Bestandsrekonstruktion und Flächenberechnung: Integralrechnung

4

1.1 Beispiele für Lösungswege (es sind auch andere Zerlegungen bzw. Ergänzungen der Figuren möglich):

a) $A = 50\text{ mm} \cdot 50\text{ mm} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 20\text{ mm} \cdot 12{,}5\text{ mm}\right) = 2250\text{ mm}^2 = 22{,}5\text{ cm}^2$

b) $A = 6{,}4\text{ cm} \cdot 7{,}2\text{ cm} + \frac{1}{2} \cdot 6{,}4\text{ cm} \cdot 8{,}2\text{ cm} - (2\text{ cm})^2\pi \approx 59{,}75\text{ cm}^2$

1.2 Der unten herausragende Halbkreis mit Radius r passt genau in die rechts fehlende Fläche, so dass insgesamt ein Halbkreis mit Radius 2r entsteht, wenn man ihn dort einsetzt.
Flächeninhalt der Figur: $A = \frac{1}{2} \cdot (2r)^2\pi = 2r^2\pi$

2.1 a) $f(x) = x^2 + 2x - 8 \quad \Longrightarrow f'(x) = 2x + 2$

b) $g(x) = 6 \cdot (5x + 2)^{-\frac{1}{2}} \quad \Longrightarrow g'(x) = -15(5x + 2)^{-\frac{3}{2}}$

c) $h'(x) = \pi^2\cos(\pi x) + \sin(\pi x)$

2.2 a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x$

b) $F(x) = -\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{2}\sin(2x)$

3.1 a) h' (t) gibt als Änderungsfunktion der Höhe h (t) die Geschwindigkeit an (in m / min), mit der sich die Höhe des Fahrradfahrers am Berg ändert. h' (8) steht also für die momentane Änderung seiner Höhe zum Zeitpunkt t = 8 min.

$h'(t) = 0{,}15t^2 - 3{,}2t + 12{,}8 \quad \Longrightarrow h'(8) = -3{,}2$

Zum Zeitpunkt t = 8 min fährt der Radfahrer bergab (negativer Geschwindigkeitswert); seine Höhe verringert sich zu diesem Zeitpunkt um 3,2 m / min.

b) Die höchste Position ist der Extremwert der Höhenfunktion h (t). Dazu muss gelten: h' (t) = 0.

$0{,}15t^2 - 3{,}2t + 12{,}8 = 0$

Mitternachtsformel $\quad \Longrightarrow t_1 = 5\frac{1}{3} \quad t_2 = 16$

$h''(t) = 0{,}3t - 3{,}2 \quad \Longrightarrow h''\left(5\frac{1}{3}\right) = -1{,}6 < 0 \Longrightarrow$ Maximum

$\Longrightarrow h''(16) = 1{,}6 > 0 \Longrightarrow$ Minimum

Seine höchste Position erreicht der Radfahrer nach 5 Minuten und 20 Sekunden.

c) Die Änderung der Höhe gibt an, wie viel Höhe der Radfahrer in einem bestimmten Moment gewinnt oder verliert. Die meiste Höhe verliert er am Minimum der Änderungsfunktion h' (t). Es gilt also:

$h''(t) = 0.$

$0{,}3t - 3{,}2 = 0 \quad \Longrightarrow t = 10\frac{2}{3}$

$h'''(t) = 0{,}3 > 0 \quad \Longrightarrow$ Minimum

Der Radfahrer verliert die meiste Höhe 10 Minuten und 40 Sekunden nach dem Start.

4.1 Von der Änderungsrate zur Rekonstruktion des Bestands

Entdecken

- zurückgelegte Strecken (in km):
  Auto: $A = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 1 + 100 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 1 + 100 \cdot 1{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 0{,}5 = 587{,}5$
  Zug: $A = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 1 + 250 \cdot 1{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 1 = 1225$
  Der Zug legt die längere Strecke zurück.

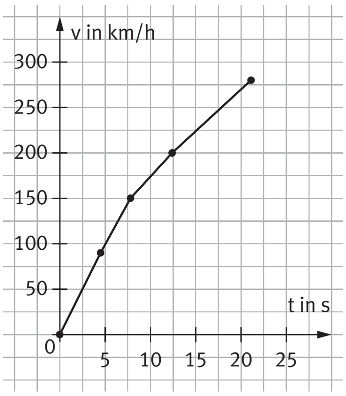
Aufgaben

1 Lösung im Schulbuch.

2 Gesucht ist der orientierte Flächeninhalt im Intervall [0; 5].
a) 4 l + 12 l = 16 l **b)** 3 l – 2 l + 4 l = 5 l **c)** 4 l – 1,5 l – 1,5 l = 1 l

3 Den Bestand erhält man durch Berechnung des Inhalts der Fläche zwischen Graph und t-Achse bis zum jeweils angegebenen t-Wert.
a) 0 **b)** 4 **c)** 16 **d)** 18,5 **e)** 23,5 **f)** 39,25

4 Die zurückgelegte Strecke entspricht dem orientierten Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse. Dieser lässt sich durch Rechteck- und Dreieckflächen berechnen, wobei die Einheiten hier noch aufeinander abgestimmt werden müssen. Dabei gilt: $3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.



$$s = \frac{1}{2} \cdot 4{,}5 \cdot \frac{90}{3{,}6} + \left(\frac{1}{2} \cdot (7{,}8 - 4{,}5) \cdot \frac{150 - 90}{3{,}6} + \frac{90}{3{,}6} \cdot (7{,}8 - 4{,}5)\right) +$$
$$\left(\frac{1}{2} \cdot (12{,}4 - 7{,}8) \cdot \frac{200 - 150}{3{,}6} + \frac{150}{3{,}6} \cdot (12{,}4 - 7{,}8)\right) +$$
$$\left(\frac{1}{2} \cdot (21{,}1 - 12{,}4) \cdot \frac{280 - 200}{3{,}6} + \frac{200}{3{,}6} \cdot (21{,}1 - 12{,}4)\right) =$$
969,86 m

5 **a)** zurückgelegter Weg des Lkw **b)** Kontostand
c) Temperatur der Erde **d)** momentan im Hotel wohnende Gäste

Nachgefragt

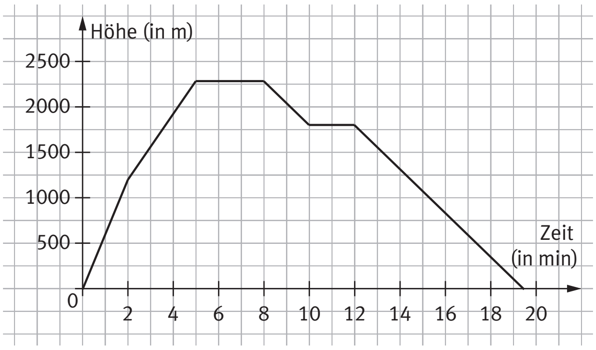
- Die Bestandsänderung ΔB ist in diesem Fall 0. Für den Bestand gilt B (t) = ΔB (t) + B (0), also ist dann B (t) = B (0). Der Bestand entspricht somit dem Ausgangsbestand. Die gesamte Bestandsänderung ist gleich null, i. Allg. aber nicht der Bestand selbst. Letzteres wäre nur richtig, wenn der Anfangsbestand B (0) = 0 wäre.
- Die Behauptung ist i. Allg. falsch. Die orientierten Flächeninhalte geben die Bestandsänderung ΔB einer Größe B an. Für den Bestand zu einem Zeitpunkt t selbst gilt B (t) = ΔB (t) + B (0), wobei B (0) der Anfangsbestand ist. Die Bestände zum Zeitpunkt t sind nur dann gleich, wenn es auch die Anfangsbestände B (0) sind.
- Die Behauptung zu Änderungsrate und Bestand ist i. Allg. falsch. Ist die Änderung gleich null, dann behält der Bestand seinen ursprünglichen Wert bei. Dieser gleichbleibende Wert ist aber nur dann gleich null, wenn der Anfangsbestand gleich null ist.

6 Individuelle Lösungen. Beispiele:
- Wachstumsrate von Grashalmen bei wöchentlichem Rasenmähen (Einheit auf der x-Achse: Tage; Einheit auf der y-Achse: cm)
- Wachstumsrate von Haaren bei Friseurbesuch alle sechs Wochen (Einheit auf der x-Achse: Wochen; Einheit auf der y-Achse: mm)

7 Lösung im Schulbuch.

8 **a)** Das Flugzeug steigt in den ersten zwei Minuten auf und gewinnt schnell an Höhe $\left(10\,\frac{m}{s}\right)$. In den nächsten drei Minuten gewinnt es weiter an Höhe, aber nicht mehr so schnell wie zuvor $\left(6\,\frac{m}{s}\right)$. Nachdem es weitere drei Minuten seine Höhe beibehält, sinkt es zwei Minuten lang etwas ab $\left(-4\,\frac{m}{s}\right)$. Nach weiteren zwei Minuten auf der gleichen Höhe sinkt es mit der gleichen Sinkgeschwindigkeit wie zuvor $\left(-4\,\frac{m}{s}\right)$ acht Minuten lang.

b) Hier muss auf die Einheiten (Höhenänderung in $\frac{m}{s}$, Zeit in min) geachtet werden.



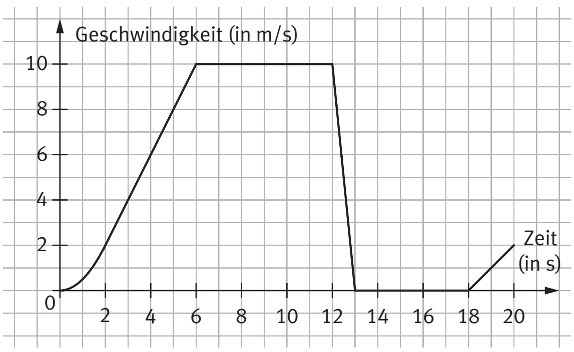
c) Berechnet man den orientierten Flächeninhalt des Graphen im Intervall [0; 19,5], so stellt man fest, dass das Flugzeug bis zu einer maximalen Höhe von 2280 m gestiegen und dann 2280 m gesunken ist. Es ist also nach 19,5 min wieder gelandet.

9 **a)** Nach einer Beschleunigungsphase von 6 s fährt Dirk 6 s lang mit konstanter Geschwindigkeit. Dann muss er eine Sekunde lang scharf bremsen, woraufhin er weitere 5 s stehen bleibt (Geschwindigkeitsverlust in dieser einen Sekunde ist gleich dem Geschwindigkeitsgewinn in den ersten 6 s, da die Flächeninhalte in diesen Bereichen gleich groß sind, aber umgekehrte Vorzeichen haben), bevor er weiter fährt.

b) Zeigt der Graph eine positive Beschleunigung, so nimmt Dirks Geschwindigkeit zu. Dies geschieht bis t = 6 s, also ist Dirk im Intervall [6 s; 12 s] am schnellsten, denn danach bremst er ab.

c) Anstrengend ist es für Dirk dann, wenn er beschleunigen muss, also ist die Fahrt im Intervall [2 s; 6 s] am anstrengendsten. Während des Stillstands entspannt er sich.

d)



10 **a)** [0; 4], [4; 7], [6; 12] **b)** [0; 2], [0; 6], [1; 11]

11 Kilian hat folgende Fehler gemacht:

1 Die Änderung ist ab t = 5 Wochen negativ, ab diesem Zeitpunkt sollte der Bestandswert sinken.

2 Die Einheit der Änderung ist in $\frac{\text{Ct}}{\text{Tag}}$, die Zeit in Wochen angegeben. Die Einheiten müssen vor der Flächenberechnung angepasst werden, was höhere Bestandswerte zur Folge hat.

3 Der Anfangsbestand der Aktie ist nicht unbedingt 0 Ct. Wahrscheinlicher ist ein hier nicht näher definierter Anfangswert. Der Graph muss also um diesen Anfangswert nach oben verschoben werden.

12 **a)** Im Intervall [11; 12], strömt das meiste Wasser durch die Turbinen, da im Zeitraum 11 h bis 12 h das meiste Wasser aus dem Stausee abfließt.

b) Zum Zeitpunkt t = 7 h befindet sich das meiste Wasser im Stausee, da bis dahin Wasser in den See zufließt und anschließend nur noch abfließt.

c) Hier muss auf die unterschiedlichen Einheiten (Zufluss in Kubikmeter pro Sekunde, Zeit in Stunden) geachtet werden.

[0; 2]: Eine linear steigende Zuflussrate bedeutet, dass immer mehr Wasser pro Sekunde in den See fließt. $\Longrightarrow$ nach oben geöffnete Parabelform

[2; 4]: konstanter Zufluss $\Longrightarrow$ linear steigende Wassermenge im See

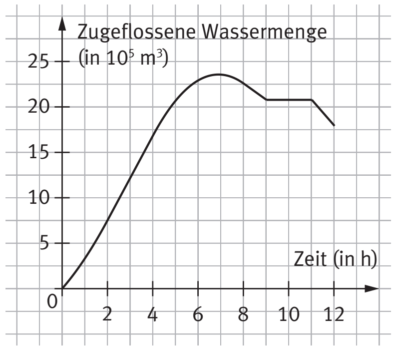
[4; ≈ 7]: Eine linear abnehmende Zuflussrate mit positiven Werten bedeutet, dass immer weniger Wasser pro Sekunde in den See fließt. $\Longrightarrow$ nach unten geöffnete Parabelform

[≈ 7; 8]: Eine linear abnehmende Zuflussrate mit negativen Werten bedeutet, dass immer mehr Wasser aus dem See abfließt. $\Longrightarrow$ nach unten geöffnete Parabelform

[8; 9]: konstanter Abfluss $\Longrightarrow$ linear abnehmende Wassermenge im See

[9; 11]: weder Zu- noch Abfluss $\Longrightarrow$ Wassermenge im See konstant

[11; 12]: konstanter Abfluss $\Longrightarrow$ linear abnehmende Wassermenge, aber stärkere Abnahme als in [8; 9].



d) a) bleibt unverändert, da der Abfluss vom Regen unabhängig ist.

b) Durch den Regen nimmt die Wassermenge im See im Intervall [7; 9] immer noch zu, da mehr Wasser durch Regen hinzukommt als abfließt. Erst ab t = 11 h überwiegt die abfließende Wassermenge, also ist zu diesem Zeitpunkt das meiste Wasser im See.

c) Der Graph muss um 50 LE nach oben verschoben werden, da das die Wassermenge ist, die der See zusätzlich durch den Regen aufnimmt.

e) Will man den Regen mit berücksichtigen, ändert sich beim Vorgehen nichts. Will man jedoch den Zu- und Abfluss ohne Regen untersuchen (z. B. für die Wassermenge in den Turbinen), so muss der Graph für den Regenzufluss vom gegebenen Graphen subtrahiert werden. Der Zufluss-Graph aus Teilaufgabe c) wird dabei also um 50 LE nach unten verschoben.

13 **a)** [0; 1]: Der anfängliche Pegelstand bleibt bestehen, da es keine Änderung gibt.

[1; 1,5]: Hat der Änderungsgraph positive Werte, so steigt der Bestandsgraph. Die Änderungswerte werden immer größer, also steigt der Pegelstand immer stärker an.

[1,5; 2,5]: Die Wasserstandsänderung ist immer noch positiv, die Funktionswerte des Graphen werden aber kleiner. Der Pegel steigt also weiter, aber immer weniger schnell.

[2,5; 3,5]: Aufgrund der negativen Änderungswerte nimmt der Wasserstand wieder ab.

[3,5; 4,8]: Der Graph des Pegels hat einen ähnlichen Verlauf wie im Intervall [1; 2,5]. Die Änderung erreicht hier allerdings nur kleinere Werte, also ist auch die Pegelstandsänderung kleiner als in [1; 2,5].

b) Wenn von Beginn an schon Wasser in der Tonne ist, muss der gesamte Graph um den anfänglichen Pegelstand nach oben verschoben werden.

c) Der Änderungsgraph bleibt gleich, da die Änderung unabhängig davon ist, wie groß der Anfangsbestand ist.

Nachgefragt

- Ist der Graph der momentanen Geschwindigkeit gegeben, so entspricht die Fläche zwischen Graph und x-Achse dem zurückgelegten Weg. Mit Flächeninhalten oberhalb der x-Achse wird der zurückgelegte Weg größer, mit Flächeninhalten unterhalb der x-Achse kleiner. Wurde vor Beginn der Aufzeichnung schon eine Strecke zurückgelegt, muss diese zu allen Werten addiert werden.
- Der Anfangsbestand ist zwar irrelevant für die Änderungsrate, aber er ist wichtig für den Bestandsgraphen. Bei gleicher Änderungsrate ist z. B. ein Bestandsgraph mit $B_1(0) = 5$ gegenüber einem mit $B_2(0) = 0$ um 5 Längeneinheiten nach oben verschoben.
- Negative Geschwindigkeiten bedeuten, dass z. B. ein Auto in die entgegengesetzte Richtung fährt. Dabei legt es natürlich auch eine Strecke zurück, aber eben in die andere Richtung. Das muss bei der Bestandsrechnung berücksichtigt werden. Ist die Änderungsrate (Geschwindigkeit) negativ, muss der Bestand (zurückgelegte Strecke) abnehmen. „Entfernung vom Startpunkt“ wäre also ein weniger irreführender Begriff als „zurückgelegte Strecke“.

4.2 Von der Rekonstruktion des Bestands zur Stammfunktion

Entdecken

- $F(t) = 2t^2 + 20t$ (siehe „Verstehen" im Schulbuch).

Aufgaben

1 Lösung im Schulbuch.

2 **a)** $F(x) = 4x^5 - 2x^3 + x + c$ **b)** $F(x) = -\frac{3}{8}x^8 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{2}{5}x^5 + c$

c) $F(x) = -x^{-2} - 4x^6 + c$ **d)** $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + c$

e) $F(x) = 4\sin(x) - 2x + c$ **f)** $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

g) $F(x) = \frac{25}{3}x^3 - 10x^2 + 4x + c$ **h)** $F(x) = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c$

i) $F(x) = \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{8}x^4 + c$

3 Lösung im Schulbuch.

4 **a)** $F(x) = x^2 + 9x + c$; mit $F(1) = 1$ erhält man $c = -9$ und damit $F(x) = x^2 + 9x - 9$.

b) $F(x) = -\frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + c$; mit $F(3) = -5$ erhält man $c = 11{,}5$ und damit $F(x) = -\frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + 11{,}5$.

c) $F(x) = \frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{20}x^4 + 4x + c$; mit $F(-4) = 0$ erhält man $c = -483{,}2$ und damit $F(x) = \frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{20}x^4 + 4x - 483{,}2$.

d) $F(x) = -3\cos(x) - 2x + c$; mit $F(\pi) = 2$ erhält man $c = 2\pi - 1$ und damit $F(x) = -3\cos(x) - 2x + 2\pi - 1$.

e) $F(x) = 2x + c$; mit $F\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$ erhält man $c = \frac{7}{8}$ und damit $F(x) = 2x + \frac{7}{8}$.

f) $F(x) = -x^{-2} - \frac{3}{2}x^2 + c$; mit $F(-1) = 5$ erhält man $c = 7{,}5$ und damit $F(x) = -x^{-2} - \frac{3}{2}x^2 + 7{,}5$.

5 **a)** $a = 3$ **b)** $a = 6$ **c)** $a = 4$ **d)** $a = 7$ **e)** $a = -5$ **f)** $a = \frac{1}{2}$

6 Beispiele (mit $c = 0$):

a) $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 4x^2$ **b)** $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2x}$

c) $F(x) = 4\cos(x) + \frac{1}{60}x^5$ **d)** $F(x) = -6e^{6x}$

e) $F(x) = -\frac{1}{16}\cos(-2x + 4)$ **f)** $F(x) = 3e^{-x-3}$

Nachgefragt

- Jede Stammfunktion kann durch den konstanten Summanden c verändert werden, ohne dass sich die entsprechende Ableitung verändert. Jede integrierbare Funktion besitzt also unendlich viele Stammfunktionen.
- Für $n = -1$ gilt $f(x) = x^{-1}$ und damit wäre nach der Potenzregel $F(x) = x^0 = 1$. Die Ableitung einer konstanten Funktion ist aber 0, die Potenzregel ist hier also nicht anwendbar.
  Für $n = 0$ gilt $f(x) = x^0 = 1$ und damit $F(x) = x^1 = x$. Für $n = 0$ gilt die Potenzregel also auch.
- Der konstante Summand c verschiebt den Graphen der Funktion in y-Richtung. Am Verlauf des Graphen verändert sich dadurch aber nichts, die Steigung – und damit die Ableitung – an allen Punkten bleibt jeweils gleich. Für c kann daher jede beliebige reelle Zahl gewählt werden, ohne die Ableitung zu verändern.

