = \mathbb{R}$

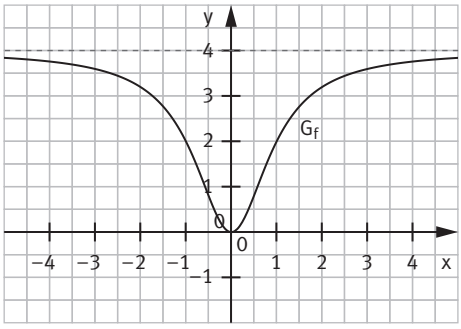
keine Polstellen, keine senkrechten Asymptoten

Nullstelle: $x_0 = 0$

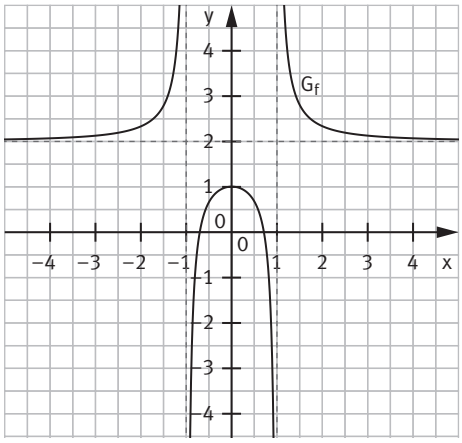
waagrechte Asymptote: $y = 4$

Symmetrie: $f(-x) = \frac{4(-x)^2}{(-x)^2 + 1} = \frac{4x^2}{x^2 + 1} = f(x)$

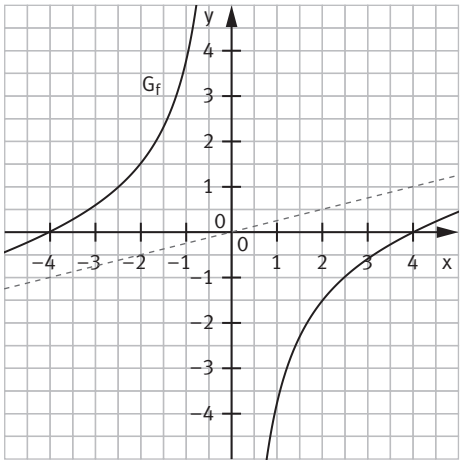
G_f ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.



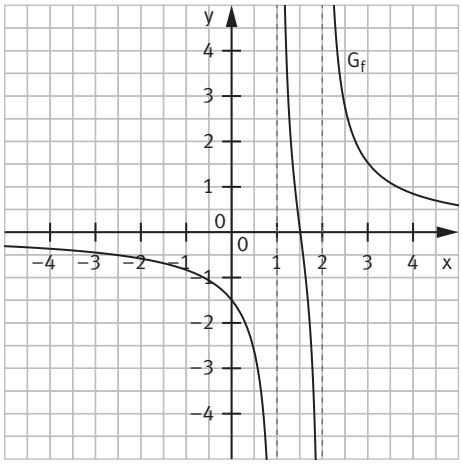
c) maximale Definitionsmenge: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$
$\Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$
Polstellen: $x_1 = -1;\ x_2 = 1$
Nullstellen: $2 + \frac{1}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 1) + 1 = 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2};\ x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
senkrechte Asymptoten: $x = -1;\ x = 1$
waagrechte Asymptote: $y = 2$
Symmetrie: $f(-x) = 2 + \frac{1}{(-x)^2 - 1} = 2 + \frac{1}{x^2 - 1} = f(x)$
G_f ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.



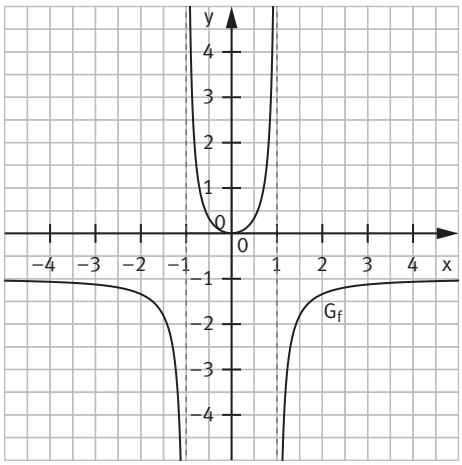
d) maximale Definitionsmenge: $x = 0;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Polstelle: $x_0 = 0$
Nullstellen: $\frac{x}{4} - \frac{4}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 = 16$
$\Rightarrow x_1 = -4;\ x_2 = 4$
senkrechte Asymptote: $x = 0$
schräge Asymptote: $y = \frac{1}{4}x$
Symmetrie:
$f(-x) = \frac{(-x)}{4} - \frac{4}{(-x)} = -\frac{x}{4} + \frac{4}{x} = -\left(\frac{x}{4} - \frac{4}{x}\right) = -f(x)$
G_f ist punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.



e) maximale Definitionsmenge: $x - 1 = 0$ oder
$x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{1; 2\}$
Polstellen: $x_1 = 1;\ x_2 = 2$
Nullstelle: $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0 \Rightarrow x - 2 + x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
senkrechte Asymptoten: $x = 1;\ x = 2$
waagrechte Asymptote: $y = 0$
Symmetrie:
$f(-x) = \frac{1}{(-x) - 1} + \frac{1}{(-x) - 2} = -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \begin{cases} \neq f(x) \\ \neq f(-x) \end{cases}$
G_f ist nicht symmetrisch bezüglich des Koordinatensystems.



f) maximale Definitionsmenge: $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$
$\Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$
Polstellen: $x_1 = -1;\ x_2 = 1$
Nullstelle: $x_0 = 0$
senkrechte Asymptoten: $x = -1;\ x = 1$
waagrechte Asymptote: $y = -1$
Symmetrie: $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = f(x)$
G_f ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.



KX **2** **a)** maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = \frac{2}{0+2} = 1$; $S_y(0|1)$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x+2} = 0$ nicht lösbar;
G_f hat keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.

b) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0 + \frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2}$; $S_y\left(0\middle|-\frac{1}{2}\right)$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x-2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$
$\Rightarrow x_0 = 1$; $N_0(1|0)$

c) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(x) = \frac{3\cdot 0^2 + 0}{0-1} = 0$; $S_y(0|0)$
Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(3x+1) = 0$
$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}$; $x_2 = 0$; $N_1\left(-\frac{1}{3}\middle|0\right)$; $N_2(0|0) = S_y$

d) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Es gibt keinen Schnittpunkt mit der y-Achse, da $0 \notin D_f$ gilt.
Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 4 + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$
$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$; $N_1(2-\sqrt{3}|0)$; $N_2(2+\sqrt{3}|0)$

e) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 2\cdot 0 - 3 + \frac{3}{0+1} = 0$; $S_y(0|0)$
Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 + \frac{3}{x+1} = 0 \Rightarrow (2x-3)(x+1) + 3 = 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow N_1(0|0)$; $N_2\left(\frac{1}{2}\middle|0\right)$

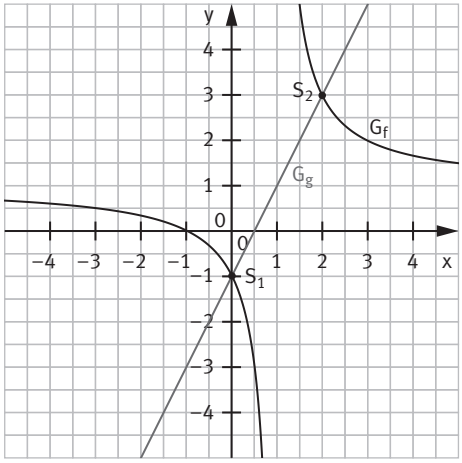
f) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Es gibt keinen Schnittpunkt mit der y-Achse, da $0 \notin D_f$ gilt.
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$ nicht lösbar; kein Schnittpunkt mit der x-Achse

g) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right\}$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 1 + \frac{4}{0^2-2} = -1$; $S_y(0|-1)$
Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{4}{x^2-2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2 = 0$ nicht lösbar; kein Schnittpunkt mit der x-Achse

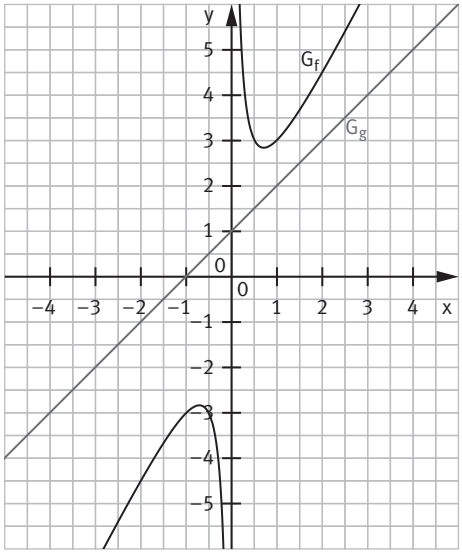
h) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = \frac{2}{0+1} - 2\cdot 0 = 2$; $S_y(0|2)$
Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x+1} - 2x = 0 \Rightarrow 2 - 2x^2 - 2x = 0$
$\Leftrightarrow -2\left(x^2 + x - 1\right) = 0$
$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $N_1\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\middle|0\right)$; $N_2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\middle|0\right)$

i) maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Es liegt keinen Schnittpunkt mit der y-Achse vor, da $0 \notin D_f$ gilt.
Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 + \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2 = 0$ nicht lösbar; kein Schnittpunkt mit der x-Achse

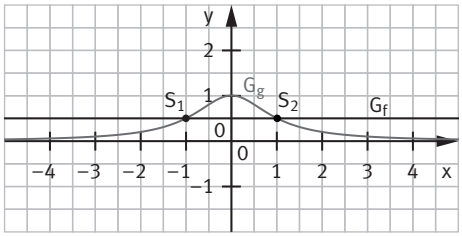
KX **3** **a)** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = 2x - 1 \Leftrightarrow x + 1 = (2x-1)(x-1)$
$\Leftrightarrow x + 1 = 2x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2$
Schnittpunkte:
$g(0) = -1 \Rightarrow S_1(0|-1);\ g(2) = 3 \Rightarrow S_1(2|3)$



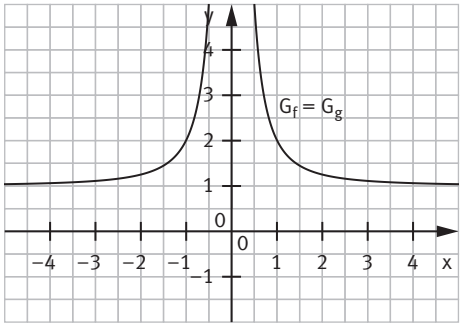
b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x + \frac{1}{x} = 1 + x \Leftrightarrow 2x^2 + 1 = x + x^2$
$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ nicht lösbar,
da $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$;
es gibt keine Schnittpunkte.



c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0{,}5 = \frac{x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow 0{,}5 + 0{,}5x^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1$
$\Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1$
Schnittpunkte:
$f(-1) = 0{,}5 \Rightarrow S_1(-1|0{,}5);$
$f(1) = 0{,}5 \Rightarrow S_2(1|0{,}5)$



d) Es gilt $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2} = f(x)$
G_f und G_g sind identisch und haben unendlich viele Schnittpunkte.



KX **4** **a)** In Rechnung A wird der Nenner der Funktion f zunächst in Linearfaktoren zerlegt, so dass beim Multiplizieren mit dem Nenner der Faktor $(x + 1)$ gekürzt werden kann.
In Rechnung B wird nicht gekürzt. Die „Lösung" $x_2 = -1$ liegt nicht in der Definitionsmenge und muss daher ausgeschlossen werden.

b) 1 $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)}$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow 2x^2 = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4}; x_1 = -\frac{1}{2}; (x_2 = 1 \notin D_f)$

$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{2} - 1} = -\frac{2}{3}; S\left(-\frac{1}{2} \middle| -\frac{2}{3}\right)$

2 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{(x+3)(x+1)}$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{(x+3)(x+1)} = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow 1 = x + 3 \Rightarrow x = -2$

$g(2) = \frac{1}{-2+1} = -1; S(-2|-1)$

3 $g(x) = \frac{3}{x^2 - x} = \frac{3}{x(x-1)}$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{x(x-1)} \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = \frac{3}{2}; S\left(2 \middle| \frac{3}{2}\right)$

4 $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2 + 2x} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x(x+2)}$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x(x+2)} \Leftrightarrow x + 2 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \wedge$

$f(x_1) = \frac{1}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1-\sqrt{5}} \Rightarrow S_1\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \middle| \frac{2}{-1-\sqrt{5}}\right)$

$f(x_2) = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \Rightarrow S_1\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \middle| \frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)$

KX **5** **a)** Nullstellen: $1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 2$
Polstelle: $x^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$
senkrechte Asymptote: $x = 0$
waagrechte Asymptote: $y = 1$

b) $f(-x) = 1 - \frac{4}{(-x)^2} = 1 - \frac{4}{x^2} = f(x)$
G_f ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

c) Im Intervall $I_1 =]-\infty; 0[$ ist G_f monoton fallend, im Intervall $I_2 =]0; \infty[$ ist G_f monoton steigend.

