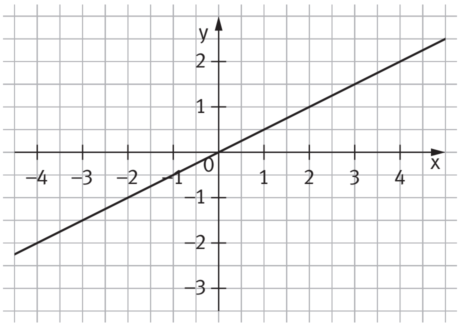
## Anwenden der Differentialrechnung:

# Extremwertprobleme und Modellieren mit Funktionen

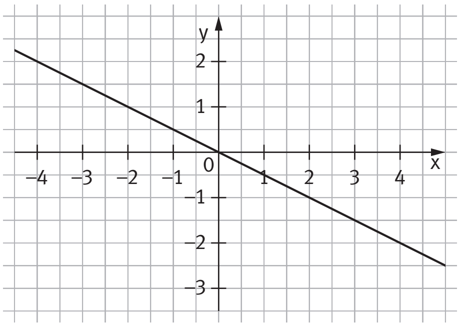
# 3

**1.1 a)** x = 3 y = 11 **b)** x = 1 y = 2 **c)** x = 3 y = 2

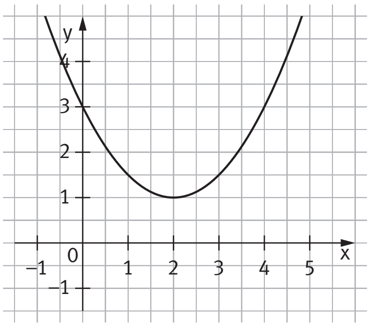
**2.1 a)** A f' (x) > 0 und 2 y-Werte werden größer. Beispiel für einen Graphen:



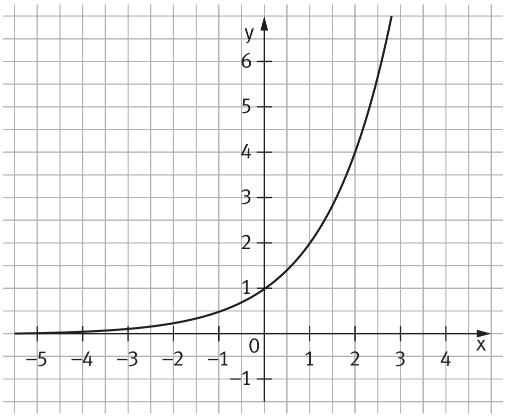
**b)** B f' (x) < 0 und 4 y-Werte werden kleiner. Beispiel für einen Graphen:



**c)** C f' (x) wechselt von – nach + und 1 Tiefpunkt. Beispiel für einen Graphen:



**d)** D f' (x) ist positiv und wird immer größer und 3 y-Werte steigen schneller. Beispiel für einen Graphen:



**2.2** 1 ist der Graph der Ableitungsfunktion. 2 hat auf [–2; 0] positive Werte, der grüne Graph aber hat dort negative Steigung. Bei 3 stimmen zwar die Vorzeichen, aber die Steigung des grünen Graphen bei x = 1 ist größer als 1. Dies stimmt nur mit 1 überein.

**3.1 a)** $f'(x) = 2x - 2$ $\qquad f''(x) = 2$

Tiefpunkt $(1|2)$. 2 ist globales Minimum, weil es das einzige ist und $f(x) \to +\infty$ für $x \to \pm\infty$.

**b)** $f'(x) = (6 - 12x) \cdot e^{-2x+1}$ $\qquad f''(x) = (24x - 24) \cdot e^{-2x+1}$

Hochpunkt $(0{,}5|3)$. 3 ist nur lokales Maximum, weil $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.

**c)** $f'(x) = 3\cos(x)$ $\qquad f''(x) = -3\sin(x)$

$3\cos(x)$ wird im betrachteten Intervall für $x = \frac{\pi}{2}$ null und $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$. Hochpunkt $\left(\frac{\pi}{2}\middle|3\right)$. 3 ist globales Maximum, weil es (im betrachteten Intervall) kein weiteres Maximum gibt.

Anmerkung: bei $x = 0$ liegt hier das globale Minimum, aber kein Extrempunkt, weil für einen Extrempunkt $f'(0) = 0$ gelten müsste.

**d)** $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ wird null nur für $x = 0$. VZW von + nach – in f' zeigt Hochpunkt $(0|1)$. 1 ist globales Maximum, weil es das einzige ist und $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$.

**3.2** Im dargestellten Ausschnitt sind die Randextrema höher bzw. niedriger als die anderen lokalen Extrema. Deshalb ist hier das globale Minimum – 1,5 und das globale Maximum 2.

**4.1 a)** $f'(x) = 4x - 1$ $\qquad f''(x) = 4$

$4x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow x = 0{,}25$ (einzige mögliche Extremstelle, weil nur hier die Steigung null ist)

$f''(0{,}25) = 4 \quad \Longrightarrow$ hinreichende Bedingung erfüllt. $f(0{,}25) = 5 \Longrightarrow$ Extremum $(0{,}25|5)$

**b)** $f'(x) = \cos(x)$ $\qquad f''(x) = -\sin(x)$

$\cos(x) = 0 \quad \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

(einzige mögliche Extremstelle auf $[0; \pi]$, weil nur hier die Steigung null ist)

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \Longrightarrow$ hinreichende Bedingung erfüllt. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = +1 \Longrightarrow$ Extremum $\left(\frac{\pi}{2}\middle|1\right)$

**c)** $f'(x) = (x + 1) \cdot e^x$ $\qquad f''(x) = (x + 2) \cdot e^x$

$(x + 1) \cdot e^x = 0 \quad \Longrightarrow x = -1$ (einzige mögliche Extremstelle, weil nur hier die Steigung null ist)

$f''(-1) = e^{-1} \quad \Longrightarrow$ hinreichende Bedingung erfüllt. $f(-1) = -e^{-1} \Longrightarrow$ Extremum $(-1|-e^{-1})$

**4.2** Wenn $f'(x_0) = 0$, dann ist bei $x_0$ die Tangente waagerecht.
Wenn bei $x_0$ die Tangente waagerecht ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.
Wenn bei $x_0$ ein Extremum liegt, dann ist $f'(x_0) = 0$.
Wenn bei $x_0$ ein Extremum liegt, dann ist bei $x_0$ die Tangente waagerecht.
Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x) \neq 0$, dann liegt bei $x_0$ ein Extremum vor.
Es gelten auch: „Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x) \neq 0$, dann ist $f'(x_0) = 0$'' und „Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x) \neq 0$, dann ist $f''(x) \neq 0$''. Weitere Möglichkeiten gibt es nicht.

# 3.1 Krümmung und Wendepunkte

## Entdecken

- Das 6. Dreieck stößt an den (oberen) Blattrand.
- Man hätte eine Gerade erhalten.
- Die Steigung darf nicht so schnell größer werden, sie muss langsamer steigen.
- Man erhält eine Rechtskurve, die aber trotzdem steigend ist (im Gegensatz zu der Linkskurve, die bei den vorigen Punkten entstand).

## Aufgaben

**1** **a)** $f''(x) = 6x - 20 \Longrightarrow f''(3) = -2 \Longrightarrow$ Rechtskurve

**b)** $f''(x) = -4\pi^2 \cos(\pi x) \Longrightarrow f''(3) = -4\pi^2 \cos(3\pi) = -4\pi^2 \cdot (-1) = 4\pi^2 \Longrightarrow$ Linkskurve

**2** Lösung im Schulbuch.

**3** **a)** $f''(x) = 12x^2 - 24x$ hat die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Mit $f'''(x) = 24x - 24$ folgt $f'''(0) = -24$ und $f'''(2) = +24$, so dass hinreichend beweisen ist, dass an beiden Stellen Wendepunkte liegen.
Für das Kriterium des VZW untersucht man $f''(-1) = 36$ (Linkskrümmung), $f''(1) = -12$ (Rechtskrümmung) und $f''(3) = 36$ (Linkskrümmung) und erhält somit, dass dazwischen Wendepunkte liegen müssen.
Mit $f(0) = -16$ und $f(2) = 0$ erhält man die Wendepunkte $\mathbf{W_1(0|-16)}$ **und** $\mathbf{W_2(2|0)}$.

**b)** $f''(x) = x \cdot e^{-x}$ hat die einzige Nullstelle $x = 0$. Mit $f'''(x) = (-x + 1) \cdot e^{-x}$ folgt $f'''(0) = 1$, also liegt bei $x = 0$ ein Wendepunkt vor.
Für das Kriterium des VZW untersucht man $f''(-1) < 0$ (Rechtskrümmung) und $f''(1) > 0$ (Linkskrümmung), also liegt bei $x = 0$ ein Wendepunkt vor. Mit $f(0) = 0$ erhält man den Wendepunkt $\mathbf{W(0|0)}$.

**c)** $f''(x) = 6x - 12$ hat die einzige Nullstelle $x = 2$. Mit $f'''(x) = 6$ folgt $f'''(2) = 6$, also liegt bei $x = 2$ ein Wendepunkt vor.
Für das Kriterium des VZW untersucht man $f''(1) = -12$ (Rechtskrümmung) und $f''(3) = 6$ (Linkskrümmung), also liegt bei $x = 2$ ein Wendepunkt vor. Mit $f(2) = 2$ erhält man den Wendepunkt $\mathbf{W(2|2)}$.

**d)** $f''(x) = 2x^{-3} + 6x^{-4} = \frac{2x + 6}{x^4}$ hat die einzige Nullstelle $x = -3$. Mit $f'''(x) = -6x^{-4} - 24x^{-5} = \frac{-6x - 24}{x^5}$ folgt $f'''(-3) = \frac{18 - 24}{(-3)^5} \neq 0$, also liegt bei $x = -3$ ein Wendepunkt vor.
Für das Kriterium des VZW untersucht man $f''(-4) < 0$ (Rechtskrümmung) und $f''(-2) > 0$ (Linkskrümmung), also liegt bei $x = -3$ ein Wendepunkt vor. Mit $f(-3) = -\frac{2}{9}$ folgt $\mathbf{W\left(-3\middle|-\frac{2}{9}\right)}$.

**e)** $f''(x) = 4\cos(2x)$ hat auf $[0; \pi]$ die Nullstellen $x_1 = \frac{\pi}{4}$ und $x_2 = \frac{3\pi}{4}$. Mit $f'''(x) = -8\sin(2x)$ folgt $f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -8$ und $f'''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = +8$ (beide $\neq 0$), also liegen bei $x_1 = \frac{\pi}{4}$ und $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ Wendepunkte vor.
Für das Kriterium des VZW untersucht man $f''(0) = 4$ (Linkskrümmung), $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$ (Rechtskrümmung) und $f''(\pi) = 4$ (Linkskrümmung) und erhält somit, dass dazwischen Wendepunkte liegen müssen.
Mit $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ und $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2$ erhält man die Wendepunkte $\mathbf{W_1\left(\frac{\pi}{4}\middle|2\right)}$ und $\mathbf{W_2\left(\frac{3\pi}{4}\middle|2\right)}$.

**f)** $f''(x) = 20(x - 1)^3$ (Kettenregel, Summenregel) hat die einzige Nullstelle $x = 1$.
Mit $f'''(x) = 60(x - 1)^2$ folgt $f'''(1) = 0$. Damit erhält man keine Aussage bei diesem Kriterium.
Für das Kriterium des VZW untersucht man $f''(0) = -20$ (Rechtskrümmung) und $f''(2) = +20$ (Linkskrümmung), also liegt bei $x = 1$ ein Wendepunkt vor. Mit $f(1) = -3$ folgt $\mathbf{W(1|-3)}$.

**4** **a)** $f''(x) = 12 \cdot e^{-2x+5}$ hat keine Nullstelle, es existiert also kein Wendepunkt.
Wegen $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist der gesamte Graph eine Linkskurve ohne Wendepunkt.

**b)** $f''(x) = -3\pi^2 \sin(\pi x - 5)$ hat auf $[0; 2]$ die Nullstellen $x_1 = \frac{5}{\pi}$ und $x_2 = \frac{5}{\pi} - 1$.
Mit $f'''(x) = -3\pi^3 \cos(\pi x - 5)$ folgt $f'''\left(\frac{5}{\pi}\right) = -3\pi^3 \neq 0$ und $f'''\left(\frac{5}{\pi} - 1\right) = -3\pi^3 \cos(-\pi) = 3\pi^3 \neq 0$, also liegen bei $x_1 = \frac{5}{\pi}$ und $x_2 = \frac{5}{\pi} - 1$ Wendepunkte vor.
Mit $f\left(\frac{5}{\pi}\right) = 7$ und $f\left(\frac{5}{\pi} - 1\right) = 7$ erhält man die Wendepunkte $W_1\left(\frac{5}{\pi} | 7\right)$ und $W_2\left(\frac{5}{\pi} - 1 | 7\right)$.

**c)** $f''(x) = 46$ hat keine Nullstelle, es existiert also kein Wendepunkt. Wegen $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist der gesamte Graph eine Linkskurve ohne Wendepunkt.

**d)** $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ hat keine Nullstelle, es existiert also kein Wendepunkt.
Die Stelle $x = 0$, an der der Graph von einer Rechtskurve $(x < 0)$ in eine Linkskurve $(x > 0)$ wechselt, ist eine Definitionslücke der Funktion (Polstelle).

**5** **a)** $f''(x) = 12x - 6$ hat eine Nullstelle bei $x = 0{,}5$. Es gilt $f''(0) = -6 < 0$ und $f''(1) = +6 > 0$. Somit ist der Graph auf $]-\infty; 0{,}5[$ eine Rechtskurve und auf $]0{,}5; \infty[$ eine Linkskurve.

**b)** $f''(x) = 4$ hat keine Nullstelle. Wegen $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist der gesamte Graph eine Linkskurve ohne Wendepunkt.

**c)** $f''(x) = x \cdot e^x$ hat eine Nullstelle bei $x = 0$. Es gilt $f''(-1) < 0$ und $f''(1) > 0$. Somit ist der Graph auf $]-\infty; 0[$ eine Rechtskurve und auf $]0; \infty[$ eine Linkskurve.

**d)** $f''(x) = (-2x - 4) \cdot e^x$ hat eine Nullstelle bei $x = -2$. Es gilt $f''(-3) > 0$ und $f''(0) < 0$. Somit ist der Graph auf $]-\infty; -2[$ eine Linkskurve und auf $]-2; \infty[$ eine Rechtskurve.

