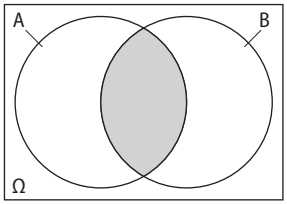
KX **1** **a)** $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$
sicheres Ereignis z. B. A: „Die Augensumme ist kleiner oder gleich 12.“
unmögliches Ereignis z. B. B: „Die Augensumme ist 1.“

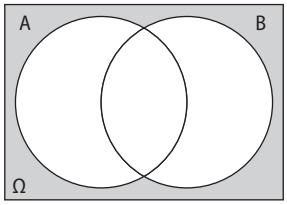
b) $E = \{3; 5; 7; 9; 11\}$
$\overline{E}$: „Die Augensumme ist gerade.“

c) z. B. $C = \{2; 3; 4; 5\}$ und $D = \{6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$
C: „Die Augensumme ist kleiner als 6.“
D: „Die Augensumme ist größer als 5.“

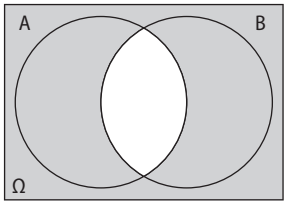
KX **2** **a)** $A \cap B$



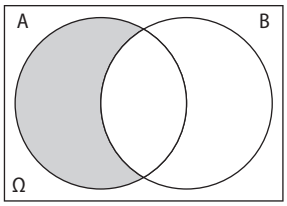
b) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$



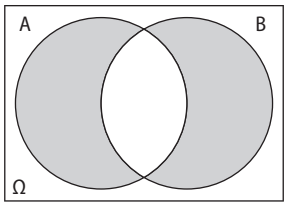
c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



d) $A \cap \overline{B}$

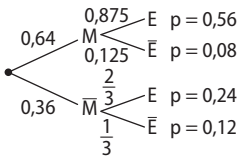


e) $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$



KX **3** **a)**

	M	$\overline{M}$	gesamt
E	0,56	0,24	0,8
$\overline{E}$	0,08	0,12	0,2
gesamt	0,64	0,36	1



b) 1 $P(A) = P(E \cap \overline{M}) = 0{,}24$

2 $P(B) = P(\overline{E} \cap \overline{M}) = 0{,}12$

3 $P(C) = P(E \cup M) = 1 - P(\overline{E} \cap \overline{M}) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$

4 $P(D) = P((E \cap \overline{M}) \cup (\overline{E} \cap M)) = P(E \cap \overline{M}) + P(\overline{E} \cap M) = 0{,}24 + 0{,}08 = 0{,}32$

KX **4** **a)** 1 P („drei gleichfarbige Kugeln“) $= \left(\frac{6}{10}\right)^3 + \left(\frac{3}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 = 0{,}244 = 24{,}4\,\%$

2 P („von jeder Farbe eine Kugel“) $= 3! \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}108 = 10{,}8\,\%$

3 P („keine gelbe Kugel“) $= \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 0{,}729 = 72{,}9\,\%$

4 P („zwei verschiedene Farben“)
= 1 – [P („drei gleichfarbige Kugeln“) + P („drei verschiedenfarbige Kugeln“)]
$= 1 - (0{,}244 + 0{,}108) = 0{,}648 = 64{,}8\,\%$

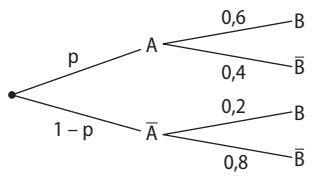
b) 1 P („drei gleichfarbige Kugeln“) $= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = 0{,}175 = 17{,}5\,\%$

2 P („von jeder Farbe eine Kugel“) $= 6 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{8} = 0{,}15 = 15\,\%$

3 P („keine gelbe Kugel“) $= \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} = 0{,}7 = 70\,\%$

4 P („zwei verschiedene Farben“)
= 1 – [P („drei gleichfarbige Kugeln“) + P („drei verschiedenfarbige Kugeln“)]
$= 1 - (0{,}175 + 0{,}15) = 0{,}675 = 67{,}5\,\%$

KX **5**



$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

$\Leftrightarrow\ 0{,}5 = 0{,}6p + (1 - p) \cdot 0{,}2$

$\Leftrightarrow\ 0{,}5 = 0{,}6p + 0{,}2 - 0{,}2p \ \Leftrightarrow\ 0{,}3 = 0{,}4p$

$\Rightarrow\ p = 0{,}75$

Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit

3

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schülerinnen und Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülerinnen und Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft in ihrem Leben vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

KX ■ Für eine Person mit schwarzer Hautfarbe beträgt die Wahrscheinlichkeit, Opfer von tödlicher Polizeigewalt zu werden, $\frac{235}{44\,000\,000} \approx 0{,}000534\,\%$.
Für eine Person mit weißer Hautfarbe beträgt die Wahrscheinlichkeit, Opfer von tödlicher Polizeigewalt zu werden, $\frac{370}{200\,000\,000} \approx 0{,}000185\,\%$.
Es gilt $0{,}000185\,\% \cdot 3 = 0{,}000555\,\% \approx 0{,}000534\,\%$.

KX ■ Individuelle Lösungen; z. B. Vorurteile, historische Konflikte, Zugehörigkeitsgefühle.

Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Lernende und Lehrkräfte. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Lernende und Lehrkräfte auf das Kommende einstellen. Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Kap. 3.1

Diagnostischer Test

KX ■ Individuelle Lösungen; z. B. mutmaßlich ist 10 % der beste Schätzwert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, da 1 % der Menschen positiv getestet ist, jedoch nur 0,1 % wirklich krank sind.
D. h. es gilt $1\,\% \cdot \frac{1}{10} = 0{,}1\,\%$.

KX ■ Die Abbildung zeigt eine Stichprobe dieser Studie. Jeder Kreis symbolisiert den Test an einem der 3000 Probanden. Ist der Kreis schwarz, so hat die Person ein negatives Testergebnis erhalten. Alle farbigen Kreise symbolisieren positive Testergebnisse. Dabei wird unterschieden, ob der Test eine tatsächlich erkrankte Person richtig diagnostiziert hat (roter Kreis in der Abbildung) oder ob der Test falsch positiv war, was durch einen gelben Kreis symbolisiert wird.

KX ■ In der Abbildung:
$3000 \cdot 0{,}001 = 3$ (erkrankte Personen, rote Kreise),
$3000 \cdot 0{,}01 = 30$ (Personen mit falsch positivem Test, gelbe Kreise)
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit positivem Testergebnis tatsächlich krank ist, beträgt $p_{gesucht} = \frac{3}{33} = \frac{1}{11} \approx 9{,}1\,\%$

KX ■ Individuelle Lösungen; z. B. folglich ist 10 % ein geeigneter Schätzwert.
- Individuelle Argumente für mögliche Ursachen; z. B.:
- Die Ungenauigkeit medizinischer Studien könnte eine Ursache sein, da mithilfe einer Stichprobe von 3000 Personen keine genaue Angabe über die Testgenauigkeit getroffen werden kann.
- Die Ergebnisse dieser Studie könnten, je nachdem welche 3000 Personen getestet werden, variieren, wodurch die Wahrscheinlichkeit abweichen kann.
- Auch werden in dieser Studie gezielt Menschen getestet, bei denen ein Test recht wahrscheinlich positiv ausfallen könnte. Würden alle 3000 Tests negativ ausfallen, würde das Ziel der Studie, die Testgenauigkeit zur Krankheitserkennung zu ermitteln, verfehlt werden.
- Es lässt sich also sagen, dass bereits im Vorfeld darauf geachtet wurde, dass Menschen mit Verdacht auf diese Krankheit gezielt ausgewählt wurden. Somit müssen die Wahrscheinlichkeiten der Studie höher liegen als in Realität vorhanden.

KX ■ Individuelle Lösungen, z. B.:
Annahme 1: 0,2 % der Bevölkerung sind erkrankt. Die Testgenauigkeit bleibt mit 1 % gleich.
$3000 \cdot 0{,}002 = 6$; $p_{gesucht} = \frac{6}{36} \approx 16{,}7\,\%$
Ergebnis: „Je häufiger die Krankheit auftritt, desto wahrscheinlicher ist es, nach einem positiven Test tatsächlich erkrankt zu sein.“
Annahme 2: 0,5 % aller Personen sind positiv getestet und gesund.
$3000 \cdot 0{,}005 = 15$; $p_{gesucht} = \frac{3}{18} \approx 16{,}7\,\%$
Ergebnis: „Je zuverlässiger der Test ist, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit, dass man nach einem positiven Test tatsächlich an der Krankheit erkrankt ist.“

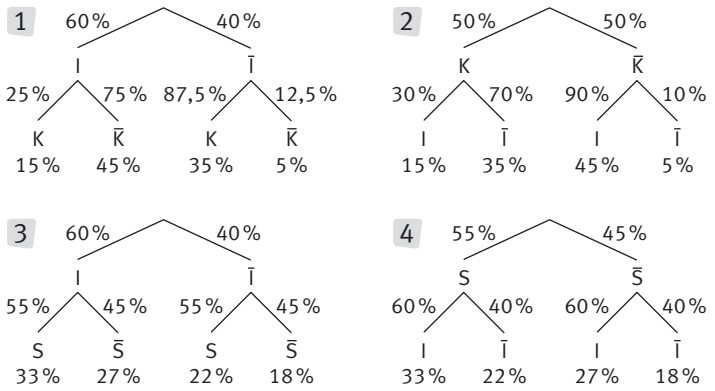
Kap. 3.1 und 3.2

Grippeimpfung bei Kindern

KX ■

	I	$\bar{I}$	gesamt
K	15 %	35 %	50 %
$\bar{K}$	45 %	5 %	50 %
gesamt	60 %	40 %	100 %

	I	$\bar{I}$	gesamt
S	33 %	22 %	55 %
$\bar{S}$	27 %	18 %	45 %
gesamt	60 %	40 %	100 %



KX ■ In den Diagrammen 1 und 2 (bzw. in den Diagrammen 3 und 4) ergeben sich jeweils die gleichen Pfadwahrscheinlichkeiten.
In den Diagrammen 1 und 2 sind die Wahrscheinlichkeiten der 2. Stufe abhängig vom Ausgang der 1. Stufe: Die Wahrscheinlichkeit für ein Kind, das geimpft ist, an Grippe zu erkranken, beträgt 25 %, während ein ungeimpftes Kind eine Wahrscheinlichkeit von 87,5 % für eine Erkrankung hat.
In den Diagrammen 3 und 4 sind die Wahrscheinlichkeiten der 2. Stufe unabhängig vom Ausgang der 1. Stufe: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Kind eine Schuhgröße hat, die größer als 36 ist, beträgt 55 %, unabhängig davon, ob das Kind geimpft ist.

KX ■ Die Ereignisse I und K beeinflussen sich gegenseitig, da die Wahrscheinlichkeit, an Grippe zu erkranken, für geimpfte und nicht geimpfte Kinder verschieden ist.
Dagegen beeinflussen sich die Ereignisse I und S nicht, da die Wahrscheinlichkeit für eine Schuhgröße, die größer als 36 ist, unabhängig vom Impfstatus eines Kindes ist.

Kap. 3.1 und 3.2

Am Roulette-Tisch

KX ■ P(„Markus gewinnt“) = $\frac{18}{37} \approx 48{,}6\,\%$
Zwar gibt es gleich viele schwarze und rote Felder auf dem Spielfeld, jedoch gibt es zusätzlich noch das Feld Null. Aufgrund dieses Feldes ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, wenn man nur auf eine Farbe gesetzt hat, immer kleiner als 50 %.

KX ■ Manuela hat auf die *Colonne 34* gesetzt: P(„Schwarz“) = $\frac{6}{12} = 50\,\%$
Manuela hat auf die *Colonne 35* gesetzt: P(„Schwarz“) = $\frac{8}{12} = \frac{2}{3} \approx 66{,}7\,\%$
Manuela hat auf die *Colonne 36* gesetzt: P(„Schwarz“) = $\frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\,\%$
Die Anzahl an schwarzen Feldern ist in den drei Längsreihen unterschiedlich. Folglich unterscheiden sich auch die Wahrscheinlichkeiten, dass Markus ebenfalls gewinnt.

KX ■ Pedro sollte auf die *Colonne 34* setzen, um die Gewinnchance von Markus möglichst wenig zu ändern (vgl. Punkt 2).
Würde Pedro auf eine Farbe setzen, so würde die Gewinnchance von Markus auf 0 % absinken.
Damit es keine Änderung an Markus’ Gewinnchance von $\frac{18}{37}$ gibt, müsste es eine Setzmöglichkeit für Pedro geben, bei der ein Anteil von $\frac{18}{37}$ an schwarzen Feldern besteht. Eine solche Möglichkeit gibt es jedoch nicht.

KX ■ Pauline hat auf die *Colonne 35* gesetzt:
P(„Rot“) = $\frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\,\%$ und P(„Schwarz“) = $\frac{8}{12} = \frac{2}{3} \approx 66{,}7\,\%$
Pauline sollte auf die Farbe Schwarz setzen, wenn sie zusätzlich auf die *Colonne 35* setzen möchte, um ihre Gewinnchancen maximieren möchte.

Kap. 3.3

Profifußball und die Sternzeichen

KX

- Ursache-Wirkungs-Reihenfolge:
  1) Kind mit Sternzeichen „Jungfrau“ oder „Waage“ hat Geburtstag in den Monaten August bis Oktober
  2) Kind ist in seiner Fußball-Altersklasse eines der älteren Kinder.
  3) Kind hat einen Entwicklungsvorsprung innerhalb seiner Altersklasse.
  4) Kind hat höhere Chancen auf gewonnene Zweikämpfe und Erfolgserlebnisse.
  5) Kind hat höhere Chancen auf Berufung in eine Auswahlmannschaft.
  6) Kind hat höhere Chancen auf eine Karriere im Profifußball.

  Folglich hatten die Kinder der Sternzeichen „Jungfrau“ und „Waage“ höhere Chancen im Leistungssport Fußball, da sie aufgrund ihres Geburtsdatums als Älteste einer Altersgruppe eingestuft wurden. Auf diese Weise wurden sie als am weitesten entwickelt und überlegen innerhalb ihrer Altersstufe eingeordnet. Da nur die besten Spieler die Chance auf eine Profikarriere erhalten, hatten diese Kinder folglich als Beste der eigenen Altersgruppe auch die besten Chancen auf eine derartige Karriere.

KX

- Individuelle Lösungen, z. B.:
  Der relative Alterseffekt beschreibt die bevorzugte Förderung von Kindern und Jugendlichen aufgrund ihres Geburtsdatums. Die Nachwuchsfußballer werden folglich nach ihrem kalendarischen Geburtsdatum beurteilt und weniger anhand ihrer biologischen Entwicklungsreife. Dabei werden Kinder, die direkt nach dem Stichtag der Altersstufen geboren wurden und somit relativ gesehen die Ältesten der Altersgruppe sind, bevorzugt und verstärkt gefördert. Um diesem Effekt entgegenzuwirken, könnte das sogenannte „Bio-Banding“ angewendet werden. Die Talente würden dann sowohl aufgrund ihres kalendarischen Geburtsdatums als auch aufgrund einer Analyse ihrer körperlichen Entwicklung der entsprechenden Altersgruppe zugeordnet. Auch durch gezielte Förderung des einzelnen Spielers in Kleingruppen kann der relative Alterseffekt minimiert werden.