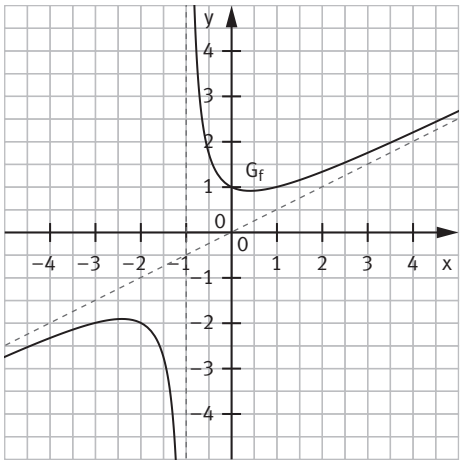
d) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{4}{x^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x_1 = -4; x_2 = 4$
Schnittpunkte: $S_1\left(-4 \middle| \frac{3}{4}\right)$ und $S_2\left(4 \middle| \frac{3}{4}\right)$

KX **6**

Abbildung	Funktionsterm	Begründung
1	D	i(x) hat bei $x_0 = 2$ eine Definitionslücke und dies ist nur bei G_1 der Fall.
2	C	h(x) besitzt als einzige Funktion bei $x_0 = -2$ eine Definitionslücke.
3	E	G_j hat als einziger Graph eine schräge Asymptote $y = x - 1$.
4	B	g(x) hat bei $x_0 = -1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel und dies ist nur bei G_4 der Fall.
5	A	Es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{2}{3}$ und G_5 ist der einzige Graph mit der waagrechten Asymptote $y = \frac{2}{3}$.
6	F	G_k besitzt als einziger Graph die schräge Asymptote $y = 0{,}5x - 1$.

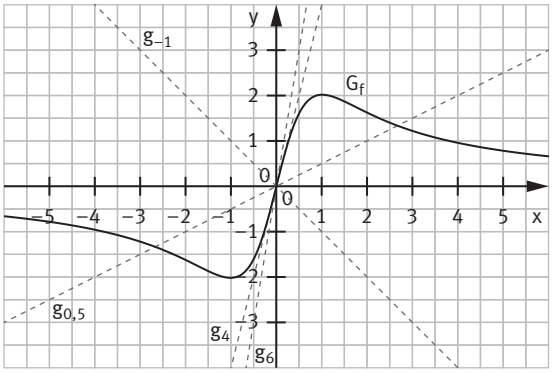
KX **7** **a)** f hat die Eigenschaften 2, 6, 9, 11.
g hat die Eigenschaften 3, 5, 8, 12.

b) Verbleibende Eigenschaften: 1, 4, 7, 10
Möglicher Funktionsterm: $h(x) = 0{,}5x + \frac{1}{x+1}$



KX **8** **a)** maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$
Symmetrie: $f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{4x}{x^2+1} = -f(x)$
G_f ist punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

b) Schnittpunkte: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{4x}{x^2+1} = ax \Rightarrow 4x = ax^3 + ax \Rightarrow x(ax^2 + a - 4) = 0$
$\Rightarrow x_0 = 0$ unabhängig von a
Es gilt $ax^2 + a - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4-a}{a}$.
Für $a > 4$ gilt $\frac{4-a}{a} < 0$ und $x^2 = \frac{4-a}{a}$ hat keine Lösung.
G_f und g haben genau einen Schnittpunkt $S_0(0|0)$.
Für $a = 4$ gilt $x^2 = \frac{4-a}{a} = 0$. G_f und g haben genau einen Schnittpunkt $S_0(0|0)$.
Für $0 < a < 4$ gilt $\frac{4-a}{a} > 0$ und aus $x^2 = \frac{4-a}{a}$ folgt $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{4-a}{a}}$.
G_f und g haben drei Schnittpunkte $S_0(0|0)$, $S_1\left(\sqrt{\frac{4-a}{a}}\,\middle|\,\sqrt{4a-a^2}\right)$ und $S_2\left(-\sqrt{\frac{4-a}{a}}\,\middle|\,-\sqrt{4a-a^2}\right)$.
Für $a < 0$ gilt $\frac{4-a}{a} < 0$ und $x^2 = \frac{4-a}{a}$ hat keine Lösung.
G_f und g haben genau einen Schnittpunkt $S_0(0|0)$.



KX **9** **a)** $v(0{,}6) = \frac{1-0{,}6}{1+0{,}6} = 0{,}25\left[\frac{m}{s}\right]$

b) $\lim\limits_{m \to 0} \frac{1-m}{1+m} = 1$: Hat die Kugel B eine Masse, deren Maßzahl gegen Null geht, bewegt sich die Kugel A nach dem Stoß mit nahezu unveränderter Geschwindigkeit weiter.
$\lim\limits_{m \to +\infty} \frac{1-m}{1+m} = -1$: Hat die Kugel B eine Masse, deren Maßzahl gegen unendlich geht, prallt die Kugel A an der Kugel B ab und bewegt sich mit gleichem Geschwindigkeitsbetrag in die entgegengesetzte Richtung.

c) Gesucht sind diejenigen Werte von m, für die v(m) positiv ist.
$v(m) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-m}{1+m} > 0 \Rightarrow 1 - m > 0$, da $1 + m > 0$ gilt. Damit ergibt sich $m < 1$.
Für eine Masse von Kugel B, die kleiner ist als 1 kg, bewegt sich die Kugel A nach dem Stoß weiterhin nach rechts.

KX **10 a)** Die Funktion f hat nur für $c = 0$ genau eine Definitionslücke. Diese ist dann aber $x_0 = 0$. Für $c > 0$ hat die Funktion f keine, für $c < 0$ zwei Definitionslücken. Deshalb kann der abgebildete Graph nur G_g sein.

b) Polstelle: $x_0 = 1 \Rightarrow c = -1$

waagrechte Asymptote: $y = 4 \Rightarrow a = 4$

Damit ergibt sich $g(x) = 4 + \frac{b}{(x-1)^2}$

Es gilt $g(0) = 0 \Leftrightarrow 4 + \frac{b}{(0-1)^2} = 0 \Rightarrow b = -4$.

Daher gilt $g(x) = 4 - \frac{4}{(x-1)^2}$

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-1} = \frac{4}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{4}{(x+1)^2} \Leftrightarrow x + 1 = 4(x-1) \Leftrightarrow 3x = 5$

$\Rightarrow x = \frac{5}{3}$; $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{9}{16}$; $S\left(\frac{5}{3} \middle| \frac{9}{16}\right)$

KX **11 a)** Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = \frac{4 \cdot 0 + 5}{0^2 - 1} = -5$; $S_y(0|-5)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{4}$; $N\left(-\frac{5}{4} \middle| 0\right)$

b) Polstellen: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$

Es gilt $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{4x+5}{x^2-1} = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{4x+5}{x^2-1} = -\infty$ sowie $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{4x+5}{x^2-1} = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{4x+5}{x^2-1} = +\infty$.

senkrechte Asymptoten: $x = -1$; $x = 1$

Es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{4x+5}{x^2-1} = 0$ (Zählergrad kleiner Nennergrad).

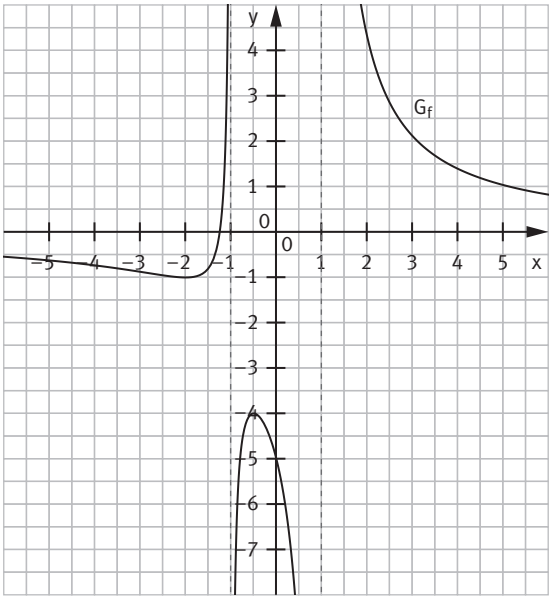
waagrechte Asymptote: $y = 0$

c) Die Funktion f hat positive Funktionswerte für $x \in \left]-\frac{5}{4}; -1\right[$ und $x \in \left]1; +\infty\right[$.

Die Funktion f hat negative Funktionswerte für $x \in \left]-\infty; -\frac{5}{4}\right[$ und $x \in \left]-1; 1\right[$.

d)

x	−4	−3	−2,5	−2	−0,5	0	1,5	2	3	4
f(x)	−0,733	−0,875	−0,952	−1	−4	−5	8,8	4,33	2,125	1,4



e) Punkt T(0|5): Es gilt $f_k(0) = \frac{0k + 5}{0^2 - 1} = \frac{5}{-1} = -5$ unabhängig von k.

senkrechte Asymptoten: Die Polstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ sind unabhängig von k.
Daher sind die Geraden $x = -1$ und $x = 1$ senkrechte Asymptoten unabhängig von k.

waagrechte Asymptote: Für alle k ist der Zählergrad kleiner als der Nennergrad.
Daher ist die x-Achse ($y = 0$) waagrechte Asymptote für alle G_{f_k}.

KX **12 a)** Nullstellen:

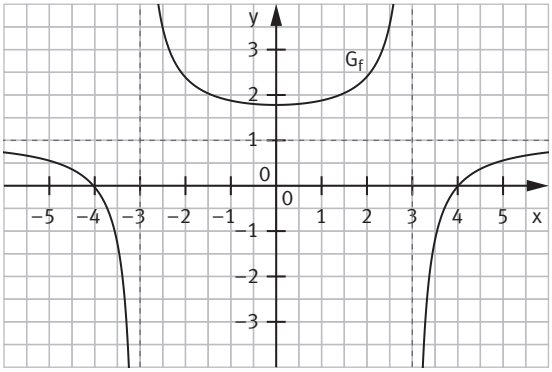
$x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x_1 = -4;\ x_2 = 4$

Polstellen:

$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = 3$

G_f ist monoton fallend für $x \in\ ]-\infty; -3[$ und $x \in\ ]-3; 0]$.

G_f ist monoton steigend für $x \in [0; 3[$ und $x \in\ ]3; +\infty[$.



b) 1 Für $c < 0$ hat die Funktion f keine Nullstelle, für $c = 0$ genau eine Nullstelle und für $c > 0$ zwei Nullstellen.

2 Für $d < 0$ hat die Funktion f keine Polstelle, für $d = 0$ genau eine Polstelle und für $d > 0$ zwei Polstellen.

A Mögliche Werte: $c = 1;\ d = -3$

B Mögliche Werte: $c = -4;\ d = 1$

C Mögliche Werte: $c = -2;\ d = -1$

c) Die Graphen G_A und G_B besitzen jeweils zwei Nullstellen und zwei Polstellen. Nach den Ergebnissen aus Teilaufgabe b) sind daher jeweils die Parameterwerte c und d positiv, es gilt also $c \cdot d > 0$.
Bei Funktion B sind die Nullstellen betragsmäßig größer als die Polstellen und daher $0 < d < c$.
Graph G_C besitzt zwei Polstellen, aber keine Nullstelle. Daher gilt $d > 0$ und $c < 0$, woraus $c \cdot d < 0$ folgt.

d) Individuelle Ergebnisse

KX **13 a)** maximale Definitionsmenge: $4(x-3) = 0 \Rightarrow x_0 = 3;\ D_f = \mathbb{R}\{3\}$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = \frac{0^2 - 5}{4 \cdot (0-3)} = \frac{5}{12};\ S_y\left(0 \middle| \frac{5}{12}\right)$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{5};\ x_2 = \sqrt{5};\ N_1(-\sqrt{5}\,|\,0);\ N_2(\sqrt{5}\,|\,0)$

Die Funktion f hat positive Funktionswerte für $x \in\ ]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$ und $x \in\ ]3; +\infty[$.