7 Lösung im Schulbuch.

8 **a)** $w(5) = -\frac{1}{4500} \cdot 5^3 + \frac{1}{50} \cdot 25 = 0{,}47$ Bei t = 5 s fließen 0,47 ml in den Krug.

b) Die Stammfunktion W (t) gibt die momentane Füllmenge des Krugs an.
$W(t) = -\frac{1}{18000} \cdot t^4 + \frac{1}{150} \cdot t^3 + c,$ c = 0, da der Krug zu Beginn leer ist, also W (0) = 0 gilt.
$W(60) = -\frac{1}{18000} \cdot 60^4 + \frac{1}{150} \cdot 60^3 = 720$
Es befinden sich 720 ml im Krug. Für die volle Maß fehlen also noch 280 ml.

c) Durch Einsetzen verschiedener Werte für t (es ist hilfreich eine Tabellen- oder Listenfunktion des WTR zu verwenden) erhält man, dass der Funktionswert W (t) = 15 im Intervall [13 s; 14 s] überschritten wird. Eine genauere Betrachtung führt zu $t \approx 13{,}64$ s.

9 **a)** Die Bestandsfunktion F (t) ist die Stammfunktion von f (t): $F(t) = 2400e^{0{,}43t} + c$.
Mit F (0) = 500 folgt c = –1900 und damit $F(t) = 2400e^{0{,}43t} - 1900$.

b) F (14) = 985 888,6 Nach 14 Tagen sind es also 985 888 Bakterien.

c) F (10) = 174 979,5 Nach 10 Tagen liegen 174 979 Bakterien vor. Da es zu Beginn bereits 500 Bakterien gab, sind also 174 979 – 500 = 174 479 Bakterien hinzugekommen.

d) F (t) = 5000 $\Longrightarrow 2400e^{0{,}43t} - 1900 = 5000$
Durch Auflösen nach t erhalten wir $t = \frac{\ln\left(\frac{23}{8}\right)}{0{,}43} \approx 2{,}46$.
Nach etwa 2,5 Tagen hat sich die Bakterienanzahl verzehnfacht.

10 **a)** Dort, wo F Extremstellen besitzt, besitzt f eine Nullstelle, denn dort muss gelten $F'(x) = f(x) = 0$.
Daraus folgt $x_1 \approx 0{,}8$ und $x_2 \approx 3{,}2$.

b) f gibt als Ableitung die Steigung von F an. Diese wird im angegebenen Intervall immer kleiner, also gilt dasselbe für die Funktionswerte von f. Damit ist f streng monoton fallend.

c) Wenn f die Bestandsänderung ist, dann gibt F den Bestand an. Die Bestandswerte zu den angegebenen Zeitpunkten können dann aus dem Diagramm abgelesen werden:
$\Delta B = B(2) - B(1) = F(2) - F(1) = 0 - (-3) = 3.$

11 **a)** Da die Funktion f nur den Wert 2 annimmt, muss die zugehörige Stammfunktion F die konstante Steigung 2 besitzen. Das trifft nur auf den Graphen im Diagramm (1) zu.

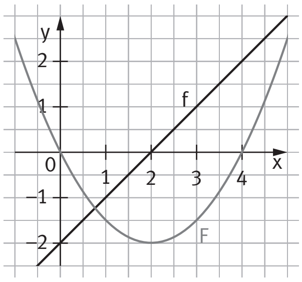
b) Die Funktionswerte von f geben die Steigung der Stammfunktion F in den jeweiligen Punkten an. Da f (1) = 0 gilt (mit Vorzeichenwechsel von positiv zu negativ), muss der Graph von F dort einen Hochpunkt besitzen. Das ist nur bei Diagramm (1) der Fall.

12 Lösung im Schulbuch.

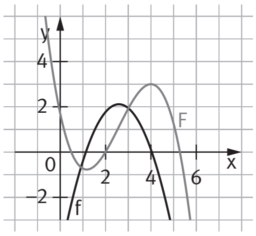
13 Für alle Graphen gilt:

- Besitzt f an einer Stelle x_0 eine Nullstelle, so hat F dort eine Extremstelle. Durch die Betrachtung der Vorzeichen wird klar, ob es ein Minimum oder ein Maximum ist.
- Besitzt f an einer Stelle x_1 eine Extremstelle, so hat F dort eine Wendestelle.
- Eine Verschiebung in y-Richtung ist immer möglich, da die Konstante c in der Funktionsgleichung frei gewählt werden kann.

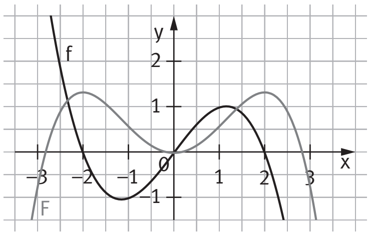
a) $f(2) = 0 \Longrightarrow$ Minimum von F bei $x = 2$



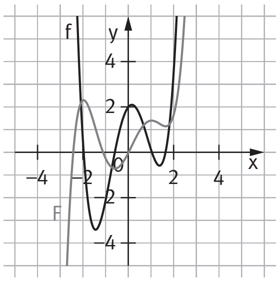
b) Maximum von f bei $x = 2{,}5 \Longrightarrow$ Wendestelle von F bei $x = 2{,}5$
$f(1{,}2) = f(3{,}8) = 0 \Longrightarrow$ Minimum von F bei $x = 1{,}2$ und Maximum von F bei $x = 3{,}8$



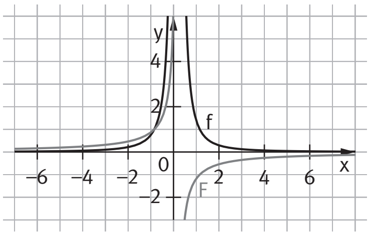
c) $f(-2) = f(0) = f(2) = 0 \Longrightarrow$ Extremstellen von F bei $x = -2$, $x = 0$ und $x = 2$
Extremstellen von f bei $x = -1{,}2$ und $x = 1{,}2 \Longrightarrow$ Wendestellen von F bei $x = -1{,}2$ und $x = 1{,}2$



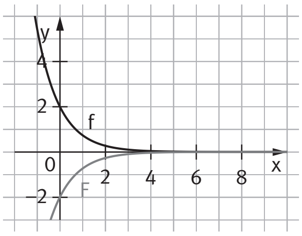
d) $f(-2) = f(-0{,}6) = f(1) = f(1{,}6) = 0 \Longrightarrow$ Extremstellen von F bei $x = -1$, $x = -0{,}6$, $x = 1$ und $x = 1{,}6$
Extremstellen von f bei $x = -1{,}5$, $x = 0{,}2$ und $x = 1{,}5 \Longrightarrow$ Wendestellen von F bei $x = -1{,}5$, $x = 0{,}2$ und $x = 1{,}5$



e) f nimmt nur positive Werte an ($f(x) > 0$) $\Longrightarrow$ F steigt für $x \in \mathbb{R}$; Definitionslücke bei $x = 0$
Der Verlauf erinnert an $g(x) = \frac{1}{x^2}$, die zugehörige Stammfunktion wäre $G(x) = -\frac{1}{x}$. Also hat F (x) einen ähnlichen Verlauf wie G (x).



f) f (x) zeigt den Graphen einer Exponentialfunktion, also ist auch F (x) eine Exponentialfunktion.
Da f nur positive Werte annimmt ($f(x) > 0$), steigt F für $x \in \mathbb{R}$.



14 a) Falsch, F hat bei $x = 0$ ein Minimum (Vorzeichen beachten).
b) Nicht zu entscheiden, da Verschiebung in y-Richtung beliebig möglich.
c) Falsch, es gilt zwar $F''(1{,}5) = f'(1{,}5) = 0$, da f dort einen Sattelpunkt besitzt. f' hat deswegen dort aber keinen Vorzeichenwechsel, der für eine Wendestelle nötig ist.
d) Falsch, F hat bei $x = -3$ eine Wendestelle, da f dort ein Minimum besitzt.
e) Wahr (siehe d)).
f) Wahr, sogar streng monoton steigend, da dort $f > 0$ ist.
g) Falsch. Es gilt $f(x) < 0$ für $x \in [-3; -1]$, d. h. F fällt in diesem Intervall. $F(-3)$ kann daher nicht kleiner sein als $F(-1)$, es gilt das Gegenteil: $F(-3) > F(-1)$.

15 a) Die Beschleunigung ist eine Sinusfunktion und daher abwechselnd positiv und negativ. Es wird also erst beschleunigt, dann gebremst (und zwar genau so viel, wie vorher beschleunigt wurde), wieder beschleunigt, usw. Die Funktion könnte z. B. einen Bus beschreiben, der von Haltestelle zu Haltestelle fährt, ein Fließband, das in regelmäßigen Abständen kurz anhalten muss, oder ein Auto im stockenden Straßenverkehr.
b) v (t) erhält man als Stammfunktion von a (t): $v(t) = -3k\cos\left(\frac{1}{3}t\right) + c$. Wenn hier $c = 0$ gilt, ergibt sich eine Bewegung, die zwischen zwei Punkten hin und her pendelt. Gilt dagegen $c > 0$, so erhalten wir eine Bewegung wie in a) beschrieben.
Für die maximale Geschwindigkeit muss dann gelten $v'(t) = a(t) = 0$.
Dies ist für $t = 3l \cdot \pi$ ($l = 0, 1, 2, \ldots$) der Fall. Einsetzen in v (t) ergibt: $v(3l \cdot \pi) = -3k\cos\left(\frac{1}{3}3l \cdot \pi\right) + c$
$= -3k\cos(l \cdot \pi) + c = -3k + c$ für $l = 0, 2, 4, \ldots$
$3k + c$ für $l = 1, 3, 5, \ldots$
3k ist damit die größte (und –3k die kleinste) Geschwindigkeit, die für $c = 0$ die angenommen wird.
c) Die Geschwindigkeitsfunktion v (t) erhalten wir als Stammfunktion von a (t) (siehe b)). Die Funktion für die zurückgelegte Strecke s (t) erhalten wir als Stammfunktion von v (t). Die Beschleunigungsfunktion a (t) muss also zweimal aufgeleitet werden.
In die resultierende Weg-Funktion s (t) muss dann $t = 52$ eingesetzt werden, um den zurückgelegten Weg zu berechnen.

Nachgefragt

- Für ganzrationale Funktionen, denen ein Grad zuzuordnen ist, gilt beim Aufleiten die Potenzregel:
  $f(x) = x^n \Longrightarrow F(x) = x^{n+1}$.
  Während f(x) den Grad n besitzt, besitzt F(x) den Grad n + 1. Die Aussage ist also korrekt.
- In diesem einen Spezialfall hat Kaan Recht. Allerdings ist für die Funktion $f(x) = 0$ die Funktion $F(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion. Es könnte also auch jede andere konstante Funktion gewählt werden.
- Da der Grad der Stammfunktion immer um 1 größer ist als der Grad der Funktion selbst, kann dadurch auch die Zahl der Nullstellen steigen. Gleiches gilt für die Anzahl der Extrem- und Wendestellen, die jeweils als Nullstellen der 1. und 2. Ableitung bestimmt werden. Die erste Ableitung der Stammfunktion F(x) ist dabei die Funktion f(x) selbst, die aus den gleichen Gründen eine Nullstelle mehr besitzt als deren Ableitung f'(x). Für die Wendestellen gilt die gleiche Argumentation mit den 2. Ableitungen von F(x) und f(x).
  Allerdings gibt der Grad einer Funktion nicht immer die genaue Anzahl der Nullstellen an, sondern die maximal mögliche. Besitzt F(x) eine doppelte Nullstelle, so ist die Anzahl der Nullstellen um eins kleiner als der Grad von F. Demnach wäre die Anzahl der Nullstellen von F(x) und f(x) gleich groß.
  Beispiel: $f(x) = 2x$ und $F(x) = x^2$.

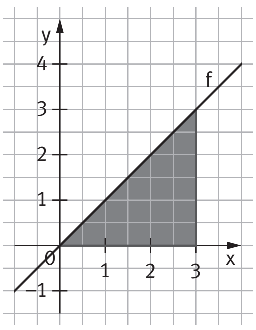
4.3 Integrieren ohne Stammfunktion – das Riemann-Integral

Entdecken

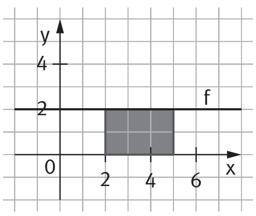
- Fläche durch fünf Rechtecke angenähert:
  $A = \frac{2}{7} \cdot v\left(\frac{2}{7}\right) + \frac{2}{7} \cdot v\left(\frac{4}{7}\right) + \frac{2}{7} \cdot v\left(\frac{6}{7}\right) + \frac{2}{7} \cdot v\left(\frac{10}{7}\right) + \frac{2}{7} \cdot v\left(\frac{12}{7}\right) =$
  $\frac{2}{7} \cdot (391{,}84 + 653{,}06 + 783{,}76 + 653{,}06 + 391{,}84) = 821{,}02$ km
- Das Ergebnis kann durch mehr Rechtecke geringerer Breite verbessert werden, da die abgedeckte Fläche dann immer besser der tatsächlich eingeschlossenen Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse entspricht. Dies gelingt am besten mit einer Grenzwert-Annäherung durch Ober- und Untersumme:
  A = 1066,67 km.

Aufgaben

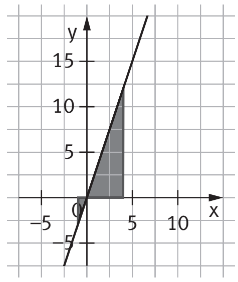
1 **a)**



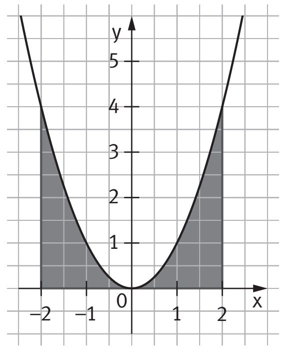
b)



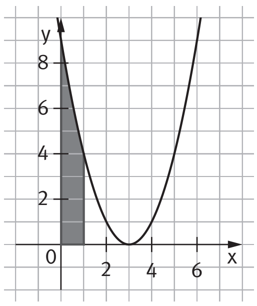
c)



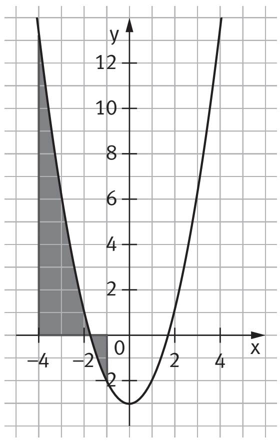
d)



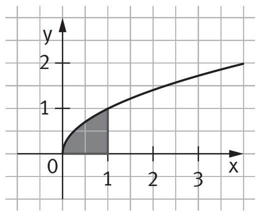
e)



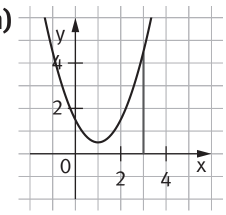
f)



g)



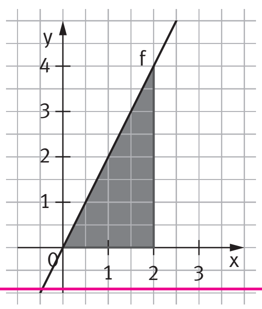
h)



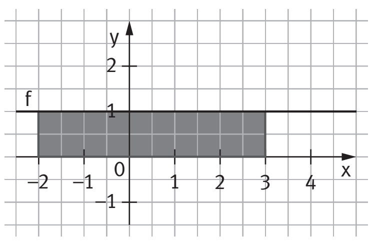
2 **a)** $\int_1^3 \frac{1}{2} x \, dx$ **b)** $\int_{-1}^4 (-2x + 3) \, dx$ **c)** $\int_{-2}^1 (-x^2 + 1) \, dx$ **d)** $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(x) \, dx$ **e)** $\int_{-0{,}5}^4 (x - 3)^2 - 4 \, dx$ **f)** $\int_{0{,}5}^{3{,}5} \frac{1}{x} \, dx$

3 Lösung im Schulbuch.

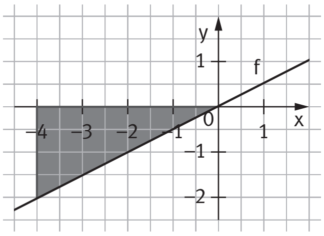
4 **a)** $\int_0^2 2x \, dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$



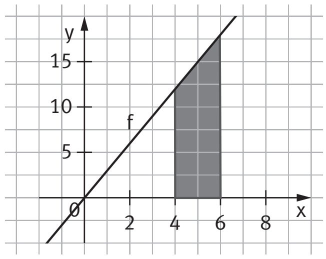
b) $\int_{-2}^3 1 \, dx = 5 \cdot 1 = 5$



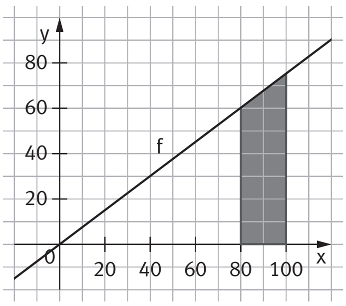
c) $\int\limits_{-4}^{0} \frac{1}{2}x\,dx = -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = -4$



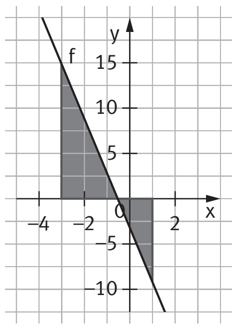
d) $\int\limits_{4}^{6} 3x\,dx = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 18 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 = 30$



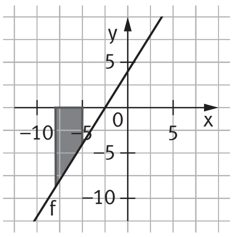
e) $\int\limits_{80}^{100} \frac{3}{4}x\,dx = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 75 - \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 60 = 1350$



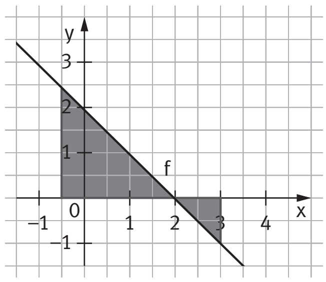
f) $\int\limits_{-3}^{1} (-6x - 3)\,dx = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 15 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 9 = 12$



g) $\int\limits_{-8}^{-5} \frac{8}{5}x + 4dx = -\left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8{,}8 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4\right) = -25{,}2$



h) $\int\limits_{-0{,}5}^{3} (2 - x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 2{,}625$



Nachgefragt

- Individuelle Lösungen. Beispiel: f: f(x) = –x + 3.
  Mögliche Überlegung: Wenn die Funktion im Intervall [3; 5] unterhalb der x-Achse verläuft, ist ihr orientierter Flächeninhalt in diesem Intervall negativ. Der Wert des Integrals wird also kleiner, wenn man dieses Intervall zusätzlich zum Intervall [0; 3] betrachtet.
- Die Regel stimmt nicht. Die Steigung des Graphen hat keine Auswirkungen auf das Vorzeichen des Integrals. Entscheidend ist, ob der Graph oberhalb oder unterhalb der x-Achse verläuft.
- Wählt man identische Integralgrenzen für ein Integral, so ist der Wert dieses Integrals stets 0. Fabian hat also Recht.