**Nachgefragt**

- größer werdende Steigung $\Longrightarrow$ Linkskrümmung $\Longrightarrow$ steigende Werte der 1. Ableitung $\Longrightarrow$ positive 2. Ableitung
  kleiner werdende Steigung $\Longrightarrow$ Rechtskrümmung $\Longrightarrow$ fallende Werte der 1. Ableitung $\Longrightarrow$ negative 2. Ableitung
- Ist bei $x_0$ ein Wendepunkt im Graphen der Funktion f (z. B. bei einem Übergang von Links- zu Rechtskrümmung), so befindet sich bei $x_0$ im Graphen von f' ein Extrempunkt, weil davor die Steigungswerte wegen der Linkskrümmung steigen und danach wegen der Rechtskrümmung fallen, also ein Hochpunkt.
- Diana hat Recht, da f' an den Extremstellen das Vorzeichen wechselt. Dazwischen kann also f' nicht streng monoton sein und muss sowohl größer als auch kleiner werden. Dies bedeutet für den Graphen von f sowohl Links- als auch Rechtskrümmung (bzw. umgekehrt) zwischen den Extrempunkten. Also muss dazwischen auch ein Wendepunkt liegen.

**6** $f''(x) = 12x^2$ hat die einzige Nullstelle $x = 0$ und mit $f'''(x) = 24x$ folgt $f'''(0) = 0 \Longrightarrow$ keine Aussage bei diesem Kriterium. Für das Kriterium des VZW untersucht man $f''(-1) = +12$ (Linkskrümmung) und $f''(+1) = +12$ (Linkskrümmung). Hier findet also kein Wechsel der Krümmungsart statt $\Longrightarrow$ kein Wendepunkt.
Wie auch schon bei Aufgabe 3f) sieht man, dass das VZW-Kriterium stärker ist, denn es liefert immer eine Aussage, ob ein Wendpunkt vorliegt oder nicht. Das Kriterium der nächsthöheren Ableitung ist zwar oft schneller oder einfacher zu berechnen, führt aber manchmal zu keiner befriedigenden Lösung (dies gilt auch für die Bestimmung der Extrema).

**7** Der Graph ist bis $x = 2$ linksgekrümmt. Dort geht er in eine Rechtskrümmung über. Erst ab der Stelle $x = 4$ wechselt er wieder in eine Linkskrümmung.

**8** Lösung im Schulbuch.

**9** Individuelle Lösungen. Beispiele:

**a)** 

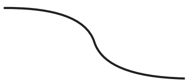
**b)** 

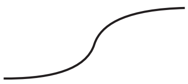
**c)** 

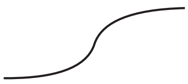
**10**
1 siehe Teilaufgabe 9a)
2 Die Steigung ist streng monoton steigend.
3 siehe Teilaufgabe 9a)
4 Linkskurve
5 Tabelle mit größer werdenden Zahlen in der zweiten Zeile.
6 Das Wachstum wird immer schneller.
7 Der Differenzenquotient der Steigung ist positiv.
8 Die Ableitung der Ableitung ist positiv.
9 Der Abwärtstrend verlangsamt sich.
10 Die 1. Ableitung wird immer größer.

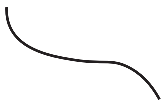
**11 a)** Die Steigung wird immer kleiner bis x = 1. Ab dort wird die Steigung nur noch größer.
**b)** Bis x = 1 Rechtskrümmung, danach nur Linkskrümmung.
**c)** Bei x = 1 befindet sich das stärkste Gefälle („negativste“ Steigung)
**d)** $f''(0) = -6$, $f''(1) = 0$ und $f''(2) = 6$

**12** Individuelle Lösungen. Beispiele:

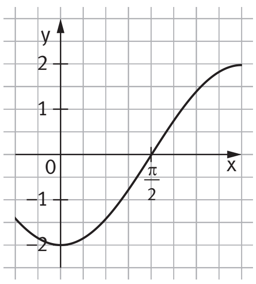
**a)** 

**b)** 

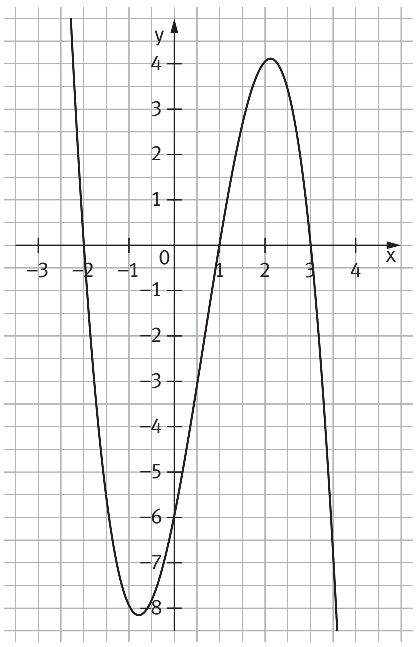
**c)** 

**d)** 

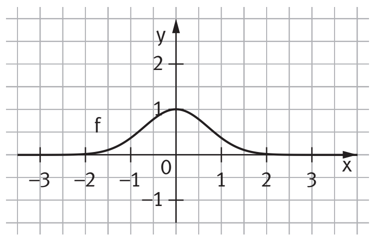
**13 a)** $W\left(\frac{\pi}{2}\,|\,0\right)$ hat die stärkste Steigung.




**b)** $W\left(\frac{2}{3}\,|\,-\frac{56}{27}\right)$




**c)** $W_2\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\,|\,e^{-\frac{1}{2}}\right)$ hat die stärkste Steigung.



**14** 1 nein 2 nein 3 ja 4 ja 5 ja

**15** Individuelle Diskussionsbeiträge und -ergebnisse.
„turning point" bezeichnet in der Mathematik einen Extrempunkt. Bei der Untersuchung literarischer Werke spricht man im Deutschen in diesem Zusammenhang vom „Wendepunkt" einer Geschichte.
„inflection point" bezeichnet in der Mathematik einen Wendepunkt. In der Literaturwissenschaft gibt es keinen korrespondierenden Ausdruck.

**16** **a)** Bei $x = 0$ ist die Steigung des Graphen von f null, aber auch $f''(0) = 0$. Die Steigung wird vor $x = 0$ kleiner (Rechtskrümmung) und nach $x = 0$ größer (Linkskrümmung). $x = 0$ ist somit eine Wendestelle (und wegen $f'(0) = 0$ handelt es sich um eine Sattelstelle).
Auch bei $x_{2/3} = \pm 2$ handelt es sich um Wendestellen, allerdings sind dies keine Sattelstellen.
Bei $x_{4/5} = \pm 2{,}8$ ist nur die erste Ableitung null. Es liegen somit Extremstellen vor. $x_4$ ist Minimalstelle (f' wechselt von – nach +), $x_5$ ist Maximalstelle (f' wechselt von + nach –).
**b)** Der Graph von f'' schneidet die x-Achse bei $x_1 = 0$ und bei $x_{2/3} = \pm 2$. Bei $x = -1$ hat der Graph von f'' einen Tiefpunkt und bei $x = 1$ einen Hochpunkt. Daraus folgt, dass dazwischen ein Wendepunkt liegt.

**17**

| **Dreieck-Nr.** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Steigung** | 1,50 | 1,15 | 0,67 | 0,39 | 0,11 | 0,05 | −0,33 | −0,34 | −0,67 | −1 |
| **Veränderung der Steigung** | | −0,35 | −0,48 | −0,28 | −0,28 | −0,06 | −0,38 | −0,01 | −0,33 | −0,33 |

**a)** siehe Tabelle. Die negativen Vorzeichen in der untersten Zeile bedeuten kleiner werdende Steigung im Bild, also eine Rechtskurve.
**b)** Im Bereich des 3. Steigungsdreiecks ist die Krümmung am stärksten.
**c)** Die Autofahrer sind wahrscheinlich deshalb überrascht, weil nach der Abschwächung der Kurve nach dem 5. Abschnitt zum 7. Abschnitt hin nochmal eine größere Fahrtrichtungsänderung kommt (−0,38).

**18** $f''(x) = -0{,}6x - 0{,}6$
**a)** $f''(-3) = 1{,}2$. Dies entspricht der Änderung der Fahrtrichtung des Autos (Änderung der Steigung des Graphen).
**b)** $f''(-2{,}5) = 0{,}9$. Die Abweichung von der Fahrtrichtung ist geringer, das Lenkrad ist nicht mehr so stark eingeschlagen.
**c)** Die Fahrtrichtungsänderung muss null sein (geradeaus fahren). $f''(x) = 0 \Longrightarrow x = -1$
**d)** Nach $x = -1$ soll das Auto die Fahrtrichtungsänderung f'' weiter verkleinern (Resultat: $f''(x) < 0$, also Rechtskurve).

**19** Susanne wird den gleichen Punkt als Sattelpunkt finden (wenn beide richtig rechnen). $S(x_0|0)$ bedeutet $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$. Damit ist wegen $g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$ (Produktregel) und $g''(x) = 2f'(x) + x \cdot f''(x)$ auch $g''(x_0) = 0$ (notwendig für Wendepunkt).
Außerdem ist mit $g'''(x) = 3f''(x) + x \cdot f'''(x)$ auch $g'''(x_0) \neq 0$ (hinreichende Bedingung). Da dann auch $g'(x_0) = f(x_0) + x f'(x_0) = 0 + x \cdot 0 = 0$ ist, findet auch Susanne hier einen Sattelpunkt.

**20** **a)** Der Graph hat einen Wendepunkt.
**b)** Sind alle niedrigeren Ableitungen an einer Stelle $x_0$ null bis auf $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, so gilt: Ist die Zahl n ungerade, so ist bei $x_0$ ein Wendepunkt, sonst ein Extrempunkt.

## Nachgefragt

- Siehe Beispielaufgabe 2 in Unterkapitel 3.1 im Schulbuch.
- Das Vorzeichen von $f''$ lässt auf Links- oder Rechtskrümmung schließen. Es ist aber nicht sinnvoll, den Wert als *Krümmung* zu bezeichnen, weil z. B. für $f(x) = x^2$ gilt: $f''(x) = 2$; $f''(x)$ ist also konstant. Anschaulich würde man aber nicht sagen, dass die Parabel konstante Krümmung hat. Näheres zum Krümmungsmaß findet man auf den Horizonte-Seiten 130 und 131 im Schulbuch.
- Dies ist i. Allg. nicht richtig. Geht der Graph von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung über, so ist dort ein Wendepunkt, bei dem die Steigung vorher kleiner wird und hinterher größer. Also kann es dann nicht der Punkt mit der stärksten Steigung sein (betrachte z. B. den Graphen von $f(x) = x^3 + x$ an der Stelle $x = 0$). Fordert man am Wendepunkt aber zusätzlich zur positiven Steigung noch, dass der Graph dort von einer Links- in eine Rechtskurve übergeht, so ist die Aussage (jedenfalls lokal an dieser Wendestelle) richtig.
- Wenn man langsamer beschleunigt, so wird die Geschwindigkeit dennoch größer (positive Beschleunigung), aber die Veränderung der Beschleunigung ist dann negativ. Betrachtet man die Geschwindigkeit $v$ als Funktion und die Beschleunigung als Ableitungsfunktion $v'$, so ist dann die Veränderung der Beschleunigung $v''$ die 2. Ableitung. Diese ist dann negativ, wenn langsamer beschleunigt wird. Der Graph der Geschwindigkeit $v$ ist dann rechtsgekrümmt.
- Ein (Zahlen-)Trend beim (Wirtschafts-)Wachstum bedeutet, dass das Wachstum sich in seiner Regelmäßigkeit ändert, nicht dass es sich umkehrt (z. B. von positiv nach negativ). Es kann z. B. sein, dass die Wirtschaft langsamer wächst. Dann wäre das in einem Graphen als Rechtskrümmung mit positiver Steigung erkennbar. Wenn die Wirtschaft aber z. B. nach einer Rezession wieder schneller wächst, wäre dies als Linkskrümmung mit positiver Steigung erkennbar.

## Entdecken

- Individuelle Überlegungen.
  Bei anderen Stundenlöhnen können höhere oder niedrigere Tagesgesamtkosten entstehen. Schüler geben eventuell niedrigere Löhne an, weil sie dies von Schüler- und Studentenjobs her kennen. Allerdings müssen sie ja auch meist keine Sozialversicherungen abführen. Geben die Schüler nur geringfügig höhere Stundenlöhne an, kann noch umgerechnet werden, was dies im Jahr für Mehrkosten verursacht.

## Aufgaben

**1** **a)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right)$ **b)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 12 \\ 11 & 0 & 5 & 29 \\ 26 & 0 & 0 & 104 \end{array}\right)$ **c)** $\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 8 & 14 \end{array}\right)$

**2** **a)**
$$\begin{aligned} 5x + y + 2z &= 4 \\ -2x - y + 4z &= -19 \\ 4x + 3z &= -5 \end{aligned}$$
**b)**
$$\begin{aligned} x - 3y + 5z &= 5 \\ 3x + y &= 10 \\ -2x + 2y &= 4 \end{aligned}$$
**c)**
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 9 \\ 5x + y &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

**3**
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot 6} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -12 & 6 & 6 & -12 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -12 & 6 & 6 & -12 \\ -16 & 6 & 0 & -14 \end{array}\right)$$

**4**
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[\cdot 2]{\cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -7 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II}-\mathrm{III}]{\cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -14 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}-\mathrm{II}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -14 & 2 & 8 \\ -8 & -16 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot 16} \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -14 & 2 & 8 \\ -8 & -16 & 0 & 0 \\ 16 & -16 & 0 & -48 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -14 & 2 & 8 \\ -8 & -16 & 0 & 0 \\ -24 & 0 & 0 & 48 \end{array}\right)$$
$\Longrightarrow a = -2 \Longrightarrow -8\,(-2) - 16b = 0 \Longrightarrow b = 1 \Longrightarrow -6\,(-2) - 14\,(1) + 2c = 8 \Longrightarrow c = 5 \Longrightarrow$
Lösungstripel: (–2 | 1 | 5)

**5** Aufgabe 1 **a)** (1 | –2 | 3) **b)** (4 | 7 | –3) **c)** (–1 | 0,5 | 2)
Aufgabe 2 **a)** (1 | 5 | –3) **b)** (2 | 4 | 3) **c)** (–2 | 10 | –9)
Aufgabe 3 (2 | 3 | –1)

## Nachgefragt

- Eine Matrix-Zeile stellt eine Gleichung dar. Das Multiplizieren einer Gleichung auf beiden Seiten ändert die Lösungen nicht (Äquivalenzumformung). Im Einführungsbeispiel bleiben die Lösungen (Stundenlöhne) gleich, wenn die Arbeiter doppelt bzw. halb so lange arbeiten und dafür insgesamt doppelt bzw. halb so viel Geld bekommen.
- Erkan hat Recht. Das Dividieren einer Gleichung auf beiden Seiten ändert ebenfalls die Lösungen nicht (das Dividieren durch die Zahl k entspricht dem Multiplizieren mit $\frac{1}{k}$). Man muss dann aber eventuell mit Brüchen weiterrechnen.

**6** Zuerst muss die vorletzte Zahl in der untersten Zeile 11 null werden, dafür muss die unterste Zeile so multipliziert werden, dass diese Zahl gleich der Zahl darüber 7 ist. Das ist möglich, indem man mit $\frac{7}{11}$ multipliziert. Man kann auch die zweite Zeile mit 11 und die dritte Zeile mit 7 multiplizieren, dann bekommt man keine Brüche.
Dann können diese beiden Zeilen subtrahiert werden und die Differenz in die unterste Zeile geschrieben werden.