Entdecken

KX

- P(„6 oben im ersten Becher“) = 0 %, da die Sechs auf der Rückseite des Würfels ist.
  P(„6 oben im zweiten Becher“) = $\frac{1}{4}$ = 25 %; da die Zwei und die gegenüberliegende Fünf nicht oben liegen, bleiben für die obere Zahl noch 4 Möglichkeiten.
  P(„6 oben im dritten Becher“) = $\frac{1}{2}$ = 50 %; da die Zwei und die Vier sowie die ihnen gegenüberliegenden Zahlen Drei und Fünf nicht oben liegen, bleiben für die obere Zahl noch 2 Möglichkeiten.

Nachgefragt

KX

- Ja, das ist möglich. Wenn die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind, gilt $P_A(B) = P(B)$.

KX

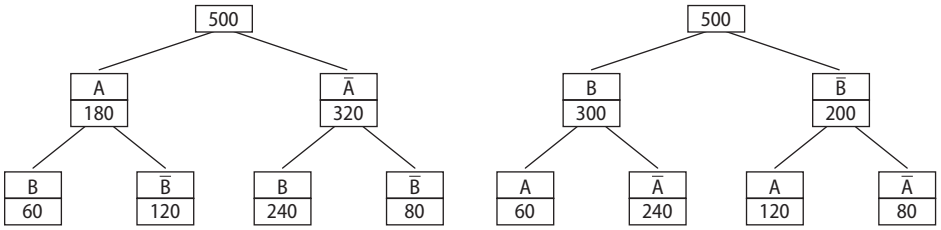
- Mögliche Lösung:
  Beispiel: Beim Werfen eines Würfels werden die Ereignisse A und B betrachtet.
  A: „Die Zahl ist gerade.“
  B: „Die Zahl ist eine Primzahl.“
  Allgemein gilt $P_A(B) = P_B(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, d. h. für $A \cap B = \{\,\}$ und / oder $P(A) = P(B)$.

Aufgaben

KX

1 **a)** $P_A(B) = \frac{0{,}12}{0{,}36} = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\,\%$; $P_B(A) = \frac{0{,}12}{0{,}6} = \frac{1}{5} = 20\,\%$; $P_{\overline{A}}(B) = \frac{0{,}48}{0{,}64} = \frac{3}{4} = 75\,\%$; $P_{\overline{B}}(A) = \frac{0{,}24}{0{,}4} = \frac{3}{5} = 60\,\%$

b)



KX

2 **a)** Ohne Zurücklegen

1 P(„erste Kugel rot“) = $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

2 P(„beide Kugeln rot“) = $\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

3 $P_{\text{erste Kugel rot}}$(„zweite Kugel rot“) = $\frac{5}{9}$

4 $P_{\text{erste Kugel weiß}}$(„zweite Kugel rot“) = $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

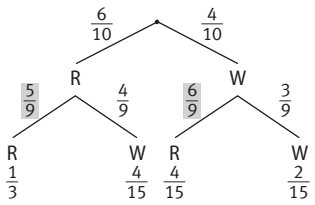
b) Mit Zurücklegen

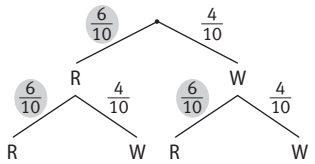
3 $P_{\text{erste Kugel rot}}$(„zweite Kugel rot“) = $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

4 $P_{\text{erste Kugel weiß}}$(„zweite Kugel rot“) = $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Wenn man die Kugeln wieder zurücklegt, ergeben sich bei 3 und 4 die gleichen Wahrscheinlichkeiten wie unter a) in 1 und 2. Es ist also irrelevant, ob man zuerst eine weiße, rote oder gar keine Kugel gezogen hat.

R: „Die gezogene Kugel ist rot.“
W: „Die gezogene Kugel ist weiß.“





KX **3** **a)** $P(E \cap A)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Alarmanlage anspringt und jemand versucht einzubrechen.

$P(\overline{E} \cap A)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Alarmanlage anspringt und dabei kein Einbruch geschieht.

$P(E \cap \overline{A})$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Einbruch geschieht und dabei die Alarmanlage nicht anspringt.

$P(\overline{E} \cap \overline{A})$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass kein Einbruch geschieht und die Alarmanlage auch nicht anspringt.

$P_E(A)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass im Falle eines Einbruchs die Alarmanlage anspringt.

$P_{\overline{E}}(A)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Alarmanlage anspringt, obwohl niemand versucht einzubrechen.

$P_E(\overline{A})$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Alarmanlage im Fall eines Einbruchs nicht anspringt.

$P_{\overline{E}}(\overline{A})$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass unter der Voraussetzung, dass kein Einbruch vorliegt, die Alarmanlage nicht anspringt.

b) $P_E(A)$ sollte möglichst groß sein, da diese den Grund zur Installation einer Alarmanlage widerspiegelt. Aus demselben Grund sollte auch $P_{\overline{E}}(\overline{A})$ möglichst groß ausfallen, da dies die korrekte Funktionsweise der Alarmanlage widerspiegelt. Hingegen sollte $P_{\overline{E}}(A)$ möglichst klein sein, da in diesem Fall ein Fehlalarm ausgesendet wird. Auch sollte $P_E(\overline{A})$ möglichst gering sein, da in diesem Fall ein Einbruch ungehindert stattfinden könnte und somit die Funktion einer Alarmanlage verfehlt wurde.

KX **4** **a)** 1 $P(W \cap M) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 7\,\%$

2 $P_W(M) = 10\,\%$

3 $P(M) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}25 = 25\,\%$ $\quad P_M(W) = \frac{P(M \cap W)}{P(M)} = \frac{0{,}07}{0{,}25} = \frac{7}{25} = 28\,\%$

b) 1 Die befragte Person hat ein Auto, das regelmäßig gewartet wurde und keinen Motorschaden hatte.

2 Die befragte Person hat ein nicht regelmäßig gewartetes Auto, das einen Motorschaden hatte.

3 Das Auto der befragten Person hatte einen Motorschaden.

4 Die befragte Person hat ein regelmäßig gewartetes Auto, das einen Motorschaden hatte.

KX **5** **a)** $P_{\text{rote Kugel}}(\text{„Sportwagen“}) = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\,\%$

b) Zieht man eine blaue Kugel, so gewinnt man mit Sicherheit einen Sportwagen.

Zieht man eine grüne Kugel, so gewinnt man keinen Sportwagen.

KX **6** **a)** $P(\text{„Gewinn“}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$

b) $P_{\overline{5}}(\text{„Gewinn“}) = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{11}{12}} = \frac{2}{11} \approx 18{,}2\,\%$

c) Mögliche Lösung:

B: „Die geworfene Zahl ist größer als 6.“

$P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Damit ergibt sich $P_B(\text{„Gewinn“}) = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

KX **7** **a)** G: „Die Person ist geeignet für den Ausbildungsberuf."
B: „Die Person hat den Test bestanden."

1 Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten

	G	$\overline{G}$	gesamt
B	56	4	60
$\overline{B}$	14	26	40
gesamt	70	30	100

2 Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten

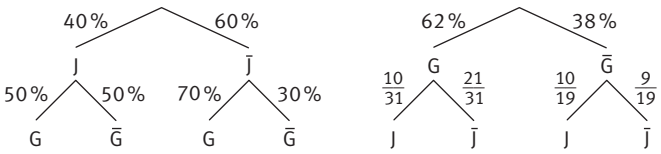
	G	$\overline{G}$	gesamt
B	0,56	0,04	0,6
$\overline{B}$	0,14	0,26	0,4
gesamt	0,7	0,3	1

b) $P_{\overline{G}}(B) = \frac{P(\overline{G} \cap B)}{P(\overline{G})} = \frac{0{,}04}{0{,}3} = \frac{2}{15} \approx 13{,}3\,\%$ oder $P_{\overline{G}}(B) = \frac{|\overline{G} \cap B|}{|\overline{G}|} = \frac{4}{30} \approx 13{,}3\,\%$

Man verwendet die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit und liest die benötigten Werte aus einer der Vierfeldertafel ab.

KX **8** J: „Eine befragte Person ist 30 Jahre oder jünger."
G: „Einer befragten Person hat die Sendung gefallen, sie hatte eine positive Meinung."

	J	$\overline{J}$	gesamt
G	20 %	42 %	62 %
$\overline{G}$	20 %	18 %	38 %
gesamt	40 %	60 %	100 %



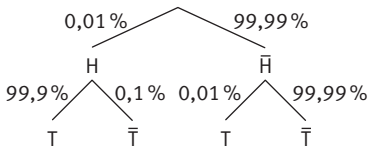
$P_G(\overline{J}) = \frac{P(G \cap \overline{J})}{P(G)} = \frac{0{,}42}{0{,}62} = \frac{21}{31} \approx 67{,}7\,\%$

Es sind rund 68 % der Zuschauer mit positiver Meinung älter als 30 Jahre.

KX **9** **a)** Mit $P(T \cap H)$ wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass ein Mann einen positiven Test hat und mit HIV infiziert ist. Aus allen betrachteten Personen wird der Prozentanteil berechnet, der beide Merkmale aufweist.

$P_T(H)$ hingegen beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann, der ein positives Testergebnis erhält, tatsächlich an HIV infiziert ist.

b) $P(T) = P(H \cap T) + P(\overline{H} \cap T)$
$= P(H) \cdot P_H(T) + P(\overline{H}) \cdot P_{\overline{H}}(T)$
$= 0{,}01\,\% \cdot 99{,}9\,\% + 99{,}99\,\% \cdot 0{,}01\,\%$
$= 0{,}00019989 \approx 0{,}02\,\%$



c) $P_T(H) = \frac{P(T \cap H)}{P(T)} = \frac{0{,}0001 \cdot 0{,}999}{0{,}00019989} = \frac{1110}{2221} \approx 50{,}0\,\%$

KX **10** **a)** $P(\text{„richtige Karte"}) = \frac{1}{32} \approx 3{,}1\,\%$

b) 1 $P_1(\text{„richtige Karte"}) = \frac{1}{16} = 6{,}25\,\%$

2 $P_2(\text{„richtige Karte"}) = \frac{1}{16} = 6{,}25\,\%$

3 $P_3(\text{„richtige Karte"}) = \frac{1}{28} \approx 3{,}6\,\%$

4 $P_4(\text{„richtige Karte"}) = \frac{1}{28} \approx 3{,}6\,\%$

5 $P_5(\text{„richtige Karte"}) = \frac{1}{4} = 25\,\%$

6 $P_6(\text{„richtige Karte"}) = \frac{1}{1} = 100\,\%$

c) $P_1(\text{„richtige Karte"}) = \frac{1}{16} = 6{,}25\,\%$

$P_{\text{rote Karte}}(\text{„Bildkarte"}) = \frac{1}{8} = 12{,}5\,\%$

$P_{\text{rote Bildkarte}}(\text{„keine Dame"}) = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$

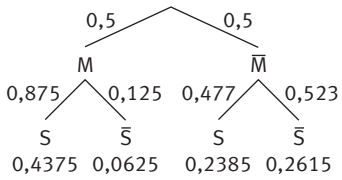
$P_{\text{rote Bildkarte, aber keine Dame}}(\text{„kein König"}) = \frac{1}{4} = 25\,\%$

$P_{\text{rote Bildkarte, aber weder Dame noch König}}(\text{„Bube"}) = \frac{1}{2} = 50\,\%$

$P_{\text{roter Bube}}(\text{„Herzbube"}) = 100\,\%$

KX **11 a)**

	M	$\overline{M}$	gesamt
S	0,4375	0,2385	0,6760
$\overline{S}$	0,0625	0,2615	0,3240
gesamt	0,5	0,5	1,0



b) 1 $P_M(S) = \frac{P(M \cap S)}{P(M)} = \frac{0{,}4375}{0{,}5} = \frac{7}{8} = 87{,}5\,\%$

2 $P_{\overline{M}}(S) = \frac{P(\overline{M} \cap S)}{P(\overline{M})} = \frac{0{,}2385}{0{,}5} = \frac{477}{1000} = 47{,}7\,\%$

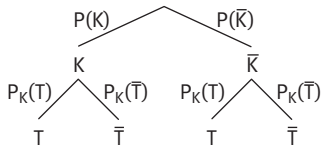
3 $P_S(\overline{M}) = \frac{P(S \cap \overline{M})}{P(S)} = \frac{0{,}2385}{0{,}6760} = \frac{477}{1352} \approx 35{,}3\,\%$

c) Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, deren Schnupfen 8 Tage oder länger Bestand hat, das Medikament erhalten hat.

KX **12 a)** Die Prävalenz gibt die Krankheitshäufigkeit in der Gesamtgruppe an: $P(K)$.
Mithilfe der Spezifität wird angegeben, wie gut ein Test gesunde Personen als gesund einstuft: $P_{\overline{K}}(\overline{T})$
Mithilfe der Sensitivität wird angegeben, wie gut ein Test kranke Personen als krank einstuft: $P_K(T)$

b) Mithilfe des Baumdiagramms erkennt man, dass gilt:
$P(T) = P(K \cap T) + P(\overline{K} \cap T)$
Außerdem gilt:
$P(K \cap T) = P(K) \cdot P_K(T)$ und
$P(\overline{K} \cap T) = P(\overline{K}) \cdot P_{\overline{K}}(T) = P(\overline{K}) \cdot \left(1 - P_{\overline{K}}(\overline{T})\right)$
Damit gilt insgesamt die Formel:
$P(T) = P(K) \cdot P_K(T) + P(\overline{K}) \cdot \left(1 - P_{\overline{K}}(\overline{T})\right)$

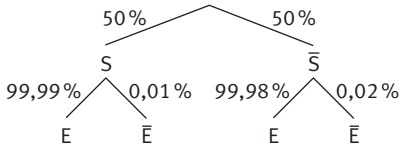
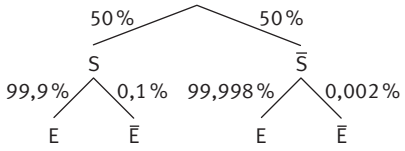
$P_T(K) = \frac{P(K \cap T)}{P(T)} = \frac{P(K) \cdot P_K(T)}{P(K) \cdot P_K(T) + P(\overline{K}) \cdot \left(1 - P_{\overline{K}}(\overline{T})\right)}$



c) Mögliche Lösung:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**diagnostischer Test**										
2											
3	Sensitivität		80,00 %	90,00 %	99,00 %	99,90 %		80,00 %	90,00 %	99,00 %	99,90 %
4	Spezifität		88,00 %	88,00 %	88,00 %	88,00 %		90,00 %	90,00 %	90,00 %	90,00 %
5	Prävalenz		0,30 %	0,30 %	0,30 %	0,30 %		5,00 %	5,00 %	5,00 %	5,00 %
6											
7	Wahrscheinlichkeit für eine Erkrankung bei positivem Test		1,97 %	2,21 %	2,42 %	2,44 %		29,63 %	32,14 %	34,26 %	34,46 %

KX **13** S: „Die E-Mail ist eine Spam-Mail.“ E: „Die E-Mail wird richtig erkannt.“

	Spamfilter A	Spamfilter B
		
Spezifität	$P_{\overline{S}}(\overline{E}) = 0{,}02\,\%$	$P_{\overline{S}}(\overline{E}) = 0{,}002\,\%$
Sensitivität	$P_S(E) = 99{,}99\,\%$	$P_S(E) = 99{,}9\,\%$

Die Sensitivität von Filter A ist höher als die von Filter B, d. h. er erkennt einen höheren Anteil an Spam-Mails als solche. Andererseits ist die Spezifität von Filter A ebenfalls höher als die von Filter B, d. h. er stuft mehr erwünschte E-Mails als Spam-Mails ein.
Bewertung: Individuelle Lösungen.