5 Lösung im Schulbuch.

6 Individuelle Lösungen. Beispiele:

a) $a = 0,\ b = 3$ **b)** $a = 0,\ b = 2$ **c)** $a = 0,\ b = 0{,}25$

d) Es wird festgelegt: $b = 0 \implies \frac{1}{2} \cdot a \cdot (3a) = 24 \implies a = 4$

e) $a = 0,\ b = 2\pi$ **f)** $b = \pi$

g) Der Integrand ist punktsymmetrisch zur Nullstelle bei $x = 2$. $\implies a = 0,\ b = 4$

h) Die Fläche setzt sich zusammen aus einem Dreieck der Fläche $\frac{1}{2} \cdot b \cdot 2b$ und einem Rechteck der Fläche $b \cdot 2$. $\implies \frac{1}{2} \cdot b \cdot 2b + b \cdot 2 = 35 \implies b^2 + 2b - 35 = 0 \implies b_1 = 5,\ b_2 = -7$
Für $b_2 = -7$ verläuft der Graph größtenteils unterhalb der x-Achse, was zu einem negativen Integralwert führen würde. $\implies b = 5$

i) Die Fläche setzt sich zusammen aus einem Dreieck der Fläche $\frac{1}{2} \cdot (5 - a) \cdot ((5 + 2) - (a + 2))$ und einem Rechteck der Fläche $(5 - a) \cdot (a + 2)$.
$\implies \frac{1}{2} \cdot (5 - a) \cdot ((5 + 2) - (a + 2)) + (5 - a) \cdot (a + 2) = 6{,}5 \implies \frac{1}{2}a^2 + 4a - 32 = 0$
$\implies a_1 = 4,\ a_2 = -8$
Mit der gleichen Argumentation wie in h) kommt a_2 als Lösung nicht in Frage. $\implies a = 4$

7 **a)** Der Integrand ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Im Intervall $[-2;\ 0]$ und $[0;\ 2]$ erhält man also gleich große orientierte Flächeninhalte mit unterschiedlichen Vorzeichen.

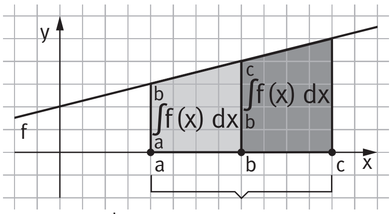
b) Die Integralgrenzen sind identisch, so dass kein orientierter Flächeninhalt dazwischen liegt.

c) Der orientierte Flächeninhalt im Intervall $[0;\ \pi]$ ist genauso groß wie der im Intervall $[\pi;\ 2\pi]$, nur mit umgekehrtem Vorzeichen.

d) Der Integrand ist punktsymmetrisch zur Nullstelle bei $x = -4$ (Argumentation siehe a)).

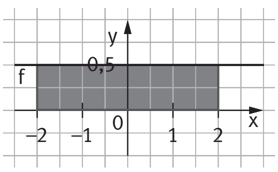
8 **a)** $\int_a^b f(x)\,dx$ beschreibt die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a;\ b]$.
$\int_b^c f(x)\,dx$ beschreibt das Gleiche für das Intervall $[b;\ c]$. Zusammengenommen wird also die Fläche zwischen Graph und x-Achse im Intervall $[a;\ c]$ beschrieben. Das wiederum beschreibt das Integral $\int_a^c f(x)\,dx$.

b)

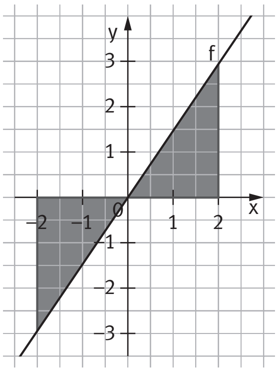


$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

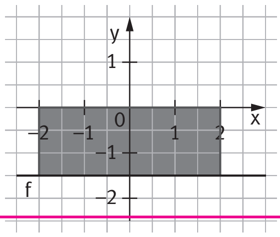
9 **a)** $f(x) = 0{,}5$



b) $f(x) = 1{,}5x$ (oder jede andere zum Ursprung punktsymmetrische Funktion)



c) $f(x) = -1{,}5$



10 Lösung im Schulbuch.

11 **a)** Der Integrand ist symmetrisch zur y-Achse. Die Intervalle [–4; 0] und [0; 4] beinhalten also symmetrische Abschnitte des Graphen von x^2.

b) Der Integrand ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Die Argumentation von a) gilt auch hier. Das umgekehrte Vorzeichen des orientierten Flächeninhalts wird durch das negative Vorzeichen in der Gleichung kompensiert.

c) Die Intervalle [6; 18] und [52; 64] haben die gleiche Länge. Bei einer konstanten Funktion bedeutet das zwei Rechtecke gleicher Länge und Breite.

d) Das Intervall [–15; 7] ist doppelt so lang wie das Intervall [13; 24]. Aufgrund der konstanten Funktion ist also das Integral links doppelt so groß wie das Intervall rechts. Der Faktor 2 stellt die Gleichheit her.

e) Beide Integrale besitzen den Wert 0, links aufgrund von Punktsymmetrie zum Ursprung und rechts wegen der konstanten Funktion 0.

f) Der Integrand ist punktsymmetrisch zur Nullstelle x = –3. Die Intervalle, in denen die Integrale berechnet werden, liegen symmetrisch zu dieser Nullstelle und beschreiben deswegen die gleichen Flächeninhalte mit umgekehrten Vorzeichen.

12 **a)** Flächen, die unterhalb der x-Achse liegen, wird ein negativer Flächeninhalt zugeordnet.

b) Die Integralgrenzen sind falsch herum eingetragen.

c) Flächen, die unterhalb der x-Achse liegen, wird ein negativer Flächeninhalt zugeordnet. Der Flächeninhalt des kleinen Dreiecks links muss also vom Flächeninhalt des großen subtrahiert werden, nicht hinzuaddiert.

13 Lösung im Schulbuch.

14 **a)** $\int_0^{20} f(t)\,dt$ gibt die Distanz an, um die das U-Boot in den ersten 20 Sekunden gesunken ist. Damit entspricht es gleichzeitig der Tiefe, in der sich das U-Boot nach 20 Sekunden befindet.

$\int_{20}^{50} f(t)\,dt$ steht für die Distanz, um die das U-Boot zwischen t = 20 s und t = 50 s abgesunken ist.

b) $\int_0^{50} f(t)\,dt = \int_0^{20} f(t)\,dt + \int_{20}^{50} f(t)\,dt = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot [-5 - f(50)] + f(50) \cdot 50 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot (-2{,}5) + (-2{,}5) \cdot 50 = -187{,}5$

Das U-Boot befindet sich nach 50 s in 187,5 m Tiefe.

c) Es gilt: f(t) = 0 für t = 100.

Da die Sinkgeschwindigkeit zwar abnimmt, aber bis t = 100 s immer vorhanden bleibt, erreicht das U-Boot seine größte Tiefe zum Zeitpunkt t = 100 s.

$\int_0^{100} f(t)\,dt = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (-5) = -250$ Das U-Boot taucht maximal 250 m tief.

d) Für den Auftauchvorgang muss der orientierte Flächeninhalt –250 betragen. Da das U-Boot mit einer konstanten Geschwindigkeit auftaucht, ergibt sich eine Rechteckfläche mit der Höhe (Geschwindigkeit) 4 und dem Flächeninhalt (Tiefe) 250. Die Breite (Zeit) ergibt sich daraus zu 62,5 s.

Alternativ lässt sich die Zeit natürlich auch mithilfe der physikalischen Bewegungsgleichungen berechnen:

$v = \frac{s}{t} \implies t = \frac{s}{v} = \frac{250}{4} = 62{,}5$ Das U-Boot benötigt 62,5 s, um wieder aufzutauchen.

Mit $\int_0^{62{,}5} 4\,dt$ lässt sich die Tiefe ebenfalls berechnen: $\int_0^{62{,}5} 4\,dt = 62{,}5 \cdot 4 = 250$.

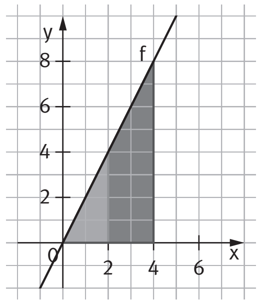
15 Die orientierten Flächeninhalte unterhalb der x-Achse besitzen ein negatives Vorzeichen und verkleinern so den Wert des Integrals.

$$\int_C^E f(x)\,dx < \int_A^E f(x)\,dx < \int_A^D f(x)\,dx < \int_A^B f(x)\,dx < \int_A^C f(x)\,dx < \int_E^F f(x)\,dx$$

16 **a)** In der Gleichung für die Intervalladditivität setzen wir a = 0, b = a und c = b und erhalten:

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx.$$

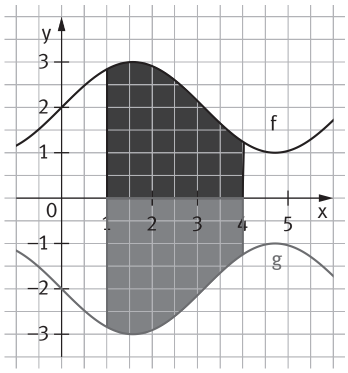
Umstellen ergibt: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx.$



b) Der orientierte Flächeninhalt in einem Intervall [a; b] über einer Funktion f kann auch berechnet werden, indem der Flächeninhalt von [0; a] über f vom Flächeninhalt von [0; b] über f subtrahiert wird. Betrachten wir das Beispiel f (x) = 2x, so erhalten wir den Flächeninhalt von [2; 4] über f als Differenz des Flächeninhalts von [0; 4] über f und [0; 2] über f.

c) Im oben genannten Beispiel kann die Fläche als Differenz zweier Dreiecksflächen berechnet werden. Die direkte Berechnung entspricht einer Summe aus Dreieck und Rechteck, für die Längen und Breiten erst bestimmt werden müssten.

17 In der Skizze ist eine Funktion f und die entsprechende Funktion –f gezeichnet. Die Integrale über ein beliebiges Intervall (hier [1; 4]) haben, wie in der Zeichnung zu erkennen, für beide Funktionen den gleichen Betrag, jedoch unterschiedliche Vorzeichen. Daraus folgt direkt die Behauptung.



Auch mithilfe der Herangehensweise mit Rechtecksummen lässt sich dies zeigen. Der Flächeninhalt eines Rechtecks wird berechnet aus einem Funktionswert und der Rechtecksbreite. Das Vorzeichen der Funktionswerte geht also direkt in die Berechnung des orientierten Flächeninhalts mit ein.

Für f ist dieses Vorzeichen ein anderes als für –f, weswegen $\int_a^b f(x)\,dx$ ein anderes Vorzeichen besitzt als $\int_a^b (-f(x))\,dx$. Hieraus folgt also: $\int_a^b (-f(x))\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ und damit die Behauptung.

18 Eine Funktion f ist genau dann integrierbar, wenn bei der Riemann'schen Annäherung Ober- und Untersumme den gleichen Grenzwert besitzen. Bei diesem Grenzübergang werden die Rechtecke unterhalb des Funktionsgraphen immer schmaler, die Intervalle, die die Rechtecksbreite angeben, also immer kleiner. Bei der Dirichlet-Funktion gibt es kein noch so kleines Intervall, in dem wir nur rationale oder nur irrationale Zahlen finden, es liegt immer beides vor. Die Obersumme wird also, egal wie klein die Rechtecksbreiten auch werden, immer durch Rechtecke mit der Höhe (dem Funktionswert) 1, die Untersumme immer durch Rechtecke mit der Höhe (dem Funktionswert) 0 berechnet. Die Grenzwerte dieser beiden Summen werden also nie identisch sein, weshalb die Dirichlet-Funktion nicht integrierbar ist.

Nachgefragt

- Wenn der Graph des Integranden außerdem punktsymmetrisch zur Nullstelle verläuft, dann hat Fortana Recht. Ist dies nicht der Fall, sind die Beträge der orientierten Flächeninhalte links und rechts der Nullstelle nicht gleich groß. Bei doppelten, vierfachen, … Nullstellen ist der Wert des Integrals nicht einmal dann gleich null.
- Die Flächeninhalte der Rechtecke werden als Produkt aus einem Funktionswert (Infimum oder Supremum) und der Breite des Rechtecks berechnet. Der orientierte Flächeninhalt einer Funktion hat in einem Intervall [a; b] genau dann ein negatives Vorzeichen, wenn der Graph der Funktion dort unterhalb der x-Achse verläuft. Die Funktionswerte sind dann negativ, weswegen das oben beschriebene Produkt aus Funktionswert und Rechtecksbreite (der orientierte Flächeninhalt des Rechtecks) automatisch negativ wird. Die Summe dieser negativen Produkte, die dem Integral entspricht, ist dann auch negativ.
- Sina meint die Herleitung der Ableitung durch den Differenzenquotienten im Zusammenhang mit der Differenzierbarkeit. Eine Funktion ist an einer Stelle x_0 genau dann differenzierbar (das heißt ihre Ableitung existiert), wenn die Grenzwerte des Differenzenquotienten bei linksseitiger und rechtsseitiger Annäherung an x_0 den gleichen Wert annehmen.
  Konkret realisiert wurde dieses Vorgehen durch die Stellen $x_0 + h$ und $x_0 - h$ (mit $h > 0$), die knapp rechts und knapp links von x_0 liegen.
  Wenn also $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$ gilt, dann ist f an der Stelle x_0 differenzierbar.

Entdecken

- Mit der Stammfunktion $F(x) = -\frac{1}{36}x^4 + \frac{1}{3}x^3$ erhält man (siehe „Verstehen" im Schulbuch):
$\int_0^6 f(x)\,dx = F(6) - F(0) = \left(-\frac{1}{36}\cdot 6^4 + \frac{1}{3}\cdot 6^3\right) - \left(-\frac{1}{36}\cdot 0^4 + \frac{1}{3}\cdot 0^3\right) = (-36 + 72) = 36$

- $\int_6^9 f(x)\,dx = F(9) - F(6) = \left(-\frac{1}{36}\cdot 9^4 + \frac{1}{3}\cdot 9^3\right) - \left(-\frac{1}{36}\cdot 6^4 + \frac{1}{3}\cdot 6^3\right)$
$= \left(-182\frac{1}{4} + 243\right) - (-36 + 72) = 60\frac{3}{4} - 36 = 24{,}75$

Aufgaben

1 Lösung im Schulbuch.

2 **a)** $\int_0^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{1}{2}3^2 - \frac{1}{2}0^2 = 4{,}5$

b) $\int_0^4 (3x-1)\,dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - x\right]_0^4 = \frac{3}{2}4^2 - 4 - \left(\frac{1}{2}0^2 - 0\right) = 20$

c) $\int_0^1 4x^2\,dx = \left[\frac{4}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{4}{3}1^3 - \frac{4}{3}0^3 = \frac{4}{3}$

d) $\int_0^{10} 4\,dx = [4x]_0^{10} = 4\cdot 10 - 4\cdot 0 = 40$

e) $\int_0^2 e^x\,dx = [e^x]_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1 \approx 6{,}39$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) = 1$

g) $\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = \int_0^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = \frac{2}{3}9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}} = 18$

h) $\int_0^{2\pi} \cos(x)\,dx = [\sin(x)]_0^{2\pi} = \sin(2\pi) - \sin(0) = 0$

3 **a)** $\int_0^3 \frac{1}{4}x^2\,dx = \left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^3 = \frac{1}{12}3^3 - \frac{1}{12}0^3 = \frac{9}{4} = 2{,}25$

b) $\int_{-1}^1 (-2x^2 + 2)\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x\right]_{-1}^1 = -\frac{2}{3}\cdot 1^3 + 2\cdot 1 - \left(-\frac{2}{3}(-1)^3 + 2\cdot(-1)\right) = 2\frac{2}{3}$

c) $\int_0^2 \frac{1}{3}e^x\,dx = \left[\frac{1}{3}e^x\right]_0^2 = \frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{3}e^0 = \frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{3} \approx 2{,}13$

d) $\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^2 = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}2\right) - \left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}0\right)\right) = \frac{4}{\pi}$

e) $\int_1^4 (x+2)(x-1)^2(x-4)\,dx = \int_1^4 (x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8)\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 - x^3 + 7x^2 - 8x\right]_1^4 =$
$\frac{1}{5}4^5 - 4^4 - 4^3 + 7\cdot 4^2 - 8\cdot 4 - \left(\frac{1}{5}\cdot 1^5 - 1^4 - 1^3 + 7\cdot 1^2 - 8\cdot 1\right) = -32\frac{2}{5} = -32{,}4$

f) $\int_1^4 \frac{3}{x^2}\,dx = \left[-\frac{3}{x}\right]_1^4 = -\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{1}\right) = 2\frac{1}{4} = 2{,}25$

4 **a)** $\int_0^3 f(x)\,dx = F(3) - F(0) = -1{,}15 - 0 = -1{,}15$

b) $\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = 3{,}30 - 0 = 3{,}30$

c) $\int_{-2}^0 f(x)\,dx = F(0) - F(-2) = 0 - (-3{,}25) = 3{,}25$

d) $\int_{-4}^{-2} f(x)\,dx = F(-2) - F(-4) = -3{,}25 - 3{,}97 = -7{,}22$

e) $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = F(1) - F(-1) = 3{,}30 - (-3{,}31) = 6{,}61$

f) $\int_{-3}^4 f(x)\,dx = F(4) - F(-3) = -6{,}53 - 0{,}34 = -6{,}87$

g) $\int_3^3 f(x)\,dx = F(3) - F(3) = 0$

h) $\int_{-4}^1 f(x)\,dx = F(1) - F(-4) = 3{,}30 - 3{,}97 = -0{,}67$

5 **a)** $\int_1^3 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^3 = \frac{1}{4}3^4 - \frac{1}{4}1^4 = 20$

b) $\int_{-1}^5 \frac{1}{5}e^x\,dx = \left[\frac{1}{5}e^x\right]_{-1}^5 = \frac{1}{5}e^5 - \frac{1}{5}e^{-1} \approx 29{,}6$

c) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

d) $\int_0^{100} \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{100} = \frac{2}{3}\sqrt{100}^3 = 666\frac{2}{3}$

Nachgefragt

- Sei f (t) die Änderungsfunktion eines Bestandes und F (t) die zugehörige Bestandsfunktion. Der Bestand zum Zeitpunkt t_1 kann dann mit dem Integral $\int_0^{t_1} f(t)\,dt$ rekonstruiert werden, der Bestand zum Zeitpunkt t_2 $(t_2 > t_1)$ analog mit $\int_0^{t_2} f(t)\,dt$. Die Bestandsänderung zwischen t_1 und t_2 ergibt sich dann zu $\int_0^{t_2} f(t)\,dt - \int_0^{t_1} f(t)\,dt$. Geometrisch entspricht dies dem Integral $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$. Da für f (t) als Änderungsfunktion des Bestandes gilt: F' (t) = f (t), ist F (t) also automatisch Stammfunktion von f (t). Zusammen mit der Integraldarstellung ergibt sich dann: $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \int_0^{t_2} f(t)\,dt - \int_0^{t_1} f(t)\,dt = F(t_2) - F(t_1)$.
- Mit „Integrieren“ ist das Bestimmen des Werts eines Integrals gemeint. Dies kann über die Stammfunktion, aber auch geometrisch als Flächenberechnung vorgenommen werden. „Aufleiten“ bezeichnet lediglich das Bestimmen einer Stammfunktion, ist bei der Flächenberechnung also nicht notwendig. Die Begriffe beschreiben daher nicht dasselbe.
- Da der Integrand in diesem Beispiel eine konstante Funktion ohne Variable ist, hat Andreas recht. Beim Bestimmen der Stammfunktion wird im einen Fall x, im anderen z, als Variable hinzugefügt. Im Gegensatz dazu haben also $\int_a^b 3x\,dx$ und $\int_a^b 3x\,dz$ nicht das gleiche Ergebnis.

6 1 Der Vorfaktor $\frac{1}{3}$ fehlt im ersten Teil der Funktion genauso wie das Integrieren des zweiten Teils der Funktion.

2 Die Integrationsgrenzen müssen für die gesamte Funktion eingesetzt werden. Hier wurde 4 für die erste Variable und –1 für die zweite eingesetzt.