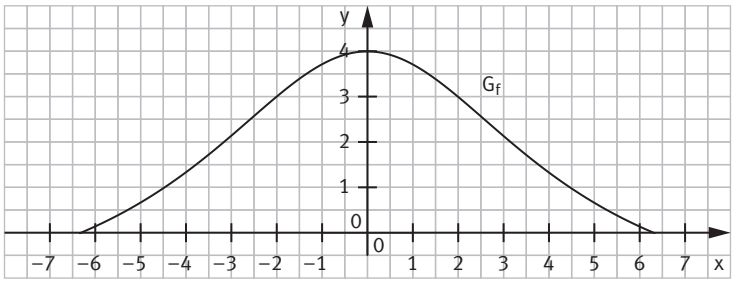
Die Funktion f hat negative Funktionswerte für $x \in\ ]-\infty; -\sqrt{5}[$ und $x \in\ ]\sqrt{5}; 3[$.

b) $\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{x-3} = \frac{x(x-3)}{4(x-3)} + \frac{3(x-3)}{4(x-3)} + \frac{4}{4(x-3)} = \frac{x^2 - 3x + 3x - 9 + 4}{4(x-3)} = \frac{x^2 - 5}{4(x-3)} = f(x)$

senkrechte Asymptote: $x = 3$ schräge Asymptote: $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{x-3} = 0{,}75 + 0{,}25x \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} = 0$ nicht lösbar;
G_f und g haben keine gemeinsamen Punkte.

KX **14 a)**



b) Für die Breite am Fuß des Walls benötigt man den Abstand der Nullstellen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{120}{x^2 + 20} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{60}{x^2 + 20} = 1 \Leftrightarrow 60 = x^2 + 20 \Leftrightarrow x^2 = 40$

$\Rightarrow x_1 = -2\sqrt{10};\ x_2 = 2\sqrt{10} \Rightarrow x_2 - x_1 = 4\sqrt{10} \approx 12{,}65$

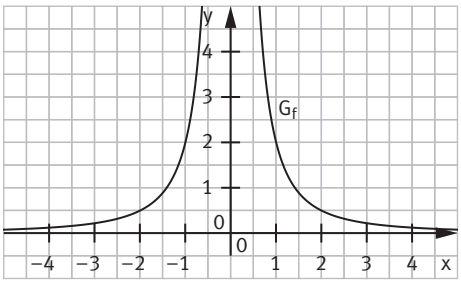
Der Wall hat an seinem Fuß eine Breite von etwa 12,65 m.

c) $f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{120}{x^2 + 20} - 2 = 3 \Leftrightarrow \frac{120}{x^2 + 20} = 5 \Leftrightarrow 120 = 5x^2 + 100 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$

Der Fahrradweg hat eine maximale Breite von 4 m.

KX **15 a)** Symmetrie: $f(-x) = 2(-x)^{-2} = \frac{2}{(-x)^2} = \frac{2}{x^2} = 2x^{-2} = f(x)$;

G_f ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.



b) Wegen der Symmetrie von G_f haben die Schnittpunkte von G_f mit p die x-Koordinate –0,5 bzw. 0,5.
Daher gilt $p = f(0{,}5) = \frac{2}{0{,}5^2} = 8$.

KX **16 a)** Möglicher Funktionsterm: $f(x) = \frac{ax + b}{x + c}$

$f(10) = 500 \Leftrightarrow \frac{10a + b}{10 + c} = 500 \Leftrightarrow 10a + b = 5000 + 500c$

$\Leftrightarrow 10a + b - 500c = 5000 \quad (1)$

$f(50) = 300 \Leftrightarrow \frac{50a + b}{50 + c} = 300 \Leftrightarrow 50a + b = 15\,000 + 300c$

$\Leftrightarrow 50a + b - 300c = 15\,000 \quad (2)$

$f(100) = 200 \Leftrightarrow \frac{100a + b}{100 + c} = 200 \Leftrightarrow 100a + b = 20\,000 + 200c$

$\Leftrightarrow 100a + b - 200c = 20\,000 \quad (3)$

$(1) - (2)$: $-40a - 200c = -10\,000$

$\Leftrightarrow 120a + 600c = 30\,000 \quad (4)$

$(1) - (3)$: $-90a - 300c = -15\,000$

$\Leftrightarrow 180a + 600c = 30\,000 \quad (5)$

$(5) - (4)$: $60a = 0 \Rightarrow a = 0$

$a = 0$ einsetzen in (4): $600c = 30\,000 \Rightarrow c = 50$

$a = 0$ und $c = 50$ einsetzen in (1): $b - 500 \cdot (50) = 5000 \Rightarrow b = 30\,000$

Also: $f(x) = \frac{30\,000}{x + 50}$

b) Individuelle Ergebnisse

c) 1 Produktionskosten pro Stück: $f(100) = \frac{-10\,000 + 80\,000}{100 + 300} = 175 \left[\frac{€}{\text{Stück}}\right]$

Gesamte Produktionskosten für 100 Stück: $175 \cdot 100 = 17\,500$ [€]

Gesamtumsatz: $100 \cdot 400 = 40\,000$ [€]

Gewinn: $40\,000 - 17\,500 = 22\,500$ [€]

Der Designer macht einen Gewinn von 22 500 €.

2 $f(x) = 150 \Leftrightarrow \frac{-100x + 80\,000}{x + 300} = 150 \Leftrightarrow -100x + 80\,000 = 150x + 45\,000$

$\Leftrightarrow 35000 = 250x \Rightarrow x = 140$

Ab einer Stückzahl von 140 liegen die Produktionskosten pro Stück unter 150 €.

KX **17 a)** Für die maximale Definitionsmenge gilt $D_{f_k} = \mathbb{R}$, da $1 + 4x^2 > 0$ unabhängig von k gilt.
Daher hat keine Funktion der Schar eine Definitionslücke und damit auch kein Graph eine senkrechte Asymptote.

b) $f_0(x) = \frac{2x-1}{1+4x^2}$

Nullstelle: $f_0(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 0{,}5$

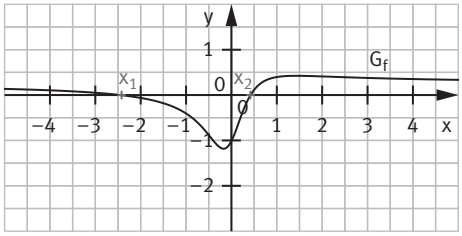
c) Ja, es gibt Werte für k, sodass f_k zwei Nullstellen besitzt:

Beispiel: $f_1(x) = \frac{x^2+2x-1}{1+4x^2}$

Nullstellen: $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow x_{1\frac{1}{2}} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$

$\Rightarrow x_1 = -1 - \sqrt{2}; x_2 = -1 + \sqrt{2}$



d) $k = 2$

e) $y = \frac{k}{4}$

Ist $k \neq 0$, so ist der Zählergrad und der Nennergrad gleich 2. Daher gilt für die waagrechte Asymptote $y = \frac{k}{4}$.

Für $k = 0$ ist der Zählergrad kleiner als der Nennergrad und damit gilt für die waagrechte Asymptote $y = 0$.

KX **18 a)** 1 maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

senkrechte Asymptoten:

$x = 0; x = 1$

waagrechte Asymptote:

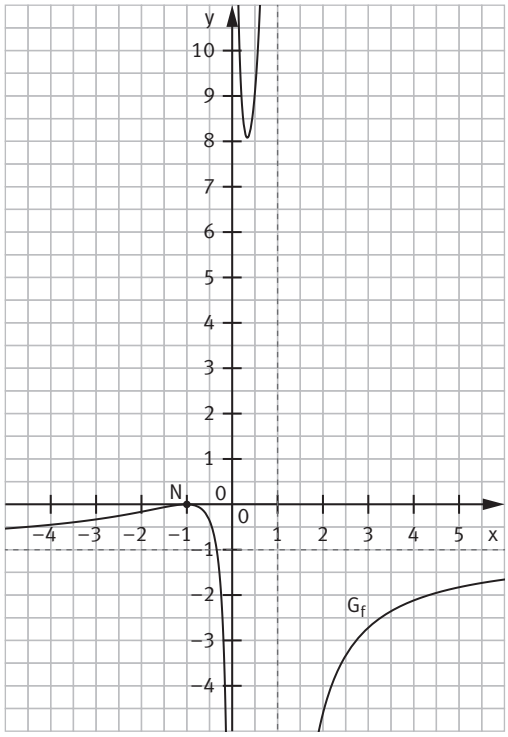
Es gilt $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x-x^2}$ und damit für die waagrechte Asymptote $y = -1$.

Es gibt keinen Schnittpunkt mit der y-Achse, da 0 nicht in der Definitionsmenge ist.

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (1+x)^2 = 0$

$\Rightarrow x_0 = -1; N(-1|0)$



2 Schnittpunkt mit der Geraden $y = p$:

$f(x) = p \Leftrightarrow \frac{(1+x)^2}{x(1-x)} = p$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = px - px^2$

$\Leftrightarrow x^2(1+p) + x(2-p) + 1 = 0$

Diese Gleichung hat genau dann genau eine Lösung, wenn die Diskriminante gleich null ist.

$D = (2-p)^2 - 4 \cdot (1+p) \cdot 1 = 4 - 4p + p^2 - 4 - 4p$
$= p^2 - 8p$

Es gilt $D = 0 \Leftrightarrow p^2 - 8p = 0 \Leftrightarrow p(p-8) = 0 \Rightarrow p_1 = 0; p_2 = 8$

$p_1 = 0$ entfällt, da dies auf die Nullstelle $x_0 = -1 \notin]0; 1[$ führt.

Gesucht x mit $f(x) = 8 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x(1-x)} = 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 8x - 8x^2$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} \in]0; 1[$

Die Funktion f hat also an der Stelle $x_1 = \frac{1}{3}$ ihren minimalen Funktionswert.

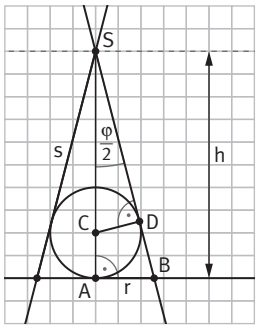
b) 1 Im Dreieck CDS gilt:

$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{h-1}$ und damit

$x = \frac{1}{h-1} \Leftrightarrow h - 1 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow h = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}$.

Im Dreieck ABS gilt:

$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{s} = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}$ und damit $x = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}$.



Auflösen nach r ergibt:

$x = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} \Leftrightarrow \sqrt{r^2+h^2} = \frac{r}{x}$

$\Rightarrow r^2 + h^2 = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow r^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) = h^2$.

Mit $h = \frac{1+x}{x}$ folgt:

$r^2 \cdot \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{(1+x)^2}{x^2} \Rightarrow r^2 = \frac{(1+x)^2}{1-x^2} = \frac{(1+x)^2}{(1+)(1-x)} = \frac{1+x}{1-x}$.

Für das Kegelvolumen gilt dann: $V = \frac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+x}{x} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(1+x)^2}{x(1-x)}$.

2 Es gilt $V(x) = \frac{\pi}{3} \cdot f(x)$. Das Volumen ist also genau dann minimal, wenn $x = \frac{1}{3}$ gilt,

d. h. $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} \approx 19{,}47° \Rightarrow \varphi \approx 38{,}94°$.

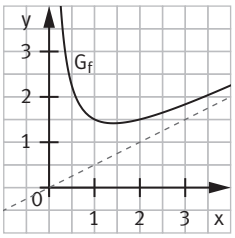
Es ist $V_{min} = V\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8\pi}{3}$ [VE].

KX **19 a)** Für große Luftdichten wird der Term $\frac{m^2}{v \cdot B \cdot \rho}$ klein, so dass der Energieverbrauch durch den wachsenden Term $v^3 \cdot A \cdot \rho$ bestimmt wird. Für kleine Luftdichten wird der Term $v^3 \cdot A \cdot \rho$ klein, so dass der Energieverbrauch durch den wachsenden Term $\frac{m^2}{v \cdot B \cdot \rho}$ bestimmt wird. Da der Energieverbrauch sowohl für große als auch für geringe Dichte der Luft sehr groß wird, muss es einen Wert für ρ geben, bei dem der Energieverbrauch minimal ist.

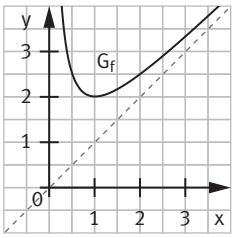
b) Mögliche Ergebnisse:

$\frac{m^2}{v \cdot B} = 1$ und Variation von $v^3 \cdot A$:

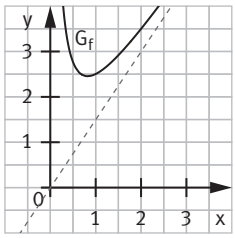
$v^3 \cdot A = 0{,}5$



$v^3 \cdot A = 1$



$v^3 \cdot A = 1{,}5$

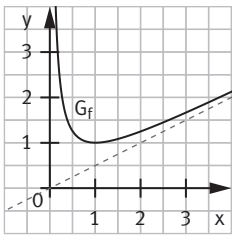


Je größer $v^3 \cdot A$ ist, desto ...