KX **14** W: „Die Kugel ist weiß."
B: „Es liegt Urneninhalt B vor."

a) Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_W(B) = \frac{P(W \cap B)}{P(W)}$.

Es gilt $P(W \cap B) = P(B) \cdot P_B(W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, da $P(B) = 50\,\%$ angenommen wird.

Damit gilt $P(W) = P(A) \cdot P_A(W) + P(B) \cdot P_B(W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

Es folgt $P_W(B) = \frac{P(W \cap B)}{P(W)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5} = 60\,\%$.

b) Unter Berücksichtigung von Teilaufgabe a) gilt:

$P(W) = P(A) \cdot P_A(W) + P(B) \cdot P_B(W) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{5} + \frac{9}{20} = \frac{13}{20}$

mit $P(B) = 60\,\% = \frac{3}{5}$ und $P(W \cap B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$

Damit gilt $P_W(B) = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{13}{20}} = \frac{9}{13} \approx 69\,\%$.

c) Da mit Zurücklegen gezogen wird, ist eine absolute Sicherheit, dass der Urneninhalt B vorliegt, nie gegeben. Jede Anzahl an nacheinander gezogenen weißen Kugeln könnte auch aus der Urne A gezogen werden. Jedoch kann man nach mehreren Kugeln sehr wahrscheinlich sagen, dass Urne B vorliegen müsste (vgl. Berechnung mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms).

	A	B
1	50 %	0,60000000
2	60 %	0,69230769
3	69 %	0,77142857
4	77 %	0,83505155
5	84 %	0,88363636
6	88 %	0,91929382
7	92 %	0,94470842
8	94 %	0,96244682
9	96 %	0,97464719
10	97 %	0,98295407
11	98 %	0,98857111
12	99 %	0,99235160

Vertiefung

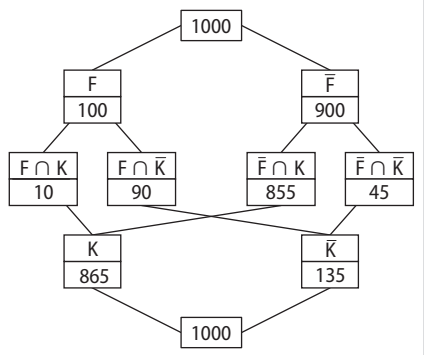
KX

Der Doppelbaum

- Der Doppelbaum beginnt mit der Anzahl der Personen in der Stichprobe. Auf der 1. Stufe erfolgt die Betrachtung des Merkmals B wie in einem normalen Baumdiagramm unter Angabe der absoluten Häufigkeiten. Auf der 2. Stufe werden – anders als im Baumdiagramm – die Schnittmengen mit absoluten Häufigkeiten angegeben. Quasi „auf dem Kopf stehend" wird das invertierte Baumdiagramm mit Betrachtung des Merkmals M auf der 1. Stufe ergänzt.
- 1 $P(\overline{M}) = \frac{40}{125} = \frac{8}{25} = 32\,\%$

  2 $P_B(\overline{M}) = \frac{35}{60} = \frac{7}{12} \approx 58{,}3\,\%$
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mädchen einen MINT-Beruf ausüben möchte, beträgt $\frac{25}{85}$.
- Der angegebene Doppelbaum nutzt absolute Häufigkeiten. Somit sind alle Informationen des Doppelbaums auch in einer Vierfeldertafel (mit absoluten Häufigkeiten) ablesbar. Die Angaben über die Schnitte in der Mitte des Doppelbaums stehen dabei in den inneren vier Feldern der Vierfeldertafel.

1 Doppelbaum:

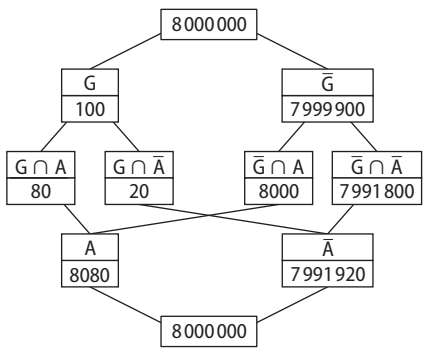


Es gilt: $P_K(F) = \frac{10}{865} = \frac{2}{173} \approx 1{,}2\,\%$

2 Doppelbaum:

G: „Die Person ist als Gefährder eingestuft."

A: „Die Software sendet einen Alarm aus."



Es gilt $P_A(G) = \frac{P(A \cap G)}{P(A)} = \frac{80}{8080} = \frac{1}{101} \approx 1{,}0\,\%$, d. h. nur bei rund 1 % der ausgesendeten Alarme zeigt die Software tatsächlich einen Gefährder an. Folglich ist nur jeder hundertste Alarm korrekt und 99 weitere wären unbegründet.

Es gilt $P_G(A) = \frac{P(G \cap A)}{P(G)} = \frac{80}{100} = 80\,\%$, d. h. die Software erkennt (nur) 80 % der Gefährder, während jeder fünfte Gefährder nicht erkannt wird.

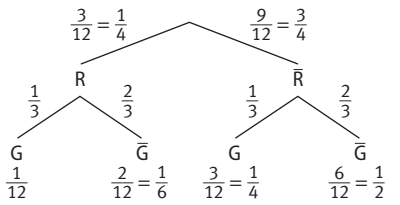
Es gilt $P_{\overline{G}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{G} \cap \overline{A})}{P(\overline{G})} = \frac{7\,991\,900}{7\,999\,900} \approx 99{,}9\,\%$, d. h. rund 99,9 % der nicht als Gefährder eingestuften Personen werden auch als solche von der Software erkannt. Das heißt aber, dass die Software immerhin bei rund 800 Personen, die nicht als Gefährder eingestuft sind, täglich fälschlicherweise Alarm schlägt.

Bewertung: Individuelle Lösungen.

Entdecken

KX

- Baumdiagramm:



KX

- In der Vierfeldertafel kann man erkennen, dass nur eines der drei roten Felder zu einem Gewinn führt. Ebenso führen drei der neun nicht roten Felder zu einem Gewinn bzw. vier der insgesamt 12 Felder. Es gilt $P_R(G) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{12}} = \frac{1}{3} = P_{\overline{R}}(G)$.
  Im Baumdiagramm sind die Wahrscheinlichkeiten in der 2. Stufe unabhängig vom Eintreten des Ereignisses R gleich, d. h. die Gewinnwahrscheinlichkeit ist unter den roten Feldern genauso groß wie unter den nicht roten Feldern. Folglich ist es irrelevant welche Farbe gedreht wurde, da in beiden Fällen eine Gewinnchance von $\frac{1}{3}$ besteht.

Nachgefragt

KX

- Mögliche Lösung:
  A: „Man wirft eine gerade Zahl."
  B: „Man wirft eine Zahl, die größer als zwei ist."
  Es gilt $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ und $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Damit gilt $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = P(A \cap B)$.
  Die Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig.

KX

- Für ein sicheres Ereignis A gilt $P(A) = 100\,\% = 1$.
  Daraus ergibt sich $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{1} = P(A \cap B) = P(B)$, wodurch jedes Ereignis B stochastisch unabhängig zu A ist.

Aufgaben

KX

1 **a)** Es gilt $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{5; 6\}$ und $A \cap B = \{6\}$, d. h. $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ und $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.
Damit folgt $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(A \cap B)$. Die Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig.

b) Es gilt $A = \{5; 6\}$, $B = \{1; 3; 5\}$ und $A \cap B = \{5\}$, d. h. $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ und $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.
Damit folgt $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = P(A \cap B)$. Die Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig.

c) Es gilt $A = \{2; 3; 5\}$, $B = \{1; 2; 3\}$ und $A \cap B = \{2; 3\}$, d. h. $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ und $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Damit folgt $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3} = P(A \cap B)$. Die Ereignisse A und B sind stochastisch abhängig.

d) Es gilt $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{3; 6\}$ und $A \cap B = \{6\}$, d. h. $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ und $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.
Damit folgt $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(A \cap B)$. Die Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig.

KX **2** **a)**

	B	$\overline{B}$	gesamt
A	0,4	0,1	0,5
$\overline{A}$	0,4	0,1	0,5
gesamt	0,8	0,2	1,0

b)

	B	$\overline{B}$	gesamt
A	84	56	140
$\overline{A}$	36	24	60
gesamt	120	80	200

KX **3** P(„Wappen“) = P(„Zahl“) = $\frac{1}{2}$

$P(E_1)$ = P(„höchstens einmal Zahl“) = 1 – P(„zweimal Zahl“) = $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(E_2)$ = P(„WZ; ZW“) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(E_1 \cap E_2)$ = P(„WZ; ZW“) = $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{2} = P(E_1 \cap E_2)$

E_1 und E_2 sind nicht stochastisch unabhängig.

KX **4** **a)**

	S	$\overline{S}$	gesamt
A	0,017	0,083	0,1
$\overline{A}$	0,153	0,747	0,9
gesamt	0,17	0,83	1,0

b) $P_A(S)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Martin an einem Tag, an dem er mit dem Auto fährt, zu spät zur Schule kommt.

$P_A(S) = \frac{P(A \cap S)}{P(A)} = \frac{0{,}017}{0{,}1} = 0{,}17 = 17\,\%$

$P_{\overline{A}}(S)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Martin an einem Tag, an dem er mit der Bahn zur Schule fährt, zu spät kommt.

$P_{\overline{A}}(S) = \frac{P(\overline{A} \cap S)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}153}{0{,}9} = 0{,}17 = 17\,\%$

c) Individuelle Lösungen möglich, z. B.:
Gemäß Teilaufgabe b) gilt $P_A(S) = P_{\overline{A}}(S)$. D. h. Martin kommt unabhängig vom gewählten Verkehrsmittel immer gleich wahrscheinlich zu spät zum Unterricht. Der Vorschlag des Oberstufenkoordinators wird also in der Realität die gewünschte Wirkung verfehlen.

KX **5** Da A und B stochastisch unabhängig sind, gilt nach der Pfadregel $P(\overline{A}) \cdot P(B) = P(\overline{A} \cap B)$.

Damit ergibt sich $P(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{5}$.

KX **6** V: „Die befragte Person ernährt sich vegetarisch.“
M: „Die befragte Person ist männlich.“

a) $P(V) = 0{,}1 = 10\,\%$; $P_{\overline{M}}(V) = 0{,}13 = 13\,\%$; $P_M(V) = 0{,}08 = 8\,\%$

Aus $P_{\overline{M}}(V) \neq P(V)$ bzw. $P_M(V) \neq P(V)$ folgt, dass die Merkmale „Geschlecht“ und „Vegetarismus“ stochastisch abhängig sind.

b) Es gilt
$$\begin{aligned} P(V) &= P(M \cap V) + P(\overline{M} \cap V) \\ &= (1 - p) \cdot 0{,}08 + p \cdot 0{,}13 \\ &= 0{,}08 - 0{,}08p + 0{,}13p \\ &= 0{,}08 + 0{,}05p. \end{aligned}$$

Aus $P(V) = 0{,}1$ folgt $0{,}08 + 0{,}05p = 0{,}1$

$\Rightarrow p = 0{,}4$.

Da der Zeitungsartikel nur vom männlichen und weiblichen Geschlecht ausgeht, sind folglich 40 % der Befragten weiblich.

((Frage: Muss man „Abituraufgaben“ im Lösungsband besonders markieren?
s. Schulbuch 63031 S. 92 und 93, Aufg.5 und 15, 16))
Antwort: Im Lösungsband werden Abituraufgaben nicht gekennzeichnet.

c)

	V	$\overline{V}$	gesamt
M	0,048	0,552	0,6
$\overline{M}$	0,052	0,348	0,4
gesamt	0,1	0,9	1,0

Es gilt $P(M \cap V) = 0{,}6 \cdot 0{,}08 = 0{,}048$.

KX **7** **a)** 1 Die Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, da der Anteil der Damen an den schwarzen Karten genauso groß ist wie ihr Anteil an den roten Karten:
$P_B(A) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ und $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

2 Die Ereignisse A und B sind stochastisch abhängig, da der Anteil der Herzkarten an den roten Karten größer ist als ihr Anteil an allen Karten: $P_A(B) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ und $P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

3 Die Ereignisse A und B sind stochastisch abhängig, da der Anteil der Könige an den Bildkarten größer ist als ihr Anteil an allen Karten; $P_A(B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ und $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

b) 1 $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 12{,}5\,\%$, $P(B) = \frac{1}{2} = 50\,\%$ und $P(A \cap B) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$
$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = P(A \cap B)$. Folglich sind die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig.

2 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ und $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.
$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq P(A \cap B)$. Daher sind beide Ereignisse nicht stochastisch unabhängig.

3 $P(A) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ und $P(A \cap B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16} \neq P(A \cap B)$. Daher sind die beiden Ereignisse nicht stochastisch unabhängig.

KX **8** **a)** Mögliche Lösung:
A: „Eine Lehrkraft ist männlich."
B: „Eine Lehrkraft trägt eine Brille."
Wenn die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind, ist der Anteil der Brillenträger an den männlichen Lehrkräften genauso groß wie der Anteil der Brillenträger an den Lehrkräften insgesamt. Dann muss aber auch der Anteil der Brillenträger an den nicht-männlichen Lehrkräften denselben Wert haben, d. h. auch die Ereignisse $\overline{A}$ und B sind stochastisch unabhängig.

b) 1 $\overline{A}$ ist das Gegenereignis zu A und wegen $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ folgt $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2 Der Term wird mithilfe des Distributivgesetzes ausmultipliziert.

3 Da A und B stochastisch unabhängig sind, gilt $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$.

4 Aus $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ folgt $P(B) - P(A \cap B) = P(\overline{A} \cap B)$.

c) 1 $P(A) \cdot P(\overline{B}) = P(A) \cdot [1 - P(B)] = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap \overline{B})$

2 $P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot [1 - P(B)] = P(\overline{A}) - P(\overline{A}) \cdot P(B) = P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$

KX **9**

	M	$\overline{M}$	gesamt
B	15	10	25
$\overline{B}$	45	30	75
gesamt	60	40	100

a) $P_M(B) = \frac{|M \cap B|}{|M|} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} = 25\,\%$.

b) $P_B(\overline{M}) = \frac{|B \cap \overline{M}|}{|M|} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 40\,\%$

c) Bei 24 „Einser-Abituren" ergibt sich $P(B \cap M) = \frac{60}{100} \cdot \frac{25}{100} = 0{,}144 = 14{,}4\,\%$.
Es kann aber im Sachzusammenhang nicht 14,4 männliche „Einser-Abiturienten" geben. Daher ist die stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse B und M bei 24 „Einser-Abituren" nicht möglich.

KX **10** $E_1 = \{2\}$; $E_2 = \{2; 3; 5\}$; $E_3 = \{3; 4; 5; 6\}$

$P(E_1) = \frac{1}{6}$; $P(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(E_3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

a) 1 $P(E_1 \cap E_2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = P(E_1 \cap E_2)$. Die beiden Ereignisse sind stochastisch unabhängig.