3 Der Funktionswert F (–1) muss von F (4) subtrahiert werden. Nach Einsetzen der Funktionswerte muss also eine Klammer um F (–1) gesetzt werden.

4 Die Integrationsgrenzen müssen in die Stammfunktion eingesetzt werden, nicht in den Integranden.

7 Lösung im Schulbuch.

8 **a)** $\int_a^4 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^4 = \frac{1}{3}4^3 - \frac{1}{3}a^3 = 21 \qquad \Longrightarrow a = 1$

b) $\int_0^b \frac{1}{3}x\,dx = \left[\frac{1}{6}x^2\right]_0^b = \frac{1}{6}b^2 = 24 \qquad \Longrightarrow b = 12$

c) $\int_0^b \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^b = -\cos(b) - (-\cos(0)) = 1 \qquad \Longrightarrow b = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

d) $\int_a^0 \frac{2}{3}e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{3}e^{2x}\right]_a^0 = \frac{1}{3}e^0 - \frac{1}{3}e^{2a} = 0{,}25 \qquad \Longrightarrow a \approx -0{,}69$

e) $\int_1^b (x+1)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^b = \frac{1}{2}b^2 + b - \frac{1}{2} - 1 = -1 \qquad \Longrightarrow b_1 = -1 + \sqrt{2} \approx 0{,}41 \quad b_2 = -1 - \sqrt{2} \approx -2{,}41$

f) $\int_a^0 (x-a)\,(x+a)\,dx = \int_a^0 (x^2 - a^2)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - a^2x\right]_a^0 = -\frac{1}{3}a^3 - a^3 = 3$

$\Longrightarrow a = -\sqrt[3]{\frac{9}{2}} \approx -1{,}65$

9 **a)** $\int_{-2}^4 kx\,dx = k\int_{-2}^4 x\,dx = k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^4 = k\cdot\left(\frac{1}{2}4^2 - \frac{1}{2}(-2)^2\right) = 18 \qquad \Longrightarrow k = 3$

b) $\int_{-2}^0 (-kx^2)\,dx = k\int_{-2}^0 -x^2\,dx = k\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^0 = k\cdot\left(\frac{1}{3}(-2)^3\right) = -16 \qquad \Longrightarrow k = 6$

c) $\int_3^9 \frac{1}{(kx)^2}\,dx = \frac{1}{k^2}\int_3^9 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{k^2}\left[\frac{-1}{x}\right]_3^9 = \frac{1}{k^2}\cdot\left(-\frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{8} \qquad \Longrightarrow k = \frac{4}{3}$

d) $\int_{-1}^1 \frac{1}{k}x^3\,dx = \frac{1}{k}\int_{-1}^1 x^3\,dx = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^1 = \frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0 \qquad \Longrightarrow k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

e) $\int_{-1}^1 \frac{1}{k}x^3\,dx = \frac{1}{k}\int_{-1}^1 x^3\,dx = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^1 = \frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0 \neq 4$ keine Lösung

f) $\int_0^3 \left(\frac{4}{27}k^2x^3 - 2kx - 15\right)dx = \left[\frac{1}{27}k^2x^4 - kx^2 - 15x\right]_0^3 = \frac{1}{27}k^2\cdot 3^4 - k\cdot 3^2 - 15\cdot 3 = 3k^2 - 9k - 45 = 117$

$\Longrightarrow k^2 - 3k - 54 = 0$

$\Longrightarrow k_1 = 9 \quad k_2 = -6$

10 (1) = (6) = (8) = (12) (2) = (5) = (9) = (11) (3) = (4) = (7) = (10)

11 **a)** $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) =$
$F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) = [F(x) + G(x)]_a^b = \int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx$

Die Summe der orientierten Flächeninhalte unter den Funktionen f und g ist gleich dem orientierten Flächeninhalt unter der Summe der Funktionen f und g.
Betrachtet man den orientierten Flächeninhalt als unendliche Summe unendlich schmaler Rechtecke, so werden im ersten Fall die Rechtecke unter den Graphen von f und g im Intervall [a; b]

addiert. Im zweiten Fall werden die Rechtecke unter dem Graphen von f + g addiert, wobei diese Rechtecke dieselbe (unendlich kleine) Breite haben wie zuvor. Ihre Höhe ergibt sich jedoch aus der Summe der Funktionswerte $f(x) + g(x)$ an jeder Stelle x innerhalb von [a; b]. Sei „dx“ diese unendlich kleine Breite, so erhalten wir im ersten Fall $f(x) \cdot dx$ für ein beliebiges Rechteck unter dem Graphen von f und $g(x) \cdot dx$ für ein beliebiges Rechteck unter dem Graphen von g. Die Summe ist dann $f(x) \cdot dx + g(x) \cdot dx = (f(x) + g(x)) \cdot dx$. Dies wiederum entspricht genau dem Term für die Berechnung eines beliebigen Rechtecks unter dem Graphen von f + g.

b) $\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

Da λ nicht von x abhängt, kann es direkt vor das Integral gezogen werden, womit die Gleichung bewiesen wäre.

Geometrisch bedeutet die Gleichung eine Vervielfachung der Funktionswerte (links) und eine Vervielfachung des orientierten Flächeninhalts (rechts). Hier kann genauso argumentiert werden wie in a). Die λ-fachen Funktionswerte auf der linken Seite der Gleichung bewirken die λ-fachen Höhen der Rechtecke. Das wiederum bedeutet eine Vervielfachung des orientierten Flächeninhalts mit dem Faktor λ auf der rechten Seite.

12 Lösung im Schulbuch.

13 a) $\int_0^2 (5x-1)\,dx + \int_2^5 (5x-1)\,dx = \int_0^5 (5x-1)\,dx = \left[\frac{5}{2}x^2 - x\right]_0^5 = 57{,}5$

b) $\int_{-\pi}^{2} [-\cos(2x)]\,dx + \int_2^{\pi} [-\cos(2x)]\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} [-\cos(2x)]\,dx = \left[-\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

c) $\int_{-2}^{1} 53\frac{2}{5}x^6\,dx = 53\frac{2}{5} \cdot \int_{-2}^{1} x^6\,dx = 53\frac{2}{5} \cdot \left[\frac{1}{7}x^7\right]_{-2}^{1} \approx 984{,}09$

d) $\int_0^6 \left(\frac{2}{7}x^3 - 2x^2\right)dx + \int_0^6 \left(-\frac{2}{7}x^3 - x^2\right)dx = \int_0^6 \left(\frac{2}{7}x^3 - 2x^2 - \frac{2}{7}x^3 - x^2\right)dx = \int_0^6 (-3x^2)\,dx = [-x^3]_0^6 = -216$

e) $\int_{-2}^{12} (-x^4 + 5)\,dx - \int_0^{12} (-x^4 + 5)\,dx = \int_{-2}^{0} (-x^4 + 5)\,dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + 5x\right]_{-2}^{0} = 3{,}6$

f) $\int_2^{17} \sqrt{49x - 49}\,dx = 7 \cdot \int_2^{17} \sqrt{x-1}\,dx = 7 \cdot \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^{17} = 294$

g) $\int_0^3 (x^2 - x)\,dx - \int_{-3}^{0} (x - x^2)\,dx = \int_0^3 (x^2 - x)\,dx - (-1) \cdot \int_{-3}^{0} (x^2 - x)\,dx = \int_0^3 (x^2 - x)\,dx + \int_{-3}^{0} (x^2 - x)\,dx =$

$\int_{-3}^{3} (x^2 - x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x\right]_{-3}^{3} = 18$

h) $\int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x^2\right)dx + \int_1^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x^2\right)dx - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[-\frac{1}{6}x^3\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\left(-\sqrt{3}^3 + 1\right)$

$\approx -0{,}7$

14 a) $\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^4 f(x)\,dx = 8 + 12 = 20$

b) $\int_0^1 2f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^1 f(x)\,dx = 2 \cdot 8 = 16$

c) $\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx = 8 - 10 = -2$

d) $\int_0^1 (f(x) + 3g(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + 3 \cdot \int_0^1 g(x)\,dx = 8 + 3 \cdot 10 = 38$

15 **a)** Individuelle Skizzen. Es gelte a, b $\in \mathbb{R}$ mit a < b. Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ beschreibt den orientierten Flächeninhalt zwischen x-Achse und dem Graphen der Funktion f. Werden die Integrationsgrenzen vertauscht, wie in der Aufgabe gegeben, so bewirkt dies eine Änderung des Vorzeichens der Intervallbreite (b – a). Der orientierte Flächeninhalt und damit das Integral erhält dadurch ebenfalls ein anderes Vorzeichen. Das gleiche Vorzeichen erhält man, wenn man das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ an der x-Achse spiegelt.

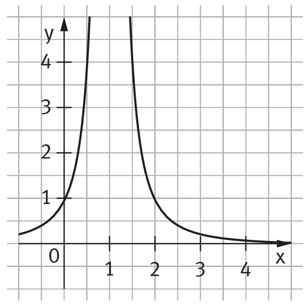
b) $\int_b^a f(x)\,dx = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -[F(x)]_a^b = -\int_a^b f(x)\,dx$

16 **a)** $\int_1^5 3x^2\,dx = [x^3]_1^5 = 5^3 - 1^3 = 125 - 1 = 124$

$\int_1^5 3x^2\,dx = [x^3 + 2]_1^5 = 5^3 + 2 - (1^3 + 2) = 125 + 2 - 1 - 2 = 124$

b) Die Konstante c bewirkt lediglich eine Verschiebung der Funktion in y-Richtung. Das heißt, die Funktionswerte von G (x) sind um den Wert c größer als die von F (x). Für die Integralberechnung mit dem HDI wird aber immer eine Differenz aus zwei Funktionswerten benötigt (F (b) – F (a) oder G (b) – G (a)). Diese Differenz bleibt auch nach Verschieben der Funktion in y-Richtung gleich groß. In a) hat man außerdem gesehen, dass der Wert c, um den G (b) größer ist als F (b), später auch wieder subtrahiert wird, da G (a) ebenfalls um genau diesen Wert größer ist als F (a).

17 Die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ besitzt an der Stelle x = 1 eine Definitionslücke, die für die Funktion von beiden Seiten auch Asymptote ist. Der orientierte Flächeninhalt, den Maxim durch das Integral berechnet hat, kann also nicht endlich und schon gar nicht negativ sein, wie man am Verlauf des Graphen erkennen kann.
Maxim hat die Integrationsgrenzen mit a = 1 und b = 2 so gesetzt, dass die Definitionslücke im Intervall liegt, das die Grenzen einschließen. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ ist aufgrund der Definitionslücke in diesem Intervall aber nicht integrierbar, also kann der HDI dort auch nicht angewendet werden.



Nachgefragt

- Mit dem HDI können lediglich Bestandsdifferenzen berechnet werden, also der Betrag, um den der Bestand zu- oder abnimmt. Ist der daraus resultierende Bestand zu einem bestimmten Zeitpunkt gefragt, muss der Anfangsbestand zur Differenz addiert werden. Dieser entspricht wiederum der Konstanten c, die für die passende Bestandsfunktion benötigt wird.
  Heiko hat also Recht, wenn er nur Bilanzen berechnen möchte. Für konkrete Bestandswerte benötigt er nach wie vor die richtige Konstante c.
- Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist nur im Bereich [0; ∞[definiert. Im Intervall [–2; 0] existiert das Integral nicht, da es dort keinen Graphen gibt, der mit der x-Achse eine Fläche einschließen kann. Außerdem stellt man bei der Berechnung mithilfe des HDI fest, dass die untere Integrationsgrenze –2 in die Stammfunktion $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ eingesetzt werden müsste. Die Berechnung ist also nicht möglich.
- Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ nimmt nur positive Funktionswerte an. Da die hier angegebene Variation der Exponentialfunktion nicht in y-Richtung verschoben wurde, gilt für sie dasselbe. Der Wert –45,15 ist negativ und kommt daher für das Integral nicht in Frage.

Entdecken

- Um die Integrationsgrenzen zu bestimmen, ermitteln wir die Nullstellen der Funktion f. Es muss gelten: f (x) = 0.
  $\frac{1}{16}x^6 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{16}x^6 = 4 \quad \Rightarrow x^6 = 64 \quad \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$, also a = –2 und b = 2.
  Damit gilt:
  $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{16}x^6 - 4\right)dx = \left[\frac{1}{112}x^7 - 4x\right]_{-2}^{2} =$
  $\frac{1}{112}2^7 - 4\cdot 2 - \left(\frac{1}{112}(-2)^7 - 4\cdot(-2)\right) = \frac{8}{7} - 8 + \frac{8}{7} - 8 = -13\frac{5}{7}$.
  Da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, erhalten wir als orientierten Flächeninhalt einen negativen Wert. Der Flächeninhalt ist also als Betrag des Integrals $13\frac{5}{7}$.
  Für die Integrationsgrenzen werden die Schnittstellen der Funktionen ermittelt. Dabei gilt: g (x) = f (x).
  $x^2 = -\frac{1}{4}x^2 + 5 \quad \Rightarrow \frac{5}{4}x^2 = 5 \quad \Rightarrow x^2 = 4 \quad \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$, also a = –2 und b = 2.
  Daraus folgt:
  $\int_{-2}^{2}[f(x) - g(x)]\,dx = \int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{4}x^2 + 5 - x^2\right)dx = \int_{-2}^{2}\left(-\frac{5}{4}x^2 + 5\right)dx = \left[-\frac{5}{12}x^3 + 5x\right]_{-2}^{2} =$
  $-\frac{5}{12}2^3 + 5\cdot 2 - \left(-\frac{5}{12}(-2)^3 + 5\cdot(-2)\right) = -\frac{10}{3} + 10 - \frac{10}{3} + 10 = 13\frac{1}{3}$
  Eine Abschätzung durch Kästchenzählen führt zu keinem eindeutigen Ergebnis.
  Logo 1 wird groß genug sein, da man auf etwa 14 cm^2 kommt.
  Logo 2 ist schwerer abzuschätzen, da es ungefähr die geforderten 13 cm^2 enthält.

Aufgaben

1 **a)** $A = \left|\int_{-1}^{1}(1 - x^2)\,dx\right| = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = 1\frac{1}{3}$ FE

b) $A = \left|\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right)dx\right| = \left[\frac{1}{6}x^3 + 2x\right]_{-2}^{2} = 10\frac{2}{3}$ FE

c) $A = \left|\int_{-4}^{5}\left[\left(\frac{1}{4}x\right)^3 - 2\right]dx\right| = \left[\frac{1}{256}x^4 - 2x\right]_{-4}^{5} \approx 16{,}6$ FE

d) $A = \left|\int_{1}^{5}(\sqrt{x} - 1)\,dx\right| = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x\right]_{1}^{5} \approx 2{,}8$ FE

2 **a)** Nullstellen finden: f (x) = 0 $\Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$
$A = \left|\int_{-2}^{2}(-x^{10} + 1024)\,dx\right| = \left[-\frac{1}{11}x^{11} + 1024x\right]_{-2}^{2} \approx 3723{,}6$ FE

b) Nullstellen finden: f (x) = 0 $\Rightarrow x_1 = -6, x_2 = 6$
$A = \left|\int_{-6}^{6}\left(-\frac{1}{20}x^2 + 1{,}8\right)dx\right| = \left[-\frac{1}{60}x^3 + 1{,}8x\right]_{-6}^{6} \approx 14{,}4$ FE

c) Nullstellen finden: f (x) = 0 $\Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 3$
$A = \left|\int_{-3}^{3}\left(-\frac{1}{8}x^4 + 10\frac{1}{8}\right)dx\right| = \left[-\frac{1}{40}x^5 + 10\frac{1}{8}x\right]_{-3}^{3} = 48{,}6$ FE

d) Nullstellen finden: f (x) = 0 $\Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 1$ (Mitternachtsformel)
Da die Funktion eine nach oben geöffnete Parabel beschreibt, liegt die eingeschlossene Fläche unterhalb der x-Achse. Für den Flächeninhalt A ist also das negative Integral gesucht.
$A = \left|\int_{-3}^{1}(3x^2 + 6x - 9)\,dx\right| = -[x^3 + 3x^2 - 9x]_{-3}^{1} = 32$ FE

e) Nullstellen finden: f(x) = 0 $\Longrightarrow x_1 = -6, x_2 = -2$ (Mitternachtsformel)
Da die Funktion eine nach oben geöffnete Parabel beschreibt, liegt die eingeschlossene Fläche unterhalb der x-Achse. Für den Flächeninhalt A ist also das negative Integral gesucht.
$A = \left|\int_{-6}^{-2} (x^2 + 8x + 12)\,dx\right| = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 12x\right]_{-6}^{-2} = 10\frac{2}{3}$ FE

f) Nullstellen finden: f(x) = 0 $\Longrightarrow x_1 = -9, x_2 = 0$ (x ausklammern, Satz vom Nullprodukt)
Da die Funktion eine nach oben geöffnete Parabel beschreibt, liegt die eingeschlossene Fläche unterhalb der x-Achse. Für den Flächeninhalt A ist also das negative Integral gesucht.
$A = \left|\int_{-9}^{0} (0{,}5x^2 + 4{,}5x)\,dx\right| = -\left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{9}{4}x^2\right]_{-9}^{0} = 60{,}75$ FE

3 **a)** Nullstellen finden: f(x) = 0 $\Longrightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$
Zwischen den Nullstellen befindet sich die eingeschlossene Fläche unterhalb der x-Achse, links und rechts davon darüber. Die Flächenberechnung muss also in drei Teile aufgeteilt werden um den gesamten Flächeninhalt zu erhalten:
$A = \left|\int_{-4}^{-2} (x^2 - 4)\,dx\right| + \left|\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx\right| + \left|\int_{2}^{4} (x^2 - 4)\,dx\right|$
$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-4}^{-2} + \left(-\left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^{2}\right) + \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{2}^{4} = 10\frac{2}{3} + 10\frac{2}{3} + 10\frac{2}{3} = 32$ FE

b) Nullstellen finden: f(x) = 0 $\Longrightarrow x_1 = 0, x_2 = \pi, x_3 = 2\pi$
Zwischen der zweiten und der dritten Nullstelle befindet sich die eingeschlossene Fläche unterhalb der x–Achse, zwischen der ersten und zweiten darüber. Die Flächenberechnung muss also in zwei Teile aufgeteilt werden, um den gesamten Flächeninhalt zu erhalten:
$A = \left|\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx\right| + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx\right| = [-\cos(x)]_0^{\pi} + (-[-\cos(x)]_{\pi}^{2\pi}) = 2 + 2 = 4$ FE

Nachgefragt

- Lars hat mit dem Integral $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx$ den **orientierten** Flächeninhalt im Intervall $[-\pi; \pi]$ berechnet.
  Da sich in diesem Intervall genauso viel Fläche unter wie über der x-Achse befindet, ist dieser gleich null. Um den eingeschlossenen Flächeninhalt zu berechnen, muss er von Nullstelle zu Nullstelle integrieren und die Beträge der Integrale addieren.
- Es gilt: f(x) – g(x) = –[g(x) – f(x)]. Die Differenzen sind also vom Betrag her gleich, sie unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. Da beim Berechnen des Flächeninhalts zwischen zwei Graphen immer der Betrag des Integrals relevant ist, spielt es also keine Rolle, welche Funktion von welcher subtrahiert wird.
- Wenn die Funktion f keine Nullstellen besitzt, schließt sie keine Fläche mit der x-Achse ein. Sind außerdem keine Intervallgrenzen gegeben, in denen ein Flächeninhalt berechnet werden soll, ist die Aufgabe nicht lösbar, da die besagte Fläche nicht existiert.