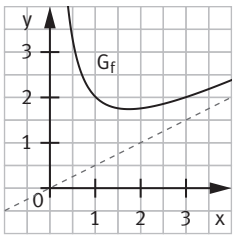
- steiler wird die schräge Asymptote.
- geringer ist die Luftdichte, für die der Energieverbrauch minimal ist.
- höher ist der minimale Energieverbrauch.

$v^3 \cdot A = 0{,}5$ und Variation von $\frac{m^2}{v \cdot B}$:

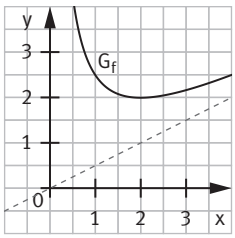
$\frac{m^2}{v \cdot B} = 0{,}5$



$\frac{m^2}{v \cdot B} = 1{,}5$



$\frac{m^2}{v \cdot B} = 2$



Je größer $\frac{m^2}{v \cdot B}$ ist, desto ...

- größer ist die Luftdichte, für die der Energieverbrauch minimal ist.
- höher ist der minimale Energieverbrauch.

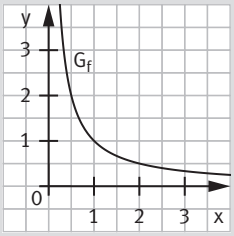
Ausblick

KX

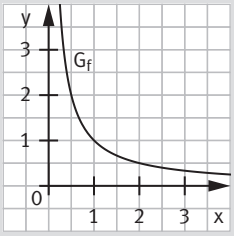
Gebrochen-rationale Funktionen in den Naturwissenschaften

■ Mögliche Ergebnisse:

- Es gilt $a = \frac{F}{m}$, die Beschleunigung a ist bei konstanter Kraft F umgekehrt proportional zur beschleunigten Masse m: $a(m) = \frac{F}{m}$.

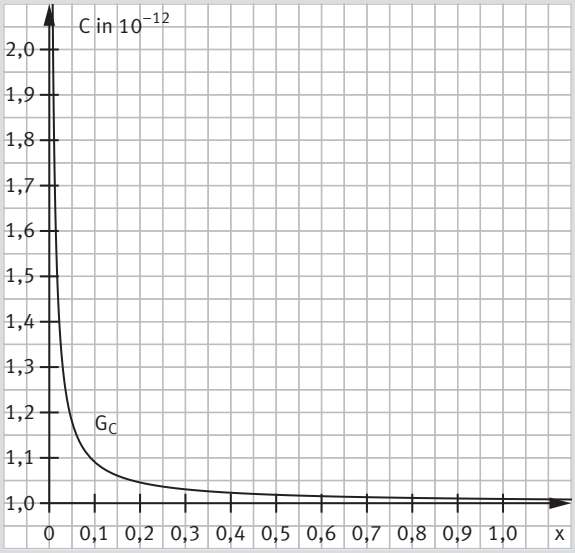


- Es gilt $v = \frac{s}{t}$, die Geschwindigkeit v ist bei konstanter Strecke s umgekehrt proportional zur Zeit t: $v(t) = \frac{s}{t}$.



■ Individuelle Ergebnisse

- Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} C(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r\left(\frac{r}{x} + 1\right)\right] = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r$.
- Mögliches Ergebnis:
  Für r = 0,9 cm = 0,009 m ergibt sich z. B. näherungsweise der abgebildete Graph.



KX **1** **a)** maximale Definitionsmenge:
$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
Nullstelle: $f(x) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

b) maximale Definitionsmenge:
$x^2 + 1 = 0$ nicht lösbar; $D_f = \mathbb{R}$
Nullstelle: $f(x) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

c) maximale Definitionsmenge:
$(x-1)(x+2) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -2;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2; 1\}$
Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$

d) maximale Definitionsmenge:
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 0{,}5$

a) maximale Definitionsmenge:
$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0$
$\Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$
Nullstellen:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2};\ x_2 = \sqrt{2}$

b) maximale Definitionsmenge:
$x = 0;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x_0 = 1$

c) maximale Definitionsmenge:
$2x^2 + 4x - 16 = 0 \Leftrightarrow 2(x+4)(x-2) = 0$
$\Rightarrow x_1 = -4;\ x_2 = 2;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-4; 2\}$
Nullstelle:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0$
$\Rightarrow x_0 = 3$

d) maximale Definitionsmenge:
$x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5$
$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{5};\ x_2 = \sqrt{5};\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$
Nullstellen:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0$
$\Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 0$

KX **2** Die Definitionslücken müssen genau die Nullstellen des Nennerpolynoms sein.

a) $(4-a)^2 = 0 \Rightarrow a = 4$

b) $3 + x^2 \neq 0$ ist für alle a erfüllt.
Daher gilt $a \in \mathbb{R}$.

a) $a \cdot 0^2 = 0$ ist für alle a erfüllt.
Daher gilt $a \in \mathbb{R}$.

a) $(-2)^2 + a = 0$ und $2^2 + a = 0$.
Damit ergibt sich $a = -4$.

b) $3 \cdot 0^2 = 0$ ist für alle a erfüllt.
Daher gilt $a \in \mathbb{R}$.

c) $(a+3)^2 = 0 \Rightarrow a = -3$

KX **3** **a)** $y = 2$ **b)** $y = \frac{1}{3}$ **c)** $y = 0$ **d)** $y = 4$

a) $y = 2$ **b)** $y = 1$ **c)** $y = \frac{5}{3}$ **d)** $y = -2$

KX **4** **links**

		Äquivalenz der Terme	schräge Asymptote
a)	3	$f_3(x) = 1 - x + \frac{1}{x} = \frac{x - x^2 + 1}{x}$	$y = 1 - x$
b)	1	$f_1(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x}$	$y = 2x$
c)	2	$f_2(x) = x + 1 + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + x + 1}{x}$	$y = x + 1$
d)	4	$f_4(x) = x + 1 - \frac{1}{x} = \frac{x^2 + x - 1}{x}$	$y = x + 1$

rechts

		Äquivalenz der Terme	schräge Asymptote
a)	4	$f_4(x) = x - \frac{1}{x-1} = \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}$	$y = x$
b)	3	$f_3(x) = 1 + x + \frac{1}{x-1} = \frac{(1+x)(x-1) + 1}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$	$y = 1 + x$
c)	1	$f_1(x) = x + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$	$y = x$
d)	2	$f_2(x) = x + \frac{1}{1-x} = \frac{x - x^2 + 1}{1 - x}$	$y = x$

KX **5** **a)** maximale Definitionsmenge:

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0$

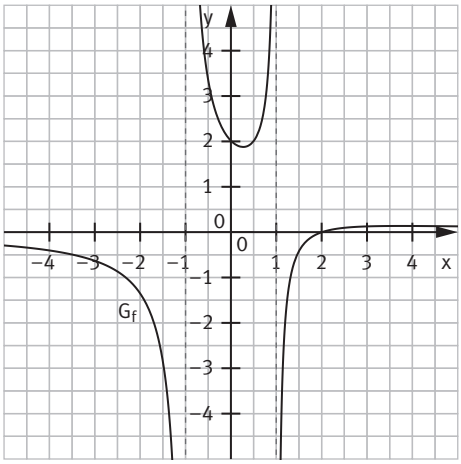
$\Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1;\ 1\}$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

senkrechte Asymptoten: $x = -1;\ x = 1$

waagrechte Asymptote: $y = 0$



b) maximale Definitionsmenge:

$4x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)(x+1) = 0$

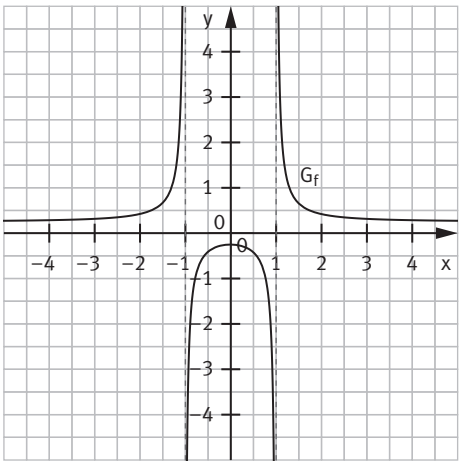
$\Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1;\ 1\}$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

senkrechte Asymptoten: $x = -1;\ x = 1$

waagrechte Asymptote: $y = \frac{1}{4}$



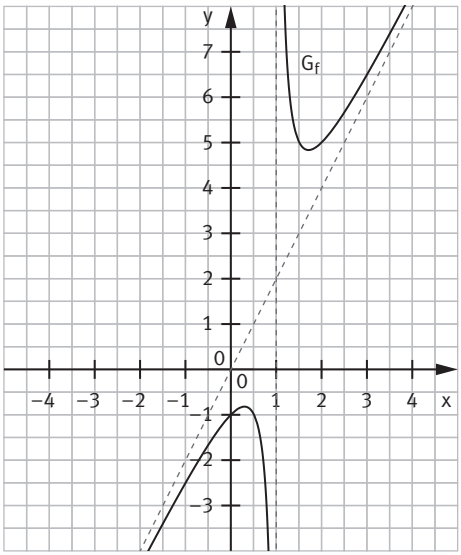
a) maximale Definitionsmenge: $x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 1;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

senkrechte Asymptote: $x = 1$

schräge Asymptote: $y = 2x$



b) maximale Definitionsmenge:

$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) = 0$

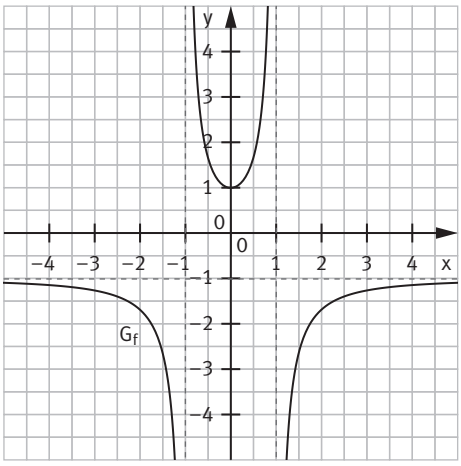
$\Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1;\ 1\}$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

senkrechte Asymptoten: $x = -1;\ x = 1$

waagrechte Asymptote: $y = -1$



c) maximale Definitionsmenge:

$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$

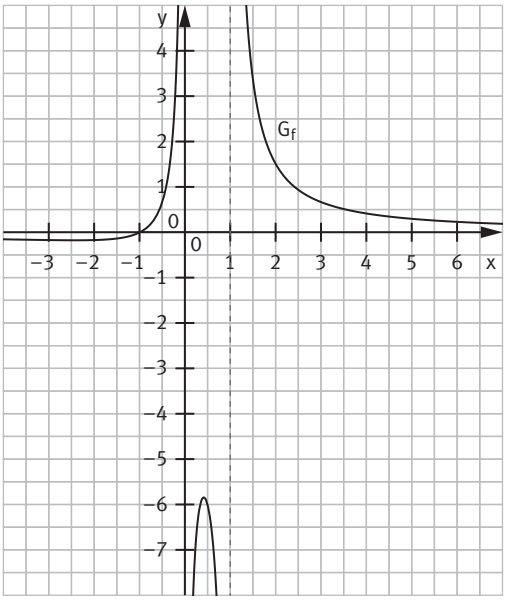
$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ D_f = \mathbb{R}\backslash\{0; 1\}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

senkrechte Asymptoten: $x = 0;\ x = 1$

waagrechte Asymptote: $y = 0$



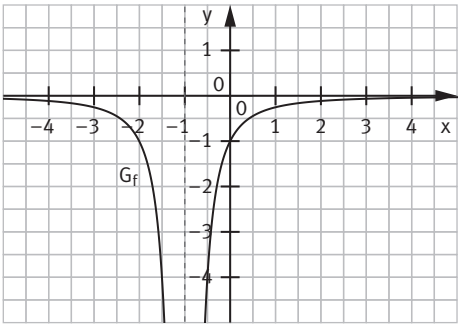
d) maximale Definitionsmenge:

$(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1;\ D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

senkrechte Asymptote: $x = -1$

waagrechte Asymptote: $y = 0$



c) maximale Definitionsmenge:

$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) = 0$

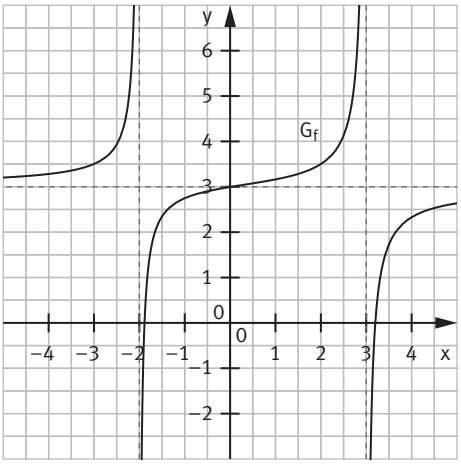
$\Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2; 3\}$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

senkrechte Asymptoten: $x = -2;\ x = 3$

waagrechte Asymptote: $y = 3$



d) maximale Definitionsmenge:

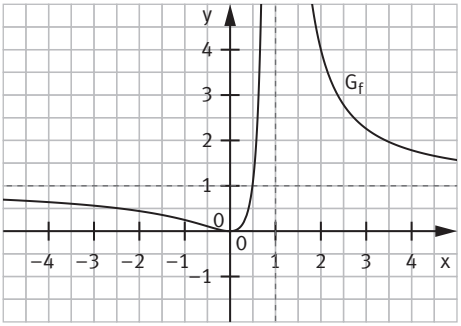
$(1-x)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 1;\ D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

senkrechte Asymptote: $x = 1$

waagrechte Asymptote: $y = 1$



e) maximale Definitionsmenge:

$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3) = 0$

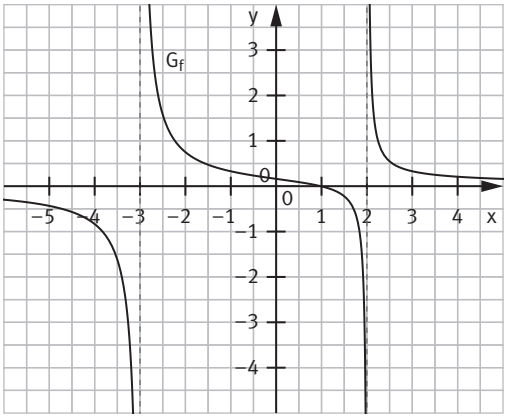
$\Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = 2;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3; 2\}$

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

senkrechte Asymptoten: $x = -3$; $x = 2$

waagrechte Asymptote: $y = 0$



f) maximale Definitionsmenge:

$x^2 + 3x + 9 = 0$

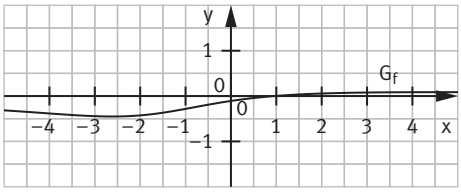
Diskriminante:

$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -27 < 0.$

Das Nennerpolynom hat keine Nullstelle.

$D_f = \mathbb{R}$. Daher hat G_f keine senkrechte Asymptote.

waagrechte Asymptote: $y = 0$



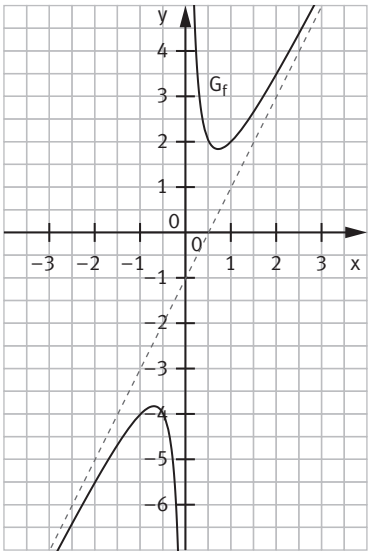
e) maximale Definitionsmenge:

$x = 0;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

senkrechte Asymptote: $x = 0$

schräge Asymptote: $y = 2x - 1$



f) maximale Definitionsmenge:

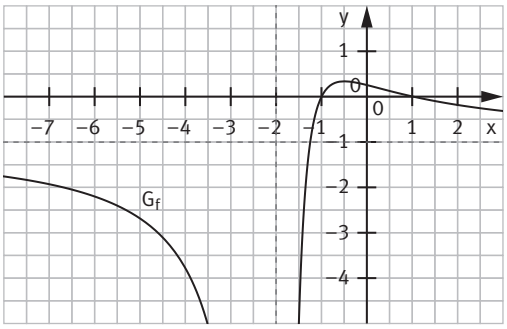
$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0$

$\Rightarrow x = -2;\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$

senkrechte Asymptote: $x = -2$

waagrechte Asymptote: $y = -1$



KX **6** Mögliche Lösungen:

a) Aus der einzigen senkrechten Asymptote h ergibt sich, dass $x = 2$ die einzige Nennernullstelle ist. Wegen der waagrechten Asymptote g: $y = 0$ muss der Zählergrad kleiner als der Nennergrad sein:

$f(x) = \frac{1}{x-2}$

b) Aus der einzigen senkrechten Asymptote g ergibt sich, dass $x = 1$ die einzige Nennernullstelle ist. Wegen der schrägen Asymptote h ergibt sich als möglicher Term:

$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}$

Mögliche Lösungen:

a) Aus den einzigen senkrechten Asymptoten g und h ergibt sich, dass $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$ die einzigen Nennernullstellen sind. Wegen der waagrechten Asymptote g: $y = 10$ muss der Zählergrad gleich dem Nennergrad sein:

$f(x) = \frac{10x^2}{(x+3)(x-2)}$

b) Da G_f keine senkrechte Asymptote besitzt, darf der Nenner keine Nullstelle haben. Wegen der schrägen Asymptote g ergibt sich ein möglicher Term:

$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x^2+1}$

c) Aus den einzigen senkrechten Asymptoten g und h ergibt sich, dass $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ die einzigen Nennernullstellen sind. Wegen der waagrechten Asymptote k: $y = 0$ muss der Zählergrad kleiner als der Nennergrad sein:
$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x^2-4}$

KX **7** **a)** $a = 1$; $b = -3$

b) Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ax+b}{x} = a$ unabhängig von $a \neq 0$, da der Zählergrad und der Nennergrad gleich sind. Damit ergibt sich $a = 2$; b kann beliebige Werte (ungleich 0) annehmen.

KX **8** Die Aussage ist wahr. Wäre die y-Achse eine senkrechte Asymptote von G_f, so wäre 0 eine Definitionslücke. Dies ist im Widerspruch zur Angabe, dass der Punkt $(0|-1)$ auf G_f liegt. Also kann die y-Achse nicht senkrechte Asymptote sein.

KX **9** Möglicher Term: $f(x) = \frac{1{,}5x}{x+3}$

KX **10** **a)** $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $D_g = \mathbb{R}$
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2x} = \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$; $f(1) = \frac{1}{2}$; $S\left(1\middle|\frac{1}{2}\right)$

b) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $D_g = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-3}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x-2}{x} = \frac{x-3}{x+2}$
$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) = x(x-3)$
$\Leftrightarrow x^2 - 4 = x^2 - 3x \Leftrightarrow 3x = 4$
$\Rightarrow x = \frac{4}{3}$; $f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow S\left(1\middle|-\frac{1}{2}\right)$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{(x+1)^2}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$;
$D_g = \mathbb{R}$
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+2x+1} = -\frac{2}{3+x^2}$
$\Leftrightarrow 3 + x^2 = -2x^2 - 4x - 2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = 0$
Diskriminante: $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$.
Die Gleichung hat keine Lösung, die Graphen haben keine Schnittpunkte.

c) Aus den einzigen senkrechten Asymptoten g und h ergibt sich, dass $x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$ die einzigen Nennernullstellen sind. Wegen der schrägen Asymptote k ergibt sich als möglicher Term:
$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)}$

a) $a = 3$; $b = 3$

b) Jeder Graph der Schar hat unabhängig von a und b die senkrechte Asymptote $x = 0$. Unabhängig von b gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$.
Daher hat jeder Graph der Schar die waagrechte Asymptote $y = a$. Also hat jeder Graph der Schar genau zwei Asymptoten.

Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel:
Der Graph der gebrochen-rationalen Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$, ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse, besitzt aber keine Polstellen.

Möglicher Term: $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2}$

a) $D_f = \mathbb{R}$; $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x^2+4} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow 2x^4 = 4x^2 + 16$
$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$
Substitution $u = x^2$: $u^2 - 2u - 8 = 0$
$\Rightarrow u_1 = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$
$u_1 = -2$ liefert keine Lösung für x.
$u_2 = 4 = x^2 \Rightarrow x_1 = -2$; $x_2 = 2$;
$g(-2) = g(2) = 1$; $S_1(-2|1)$; $S_2(2|1)$

b) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$; $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} + 3 = \frac{3x^2-1}{x^2}$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x^2(x-1) = (3x^2-1)(x-1)$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x^3 - 3x^2 = 3x^3 - x - 3x^2 + 1$
$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$
$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$
$\Rightarrow x_1 = -1$; $x_2 = \frac{1}{2}$;
$f(-1) = 1$; $S_1(-1|1)$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$; $S_2\left(\frac{1}{2}\middle|-1\right)$

c) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$; $D_g = \mathbb{R}$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2 - \frac{2x}{x-1} = \frac{5}{x^2+1}$

$\Leftrightarrow \frac{2x-2-2x}{x-1} = \frac{5}{x^2+1} \Leftrightarrow -\frac{2}{x-1} = \frac{5}{x^2+1}$

$\Leftrightarrow -2x^2 - 2 = 5x - 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 7}{4}$

$\Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = \frac{1}{2}$

$g(-3) = \frac{1}{2};\ S_1\left(-3 \middle| \frac{1}{2}\right);\ g\left(\frac{1}{2}\right) = 4;\ S_2\left(\frac{1}{2} \middle| 4\right)$

KX **11** **a)** $f_a(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 - a \Rightarrow a = 1$

b) Die senkrechten Asymptoten $x = 2$ und $x = -2$ liegen vor, wenn $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ die Nullstellen des Nenners sind. Dies ist für $a = -4$ der Fall.

a) Die Funktion f_a hat genau dann keine Nullstellen, wenn die Gleichung $x^2 - a = 0$ keine Lösung hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a < 0$ gilt.

b) Es gibt genau dann zwei senkrechte Asymptoten, wenn die Gleichung $x^2 + a = 0$ zwei Lösungen hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a < 0$ gilt.

KX **12** Symmetrie:

$f(-x) = -\frac{57(-x)^2 - 144\,000}{(-x)^2} = -\frac{57x^2 - 144\,000}{x^2} = f(x)$

G_f ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

Breite des Kühlturms an der Basis:

Nullstellen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 57x^2 - 144\,000 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{144\,000}{57}$

$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{144\,000}{57}} \approx \pm 50{,}3$

Der Kühlturm ist an der Basis etwa 100,6 m breit.

senkrechte Asymptote: $x = 0$

waagrechte Asymptote: $y = -57$

Durchmesser des Kühlturms in einer Höhe von 120 m:

$f(x) = 120 \Leftrightarrow -\frac{57x^2 - 144\,000}{x^2} = 120$

$\Leftrightarrow 57x^2 - 144\,000 = -120x^2 \Leftrightarrow 177x^2 = 144\,000$

$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{144\,000}{177}} \approx 28{,}5$

Der Kühlturm hat in einer Höhe von 120 m einen Durchmesser von etwa 57 m.

KX **13**

Funktionsterm	Abbildung	Begründung
f_1	C	Es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_1(x) = 1$ (Zählergrad gleich Nennergrad) und G_C ist der einzige Graph mit einer waagrechten Asymptote $y = 1$.
f_2	D	f_2 hat zwei Definitionslücken und G_D ist der einzige Graph mit zwei senkrechten Asymptoten.
f_3	A	f_3 hat an der Stelle $x_0 = -1$ eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel und dies ist von den verbleibenden Graphen nur bei G_A der Fall.
f_4	B	f_4 hat an der Stelle $x_0 = -1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel und dies ist nur bei Graph G_B der Fall.

KX **14** **a)** $f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x) + \frac{2}{-x} = -\frac{1}{2}x - \frac{2}{x} = -f(x)$

G_f ist punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

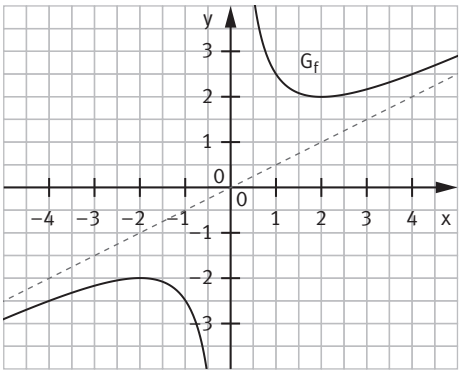
b) Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow x^2 = -4$ nicht lösbar; G_f hat keine Nullstellen.

Polstellen: $x = 0$

c) $f(x) - \frac{1}{2}x < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}x < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{x} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow 20 < x$

d) Da $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x} = 0$ gilt, unterscheiden sich die Funktionswerte von f für betragsgroße Werte von x nur beliebig wenig von denen von $g(x) = \frac{1}{2}x$. Die Gerade g mit $y = \frac{1}{2}x$ ist also die schräge Asymptote von G_f.