2 $P(E_2 \cap E_3) = \frac{6}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

$P(E_2) \cdot P(E_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = P(E_2 \cap E_3)$. Die beiden Ereignisse sind stochastisch unabhängig.

3 $P(E_1 \cap E_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$P(E_1) \cdot P(E_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} = P(E_1 \cap E_3)$. Die beiden Ereignisse sind stochastisch unabhängig.

b) Mögliche Lösung:

E_4: „In den ersten beiden Würfen wird jeweils die Augenzahl 2 geworfen."

Es gilt $P(E_4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Die Ereignisse E_1 und E_4 sind stochastisch abhängig,

da $P(E_1 \cap E_4) = \frac{1}{36} \neq P(E_1) \cdot P(E_4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{216}$ gilt.

KX **11** **a)** Aus der Vierfeldertafel ergibt sich:

$P(E_1) = \frac{654}{1200} = \frac{109}{200} = 0{,}545$; $P(E_2) = \frac{580}{1200} = \frac{29}{60} \approx 0{,}483$ und $P(E_1 \cap E_2) = \frac{232}{1200} = \frac{29}{150} \approx 0{,}193$

Es gilt $P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{109}{200} \cdot \frac{29}{60} = \frac{3161}{12\,000} \approx 0{,}263 \neq 0{,}193$. Die Ereignisse E_1 und E_2 sind stochastisch abhängig.

b) $P_{E_1}(E_2) = \frac{|E_1 \cap E_2|}{|E_1|} = \frac{232}{654} = \frac{116}{327} \approx 35{,}5\,\%$

c) $P(E_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow |E_2| = 600$

Mögliche Lösung:

	E_1	$\overline{E_1}$	gesamt
E_2	327	273	600
$\overline{E_2}$	327	273	600
gesamt	654	546	1200

$P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{654}{1200} \cdot \frac{1}{2} = \frac{327}{1200} = P(E_1 \cap E_2)$

Die Ereignisse E_1 und E_2 sind stochastisch unabhängig.

KX **12** **a)** Diese Aussage ist falsch, da stets gilt $P(A) \geq P(A \cap B)$.

b) Diese Aussage ist richtig, da für stochastisch unabhängige Ereignisse A und B stets gilt $P_B(A) = P(A)$.

c) Diese Aussage ist falsch, da für stochastisch unabhängige Ereignisse A und B stets gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

d) Diese Aussage ist richtig, da für stochastisch unabhängige Ereignisse A und B stets gilt $P_A(B) = P(B) = P_{\overline{A}}(B)$.

KX **13** Individuelle Lösungen möglich. z. B.:

1 Da sich die Ereignisse A und B auf direkt aufeinanderfolgende Tage beziehen, könnten diese beiden Ereignisse voneinander abhängig sein (ähnliche Wetterlage).

2 Da zwischen den Ereignissen A und B eine Zeitspanne von zehn Jahren liegt, kann man davon ausgehen, dass sie stochastisch unabhängig sind.

3 Da Nürnberg und Erlangen geografisch sehr nahe beieinander liegen, kann man davon ausgehen, dass die Ereignisse A und B stochastisch abhängig sind.

4 Da Nürnberg und Peking geografisch sehr weit entfernt liegen, kann man davon ausgehen, dass die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.

KX **14 a)** $P(J) = \frac{9}{20}$; $P(K) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$; $P(J \cap K) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

$P(J) \cdot P(K) = \frac{9}{20} \cdot \frac{5}{20} = \frac{45}{400} = 0{,}1125 \neq P(J \cap K)$

Das Fehlen von Jakob und Katinka ist stochastisch abhängig.

b) Mögliche Lösung:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
M	f											f								
N		f	f	f		f	f		f			f			f			f	f	

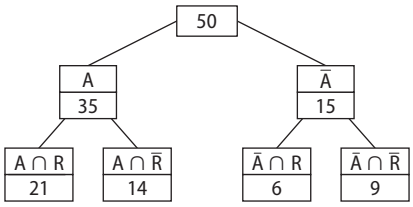
$P(M) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$; $P(N) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$; $P(M \cap N) = \frac{1}{20}$

$P(M) \cdot P(N) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20} = P(M \cap N)$

KX **15 a)** Durch $\overline{A} \cap R$ wird das Ereignis beschrieben, dass ein zufällig ausgewählter Angestellter des Unternehmens sowohl als nicht aufgeschlossen gilt als auch eine nach rechts geneigte Handschrift hat.

b)

	A	$\overline{M}$	gesamt
R	21	6	27
$\overline{R}$	14	9	23
gesamt	35	15	50



c) $P(A) = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$; $P(R) = \frac{27}{50}$; $P(A \cap R) = \frac{21}{50} = 0{,}42$

$P(A) \cdot P(R) = \frac{7}{10} \cdot \frac{27}{50} = \frac{189}{500} = 0{,}378 \neq P(A \cap R)$. Die Ereignisse A und R sind stochastisch abhängig.

d) x: Anzahl der Mitarbeiter, die als aufgeschlossen gelten und eine nach rechts geneigte Handschrift haben. Die fett gedruckten Zahlen sollen laut Aufgabenstellung nicht geändert werden.

	A	$\overline{A}$	gesamt
R	x	**6**	x + 6
$\overline{R}$	35 – x	**9**	54 – x
gesamt	**35**	**15**	**50**

$P(A) = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$; $P(A \cap R) = \frac{x}{50}$; $P(R) = \frac{x+6}{50}$

Wenn die Ereignisse A und R stochastisch unabhängig sind, gilt:

$P(A) \cdot P(R) = P(A \cap R) \Leftrightarrow \frac{7}{10} \cdot \frac{x+6}{50} = \frac{x}{50} \Leftrightarrow 7x + 42 = 10x \Leftrightarrow 42 = 3x \Rightarrow x = 14$

Der gesuchte Anteil beträgt dann $\frac{35-14}{35} = \frac{21}{35} = 60\,\%$.

Folglich muss der Prozentanteil von 40 % auf 60 % erhöht werden.

KX **16 a)** Es gilt $P(D) = P(C \cap D) + P(\overline{C} \cap D) = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow P(\overline{D}) = 1 - P(D) = \frac{1}{2}$

b) Es gilt $P_C(D) = \frac{3}{5}$ und $P(D) = \frac{1}{2}$. Daher sind die Ereignisse C und D stochastisch abhängig.

c) Es muss gelten: $P(D) = P_C(D)$ mit $P_C(D) = \frac{3}{5}$ und $P(D) = \frac{2}{5} + x$.

Damit ergibt sich $x = P(\overline{C} \cap D) = \frac{1}{5}$.

KX **17** Es gilt $P(S) \cdot P(V) = \frac{471+148}{1000} \cdot \frac{471+151}{1000} = \frac{619}{1000} \cdot \frac{622}{1000} = 0{,}385018$ und

$P(S \cap V) = \frac{471}{1000} = 0{,}471 \neq P(S) \cdot P(V)$.

Die Merkmale V und S waren bei Galtons Stichprobe nicht stochastisch unabhängig.

KX **18**

	B	$\overline{B}$	gesamt
A	0,12	x	x + 0,12
$\overline{A}$	y	0,32	y + 0,32
gesamt	y + 0,12	x + 0,32	1,00

$P(A) = x + 0{,}12;\ P(B) = y + 0{,}12$

(I) $x + 0{,}12 + y + 0{,}32 = 1 \Leftrightarrow y = 0{,}56 - x$

(II) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow (x + 0{,}12)(y + 0{,}12) = 0{,}12$

y in (II) einsetzen: $(0{,}12 + x) \cdot (0{,}12 + 0{,}56 - x) = 0{,}12 \Leftrightarrow (0{,}12 + x) \cdot (0{,}68 - x) = 0{,}12$

$\Leftrightarrow 0{,}0816 + 0{,}56x - x^2 = 0{,}12 \Leftrightarrow x^2 - 0{,}56x + 0{,}0384 = 0$

$\Rightarrow x_{\frac{1}{2}} = \frac{0{,}56 \pm \sqrt{0{,}56^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0{,}0384}}{2} = \frac{0{,}56 \pm 0{,}4}{2}$

$\Rightarrow x_1 = 0{,}48;\ x_2 = 0{,}08 \Rightarrow y_1 = 0{,}56 - 0{,}48 = 0{,}08;\ y_2 = 0{,}56 - 0{,}08 = 0{,}48$

Zwei mögliche Lösungen:

	B	$\overline{B}$	gesamt
A	0,12	0,48	0,60
$\overline{A}$	0,08	0,32	0,40
gesamt	0,20	0,80	1,00

	B	$\overline{B}$	gesamt
A	0,12	0,08	0,20
$\overline{A}$	0,48	0,32	0,80
gesamt	0,60	0,40	1,00

KX **19** **a)** $P(B) = \frac{7500}{10000} = 0{,}75;\ P(F) = \frac{5500}{10000} = 0{,}55;\ P(F \cap B) = \frac{4125}{10000} = 0{,}4125$

$P(B) \cdot P(F) = 0{,}75 \cdot 0{,}55 = \frac{33}{80} = 0{,}4125 = P(F \cap B)$

Die Ereignisse F und B sind stochastisch unabhängig.

b) Zwei mögliche Lösungen:

1 $P(B) = \frac{7499}{10000} = 0{,}7499;\ P(F) = 0{,}55;\ P(B \cap F) = \frac{4124}{10000} = 0{,}4124$

$P(B) \cdot P(F) = 0{,}7499 \cdot 0{,}55 = 0{,}412445 \neq P(B \cap F)$

2 $P(B) = \frac{7501}{10000} = 0{,}7501;\ P(F) = 0{,}55;\ P(B \cap F) = \frac{4126}{10000} = 0{,}4126$

$P(B) \cdot P(F) = 0{,}7501 \cdot 0{,}55 = 0{,}412555 \neq 0{,}4126$

In beiden Fällen sind die Ereignisse F und B stochastisch abhängig.

Individuelle Lösungen, die darauf eingehen sollten, dass die Folgerung über die stochastische (Un-) Abhängigkeit hier von der Aussage einer einzelnen Person abhängt.

KX **20** Ü: „Der Test zeigt eine Übereinstimmung."

T: „Die ausgewählte Person hat die Tat begangen."

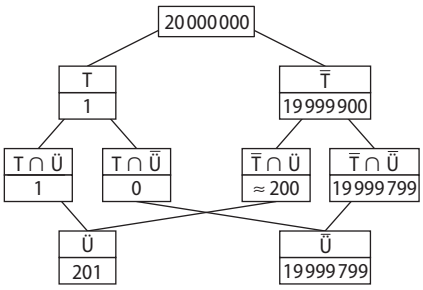
Aus der Angabe: $P_T(Ü) = 1$ und $P_{\overline{T}}(Ü) = 0{,}001\,\% = 0{,}00001$

a) $P(T) = \frac{1}{2 \cdot 10^7} \Rightarrow P(\overline{T}) = 1 - P(T) = \frac{19999999}{2 \cdot 10^7}$

Mithilfe der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$P_Ü(T) = \frac{P(Ü \cap T)}{P(Ü)} = \frac{P(Ü \cap T)}{P(T \cap Ü) + P(\overline{T} \cap Ü)} = \frac{\frac{1}{2 \cdot 10^7} \cdot 1}{\frac{1}{2 \cdot 10^7} \cdot 1 + \frac{19999999}{2 \cdot 10^7} \cdot 0{,}001\,\%} \approx 0{,}005 = 0{,}5\,\%$$

Alternativ kann die Aufgabe mithilfe eines Doppelbaums gelöst werden:



$$P_Ü(T) = \frac{|Ü \cap T|}{|Ü|} = \frac{1}{201} \approx 0{,}5\,\%$$

b) 1 $P(T) = \frac{1}{3 \cdot 10^6} \Rightarrow P(\overline{T}) = 1 - P(T) = \frac{2\,999\,999}{3 \cdot 10^6}$

Wie in Teilaufgabe a) ergibt sich dann:

$$P_{Ü}(T) = \frac{P(Ü \cap T)}{P(T \cap Ü) + P(\overline{T} \cap Ü)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^6}}{\frac{1}{3 \cdot 10^6} + \frac{2\,999\,999}{3 \cdot 10^6} \cdot 0{,}00001} \approx 0{,}0323 = 3{,}23\,\%$$

2 $P(T) = \frac{1}{5000} \Rightarrow P(\overline{T}) = 1 - P(T) = \frac{4999}{5000}$

Wie in Teilaufgabe a) ergibt sich dann:

$$P_{Ü}(T) = \frac{P(Ü \cap T)}{P(T \cap Ü) + P(\overline{T} \cap Ü)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{5000}}{\frac{1}{5000} + \frac{4999}{5000} \cdot 0{,}00001} \approx 0{,}95 = 95\,\%$$

c) Individuelle Lösungen, z. B.:

Die Prävalenz gibt in diesem Sachzusammenhang die Wahrscheinlichkeit an, dass der Test eine Übereinstimmung anzeigt ($P(Ü)$).

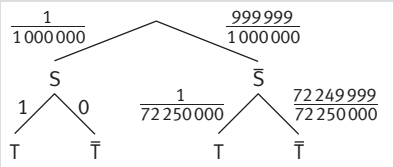
Mithilfe der Sensitivität wird die Zuverlässigkeit des Tests beschrieben, beim Täter eine Übereinstimmung zu zeigen ($P_{Ü}(T)$).

Die Spezifität hingegen beschreibt, wie zuverlässig der Test eine unschuldige Person durch eine fehlende Übereinstimmung als unschuldig kategorisiert ($P_{\overline{Ü}}(\overline{T})$).

Vertiefung

KX

Stochastik vor Gericht

- 

  $P(T) = P(S \cap T) + P(\overline{S} \cap T) = \frac{1}{1\,000\,000} \cdot 1 + \frac{999\,999}{1\,000\,000} \cdot \frac{1}{72\,250\,000} = 0{,}000001 + 0{,}00000001384$
  $\approx 1{,}01384 \cdot 10^{-6}$

  Damit gilt $P_T(S) = \frac{P(S \cap T)}{P(T)} \approx \frac{\frac{1}{1\,000\,000}}{1{,}01384 \cdot 10^{-6}} \approx 0{,}986.$

- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kind an SID stirbt, wird mit $\frac{1}{8500}$ angegeben.
  Berechnet man die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Kinder an SID sterben, mit dem Term $\frac{1}{8500} \cdot \frac{1}{8500}$, so wird angenommen, dass die Ereignisse stochastisch unabhängig sind.
  Individuelle Lösungen hinsichtlich der Gründe, die im Sachzusammenhang gegen eine Unabhängigkeit sprechen könnten, z. B.:
  Die Ursachen für SID gelten noch immer als ungeklärt. Es gibt jedoch viele nachgewiesene Risikofaktoren, die zu einem höheren Risiko für den plötzlichen Kindstod führen, darunter z. B. viele Schwangerschaften der Mutter, deren Alter, ihr Verhalten während der Schwangerschaft oder das Geschlecht des Neugeborenen.