4 Lösung im Schulbuch.

5 **a)** Nullstellen finden: f(x) = 0 x ausklammern $\Longrightarrow x \cdot (x^2 - 5x + 6) = 0$
Satz vom Nullprodukt $\Longrightarrow x_1 = 0$
Mitternachtsformel $\Longrightarrow x_2 = 2, x_3 = 3$
Die eingeschlossene Fläche liegt im Intervall [0; 2] oberhalb, im Intervall [2; 3] unterhalb der x-Achse (ähnlicher Verlauf wie $y = x^3$). Die Flächenberechnung muss also in zwei Teile aufgeteilt werden, um den gesamten Flächeninhalt zu erhalten:

$$A = \left|\int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x)\,dx\right| + \left|\int_2^3 (x^3 - 5x^2 + 6x)\,dx\right|$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^2 + \left(-\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2\right]_2^3\right) = 2\frac{2}{3} + \frac{5}{12} = 3\frac{1}{12}\text{ FE}$$

b) Nullstellen finden: $f(x) = 0$ x ausklammern $\Longrightarrow x \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{4}x + 10\right) = 0$
Satz vom Nullprodukt $\Longrightarrow x_1 = 0$
Mitternachtsformel $\Longrightarrow x_2 = -8,\ x_3 = 2{,}5$
Die eingeschlossene Fläche liegt im Intervall [–8; 0] unterhalb, im Intervall [0; 2,5] oberhalb der x-Achse (ähnlicher Verlauf wie $y = -x^3$). Die Flächenberechnung muss also in zwei Teile aufgeteilt werden, um den gesamten Flächeninhalt zu erhalten:

$$A = \left|\int_{-8}^{0} \left(-\frac{1}{2}x^3 - \frac{11}{4}x^2 + 10x\right)dx\right| + \left|\int_{0}^{2{,}5} \left(-\frac{1}{2}x^3 - \frac{11}{4}x^2 + 10x\right)dx\right|$$

$$= -\left[-\frac{1}{8}x^4 - \frac{11}{12}x^3 + 5x^2\right]_{-8}^{0} + \left[-\frac{1}{8}x^4 - \frac{11}{12}x^3 + 5x\right]_0^{2{,}5} = 277\frac{1}{3} + 12\frac{17}{384} = 289\frac{145}{384}\text{ FE}$$

c) Nullstellen finden: $f(x) = 0$
Substitution $(x^2 = u) \Longrightarrow u^2 - 1{,}25u + 0{,}25 = 0$
Mitternachtsformel $\Longrightarrow u_1 = 0{,}25,\ u_2 = 1$
Resubstitution $(u = x^2) \Longrightarrow x_1 = -0{,}5,\ x_2 = 0{,}5,\ x_3 = -1,\ x_4 = 1$
Die eingeschlossene Fläche liegt in den Intervallen [–1; –0,5] und [0,5; 1] unterhalb, im Intervall [–0,5; 0,5] oberhalb der x-Achse (ähnlicher Verlauf wie $y = x^4$). Die Flächenberechnung muss also in drei Teile aufgeteilt werden, um den gesamten Flächeninhalt zu erhalten:

$$A = \left|\int_{-1}^{-0{,}5} (x^4 - 1{,}25x^2 + 0{,}25)\,dx\right| + \left|\int_{-0{,}5}^{0{,}5} (x^4 - 1{,}25x^2 + 0{,}25)\,dx\right| + \left|\int_{0{,}5}^{1} (x^4 - 1{,}25x^2 + 0{,}25)\,dx\right| =$$

$$-\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{12}x^3 + \frac{1}{4}x\right]_{-1}^{-0{,}5} + \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{12}x^3 + \frac{1}{4}x\right]_{-0{,}5}^{0{,}5} + \left(-\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{12}x^3 + \frac{1}{4}x\right]_{0{,}5}^{1}\right) =$$

$$\frac{11}{240} + \frac{19}{120} + \frac{11}{240} = \frac{1}{4}\text{ FE}$$

6 Lösung im Schulbuch.

7 a) Geradengleichung $g(x) = mx + c$ bestimmen:
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 3}{1 - (-2)} = -1$ c durch Punktprobe mit $B(1\,|\,0) \Longrightarrow c = 1$
$\Longrightarrow g(x) = -x + 1$
Schnittstellen von f und g bestimmen: $f(x) = g(x)$ $\Longrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$
Fläche berechnen:

$$A = \left|\int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\,dx\right| = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} = 4{,}5\text{ FE}$$

b) Geradengleichung $g(x) = mx + c$ bestimmen:
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - (-2)}{4 - (-1)} = 2$ c durch Punktprobe mit $B(4\,|\,8) \Longrightarrow c = 0$
$\Longrightarrow g(x) = 2x$
Schnittstellen von f und g bestimmen: $f(x) = g(x)$ $\Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2$
Fläche berechnen:

$$A = \left|\int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx\right| = \left|\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,dx\right| =$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left(-\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_0^2\right) = 8\text{ FE}$$

c) Geradengleichung g (x) = mx + c bestimmen:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{3} - (-3)}{\sqrt{3} - (-3)} = 1$ c durch Punktprobe mit A (–3 | –3) $\Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow g(x) = x$

Schnittstellen von f und g bestimmen: f (x) = g (x) $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}$

Fläche berechnen:

$$A = \left|\int_{-\sqrt{3}}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\sqrt{3}} [f(x) - g(x)]\,dx\right| =$$

$$\left|\int_{-\sqrt{3}}^{0} (x^4 - 3x^2)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\sqrt{3}} (x^4 - 3x^2)\,dx\right| = \left[\tfrac{1}{5}x^5 - x^3\right]_{-\sqrt{3}}^{0} + \left(-\left[\tfrac{1}{5}x^5 - x^3\right]_{0}^{\sqrt{3}}\right)$$

$\approx 2{,}1 + 2{,}1 = 4{,}2$ FE

d) Geradengleichung g (x) = mx + c bestimmen

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 3}{2 - (-4)} = -\frac{2}{3}$ c durch Punktprobe mit B (2 | –1) $\Rightarrow c = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow g(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

Schnittstellen von f und g bestimmen: f (x) = g (x) $\Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0{,}5$

Fläche berechnen:

$$A = \left|\int_{-2}^{0,5} [f(x) - g(x)]\,dx\right| = \left|\int_{-2}^{0,5} (x^2 + 1{,}5x - 1)\,dx\right| = -\left[\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{4}x^2 - x\right]_{-2}^{0,5} = \frac{125}{48}\text{ FE}$$

8 a) Schnittstellen berechnen: f (x) = g (x) $\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$

Fläche berechnen:

$$A = \left|\int_{-1}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} [f(x) - g(x)]\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - x)\,dx\right| =$$

$$\left[\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left(-\left[\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}\right) = 0{,}5\text{ FE}$$

b) Schnittstellen berechnen: f (x) = g (x) $\Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 3$

Fläche berechnen:

$$A = \left|\int_{-3}^{3} [f(x) - g(x)]\,dx\right| = \left|\int_{-3}^{3} (2x^2 - 18)\,dx\right| = \left[\tfrac{2}{3}x^3 - 18x\right]_{-3}^{3} = 72\text{ FE}$$

c) Schnittstellen berechnen: f (x) = g (x) $\Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 1$

Fläche berechnen:

$$A = \left|\int_{-4}^{1} [f(x) - g(x)]\,dx\right| = \left|\int_{-4}^{1} (-x^2 - 3x + 4)\,dx\right| = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + 4x\right]_{-4}^{1} = 20\tfrac{5}{6}\text{ FE}$$

d) Schnittstellen berechnen: f (x) = g (x) $\Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 4$

Fläche berechnen:

$$A = \left|\int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx\right| + \left|\int_{0}^{4} [f(x) - g(x)]\,dx\right| = \left|\int_{-2}^{0} \left(\tfrac{1}{4}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - 2x\right)dx\right| + \left|\int_{0}^{4} \left(\tfrac{1}{4}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - 2x\right)dx\right| =$$

$$\left[\tfrac{1}{16}x^4 - \tfrac{1}{6}x^3 - x^2\right]_{-2}^{0} + \left(-\left[\tfrac{1}{16}x^4 - \tfrac{1}{6}x^3 - x^2\right]_{0}^{4}\right) = 12\tfrac{1}{3}\text{ FE}$$

e) Schnittstellen berechnen: f (x) = g (x) $\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5}{4}\pi$

Fläche berechnen:

$$A = \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} [f(x) - g(x)]\,dx\right| = \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} [\sin(x) - \cos(x)]\,dx\right| = [-\cos(x) - \sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} = 2\sqrt{2}\text{ FE}$$

f) Schnittstellen berechnen: f (x) = g (x) $\Longrightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{27}{8}}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{\frac{27}{8}}$

Fläche berechnen:

$$A = \left| \int_{-\sqrt{\frac{27}{8}}}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx \right| + \left| \int_{0}^{\sqrt{\frac{27}{8}}} [f(x) - g(x)]\,dx \right| = \left| \int_{-\sqrt{\frac{27}{8}}}^{0} (-8x^3 + 27x)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{\sqrt{\frac{27}{8}}} (-8x^3 + 27x)\,dx \right| =$$

$$-\left[-2x^4 + \frac{27}{2}x^2\right]_{-\sqrt{\frac{27}{8}}}^{0} + \left(\left[-2x^4 + \frac{27}{2}x^2\right]_{0}^{\sqrt{\frac{27}{8}}}\right) = \frac{729}{16}\text{ FE}$$

g) Schnittstellen berechnen: f (x) = g (x) $\Longrightarrow x_1 = 0, x_2 = 25$

Fläche berechnen:

$$A = \left| \int_{0}^{25} [f(x) - g(x)]\,dx \right| = \left| \int_{0}^{25} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{5}x\right) dx \right| = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{10}x^2\right]_{0}^{25} = 20\frac{5}{6}\text{ FE}$$

9 a) Schnittstellen berechnen: f (x) = g (x) $\Longrightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$

Fläche berechnen:

$$A = \left| \int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx \right| = \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx \right| = -\left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^{2} = 10\frac{2}{3}\text{ FE}$$

b) Schnittstellen berechnen: f (x) = g (x) $\Longrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2\pi$

Fläche berechnen:

$$A = \left| \int_{0}^{2\pi} [f(x) - g(x)]\,dx \right| = \left| \int_{0}^{2\pi} \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1\right] dx \right| = \left[-\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + x\right]_{0}^{2\pi} = 2\pi\text{ FE}$$

c) Schnittstellen berechnen: f (x) = g (x) $\Longrightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$

Fläche berechnen:

$$A = \left| \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]\,dx \right| = \left| \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\,dx \right| = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} = 1\frac{1}{3}\text{ FE}$$

10 a) Schnittstellen aus Zeichnung bestimmen: $\Longrightarrow x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 4$

Fläche berechnen:

$$A = \left| \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]\,dx \right| + \left| \int_{1}^{4} [f(x) - g(x)]\,dx \right| = \left| \int_{-1}^{1} (-x^3 + 4x^2 + x - 4)dx \right| + \left| \int_{1}^{4} (-x^3 + 4x^2 + x - 4)\,dx \right| =$$

$$-\left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x\right]_{-1}^{1} + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x\right]_{1}^{4} = 5\frac{1}{3} + 15\frac{3}{4} = 21\frac{1}{12}\text{ FE}$$

b) Schnittstellen aus Zeichnung bestimmen: $\Longrightarrow x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 1$

Fläche berechnen:

$$A = \left| \int_{-3}^{-2} [f(x) - g(x)]\,dx \right| + \left| \int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]\,dx \right| = \left| \int_{-3}^{-2} (x^3 + 4x^2 + x - 6)\,dx \right| + \left| \int_{-2}^{1} (x^3 + 4x^2 + x - 6)\,dx \right| =$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x\right]_{-3}^{-2} + \left(-\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x\right]_{-2}^{1}\right) = \frac{7}{12} + 11\frac{1}{4} = 11\frac{5}{6}\text{ FE}$$

c) Schnittstellen aus Zeichnung bestimmen: $\Longrightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$

Fläche berechnen:

$$A = \left| \int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx \right| = \left| \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\,dx \right| = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2} = 10\frac{2}{3}\text{ FE}$$

11 Für die gesamte Aufgabe werden die beiden Schnittstellen der Funktionen f und g benötigt. Aus dem Diagramm kann man diese durch Ablesen bestimmen: $x_1 = -4$, $x_2 = -1$.
Außerdem werden für manche Flächenstücke die Nullstellen der Funktionen benötigt. Diese können aus dem Diagramm nur näherungsweise bestimmt werden; sie werden daher als $x_{f,1}$, $x_{f,2}$ (für f) und x_g (für g) bezeichnet.

a) Schnittstellen bestimmen; Fläche aus $A = \left|\int_{-4}^{-1}[f(x) - g(x)]\,dx\right|$ berechnen.

b) Schnittstellen bestimmen; Fläche aus $A = \left|\int_{-1}^{0}[f(x) - g(x)]\,dx\right|$ berechnen.

c) Nullstellen und Schnittstellen der Funktionen bestimmen;
Fläche aus $A = \left|\int_{-4}^{x_g}[f(x) - g(x)]\,dx\right| - \left|\int_{x_{f,1}}^{x_g} g(x)\,dx\right|$ berechnen.

d) Nullstellen und Schnittstellen der Funktionen bestimmen;
Fläche aus $A = \left|\int_{x_{f,1}}^{x_g} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_g}^{-1}[f(x) - g(x)]\,dx\right|$ berechnen.

e) Nullstellen und Schnittstellen der Funktionen bestimmen;
Fläche aus $A = \left|\int_{x_g}^{-1} g(x)\,dx\right| + \left|\int_{-1}^{x_{f,2}} f(x)\,dx\right|$ berechnen.

f) Nullstellen und Schnittstellen der Funktionen bestimmen;
Fläche aus $A = \left|\int_{x_{f,1}}^{x_g} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_g}^{-1}[f(x) - g(x)]\,dx\right| + \left|\int_{x_g}^{0} g(x)\,dx\right|$ berechnen.

12 $A = \left|\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx\right| = \left|[-\cos(x)]_0^{\pi}\right| = 2$ FE

Nullstellen von f bestimmen: $x_1 = -\sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a}$

$$A = \left|\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}(x^2 - a)\,dx\right| = \left|\left[\tfrac{1}{3}x^3 - ax\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}\right| = \left|\tfrac{1}{3}\sqrt{a}^3 - a\sqrt{a} - \left(\tfrac{1}{3}(-\sqrt{a})^3 - a(-\sqrt{a})\right)\right| = \left|-\tfrac{4}{3}a\sqrt{a}\right| = 2 \text{ FE}$$

$\left|-\frac{4}{3}a\sqrt{a}\right| = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$, da $a > 0$ sein muss. Für $a < 0$ besitzt die Parabel $x^2 - a$ keine Nullstellen und schließt mit der x-Achse deswegen keine Fläche ein.

$\frac{4}{3}a\sqrt{a} = 2 \quad\Longrightarrow\quad a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \quad\Longrightarrow a \approx 1{,}31$

13 Zur Berechnung der Masse wird die Querschnittsfläche des Werkstücks benötigt. Diese muss in zwei Abschnitten berechnet werden, denn teilweise liegt sie zwischen der Geraden y = 4 und der Funktion f und teilweise zwischen den Funktionen g und f.
Für die jeweiligen Integrationsgrenzen müssen noch die Stellen bestimmt werden, an denen die Funktionen f und g die Gerade y = 4 schneiden, also den Funktionswert 4 annehmen.
Man erhält für $f(x) = 4$: $x_1 = -\ln(4)$; für $g(x) = 4$: $x_2 = 1 - \ln(4)$

$$A = \left|\int_{x_1}^{x_2}[4 - f(x)]\,dx\right| + \left|\int_{x_2}^{3}[f(x) - g(x)]\,dx\right| = \left|\int_{-\ln(4)}^{1-\ln(4)}(4 - e^{-x})\,dx\right| + \left|\int_{1-\ln(4)}^{3}(e^{-x} - e^{-x+1})\,dx\right| =$$

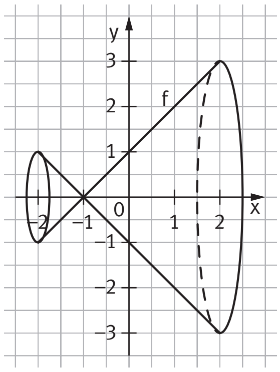
$$\left|\int_{-\ln(4)}^{1-\ln(4)}(4 - e^{-x})\,dx\right| + \left|(1 - e)\cdot\int_{1-\ln(4)}^{3} e^{-x}\,dx\right| =$$

$$[4x + e^{-x}]_{-\ln(4)}^{1-\ln(4)} + \left(-(1 - e)\cdot[-e^{-x}]_{1-\ln(4)}^{3}\right) =$$

$$\frac{4}{e} + e^{-3} - \frac{4}{e} - e^{-2} + 4 = e^{-3} - e^{-2} + 4 \approx 3{,}91\text{ mm}^2$$

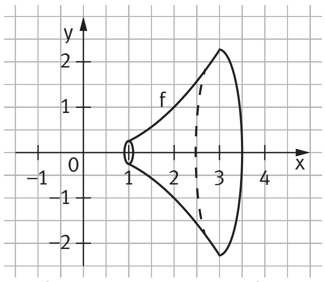
$V = 3{,}91\text{ mm}^2 \cdot 0{,}2\text{ mm} = 0{,}78\text{ mm}^3 = 0{,}00078\text{ cm}^3 \quad\Longrightarrow m = \rho\cdot V = 21{,}45\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\cdot 0{,}00078\text{ cm}^3 \approx 0{,}02\text{ g}$

14 a) 1



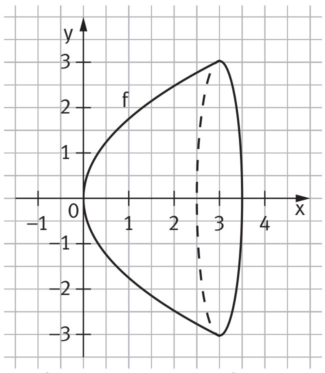
$V = \pi \cdot \int_{-2}^{2} (x+1)^2\,dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-2}^{2} = 9\frac{1}{3} \cdot \pi \approx 29{,}3$ VE

2



$V = \pi \cdot \int_{1}^{3} (0{,}25x^2)^2\,dx = \pi \cdot \int_{1}^{3} 0{,}0625x^4\,dx = \pi \cdot [0{,}0125x^5]_1^3 = \frac{121}{40} \cdot \pi \approx 9{,}5$ VE

3



$V = \pi \cdot \int_{0}^{3} \left(\sqrt{3x}\right)^2\,dx = \pi \cdot \int_{0}^{3} 3x\,dx = \pi \cdot \left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{27}{2} \cdot \pi \approx 42{,}4$ VE

b) $f(x) = \frac{1}{2}x \cdot (x-3)$ $\qquad$ $g(x) = 0{,}5x \cdot (x+1) \cdot (x-3)$

Schnittstellen bestimmen: $f(x) = g(x)$

$\frac{1}{2}x \cdot (x-3) = 0{,}5x \cdot (x+1) \cdot (x-3)$

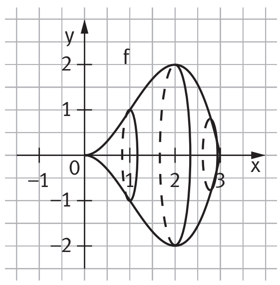
$-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0$

$x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \qquad \Longrightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 3$

$f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x \cdot (x-3) - [0{,}5x \cdot (x+1) \cdot (x-3)] = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2$

$V = \pi \cdot \int_{0}^{3} [f(x) - g(x)]^2\,dx = \pi \cdot \int_{0}^{3} \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]^2 dx = \pi \cdot \int_{0}^{3} \left(\frac{1}{4}x^6 - \frac{3}{2}x^5 + \frac{9}{4}x^4\right) dx$

$= \pi \cdot \left[\frac{1}{28}x^7 - \frac{1}{4}x^6 + \frac{9}{20}x^5\right]_0^3 \approx \pi \cdot 5{,}21\ \text{cm}^3 \approx 16{,}36\ \text{cm}^3$



15 **a)** $\overline{m} = \frac{1}{4-1} \cdot \int_1^4 \frac{1}{4}x^2\,dx = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{12}x^3\right]_1^4 = \frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$

b) $\overline{m} = \frac{1}{\pi-0} \cdot \int_0^\pi \sin(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot [-\cos(x)]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64$

c) $\overline{m} = \frac{1}{2-0} \cdot \int_0^2 (-e^x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot [-e^x]_0^2 = -\frac{1}{2} \cdot e^2 + \frac{1}{2} \approx -3{,}19$

16 Für den Flächeninhalt des Dreiecks benötigen wir den Scheitelpunkt der Parabel S (0 | t) und deren Nullstellen. Diese erhalten wir als $x_1 = -\sqrt{t}$ und $x_2 = \sqrt{t}$.