Danach muss die vorletzte Zahl in der zweituntersten Zeile 7 null werden, dafür muss diese Zeile so multipliziert werden, dass diese Zahl gleich der Zahl darüber 3 ist. Das ist möglich, indem man mit $\frac{3}{7}$ multipliziert. Man kann auch die zweite Zeile mit 3 und die erste Zeile mit 7 multiplizieren, dann bekommt man keine Brüche.
Dann können diese beiden Zeilen subtrahiert und die Differenz in die vorletzte Zeile geschrieben werden. Damit hat dann die vorletzte Spalte bereits die notwendigen Nullen der Stufenform.

Nun kümmert man sich um die Spalte davor, in der jetzt die unterste Zahl 10 null werden muss. Dazu muss sie gleich der Zahl darüber 6 sein. Durch Multiplizieren und Subtraktion entsteht dann auch in dieser Spalte unten eine Null. Dabei bleiben die bereits erreichten Nullen der anderen Spalten erhalten, denn solange die Nullen multipliziert werden, bleiben sie null, und bei der Subtraktion wird $0 - 0 = 0$ gerechnet.

**7** Lösung im Schulbuch.

**8** **a)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 6 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{II} - \text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ Lösung: (3 | 1 | –1)

**b)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -4 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$ Lösung: (4 | 4 | 4)

**c)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I} - \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Lösung: (0,2 | 1,1 | 1,15)

**9** Setzt man den x-Wert und den y-Wert der Punkte P, Q, und R jeweils in $f(x) = ax^2 + bx + c$ ein, so entsteht jeweils folgendes LGS:

**a)** $\begin{aligned} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 &= 1 \\ a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \cdot 1 &= -19 \\ a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c \cdot 1 &= 11 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 25 & 5 & 1 & -19 \\ 100 & 10 & 1 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Gauß – Alg.}]{} \quad a = 1,\ b = -9,\ c = 1$

Funktionsgleichung: $f(x) = x^2 - 9x + 1$

**b)** $\begin{aligned} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c &= -6 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c &= 0 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c &= -2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Gauß – Alg.}]{} \quad a = -1,\ b = 3,\ c = -2$

Funktionsgleichung: $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

**10** Der Umformungsschritt steht in der falschen Zeile, wenn negative Zahlen subtrahiert werden, wird $-(-1) = +1$. In der letzten Spalte wurde die Operation überhaupt nicht ausgeführt.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I} - \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & -4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & 0 & \mathbf{-11} \\ 2 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right)$

**11 a)** $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 6 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II + III}} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 6 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$ Lösungstripel (2|–2|6) erfüllt alle drei Gleichungen.

**b)** Die Addition von zwei Zeilen ist das gleiche wie die Multiplikation einer Zeile mit (–1) und Subtraktion dieser Zeile von der anderen. Deshalb ist die Addition von zwei Zeilen immer eine erlaubte Umformung.

**12 a)** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow{3 \cdot \text{I} - \text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$ $\Longrightarrow$ a = 2 und b = 1

**b)** $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 6 \\ 5 & 6 & -7 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{3 \cdot \text{I} + \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 13 & 7 & 0 & 12 \\ 5 & 6 & -7 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II} + \text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 13 & 7 & 0 & 12 \\ 14 & 19 & 0 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$

a = 2
b = (9 – 14 · 2) : 19 = –1
c = (12 – 9 · 2 – 13 · (–1) ) : 7 = 1
d = 2 – 2 · 2 – 5 · (–1) – 2 · 1 = 1 Lösungstupel: (2|–1|1|1)

**13** x: Anzahl der PowerBoost-Tabletten; y: Anzahl der MuscleFeed-Tabletten. Damit gilt:
225 · x ist die Menge des mit den PowerBoost-Tabletten aufgenommenen Taurins.
150 · y ist die Menge des mit den MuscleFeed-Tabletten aufgenommenen Taurins.
$\Longrightarrow$ 225x + 150y = 1200
Ebenso ist 2x + 3y die Menge des mit den Tabletten aufgenommenen Zinks:
2x + 3y = 14.

$\left(\begin{array}{cc|c} 225 & 150 & 1200 \\ 2 & 3 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I} - 50 \cdot \text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 225 & 150 & 1200 \\ 125 & 0 & 500 \end{array}\right) \Longrightarrow$ x = 4 und y = 2

Man sollte vier PowerBoost-Tabletten und zwei MuscleFeed-Tabletten einnehmen.

**14** Lösung im Schulbuch.

**15 a)**
a + 2b + 3c = 1
2a – 3b – c = 4
3a – 8b – 5c = 5

$\xrightarrow{\text{Gauß – Alg.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ keine Lösung

**b)**
2x + 5y + 3z = 12
x + 2y + z = 5
x + 3y + 2z = 7

$\xrightarrow{\text{Gauß – Alg.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ unendlich viele Lösungen (a|3 – a|a – 1)

**c)**
–a + b – 2c = 1
a – b = 4
–4c = 10

$\xrightarrow{\text{Gauß – Alg.}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ unendlich viele Lösungen (a|a – 4|–2,5)

**d)**
3m + 3n + 3k = 3
0m + 0n + 0k = 2 Die zweite Zeile enthält einen Widerspruch. Es gibt somit keine Lösung.
m + n + k = 1

**16** Eine quadratische Funktion hätte die Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ und die Ableitungsfunktion $f'(x) = 2ax + b$. Wenn bei $x = 1$ ein Tiefpunkt liegt, also $f'(1) = 0$ gilt, so führt dies auf die Gleichung $2a + b = 0$. Aus den beiden Punkten $P_1$ und $P_2$ ergeben sich die anderen Gleichungen:

$$\begin{aligned} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c &= 3 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c &= 5 \\ 2a + b &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß – Alg.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Die unterste Gleichung wird wegen des Widerspruchs in der dritten Zeile von keinem Tripel $(a|b|c)$ erfüllt. Somit gibt es keine quadratische Gleichung, die die abgebildete Straßenkurve modelliert.

**17** $f(x) = ax^2 + bx + c$ und $f'(x) = 2ax + b$. Einsetzen der Koordinaten von P und Q sowie der Bedingung $f'(2) = 0$ führt zu folgendem LGS:

$$\begin{aligned} 1a + 1b + c &= 4 \\ 9a + 3b + c &= 4 \\ 2a \cdot 2 + b &= 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{Gauß – Alg.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es gibt unendlich viele Lösungen $(a|-4a|3a + 4)$.

**18**
$$\begin{aligned} a - 3b + 3c &= -3 \\ 5a - 3b + c &= 5 \\ 2a - 2b + 2c &= 2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{-5 \cdot \text{I} + \text{II}} \\ \xrightarrow{-2\text{I} + \text{III}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 12 & -14 & 20 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{-1\text{II} + 3\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 12 & -14 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$c = 2 \Longrightarrow b = 4 \Longrightarrow a = 3$. Lösung: $(3|4|2)$

**19** **a)** Hannes hat 3-mal 1 Cent, 2-mal 2 Cent und 4-mal 5 Cent.

**b)** e: Anzahl der 1-Cent-Münzen, z: Anzahl der 2-Cent-Münzen, f: Anzahl der 5-Cent-Münzen

$$\begin{aligned} e + z + f &= 9 \\ e + 2z + 5f &= 27 \\ -e + 2z &= 1 \end{aligned} \qquad \text{Lösung: } (3|2|4)$$

**c)** Wenn im Aufgabentext die Zusatzinformation zu den 1-Cent- und 2-Cent-Münzen fehlen würde, gäbe es keine dritte Zeile bzw. nur eine Nullzeile in der dritten Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 27 \\ 0 & -1 & -4 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{Lösung: } (3f - 9|18 - 4f|f)$$

Für f kommt aber wegen der ersten Bedingung nur $0 \leq f \leq 9$ in Frage. Für z aber auch, d. h. dann also $0 \leq z = 18 - 4f \leq 9$. Letzteres führt nach Umformung zu $2{,}25 \leq f$. Die Bedingung $0 \leq 18 - 4f$ führt zu $f \leq 4{,}5$. Es kommen also nur die Möglichkeiten $f = 4$ (wie in Aufgabenteil b) ermittelt) und $f = 3$ vor. Letzteres ist eine zulässige Lösung mit $(0|6|3)$. Weitere Möglichkeiten gibt es für f nicht, also auch nicht für das Gleichungssystem, weil sonst eine negative Anzahl von Münzen vorkommen würde.

**20** Das Vertauschen von Spalten ist im Allgemeinen nicht möglich, wie etwa folgendes Beispiel zeigt:

$$\begin{aligned} -3a + b + 3c &= -3 \\ -3a + 5b + c &= 5 \\ -2a + 2b + 2c &= 2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Spalte 1 und 2 vertauschen}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{-5 \cdot \text{I} + \text{II}} \\ \xrightarrow{-2\text{I} + \text{III}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 12 & -14 & 20 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{-1\text{II} + 3\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 12 & -14 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow c = 2 \Longrightarrow b = 4 \Longrightarrow a = 3$. Lösung: $(3|4|2)$

Einsetzen ins Gleichungssystem liefert aber in der ersten Zeile: $-3 \cdot 3 + 4 + 3 \cdot 2 = 1$ und nicht $-3$.

Das Vertauschen von Spalten ist nur möglich, wenn man dabei beachtet, dass dann auch die Variablen die Spalten tauschen.

**21 a)** $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Wegen des Widerspruchs in der mittleren Zeile hat das LGS keine Lösung. Hier sieht man, dass eine reine Nullzeile nicht unbedingt unendlich viele Lösungen bedeutet.

**b)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ (0|0|0) ist die einzige Lösung.

**c)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$ Es gibt unendlich viele Lösungen (a|0|0).

**22** Individuelle Kurzvorträge.

1 Zu den Sachverhalten können das Einführungsbeispiel (Stundenlöhne) oder die Aufgaben 9, 13, 16, 17, 19 b) verwendet werden.

2 Zur Vereinfachung der Matrizenschreibweise findet man Hinweise im Schulbuch auf S. 105 und in Aufgabe 1.

3 Zum Gauß-Algorithmus findet man Hinweise im Schulbuch auf S. 105 sowie in den Aufgaben 4, 7, 11, 14 und 18.

## Nachgefragt

- Die Aussage ist falsch, siehe z. B. Aufgabe 21 a).
- Die Aussage ist richtig. Unabhängig vom restlichen Gleichungssystem bedeutet eine solche Zeile einen Widerspruch, der durch kein Zahlentupel erfüllt werden kann. Also hat das LGS keine Lösung, denn eine Lösung müsste ja auch die betreffende Zeile erfüllen.
- Beide Zeilen einer Matrix sind Kurzschreibweisen für zwei Gleichungen. Die beiden Gleichungen kann man sich als Waagen vorstellen, die im Gleichgewicht sind, weil auf beiden Seiten gleiche Gewichte liegen. Die Einzelgewichte (Unbekannte) kennt man zwar nicht, aber das Gleichgewicht ist sichtbar. Addiert man nun die beiden gleichen Seiten der einen Waage zu den ebenfalls gleichen Seiten der anderen Waage, so ist auf beiden Seiten gleich viel hinzugefügt worden. Deshalb ist die Waage immer noch im Gleichgewicht. Die Einzelgewichte (Lösungen) haben sich dabei nicht verändert.

**Entdecken**

- Individuelle Lösungen. Beispiel:
  Legt man den Koordinatenursprung in die rechte untere Ecke des Brückenbogens, erhält man unter Beachtung des Hochpunkts H (–85 | 68) die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{4}{425}x^2 - \frac{8}{5}x$.
  Legt man den Koordinatenursprung unter den Hochpunkt auf die Höhe, wo der Bogen das Ufer trifft, erhält man unter Beachtung des Hochpunkts H (0 | 68) die Funktionsgleichung
  $f(x) = -\frac{4}{425}x^2 + 68$.

**Aufgaben**

**1** **a)** $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \Rightarrow f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
**b)** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$
**c)** $f(x) = ax^3 + bx \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + b \Rightarrow f''(x) = 6ax$
**d)** $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx \Rightarrow f''(x) = 12ax^2 + 2b$
**e)** $f(x) = 3\sin(x) - 2 \Rightarrow f'(x) = 3\cos(x) \Rightarrow f''(x) = -3\sin(x)$
**f)** $f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a \Rightarrow f''(x) = 0$

**2** **a)** $f(3) = -2$ **b)** $f(1) = 4$ und $f''(1) = 0$ **c)** $f'(2) = 0$
**d)** $f(6) = 1$ und $f'(6) = 0$ und $f''(6) = 0$ **e)** $f(3) = 1$ und $f'(3) = 2$

**3** **a)** $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0$
$a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 15$
$a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 10$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 15 \\ 9 & 3 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß – Alg.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
Eine Überprüfung des Graphen zeigt, dass dieser tatsächlich durch die angegebenen Punkte verläuft.

**b)** $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -3$
$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 11$
$a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = -3$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß – Alg.}} f(x) = 1{,}75x^2 + 3{,}5x - 3$$

Eine Überprüfung des Graphen zeigt, dass dieser tatsächlich durch die angegebenen Punkte verläuft.

**4** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$

**a)**
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & -26 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 14 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{II} - \text{I}} \\ \xrightarrow{\text{I} - \text{III}} \\ \xrightarrow{\text{IV} - \text{I}} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 8 & -4 & 2 & 0 & 22 \\ 27 & 9 & 3 & 0 & 18 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{III} - 2 \cdot \text{I}} \\ \xrightarrow{\text{IV} - 3 \cdot \text{II}} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & -6 & 0 & 0 & 18 \\ 24 & 6 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III} + \text{IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & -6 & 0 & 0 & 18 \\ 30 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow a = 1,\ b = (18 - 6 \cdot 1) : (-6) = -2,\ c = 2 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 3,\ d = -4$
$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$
Eine Überprüfung des Graphen zeigt, dass dieser tatsächlich durch die angegebenen Punkte verläuft.

**b)** $\left(\begin{array}{cccc|c} -8 & 4 & -2 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrows \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & 15 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{I} - \text{II} \\ \text{III} - \text{I} \\ \text{IV} - \text{I}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 2 & 0 & -14 \\ 8 & 4 & 2 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{III} - \text{II} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{IV}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 2 & 0 & -14 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 8 \\ 6 & -6 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$

$\Longrightarrow b = 1,\ a = (-12 + 6 \cdot 1) : 6 = -1,\ c = (-14 - 8 \cdot (-1) + 4 \cdot 1) : 2 = -1,\ d = 1$

$f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

Eine Überprüfung des Graphen zeigt, dass dieser tatsächlich durch die angegebenen Punkte verläuft.

**c)** Ursprung: $(0|0) \Longrightarrow f(0) = 0$, Sattelpunkt $\Longrightarrow f(2) = 3$ und $f'(2) = 0$ und $f''(2) = 0$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II} - \text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \cdot \text{III} - \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 16 & 4 & 0 & 0 & -3 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} - 2 \cdot \text{IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 16 & 4 & 0 & 0 & -3 \\ -8 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$

$\Longrightarrow a = \frac{3}{8},\ b = \left(-3 - 16 \cdot \frac{3}{8}\right) : 4 = -\frac{9}{4},\ c = \left(3 - 8 \cdot \frac{3}{8} - 4 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right)\right) : 2 = \frac{9}{2},\ d = 0$

$f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{2}x$

Eine Überprüfung des Graphen zeigt, dass dieser tatsächlich durch die angegebenen Punkte verläuft.