  Mit der Angabe $P_E(Z) = \frac{1}{100} = P_{\overline{S}}(T)$ folgt $P(T) = \frac{1}{1\,000\,000} + \frac{1}{100} = 0{,}010001.$

  Damit ergibt sich $P_T(S) = \frac{P(T \cap S)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{1\,000\,000}}{0{,}010001} = \frac{1}{10001} \approx 0{,}0001 = 0{,}01\,\%$

Entdecken

KX

- Mögliche Lösung:
  Ein Ursache-Wirkungs-Zusammenhang (Kausalität) zwischen der Menge an verkauftem Speiseeis und der Zahl an Badeunfällen besteht nicht. Allerdings werden die beiden Merkmale durch ein drittes Merkmal – die Tagestemperatur – beeinflusst: Bei höheren Temperaturen steigen sowohl der Speiseeiskonsum als auch die Besucherzahl an Bademöglichkeiten und somit auch das Risiko von Badeunfällen.

Nachgefragt

KX

- Individuelle Lösungen, z. B.:
  Die Stichprobe ist vermutlich nicht repräsentativ, da nur Personen an dieser Umfrage teilgenommen haben, die bereits ein Interesse an der Teilnahme an Meinungsumfragen zeigten.

KX

- Individuelle Lösungen, z. B.:
  Zwischen den Merkmalen „Anzahl der Feuerwehrleute bei einem Brand“ und „Schadenshöhe eines Brandes“ besteht ein Zusammenhang, den man als Korrelation bezeichnet. Ein plausibles Ursache-Wirkungs-Prinzip – eine Kausalität – besteht zwischen den Merkmalen jedoch nicht. Vielmehr wird die Korrelation der beiden Merkmale durch ein drittes Merkmal – das Ausmaß des Brandes – bestimmt.

Aufgaben

KX **1** Mögliche Lösungen:
Befragt werden Personen, …

- die am Vormittag zu Hause erreichbar sind, also in dieser Zeit nicht außer Haus arbeiten oder ggf. gar nicht arbeiten.
- die ein Festnetztelefon besitzen, was ggf. für eine eher ältere Personengruppe spricht.
- deren Telefonnummer im Telefonbuch aufgeführt ist.

KX **2**

1 „Motorräder beliebter als Autos“
Es handelt sich um eine Stichprobenverzerrung, da die Befragten Mitglieder eines Motorradclubs sind.

2 „Zu Hause lebt man am gefährlichsten“
Diese Schlagzeile gibt lediglich Auskunft über den Ort des Todes. Über die Ursache des Todes wird jedoch keinerlei Angabe getroffen. Es wird somit ohne Belege von einer Korrelation auf eine Kausalität geschlossen.

KX **3** Mögliche Lösung:
F: „Die befragte Person isst 50 g verarbeitetes Fleisch pro Tag.“
D: „Die befragte Person erkrankt an Darmkrebs.“
Aus dem Text ergibt sich $P_{\overline{F}}(D) = 6\,\%$ und $P_F(D) = 6\,\% \cdot 1{,}18 \approx 7\,\%$

	F	$\overline{F}$	gesamt
D	7	6	13
$\overline{D}$	193	194	187
gesamt	100	100	200

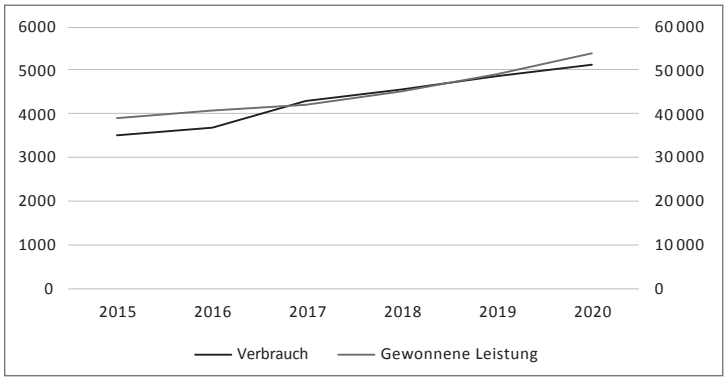
Die Angabe „18 %“ in der Schlagzeile suggeriert ein sehr hohes Krebsrisiko für Personen, die pro Tag 50 g verarbeitetes Fleisch essen. Tatsächlich liefert diese Angabe aber die Steigerung des ohnehin vorhandenen Darmkrebsrisikos, das sich um 18 % von 6 % auf rund 7 % erhöht.

KX **4** **a)** Entstehungszeiträume der Genres: Blues ca. 1900; Jazz ca.1900–1920; Pop ca.1950; Metal ca. 1970; Punk ca. 1970; Rap ca. 1970

Mögliche Lösung:
Personen, die zu Beginn des 20. Jahrhunderts gelebt haben, sind bereits (fast) alle gestorben, unabhängig davon, ob und, wenn ja, welche Musik sie gemacht haben. Das durchschnittliche Todesalter von Personen, die Blues oder Jazz gemacht haben, unterscheidet sich daher wenig.
Die betrachteten Stichproben sind relativ groß.
Von denjenigen Personen, die um 1970 Musik gemacht haben, sind nur diejenigen in der Statistik erfasst, die bereits gestorben sind. Daher bezieht sich das durchschnittliche Todesalter in diesen Musikgenres nur auf eine Teilgruppe. Dies verzerrt die Stichprobe.

b) Mögliche Lösung:
Der Musiker schlussfolgert aus der Diagrammdarstellung fälschlicherweise eine Korrelation, indem er die beiden Merkmale Musikgenre und durchschnittliches Todesalter direkt in Beziehung setzt. Diese kann jedoch aus der Diagrammdarstellung nicht geschlussfolgert werden.
Da das Todesalter zudem nicht vom Musikgenre abhängt, sondern beispielsweise von gesellschaftlichen (z. B. Gesundheitsversorgung, Leben in Friedens- oder Kriegszeiten) und individuellen Faktoren (z. B. Gesundheitszustand, Lebensstil), kann zwischen den Merkmalen auch kein plausibler Ursache-Wirkungs-Zusammenhang angegeben werden.

KX **5** Die Graphen haben einen ähnlichen Verlauf bei der Veranschaulichung bezüglich der Zeitachse, daher besteht eine Korrelation zwischen den beiden Größen. Ein kausaler Zusammenhang erscheint plausibel, da ein erhöhter Verbrauch an erneuerbaren Energien im Verkehrssektor nur möglich ist, wenn die aus Photovoltaik gewonnene elektrische Leistung steigt.



KX **6** Das linke Diagramm („Zeitliche Entwicklung der globalen Temperatur“) ist irreführend: Der Anstieg der globalen Temperatur zwischen 1800 und 2020 um rund 1 °C ist aus diesem Diagramm kaum ersichtlich, da die y-Achse eine große Temperaturspanne darstellt. Darin erscheint der Anstieg der globalen Temperatur gering.
Die Skala im rechten Diagramm („Abweichung der globalen Temperatur“) ist für die dargestellten Werte angemessen, so dass man die gezeigte Entwicklung gut ablesen kann.

KX **7** Mögliche Lösungen:

Telefonbefragung im Vorfeld:
- Es fehlt eine Angabe zum Umfang der Stichprobe.
- Es ist nicht gesichert, dass die Stichprobe repräsentativ ist, da z. B. diejenigen, die keine Festnetznummer haben oder nicht zu Hause erreichbar sind, nicht befragt werden.
- Bis zum Wahltag kann sich das Wahlverhalten der befragten Person noch ändern.

Befragung am Wahllokal:
- Es werden keine Briefwähler befragt, so dass eine Teilgruppe an Wählerinnen und Wählern aus der Befragung ausgeschlossen ist.
- Durch die Auswahl des Wahllokals in einem bestimmten Stadtviertel oder einer bestimmten Stadt kann das Ergebnis der Befragung verfälscht werden.

KX **8** Aus den Ergebnissen der Studie kann lediglich geschlussfolgert werden, dass unter denjenigen, die angaben, einen SUV gekauft zu haben oder kaufen zu wollen, 16,3 % Anhängerinnen oder Anhänger der grünen Partei sind. D. h. für die Merkmale S: „Person hat SUV gekauft oder kauft SUV." und G: „Person ist Anhängerin oder Anhänger der grünen Partei." gilt $P_S(G) = 16{,}3\,\%$. Hieraus kann jedoch nicht auf $P_G(S) = 16{,}3\,\%$ geschlossen werden.
Außerdem umfasst die Stichprobe der Umfrage nur Personen, die in den letzten 12 Monaten ein Auto gekauft haben bzw. darüber nachdenken, eines zu kaufen.
Ferner müsste auch berücksichtigt werden, dass z. B. der Anteil derjenigen Personen, die kein Auto nutzen, unter den Anhängerinnen und Anhänger bestimmter Parteien höher ist.

KX **9** **a)** Es gilt $P_S(L) = \frac{|S \cap L|}{|S|} = \frac{24}{156} = \frac{2}{13} \approx 15{,}4\,\%$; $P_{\overline{S}}(L) = \frac{|\overline{S} \cap L|}{|\overline{S}|} = \frac{32}{162} = \frac{16}{81} \approx 19{,}75\,\%$ und $P_{\overline{S}}(L) \cdot 0{,}75 = \frac{4}{27} \approx 15\,\% \approx P_S(L)$.
Anhand des Vergleichs der beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten erkennen die Journalisten, dass der Prozentwert an Lungenkrebs-Sterblichkeit, wenn diese Person ein Screening erhalten hat, ca. um ein Viertel absinkt.

b) Mögliche Lösung: Die Todeszahlen aufgrund von Lungenkrebs liegen im Vergleich zur gesamten Teilnehmergruppe gerade einmal bei $\frac{56}{318} \approx 17{,}6\,\%$ der Befragten. Von diesen haben $\frac{24}{56} = \frac{3}{7}$ an einem Screening teilgenommen, $\frac{4}{7}$ haben dies nicht getan. Aufgrund dieser Daten kann man sich gegen die flächendeckende Einführung dieses Screenings entscheiden.

KX **10** Mögliche Lösungen

Cherry Picking	Es werden nur Belege angeführt, die die eigene Argumentation stützen, während andere Belege bewusst weggelassen werden.
Survivorship Bias	Wahrscheinlichkeiten eines Erfolgs werden systematisch überschätzt im Vergleich zu Wahrscheinlichkeiten für Misserfolge.
Data Dredging	Verfälschung/Verzerrung von Forschungsresultaten, um diese künstlich unter eine bestimmte Grenze zu reduzieren.
Gerrymandering	Begriff aus der Politikwissenschaft, der das Verschieben von Wahlkreisgrenzen in einem Mehrheitswahlsystem beschreibt, um die eigenen Erfolgsaussichten zu erhöhen.
Sampling Bias	Stichprobenverzerrung (siehe Seite 96 im Schulbuch).
Regression to the Mean	Bezeichnung für das Phänomen, dass nach einem extremen Messwert die nachfolgende Messung wieder näher am Durchschnitt liegt.
Overfitting	Die Überanpassung beschreibt in der Statistik ein Modell, das auch irrelevante Variablen enthält. Hierdurch wird das Modell besser auf die Daten der Stichprobe angepasst, es kann aber anschließend keine Übertragung der Ergebnisse auf die Grundgesamtheit erfolgen.
Publication Bias	Verzerrung der Datenlage dadurch, dass negative Studien bzw. Studien ohne größere Befunde später oder gar nicht veröffentlicht werden.
Texan-Sharpshooter-Fallacy	Der sogenannte „Zielscheibenfehler" beschreibt, dass man von einer Häufung von Ereignissen fälschlicherweise auf eine Kausalität schließt.
Cobra-Effect	Getroffene Maßnahmen verschärfen das Problem, das sie eigentlich lösen sollten.
Gambler's Fallacy	Der sogenannte „Spielerfehlschluss" beschreibt die falsche Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines zufälligen Ereignisses steigt, wenn es längere Zeit nicht eingetreten ist, bzw. sinkt, wenn es kürzlich aufgetreten ist.
Outcome Bias	Der sogenannte „Rückschaufehler" beschreibt die Tendenz, das Ergebnis einer Handlung in dessen Bewertung überproportional einfließen zu lassen.
Base-Rate Neglect	Der sogenannte „Basisratenfehler" beschreibt den Fehler, dass die Bestimmung der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ ohne Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeit von A erfolgt.
Framing	Durch eine andere Formulierung kann der gleiche Inhalt auf eine andere Weise transportiert werden.

KX **11 a)** Mögliche Lösungen:

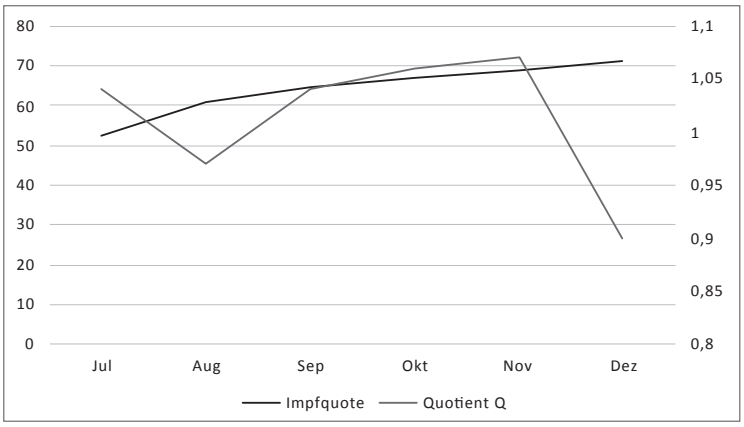
1 Durch die Quote der Abiturienten und Abiturientinnen im Vergleich zu den in der Oberstufe angetretenen Schülern und Schülerinnen wird lediglich eine Aussage über die Qualität der Oberstufe getätigt. Man betrachtet in diesem Fall nur die Untergruppe der Schülerinnen und Schülern, die bereits alle Jahrgangsstufen bis hin zur Oberstufe erfolgreich durchlaufen haben.
Hingegen ist dieser Zeitraum in der zweiten Quote (Quote der Abiturienten und Abiturientinnen im Vergleich zu den in der 5. Klasse angetretenen Schülern und Schülerinnen) enthalten, so dass die Betrachtung über einen längeren Zeitraum möglich. Beachtet werden muss hierbei jedoch, dass über die Jahre Schülerinnen und Schüler die Schule verlassen oder in einen Jahrgang neu dazukommen können, z. B. durch Umzüge. Folglich wird immer wieder eine etwas veränderte Schülergruppe betrachtet. Dennoch ist diese Quote aussagekräftiger, wenn es um die Qualität der gesamten Schule gehen soll, da sie langfristige und jahrgangsübergreifende Betrachtungen enthält.

2 Mithilfe dieser Quoten kann eine Aussage über das Fach Mathematik und die darin erfolgten außerschulischen Aktivitäten getroffen werden. Dabei würde die Anzahl der Preise für die individuelle Leistungsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler selbst sowie die individuelle Förderung durch die Lehrkräfte sprechen. Da bei derartigen Wettbewerben häufig nur Schülerinnen und Schüler mit besonderen mathematischen Fähigkeiten und Kompetenzen antreten, haben beide Quoten zusammen eine deutlich größere Aussagekraft. In diesem Fall würden nicht nur die Anzahl der Teilnehmerinnen und Teilnehmer, sondern auch die Anzahl der daraus folgenden Gewinne betrachtet werden. Somit könnten über einen längeren Zeitraum hinweg Leistungssteigerungen der Schülerinnen und Schüler sowie eine passgenauere Förderung durch die Schule selbst beobachtet werden. Würde man nur die Gewinne betrachten, so würde eine Schule bereits als eine Schule von höherer Qualität eingestuft werden, wenn sie eine Schülerin oder einen Schüler mit sehr hohem mathematischen Leistungsvermögen zu mehreren Wettbewerben schickt.