Die Dreiecksfläche ist dann: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} \cdot t = t^{\frac{3}{2}}$.

Den Flächeninhalt zwischen Parabel und x-Achse erhalten wir durch:

$$A_P = \left|\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} (-x^2 + t)\,dx\right| = \left[-\frac{1}{3}x^3 + tx\right]_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} = -\frac{1}{3}\sqrt{t}^3 + t\sqrt{t} - \left(-\frac{1}{3}\left(-\sqrt{t}\right)^3 + t\left(-\sqrt{t}\right)\right) = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}.$$

Nachgefragt

- Integriert wird die Differenz der beiden Funktionen. Es geht also nur darum, dass die Differenz der beiden Funktionen nicht einmal positiv und einmal negativ ist, da sich sonst die orientierten Flächeninhalte nicht zum insgesamt eingeschlossenen Flächeninhalt addieren würden. Verläuft allerdings der Graph der einen Funktion immer oberhalb des Graphen der anderen, spielt es keine Rolle ob sie sich oberhalb oder unterhalb der x-Achse befinden. Die Differenz der Funktionswerte (und damit auch der Funktionen) hat immer das gleiche Vorzeichen.
- Beide Varianten führen zum selben Ergebnis. Can hat erkannt, dass die Parabel symmetrisch zur y-Achse ist und berechnet deswegen nur die Hälfte der eingeschlossenen Fläche, um sie anschließend zu verdoppeln. Die Integralberechnung wird für ihn dadurch einfacher, da er als untere Integrationsgrenze 0 einsetzt. Bei ganzrationalen Funktionen verringert sich der Rechenaufwand dadurch erheblich.
- $\int_a^b 2\pi r\,dr = [\pi r^2]_a^b = \pi b^2 - \pi a^2$

  Der Integrand entspricht der Formel für den Umfang eines Kreises mit Radius r, die Stammfunktion der Formel für den Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r. Setzt man die Integrationsgrenzen ein, wird der Flächeninhalt eines Kreisrings mit äußerem Radius b und innerem Radius a berechnet. Wählt man a = 0, so erhält man den Flächeninhalt eines Kreises mit Radius b.

  Es besteht also ein ähnlicher Zusammenhang wie bei allen bisher betrachteten Funktionen. Die Stammfunktion gibt den Flächeninhalt unter dem Graphen des Integranden an. Wählt man ein bestimmtes Intervall für die Flächenberechnung, so wird auch nur die Fläche in diesem Bereich berechnet.

  Der Integrand kann auch als Ableitung (also als Änderungsfunktion) der Stammfunktion verstanden werden. Die Ableitung gibt an jeder Stelle x die Steigung einer Funktion an, d. h. wie stark die Funktion an dieser Stelle anwächst, wenn man den x-Wert minimal vergrößert.

  Der Kreisumfang gibt ebenfalls an, um wie viel die Kreisfläche größer wird, wenn man den Radius minimal vergrößert. Die Fläche wächst dabei nämlich um einen unendlich dünnen Kreisring an, der genau diesem Umfang entspricht. Je größer der Radius ist, desto länger ist dieser hinzukommende Kreisring, und desto stärker wächst die Fläche an dieser Stelle.

Entdecken

- Die Bereiche, in denen der Preis steigt, liegen dort, wo die Änderungsfunktion f(t) positiv ist. Wie im Diagramm zu sehen, ist das in den ersten vier Jahren der Fall. Billiger wird das Produkt, wenn die Änderungsfunktion negative Werte annimmt, also in den anschließenden fünf Jahren.
- Zunächst lässt sich abschätzen, dass der höchste Preis am Ende der Preiszunahme liegen muss, also nach vier Jahren, denn bis zu diesem Zeitpunkt steigt der Preis, anschließend sinkt er nur noch. Den niedrigsten Preis erhalten wir am Ende der Preisabnahme, also nach neun Jahren. Da die Fläche unterhalb der x-Achse außerdem größer ist als die Fläche oberhalb, wird der Ausgangspreis unterschritten und kommt somit nicht als kleinster Preis in Frage.

  höchster Preis: $\int_0^4 f(t)\,dt = 14{,}93 \quad \Longrightarrow 1{,}50\,€ + 14{,}93\text{ Cent} = 1{,}6493\,€$

  niedrigster Preis: $\int_0^9 f(t)\,dt = -12{,}15 \quad \Longrightarrow 1{,}50\,€ - 12{,}15\text{ Cent} = 1{,}3785\,€$
- Die Frage nach den größten Preisänderungen lässt sich mithilfe der Extremwerte von f (t) beantworten. Es gilt: $f'(t) = \frac{3}{5}t^2 - \frac{26}{5}t + \frac{36}{5} = 0$.
  Damit erhalten wir $t_1 \approx 1{,}73$ und $t_2 \approx 6{,}94$. Mithilfe von Vorzeichenbetrachtungen oder der zweiten Ableitung erkennen wir, dass t_1 den größten Anstieg und t_2 den größten Rückgang liefert. Es folgt: $f(1{,}73) \approx 5{,}71$ und $f(6{,}94) \approx -8{,}41$.
  Den größten Preisanstieg gab es also nach knapp zwei Jahren mit etwa 6 $\frac{\text{Cent}}{\text{Jahr}}$, den größten Preisrückgang nach knapp sieben Jahren mit etwa 8 $\frac{\text{Cent}}{\text{Jahr}}$.
- Der Gewinn wird berechnet, indem die Ausgaben von den Einnahmen subtrahiert werden. Gleiches gilt für die Gewinnänderung, also f (t) – g (t).
  $\int_0^9 [f(t) - g(t)]\,dt = \int_0^9 \left(\frac{1}{5}t^3 - \frac{13}{5}t^2 + \frac{36}{5}t - 2\right)dt = \left[\frac{1}{20}t^4 - \frac{13}{15}t^3 + \frac{18}{5}t^2 - 2t\right]_0^9 = -30{,}15$
  Der Händler kann also nach neun Jahren mit einer Gewinnveränderung von ungefähr –30 Cent pro verkauftem Produkt rechnen.

Aufgaben

1

a)	$f'(x) = 2x^2$	$F(x) = \frac{1}{6}x^4$
b)	$f'(x) = 12x^2 - 1$	$F(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2$
c)	$f'(x) = 2e^{2x}$	$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$
d)	$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
e)	$f'(x) = -\pi \cdot \sin(\pi x)$	$F(x) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)$
f)	$f'(x) = 6\cos(3x - 1)$	$F(x) = -\frac{2}{3}\cos(3x - 1)$

2
a) $F(x) = -\frac{1}{6}x^6 + c$ **b)** $F(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c$
c) $F(x) = -2\cos(x) - \frac{3}{2}x^2 + c$ **d)** $F(x) = 3e^x - x + c$
e) $F(x) = \frac{2}{9}(3x)^{\frac{3}{2}} + c$ **f)** $F(x) = -\frac{2}{x} + c$

3
a) $f(x) = x^3 - 13x^2 + 14x + 88$
$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{3}x^3 + 7x^2 + 88x$
b) $F(0) = 300 \quad \Longrightarrow \frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{3}x^3 + 7x^2 + 88x + c = 300 \quad \Longrightarrow c = 300$
$\Longrightarrow B(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{3}x^3 + 7x^2 + 88x + 300$

c) $B'(x) = f(x) = 0$
Aus Primfaktorzerlegung $\Longrightarrow (x_1 = -2),\ x_2 = 4,\ x_3 = 11$
$f'(x) = 3x^2 - 26x + 14$
$f'(4) = -42 < 0 \Longrightarrow$ Maximum $\qquad f'(11) = 91 > 0 \Longrightarrow$ Minimum
Maximaler Bestandswert: $B(4) = 550\frac{2}{3}$ $\qquad$ Minimaler Bestandswert: $B(11) = 7\frac{7}{12}$
Da nur ein bestimmter Zeitraum betrachtet wird, müssen noch eventuelle Randmaxima und -minima betrachtet werden: $B(0) = 300 \quad B(12) = 60$
Es liegen also keine globalen Extremwerte an den Rändern vor.

d) $f'(x) = 0$
$f'(x) = 3x^2 - 26x + 14 = 0$ $\qquad$ Aus Mitternachtsformel: $x_1 \approx 8{,}09,\ x_2 \approx 0{,}58$
$f''(x) = 6x - 26$
$f''(8{,}09) = 22{,}54 > 0 \Longrightarrow$ Minimum $\qquad f''(0{,}58) = -22{,}52 < 0 \Longrightarrow$ Maximum
Bei $x = 0{,}58$ liegt die Zuwachsrate $f(0{,}58) = 91{,}94$ vor.
Außerdem müssen eventuelle Randmaxima betrachtet werden: $f(0) = 88,\ f(12) = 112$.
Die maximale Zuwachsrate liegt also bei $x = 12$ mit $f(12) = 112$ vor.

Nachgefragt

- Der Bestand ändert sich dann am stärksten, wenn die Bestandszunahme oder die Bestandsabnahme maximal ist. Wir suchen also die Extremwerte der Änderungsfunktion. Der Extremwert der Änderungsfunktion, dessen Betrag am größten ist, liefert dann die größte Bestandsänderung. Für die kleinste Bestandsänderung benötigen wir dementsprechend den Funktionswert der Änderungsfunktion, dessen Betrag am kleinsten ist, der also der x-Achse am nächsten ist.
  Den Bestand zu einem bestimmten Zeitpunkt erhält man dadurch, dass man die vom Graphen der Änderungsfunktion und der x-Achse eingeschlossenen Flächen bis zu diesem Zeitpunkt ermittelt und den Anfangsbestand hinzuaddiert.
- Die Ableitung einer Funktion gibt an, wie sich die Funktion verändert. Die Ableitung der Ableitung beschreibt demnach die Änderung der Änderung. In Bezug auf eine Bestandsfunktion F kann man aus der Änderungsfunktion f also ablesen, ob und wie stark sich der Bestand ändert. Aus der Ableitung der Änderungsfunktion f' lässt sich dann ablesen, ob die Bestandsänderung zu diesem Zeitpunkt zunimmt, abnimmt oder konstant bleibt.

4 Lösung im Schulbuch.

5 **a)** Die Wirkstoffmenge im Körper nimmt immer dann zu, wenn die Änderungsfunktion positive Werte annimmt. Sie nimmt ab, wenn die Änderungsfunktion negative Werte annimmt. Es müssen also die Nullstellen der Änderungsfunktion bestimmt werden:
$w(t) = t^3 - 7t^2 + 11{,}25t = 0.$
Ausklammern und Anwenden der Mitternachtsformel liefert: $t_1 = 0,\ t_2 = 2{,}5,\ t_3 = 4{,}5.$
Wir testen: $w(1) = 5{,}25 > 0$, also gilt $w(t) > 0$ für $[0;\ 2{,}5]$.
$w(3) = -2{,}25 < 0$, also gilt $w(t) < 0$ für $[2{,}5;\ 4{,}5]$.
Das Medikament wird bis zum Zeitpunkt $t = 2{,}5$ zugeführt, da die Wirkstoffmenge im Körper bis dahin zunimmt und anschließend abgebaut wird.

b) Da die Wirkstoffmenge im Körper bis $t = 2{,}5$ zunimmt, ist sie zu diesem Zeitpunkt maximal. Die Wirkstoffmenge erhalten wir durch die Bestandsfunktion $W(t)$.
$W(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{7}{3}t^3 + \frac{45}{8}t^2$ ist Stammfunktion und Bestandsfunktion, da $c = 0$ aus $B(0) = 0$ folgt.
$W(2{,}5) \approx 8{,}46$ ist die maximale Wirkstoffmenge.

c) Die abgebaute Wirkstoffmenge entspricht der Bestandsabnahme im Intervall [2,5; 4,5].
$\Delta W = \int_{2,5}^{4,5} w(t)\,dt = \int_{2,5}^{4,5} (t^3 - 7t^2 + 11{,}25t)\,dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{7}{3}t^3 + \frac{45}{8}t^2\right]_{2,5}^{4,5} = -4\frac{2}{3}$

6 a) $h'(t) = -\frac{\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3})$
Die Nullstellen trennen die Bereiche, in denen h'(t) positiv (Zunahme des Wasserstands) bzw. negativ (Abnahme des Wasserstands) ist.
$h'(t) = -\frac{\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}) = 0 \implies \frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3} = 0 + k\pi$ mit k = 0, 1, 2, ...
$\implies t_1 = 2 \quad t_2 = 8 \quad t_3 = 14 \quad t_4 = 20$ im Intervall [0; 24]
$h(0) \approx 0{,}9 > 0$
$h'(t) > 0$ für $t \in [0; 2]$, für $t \in [8; 14]$, für $t \in [20; 24]$ $\implies$ Wasserstand nimmt zu
$h'(t) < 0$ für $t \in [2; 8]$, für $t \in [14; 20]$ $\implies$ Wasserstand nimmt ab

b) Der höchste Wasserstand herrscht am Ende der Intervalle, an denen der Wasserstand zunimmt.
$\implies$ Hochwasser bei t = 2 und t = 14 (am Ende vom Intervall [20; 24] befindet sich keine Nullstelle, also steigt der Wasserstand (dann am nächsten Tag) noch weiter an).
Für den niedrigsten Wasserstand gilt das gleiche für die anderen Intervalle.
$\implies$ Niedrigwasser bei t = 8 und t = 20

c) Die Funktion h'(t) ist eine Sinusfunktion, deren Extremwerte sich in der Mitte zwischen den Nullstellen befinden. Die größte Wasserstandszunahme liegt dann in der Mitte eines Intervalls vor, in dem h'(t) positiv ist, die größte Wasserstandsabnahme in der Mitte des Intervalls, in dem h'(t) negativ ist.
$\implies$ Maxima bei t = 11 und t = 23 Minima bei t = 5 und t = 17
Rechnerisch sind die Extremstellen von h'(t) zu bestimmen, d. h. es muss h''(t) = 0 gelten mit $h''(t) = -\frac{\pi^2}{18}\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right)$.

7 a) Temperaturabnahme bis 4:00 Uhr (T negativ) $\implies$ niedrigste Temperatur um 4:00 Uhr
Temperaturzunahme bis 16:00 Uhr (T positiv) $\implies$ höchste Temperatur um 16:00 Uhr

b) Sei B(x) die Bestandsfunktion, die die Temperatur zu jedem Zeitpunkt x angibt. Mit dem Anfangsbestand B(0) = 25 folgt:
niedrigste Temperatur: $B(4) = 25 + \int_0^4 T(x)\,dx = 25 + \int_0^4 6\sin\left[\frac{\pi}{12}(x-4)\right]dx =$
$25 + \left[-\frac{72}{\pi}\cos\left[\frac{\pi}{12}(x-4)\right]\right]_0^4 \approx 13{,}5$
höchste Temperatur: $B(16) = 25 + \int_0^{16} T(x)\,dx = 25 + \int_0^{16} 6\sin\left[\frac{\pi}{12}(x-4)\right]dx =$
$25 + \left[-\frac{72}{\pi}\cos\left[\frac{\pi}{12}(x-4)\right]\right]_0^{16} \approx 59{,}4$

c) Gesucht sind die Extremstellen und Extremwerte der Änderungsfunktion T.
$T'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\left[\frac{\pi}{12}(x-4)\right] = 0$
$\frac{\pi}{12}(x-4) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit k = 0, 1, 2,...
$\implies x_1 = 10, x_2 = 22 \qquad \implies T(10) = 6, T(22) = -6$

8 a) Die zurückgelegten Höhenmeter erhält man durch die Bestandsfunktion h(t) mit h(0) = 0.
$h(40) = \int_0^{40}\left(-\frac{1}{32}t^2 + 2{,}5t\right)dt = \left[-\frac{1}{96}t^3 + \frac{5}{4}t^2\right]_0^{40} = 1333\frac{1}{3}$

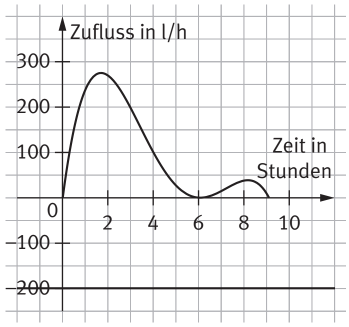
b) $v_1(40) = 50$
Zurückgelegte Höhenmeter im Zeitraum [40 s; 70 s]:
$\Delta h_1 = \int_{40}^{70} 50\,dt = [50t]_{40}^{70} = 1500$
Alternativ: $\Delta h_1 = 50\,\frac{m}{s} \cdot 30\,s = 1500\,m$

c) Fallzeit mit Fallschirm: 190 s – 70 s = 120 s
Zurückgelegte Höhenmeter im Zeitraum [70 s; 190 s]:
$$\Delta h_2 = \int_{70}^{190} \left(\frac{1}{288}(t-190)^2\right) dt = \left[\frac{1}{864}(t-190)^3\right]_{70}^{190} = 2000$$
Gesamthöhe: $h_{Ges} = h(40) + \Delta h_1 + \Delta h_2 = 4833\frac{1}{3}$ m

9 Lösung im Schulbuch.

10 a) Die eingeschlossenen Flächeninhalte oberhalb der x-Achse sind größer als die unterhalb der x-Achse liegenden. Daher sind am Ende des Monats mehr Gäste im Hotel als zu Beginn.
b) Mehr Anreisen gibt es in den Intervallen [0; 7] und [13; 24], da g (x) dort positive Werte annimmt, mehr Abreisen in den Intervallen [7; 13] und [24; 30], da g (x) dort negativ ist.
c) Die angegebenen Stellen sind die Nullstellen der Funktion. An diesen Tagen gibt es entweder keine An- und Abreisen oder genauso viele An- wie Abreisen, so dass am Ende dieses Tages genauso viele Gäste im Hotel sind wie am Anfang.
d) G (20) ist der orientierte Flächeninhalt zwischen dem Graphen von g und der x-Achse im Intervall [0; 20].
$g(x) = 0{,}0001x^5 - 0{,}0074x^4 + 0{,}1891x^3 - 1{,}9314x^2 + 6{,}5520x$
$$\int_0^{20} g(x)\,dx = \int_0^{20} (0{,}0001x^5 - 0{,}0074x^4 + 0{,}1891x^3 - 1{,}9314x^2 + 6{,}5520x)\,dx =$$
$$0{,}0001\left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{74}{5}x^5 + \frac{1891}{4}x^4 - \frac{19314}{3}x^3 + \frac{65520}{2}x^2\right]_0^{20} = \frac{164}{3} \approx 54{,}7$$
e) $\int_0^{30} g(x)\,dx$ gibt die Änderung der Zahl der Hotelgäste im gesamten Monat an. Beträgt die Änderung 0, so sind entweder im gesamten Monat keine Gäste an- und abgereist oder es haben genauso viele Gäste ein- wie ausgecheckt. Dann wäre die Anzahl der Gäste am Ende des Monats ebenfalls genauso groß wie am Anfang.