**d)** Hochpunkt: $(-1|1) \Longrightarrow f(-1) = 1$ und $f'(-1) = 0$; Tiefpunkt $(1|-1) \Longrightarrow f(1) = -1$ und $f'(1) = 0$

$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} - \text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{III} - 2 \cdot \text{II} \\ \text{IV} - \text{II}}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Longrightarrow b = 0,\ a = (-2 - 4 \cdot 0) : (-4) = 0{,}5,\ c = 0 - 3 \cdot (0{,}5) + 2 \cdot 0 = -1{,}5,\ d = 1 + 1 \cdot 0{,}5 - 0 + 1 \cdot (-1{,}5) = 0$

$f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x$

Eine Überprüfung des Graphen zeigt, dass dieser tatsächlich durch die angegebenen Punkte verläuft.

**5** $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $f'(x) = 2ax + b$. Bedingungen: $f(1) = 1$, $f(2) = -3$ und $f'(2) = 0$.

$\begin{array}{l} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -3 \\ 2a \cdot 2 + b \qquad\;\; = 0 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß – Alg.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow f(x) = 4x^2 - 16x + 13$

Eine Überprüfung des Graphen zeigt, dass dieser tatsächlich durch die angegebenen Punkte verläuft.

**6** $f(x) = ax^3 + cx$ (nur ungerade Exponenten) mit $f'(x) = 3ax^2 + c$.

Bedingungen: $f(2) = 16 \cdot 2 - 24 = 8$ und $f'(2) = 16$.

$\begin{array}{l} a \cdot 2^3 + c \cdot 2 = 8 \\ 3a \cdot 2^2 + c \;\;\; = 16 \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 2 & 8 \\ 16 & 0 & 24 \end{array}\right) \Longrightarrow f(x) = 1{,}5x^3 - 2x$

Eine Überprüfung des Graphen zeigt, dass dieser tatsächlich durch die angegebenen Punkte verläuft.

**Nachgefragt**

- Individuelle Lösungen. Siehe z. B. Merke-Kasten auf S. 111 und Aufgabe 2 im Schulbuch.
- Es müssen genau so viele Bedingungen bekannt sein, wie Unbekannte (Koeffizienten) in der Funktionsgleichung vorkommen.
  Beispiel: Bei Funktionen 2. Grades müssen es drei Bedingungen sein, bei Funktionen 3. Grades müssen es vier Bedingungen sein.
  Die Bedingungen müssen außerdem unabhängig voneinander sein (eine Bedingung darf nicht mehrmals verwendet werden bzw. das Vielfache einer Gleichung kann keine weitere Bedingung sein).
  Gibt es zu wenige Bedingungen, so resultiert dies womöglich in unendlich vielen Lösungen (weil die Matrix mit einer Nullzeile aufgefüllt würde). Gibt es zu viele Bedingungen, so gibt es möglicherweise keine Lösung, weil die Bedingungen einander widersprechen können.
- Bei 2 a), 2 c), 2 e), 3 a), b), 4 a), b), d) und bei den Aufgaben 5 und 6 wird die 2. Ableitung nicht benötigt.
- Bei 2a), 3a), b), 4a), b) wird auch die 1. Ableitung nicht benötigt.

**7** **a)** Flusslauf: ganzrationale Funktion 3.Grades
**b)** Snowboardsprung: ganzrationale Funktion 2. Grades
**c)** Dinosaurierrücken: ganzrationale Funktion 3. Grades mit Sattelpunkt
**d)** Wasserfontänen: ganzrationale Funktion 2. Grades
**e)** Kegelschnitt (abgebildete Parabel): ganzrationale Funktion 2. Grades

**8** Lösung im Schulbuch.

**9** Mit dem Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und den genannten Bedingungen erhält man ein LGS, das auf folgende Matrix führt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Der Gauß-Algorithmus liefert die eindeutige Lösung $(-1 \mid -3 \mid 0 \mid 8)$. Somit erhält man den Funktionsterm $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 8$.
Der Graph dieser Funktion hat aber bei $x = 0$ einen Hochpunkt, keinen Tiefpunkt. Es gibt also keine Funktion, wie sie im Aufgabentext beschrieben wird.

**10** **a)** Bedingungen: $f(0) = -12$, $f'(4) = 0$, $f'(3) = 6$ und $f''(3) = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 48 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 6 \\ 18 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} - \text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 48 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 27 & 9 & 3 & 0 & 18 \\ 18 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3 \cdot \text{II} - \text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 48 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 117 & 15 & 0 & 0 & -18 \\ 18 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \cdot \text{III} - 15 \cdot \text{IV}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 48 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 117 & 15 & 0 & 0 & -18 \\ -36 & 0 & 0 & 0 & -36 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$
Eine Überprüfung des Graphen zeigt, dass dieser die angegebenen Bedingungen erfüllt.

**b)** $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ (nur gerade Exponenten) $\Longrightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx$.
Bedingungen: $f(1) = 1$, $f(2) = 0$ und $f'(2) = 0$.

$$\begin{array}{ll} a \cdot 1^4 + b \cdot 1^2 + c & = 1 \\ a \cdot 2^4 + b \cdot 2^2 + c & = 0 \\ 4a \cdot 2^3 + 2b \cdot 2 & = 0 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 & 0 \\ 32 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß – Alg.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 15 & 3 & 0 & -1 \\ 36 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow f(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{9}$
Eine Überprüfung des Graphen zeigt, dass dieser die angegebenen Bedingungen erfüllt.

**11** Wegen der Symmetrie ist der Grad der Funktion entweder 2 oder 4.
Bedingungen: $f(2) = 0$ (Schnittpunkt mit der x-Achse), $f(0) = 4$ (Schnittpunkt mit der y-Achse), $f(-3) = 6{,}25$.
Der Ansatz 2. Grades $f(x) = ax^2 + c$ führt mit $f(0) = 4$ auf $c = 4$; $f(x) = ax^2 + 4$ führt mit $f(2) = 0$ auf $4a + 4 = 0$ und somit zu $a = -1$. Für die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ gilt aber $f(-3) \neq 6{,}25$. Somit gibt es keine Lösungsfunktion 2. Grades.
Der Ansatz 4. Grades liefert ein LGS mit drei Zeilen und führt schließlich zur Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$, die die Bedingungen erfüllt.

**12** Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx$ Bedingungen: $f(2) = 14$, $f(1{,}5) = 0$
Man erhält die Funktion $f(x) = 4x^3 - 9x$, die die Bedingungen erfüllt.

**13** **a)** Mögliche Bedingungen: $f(1) = 0{,}8$, $H(3\,|\,2{,}5)$ ist Hochpunkt, $T(5\,|\,1)$ ist Tiefpunkt.
LGS z. B. mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und dem Hoch- und Tiefpunkt als charakteristischen Punkten:

$$\begin{array}{ll} 27a + 9b + 3c + d & = 2{,}5 \\ 125a + 25b + 5c + d & = 1 \\ 27a + 6b + c & = 0 \\ 75a + 10b + c & = 0 \end{array}$$

**b)** Aus Sabrinas Zahlen ergibt sich die Funktionsgleichung $f(x) = 0{,}375x^3 - 4{,}5x^2 + 16{,}875x - 17{,}75$.
Die Extrempunkte stimmen mit denen in der Abbildung überein. Eine Tabelle liefert recht gute Ergebnisse für Werte zwischen den Extrempunkten (z. B. $f(3{,}5) \approx 2{,}3$ und $f(4) \approx 1{,}8$), allerdings weichen die Werte außerhalb des Intervalls $[3;\, 5]$ so stark von der Abbildung ab, dass dort mit einer anderen Funktion modelliert werden sollte (z. B. $f(1) = -5$ und $f(6) = 2{,}5$).

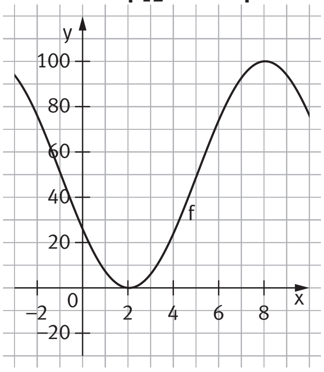
**14** Lösung im Schulbuch.

**15** Koordinatenursprung im tiefsten Punkt der Kette $\Longrightarrow f(0{,}75) = 0{,}5$ und $f(0) = 0$.
$\Longrightarrow 0 = \frac{a}{2}(e^0 + e^{-0}) + b = \frac{a}{2}(2) + b = a + b$, also $0 = a + b$ bzw. $-a = b$ und $0{,}5 = \frac{a}{2}(e^{0{,}75} + e^{-0{,}75}) + b$, also $0{,}5 \approx \frac{a}{2}(2{,}589) - a \Longrightarrow a \approx 1{,}697$ und damit $b \approx -1{,}697$.

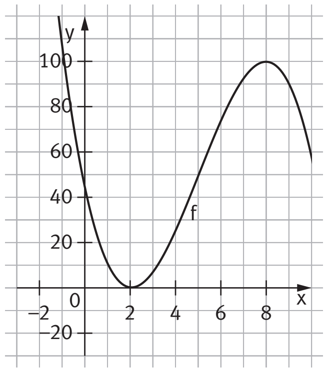
Alternativ: Koordinatenursprung unter Tiefpunkt der Kette auf dem Boden $\Longrightarrow f(0{,}75) = 1$ und $f(0) = 0{,}5$.
$\Longrightarrow 0{,}5 = \frac{a}{2}(e^0 + e^{-0}) + b = \frac{a}{2}(2) + b = a + b$, also $0{,}5 = a + b$ bzw. $0{,}5 - a = b$ und $1 = \frac{a}{2}(e^{0{,}75} + e^{-0{,}75}) + b$, also $1 \approx \frac{a}{2}(2{,}589) + 0{,}5 - a \Longrightarrow a \approx 1{,}697$ und damit $b \approx -1{,}197$.

**16** **a)** Die Form entspricht eher einer regelmäßigen Welle.
**b)** Koordinatenursprung im Hochpunkt $\Longrightarrow$ Kosinusfunktion. Im Bild lässt sich abmessen, dass etwa bei $(3{,}5\,|\,-1{,}1)$ der Tiefpunkt liegen muss. Daraus ergibt sich eine Periode von $p = 7$ und eine Amplitude von $a = 0{,}55$ sowie eine Verschiebung um $-0{,}55$ in Richtung der y-Achse:
$f(x) = 0{,}55 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{7}x\right) - 0{,}55$.

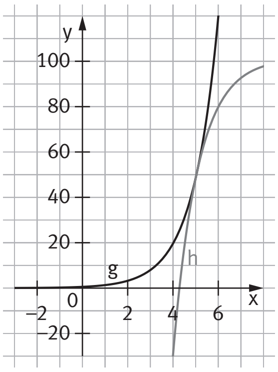
**17 a)** $y = 50 \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{12}(x-5)\right] + 50$




**b)** $y = -0{,}93x^3 + 13{,}9x^2 - 44{,}4x + 40{,}7$




**c)** $g(x) = 50 \cdot e^{0{,}9162 \cdot (x-5)}$ und $h(x) = -50 \cdot e^{-0{,}9162 \cdot (x-5)} + 100$




**d)**

| x | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **WAHR** | 0 | 5 | 20 | 50 | 80 | 95 | 100 |
| **ganzr. 3** | 0,06 | 7,49 | 25,98 | 49,95 | 73,82 | 92,01 | 98,94 |
| **sin** | 0,003 | 6,8798 | 25,156 | 50 | 74,844 | 93,1202 | 99,9971 |
| **expon** | 3,201 | 8,0015 | 20,002 | 50 | 79,9982 | 91,9985 | 96,7991 |

Der Vergleich ergibt, dass die Sinus-Funktion die Unternehmenskurve an den Rändern am besten modelliert und die Exponentialfunktionen am Wendepunkt ein besseres Modell sind.

**18 a)** Die Werte schwanken bis $x = 1500$ um den Wert 280, so dass Jan diesen Bereich vielleicht mit $y = 280$ modellieren möchte. Der Fehler liegt dabei unter 10 ppm, weil die wahren Werte offenbar die ganze Zeit weniger als 10 von der 280 abweichen. Dieser Fehler wäre also unter 5 % $\left(\frac{10}{280} \approx 3{,}57\,\%\right)$ und kann für $CO_2$-Angaben als akzeptabel gelten.

**b)** Die Kurve steigt extrem schnell. Dies spricht für eine Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot e^{bx}$. Dabei ist hier noch eine Verschiebung entlang der Achsen zu beachten. Mit Teilaufgabe a) kann $y = 280$ als waagerechte Asymptote für das Modell betrachtet werden, so dass die Verschiebung in y-Richtung 280 beträgt.

Mit $f(1700) = 280$ und $f(1800) = 290$ kann man für das Modell annehmen, dass der Schnittpunkt mit der y-Achse nach $x = 1800$ verschoben werden kann und um den Faktor $a = 10$ gestreckt wurde.

Daraus ergibt sich zunächst: $f(x) = 10 \cdot e^{b(x-1800)} + 280$.

Mit $f(2000) = 380$ folgt $380 = 10 \cdot e^{b(2000-1800)} + 280 \Longrightarrow b \approx 0{,}0115$.

Die Funktion $f(x) = 10 \cdot e^{0{,}0115(x-1800)} + 280$ modelliert den abgebildeten Graphen auch bei $x = 1700$ und $x = 1900$ mit einem Fehler von unter 5 %.

**Nachgefragt**

- Jakob hat nicht Recht. Eine ganzrationale Funktion 4. Grades hätte die allgemeine Gleichung $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Das heißt, man braucht i. Allg. fünf Bedingungen. Wenn Informationen zur Symmetrie bekannt sind (hier z. B: Achsensymmetrie zur y-Achse), reichen auch drei Bedingungen, weil dann $b = d = 0$ gilt. Fasst man diese Symmetriebedingung als zusätzliche Bedingung auf, so sind es dann in diesem speziellen Fall tatsächlich vier Bedingungen. Jakob schränkt seinen Satz aber nicht auf einen speziellen Fall ein. Deshalb muss der Satz als allgemeine Aussage aufgefasst werden und ist damit falsch.
- Das ist i. Allg. nicht möglich. Wenn die drei Punkte auf einer Geraden liegen, lässt sich keine Parabel durch diese Punkte legen. Aber auch wenn die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen, geht das nicht immer; siehe dazu S. 108 Aufgabe 16 im Schulbuch.
- Kilian hat Recht. Die Ableitungsfunktion müsste drei Nullstellen mit Vorzeichenwechsel (also keine mehrfachen Nullstellen) enthalten. Das heißt, die Ableitungsfunktion muss mindestens vom Grad 3 sein. Da beim Ableiten der höchste Exponent um 1 sinkt, muss also die Ausgangsfunktion mindestens vom Grad 4 sein.
- Die Aussage ist so nicht haltbar. Mit dem Validierungsschritt wird nicht unbedingt überprüft, ob richtig gerechnet wurde, sondern, ob das gefundene mathematische Modell zur gegebenen Situation passt. Da beim Modellieren am Anfang immer Annahmen getroffen werden (z. B. näherungsweise parabelförmig, Schätzwerte usw.), kann trotz richtiger Rechnung das Ergebnis für die Sachsituation (eventuell auch nur teilweise) unbefriedigend sein (siehe auch S. 114 Aufgabe 13 im Schulbuch).