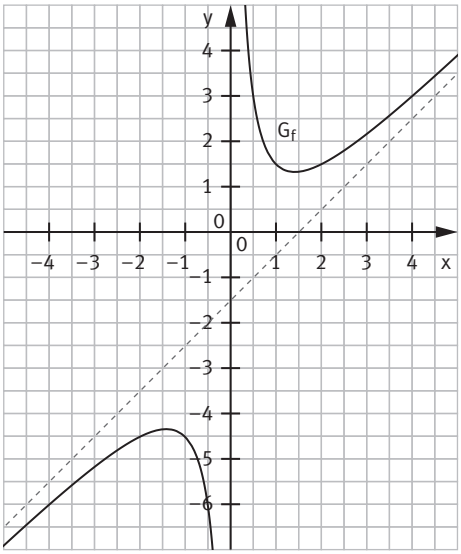
e)



KX **15** **a)** $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{2x} = x - \frac{3}{2} + \frac{2}{x}$

senkrechte Asymptote: $x = 0$

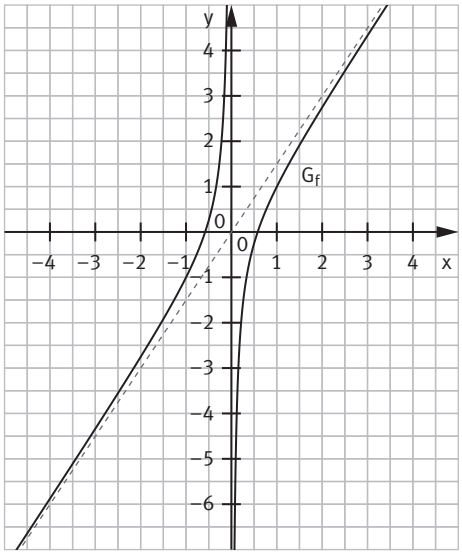
schräge Asymptote: $y = x - \frac{3}{2}$



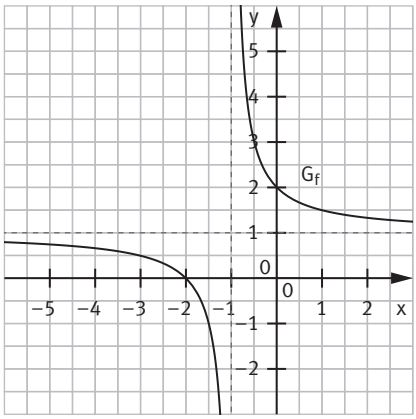
b) $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2x} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2x}$

senkrechte Asymptote: $x = 0$

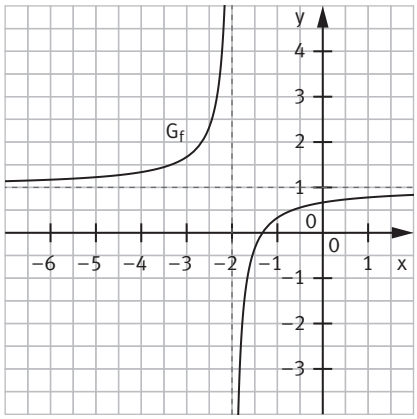
schräge Asymptote: $y = \frac{3}{2}x$



c) $f(x) = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$
senkrechte Asymptoten: $x = -1$
waagrechte Asymptote: $y = 1$



d) $f(x) = \frac{3x+4}{3x+6} = 1 - \frac{2}{3x+6}$
senkrechte Asymptoten: $x = -2$
waagrechte Asymptote: $y = 1$



KX **16 a)** 1 $f_1(x) = \frac{x+1}{x^2}$
Nullstelle: $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$
Polstelle: $x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
Verhalten für $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_1(x) = 0$ (Zählergrad ist kleiner Nennergrad)
Symmetrie: $f_1(-x) = \frac{-x+1}{(-x)^2} = \frac{-x+1}{x^2} \begin{cases} \neq f_1(x) \\ \neq -f_1(x) \end{cases}$
G_{f_1} ist nicht symmetrisch bezüglich des Koordinatensystems.
senkrechte Asymptote: $x = 0$
waagrechte Asymptote: $y = 0$

2 $f_2(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$
Nullstelle: $f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$ nicht lösbar; f_2 hat keine Nullstellen.
Polstelle: $x^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$
Verhalten für $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_2(x) = 1$ (Zählergrad ist gleich Nennergrad)
Symmetrie: $f_2(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2} = \frac{x^2+1}{x^2} = f_2(x)$
G_{f_2} ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.
senkrechte Asymptote: $x = 0$
waagrechte Asymptote: $y = 1$

3 $f_3(x) = \frac{x^2+1}{x}$
Nullstellen: $f_3(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$ nicht lösbar; f_3 hat keine Nullstellen.
Polstelle: $x_0 = 0$
Verhalten für $x \to \pm\infty$: $f_3(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = -\infty$
Symmetrie: $f_3(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -f_3(x)$
G_{f_3} ist punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.
senkrechte Asymptote: $x = 0$
schräge Asymptote: $y = x$

b) 1 G_{f_1} verläuft durch den I., II. und III. Quadranten.

2 G_{f_2} verläuft durch den I. und II.

3 G_{f_3} verläuft durch den I. und III. Quadranten.

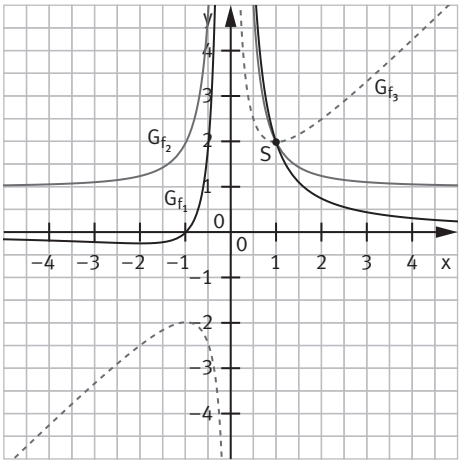
c) $f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2} \Leftrightarrow x + 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x_0 = 1$, da $0 \notin D_{f_1} = D_{f_2}$

$f_1(1) = 2$. Die Graphen G_{f_1} und G_{f_2} schneiden sich nur im Punkt $S(1|2)$.

$f_3(1) = \frac{1^2+1}{1} = 2 \Rightarrow S \in G_{f_3}$

Die drei Funktionsgraphen haben nur den Punkt $S(1|2)$ gemeinsam.

d)



KX **17 a)** maximale Definitionsmenge: $D_{f_a} = \mathbb{R}\setminus\{-a\}$

Verhalten an der Polstelle:

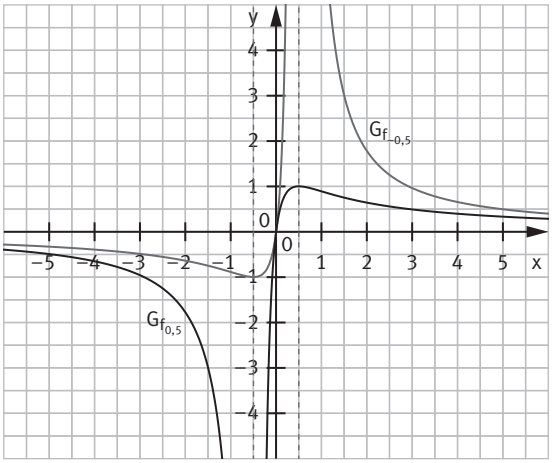
Für $a < 0$ gilt: $\lim\limits_{x \to a^-} f_a(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f_a(x) = +\infty$.

Für $a > 0$ gilt: $\lim\limits_{x \to a^-} f_a(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f_a(x) = -\infty$.

Verhalten für $x \to \pm\infty$:

Es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist.

b)



c) Symmetrie:

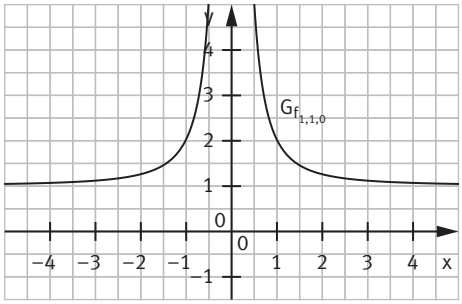
$$f_{-a}(-x) = \frac{2 \cdot (-x)}{(-x-a)^2} = \frac{-2x}{(-(x+a))^2} = -\frac{2x}{(x+a)^2} = f_a(x)$$

G_{f_a} und $G_{f_{-a}}$ liegen punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

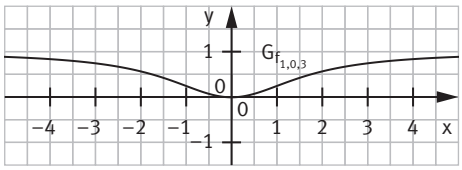
KX **18 a)** 1 $f_{a,b,c}(-x) = \frac{a(-x)^2 + b}{(-x)^2 + c} = \frac{ax^2 + b}{x^2 + c} = f_{a,b,c}(x)$

$G_{f_{a,b,c}}$ ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse für alle Werte für a, b, c ∈ ℝ.

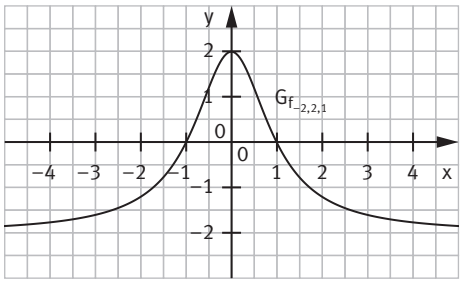
Mögliche Werte: a = 1, b = 1, c = 0



2 Keine Polstelle liegt genau dann vor, wenn die Gleichung $x^2 + c = 0$ keine Lösung besitzt.
Dies ist (unabhängig von a, b ∈ ℝ) genau dann der Fall, wenn c > 0 gilt.
Mögliche Werte: a = 1, b = 0, c = 3



3 $ax^2 + b = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -b \Rightarrow x^2 = -\frac{b}{a}$ muss zwei Lösungen besitzen $\Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow a < 0$, da b < 0
Mögliche Werte: a = –2, b = 2, c = 1



b) 1 Für alle a ∈ ℝ gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_{a,b,c}(x) = a$. Daher hat der Graph jeder Funktion $f_{a,b,c}$ die waagrechte Asymptote y = a und somit keine schräge Asymptote.

2 Es gilt $f_{a,0,c}(x) = \frac{ax^2}{x^2 + c} \leq 0$ für a < 0 und c > 0. Daher verläuft der zugehörige Graph nicht im I. und II. Quadranten.
Anm.: Im 1. und 2. Druck der 1. Auflage des Schulbuchs fehlt die Einschränkung für c.
Es muss gelten: c > 0.

3 Alle Funktionen $f_{a,0,c}: x \mapsto \frac{ax^2}{x^2 + c}$ haben für a, c ≠ 0 eine doppelte Nullstelle bei 0, berühren also die x-Achse im Ursprung.

c) $f_{a,b,0}(x) = \frac{ax^2 + b}{x^2} = a + \frac{b}{x^2}$

Der Graph von $f_{a,b,0}$ geht aus dem Graphen von g …
- durch Streckung mit dem Faktor |b| in y-Richtung,
- falls b < 0 gilt, durch Spiegelung an der x-Achse und
- durch Verschiebung um a in positive y-Richtung hervor.

d) G_h: Die senkrechten Asymptoten x = –2 und x = 2 erfordern die Nennernullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$. Damit ergibt sich c = –4.
Die waagrechte Asymptote y = 3 ergibt a = 3.
Mit den Koordinaten von A (0 | 1) ergibt sich:
$h(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{3 \cdot 0^2 + b}{0^2 - 4} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}b = 1 \Rightarrow b = -4.$
Also gilt $h(x) = \frac{3x^2 - 4}{x^2 - 4}$.

G_k: Die waagrechte Asymptote y = 1 ergibt a = 1.
Die Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ ergeben b = –4.
Mit den Koordinaten von A (0 | 2) ergibt sich:
$k(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{1 \cdot 0^2 - 4}{0^2 + c} = 2 \Leftrightarrow -\frac{4}{c} = 2 \Rightarrow c = -2$
Also gilt $k(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2}$.