3 Würde man lediglich den Anteil der Abiturnoten mit einer Eins vor dem Komma betrachten, so würden alle anderen Abiturschnitte von 2,0 bis 4,0 zusammengefasst werden. Man betrachtet lediglich eine Untergruppe des gesamten Jahrgangs und setzt diese beiden ins Verhältnis zueinander. Individuelle Leistungen und kleinere Schwankungen bleiben hierbei unberücksichtigt. Auch die vorangegangenen schulischen Leistungen der Schülerinnen und Schüler werden nicht in die Betrachtung einbezogen. D. h. Aussagen über längerfristige Entwicklungen sind in keinem der beiden Fälle möglich. Vorteil der ersten Quote ist, dass durch die Durchschnittsbildung alle individuellen Leistungen gleichwertig gewichtet werden.

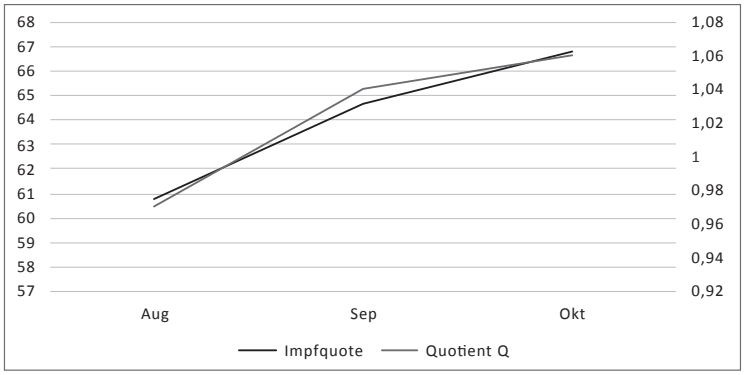
b) Mögliche Lösungen:
Zufriedenheit der Mitglieder der Schulgemeinschaft; Anzahl individueller Fördermaßnahmen; Abschneiden bei Vergleichsarbeiten

KX **12 a)** Graphisch kann für diesen Zeitraum keine hohe Korrelation ermittelt werden, da die beiden Merkmale bezüglich der Zeitachse keinen ähnlichen Verlauf aufweisen. Insbesondere im August und Dezember sind große Abweichungen ersichtlich.



((? Excel-Datei hat andere Werte wie Skript))

b) Innerhalb des betrachteten Zeitraums kann aus der graphischen Darstellung eine Korrelation der beiden Merkmale abgelesen werden, da sie bezüglich der Zeitachse einen ähnlichen Verlauf zeigen.



c) Mögliche Lösungen:
Nutzerinnen und Nutzer könnten aus der Darstellung schließen, dass es durch eine Impfung wahrscheinlicher ist, dass man selbst an den Folgen der Virusinfektion oder in Folge der Impfung stirbt. Probleme, bei der ausschließlichen Nutzung sozialer Medien zur Informationsgewinnung, sind z. B. einseitige Darstellungsweisen, manipulierte Informationen, Fake News.

d) Mögliche Lösungen:
Die Übersterblichkeit zeigt lediglich an, dass in diesem Jahr mehr Menschen als im Vergleich zum Median der Jahre 2016 bis 2019 zu erwarten war. Es erfolgt jedoch keinerlei Angabe der Todesursache. Diese können vielfältig sein und sind nicht monokausal auf die steigende Impfquote zurückzuführen. Folglich kann kein kausaler Zusammenhang zwischen einer steigenden Impfquote und einer steigenden Übersterblichkeit auf der Datenbasis von August bis Oktober hergestellt werden.

KX **13** 1 Beteiligte Größen: „Menge des Fleischkonsums“ und „Lebenserwartung“

- Eine Korrelation liegt vor, wenn die Merkmale „Fleischkonsum“ und „Lebenserwartung“ in einer grafischen Veranschaulichung bezüglich der Zeitachse denselben Verlauf zeigen.
- Die Behauptung legt eine Kausalität nahe: Ein erhöhter Fleischkonsum wird als Ursache für eine gesunkene Lebenserwartung benannt. Um dies zu prüfen, müssten weitere Daten erhoben werden.

2 Beteiligte Größen: „Anzahl der Störche“ und „Geburtenrate“

- Die Behauptung legt eine Korrelation nahe, dass die grafische Veranschaulichung der Merkmale „Anzahl der Störche“ und „Geburtenrate“ bezüglich der Zeitachse denselben Verlauf zeigen.
- Eine Kausalität wäre eine Ursache-Wirkungs-Beziehung, wie z. B. „Weil mehr Störche brüten, werden mehr Kinder geboren.“

3 Beteiligte Größen: „Menge an Kaffeekonsum“ und „Fruchtbarkeit bei Frauen“

- Eine Korrelation liegt vor, wenn die Merkmale „Kaffeekonsum“ und „Fruchtbarkeit bei Frauen“ in einer grafischen Veranschaulichung bezüglich der Zeitachse denselben Verlauf zeigen.
- Die Behauptung legt eine Kausalität nahe: Ein erhöhter Kaffeekonsum wird als Ursache für eine gesunkene Fruchtbarkeit bei Frauen benannt. Ein Nachweis kann nur mithilfe weiterer Studienergebnisse erfolgen.

4 Beteiligte Größen: „Menge an getrunkener Milch“ und „Potenz“

- Eine Korrelation liegt vor, wenn die Größen „Menge an getrunkener Milch“ und „Potenz“ in einer grafischen Veranschaulichung bezüglich der Zeitachse denselben Verlauf zeigen.
- Die Behauptung legt eine Kausalität nahe: Ein erhöhter Milchkonsum wird als Ursache für Impotenz benannt. Um dies zu prüfen, müssten weitere Daten erhoben werden.

KX **14** Zahlenbeispiel: Angenommen, man misst die Intelligenz eines Menschen auf einer Skala von 0 bis 10 und geht davon aus, dass ein Okie auf der Skala den Wert 6 erreicht und dass Menschen in Oklahoma einen Durchschnittswert von 8 erzielen, während Menschen in Kalifornien einen Wert von 4 auf der Skala erreichen. Dann erhöht der Okie mit seinem Umzug den Mittelwert in beiden Staaten. Simuliert man dies mit 10 Einwohnern je Staat und dazu einem Okie, so gilt:

- Durchschnittliche Intelligenz vor dem Umzug des Okie:
  Oklahoma: $\frac{8 \cdot 10 + 6}{11} \approx 7{,}8$; Kalifornien: $\frac{4 \cdot 10}{10} = 4$
- Durchschnittliche Intelligenz nach dem Umzug des Okie:
  Oklahoma $\frac{8 \cdot 10}{10} = 8$; Kalifornien $\frac{4 \cdot 10 + 6}{11} \approx 4{,}2$

D. h., nach dem Umzug sind die Intelligenzleistungen in beiden Bundesstaaten gestiegen.

Der Witz besteht folglich darin, dass ein Okie in einem Staat, in dem die Intelligenzleistung höher ist, die durchschnittliche Intelligenzleistung mindert, während er diese in einem Staat, in dem die durchschnittliche Intelligenzleistung geringer ist, diese erhöht. Dieses Phänomen wird auch als „Okie-Paradoxon“ bezeichnet.

Vertiefung

KX

Das Simpson-Paradoxon

■ Das Simpson-Paradoxon beschreibt ein Phänomen der Statistik. Dabei fällt die Bewertung verschiedener Gruppen unterschiedlich aus, je nachdem, ob man zwei Merkmale einzeln betrachtet oder die Ereignisse mehrerer Gruppen kombiniert.
Individuelle Beispiele möglich.

1

	Erfolgsquote für …		
	den 1. Monat	den 2. Monat	beide Monate
Martin	$\frac{2}{3} \approx 66{,}7\,\%$	$\frac{4}{10} = 40\,\%$	$\frac{6}{13} \approx 46{,}2\,\%$
Nadja	$\frac{3}{5} = 60\,\%$	$\frac{1}{3} \approx 33{,}3\,\%$	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 50\,\%$

In beiden Monaten hat Martin besser abgeschnitten als Nadja.
Betrachtet man die Turniere in beiden Monaten zusammen, hat Nadja die bessere Erfolgsquote.

2 Betrachtet man die Fächer getrennt voneinander, so ist in jedem der beiden Fächer die Zulassungsquote bei den Bewerberinnen höher als die bei den Männern, während die Zulassungsquote der Männer insgesamt höher ist als die der Bewerberinnen. Die Pressemitteilung berücksichtigt jedoch nur den Anteil der zugelassenen Bewerberinnen und Bewerber getrennt nach den beiden Fächern. Die Zulassungsquote für die Kombination beider Fächer wird nicht beachtet.

3

	Mädchen			Jungen		
	bestanden	nicht bestanden	Durchfall-quote	bestanden	nicht bestanden	Durchfall-quote
1.Tag	2	0	0 %	14	2	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 12{,}5\,\%$
2.Tag	4	2	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\,\%$	2	2	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\,\%$
gesamt	6	2	$\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\,\%$	16	4	$\frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 20\,\%$

Mögliche Auswertungen:

„Mädchen liegen vorn“: An jedem der beiden Prüfungstage schnitten die Mädchen besser ab als die Jungen.

„Jungen hängen Mädchen ab“: 80 % der Jungen, aber nur 75 % der Mädchen waren beim zweitätigen Einstellungstest erfolgreich.

KX **1** **a)** Mit diesem Term wird die Wahrscheinlichkeit beschrieben, dass der Rauchmelder im Falle eines Brands tatsächlich einen Alarm sendet.

b) Mit diesem Term wird die Wahrscheinlichkeit beschrieben, dass es im Falle eines Alarms tatsächlich brennt.

c) Dieser Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass es im Falle eines Alarms nicht brennt.

KX **2** **a)**

	Blüte	$\overline{\text{Blüte}}$	gesamt
Apfel	780	180	960
$\overline{\text{Apfel}}$	120	120	240
gesamt	900	300	1200

$P_{\overline{B}}(A) = \frac{3}{5} = \frac{|\overline{B} \cap A|}{|\overline{B}|} = \frac{|\overline{B} \cap A|}{300}$

$\Rightarrow |\overline{B} \cap A| = \frac{3}{5} \cdot 300 = 180$

$P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{2} \Rightarrow |\overline{A} \cap B| = |\overline{A} \cap \overline{B}| = 120$

b) $P_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{780}{900} = \frac{13}{15} \approx 86{,}7\,\%$

KX **3** **a)** $P_{\text{Vielfaches von 4}}(\text{Vielfaches von 2}) = \frac{25}{25} = 100\,\%$

b) $P_{\text{Vielfaches von 2}}(\text{Vielfaches von 4}) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 50\,\%$

a) Mit diesem Term wird die Wahrscheinlichkeit beschrieben, dass in einer Wohnung ohne Brand ein Alarm ausgelöst wird.

b) Dieser Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass es im Falle eines Alarms nicht brennt.

c) Es gilt: $1 - P_A(\overline{B}) = P_A(B)$. Mit diesem Term wird die Wahrscheinlichkeit beschrieben, dass es im Falle eines Alarms tatsächlich brennt.

a)

	Blüte	$\overline{\text{Blüte}}$	gesamt
Apfel	$\frac{17}{40}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{5}$
$\overline{\text{Apfel}}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{5}$
gesamt	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$P_A(\overline{B}) = \frac{15}{32} = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8}}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{15}{32}} = \frac{4}{5}$

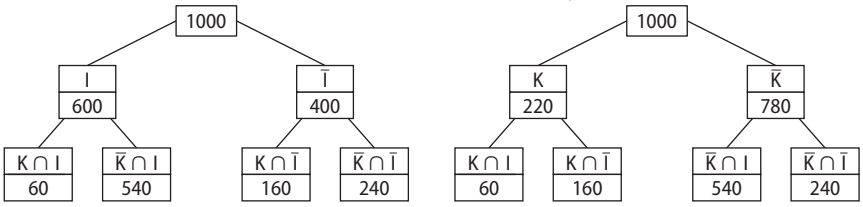
$P_{\overline{B}}(A) = \frac{15}{16} = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{\frac{3}{8}}{P(\overline{B})} \Rightarrow P(\overline{B}) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{15}{16}} = \frac{2}{5}$

b) $P_B(\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(B)} = \frac{\frac{7}{40}}{\frac{3}{5}} = \frac{7}{24} \approx 29{,}2\,\%$

a) $P_{\text{Vielfaches von 7}}(\text{Vielfaches von 4}) = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{14}{100}} = \frac{3}{14} \approx 21{,}4\,\%$

b) $P_{\text{gemeinsames Vielfaches von 5 und 6}}(\text{Vielfaches von 4}) = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{3}{100}} = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\,\%$

KX **4**



Der Term $P_I(K)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine geimpfte Person erkrankt.
Der Term $P_K(I)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine erkrankte Person geimpft war.

$P_I(K) = \frac{P(I \cap K)}{P(I)} = \frac{60}{600} = \frac{1}{10} = 10\,\%$

$P_K(I) = \frac{P(I \cap K)}{P(K)} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11} \approx 27{,}3\,\%$

$P(K \cap I) = \frac{60}{1000} = 6\,\%$

Der Term $P_I(K)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine geimpfte Person erkrankt.

Der Term $P_K(I)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine erkrankte Person geimpft war

Der Term $P(K \cap I)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person geimpft und erkrankt ist.

Bei allen drei Wahrscheinlichkeiten werden unterschiedliche Grundmengen betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit $P(K \cap I)$ bezieht sich auf alle Testpersonen, während sich die bedingten Wahrscheinlichkeiten jeweils nur auf eine Teilgruppe beziehen. Die Wahrscheinlichkeit $P_I(K)$ bezieht sich auf die Gruppe der Geimpften, die Wahrscheinlichkeit $P_K(I)$ auf die Gruppe der Erkrankten.

KX **5**

	B	$\overline{B}$	gesamt
A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\overline{A}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
gesamt	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$

	B	$\overline{B}$	gesamt
A	$\frac{1}{2}$	$25\,\% = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\overline{A}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
gesamt	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{1}{3}$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) \Rightarrow P(A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

KX **6**

$P(E_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; P(E_2) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}; P(E_1 \cap E_2) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(E_1 \cap E_2)$

Die beiden Ereignisse sind stochastisch unabhängig.

$P(E_1) = \frac{1}{2}; P(E_2) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}; P(E_1 \cap E_2) = 1.$

$E_1 \cap E_2$ ist ein sicheres Ereignis, da der Produktwert niemals eine ungerade Zahl ergeben kann, wenn bekannt ist, dass der erste Wurf eine gerade Augenzahl hat.

$P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \neq P(E_1 \cap E_2)$

Die beiden Ereignisse sind stochastisch abhängig.

KX **7**

Die Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn der Anteil der Wähler der Regierungspartei in der Gruppe der Über-50-Jährigen genauso groß ist wie in der gesamten Wählerschaft.

Diese beiden Ereignisse sind nicht stochastisch unabhängig, da die Wahlentscheidung für oder gegen die Regierungspartei vom Alter abhängig ist. Der Anteil der Wähler der Regierungspartei ist in der Gruppe der Über-50-Jährigen nicht genauso groß wie in der Gruppe der Unter-50-Jährigen.

KX **8**

Mögliche Lösung:

A: „Beim ersten Wurf wird Kopf geworfen."

B: „Beim zweiten Wurf wird Zahl geworfen."