**Entdecken**

- $K(x) = 500 + 25x$
- 

| x in m² | 4 | 8 | 12 | 40 | 64 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Preis in € pro m² | 59 | 58 | 57 | 50 | 44 | 40 |

- 

| Gesamtpreis in € | 236 | 464 | 684 | 2000 | 2816 | 3200 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| K (x) in € | 600 | 700 | 800 | 1500 | 2100 | 2500 |
| Gewinn in € | –364 | –236 | –116 | 500 | 716 | 700 |

- Der Gewinn wird bei ungefähr 64 m² maximal.

**Aufgaben**

**1** **a)** $f(x) = (x+1)^2 \Longrightarrow T(-1\,|\,0)$ ist Tiefpunkt, weil die Parabel nach oben geöffnet ist.
**b)** $f(x) = -(x-3)^2 \Longrightarrow H(3\,|\,0)$ ist Hochpunkt, weil die Parabel nach unten geöffnet ist.
**c)** $f(x) = 4(x-0)^2 - 9 \Longrightarrow T(0\,|\,-9)$ ist Tiefpunkt, weil die Parabel nach oben geöffnet ist.
**d)** $f(x) = (x-1)^2 - 1 \Longrightarrow T(1\,|\,-1)$ ist Tiefpunkt, weil die Parabel nach oben geöffnet ist.
**e)** $f(x) = 2(x+1)^2 - 2 \Longrightarrow T(-1\,|\,-2)$ ist Tiefpunkt, weil die Parabel nach oben geöffnet ist.
**f)** $f(x) = -(x-1{,}5)^2 - 0{,}75 \Longrightarrow T(1{,}5\,|\,-0{,}75)$ ist Hochpunkt, weil die Parabel nach unten geöffnet ist.

**2** H: Hochpunkt, T: Tiefpunkt
**a)** $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$ mögliche Extremstellen $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -1 \Longrightarrow H(-1\,|\,0)$, $T\left(-\frac{1}{3}\,\middle|\,-\frac{4}{27}\right)$
**b)** $f'(x) = 8x^3 - 8x$ mögliche Extremstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = -1$
$\Longrightarrow T_1(-1\,|\,-2)$, $H(0\,|\,0)$, $T_2(1\,|\,-2)$
**c)** $f'(x) = 6x^2 - 6x$ mögliche Extremstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1 \Longrightarrow H(0\,|\,4)$ und $T(1\,|\,3)$
**d)** $f'(x) = -8x^3 + 4x$ mögliche Extremstellen $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $x_3 = -\sqrt{\frac{1}{2}} \Longrightarrow H_1\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\,\middle|\,-\frac{1}{2}\right)$,
$T(0\,|\,-1)$ und $H_2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\,\middle|\,-\frac{1}{2}\right)$
**e)** $f'(x) = 4\cos(4x)$ $\Longrightarrow H_1\left(\frac{\pi}{8}\,\middle|\,2\right)$, $T_1\left(\frac{3\pi}{8}\,\middle|\,0\right)$, $H_2\left(\frac{5\pi}{8}\,\middle|\,2\right)$, $T_2\left(\frac{7\pi}{8}\,\middle|\,0\right)$, $H_3\left(\frac{9\pi}{8}\,\middle|\,2\right)$
**f)** $f'(x) = \frac{-\sin(x-1)}{2\sqrt{2+\cos(x-1)}}$ Der Zähler wird im Intervall $[0;\,\pi]$ nur für $x = 1$ null. Dies ist also die einzige mögliche Extremstelle. Da hier f' eine VZW von – nach + hat, handelt es sich bei $T\left(1\,\middle|\,\sqrt{3}\right)$ um einen Tiefpunkt.
**g)** $f'(x) = -2xe^{1-x^2}$ mögliche Extremstelle $x = 0 \Longrightarrow H(0\,|\,e)$
**h)** $f'(x) = 0{,}5(-2x-1)e^{-2x} \Longrightarrow H\left(-\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{1}{4e}\right)$
**i)** $f'(x) = 0{,}5xe^{0{,}5x}$ $\Longrightarrow T(0\,|\,-2)$

**3** $f'(x) = 4x^3 - 4x$ mögliche Extremstellen: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$
$\Longrightarrow T(-1\,|\,0)$, $H(0\,|\,1)$, $T(1\,|\,0)$ sind Extrempunkte.
**a)** $y = 1$ ist globales Maximum (bei $x = 0$).
**b)** Das Randmaximum 9 ist das globale Maximum (bei $x = 2$).
**c)** Das Randmaximum 9 ist das globale Maximum (bei $x = -2$).
**d)** Es existiert auf $]0;\,1]$ kein globales Maximum, weil $x = 0$ nicht zum Intervall gehört.
**e)** $y = 1$ ist globales Maximum (bei $x = 0$).
**f)** Ex existiert auf $\mathbb{R}$ kein globales Maximum.

**Nachgefragt**

- Der y-Wert ist die Größe, die maximal oder minimal werden soll, also z. B. der Gewinn, das Volumen, die Kosten usw. Der x-Wert ist die Größe, die veränderbar ist und von welcher der y-Wert abhängt.
- Siehe S. 116 und 117 im Schulbuch.
- Wenn Liam sich nur für das globale Maximum bzw. Minimum interessiert, hat er Recht, allerdings nur bei ganzrationalen Funktionen und reinen Exponentialfunktionen. Ein globales Extremum ist auch ein lokales Extremum, und diese Extrema liegen bei den genannten Funktionsklassen an den Extrempunkten oder Intervallrändern. Bei Funktionen wie $f(x) = \frac{3}{x^2 - 3}$ jedoch würde man mit Liams Idee z. B. für das Intervall Intervall $[-2; 2]$ die Punkte $R_1(-2|3)$, $H(0|-1)$ und $R_3(2|3)$ erhalten. H ist aber kein Tiefpunkt, sondern ein Hochpunkt und 3 ist in diesem Intervall auch nicht das globale Maximum (z. B. $f(1{,}8) = 12{,}5$).

**4** A und 2, denn die Oberfläche des Zylinders soll minimal werden.
B und 5, denn die Rechtecksfläche soll maximal werden. Wenn die eine Seite die Länge x hat, muss die andere die Länge $25 - x$ haben, damit alle vier Seiten zusammen 50 cm ergeben.
C und 4, denn das Volumen soll maximal werden. Wenn die Kante der quadratischen Grundfläche die Länge x hat, so bilden Grund- und Deckfläche bereits 8 Kanten der Länge x. Die vier dazu senkrechten Kanten dürfen zusammen also nur noch $3 - 8x$ lang sein. Somit ist die Höhe der Schachtel $(3 - 8x) : 4$.

**5** **a)** Einnahmen bei x Produktionseinheiten (1 Produktionseinheit = 1000): 20x; Kosten: f(x)
Gewinn (Zielfunktion): $G(x) = 20x - (x^3 - 10x^2 + 44x) = -x^3 + 10x^2 - 24x$

**a)** Das Unternehmen macht Gewinn, wenn G(x) positiv ist, also muss für die Intervalle zwischen den Nullstellen geprüft werden, ob die Werte positiv oder negativ sind.
Nullstellen: $-x^3 + 10x^2 - 24x = x(-x^2 + 10x - 24) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6$
Für die Intervalle ]0; 4[ und ]4; 6[ ergibt sich, dass es nur im zweiten positive Werte gibt. Somit macht das Unternehmen Gewinn, wenn es zwischen 4000 und 6000 Stück verkauft.

**b)** Die Zielfunktion soll maximal werden:
$G'(x) = -3x^2 + 20x - 24 \Longrightarrow x_{1/2} = \frac{-20 \pm \sqrt{112}}{-6}$; $x_1 \approx 1{,}569$, $x_2 \approx 5{,}097$.
Wegen $G''(x) = -6x + 20$ und daher $G''(1{,}6) > 0$ (Linkskrümmung) und $G''(5{,}1) < 0$ (Rechtskrümmung) ist der Gewinn bei einer Stückzahl von 5097 am höchsten.

**6** **a)** $y = -\frac{5}{3}x + 5$

**b)** Die Breite des Rechtecks definiert einen Wert x auf der x-Achse. Die Höhe des Rechtecks ist der zugehörige y-Wert der Geraden aus a):
$A(x) = x \cdot \left(-\frac{5}{3}x + 5\right) = \left(5 - \frac{5}{3}x\right) \cdot x.$

**c)** Zielfunktion: $A(x) = 5x - \frac{5}{3}x^2 \Longrightarrow A'(x) = 5 - \frac{10}{3}x \Longrightarrow$ Extremstelle $x = 1{,}5$

**d)** Die Breite des Rechtecks liegt im Intervall ]0; 3[. Die Randwerte sind mit $A(0) = 0$ und $A(3) = 0$ beide kleiner als der Extremwert $A(1{,}5) = 3{,}75$. Also handelt es sich bei 3,75 um den maximalen Flächeninhalt.

**7** Lösung im Schulbuch.

**8** **a)** längere gestrichelte Linie: $10 - 2x$, kürzere gestrichelte Linie: $6 - 2x$

**b)** $V(x) = (10 - 2x)(6 - 2x)x = 4x^3 - 32x^2 + 60x$

**c)** $V'(x) = 12x^2 - 64x + 60$

Extremstellen: $x_1 \approx 4{,}12$ mit $V''(x_1) > 0$ und $x_2 \approx 1{,}21$ mit $V''(x_2) < 0$

Ein lokales Maximum liegt also bei etwa $x = 1{,}2$ cm. Man sollte das Blech also mit $x = 1{,}2$ cm einschneiden.

**d)** Für $x \to \infty$ gilt $V(x) \to \infty$. Das in c) berechnete lokale Maximum ist also auf ganz $\mathbb{R}$ kein globales Maximum.

**e)** Für x kommen nur positive Werte in Frage. Da die gestrichelten Linien positive Länge haben müssen, ergibt sich aus a) außerdem die Einschränkung $x < 3$. Die Randwerte $V(0) = 0$ und $V(3) = 0$ liegen beide unter dem Extremalwert $V(x_2) \approx 32{,}8$. Also handelt es sich dabei auf $]0;3[$ um das globale Maximum.

**9** **a)** Die Frage ist, ob die maximale Fensterrahmenlänge 42 m überschreitet.

Zielfunktion: Fensterrahmenlänge $L(x) = 4x + 2 \cdot f(x) = 4x + 2\left(-\frac{1}{9}x^2 + 16\right) = -\frac{2}{9}x^2 + 4x + 32$, wenn x die halbe Breite des Fensters bedeutet.

$L'(x) = -\frac{4}{9}x + 4$

Extremstelle $x = 9$ mit $L''(9) = -\frac{4}{9} < 0$, also lokales Maximum $L(9) = 50$ und Randwerte $L(0) = 32$ und $L(12) = 48$

Das begrenzte Material hat Einfluss auf die Fenstermaße, weil das Fenster höchstens so breit sein darf, dass $L(x) = 42$ ist. Dies führt auf $-\frac{2}{9}x^2 + 4x + 32 = 42 \Longrightarrow x^2 - 18x + 45 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = 15$. Somit kommt wegen des Materials für x nur das Intervall $]0;3]$ in Betracht.

**b)** Zielfunktion: $A(x) = 2x \cdot f(x) = 2x\left(-\frac{1}{9}x^2 + 16\right) = -\frac{2}{9}x^3 + 32x$.

$A'(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 32$

Extremstelle $x = \sqrt{48} \approx 6{,}93$ (nur die positive Lösung ist sinnvoll) mit $A''\left(\sqrt{48}\right) < 0$, also lokales Maximum $A\left(\sqrt{48}\right) \approx 147{,}8\ \text{m}^2$ und Randwerte $A(0) = 0$ und $A(12) = 0$

Da aber wegen des Materials für den Rahmen (Teilaufgabe a)) die Breite des Fensters auf $x = 3$ begrenzt ist, kann das Fenster höchstens den Flächeninhalt von $A(3) = 90\ \text{m}^2$ haben.

**10** $V = G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \sqrt{5^2 - r^2}$

$V'(r) = \frac{2}{3}\pi r \cdot \sqrt{25 - r^2} + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (-2r) \cdot \frac{1}{2\sqrt{25 - r^2}}$

$0 = \frac{2}{3}\pi r \cdot \sqrt{25 - r^2} + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (-2r) \cdot \frac{1}{2\sqrt{25 - r^2}} \qquad | \cdot \sqrt{25 - r^2}$

$0 = \frac{2}{3}\pi r \cdot (25 - r^2) + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (-2r) \cdot \frac{1}{2} \qquad | : \pi \text{ und } \cdot 3$

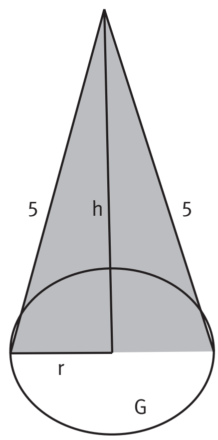
$0 = 50r - 2r^3 - r^3 = 50r - 3r^3 \qquad \Longrightarrow r_1 = 0,\ r_2 = -\sqrt{\frac{50}{3}},\ r_3 = +\sqrt{\frac{50}{3}} \approx 4{,}08$

Nur $r_3$ ist sinnvoll: $V'(4) > 0{,}88 > 0$ und $V'(4{,}5) < -23 < 0$

$\Longrightarrow$ lokales Maximum

Das größte Zylindervolumen erhält man bei einer Basislänge von

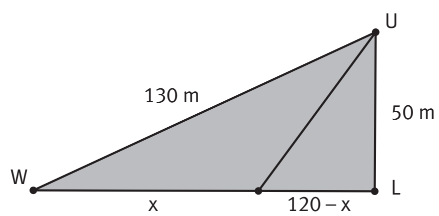
$2r_3 = 2\sqrt{\frac{50}{3}} \approx 8{,}16$.




**11** **a)** Aus der Skizze ist ersichtlich, dass der Punkt L 50 m vom Unfallort und $\sqrt{130^2 - 50^2} = 120$ m vom Wasserwacht-Stützpunkt entfernt ist und für die Schwimmstrecke $\sqrt{50^2 + (120 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 240x + 16900}$ gilt.

Der Rettungsschwimmer benötigt also bis zum Unfallort die Zeit

$t(x) = \frac{x}{8} + \frac{\sqrt{x^2 - 240x + 16900}}{1{,}6}$ (mit $x \in [0; 120]$).