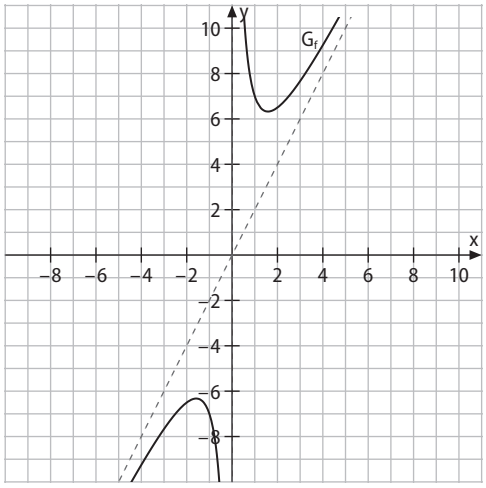
KX **1** **a)** Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
Nullstelle: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
Verhalten an der Polstelle:
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

b) Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$
Nullstelle: $f(x) = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 1$
Verhalten an der Polstelle:
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$

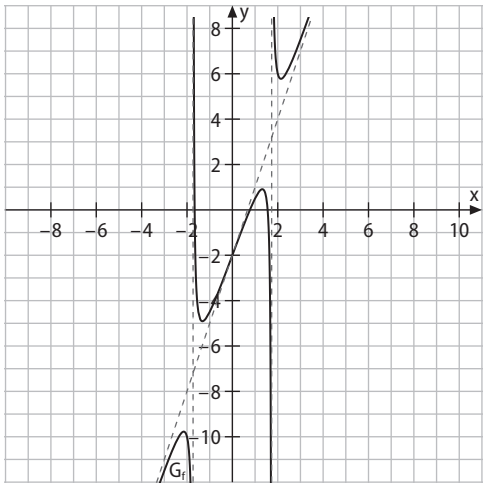
c) Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$
Nullstelle: $f(x) = 0$
$\Rightarrow 8x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

d) $f(x) = \frac{(x+2)(x-5)}{(x+1)^2}$
Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$
Nullstelle: $f(x) = 0 \Rightarrow (x+2)(x-5) = 0$
$\Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 5$
Verhalten an der Polstelle:
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$

KX **2** **a)** $f(x) = 2x + \frac{5}{x};\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2x + \frac{5}{x}\right) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x + \frac{5}{x}\right) = +\infty$
schräge Asymptote: $y = 2x$
senkrechte Asymptote: $x = 0$



b) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
schräge Asymptote: $y = 3x - 2$
senkrechte Asymptoten: $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$

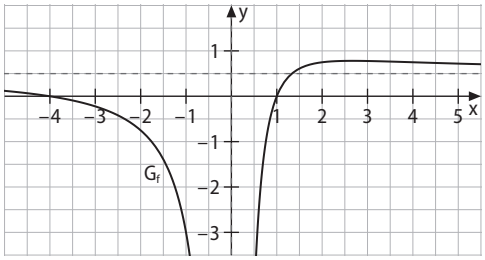


c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

waagrechte Asymptote: $y = \frac{1}{2}$

senkrechte Asymptote: $x = 0$

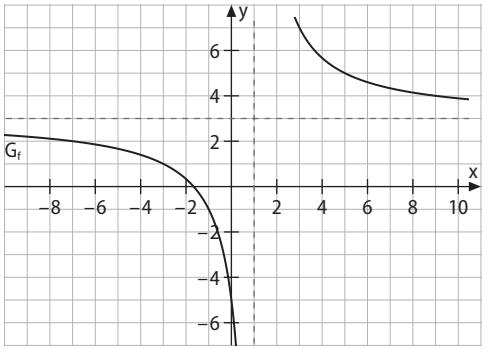


d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

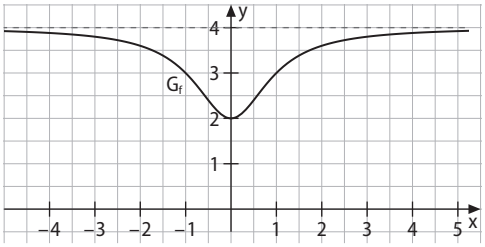
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 3$

waagrechte Asymptote: $y = 3$

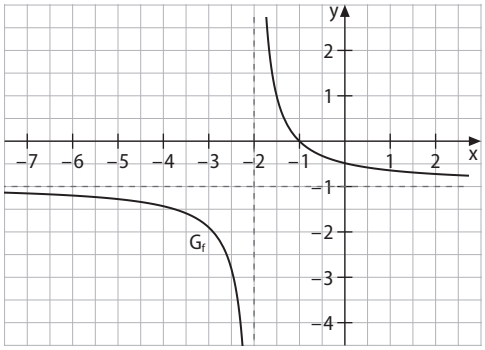
senkrechte Asymptote: $x = 1$



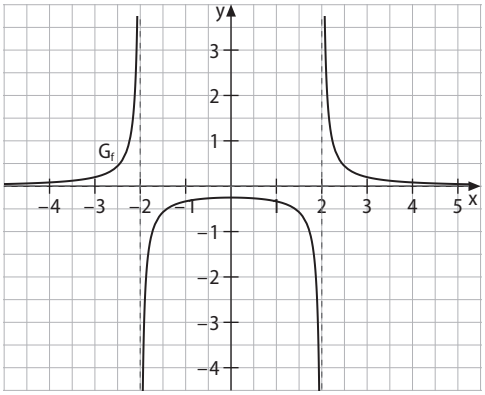
KX **3** **a)** Beispiel: $f(x) = \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1}$



b) Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x + 2} - 1$



c) Beispiel: $f(x) = \frac{1}{(x - 2)(x + 2)}$



KX **4** **a)** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

$\left|\frac{x}{x-4} - 1\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|\frac{4}{x-4}\right| < \frac{1}{100}$ (A)

1 $\frac{4}{x-4} > 0 \Rightarrow x > 4$

Die Ungleichung (A) ist dann äquivalent zu

$\frac{4}{x-4} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 400 < x - 4 \Rightarrow x > 404$

2 $\frac{4}{x-4} < 0 \Rightarrow x < 4$

Die Ungleichung (A) ist dann äquivalent zu

$-\frac{4}{x-4} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow -400 > x - 4 \Rightarrow x < -396$

Für $x < -396$ oder $x > 404$ unterscheidet sich f(x) um weniger als $\frac{1}{100}$ von 1.

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

$\left|\frac{x+5}{x-1} - 1\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|\frac{6}{x-1}\right| < \frac{1}{100}$ (A)

1 $\frac{6}{x-1} > 0 \Rightarrow x > 1$

Die Ungleichung (A) ist dann äquivalent zu

$\frac{6}{x-1} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 600 < x - 1 \Rightarrow x > 601$

2 $\frac{6}{x-1} < 0 \Rightarrow x < 1$

Die Ungleichung (A) ist dann äquivalent zu

$-\frac{6}{x-1} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow -600 > x - 1 \Rightarrow x < -599$

Für $x < -599$ oder $x > 601$ unterscheidet sich f(x) um weniger als $\frac{1}{100}$ von 1.

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$

$\left|2 - \frac{2x^2}{x^2+1}\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|\frac{2}{x^2+1}\right| < \frac{1}{100}$ (A)

1 $\frac{2}{x^2+1} > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

Die Ungleichung (A) ist dann äquivalent zu

$\frac{2}{x^2+1} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 200 < x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 > 199 \Rightarrow x < -\sqrt{199}$ oder $x > \sqrt{199}$

2 $\frac{2}{x^2+1} < 0$ besitzt keine Lösung

Für $x < -\sqrt{199}$ oder $x > \sqrt{199}$ unterscheidet sich f(x) um weniger als $\frac{1}{100}$ von 2.

d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

$\left|\frac{x^2+2}{x^2-1} - 1\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|\frac{3}{x^2-1}\right| < \frac{1}{100}$ (A)

1 $\frac{3}{x^2-1} > 0 \Rightarrow |x| > 1$

Die Ungleichung (A) ist dann äquivalent zu

$\frac{3}{x^2-1} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 300 < x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 > 301 \Rightarrow x < -\sqrt{301}$ oder $x > \sqrt{301}$

2 $\frac{3}{x^2-1} < 0 \Rightarrow |x| < 1$

Die Ungleichung (A) ist dann äquivalent zu

$-\frac{3}{x^2-1} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow -300 > x^2 - 1 \Rightarrow x^2 < -299$ besitzt keine Lösung

Für $x < -\sqrt{301}$ oder $x > \sqrt{301}$ unterscheidet sich f(x) um weniger als $\frac{1}{100}$ von 1.

KX **5** **a)** $f(-x) = \frac{60(-x)^2 - 1274}{(-x)^2} = \frac{60x^2 - 1274}{x^2} = f(x)$

Somit ist der Graph G_f achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

b) Durchmesser am unteren Rand: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^2 = 1274 \Leftrightarrow x^2 = \frac{637}{30} \Rightarrow x = \pm\frac{7}{30}\sqrt{390}$;

somit beträgt der Durchmesser am unteren Rand etwa $\left(2 \cdot \frac{7}{30}\sqrt{390}\,\text{m} \approx\right) 9{,}22\,\text{m}$.

Durchmesser am oberen Rand: Aufgrund der Definitionsmenge $D_f = [-11; 11]$ und des Verlaufs des Graphen beträgt der größtmögliche Durchmesser an der Wasseroberfläche $(2 \cdot 11\,\text{m} =)\ 22\,\text{m}$.

KX **6** **a)** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{6x-3}{x-4} = x - 2 \Leftrightarrow 6x - 3 = (x-2)(x-4) \Leftrightarrow 6x - 3 = x^2 - 6x + 8$

$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 11 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-44}}{2} = \frac{12 \pm 10}{2} \Rightarrow x_1 = 11; x_2 = 1$

$g(11) = 11 - 2 = 9 \Rightarrow S_1(11|9)$

$g(1) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow S_2(1|-1)$

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 1 - \frac{1}{x-2} = 4 \Leftrightarrow 2x - 5 = \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow (2x-5)(x-2) = 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 9 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{4} = \frac{9 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = 3; x_2 = 1{,}5$

$g(3) = 4 \Rightarrow S_1(3|4)$

$g(1{,}5) = 4 \Rightarrow S_2(1{,}5|4)$

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{x+1} = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x = (2x-4)(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 2x = 2x^2 - 2x - 4$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 2$

$g(-2) = 2 \cdot (-2) - 4 = -8 \Rightarrow S_1(-2|-8)$

$g(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0 \Rightarrow S_2(2|0)$

KX **7** **a)** A und C gehören zu 1 und 2, da beide Funktionen die senkrechten Asymptoten $x = -3$ und $x = 3$ besitzen. 1 gehört zu C, da f_1 die waagrechte Asymptote $y = 1$ besitzt, während f_2 die waagrechte Asymptote $y = 0$ besitzt.

B gehört zu f_3, da dieser die waagrechte Asymptote $y = 1$ besitzt, wohingegen f_4 die waagrechte Asymptote $y = -1$ besitzt.

Graph	Funktionsterm
A	2
B	3
C	1
D	4

b) A Der Graph ist monoton fallend in den Intervallen $]-\infty; -3]$, $[-3; 3]$ und $[3; +\infty[$.

B Der Graph ist monoton fallend in den Intervallen $]-\infty; 3]$ und $[3; +\infty[$.

C Der Graph ist monoton steigend in den Intervallen $]-\infty; -3]$ und $[-3; 0]$ sowie monoton fallend in den Intervallen $[0; 3]$ und $[3; +\infty[$.

D Der Graph ist monoton steigend in den Intervallen $]-\infty; 3]$ und $[3; +\infty[$.

Aufgaben für Lernpartner

KX **A** Die Aussage ist richtig, denn $f(1) = 1 + \frac{1+4}{1^2-4} = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3} < 3$.

KX **B** Die Aussage ist nur für $b \neq 0$ richtig, denn $x^2 + b^2 > 0$ für alle Werte von $x \in \mathbb{R}$.
Das Nennerpolynom besitzt somit keine Nullstelle und die Funktion somit keine Definitionslücke.
Für $b = 0$ gilt $D_{f_{a,0}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

KX **C** Die Aussage ist richtig, da die Stelle x_1 nicht in der Definitionsmenge enthalten ist.

KX **D** Die Aussage ist falsch, z. B. besitzt die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ keine Definitionslücke, da das Nennerpolynom $v(x) = x^2 + 1$ keine Nullstelle besitzt.

KX **E** Die Aussage ist falsch, z. B. besitzt die Funktion f mit $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$ zwei Nullstellen:
$x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

KX **F** Die Aussage ist falsch, z. B. besitzt die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ die waagrechte Asymptote $y = 0$.
Eine gebrochen-rationale Funktion mit $D_f = \mathbb{R}$ besitzt lediglich keine senkrechte Asymptote.

KX **G** Die Aussage ist falsch, die Funktion besitzt die waagrechte Asymptote $y = 2$.

KX **H** Die Aussage ist falsch, z. B. besitzt die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x-3}$ keine Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems.

KX **I** Die Aussage ist richtig. Die einzige Funktion, deren Graph beide Symmetrien bezüglich des Koordinatensystems besitzt, hat den Term $f(x) = 0$ und ist damit nicht gebrochen-rational.