11 a) Die Messung beginnt ab 12:00 Uhr, also entspricht die Zuflussrate um 15:00 Uhr dem Wert f (3).
f (3) = 194,4 $\Longrightarrow$ Um 15:00 Uhr fließen 194,4 $\frac{l}{h}$ in den Abwasserbehälter.
b) Da f die Zuflussrate angibt, ist das globale Maximum bei t ≈ 1,7 h gesucht.
c) Gesucht ist der orientierte Flächeninhalt im Intervall [1; 4]:
$$\int_1^4 f(t)\,dt = \int_1^4 [-1{,}2t(t-6)^2(t-9)]\,dt = \int_1^4 (-1{,}2t^4 + 25{,}2t^3 - 172{,}8t^2 + 388{,}8t)\,dt =$$
$$\left[-\frac{6}{25}t^5 + \frac{63}{10}t^4 - \frac{288}{5}t^3 + \frac{972}{5}t^2\right]_1^4 = 648{,}18$$
Zwischen 13:00 Uhr und 16:00 Uhr sind 648,18 l zugeflossen.
d) Die gesuchten Werte der Bestandsfunktion F, die die Menge des Wassers im Behälter angibt, erhalten wir mit F (0) = 200:
$$F(4) = 200 + \int_0^4 f(t)\,dt = 200 + \int_0^4 (-1{,}2t^4 + 25{,}2t^3 - 172{,}8t^2 + 388{,}8t)\,dt =$$
$$200 + \left[-\frac{6}{25}t^5 + \frac{63}{10}t^4 - \frac{288}{5}t^3 + \frac{972}{5}t^2\right]_0^4 = 991{,}04$$
$$F(5) = 200 + \int_0^5 f(t)\,dt = \int_0^5 (-1{,}2t^4 + 25{,}2t^3 - 172{,}8t^2 + 388{,}8t)\,dt =$$
$$200 + \left[-\frac{6}{25}t^5 + \frac{63}{10}t^4 - \frac{288}{5}t^3 + \frac{972}{5}t^2\right]_0^5 = 1047{,}5$$
Die kritische Menge von 1 m^3 = 1000 dm^3 = 1000 l Wasser wird also im Intervall [4; 5], also zwischen 16:00 Uhr und 17:00 Uhr, überschritten.



e) Die Pumpe erzeugt einen konstanten Abfluss von $200\,\frac{l}{h}$, muss also als horizontale Gerade auf der Höhe y = –200 eingezeichnet werden.

f) Da die Pumpe eingeschaltet wird, wenn der Behälter 1000 l Wasser enthält, muss diese Menge abgepumpt werden.

$\Delta P = \int_0^t (-200)\,dt = [-200t]_0^t = -200t = -1000$

$\Longrightarrow t = 5$ Die Pumpe benötigt also 5 Sekunden, um den Behälter leer zu pumpen.

Alternativ: $1000\,l = 200\,\frac{l}{h} \cdot t \quad \Longrightarrow t = 5$

12 a) Nullstellen von f (x) bestimmen: f (x) = 0 $\Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 5$

$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^5 (-1{,}5x^2 + 7{,}5x)\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^3 + \frac{15}{4}x^2\right]_0^5 = 31{,}25$

Es werden 31,25 l nachgelassen.

b) Wenn die Wanne überläuft, so geschieht dies in den ersten 5 Minuten, da anschließend kein Wasser mehr nachfließt. Es muss geprüft werden, ob die Differenz aus zugeflossener und abgelassener Wassermenge die Marke von 10 l übersteigt. Zu lösen ist also die Gleichung

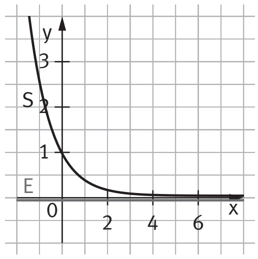
$\int_0^x [f(x) - g(x)]\,dx = 10$. Ist sie für ein x erfüllt, läuft die Wanne über, gibt es keine Lösung, dann nicht.

Aufgrund der Funktionsterme von f und g ist diese Gleichung hier allerdings nicht lösbar.

Die Prüfung muss daher durch Ausprobieren vorgenommen werden. Da die zugeflossene Wassermenge die meiste Zeit über deutlich größer ist als die abgeflossene, wird ein Wert gewählt, zu dem schon viel Wasser zugeflossen ist. Wir wählen x = 4 und erhalten:

$\int_0^4 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^4 [-1{,}5x^2 + 7{,}5x - (2e^{-0{,}5x} + 2)]\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^3 + \frac{15}{4}x^2 + 4e^{-0{,}5x} - 2x\right]_0^4 = 16{,}54$

Zum Zeitpunkt x = 4 sind 16,54 l Wasser mehr in der Badewanne als zu Beginn. Da die Wanne aber nur 10 l mehr fasst, läuft sie während des Wasserwechsels über.



13 a) Bei einer Schwellung steigt die Temperatur zunächst schnell und dann immer langsamer an, bis sie einen Sättigungswert erreicht, den sie nicht übersteigt. Die Exponentialfunktion e^t verläuft genau gegensätzlich. Sie steigt zunächst langsam an und dann immer schneller, ohne einen Sättigungswert zu besitzen.

b) $S(t) = e^{-t}$ wäre eventuell geeignet. Der an der y-Achse gespiegelte Graph von e^t entspricht genau den Vorgaben aus a).

c) Siehe Graph von E(t) in der Abbildung.

d) Gesucht ist die Stelle t, zu der die Temperaturzunahme und die Temperaturabnahme gleich 0 ist, d. h. $\int_0^t [S(t) - E(t)]\,dt = 0$.

Hier sind die Funktionsgleichungen einzusetzen, Stammfunktionen zu bestimmen und die daraus resultierende Gleichung nach t aufzulösen.

$\int_0^t [S(t) - E(t)]\,dt = \int_0^t (e^{-t} - 0{,}1)\,dt = [-e^{-t} - 0{,}1t]_0^t = -e^{-t} - 0{,}1t + 1 = 0$

Nachgefragt

- Gilt $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, so gibt es zwei Möglichkeiten für den Verlauf der Funktion f im Intervall [a; b]. Entweder schließt f im Intervall [a; b] keine Fläche mit der x-Achse ein, dann wäre f (x) = 0. Oder die Funktion f schließt im Intervall [a; b] eine Fläche mit der x-Achse ein, die oberhalb dieser liegt, und f schließt eine Fläche mit der x-Achse ein, die unterhalb der x-Achse liegt und genauso groß ist wie die Fläche oberhalb. Eine Möglichkeit wäre dann z. B., dass f punktsymmetrisch zur Intervallmitte von [a; b] verläuft.
- Die Schlussfolgerung ist möglich, aber nicht zwingend. Es wäre genauso möglich, dass f und g im Intervall [a; b] einen Schnittpunkt besitzen. Dann würde teilweise f oberhalb von g und teilweise f unterhalb von g verlaufen. Sind die beiden von den Funktionen eingeschlossenen Flächen gleich groß, folgt ebenfalls $\int_a^b [f(t) - g(t)]\,dt = 0$.
- Wenn wir den Verlauf der natürlichen Exponentialfunktion betrachten, stellen wir fest, dass sie ausschließlich positive Funktionswerte annimmt. Besitzt eine Änderungsfunktion diese Eigenschaft, bedeutet das, dass die Bestandswerte immer weiter ansteigen (im Falle der natürlichen Exponentialfunktion erst langsam und dann immer schneller). Daraus folgt, dass der Anfangsbestand der kleinste vorkommende Bestandswert sein muss.

Aufgabe 1

Warm up

A **a)** $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 6\text{ cm}^2$
Seitenlänge a, Höhe h:

b) $h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = a^2 \qquad \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \sqrt{12}\text{ cm}$

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot \sqrt{12}\text{ cm} = 2\sqrt{12}\text{ cm}^2$

c) Seitenlängen a, b, Diagonale d:
$d^2 = a^2 + b^2 \qquad \Rightarrow b = \sqrt{d^2 - a^2} = 3\text{ cm}$
$A = a \cdot b = 12\text{ cm}^2$

B **a)** $f_1(x) = 2x^2 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (2x - 4) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$
b) $f_2(x) = x(x+1)\left(x - \frac{23}{7}\right)(x - 3{,}5) = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = \frac{23}{7}, x_4 = 3{,}5$
c) $f_3(x) = x^3 + 11{,}5x^2 + 31{,}5x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (x^2 + 11{,}5x + 31{,}5) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0$,; Mitternachtsformel $\Rightarrow x_2 = -4{,}5, x_3 = -7$
d) $x = 1$

C **a)** $\int_0^5 4x\,dx = [2x^2]_0^5 = 2 \cdot 5^2 - 2 \cdot 0^2 = 50$

b) $\int_{-3}^{3} \frac{1}{3}x^2\,dx = \left[\frac{1}{9}x^3\right]_{-3}^{3} = \frac{1}{9} \cdot 3^3 - \frac{1}{9} \cdot (-3)^3 = 6$

c) $\int_{\pi}^{2\pi} [\cos(x) + 3x]\,dx = \left[\sin(x) + \frac{3}{2}x^2\right]_{\pi}^{2\pi} = \sin(2\pi) + \frac{3}{2}(2\pi)^2 - \sin(\pi) - \frac{3}{2}\pi^2 = \frac{9}{2}\pi^2$

---

1 **a)** Nullstellen bestimmen: $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{25}{6} = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = \frac{5}{2}$

Querschnittsfläche: $A = \int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{25}{6}\right) dx = \left[-\frac{2}{9}x^3 + \frac{25}{6}x\right]_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} = \frac{125}{9}$

b) g (x) gibt die Tiefe pro Stunde an, $\frac{125}{9}$ ist die Querschnittsfläche des Tunnels. $g_1(x)$ gibt als Produkt also das Volumen an, das pro Stunde an Erde aus dem Tunnel befördert wird.

c) $V = \int_0^{24} g_1(x)\,dx = \int_0^{24} \frac{125}{9}\left(\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{4}x+2} + 5\right) dx = \int_0^{24} \left(\frac{125}{27}e^{-\frac{1}{4}x+2} + \frac{625}{9}\right) dx =$

$\left[-\frac{500}{27}e^{-\frac{1}{4}x+2} + \frac{625}{9}x\right]_0^{24} \approx 1803{,}16$

d) $V_{max} = 2000\text{ m} \cdot \frac{125}{9}\text{ m}^2 = 27777\frac{7}{9}\text{ m}^3$

e) $\int_0^{40} h(x)\,dx = \int_0^{40} 90\,dx = [90x]_0^{40} = 3600$

f) $\int_0^{120} g_1(x)\,dx - \int_0^{80} h(x)\,dx = \int_0^{120}\left(\frac{125}{27}e^{-\frac{1}{4}x+2} + \frac{625}{9}\right) dx - \int_0^{80} 90\,dx =$

$\left[-\frac{500}{27}e^{-\frac{1}{4}x+2} + \frac{625}{9}x\right]_0^{120} - [90x]_0^{80} \approx 1270{,}17$

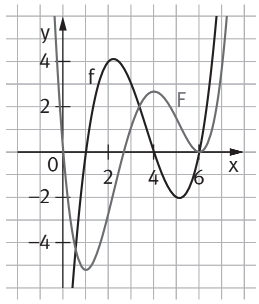
g) $\int_0^{t} [g_1(x) - h(x)]\,dx + \int_0^{40} g_1(x)\,dx = 0$
Das zweite Integral entspricht der Menge an Geröll, die bis zum Ende der ersten Woche vor dem Tunnel angehäuft wurde. Das erste Integral beschreibt die Menge an Erde, die in den weiteren Tagen hinzukommt. Die Integrale müssen mit der variablen Integralgrenze t berechnet und anschließend nach t aufgelöst werden.

Aufgabe 2

Warm up

A **a)** $F(x) = \frac{2}{39}x^{13} - \frac{1}{10}x^8 + c$ **b)** $G(x) = \frac{4}{3}e^{3x+2} - \frac{4}{x} + c$

c) $H(x) = \sin(\pi x - \pi) + \cos(\pi x + \pi) + c$ **d)** $K(x) = \frac{1}{8}(2x-1)^4 + c$



B
- Die Nullstellen von f sind die Extremstellen von F, da für diese gilt: $F'(x) = f(x) = 0$.
- Die Extremstellen von f sind die Wendestellen von F, da für diese gilt: $F''(x) = f'(x) = 0$.

C **a)** $f(x) = g(x) \implies x^2 - 4 = 21 \implies x_1 = -5,\ x_2 = 5$

b) $f(x) = g(x) \implies 3x^2 - 12 = 9x \implies 3x^2 - 9x - 12 = 0$

$\implies x^2 - 3x - 4 = 0$ Mitternachtsformel $\implies x_1 = -1,\ x_2 = 4$

c) $f(x) = g(x) \implies 2x^2 - 15x + 28 = -4x^2 + 21x - 20$

$\implies 6x^2 - 36x + 48 = 0 \implies x^2 - 6x + 8 = 0$ Mitternachtsformel $\implies x_1 = 2,\ x_2 = 4$

---

2 **a)** $a(20) = e^{0,04 \cdot 20 + 1,5} \approx 9,97$ $a(90) = e^{0,04 \cdot 90 + 1,5} \approx 164,02$

Die Werte geben die Beschleunigungen 20 s bzw. 90 s nach dem Start an.

b) $\int_{20}^{90} a(t)\,dt = \int_{20}^{90} e^{0,04t + 1,5}\,dt = \left[25e^{0,04t + 1,5}\right]_{20}^{90} \approx 3851,19$

Die Beschleunigungsfunktion a (t) beschreibt den Geschwindigkeitszuwachs zu jedem Zeitpunkt t. Das angegebene Integral steht also für die Geschwindigkeitszunahme zwischen $t = 20$ s und $t = 90$ s.

c) $v(t) = 25e^{0,04t + 1,5} + c$

Aus $v(0) = 0$ folgt $c = -25e^{1,5}$ $\implies v(t) = 25e^{0,04t + 1,5} - 25e^{1,5}$

d) $v(20) = 25e^{0,04 \cdot 20 + 1,5} - 25e^{1,5} \approx 137,31$ $v(90) = 25e^{0,04 \cdot 90 + 1,5} - 25e^{1,5} \approx 3988,51$

Im Diagramm werden die beiden Werte als eingeschlossene Fläche zwischen Graph und x-Achse bis zur Stelle $t = 20$ bzw. $t = 90$ veranschaulicht.

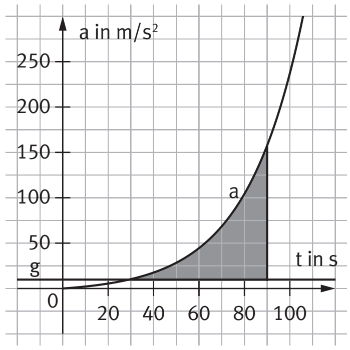
Aus dem HDI folgt, dass das Integral aus b) der Differenz der beiden Funktionswerte entspricht:

$\int_{20}^{90} a(t)\,dt = v(90) - v(20)$.

e) Es ist der Zeitpunkt t zu bestimmen, zu dem $v(t) = 500$ gilt.

$v(t) = 25e^{0,04t + 1,5} - 25e^{1,5} = 500$

$t \approx 42,45$



f) $v_g(20) = \int_0^{20} g(t)\,dt = \int_0^{20} 9,81\,dt = [9,81t]_0^{20} \approx 196,2$

$v_g(90) = \int_0^{90} g(t)\,dt = \int_0^{90} 9,81\,dt = [9,81t]_0^{90} \approx 882,9$

g) Der Graph der Funktion g(t) ist eine horizontale Gerade auf der Höhe $y = 9,81$. Der hinzugewonnene Geschwindigkeitsbetrag kann im Diagramm als Fläche zwischen den Graphen von a(t) und g(t) im Intervall [20; 90] veranschaulicht werden.

h) $\Delta v = \int_{20}^{90} [a(t) - g(t)]\,dt = \int_{20}^{90} (e^{0,04t + 1,5} - 9,81)\,dt = \left[25e^{0,04t + 1,5} - 9,81t\right]_{20}^{90} \approx 3164,49$

$\frac{3164,49}{3851,19} = 0,8217$ Die Rakete erhält aufgrund der Erdbeschleunigung etwa 17,83 % weniger Geschwindigkeit.

Aufgabe 3

Warm up

A **a)** $F(1) = 0$. F hat an dieser Stelle ein Minimum, d. h. $F'(1) = f(1) = 0$. Die Aussage ist wahr.

b) Mit dem HDI gilt: $\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = 4 - 2 = 2 \neq 4$. Die Aussage ist falsch.

c) F hat im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ einen Wendepunkt. Dort gilt: $F''(x) = f'(x) = 0$. Die Aussage ist wahr.

B **a)** $F(x) = x^3 - 7x^2 + 2x + c$

$F(2) = -10 \quad \Rightarrow c = 6 \qquad \Rightarrow F(x) = x^3 - 7x^2 + 2x + 6$

b) $F(x) = 2\,(x-3)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cos(2x) + c = 2\sqrt{x-3} - \frac{1}{2}\cos(2x) + c$

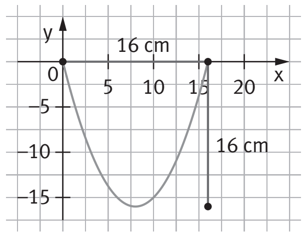
$F(7) = 0 \quad \Rightarrow c \approx -3{,}93 \quad \Rightarrow F(x) = 2\,(x-3)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cos(2x) - 3{,}93$

---

3 **a)** Die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4x$ besitzt zwei Nullstellen:

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot \left(\frac{1}{4}x - 4\right) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 16$

Die x-Achse muss also am oberen Rand, die y-Achse am linken Rand der Zeichnung eingezeichnet werden.



b) Die Länge der Regenrinne beträgt $l = 8\text{ m} = 800\text{ cm}$.

Die Querschnittsfläche erhalten wir durch das Integral $\left|\int_0^{16} f(x)\,dx\right|$.

Für das Volumen (in cm^3) gilt also:

$$V = 800 \cdot \left|\int_0^{16} f(x)\,dx\right| = 800 \cdot \left|\int_0^{16} \left(\frac{1}{4}x^2 - 4x\right) dx\right| = 800 \cdot \left(-\left[\frac{1}{12}x^3 - 2x^2\right]_0^{16}\right) = 800 \cdot 170\tfrac{2}{3} = 136\,533\tfrac{1}{3}$$

Die Regenrinne fasst maximal $136\,533\frac{1}{3}\ cm^3 \approx 136{,}53$ l Wasser.

c) Wir erhalten das gesuchte Volumen als Produkt aus der Länge der Rinne und der von $f(x)$ und der Geraden $g(x) = -7$ eingeschlossenen Fläche.

$$V = 800 \cdot \left|\int_0^{16} [f(x) - g(x)]\,dx\right| = 800 \cdot \left|\int_0^{16} \left(\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7\right) dx\right| =$$

$$800 \cdot \left(-\left[\frac{1}{12}x^3 - 2x^2 + 7x\right]_0^{16}\right) = 800 \cdot 58\tfrac{2}{3} = 46\,933\tfrac{1}{3}$$

Das in der Regenrinne stehende Wasser besitzt das Volumen $46\,933\frac{1}{3}\ cm^3 \approx 47$ l.

d) Die Funktion $g(t)$ gibt die momentan abfließende Wassermenge zum Zeitpunkt t an. Das Integral $\int_0^3 g(t)\,dt$ entspricht demnach der abgeflossenen Wassermenge in den ersten 3 Sekunden. Da die in der Regenrinne vorhandene Wassermenge das Volumen 47 Liter besitzt, beschreibt der Term $47 - \int_0^3 g(t)\,dt$, wie viel Wasser nach 3 Sekunden noch in der Rinne vorhanden ist.

e) Das meiste Wasser fließt zum Zeitpunkt $t = 0$ ab, also dann, wenn der Abfluss freigelegt wird. Da die Exponentialfunktion $g(t) = 24 \cdot e^{-0{,}5t}$ eine streng monoton fallende Funktion ist, besitzt sie ihren größten Funktionswert zu Beginn der Messung, also bei $t = 0$.

f) Die Regenrinne ist leer, wenn die gesamten 47 l Wasser abgeflossen sind. Es gilt also, folgende Gleichung zu lösen: $\int_0^t g(t)\,dt = 47$.

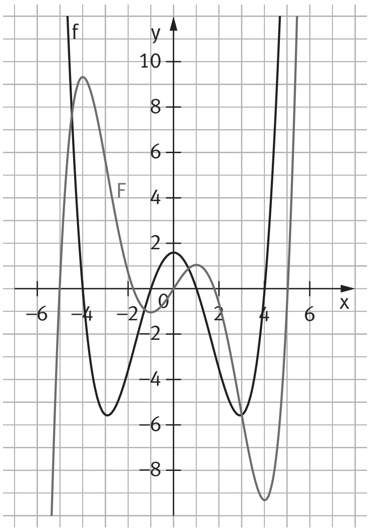
$$\int_0^t 24 \cdot e^{-0{,}5t}\,dt = \left[-48 \cdot e^{-0{,}5t}\right]_0^t = -48 \cdot e^{-0{,}5t} + 48 = 47 \qquad \Rightarrow t = -2 \cdot \ln\left(\tfrac{1}{48}\right) \approx 7{,}74$$

Nach etwa 7,74 s ist die Regenrinne wieder vollkommen leer.