Diese Zeit soll minimal werden (Zielfunktion). Für die Ableitung gilt:
$t'(x) = \frac{1}{8} + \frac{2x - 240}{1{,}6 \cdot 2 \cdot \sqrt{x^2 - 240x + 16900}}$.
Diese hat zwischen x = 109,7 und x = 109,8 eine Nullstelle mit VZW von – nach + (z. B. Tabellenfunktion des TR nutzen), also ein lokales Minimum. Die Randwerte t (0) = 81,25 und t (120) = 46,25 sind beide größer als der Extremalwert t (109,75) ≈ 45,62.
Der Rettungsschwimmer sollte zuerst etwa 107 m am Strand entlang laufen und von dem dabei erreichten Punkt aus zum Unfallort schwimmen.

**b)** Er braucht mindestens 45 Sekunden bis zum Unfallort.

**12** Ein Punkt der Parabel hat die Koordinaten $(x|x^2)$. Der Abstand zu P (1|0) hat nach dem Satz des Pythagoras die Länge $d(x) = \sqrt{(1-x)^2 + (x^2 - 0)^2} = \sqrt{x^4 + x^2 - 2x + 1}$ (Zielfunktion).
$d'(x) = \frac{4x^3 + 2x - 2}{2\sqrt{x^4 + x^2 - 2x + 1}} = \frac{2x^3 + x - 1}{\sqrt{x^4 + x^2 - 2x + 1}}$
$d'(x) = 0 \Longrightarrow x \approx 0{,}59$ VZW von $d'(x)$ von – nach + an der Stelle $x = 0{,}59 \Longrightarrow$ Minimum
$d(0{,}59) = 0{,}59^2 \approx 0{,}35$
Der Punkt Q (0,59|0,35) hat von allen Parabelpunkten den kleinsten Abstand von P.

**13 a)** Der Sinus hat sein Maximum bei $\frac{\pi}{2}$, also wird die Gleichung $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}x - 2{,}2$ gelöst.
Lösung: $x \approx 14{,}4$. Dies liegt aber nicht am Vormittag. Für den Vormittag [0; 12] ist der Randwert $f(12) \approx 27{,}5$ um 12 Uhr am größten.

**b)** Zielfunktion: $d(x) = f(x) - g(x) = 8\sin\left(\frac{\pi}{12}x - 2{,}2\right) + 21 - \left(3\sin\left(\frac{\pi}{12}x - 3{,}1\right) + 18\right) =$
$= 8\sin\left(\frac{\pi}{12}x - 2{,}2\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{12}x - 3{,}1\right) + 3$
$d'(x) = \frac{2\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{12}x - 2{,}2\right) - \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{12}x - 3{,}1\right)$
$d'(x)$ hat die Nullstellen x = 1 mit VZW von – nach + und x = 13 mit VZW von + nach –.
$d(13) \approx 9{,}6$ ist also lokales Maximum, $d(1) \approx -3{,}6$ lokales Minimum. Da es nur um die Abweichung geht, kommt hier derjenige Wert in Frage, der betragsmäßig der größere ist, also $d(13) \approx 9{,}6$. Da auch die Randwerte $d(0) \approx -3{,}34$ und $d(24) \approx -3{,}34$ keine größeren Abweichungen liefern, war der Temperaturunterschied um 13 Uhr am größten.

**14** Zielfunktion: $B(v) = \frac{v}{4 + v^2} = v \cdot (4 + v^2)^{-1}$
$B'(v) = 1 \cdot (4 + v^2)^{-1} + v \cdot (4 + v^2)^{-2}(-2v) = \frac{4 + v^2 - 2v^2}{(4 + v^2)^2} = \frac{4 - v^2}{(4 + v^2)^2}$
$B'(v)$ hat die Nullstellen $v = \pm 2$, wobei nur die positive Lösung sinnvoll ist. Bei v = 2 weist B' einen VZW von + nach – auf, so dass bei dieser Geschwindigkeit die Bremskraft maximal ist.

**15 a)** Der Ladestand bei gleichzeitiger Benutzung wird durch die Zielfunktion $z(t) = L(t) - 0{,}2 \cdot 60 \cdot t$ beschrieben.
$z'(t) = 100(+1{,}92)e^{-1{,}92t} - 12$ hat die Nullstelle $t = \frac{\ln(0{,}0625)}{-1{,}92} \approx 1{,}44$ mit $z''(1{,}44) < 0$. Also kann in diesem Modell der Akkustand höchstens bis zu $z(1{,}44) \approx 76{,}4\%$ geladen werden. Dies wäre 1 Stunde und 26 Minuten nach dem Anschließen des Ladekabels der Fall.

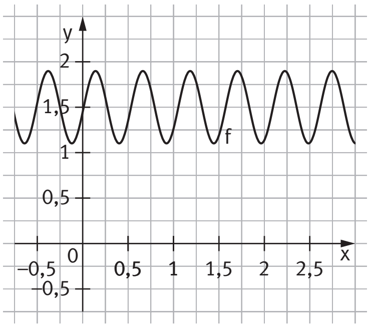
**b)** Die Gleichung z (t) = 0 hat die Lösung $t \approx 8{,}33$, so dass der Nutzer theoretisch 8 Stunden und 20 Minuten so weitermachen kann. Dann wäre der Akku in diesem Modell vollständig entladen.

**c)** Ein Handy schaltet sich normalerweise bei einem Akkustand von 2 % automatisch aus. Die Lösung der Gleichung z (t) = 2 führt auf $t \approx 8{,}16$. Mit dieser Annahme wäre ]0; 8,16[ ein sinnvoller Definitionsbereich.

**16** Die Funktion f (x) beschreibt den Benzinverbrauch auf 100 km, nicht die Reichweite. Die Reichweite ist maximal, wenn der Bezinverbrauch pro 100 km minimal ist. Somit ist das Minimum der Zielfunktion $f(x) = \frac{1}{1600}x^2 + 120x^{-1}$ gesucht.

$f'(x) = \frac{1}{800}x - 120x^{-2} = \frac{x^3 - 96000}{x^2}$ wird nur für $x = \sqrt[3]{96000} \approx 45{,}8$ null, wobei dann $f\left(\sqrt[3]{96000}\right) \approx 3{,}91$ ist. Da der linke Randwert für $x \to 0$ gegen $\infty$ strebt und $f(160) = 16{,}75$ ist, handelt es sich bei $x = \sqrt[3]{96000} \approx 45{,}8$ tatsächlich um ein Minimum.
Bei einer Geschwindigkeit von etwa 45,8 km/h ist also der Benzinverbrauch minimal mit 3,91 l / 100km, also 0,0391 Liter pro km. Mit einem 60-Liter-Tank kann das Auto so maximal $60 : 0{,}0391 \approx 1534$ km weit fahren.

**17** **a)** Periodendauer ist $\frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi \approx 0{,}52$ Sekunden
**b)** Die Amplitude ist 0,4 und schwankt um den Wert 1,5. Somit schwankt die Geschwindigkeit zwischen den Werten 1,1 und 1,9.
**c)**




**d)** Gesucht ist das Minimum der Steigung.
Zielfunktion: $v'(t) = 4{,}8\cos(12t)$
$v''(t) = -57{,}6\sin(12t)$ hat die Nullstellen $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{12}$, $t_3 = \frac{2\pi}{12}$, $t_4 = \frac{3\pi}{12}$, ... usw.
Mit $v'''(t) = -691{,}2\cos(12t)$ errechnet man, dass nur jeder zweite dieser t-Werte zu einem positiven Wert von v''', also einem Minimum führt. Somit nimmt die Geschwindigkeit zu den Zeitpunkten $t = \frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$,... usw. am stärksten ab.

## Nachgefragt

- Philipp hat nur für solche Geschwindigkeits-Aufgaben Recht, bei denen nach der maximalen oder minimalen Geschwindigkeit gefragt ist und es sich um eine gleichförmige, ungebremste bzw. nicht beschleunigte Bewegung handelt. Sonst kann die Zielfunktion durchaus anders lauten.
- Beim Gauß-Algorithmus wurde das Problem in linearen Gleichungen (Bedingungen) modelliert und mit dem Algorithmus die gemeinsame Lösung für die Bedingungen ermittelt.
  Bei Extremwertaufgaben wird das Problem als Funktionsgleichung modelliert und mithilfe der Analysis ein Extremwert berechnet.
- Eine Modellierung ist eine Reduzierung eines Problems auf die wesentlichen Eigenschaften (Zahlen, Größen, geometrische Form) mit dem Ziel, durch diese Reduzierung mit bekannten Methoden die Lösung für eine Fragestellung zu ermitteln. Insofern ist eine Aufgabe mit einem lebensweltlichen Bezug nicht unbedingt eine Modellierungsaufgabe.
- Das ist bei den meisten Funktionen richtig. Wenn es allerdings noch weitere Maxima gibt, könnte eines der anderen noch größer sein. Die Aussage ist also so, wie sie formuliert ist, falsch.
- Beim isoperimetrischen Problem geht es darum, zu einem Objekt mit gegebener Hülle ein möglichst großes Volumen zu bekommen (ähnlich wie bei den Aufgaben 6 c), 7, 8 c), 9 b), 10).

## Aufgabe 1

### Warm up

**A** **a)** $f'(x) = 2\cos(2x)$ $f''(x) = -4\sin(2x)$ $f'''(x) = -8\cos(2x)$

**b)** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ $f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$

**c)** $f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$

$f''(x) = 2\sin(x) + 4x\cos(x) - x^2\sin(x)$

$f'''(x) = 6\cos(x) - 6x\sin(x) - x^2\cos(x)$

**B** **a)** $f'(x) = (x+1)\cdot e^x$ $f''(x) = (x+2)\cdot e^x$ $f'''(x) = (x+3)\cdot e^x$

Extremstelle $x_1 = -1$ mit $f''(-1) > 0$ Wendestelle $x_2 = -2$ mit $f'''(-2) > 0$

**b)** $f'(x) = (0{,}1x - 1)^9$ $f''(x) = 0{,}9(0{,}1x - 1)^8$ $f'''(x) = 0{,}72(0{,}1x - 1)^7$

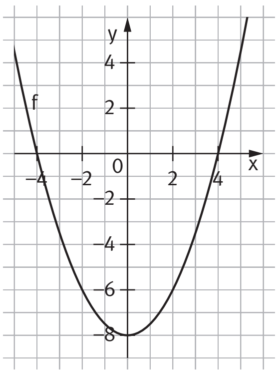
Extremstelle $x = 10$ mit VZW von – zu + $\Longrightarrow$ lokales Minimum

einzig mögliche Wendestelle: $x = 10$, aber kein VZW in $f''$ (+ zu +) $\Longrightarrow$ Es gibt keine Wendestellen.

**C** **a)** $(2|2|3)$ **b)** keine Lösung

---

**1** **a)**




**b)** Rechtecksbreite: x, Höhe des Raumes: $-f(x)$.

Die Zielfunktion $A(x) = x\cdot[-f(x)] = -\frac{1}{2}x^3 + 8x$ soll maximal werden.

Extremstellen von A sind $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{16}{3}} \approx \pm 2{,}31$.

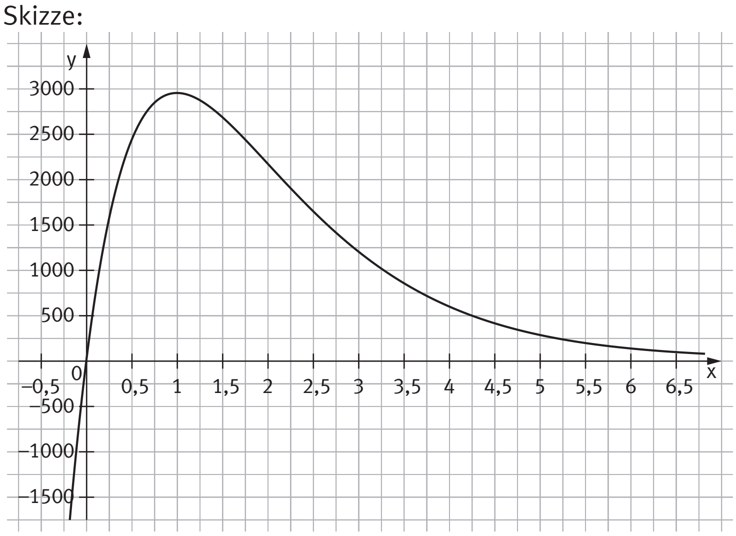
Aufgrund des Sachzusammenhangs kommt nur $x = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 2{,}31$ in Betracht.

Die Randwerte $A(0) = 0$ und $A(4) = 0$ sind beide kleiner als der Extremalwert $A(2{,}31) \approx 12{,}3$. Somit ist die optimale Breite etwa 2,31.

**c)** Die Wassermenge steigt und nimmt ab $t = 1$ wieder ab. Also befindet sich bei $(1|2943)$ ein Hochpunkt. Die Bedingungen $g(1) = 2943$ und $g'(1) = 0$ führen mit $g'(t) = a\,e^{bt} + a\,t\,be^{bt} = ae^{bt}(1 + t\,b)$ auf $b = -1$ und $a \approx 8000$.

Damit ist $g(t) = 8000\cdot t\cdot e^{-t}$.

Skizze:




**d)** Die Wassermenge geht am stärksten zurück, wenn das Gefälle am stärksten ist. Das ist beim Wendepunkt der Fall:

$g''(t) = 8000e^{-t}(t^2 - t - 1) = 0$ für $t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, wovon nur die positive Lösung $t \approx 1{,}62$ mit VZW zulässig ist.

Nach etwa 1 Stunde und 37 Minuten geht die Wassermenge am stärksten zurück.

**e)** Die Pumpe pumpt Wasser ab. Letzte Tropfen und insbesondere in die Raumluft verdunstetes Wasser werden nicht abgepumpt. Von Trockenheit kann z. B. gesprochen werden, wenn weniger als ein halber Liter als Rest vorhanden ist. Aus $0{,}5 = g(t)$ folgt mit einer Wertetabelle im Taschenrechner eine Trocknungszeit von $t \approx 12{,}2$ Stunden für dieses Modell.

## Aufgabe 2

### Warm up

**A** **a)** $f''(x) = 6x - 6 \Longrightarrow f''(-2) = -18$ (Rechtskrümmung) und $f''(2) = 6$ (Linkskrümmung)

**b)** $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \Longrightarrow f''(-2) = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{125}} > 0$ (Linkskrümmung) und $f''(2) > 0$ (Linkskrümmung)

**c)** $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \Longrightarrow f''(-2) = \frac{2}{-27} < 0$ (Rechtskrümmung) und $f''(2) = 2 > 0$ (Linkskrümmung)

**B** **a)** Rechtecksbreite: x, Rechteckshöhe: $15 - x$ mit $x \in \,]0; 15[$ Zielfunktion: $A(x) = x(15 - x) = 15x - x^2$
$A'(x) = 15 - 2x$ mögliche Extremstelle: $x = 7{,}5$ mit $A(7{,}5) = 56{,}25$ ist höher als beide Randwerte $A(0) = 0$ und $A(15) = 0$, also globales Maximum. Damit ist der größtmögliche Flächeninhalt $56{,}25\ cm^2$.