C: „Es wird zweimal Zahl geworfen."

Mögliche Lösung:

A: „Es wird eine gerade Zahl geworfen."

B: „Es wird eine Zahl kleiner als 5 geworfen."

C: „Es wird eine ungerade Primzahl geworfen."

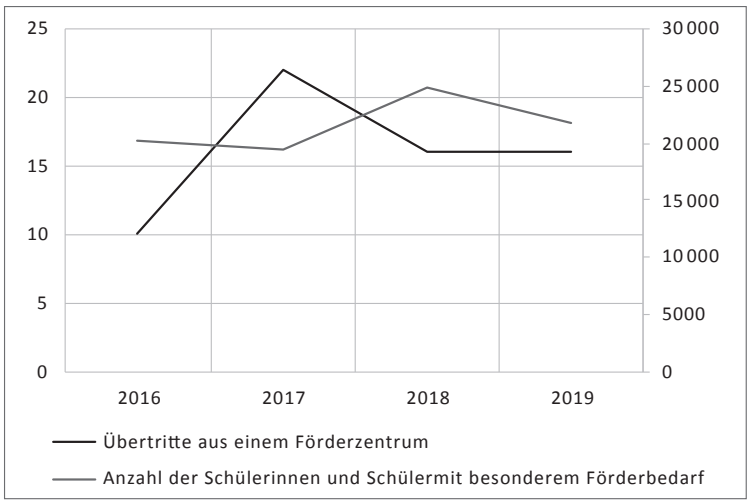
KX **9** In der Gruppe, die eine „Olivenöl-Diät“ befolgte, erkrankten 101 – 80 = 21 Menschen weniger an Diabetes. Das Risiko, an Diabetes zu erkranken, wurde um $\frac{21}{1100} \approx 0{,}019 = 1{,}9\,\%$ gemindert. Aussagekräftiger ist der relative Wert, da dieser die Größe der untersuchten Gruppe berücksichtigt.

Das Online-Portal hat vermutlich den Quotienten $\frac{101-80}{101} = \frac{21}{101} \approx 20{,}8\,\%$ berechnet. Dieser bezieht sich aber nicht auf die Größe der untersuchten Gruppe. Stattdessen wird eine relative Risiko-Reduktion betrachtet.

KX **10** Mögliche Lösung:
Es gibt möglicherweise eine Korrelation zwischen der Anzahl an Nachhilfestunden, die eine Schülerin oder ein Schüler erhält, und seinen Schulnoten, da typischerweise eher schwächere Schülerinnen und Schüler Nachhilfe nehmen. Die behauptete Kausalität, dass die Nachhilfe die Ursache für die schlechten Schulnoten ist, dürfte im Allgemeinen eher falsch sein.

Die Merkmale Körpergewicht und Schokoladenkonsum sind möglicherweise stochastisch abhängig, so dass eine Korrelation zwischen diesen besteht. Die behauptete Kausalität, dass der Schokoladenkonsum die Ursache für geringes Gewicht ist, dürfte im Allgemeinen falsch sein. Vielmehr wurden in der zugrundeliegenden Studie auch Hintergrundvariable berücksichtigt, die jedoch in der Schlagzeile keine Berücksichtigung fanden.

KX **11**



Mögliche Lösung:
Es besteht keine Korrelation zwischen den beiden Merkmalen aus der Tabelle, da sie in der Veranschaulichung bezüglich der Zeitachse keinen ähnlichen Verlauf zeigen.

Mögliche Gründe sind z. B.:
Seit Unterzeichnung der Behindertenrechtskonvention absolvieren mehr Schülerinnen und Schüler mit besonderem Förderbedarf die Grundschulzeit an einer allgemeinen Schule. Es liegen keinerlei Informationen über die Anzahl der Übertritte aus allgemeinen Schulen vor. Schülerinnen und Schüler, die an den Förderzentren beschult werden, können verschiedenen Förderschwerpunkten zugeordnet werden. Häufig handelt es sich um einen dauerhaften sonderpädagogischen Förderbedarf (z. B. im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung), so dass die Wahrscheinlichkeit, dass Schülerinnen und Schüler in Jahrgangsstufe 5 an ein Gymnasium übertreten, sehr niedrig ist.

Mögliche Lösung:
Ein kausaler Zusammenhang erscheint plausibel, da seit 2009 Inklusion und somit die Beschulung von Kindern und Jugendlichen mit besonderem Förderbedarf Aufgabe aller allgemeinen Schulen ist. Es wurden Maßnahmen ergriffen, z. B. Nachteilsausgleichs- und Notenschutzmaßnahmen oder Schulbegleitungen, um Kindern und Jugendlichen mit besonderem Förderbedarf den Besuch allgemeiner Schulen zu ermöglichen.

KX **12** Da die Sturzwahrscheinlichkeit unabhängig von der Farbe der Kletterroute gleich ist, genügt es, die Wahrscheinlichkeit zu betrachten, mit der Henriette rote Routen klettert. Diese beträgt $\frac{1}{3}$, weshalb $P_{Sturz}(\text{Rot}) = \frac{1}{3}$ ist.

KX **13 a)** In dieser Rechnung wird davon ausgegangen, dass es sich nicht um ein Schaltjahr handelt.

$P(E_1) = \frac{1}{365} \approx 0{,}003 = 0{,}3\,\%$

$P(E_2) = \frac{62}{365} \approx 0{,}170 = 17{,}0\,\%$

$P(E_3) = \frac{12}{365} \approx 0{,}033 = 3{,}3\,\%$

$P(E_4) = \frac{3 \cdot 31 + 28 + 2 \cdot 30}{365} = \frac{181}{365} \approx 0{,}496 = 49{,}6\,\%$

b) E_1 und E_2: Die Ereignisse sind stochastisch abhängig, da gilt $E_1 \cap E_2 = E_1$.
Denn die Schnittmenge beider Ereignisse enthält genau den 1. August.

$P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{1}{365} \cdot \frac{62}{365} \neq \frac{1}{365} = P(E_1 \cap E_2)$

E_1 und E_3: Die Ereignisse sind stochastisch abhängig, da gilt $E_1 \cap E_3 = E_1$.
Denn die Schnittmenge beider Ereignisse enthält genau den 1. August.

$P(E_1) \cdot P(E_3) = \frac{1}{365} \cdot \frac{12}{365} = \frac{12}{365} \neq \frac{1}{365} = P(E_1 \cap E_3)$

E_1 und E_4: Die Ereignisse sind stochastisch abhängig, da gilt $E_1 \cap E_4 = \{\}$.
Denn der 1. August liegt nicht in der ersten Jahreshälfte.

$P(E_1 \cap E_4) = \frac{0}{365} \neq P(E_1) \cdot P(E_4)$

E_2 und E_3: Die Ereignisse sind stochastisch abhängig, da ein Geburtstag an einem der beiden Monatsersten im Juli oder August unwahrscheinlicher ist als der Geburtstag an einem Monatsersten im ganzen Jahr.

$P(E_2 \cap E_3) = \frac{2}{365} \neq \frac{744}{133\,225} = P(E_2) \cdot P(E_3)$

E_2 und E_4: Die Ereignisse sind stochastisch abhängig, da sich die Ereignisse ausschließen. Denn die Monate Juli und August liegen nicht in der ersten Jahreshälfte.

$P(E_2 \cap E_4) = \frac{0}{365} \neq \frac{62}{365} \cdot \frac{181}{365} = P(E_2) \cdot P(E_4)$

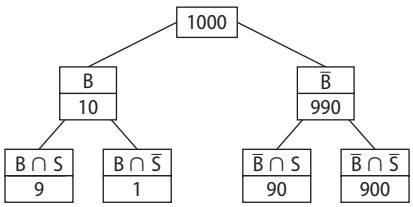
E_3 und E_4: Die Ereignisse sind stochastisch abhängig, da die zweite Jahreshälfte mehr Tage hat, so dass die Wahrscheinlichkeit eines Geburtstags an einem Monatsersten in der ersten Jahreshälfte wahrscheinlicher ist als in der zweiten Jahreshälfte.

$P(E_3 \cap E_4) = \frac{6}{365} \neq \frac{12}{365} \cdot \frac{181}{365} = P(E_3) \cdot P(E_4)$

KX **14 a)** $P(S \cap B)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Frau über 50 beim Screening einen positiven Befund erhält und an Brustkrebs erkrankt ist.

$P_B(S)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die an Brustkrebs erkrankt ist, bei einem Screening einen positiven Befund bekommt.

$P_S(B)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die bei einem Screening einen positiven Befund erhält, an Brustkrebs erkrankt ist.



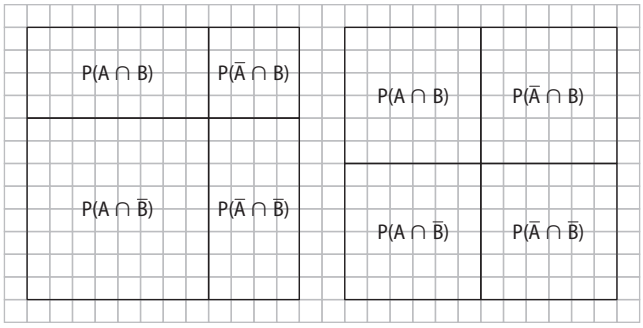
b) Individuelle Schätzungen.

$P_S(B) = \frac{P(S \cap B)}{P(S)} = \frac{\frac{9}{1000}}{\frac{9}{1000} + \frac{90}{1000}} = \frac{0{,}009}{0{,}099} = \frac{1}{11} \approx 0{,}091 = 9{,}1\,\%$

KX **15 a)** 1 $P(A \cap B)$ 2 $P(A)$ 3 $P(B)$ 4 $1 - P(A \cap B) = P(\overline{A \cap B})$

b) 1 $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$ 2 $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P_A(B)$ 3 $\frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = P_{\overline{A}}(B)$

c) Die zu den Ereignissen A und $\overline{A}$ gehörenden Flächen müssten im gleichen Verhältnis auf die zu den Schnittereignissen gehörenden Flächen aufgeteilt sein, z. B.:



KX **16 a)**

	B	$\overline{B}$	gesamt
K	120	60	180
$\overline{K}$	280	140	420
gesamt	400	200	600

b) Es gilt $P(B) = \frac{400}{600} = \frac{2}{3}$, $P(K) = \frac{180}{600} = \frac{3}{10}$ und $P(B \cap K) = \frac{120}{600} = \frac{1}{5}$.

$P(B) \cdot P(K) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{5} = P(B \cap K)$

Die beiden Merkmale sind stochastisch unabhängig und es besteht keine Korrelation.

c) Mögliche Lösung:

	B	$\overline{B}$	gesamt
K	119	61	180
$\overline{K}$	280	140	420
gesamt	399	201	600

Es gilt $P(B) = \frac{399}{600} = \frac{133}{200}$, $P(K) = \frac{3}{10}$ und $P(K \cap B) = \frac{119}{600}$.

$P(B) \cdot P(K) = \frac{133}{200} \cdot \frac{3}{10} = \frac{399}{2000} \neq \frac{119}{600} = P(K \cap B)$

Zwischen den Merkmalen besteht keine Korrelation.

Ein geändertes Befragungsergebnis einer einzelnen der 600 Personen beeinflusst die Ausprägung des Zusammenhangs zwischen den beiden Merkmalen. Daher ist die Aussagekraft dieser Umfrage nicht als besonders hoch einzuschätzen.

KX **17**

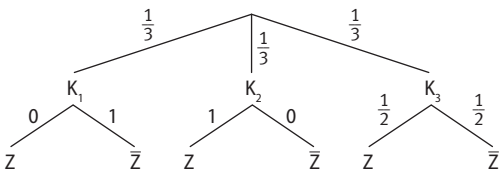
	B	$\overline{B}$	gesamt
A	$x \cdot y$	$x \cdot (1 - y)$	x
$\overline{A}$	$y \cdot (1 - x)$	$(1 - y) \cdot (1 - x)$	$1 - x$
gesamt	y	$1 - y$	1

KX **18 a)** Z: „Es wird eine Zitrone gezogen."

K_1: „Es wird aus dem Korb mit den Orangen gezogen."

K_2: „Es wird aus dem Korb mit den Zitronen gezogen."

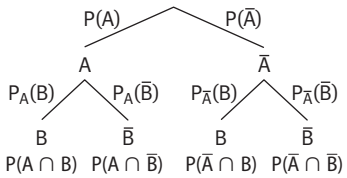
K_3: „Es wird aus dem Korb gezogen, der sowohl Orangen als auch Zitronen enthält."



$P_Z(K_3) = \frac{P(Z \cap K_3)}{P(Z)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

b) Mögliche Lösung:
Es genügt ein Zug: Man zieht eine Frucht aus dem Korb, der mit beiden Früchten beschriftet ist. Da man weiß, dass die Beschriftung falsch ist, kennt man bereits nach einem Zug den Inhalt des Korbes (entweder nur Orangen oder nur Zitronen).
Angenommen dieser Korb enthält Orangen: Dann muss der Korb, auf dem zunächst das „Orangen"-Schild angebracht war, die Zitronen enthalten; der Korb mit dem „Zitronen"-Schild enthält die Fruchtmischung, denn man weiß, dass auch die beiden anderen Körbe falsch beschriftet sind.

KX **19 a)**



Dem Baumdiagramm entnimmt man: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$.
Mithilfe der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit ergibt sich $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)}$.

b) Sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, so gilt $P_A(B) = P(B)$.
Damit ergibt sich aus der Formel von Bayes $P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$.

c) Aus $P(A) \approx P(B)$ folgt $\frac{P(A)}{P(B)} \approx 1$.
Folglich gilt $P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)} \approx P_A(B)$.

KX **20** Mögliche Lösung:
- Einfluss sozialer Determinanten auf den COVID-19 Impfstatus, z. B. Alter, Einkommen, Bildungsgrad,
- ein zu geringer Stichprobenumfang
- Stichprobenverzerrungen durch die Auswahl des Umfragedesigns als Telefon-Umfrage

KX **1**

	A	$\overline{A}$	gesamt
B	0,25	0,3	0,55
$\overline{B}$	0,05	0,4	0,45
gesamt	0,3	0,7	1

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}4$

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}25}{0{,}55} = \frac{5}{11}$

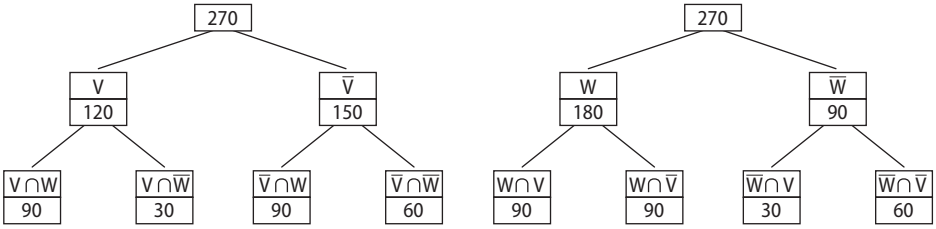
$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}25}{0{,}3} = \frac{5}{6}$

KX **2** V: „Person kommt verkleidet.“; W: „Person ist weiblich.“

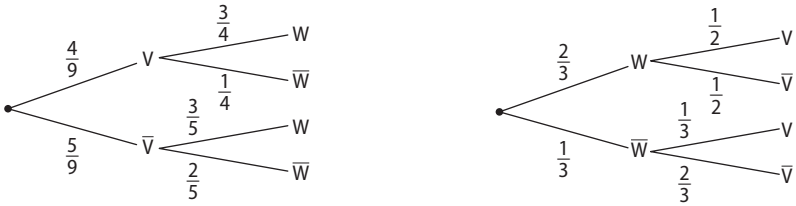
a)

	V	$\overline{V}$	gesamt
W	90	90	180
$\overline{W}$	30	60	90
gesamt	120	150	270

Baumdiagramme mit absoluten Häufigkeiten:



Baumdiagramme mit relativen Häufigkeiten:



b) $P_V(\overline{W}) = \frac{1}{4}$

KX **3** I: „Person ist geimpft.“; K: „Person ist erkrankt.“

	I	$\overline{I}$	gesamt
K	47	55	102
$\overline{K}$	78	21	99
gesamt	125	76	201

a) $P(A) = \frac{102}{201} \approx 50{,}7\,\%$ **b)** $P(B) = \frac{47}{125} = 37{,}6\,\%$ **c)** $P(C) = \frac{47}{102} \approx 46{,}1\,\%$

KX **4** $P(E_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(E_1 \cap E_2) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = P(E_1) \cdot P(E_2)$

Die Ereignisse sind stochastisch unabhängig.