KX **J** Die Aussage ist falsch, z. B. ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{3x}{2x}$ achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

KX **K** Die Aussage ist falsch, z. B. ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ monoton fallend in den Intervallen $]-\infty; 0]$ und $[0; +\infty[$.

KX **L** Die Aussage ist falsch, denn z. B. gilt $f_1(0) = 1$.

KX **M** Die Aussage ist falsch, denn z. B. schneiden sich die Graphen der Funktionen f:
$x \mapsto \frac{1}{x}$ und g: $x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ mit $D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ im Schnittpunkt $S(1|1)$.

KX **N** Die Aussage ist falsch, da für $x_0 = 0$ eine doppelte Nullstelle des Nennerpolynoms vorliegt und an der Stelle $x_0 = 0$ damit eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel vorliegt.

KX **O** Die Aussage ist falsch, denn die Funktion besitzt die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$.

KX **1** **a)** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -1$, da der Grad des Zähler- und des Nennerpolynoms 1 ist.
waagrechte Asymptote: $y = -1$
$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$
senkrechte Asymptote: $x = -1$

b) 1 $g: x \mapsto \frac{1-x}{x^2+1}$

2 $h: x \mapsto \frac{1-x}{(x+1)^2}$

c) $f(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1 \Rightarrow T(0|1)$

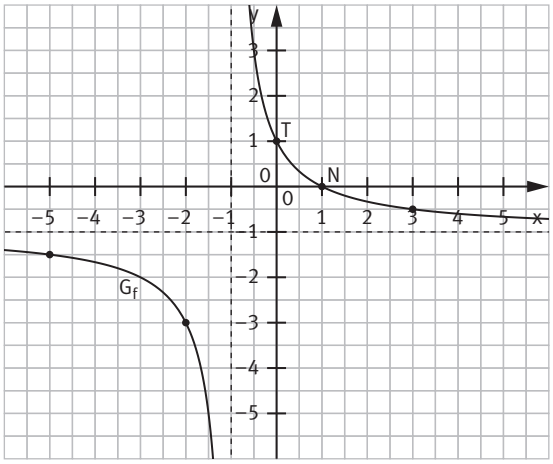
$f(x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$; $N(1|0)$

$f(3) = \frac{1-3}{1+3} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$f(-2) = \frac{1-(-2)}{1+(-2)} = \frac{3}{-1} = -3$

$f(-5) = \frac{1-(-5)}{1+(-5)} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$

d)



Der Graph ist monoton fallend in den Intervallen $]-\infty; -1[$ und $]-1; +\infty[$.

e) Das rechtwinklige Dreieck mit den Eckpunkten $O(0|0)$, $N(1|0)$ und $T(0|1)$ besitzt den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$ [FE]. Der Graph G_f verläuft im Intervall $]0; 1[$ unterhalb der Geraden TN: $y = -x + 1$. Somit schließt der Graph mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein, die kleiner als 0,5 FE ist.

f) 1 $D_{g_a} = \mathbb{R} \setminus \{-a\}$

2 $a = 1$

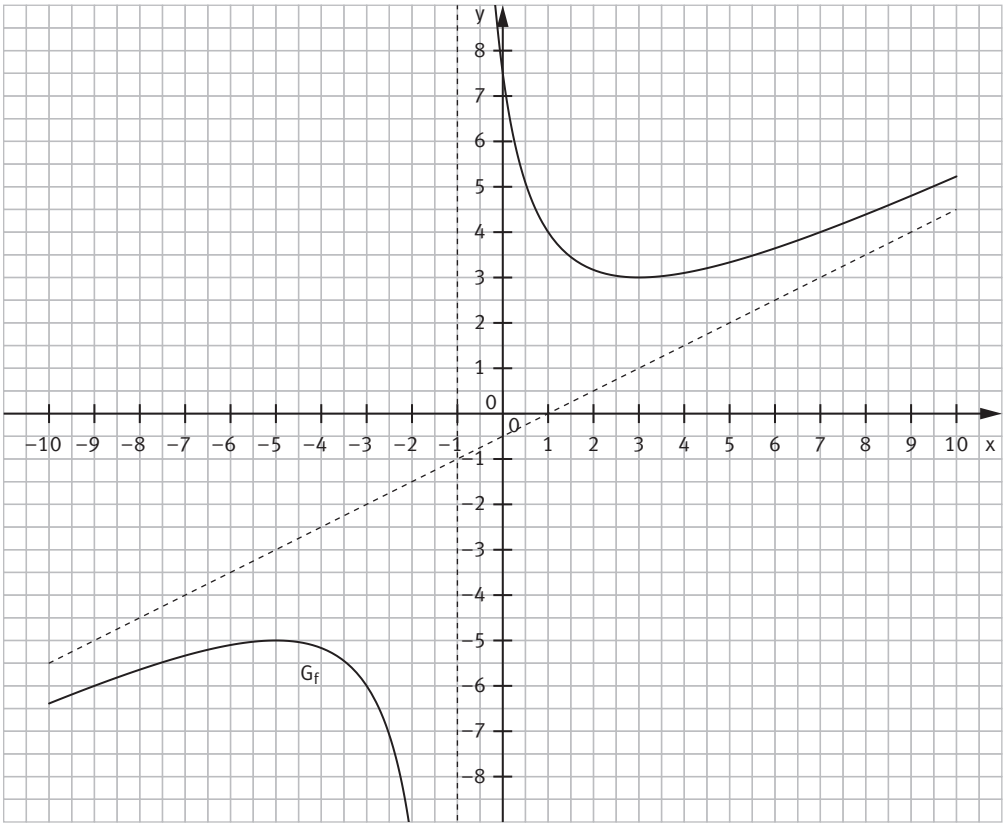
3 Da der Nenner abhängig vom Wert des Parameters a ist, gilt dies auch für alle Funktionswerte mit Ausnahme der Nullstelle(n) der Funktion:
$g_a(x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$
Somit ist der Punkt $N(1|0)$ der einzige gemeinsame Punkt der Graphen der Schar.

KX **2** **a)** schräge Asymptote: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

senkrechte Asymptote: $x = -1$

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{8}{x+1} = 0 \Leftrightarrow 8 = 0$ Widerspruch

Die Gleichung besitzt keine Lösung. Somit schneidet G_f die schräge Asymptote nicht.



b) $g(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2} + \frac{8}{(x-1)+1} + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{8}{x} + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{8}{x}$

$g(-x) = \frac{1}{2}(-x) + \frac{8}{-x} = -\left(\frac{1}{2}x + \frac{8}{x}\right) = -g(x)$

Da $g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in D_g$ gilt, ist G_g punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Aus der Symmetrie des Graphen G_g folgt, dass der Graph G_f punktsymmetrisch bezüglich des Schnittpunkts $P(-1|-1)$ seiner Asymptoten ist.

c) 1 $f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} + \frac{8}{0+1} = 7{,}5$

$f(15) = \frac{1}{2} \cdot 15 - \frac{1}{2} + \frac{8}{15+1} = 7{,}5$

Im leeren und im vollständig gefüllten Zustand besitzt die Dose den gleichen Schwerpunkt, der 7,5 cm über dem Boden der Dose liegt, d. h. er liegt in halber Höhe der Dose.

2 Die Höhe des Schwerpunkts fällt im Intervall]0; 3[. Für eine Füllhöhe von 3 cm nimmt der Schwerpunkt die tiefste Stelle in Höhe von 3 cm an. Im Intervall]3; 15[steigt die Höhe des Schwerpunkts bis zu seinem Ausgangspunkt in Höhe von 7,5 cm.

3 Graphisch kann man ungefähr ablesen, dass der Schwerpunkt im Intervall [0,5; 9,5] höchstens 5 cm hoch liegt.

Rechnerisch:

$f(x) = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} = 5 \Leftrightarrow \frac{8}{x+1} = 5{,}5 - \frac{1}{2}x \Leftrightarrow 16 = (11-x)(x+1) \Leftrightarrow 16 = 11x + 11 - x^2 - x$

$\Leftrightarrow 0 = -x^2 + 10x - 5 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100-20}}{-2} = 5 \pm 2\sqrt{5}$

Im Intervall $\left[5 - 2\sqrt{5};\ 5 + 2\sqrt{5}\right]$ liegt der Schwerpunkt höchstens 5 cm hoch.

KX **3** **a)** $h(x) = \frac{12x + 1600}{5x + 2} = \frac{5(2{,}4x + 320)}{5(x + 0{,}4)} = \frac{2{,}4x + 320}{x + 0{,}4} = \frac{2{,}4(x + 0{,}4) - 2{,}4 \cdot 0{,}4 + 320}{x + 0{,}4} = 2{,}4 + \frac{319{,}04}{x + 0{,}4}$

Mit steigender Stückzahl wird der Wert des Terms $\frac{319{,}04}{x + 0{,}4}$ immer kleiner. Somit nehmen die Herstellungskosten je Heft mit zunehmender Stückzahl ab und nähern sich dem Wert 2,40 € pro Stück an.

b) $h(200) \approx 3{,}99$ [€]

$h(1000) \approx 2{,}72$ [€]

$h(3000) \approx 2{,}51$ [€]

Mit größer werdenden Stückzahlen sinken die Herstellungskosten nur noch gering, bei kleineren Stückzahlen stärker.

c) $h(2000) \approx 2{,}56$ €

Für jedes verkaufte Hausaufgabenheft wird ein Gewinn von 0,44 € erzielt. Durch den Auftrag des Elternbeirats werden 66 € Gewinn erzielt.

d) 1 Der Einkaufspreis beträgt 5000 · 2,65 € = 13 250 €.

verkaufter Anteil	verkaufte Stückzahl	Einnahme	Gewinn / Verlust
60 %	3000	10 500 €	–2750 €
75 %	3750	13 125 €	–125 €
90 %	4500	15 750 €	+2500 €

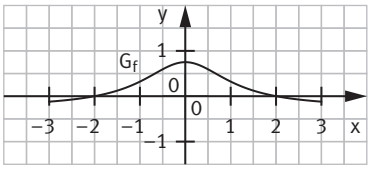
2 $r \cdot 5000 \cdot 3{,}50 = 13\,250 \Leftrightarrow 17\,500r = 13\,250 \Rightarrow r \approx 75{,}7\,\%$

KX **4** **a)** $f(-x) = \frac{4}{3 \cdot (-x)^2 + 4} - \frac{1}{4} = \frac{4}{3x^2 + 4} - \frac{1}{4} = f(x)$

Da $f(-x) = f(x)$ gilt, ist G_f achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

b) $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{3x^2 + 4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 16 = 3x^2 + 4 \Leftrightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\frac{1}{4}$ waagrechte Asymptote: $y = -\frac{1}{4}$



c) 1 Die Breite der Gaube wird bestimmt durch den Abstand der Nullstellen und beträgt 4 m. Die Höhe der Gaube wird bestimmt durch das Maximum an der Stelle x = 0 und beträgt f(0) = 0,75 [m].

Höhe : Breite $= \frac{0{,}75}{4} = \frac{3}{16} = 1 : 5\frac{1}{3}$

Somit liegt das Verhältnis im geforderten Bereich.

2 Ansatz über Nullstellenform: Wegen der Symmetrie der Parabel bezüglich der y-Achse und der Breite von 2 m schneidet die Parabel die x-Achse an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

$y = a \cdot (x^2 - 1)$

Höhe der Parabel: 50 cm = 0,5 m

$0{,}5 = a \cdot (0^2 - 1) \Rightarrow a = -0{,}5$

Parabelgleichung: P: $y = -0{,}5 \cdot (x^2 - 1)$

d) 1 $a = 3$

2 Unabhängig von der Wahl des Parameters a beträgt die Höhe der Gaube aufgrund der Symmetrie bezüglich der y-Achse 0,75 m.

$f_a(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{ax^2 + 4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 16 = ax^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{12}{a} \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2\sqrt{\frac{3}{a}}$

Die Nullstellen haben den Abstand $2 \cdot 2\sqrt{\frac{3}{a}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{3}{a}}$.

Höhe : Breite $= \frac{0{,}75}{4 \cdot \sqrt{\frac{3}{a}}} = \frac{3\sqrt{a}}{16\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3a}}{16}$

Es soll $\frac{1}{6} < \frac{\sqrt{3a}}{16} < \frac{1}{5}$ gelten: $\frac{16}{6} < \sqrt{3a} < \frac{16}{5} \Leftrightarrow \frac{64}{9} < 3a < \frac{256}{25} \Leftrightarrow \frac{64}{27} < a < \frac{256}{75}$

Das Verhältnis zwischen Höhe und Breite ist für alle Werte $a \in \left\{\frac{64}{27}; \frac{256}{75}\right[$ eingehalten.

((Vakat-Seite))