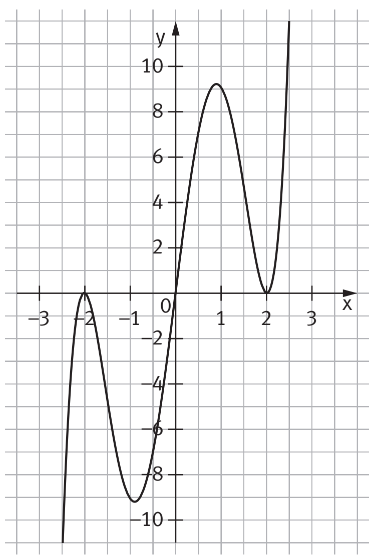
**b)** Rechtecksbreite: x, Rechteckshöhe: $\frac{25}{x}$ mit $x \in \,]0; \infty[$ Zielfunktion: $U(x) = 2x + 2 \cdot \frac{25}{x} = 2x + \frac{50}{x}$
$U'(x) = 2 - \frac{50}{x^2}$ mögliche Extremstellen: $x = \pm 5$, von denen nur die positive im Intervall $]0; \infty[$ liegt.
Da $U(5) = 20$ ist und beide Randwerte als Grenzwerte gegen $\infty$ gehen, handelt es sich um das globale Minimum. Der kleinstmögliche Umfang beträgt 20 cm.

**C** **a)** Der Anstieg (1. Ableitung) soll maximal werden: Zielfunktion $f'(x) = -3(x + 1)^2$.
Ableitungsfunktion der Zielfunktion:
$f''(x) = -6(x + 1)$
Mögliche Extremstelle $x = -1$ mit $f'''(-1) = -6 < 0$, also liegt bei $x = -1$ ein lokales Maximum.
Da $f'(x)$ für $x \to \pm\infty$ gegen $-\infty$ geht, liegt bei $x = -1$ das globale Maximum der 1. Ableitung und somit der stärkste Anstieg.

**b)** Der Anstieg (1. Ableitung) soll minimal werden: Zielfunktion $f'(x) = 2e^{x-1} + 2xe^{x-1} = (2 + 2x)\,e^{x-1}$.
Ableitungsfunktion der Zielfunktion:
$f''(x) = 2e^{x-1} + (2 + 2x)e^{x-1} = (4 + 2x)e^{x-1}$
Mögliche Extremstelle $x = -2$ mit $f'''(-2) = (6 + 2 \cdot (-2))e^{-2-1} > 0$, also liegt bei $x = -2$ ein lokales Minimum als einziges Extremum. Somit liegt bei $x = -2$ auch das globale Minimum der 1. Ableitung und (weil $f'(-2) < 0$, also negative Steigung vorliegt) das stärkste Gefälle.

---

**2** **a)** Allgemeine Gleichungen: $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$ mit $f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$
Bedingungen: $f(2) = 0$, $f'(2) = 0$, $f'(-1) = -3$
LGS in Matrixform: $\left(\begin{array}{ccc|c} 32 & 8 & 2 & 0 \\ 80 & 12 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß – Alg.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 32 & 8 & 2 & 0 \\ -128 & -16 & 0 & 0 \\ 48 & 0 & 0 & 48 \end{array}\right)$
$\Longrightarrow a = 1,\ b = -8,\ c = 16$
Funktionsgleichung: $f(x) = x^5 - 8x^3 + 16x$
Überprüfung: $f'(x) = 5x^4 - 16x^2 + 16$ erfüllt $f'(-1) = -3$.
Die Berechnung der Extrema ergibt $x_{1/2} = \pm 2$ und $x_{3/4} = \pm\sqrt{0{,}8} \approx \pm 0{,}9$, wobei $x_1 = 2$ sich tatsächlich mit $f(2) = 0$ als Extrempunkt erweist.




**b)** Mit der Punktsymmetrie zum Ursprung $(0|0)$ und den Extrempunkten $H_1(-2|0)$, $T_1(-0{,}9|-9{,}2)$, $H_2(0{,}9|9{,}2)$ und $T_2(2|0)$ lässt sich der Graph skizzieren (siehe Abbildung).

**c)** Allgemeine Gleichung: $g(x) = ax^2 + bx + c$; $g'(x) = 2ax + b$
Die Nullstellen sollen übereinstimmen. Für eine gute Modellierung sollte der Hochpunkt, der bei der quadratischen Funktion in der Mitte der Nullstellen, also bei $x = 1$, liegen muss, ebenfalls die Höhe $f(1) = 9{,}2$ haben.

Bedingungen: $f(1) = 9{,}2$ mit $f'(1) = 0$ und $f(0) = 0$.

LGS in Matrixform: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9{,}2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Gauß – Alg.}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9{,}2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -9{,}2 \end{array}\right) \Longrightarrow a = -9{,}2,\ b = 18{,}4,\ c = 0$

Funktionsgleichung: $g(x) = -9{,}2x^2 + 18{,}4x$

Dies ist eine nach unten geöffnete Parabel mit den geforderten Nullstellen.

Anmerkung: Man hätte auch beide Nullstellen verwenden, den Punkt $(0{,}9 | 9{,}2)$ als Kurvenpunkt festlegen und damit akzeptieren können, dass der Hochpunkt bei g etwas höher liegt. Dies hätte auf den Funktionsterm $-9{,}3x^2 + 18{,}6x$ geführt.

**d)** Der Unterschied, also die Differenz $f(x) - g(x)$, soll maximal werden:
Zielfunktion $d(x) = f(x) - g(x) = x^5 - 8x^3 + 9{,}2x^2 - 2{,}4x$.
$d'(x) = 5x^4 - 24x^2 + 18{,}4x - 2{,}4$; mögliche Extremstellen $x_1 \approx 0{,}17$, $x_2 \approx 0{,}7$ und $x_3 \approx 1{,}7$ (Tabellenfunktion des TR).
Mit $d''(x) = 20x^3 - 48x + 18{,}4$ berechnet man $d''(0{,}17) > 0$, $d''(0{,}7) < 0$ und $d''(1{,}7) > 0$, so dass nur $x_2 \approx 0{,}7$ mit $d(0{,}7) \approx 0{,}25$ als Stelle mit größter Abweichung in Frage kommt. Da die Abweichung an den Rändern $x = 0$ und $x = 2$ genau null ist (so wurde die Funktion g konstruiert), ist die größte Abweichung in diesem Modell 0,25 Einheiten.

**e)** Die Abweichung von 0,25 Einheiten ist im Vergleich zu der Gesamthöhe der Zeichnung von über 9 Einheiten gering (unter 3 %). Bei einem Bauwerk von 9 Meter Höhe spielen 25 cm mehr oder weniger keine große Rolle.
Hinzu kommt, dass die Abweichung von 0,25 in senkrechter Richtung gilt. Für die visuelle Abweichung der beiden nicht aufeinanderliegenden Graphen würde man eher einen „schrägen Abstand“ als „Loch“ empfinden. Dieser „schräge“ Abstand ist hier aber nochmal deutlich geringer als 0,25. Insgesamt ist die Qualität der Annäherung also als ziemlich gut einzustufen.

## Aufgabe 3

### Warm up

**A** **a)** $f'(x) = (x+2)^2 + x \cdot 2(x+2) = (x+2)^2 + 2x^2 + 2x$

$f''(x) = 2(x+2) + 4x + 2 = 6x + 6$ $\quad f'''(x) = 6$ $\quad$ Wendepunkt $W(-1|-1)$

**b)** $f'(x) = 2(2x-3) \cdot 2 = 8x - 12$ $\quad f''(x) = 8$ $\quad$ keine Wendepunkte

**c)** $f'(x) = 8x^3 - 18x^2$ $\quad f''(x) = 24x^2 - 36x$

$f'''(x) = 48x - 36$ $\quad$ Wendepunkte: $W_1(0|0)$ und $W_2\left(\frac{3}{2}\middle|-\frac{81}{8}\right)$

**B** Allgemeine Geradengleichung: $f(x) = ax + b$. Bedingungen: $f(3) = 7$, $f(-1) = 0$ und $f(1) = 4$

LGS in Matrixform: $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß – Alg.}} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Die letzte Zeile zeigt, dass es keine Lösung gibt. Es gibt also keine Gerade durch die drei Punkte P, Q und R.

---

**3** **a)** Allgemeine Gleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen: $f(1) = 1$, $f''(1) = 0$, $f'(-2) = 0$ und $f'(2) = 0$

LGS in Matrixform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III – IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus der letzten Zeile folgt $b = 0$, damit aus der 2. Zeile $a = 0$, mit der dritten dann $c = 0$ und letztlich $d = 1$. Mit $a = 0$ folgt aber, dass die Lösungsfunktion nicht 3. Grades wäre.

Es gibt also keine ganzrationale Funktion 3. Grades, welche die Bedingungen erfüllt.

**b)** Allgemeine Gleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen: $f(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'(-2) = 0$ und $f'(2) = 0$

LGS in Matrixform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III – IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus der ersten Zeile folgt $d = 1$, aus der zweiten folgt $b = 0$. Die dritte Zeile liefert dann $12a + c = 0$. Die vierte Zeile liefert keine „echte“ Bedingung. Deshalb gibt es unendlich viele Lösungen, z. B. mit $a = 1$ und $c = -12$.

$f(x) = x^3 - 12x + 1$ erfüllt die geforderten Bedingungen, denn mit $f''(x) = 6x$ liegt bei $x = -2$ tatsächlich ein Hochpunkt und bei $x = 2$ ein Tiefpunkt.

**c)** Ein Polynom n-ten Grades hat $n + 1$ Koeffizienten, weil es ja auch noch einen Koeffizienten für $x^0$ gibt. Deshalb braucht man $n + 1$ Bedingungen, um das Polynom eindeutig zu bestimmen.

**d)** Allgemeine Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$; Bedingungen: $f(0) = 0$ und $f(2) = 0$

Das LGS

$0a + 0b + c = 0$

$4a + 2b + c = 0$

liefert $c = 0$ und $2a + b = 0$. Diese letzte Gleichung hat unendlich viele Lösungen, nämlich immer, wenn b doppelt so groß wie a ist und umgekehrtes Vorzeichen hat.

## Aufgabe 4

### Warm up

**A** **a)** Substitution $z = 5^x$ ergibt $z_1 = 0$ und $z_2 = 4$. Damit liefert nur $z_2 = 4 = 5^x$ die einzige Lösung $x = \log_5(4) \approx 0{,}86$.

**b)** Umformung zu $3^x \cdot 9 - 4 \cdot 3^x = 5 \cdot 3^x = 10$ liefert $x = \log_3(2) \approx 0{,}63$.

**c)** Umformung zu $7^x \cdot 7^{-3} - 7^{2x} = 0$ führt zu $7^x \cdot 7^{-3} = 7^{2x}$. Division durch $7^x$ ergibt $7^{-3} = 7^x$ und damit die Lösung $x = -3$.

**B** **a)** Lösungsmatrix: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\Longrightarrow$ unendlich viele Lösungen $(a \mid 7 - 2a \mid 10 - 6a)$

**b)** eindeutige Lösung $(2 \mid 3 \mid 1)$

---

**4** **a)** Allgemeine Gleichung $f(x) = ax^2 + b$ wegen Achsensymmetrie zur y-Achse. Wegen des Scheitelpunkts $(0 \mid 2)$ muss $b = 2$ sein. Der gut ablesbare Gitterpunkt $(1{,}5 \mid 1{,}5)$ ergibt die Bedingung $1{,}5 = a \cdot 1{,}5^2 + 2$ und damit $a \approx -0{,}22$.
$f(x) = -0{,}22x^2 + 2$ hat auch Nullstellen von $x_{1/2} \approx \pm 3{,}015$ (plausibel). Das bedeutet, dass die Straße eine Länge von 60,3 m hat.

**b)** Eine trigonometrische Funktion mit Hochpunkt auf der y-Achse ist der Kosinus. Allgemeine Gleichung: $g(x) = a \cdot \cos(bx) + d$ (ohne Verschiebung in Richtung der x-Achse). Da die Periode $2\pi$ sein soll, ist $b = 1$. Mit $g(x) = a\cos(x) + d$, dem Hochpunkt $(0 \mid 2)$ und dem gut ablesbaren Gitterpunkt $(1{,}5 \mid 1{,}5)$ ergibt sich $g(0) = a + d = 2$ und $g(1{,}5) = 0{,}07a + d = 1{,}5$. Aus diesen beiden Gleichungen berechnet man $a \approx 0{,}54$ und $d \approx 1{,}46$.
Ergebnis: $g(x) = 0{,}54\cos(x) + 1{,}46$. Diese Funktion kommt der x-Achse am Tiefpunkt $(\pi \mid 0{,}92)$ am nächsten und zwar bis auf einen Abstand von etwa 0,92 Einheiten.

**c)** Wegen des Schnittpunkts mit der y-Achse $(0 \mid 2)$ folgt $h(0) = 2 = a \cdot e^0 = a$. Mit dem gut ablesbaren Gitterpunkt $(1{,}5 \mid 1{,}5)$ ergibt sich $1{,}5 = 2e^{b\,1{,}5^2}$, also $b \approx -0{,}13$ und somit $h(x) = 2e^{-0{,}13x^2}$.
Wegen $h''(x) = (0{,}14x^2 - 0{,}52)e^{-0{,}13x^2}$ ergibt sich für die Wendepunkte $W_{1/2}\,(\pm 1{,}93 \mid 3{,}25)$. Der Graph ist also auf $]-\infty; -1{,}93[$ linksgekrümmt, auf $]-1{,}93; 1{,}93[$ rechtsgekrümmt und auf $]1{,}93; \infty[$ linksgekrümmt.
Für $x \to \pm\infty$ gilt $h(x) \to \infty$.

**d)** Bei dem mit f modellierten Brückenbogen ist $f'(x) = -0{,}44x$ auf $[2; 4]$ negativ, also ist f dort streng monoton fallend.
Bei der mit g modellierten Welle ist $g'(x) = -0{,}54\sin(x)$ auf $[2; 4]$ bis $x = \pi \approx 3{,}14$ negativ, g also streng monoton fallend, danach aber ist g' bis $x = 4$ positiv, g also streng monoton wachsend.
Bei der mit h modellierten Dachgaube ist $h'(x) = -0{,}52x \cdot e^{-0{,}13x^2}$ auf $[2; 4]$ durchgängig negativ, h ist dort also streng monoton fallend.