1 **a)** Eine Stammfunktion F einer Funktion f ist eine Funktion, deren Ableitung f ist. Es gilt: F' (x) = f (x). Die Funktion f ist integrierbar und besitzt unendlich viele Stammfunktionen. Alle Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine Konstante c, die eine Verschiebung in y-Richtung bewirkt. Die Funktion f ist die Ableitung all dieser Funktionen, da sie als solche an jeder Stelle die Steigung der Stammfunktionen angibt. Eine Verschiebung in y-Richtung verändert die Steigung nicht, weshalb die Ableitung davon unabhängig ist.

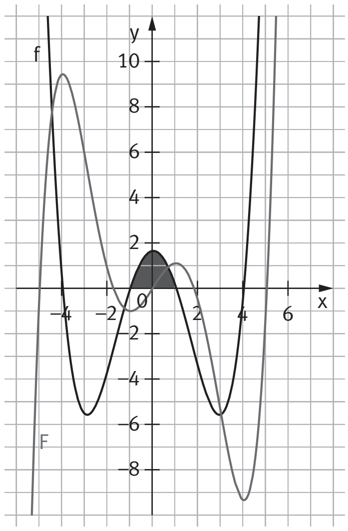
b) Für einen Extrempunkt einer Stammfunktion F muss deren Ableitung an dieser Stelle eine horizontale Tangente besitzen, d. h. es muss gelten: F' (x) = f (x) = 0. Die Nullstellen der Funktion f markieren also die Stellen, an denen die Stammfunktionen möglicherweise Extrema besitzen.
Um einen Sattelpunkt auszuschließen (für den ebenfalls F' (x) = 0 gilt), kann am Graphen von f abgelesen werden, ob eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel vorliegt. Anhand des Vorzeichenwechsels kann dann außerdem entschieden werden, ob ein Maximum (VZW von + nach –) oder ein Minimum (VZW von – nach +) vorliegt.

c)



d) $F(x) = \frac{1}{50}x^5 - \frac{17}{30}x^3 + \frac{8}{5}x + c$

e) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ beschreibt den orientierten Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall [–1; 1]. Orientiert bedeutet, dass Flächeninhalte, die oberhalb der x-Achse liegen ein positives Vorzeichen besitzen, während die unterhalb der x-Achse liegenden Flächeninhalte ein negatives Vorzeichen besitzen.
Jede Stammfunktion F von f kann zur Berechnung des Integrals herangezogen werden. Die Stammfunktionen geben für jede Stelle x die Größe des orientierten Flächeninhalts im Intervall [0; x] an.
Ist der orientierte Flächeninhalt im Intervall [a; b] gesucht, so kann dieser als Differenz zweier Werte der Stammfunktion berechnet werden: F (b) gibt den orientierten Flächeninhalt im Intervall [0; b] an, F (a) den orientierten Flächeninhalt im Intervall [0; a]. F (b) – F (a) entspricht also dem orientierten Flächeninhalt im Intervall [a; b].
Das entspricht der Aussage des HDI. Er besagt, dass das Integral über eine Funktion f im Intervall [a; b] berechnet werden kann als Differenz aus den Funktionswerten F (b) und F (a), wobei F jede Stammfunktion von f sein kann.



Es gilt also: $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Für das hier angegebene Integral bedeutet das:

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(-1) = 2\frac{8}{75}$.

f) Das Integral kann ohne den HDI bestimmt werden, indem der Flächeninhalt (näherungsweise) berechnet wird. Die Fläche wird dazu durch Rechtecke der gleichen Breite, aber unterschiedlicher Höhe möglichst vollständig ausgefüllt. Verkleinert man die Breite, so erhält man eine immer bessere Näherung für den Flächeninhalt. Eine Grenzwertbetrachtung, bei der die Breite der Rechtecke gegen null verläuft, würde schließlich wieder auf das Riemann-Integral führen.

2 a) f (1) beschreibt die Änderung des Bestandes zum Zeitpunkt t = 1 min. Aus dem Diagramm kann näherungsweise $f(1) \approx 4{,}5$ abgelesen werden. Das bedeutet, dass der Bestand 1 min nach Beginn der Aufzeichnung um 4,5 anwächst.

b) Da die Funktion f die Bestandsänderung angibt, sind die relevanten Stellen die, an denen f Extremwerte annimmt. Das Maximum findet sich im Diagramm bei etwa t = 2,4 min. Es ist vom Betrag her deutlich größer als das Minimum, also ändert sich der Bestand hier stärker. Die kleinste Bestandsänderung finden wir dort, wo sich der Bestand kaum ändert, d. h. an den Stellen, an denen die Bestandsänderung gleich null ist. Dies ist zu den Zeitpunkten t = 0 min, t = 6 min und t = 10 min der Fall.

c) Der Bestand wächst in den Zeiträumen an, in denen die Bestandsänderung positiv ist. Das ist im Intervall [0; 6] der Fall. Da er für t > 6 min wieder sinkt (f ist dann negativ), liegt der größte Bestand zum Zeitpunkt t = 6 min vor.
Um wie viel der Bestand zu- oder abnimmt, kann an der vom Graphen und der x-Achse eingeschlossenen Fläche abgelesen werden. Die für t > 6 min auftretende Abnahme des Bestands ist daher kleiner als die vorherige Zunahme. Den kleinsten auftretenden Bestandswert finden wir also nicht am Ende des betrachteten Zeitraums, sondern bereits zu Beginn zum Zeitpunkt t = 0 min.

d) Die vom Graphen und der x-Achse eingeschlossene Fläche, die den Bestandszuwachs angibt, muss im Intervall [0; 6] berechnet werden, da bei t = 6 min der größte Bestand vorliegt. Wir erhalten den Flächeninhalt durch $\int_0^6 f(t)\,dt$.
Zur Berechnung muss eine Stammfunktion F von f gefunden werden, in die die Intervallgrenzen eingesetzt werden. Die Differenz der beiden Werte, also F (6) – F (0), ist dann der gesuchte Flächeninhalt. Da dieser aber nur den Zuwachs des Bestands im Intervall [0; 6] angibt, muss der Anfangsbestand B (0) = 5 noch hinzuaddiert werden. Den größten Bestand erhält man also aus
$B(6) = B(0) + \int_0^6 f(t)\,dt.$

e) $B(6) = B(0) + \int_0^6 f(t)\,dt = 5 + \int_0^6 \left(\frac{1}{10}t^3 - 1{,}6t^2 + 6t\right) dt = 5 + \left[\frac{1}{40}t^4 - \frac{16}{30}t^3 + 3t^2\right]_0^6 = 30\frac{1}{5}$
$B(0) = 5$

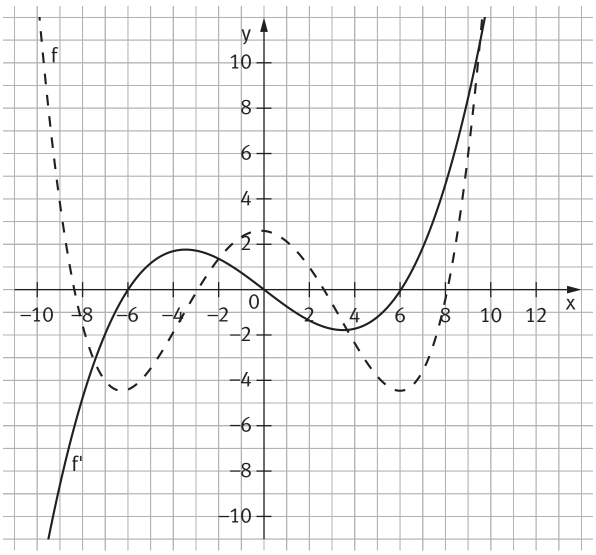
f) Der Graph könnte z. B. die Temperaturveränderung an einem Ort innerhalb von 10 Stunden veranschaulichen. Zu Beginn der Messung liegt die Temperatur dann bei 5° C (B (0) = 5), dann nimmt die Temperatur 6 h lang zu, bis sie ihren höchsten Wert erreicht, um in den nächsten 4 Stunden wieder etwas abzunehmen. Etwa 2,5 h nach Messbeginn steigt die Temperatur am stärksten, etwas mehr als 8 h nach Beginn sinkt sie am stärksten.
Er könnte auch die Geschwindigkeitsveränderung (Beschleunigung) eines Fahrrads innerhalb von 10 s beschreiben. Dann wäre der Fahrer zu Beginn 5 $\frac{km}{h}$ schnell, um dann 6 s lang schneller zu werden. Nachdem er seine höchste Geschwindigkeit bei t = 6 s erreicht hat, wird er für 4 Sekunden wieder langsamer. Bei $t \approx 2{,}5$ s beschleunigt der Fahrer am stärksten, bei $t \approx 8{,}3$ s bremst er am stärksten.

3 a) Die Funktion im rechten Diagramm gehört zu einer trigonometrischen Funktion, da sie einen periodischen Verlauf zeigt. Es handelt sich also um die Funktion G, denn ist die Stammfunktion G eine periodische Funktion, so gilt dasselbe auch für deren Ableitung g.

Die Funktion im mittleren Diagramm ist eine ganzrationale Funktion, da sie Nullstellen und Extremstellen besitzt, ohne periodisch zu sein, und ein Globalverhalten aufweist, bei dem die Werte gegen ∞ oder $-\infty$ streben. Der Graph gehört also zur Funktion F, denn die Stammfunktion der ganzrationalen Funktion f ist wieder eine ganzrationale Funktion.
Der Graph im linken Diagramm gehört demnach zur Funktion H, die eine Exponentialfunktion sein muss. Ausschließlich positive Funktionswerte, eine waagrechte Asymptote bei $y = 0$ und ein immer steiler werdender Anstieg sind Anhaltspunkte dafür. Wie bei den anderen Funktionen gilt auch hier, dass die Ableitung der gleichen Funktionenklasse angehört: Die Ableitung einer Exponentialfunktion ist wieder eine Exponentialfunktion.

b) f ist die Ableitung der Stammfunktion F und gibt an jeder Stelle deren Steigung an. f ist also dann monoton steigend (fallend), wenn die Steigung von F gleich bleibt oder größer (kleiner) wird. Der Wechsel zwischen größer und kleiner werdender Steigung tritt stets an den Wendepunkten von F (bei $x \approx -6$, $x = 0$, $x \approx 6$) auf. In den Intervallen $]-\infty; -6]$ und $[0; 6]$ ist f daher monoton fallend, da die Steigung von F in diesen Bereichen immer weiter abnimmt. In den Intervallen $[-6; 0]$ und $[6; \infty[$ ist f dagegen monoton steigend, da die Steigung von F dort immer größer wird.

c) f ist die Ableitung der Stammfunktion F und gibt an jeder Stelle deren Steigung an. Untersucht werden soll nun f auf Monotonie. Das Montoniekriterium besagt: Wenn $f' > 0$ auf $]a; b[$, dann ist f streng monoton steigend; wenn $f' < 0$ ist auf $]a; b[$, ist f streng monoton fallend. Wir betrachten also die zweite Ableitung von F, das ist f' (grüner Graph). Dieser liegt in den Intervallen $]-\infty; -6]$ und $[0; 6]$ unterhalb der x-Achse, f ist dort daher monoton fallend (da die Steigung von F in diesen Bereichen immer weiter abnimmt). In den Intervallen $[-6; 0]$ und $[6; \infty[$ liegt der Graph von f' oberhalb der x-Achse, dort ist f also monoton steigend (, da die Steigung von F dort immer größer wird).



d) F besitzt im Intervall $[5; 10]$ bei $x \approx 8{,}2$ ein Minimum. Da F dort keine Steigung besitzt, muss $f(8{,}2) = 0$ gelten, also besitzt f dort eine Nullstelle.

e) Für eine Extremstelle der Funktion f muss gelten: $f'(x) = 0$. F ist eine Funktion 5. Grades (fünf einfache Nullstellen), deswegen muss f eine Funktion 4. Grades und f' eine Funktion 3. Grades sein. f' hat damit drei Nullstellen und f drei Extremstellen.

f) Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ gibt den orientierten Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse im Intervall $[a; b]$ an. Liegt der eingeschlossene Flächeninhalt oberhalb der x-Achse, ist er positiv, liegt er unterhalb, so ist er negativ.
Da das Integral den Wert null annehmen soll, muss der Flächenanteil über der x-Achse im gewählten Intervall genauso groß sein, wie der Flächenanteil unter der x-Achse. Dies ist z. B. in den Intervallen $[-5; 5]$ und $[-10; 10]$ der Fall.

Man kann aber auch mithilfe des HDI argumentieren. Da $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ist, müssen für a und b lediglich zwei Stellen gefunden werden, an denen die Stammfunktion F den gleichen Funktionswert besitzt.

g) Die Funktion g muss aufgeleitet werden, um die Funktionsgleichung von G zu erhalten. Die Stammfunktion von sin(x) ist –cos(x). Der konstante Faktor –2,5 bleibt nach der Faktorregel unverändert erhalten. Da die innere Funktion $\pi x - 3$ beim Ableiten als innere Ableitung zusätzlich den konstanten Faktor π liefert, muss der Faktor $\frac{1}{\pi}$ ergänzt werden. Es gilt also:

$G(x) = -2{,}5 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot [-\cos(\pi x - 3)] + c = \frac{2{,}5}{\pi}\cos(\pi x - 3) + c.$

h) Der Graph der Funktion g1 ist im Vergleich zu g um 1 nach oben verschoben. Die Funktionswerte, die g_1 annimmt, sind also alle um 1 größer als die Funktionswerte von g. Da g an jeder Stelle die Steigung ihrer Stammfunktion G angibt, kann G nicht gleichzeitig auch Stammfunktion von g_1 sein, denn g_1 würde für jede Stelle andere (um 1 größere) Werte für die Steigung von G liefern.

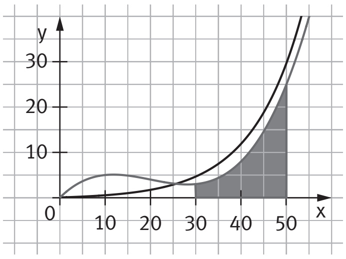
4 a) f (10) gibt die Geschwindigkeit des Autos zum Zeitpunkt x = 10 s an. f' (20) ist die Änderung der Funktion f an der Stelle x = 20 s. Die Änderung der Geschwindigkeit entspricht der Beschleunigung, also ist f' (20) die Beschleunigung des Autos 20 s nach dem Start.

$\int_0^{36} f(x)\,dx$ ist der vom Graph und der x-Achse eingeschlossene orientierte Flächeninhalt im Intervall [0 s; 36 s]. Dies entspricht dem zurückgelegten Weg des Autos bis zum Zeitpunkt t = 36 s.

b) Durch Anlegen einer Tangente und abschätzen ihrer Steigung erhält man einen Wert von $f'(20) \approx -0{,}2$. Im Sachzusammenhang bedeutet das, dass die Beschleunigung des Autos –0,2 beträgt. Es bremst zu diesem Zeitpunkt also ab.

c) Der Term F (50) – F (30) entspricht nach dem HDI dem Integral

$\int_{30}^{50} f(x)\,dx.$



Beides beschreibt die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossene Fläche im Intervall [30; 50]. Im Sachzusammenhang ist dies der vom Auto zurückgelegte Weg von t = 30 s bis t = 50 s.

d) Den zurückgelegten Weg erhalten wir durch das Integral über f. Der Weg zur Autobahn ist:

$\int_0^{36} f(x)\,dx = \int_0^{36} 0{,}001x^3 - 0{,}06x^2 + x\,dx = \left[\frac{1}{4000}x^4 - \frac{2}{100}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^{36} = 134{,}78.$

Die Autobahn ist somit etwa 135 m vom Startplatz des Autos entfernt.

e) Das Auto beschleunigt gegen Ende des Ausschnitts am stärksten, weil die Geschwindigkeit dort am schnellsten zunimmt. Doch selbst dann schafft das Auto nur eine Geschwindigkeitszunahme von etwa $40\,\frac{m}{s} - 25\,\frac{m}{s} = 15\,\frac{m}{s}$ im Intervall [50; 55]. Das Auto ist also kein Sportwagen, wie er beschrieben wurde.

f) Da beide Funktionen f und g die Geschwindigkeiten der Autos angeben, beschreiben die Integrale über diese Funktionen den von ihnen zurückgelegten Weg. Das Integral über die Differenz der beiden Geschwindigkeiten entspricht dann dem Vorsprung, die ein Auto vor dem anderen hat, bzw. der Entfernung, die beide Autos voneinander haben, denn es gilt:

$\int_0^{55} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^{55} f(x)\,dx - \int_0^{55} g(x)\,dx.$

Das angegebene Integral berechnet diesen Abstand zum Zeitpunkt t = 55 s.

g) Beim Überholvorgang sind beide Autos zur gleichen Zeit gleichauf, das heißt, sie haben dann die gleiche Strecke zurückgelegt. Für das den Abstand beschreibende Integral muss dann gelten:

$\int_0^{t} [f(x) - g(x)]\,dx = 0$. Das entsprechende t, für das diese Gleichung erfüllt ist, ist gesucht.

Nach dem Bestimmen der Stammfunktion und dem Einsetzen der Grenzen erhält man eine Gleichung, die die Variable t enthält, und die nach t aufgelöst werden muss.

1 Zu den angegebenen Funktionen lassen sich keine Stammfunktionen finden. Damit soll die Notwendigkeit anderer, z. B. numerischer Verfahren zur Berechnung von Integralen, die Funktionsterme wie diese enthalten motiviert werden.

2 Individuelle Lösungen.

3 linkes Trapez: $A_1 = \frac{(0{,}24 + 0{,}18) \cdot 0{,}3}{2} = 0{,}063$
rechtes Trapez: $A_1 = \frac{(0{,}24 + 0{,}16) \cdot 0{,}3}{2} = 0{,}06$
Summe: $A_1 + A_2 = 0{,}123$

4 **a)** $\int_0^{2{,}92} g(x)\,dx = \int_0^{2{,}92} (-0{,}5x^2 + 1{,}55x)\,dx = \left[-0{,}5 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 1{,}55 \cdot \frac{1}{2}x^2\right]_0^{2{,}92} = 2{,}458445\overline{3}$
b) Mit a = 0 und b = 2,92 erhält man:
$A = \frac{2{,}92}{6} \cdot [g(0) + 4 \cdot g(1{,}46) + g(2{,}92)] = 2{,}458445\overline{3}$.
Die Näherungsformel liefert denselben Wert wie die exakte Rechnung in Teil **a)**.

5 Berechnung mit dem HDI:
$\int_0^2 (x^3 - 2x + 3)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2 + 3x\right]_0^2 = 6$
Berechnung mit der Kepler'schen Fassregel (a = 0, b = 2):
$A = \frac{2}{6} \cdot [f(0) + 4 \cdot f(1) + f(2)] = \frac{1}{3} \cdot [3 + 4 \cdot 2 + 7] = \frac{18}{3} = 6$
Die Näherungsformel liefert denselben Wert wie die exakte Rechnung mit dem HDI.

6 **a)** $A = \frac{2}{6} \cdot [f(2) + 4 \cdot f(3) + f(4)] = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{29} + \frac{1}{66}\right] \approx 0{,}0844$
b) $A = \frac{2}{6} \cdot [f(1) + 4 \cdot f(2) + f(3)] = \frac{1}{3} \cdot \left[2e + 4e^2 + \frac{2}{3}e^3\right] \approx 16{,}1277$
c) $A = \frac{2}{6} \cdot [f(-1) + 4 \cdot f(0) + f(1)] = \frac{1}{3} \cdot [e + 4 \cdot 1 + e] \approx 3{,}1455$

7 Berechnung des Integrals mit der Kepler'schen Fassregel:
$A = \frac{1}{6} \cdot [f(0) + 4 \cdot f(0{,}5) + f(1)] = \frac{1}{6} \cdot [4 + 4 \cdot 3{,}2 + 2] = 3{,}1\overline{3}$