KX **5** $P_S(E)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Mail als Spam-Mail eingestuft wird, wenn bekannt ist, dass sie eine solche ist. Oder: $P_5(E)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Spam-Mail richtig als solche eingestuft wird.

$P_E(S)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Mail eine Spam-Mail ist, wenn bekannt ist, dass sie als solche eingestuft ist.

$P_{\overline{S}}(E)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Mail als Spam-Mail eingestuft wird, wenn bekannt ist, dass sie keine solche ist.

KX **6**

	D	$\overline{D}$	gesamt
H	$0{,}99 \cdot 0{,}01 = 0{,}0099$	$0{,}05 \cdot 0{,}99 = 0{,}0495$	0,0594
$\overline{H}$	0,0001	0,9405	0,9406
gesamt	0,01	0,99	1

D: „Person führt Drogen mit."; H: „Hund schlägt an."

P(„Person hat Drogen dabei, wenn Hund anschlägt.") $= P_H(D) = \frac{P(D \cap H)}{P(H)} = \frac{0{,}0099}{0{,}0594} \approx 0{,}167 = 16{,}7\,\%$

KX **7** Einerseits wird bei der Betrachtung des Todesalters von Päpsten eine sehr kleine Stichprobe im Vergleich zur Gesamtbevölkerung betrachtet. Andererseits werden in der Regel Kardinäle zu Päpsten geweiht. Diese sind meist älter als 50 Jahre. Man betrachtet im Vergleich zur Gesamtbevölkerung also ausschließlich die Teilgruppe der männlichen Priester im Kardinalsamt über 50 Jahre, welche nicht repräsentativ für die Gesamtbevölkerung ist.

KX **8** Da die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind, sind auch die Ereignisse $\overline{A}$ und $\overline{B}$ stochastisch unabhängig.
Daher gilt $P(\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}32}{0{,}4} = 0{,}8$.

	B	$\overline{B}$	gesamt
A	0,12	0,48	0,6
$\overline{A}$	0,08	0,32	0,4
gesamt	0,2	0,8	1

KX **9** Man benötigt absolute Werte der verübten Raubüberfälle, um eine solide Bewertung vornehmen zu können. Ferner wäre eine Information bezüglich des Gültigkeitsbereichs der Daten (z. B. in Deutschland, in Bayern) für deren Aussagekraft und auch der Zeitraum, in dem die Verdopplung stattgefunden hat, hilfreich.

Zahlenbeispiel:

1 Verdopplung der Raubüberfälle in einer Stadt von einem auf zwei Fälle innerhalb eines Jahres.

2 Verdopplung der Raubüberfälle in Deutschland im Zeitraum von 1995 bis 2003 von 380 auf 760 Fälle.

KX **10** Das Rasieren einer Glatze hat in der Regel keinen Einfluss auf die Gehaltsentwicklung. Vielmehr ist anzunehmen, dass eine stochastische Abhängigkeit beider Größen kausal durch das Alter der Person bedingt wird: Mit steigendem Alter tritt bei Männern signifikant häufiger Haarausfall auf und mit steigendem Alter erhöht sich häufig der Verdienst aufgrund beruflicher Karriereschritte.

Aufgaben für Lernpartner

KX **A** Die Aussage ist richtig. Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten eines Ereignisses der 2. Stufe wird unter der Bedingung des Eintretens des Ereignisses der 1. Stufe betrachtet.

KX **B** Die Aussage ist falsch. Betrachtet man z. B. das zweimalige Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne mit einer roten und 2 schwarzen Kugeln, dann nimmt die bedingte Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel unter der Voraussetzung zu ziehen, dass bereits eine rote Kugel gezogen wurde, den Wert null an.

KX **C** Die Aussage ist falsch. Aus der Korrelation zwischen Körpergröße und Körpergewicht, die mithilfe einer Stichprobe ermittelt wurde, kann man nicht auf eine allgemeingültige Kausalität schließen. Beispielsweise könnte in der Folge eine sehr übergewichtige kleine Person mit einer untergewichtigen großen Person verglichen werden.

KX **D** Die Aussage ist richtig. Sind die Ereignisse A und B unvereinbar, so gilt $P(A \cap B) = 0$.
Andererseits gilt $P(A) \cdot P(B) \neq 0$, da sowohl A als auch B nicht unmöglich ist.

KX **E** Die Aussage ist falsch. Wenn ein Test eine Krankheit in 95 % der Fälle erkennt, bedeutet dies, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_K(E) = 95\,\%$ beträgt (K: „Die Testperson hat die Krankheit."; E: „Der Test zeigt eine Erkrankung an."). Die Wahrscheinlichkeit eines falsch positiven Testergebnisses ist jedoch die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{K}}(E)$. Für diese beiden Wahrscheinlichkeiten gilt die „Knotenregel" im Baumdiagramm nicht.
Anm.: Mithilfe des Satzes von Bayes kann man $P_A(B)$ berechnen, wenn $P_B(A)$ gegeben ist:
$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(A)}$

KX **F** Die Aussage ist richtig. Da die Ergebnisse der letzten beiden Würfe unabhängig von den Ergebnissen der ersten acht sind, gilt $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Es gilt $P_B(A) = \frac{\frac{1}{2^{10}}}{\frac{4}{2^{10}}} = \frac{1}{4}$.

KX **G** Die Aussage ist falsch. Betrachtet man den Wurf eines Laplace-Würfels sowie die Ereignisse A: „Die Augenzahl ist gerade." und B: „Die Augenzahl ist durch 3 teilbar.", so gilt $A \cap B = \{6\}$ und
$P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = P(A) \cdot P(B)$.
Die Ereignisse sind also stochastisch unabhängig und können gleichzeitig eintreten.

KX **H** Die Aussage ist richtig, denn zwei Ereignisse heißen stochastisch unabhängig, wenn gilt $P_B(A) = P(A)$ oder $P_A(B) = P(B)$.
Anm.: Zwei Ereignisse, die nicht zugleich eintreten können, heißen unvereinbar. Dies darf nicht mit dem Begriff „unabhängig" verwechselt werden.

KX **I** Die Aussage ist falsch. Geht man davon aus, dass die Geburtenwahrscheinlichkeit von Mädchen und Jungen gleich ist, gilt:
P(„Die Familie hat zwei Mädchen.") $= \frac{1}{4}$ P(„Die Familie hat mindestens ein Mädchen.")
$= 1 -$ P(„Die Familie hat kein Mädchen.") $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, also $p = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$.
Anmerkung: 2020 wurden etwa 5 % mehr Jungen als Mädchen geboren. Mit diesen Zahlen erhält man
$P_B(A) = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}45}{0{,}45 \cdot 0{,}45 + 2 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}45} = \frac{9}{31}$.

KX **J** Die Aussage ist falsch.
Für A: „Die Augensumme ist zweistellig." gilt $A = \{(4; 6); (5; 5); (5; 6); (6; 4); (6; 5); (6; 6)\}$.
Für B: „Mindestens einer der Würfel zeigt eine 5." gilt $B = \{(1; 5); (2; 5); ...; (6; 5); (5; 1); ...; (5; 6)\}$.
Somit folgt $P_B(A) = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{3}{11}$.

KX **K** Die Aussage ist richtig, z. B. falls in der betrachteten Gruppe der Jüngeren 2 Personen an Grippe erkranken und in der Gruppe der Über-60-Jährigen 3 Personen.

KX **L** Die Aussage ist falsch. Sind die Ereignisse stochastisch unabhängig, so gilt $P_B(A) = P(A)$.

KX **1** **a)** Es wird dreimal ohne Zurücklegen gezogen. Da nur höchstens zwei rote Gummibärchen gezogen werden können, kann man das Ereignis A: „Es werden drei gleichfarbige Gummibärchen gezogen." auch durch A = {WWW; GGG} beschreiben. Somit gilt für die Wahrscheinlichkeit mithilfe der ersten und der zweiten Pfadregel:

$P(A) = P(\{WWW; GGG\}) = P(\{WWW\}) + P(\{GGG\}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = \frac{11}{120} \approx 9{,}2\,\%$

b) Gemäß der Angabe gilt:

Der Anteil der nicht als vegan gekennzeichneten Tüten ($\overline{V}$) ist dreimal so groß wie der Anteil der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind (V).
42 % der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind, sind zusätzlich auch als zuckerreduziert gekennzeichnet.
Insgesamt sind 63 % der Tüten weder als vegan noch als zuckerreduziert gekennzeichnet.
Somit folgt aus $P(\overline{V}) = 3 \cdot P(V)$ und $P(\overline{V}) + P(V) = 1$, dass $P(V) = 0{,}25$ gilt.
Die Situation lässt sich z. B. in einer Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten darstellen:

	V	$\overline{V}$	gesamt
R	10,5 %	12,0 %	22,5 %
$\overline{R}$	14,5 %	63,0 %	77,5 %
gesamt	25,0 %	75,0 %	100,0 %

1 $P(\overline{R}) = \frac{775}{1000} = 77{,}5\,\%$

2 $P_{\overline{V}}(R) = \frac{P(\overline{V} \cap R)}{P(\overline{V})} = \frac{0{,}12}{0{,}75} = 16\,\%$ oder $P_{\overline{V}}(R) = \frac{|\overline{V} \cap R|}{|\overline{V}|} = \frac{120}{750} = 16\,\%$

3 Es gilt $1 - P_{\overline{V}}(R) = P_{\overline{V}}(\overline{R})$. Der Term gibt somit die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine zufällig ausgewählte Tüte nicht als zuckerreduziert gekennzeichnet ist, wenn man weiß, dass sie nicht als vegan gekennzeichnet ist.

KX **2** Das zur Studie zugehörige Zufallsexperiment ist das zufällige Ziehen einer der 200 teilnehmenden Personen. Dafür legt man die Ereignisse W: „Person ist weiblich." und F: „Person besitzt ein Fernsehgerät." fest.

a) Das Ereignis A: „Eine zufällig ausgewählte Person ist weiblich und besitzt kein Fernsehgerät." kann dargestellt werden als $A = W \cap \overline{F}$. Damit folgt $P(A) = P(W \cap \overline{F}) = \frac{|W \cap \overline{F}|}{|\Omega|} = \frac{98 - 54}{200} = 22\,\%$.

b) Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_F(W) = \frac{|F \cap W|}{|F|} = \frac{54}{54 + 65} = \frac{54}{119} \approx 45{,}4\,\%$.

c) $P(E_1 \cap E_2) = P(F \cap W) = \frac{54}{200} = 27\,\%$ und $P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{119}{200} \cdot \frac{98}{200} = \frac{5831}{20\,000} \approx 29{,}15\,\%$
Da $P(E_1 \cap E_2) \neq P(E_1) \cdot P(E_2)$ gilt, sind E_1 und E_2 stochastisch abhängig.

KX **3** **a)** Für $p = \frac{1}{5}$ gilt $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 6 \cdot \frac{1}{5} = -\frac{1}{5} < 0$. Dies ist ein Widerspruch, da eine Wahrscheinlichkeit nicht negativ sein kann.

	B	$\overline{B}$	gesamt
A	p	2p	3p
$\overline{A}$	3p	1–6p	1–3p
gesamt	4p	1–4p	1

b) Es muss gelten $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Somit gilt: $p = 3p \cdot 4p \Leftrightarrow p = 12\,p^2 \Leftrightarrow 1 = 12p \Rightarrow p = \frac{1}{12}$.

KX **4** **a)** Es sind die Mengen 2 und 5.

b) $p_1 = P_S(M) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{P(M \cap S)}{0{,}24}$ und $p_2 = P_M(S) = \frac{P(M \cap S)}{P(M)} = \frac{P(M \cap S)}{0{,}9}$

$p_1 = \frac{P(M \cap S)}{0{,}24} > \frac{P(M \cap S)}{0{,}9} = p_2$, da bei gleichem Zähler der Nenner bei p_1 kleiner ist.

c) Aus der Angabe $P(E) = P(S \cup M) = 0{,}98$ folgt für das Gegenereignis $P(\overline{S} \cap \overline{M}) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$.

	M	$\overline{M}$	gesamt
S	0,16	0,08	0,24
$\overline{S}$	0,74	0,02	0,76
gesamt	0,90	0,10	1,00

$P_S(M) = \frac{P(S \cap M)}{P(S)} = \frac{0{,}16}{0{,}24} = \frac{2}{3}$

KX **5** **a)**

	F	$\overline{F}$	gesamt
B	2,6 %	1,2 %	3,8 %
$\overline{B}$	50,3 %	45,9 %	96,2 %
gesamt	52,9 %	47,1 %	100 %

b) $P_F(B)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person ausschließlich Bio-Lebensmittel kauft, unter der Bedingung, dass sie eine Frau ist.

$P_B(F)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person eine Frau ist, unter der Bedingung, dass sie ausschließlich Bio-Lebensmittel kauft.

$P(F \cap B)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person ausschließlich Bio-Lebensmittel kauft und eine Frau ist.

c) $P_{\overline{B}}(F) \approx \frac{0{,}503}{0{,}962} \approx 52{,}29\,\%$

Dass sich die Werte der bedingten Wahrscheinlichkeiten deutlich von denjenigen für die nicht bedingten Wahrscheinlichkeiten unterscheiden, erklärt sich mithilfe der unterschiedlichen Bezugsmengen bzw. -wahrscheinlichkeiten. Durch eine Betrachtung der absoluten Häufigkeiten kann man sich dies plausibel machen:

	F	$\overline{F}$	gesamt
B	27	12	39
$\overline{B}$	513	468	981
gesamt	540	480	1020

Man erkennt, dass der doppelte Anteil der Frauen an den Personen, die ausschließlich Bio-Lebensmittel kaufen, nur auf einer geringen absoluten Zahl basiert. Diese fällt bei der sehr viel größeren Grundmenge der Personen, die nicht ausschließlich Bio-Lebensmittel kaufen, nicht besonders stark ins Gewicht.

d) Zwischen den Ereignissen besteht eine Korrelation, da sie stochastisch abhängig sind.
Dies ist bereits ohne weitere Rechnung an den unterschiedlichen bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_{\overline{F}}(B) = 2{,}5\,\%$ und $P_F(B) = 5\,\%$ ablesbar.

((Vakat-Seite))