**1** **a)** Der erste Graph stellt die Funktion f dar. Er hat den typischen Verlauf einer Exponentialfunktion mit Faktor x davor. Es ist der einzige mit $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$.
Der zweite Graph geht nicht durch (0|0). Der dritte Graph hat für $10 < x < 12$ negative Werte, aber f hat für positive x nur positive Werte, weil der e-Term nie negativ wird.
**b)** Neun Wochen nach Beobachtungsbeginn ist die Pflanze 2 cm hoch.
**c)** $2 = 8 \cdot 9\, e^{-9b} \Longrightarrow b = -\frac{1}{9}\ln\left(\frac{2}{72}\right) \approx 0{,}40$
**d)** Die Abnahme der Wachstumsrate wird durch f' beschrieben. Diese soll minimal werden (stärkste Abnahme): $f''(x) = e^{-0{,}4x}(-6{,}4 + 1{,}28x)$. Dafür muss $f'(x) = e^{-0{,}4x}(-6{,}4 + 1{,}28x) = 0$ gelten. Extremstelle $x = 5$ mit VZW von – nach +, also liegt bei $x = 5$ ein Minimum von f'. Somit ist $x = 5$ der Zeitpunkt, an dem die Wachstumsrate f am stärksten abnimmt.
**e)** Der Botaniker meint den Hochpunkt des Graphen von f, also die Stelle $x \approx 2{,}5$. Dort liegt die maximale Wachstumsrate f vor. Danach ist die Wachstumsrate zwar noch positiv, d. h. der Baum wächst, aber sie ist nicht wieder so hoch, deshalb wächst der Baum nicht mehr so schnell.

**2** **a)** f' hat drei Nullstellen. Links und rechts von $x_1 = -2$ ist f' negativ. Somit hat der Graph von f bei $x_1 = -2$ eine waagerechte Tangente, aber links und rechts davon negative Steigung. Also liegt dort ein Sattelpunkt des Graphen von f.
Bei $x_2 = 0$ wechselt das Vorzeichen von f' von – nach +. Also ist beim Graphen von f vorher die Steigung negativ und danach positiv. Dies bedeutet, dass bei $x_2 = 0$ im Graphen von f ein Tiefpunkt liegt.
Bei $x_3 = 1$ wechselt das Vorzeichen von f' von + nach –. Also ist beim Graphen von f vorher die Steigung positiv und danach negativ. Dies bedeutet, dass bei $x_3 = 1$ im Graphen von f ein Hochpunkt liegt.
**b)** Durch Anlegen eines Lineals am Punkt (–1|–2) des abgebildeten Graphen von f' ermittelt man $f''(-1) \approx -1$. Dies bedeutet, dass die Steigung des Graphen von f an dieser Stelle um durchschnittlich eine y-Einheit pro x-Einheit fällt.
**c)** Für das Krümmungsverhalten von f muss das Vorzeichen der Werte von f'' ermittelt werden. Wenn der Graph von f' positive Steigung hat, ist $f''(x) > 0$. Dort ist dann der Graph von f eine Linkskurve. Dies ist bis $x = -2$ und im Intervall $[-0{,}8; 0{,}6]$ der Fall. Im Intervall $[-2; -0{,}8]$ und ab $x = 0{,}6$ ist der Graph von f dann rechtsgekrümmt.
**d)** Der Funktionsterm sollte eine ganzrationale Funktion 4. Grades sein, da er drei Extrema besitzt. Eine mögliche Funktionsgleichung mit allgemeinen Koeffizienten ist also
$f'(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Es werden also fünf Bedingungen benötigt.
Beispiel: $f'(0) = 0$, $f'(-2) = 0$, $f''(-2) = 0$, $f'(1) = 0$ und $f''(-1) = -1$
**e)** Die erste und zweite Zeile wurden belassen. Die dritte Zeile wurde durch 3 dividiert. Die vierte Zeile wurde ersetzt durch die Summe aus der dritten Zeile und dem 3-Fachen der vierten Zeile (III + 3 IV).
**f)** Aus der letzten Zeile folgt $a = -1$ und dann sukzessive $b = -3$, $c = 0$ und $d = 4$. Der Wert für e wird aus diesem LGS nicht berechnet. Breits aus $f(0) = 0$ folgt $e = 0$. Also gilt $f'(x) = -x^4 - 3x^3 + 4x$. Der negative Faktor a ist plausibel, da der Graph nach unten geöffnet ist.

**3** **a)** H(4|4)
**b)** $g'(6) = -1$
**c)** Die Steigung beider Graphen ist an der Stelle $x = 6$ gleich. Die Straßen gehen ohne Knick ineinander über.
**d)** Der Graph von f ist eine Parabel. Parabeln sind Graphen von Funktionsgleichungen ganzrationaler Funktionen 2. Grades. Bedingungen sind $f(4) = 4$, $f'(4) = 0$ und $f(6) = 3$.
**e)** Die in d) genannten Bedingungen führen zu einem LGS, dessen Koeffizienten in der angegebenen Matrix stehen. Die erste Zeile ergibt sich aus $f(6) = 3$, die zweite aus $f(4) = 4$ und die letzte aus $f'(4) = 0$.

**f)** Die Umformungsschritte I – II in der zweiten Zeile und danach II – 2 · III in der letzten Zeile ergeben die Stufenform: $\begin{pmatrix} 36 & 6 & 1 & 3 \\ 20 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**g)** Dies würde bedeuten, dass a = +0,25 ist. Der Wert von a muss aber negativ sein, weil der grüne Graph nach unten geöffnet ist. Deshalb wird Jürgens Lösung nicht plausibel sein.

**4** **a)** A (0 | 0,6), B (2,25 | 2) für rot und gelb, C (3 | 1,75), D (3,5 | 1,3), E (4,4 | 1,1)

**b)** Die Ableitungen müssen an den Übergangsstellen gleich sein f' (2,5) = g' (2,5) und g' (3,3) = h' (3,3).

**c)** Man kann noch die Ableitungen an den Punkten als Bedingungen verwenden.

**d)** Die ganzrationalen Funktionen lassen sich mit allgemeinen Koeffizienten angeben. Setzt man dann die Werte aus den Bedingungen ein, so erhält man lineare Gleichungen mit den Koeffizienten als Unbekannten. Da die Koeffizienten der gesuchten Funktion alle Gleichungen gleichzeitig erfüllen müssen, handelt es sich um die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

**e)** Da es beim Lösen des LGS nur auf die Koeffizienten des LGS ankommt, werden nur diese in Matrix-Schreibweise geschrieben. Danach werden die Zeilen-Operationen des Gauß-Algorithmus so durchgeführt, dass eine Stufenmatrix entsteht. Aus dieser können dann sukzessive die Lösungen berechnet werden.

**Teil 1: Ein Maß für die Krümmung einer Kurve**

**1** Es wird von „ruckfrei“ und einer „ganz langsam beginnenden Kurve“ gesprochen. Je stärker die Krümmung wächst, desto höher ist die Gefahr eines „Rucks“.

**2** Für die quadratische Funktion $f(x) = x^2$ gilt $f''(x) = 2 > 0$. Wäre dies ein Krümmungsmaß, so hätte die Normalparabel konstante Krümmung. Dies steht im Widerspruch zur Anschauung, bei der die Parabeläste immer „gerader“ werden. Unter einer konstant gleich gekrümmten Linie würde man sich wohl eher einen Kreis vorstellen.

**3** Für $f(x) = \sin(x)$ gilt $f''(x) = -\sin(x)$. Hier sind die Werte von f'' an den Extrema besonders groß und an den Wendepunkten null. Die Werte schwanken dazwischen, ähnlich der Stärke der (anschaulichen) Krümmung. Die Übereinstimmung von f' und Krümmungsvorstellung ist hier also viel besser.

**4** Je kleiner der Radius, desto stärker ist die Krümmung. Je größer der Radius, desto geringer ist die Krümmung. Radius und Krümmung verhalten sich also reziprok (antiproportional). Dabei fällt auf, dass es beim Kreis schwierig ist zu sagen, ob positive oder negative Krümmung vorliegt. Wenn man den Kreis gegen den Uhrzeigersinn abfährt, würde man den Lenker immer nach links eingeschlagen haben. Dies passt zu unserer Festlegung der positiven 2. Ableitung für Linkskrümmung und dem mathematisch positiven Drehsinn beim Einheitskreis.

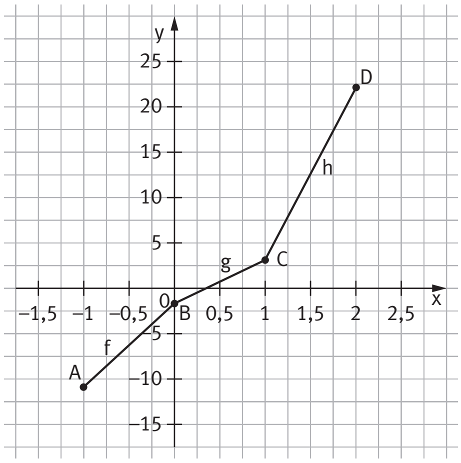
**5** Beispiel: $f(x) = x^2$ (siehe Abbildung im Schulbuch auf S. 131); Approximation durch einen Kreis im Punkt $(1|1)$. Mit einem dynamischen Geometrie-Programm kann man einen Kreis durch drei Punkte zeichnen lassen. Legt man zwei der Punkte auf den Parabelbogen, so merkt man: Wählt man den Kreis zu klein, so verläuft der Parabelbogen durch den Kreis. Wählt man den Kreis zu groß, so verläuft der Parabelbogen zwischen den beiden Punkten außerhalb des Kreises. Dazwischen gibt es die „gute Annäherung“. Auch hier stellt man fest: Je größer der x-Wert des Punkts, an dem approximiert werden soll, desto größer muss der Kreisradius sein und desto kleiner ist das Krümmungsmaß k (im Gegensatz zum Wert von f'').

**6** Die Tangente an den Graphen in $(1|1)$ lässt sich berechnen (siehe Schulbuch S. 63 Aufgabe 13): $y = 2x - 1$. Daraus lässt sich auch die auf der Tangente senkrechte Gerade (Normale) berechnen (siehe Schulbuch S. 37): $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Auf dieser senkrechten Geraden liegt der Mittelpunkt $M(c|d)$.
Für die Approximation der Normalparabel benutzen wir den nach oben geöffneten Halbkreis, also den unteren Teil des Ursprungskreises. Dafür gilt $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ mit Mittelpunkt $(0|0)$. Für den verschobenen Halbkreis mit Mittelpunkt $M(c|d)$ gilt $k(x) = -\sqrt{r^2 - (x-c)^2} + d$ mit den Ableitungen
$k'(x) = \frac{x-c}{\sqrt{r^2-(x-c)^2}}$ und $k''(x) = \frac{r^2}{(\sqrt{r^2-(x-c)^2})^3}$.
Da der Radius r der Abstand von $(1|1)$ und dem Kreismittelpunkt $M(c|d)$ ist, gilt außerdem mit dem Satz von Pythagoras für den Radius $r^2 = (c-1)^2 + (d-1)^2$.
Für den betrachteten Punkt $(1|1)$ sollte nun $k''(1) = f''(1) = 2$ (gleiches Verhalten der Steigung) gelten.
Dies führt auf $2 = \frac{(c-1)^2+(d-1)^2}{(\sqrt{(c-1)^2+(d-1)^2-(1-c)^2})^3} = \frac{(c-1)^2+(d-1)^2}{(d-1)^3}$.
Da $M(c|d)$ auf der Normalen liegen muss, also $d = -\frac{1}{2}c + \frac{3}{2}$ gilt, kann in dieser Gleichung d substituiert werden. Dies führt zu:
$2 = \frac{(c-1)^2 + (-\frac{1}{2}c + \frac{3}{2} - 1)^2}{(-\frac{1}{2}c + \frac{3}{2} - 1)^3} = \frac{(c-1)^2 + \frac{1}{4}(c-1)^2}{-\frac{1}{8}(c-1)^3} = \frac{\frac{5}{4}(c-1)^2}{-\frac{1}{8}(c-1)^3} = \frac{-10}{c-1}$, also $c = -4$ und aufgrund der Normalen-Gleichung dann $d = 3{,}5$. Der Mittelpunkt $M(-4|3{,}5)$ ist damit exakt berechnet worden.

**7** Die Mittelpunkte liegen auf einer gekrümmten Linie. Die Evolute eines Graphen ist die Kurve, auf der die Mittelpunkte der Krümmungskreise des Graphen liegen. Die Berechnung des Kreismittelpunkts M (c|d) in Aufgabe 6 ist also die Berechnung eines Evoluten-Punktes.
Allgemein gilt für die Evolute der Normalparabel (also für die Mittelpunkte der Krümmungskreise):
$y = \frac{1}{2} - 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{16}}$.

## Teil 2: Interpolation

**1** Es werden drei lineare Funktionen als „Zwischenstücke“ (Interpolierende) benötigt:
$f(x) = 9x - 2 \quad g(x) = 5x - 2 \quad h(x) = 19x - 16$




**2 a)** Koeffizientenmatrix:

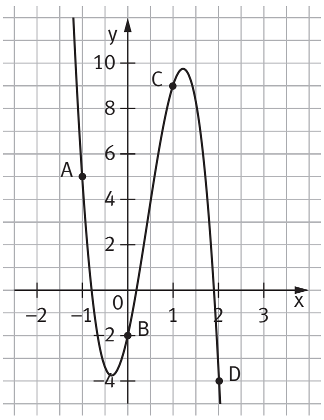
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Stufenform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Lösung: $f(x) = -7x^3 + 9x^2 + 9x - 2$

**b)**




**3** Es werden nur Funktionswerte in der Modellierung betrachtet, keine Steigungs- und Krümmungswerte, insbesondere keine charakteristischen Punkte. Dadurch kann sich der Graph zwischen den Interpolationsstellen deutlich anders verhalten als erwartet.

**4** $N_4(x) = a_0 + a_1(x - (-1)) + a_2(x + 1)(x - 0) + a_3(x + 1)x(x - 1)$ führt mit $N_4(-1) = 5$, $N_4(0) = 2$, $N_4(1) = 9$ und $N_4(2) = -4$ zu folgendem LGS:

$$\left(\begin{array}{lllll} a_0 & & & & = 5 \\ a_0 & + a_1 & & & = -2 \\ a_0 & + 2a_1 & + 2a_2 & & = 9 \\ a_0 & + 3a_1 & + 6a_2 & + 6a_3 & = -4 \end{array}\right)$$

Dieses ist bereits in Stufenform und liefert $a_0 = 5$, $a_1 = -7$, $a_2 = 9$ und $a_3 = -7$. Dies führt auf das Interpolationspolynom $N_4(x) = -7x^3 + 9x^2 + 9x - 2$, welches das gleiche Polynom wie in Aufgabe 2 ist.

**5** Die erste Bedingung sichert die Inzidenz der Punkte, also dass die Kurve auch wirklich durch die geforderten Punkte verläuft. Die zweite Bedingung sichert den knickfreien Übergang an den Interpolationspunkten. Die dritte Bedingung sorgt für „ruckfreie“ Krümmungsübergänge (siehe Schulbuch S. 130).

**6** Der Rand der Liege wird so mit einem ganzrationalen Polynom 9. Grades modelliert, welches voraussichtlich acht Extrempunkte hat. Ein Polynom niedrigeren Grades ist eventuell überbestimmt und führt zu gar keiner Lösung.
Zu empfehlen ist eine Spline-Interpolation, bei der mehrere verschiedene Funktionsterme aufgestellt werden, die dann immer nur stückweise bis zur nächsten oder übernächsten Interpolationsstelle gelten und bei der die ersten und zweiten Ableitungswerte mit beachtet werden.